UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS

"COMPARACIÓN DE TÉCNICAS ESTADÍSTICAS CLÁSICAS Y EL MÉTODO BOOTSTRAP USADAS EN SIMULACIÓN"

AUTOR: ROSMARY ANDREINA BRICEÑO VELÁSQUEZ

TUTOR: HERBERT HOEGER

Mérida - Venezuela

Enero 2006

AGRADECIMIENTOS

- A mi tutor Herbert Hoeger, por ser excelente guía y por brindar su colaboración en la realización de este proyecto de investigación.
- Al Dr. Javier Portela, por el aporte y la ayuda brindada.
- A ustedes, por compartir los buenos y malos momentos.

RESUMEN

En el siguiente trabajo de investigación se presenta información detallada referente a la técnica que usa el método Bootstrap para generar variables aleatorias. Este método fue desarrollado por Efron en 1979. Es una técnica de remuestreo que facilita los cálculos que no se pueden hacer con fórmulas simples (es decir, por medio de las técnicas estadísticas clásicas) teniendo como herramienta importante la ayuda del computador. Consiste básicamente en sustituir la distribución teórica por la muestral y estudiar las propiedades del estimador remuestreando esa nueva población en las mismas condiciones en que se obtuvo la muestra original.

En este trabajo se implementó la técnica de Bootstrap suavizado y las técnicas estadísticas clásicas para generar variables aleatorias continuas. Se estudiaron los datos obtenidos a través del software estadístico SPSS, en donde se utilizó la prueba de Kolmogorov-Smirnov para analizar los datos y se construyeron histogramas con los datos de las muestras de cada una de las variables aleatorias generadas utilizando ambos métodos.

Por ultimo, se realizaron simulaciones con ambos métodos y se hicieron comparaciones de las simulaciones que usan las técnicas estadísticas clásicas con las simulaciones que usan el método Bootstrap.

ÍNDICE DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la inferencia estadística basada en el remuestreo de los datos observados de una muestra aleatoria ha sido de gran interés, dedicación y de estudio. Un aspecto importante en el proceso de inferencia estadística es conocer el comportamiento de alguna función de los datos con el propósito de estudiar las características de algún estimador, construir intervalos de confianza, realizar pruebas de hipótesis y muchos otros problemas estadísticos y probabilísticos.

En las distribuciones estadísticas clásicas, la distribución de muestreo del estadístico de interés es dependiente de los supuestos distribucionales que dan lugar a los datos que se tengan y de la forma funcional de dicho estadístico.

En los métodos de remuestreo no es necesario hacer supuestos sobre la distribución que da lugar a los datos. Uno de estos métodos es el Bootstrap, que fue desarrollado por Efron en 1979 para facilitar los cálculos que no se pueden hacer con formulas simples, teniendo como herramienta importante la ayuda del computador. Consiste básicamente en sustituir la distribución teórica por la muestral y estudiar las propiedades del estimador remuestreando esa nueva población. Este método es el que va a ser utilizado en este trabajo de investigación.

En este trabajo de investigación se quiere utilizar el método Bootstrap para hacer estimaciones de densidades, se quiere conocer cuáles son las técnicas que usa este método para generar variables aleatorias para luego compararlas con las técnicas estadísticas clásicas.

Este trabajo de investigación se presenta estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo I, se presenta la definición del problema y los objetivos que éste proyecto presenta, tanto generales como específicos.

En el capítulo II, se presenta de forma detallada las distribuciones de probabilidades continuas, las cuales van a ser utilizadas como técnicas estadísticas clásicas para generar las variables aleatorias.

En el capítulo III, se explica detalladamente cómo trabaja el método de remuestreo Bootstrap.

En el capítulo IV, se presenta la técnica que usa el método Bootstrap para generar variables aleatorias. Esta técnica se va a implementar junto con las técnicas estadísticas clásicas para generar variables aleatorias en un lenguaje de programación. Se van a comparar los datos obtenidos de las variables aleatorias generadas mediante ambos métodos, haciendo pruebas de bondad de ajuste utilizando un software estadístico, así se podrá ver cómo se comporta cada método.

En el capítulo V, se van a realizar simulaciones con ambos métodos, con el fin de hacer comparaciones entre ellas.

Finalmente, se realizarán las conclusiones y recomendaciones sobre este trabajo de investigación. Se proporcionarán las referencias bibliográficas utilizadas y un glosario de términos empleados.

CAPITULO I

I DEFINICIÓN DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DEL PROYECTO.

I.1 Definición del Problema

Conseguir cuáles son las técnicas que usa el método Bootstrap para generar variables aleatorias y luego compararlas con las técnicas estadísticas clásicas usando algunos ejemplos.

I.2 Objetivos del Proyecto

I.2.1 Objetivo General.

- Investigación bibliográfica y vía Internet acerca de cómo trabaja el Método Bootstrap sobre Estimaciones de Densidades usadas en Simulaciones.

I.2.2 Objetivos Específicos.

- Buscar cómo se hacen las estimaciones de densidades en Simulaciones a través de las Técnicas Estadísticas Clásicas y a través del Método Bootstrap.
- Realizar aplicaciones de ambos métodos (Técnicas Estadísticas Clásicas y Bootstrap).
- Comparación entre las simulaciones que usan las técnicas clásicas con las simulaciones que usan Bootstrap con el fin de establecer los pros y contras del Bootstrap.

CAPITULO II

II DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES

Las distribuciones de probabilidades son modelos teóricos que describen la forma en que varían los resultados de un experimento aleatorio. Estas distribuciones de probabilidades se clasifican como continuas y discretas. En la distribución de probabilidad discreta está permitido tomar sólo un número limitado de valores. En una distribución de probabilidad continua, la variable que se está considerando puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado [1].

Una distribución de probabilidad es un mecanismo que nos ayuda a obtener las probabilidades de los valores de una variable si es discreta, o las probabilidades de intervalos de la variable si es continua. Si la variable aleatoria es discreta es posible asignar probabilidades a cada uno de los valores puntuales de la variable. En cambio, cuando es continua cada uno de los infinitos valores posibles tendrá probabilidad cero y sólo los intervalos no vacíos tendrán probabilidad nula.

En este capítulo se van a utilizar sólo las distribuciones continuas.

II.1 Variables Aleatorias Continuas [2]

Una variable aleatoria se construye al atribuir un número (positivo, negativo o cero) a cada uno de los sucesos aleatorios que forman el espacio muestral de un experimento aleatorio.

Hay variables aleatorias que pueden tomar cualquier valor de un intervalo real de la forma (a, b), (a, $+\infty$), ($-\infty$, b), ($-\infty$, $+\infty$) o uniones de ellos. Cuando las variables son de este tipo, éstas son denominadas Variables Aleatorias Continuas.

Como en las variables aleatorias continuas hay infinitos valores posibles de la variable, con estas condiciones no es posible deducir la probabilidad de un valor puntual de la variable, pero sí es posible calcular la probabilidad acumulada hasta un cierto valor (función de distribución), luego se podrá analizar cómo cambia la probabilidad acumulada en cada punto (densidad de probabilidad).

Por ejemplo: Pretendemos observar la altura de un grupo de personas y vamos a seleccionar a una persona de forma totalmente aleatoria. La probabilidad de que la altura de la persona seleccionada sea exactamente 1,62894635 metros es cero. Pero la probabilidad de que la altura de esa persona esté entre 1,62 m y 1,63 m tendrá un valor concreto y casi con certeza será mayor que la probabilidad de que la altura esté entre 2,10 m y 2,11 m. Por tanto, la densidad de probabilidad en el entorno de 1,625 m es mayor que la densidad de probabilidad en el entorno de 2,105 m. Sin embargo, que el valor exacto de 1,62894635 m tenga probabilidad cero de ocurrir no implica que sea imposible que ocurra. De hecho, cualquier persona que seleccionemos tendrá una altura concreta y exacta, que seguramente tenía probabilidad cero de suceder.

II.1.1 Función de Densidad.

Una función $y = f(x)$ es una función de densidad de una variable aleatoria continua si cumple las siguientes condiciones:

- Es positiva en todo su dominio: $0 \leq f(x) \leq 1$
- Permite obtener p(a $\leq$ X $\leq$ b) como área bajo la gráfica entre *x=a* y *x=b*.

  Verifica la forma *p(a* $\leq$ *X* $\leq$ *b)* = $\int_a^b f(t)dt$
- El área total entre la gráfica de *f* y el eje *X* vale 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$
- Permite obtener *F(x)* como área bajo la gráfica hasta el valor *x*.

II.1.2 Función de Distribución.

La función de distribución de una variable aleatoria continua *X* es el modelo teórico de la curva de frecuencias acumuladas que se espera obtener para *X*, y debe cumplir estas propiedades:

- Ser creciente
- Tomar valores de 0 a 1

Si *X* es una variable aleatoria continua con valores en un intervalo $[-a, \infty]$, entonces *F(x)* será la probabilidad de que la variable *X* tome valores entre *a* y *x*. *F(x)=P(a*$\leq$*X* $\leq$*x)*.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<a \\ \int_a^x f(t)dt & si\ a\le x\le b \\ 1 & si\ x>b \end{cases}$$

$$F(x)=p(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)$$

la probabilidad $P(X=x_0)=0$, siendo x_0 un valor cualquiera de $[a,b]$

II.2 Distribuciones de Probabilidades para Variables Aleatorias Continuas

II.2.1 Distribución Normal.

Fue introducida por Carl Friedrich Gauss a principios del siglo XIX en su estudio de los errores de medida. Desde entonces se ha usado como modelo en un gran número de variables (peso, altura, calificaciones...), en cuya distribución los valores más usuales se agrupan en torno a un valor central (la media) y los valores extremos son escasos [3].

Es el modelo de distribuciones de probabilidades más importante y de mayor aplicación para variables continuas.

Una variable aleatoria sigue una distribución normal [5] de media μ y desviación típica σ y se denota $X \sim N(\mu,0)$ si toma valores en toda la recta real, según la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(II.1)}$$

Donde $\begin{cases} x \in \Re \\ \sigma > 0 \end{cases}$

Donde μ y σ coinciden respectivamente con la media y la desviación típica de la variable aleatoria. Estos parámetros son los que determinan esta distribución que designaremos por $N(\mu, \sigma)$.

Propiedades de la $N(\mu,\sigma)$ [4]

1) Tiene una única moda, que coincide con su media y su mediana.
2) La curva normal es asintótica al eje de abscisas. Por eso, cualquier valor es teóricamente posible.
3) Es simétrica con respecto a su media.

Un caso particular de la distribución normal, es la Distribución Normal Estándar, y esto sucede cuando μ = 0 y σ = 1. En este caso la función de densidad será la siguiente.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{(II.2)}$$

Donde $\begin{cases} x \in \Re \\ \sigma > 0 \end{cases}$

La función de distribución sólo puede describirse como:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad \text{(II.3)}$$

Su media y su varianza se denotan como:

$$E[X]=\mu\,; \qquad Var[X]=\sigma^2 \qquad \text{(II.4)}$$

La forma de la función de densidad es la llamada campana de Gauss.

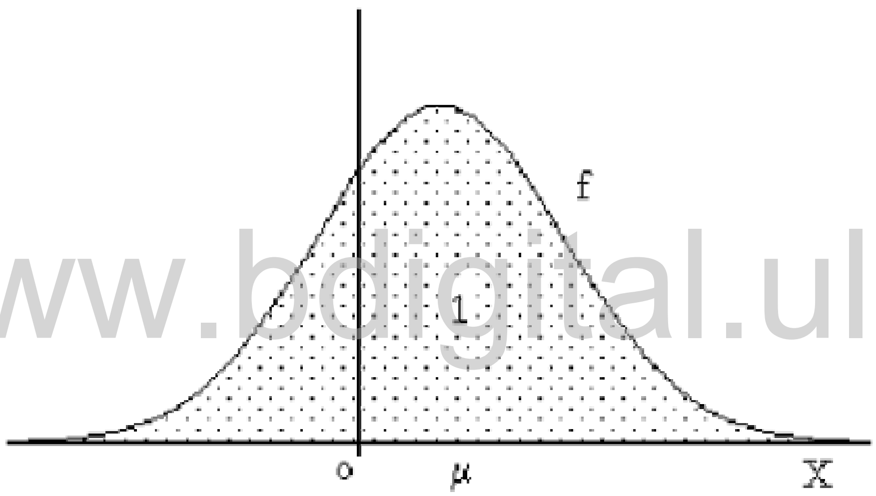


Figura II.1 Campana de Gauss

La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros μ y σ^2 :

μ indica la posición del máximo de la campana.

σ^2 (o equivalentemente, σ) será el parámetro de dispersión. Cuanto menor sea, mayor cantidad de masa de probabilidad habrá concentrada alrededor de la media (grafo de *f* muy apuntado cerca de μ) y cuanto mayor sea “más aplastado” será.

II.2.2 Distribución Chi-cuadrado χ^2 de Pearson, χ_n^2 [5]

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son *n* variables aleatorias independientes con distribución *N(0,1)*, entonces

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2 \qquad \text{(II.5)}$$

sigue una distribución chi-cuadrado con *n* grados de libertad, Y ~ χ_n^2.

Su media y su varianza se denotan como:

$$E[Y] = n; \qquad Var[X] = 2n. \qquad \text{(II.6)}$$

Su función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \frac{x^{(v-2)/2} e^{-x/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \qquad 0 \le x < \infty \qquad \text{(II.7)}$$

Para su representación gráfica [4] se tiene que no es simétrica y solo toma valores para *x > 0*.

II.2.3 Distribución Exponencial.

Las distribuciones exponenciales usualmente se utilizan como modelos para representar tiempos de funcionamiento o tiempos de espera. Esta distribución servirá para modelizar procesos aleatorios en los cuales se está interesado en conocer el tiempo que pasa desde un momento To, hasta que ocurre un determinado evento en To+Δt, suponiendo que la ocurrencia del evento en To+Δt, no depende de lo ocurrido en To [4].

Una variable aleatoria *X* sigue la distribución exponencial [5] de parámetro $\lambda > 0$ y se denota *X ~ Exp(*λ*)* si toma valores positivos. Su función de densidad y función de distribución se presentan a continuación

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si....x > 0 \\ 0 & si....x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{(II.8)}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si....x > 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si....x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(II.9)}$$

La esperanza y varianza de un proceso exponencial es la siguiente

$$E(x) = \alpha_1 = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{(II.10)}$$

$$V(x) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = E(x^2) - (E(x))^2;\;\; E(x^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad \text{(II.11)}$$

II.2.4 Distribución Erlang.

La distribución Erlang, en estadística y simulación, es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros *a* y *m* cuyos valores son positivos, *a > 0* y *m* entero positivo. Su función de densidad y función de distribución se presentan a continuación

$$f(x) = \frac{x^{m-1} e^{-x/a}}{(m-1)!\, a^m} \qquad 0 \leq x < \infty \qquad \text{(II.12)}$$

$$F(x) = 1 - e^{-x/a}\left[\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(x/a)^i}{i!}\right] \qquad \text{(II.13)}$$

La esperanza y varianza de la distribución Erlang es la siguiente:

$$E(x) = am \qquad \text{(II.14)}$$

$$V(x) = a^2 m \qquad \text{(II.15)}$$

II.2.5 Distribución Weibull.

Una variable aleatoria *X* sigue la distribución Weibull de parámetros *a* y *b* si toma valores positivos, *a*>0 y *b*>0. Su función de densidad y función de distribución se presentan a continuación:

$$f(x) = \frac{bx^{b-1}}{a^b} e^{-(x/a)^b}, \quad 0 \leq x < \infty \qquad \text{(II.16)}$$

$$F(x) = 1 - e^{-(x/a)^b} \qquad \text{(II.17)}$$

La esperanza y varianza de la distribución weibull es la siguiente:

$$E(x)\frac{a}{b}\Gamma(1/b) \qquad \text{(II.18)}$$

$$V(x) = \frac{a^2}{b^2}\left\{2b\Gamma(2/b) - [\Gamma(1/b)]^2\right\} \qquad \text{(II.19)}$$

CAPITULO III

III MÉTODO BOOTSTRAP

El Bootstrap es un nuevo método estadístico creado para facilitar los cálculos que no se pueden hacer con fórmulas simples (por medio de las técnicas estadísticas clásicas) teniendo como herramienta importante la ayuda del computador.

Este método fue introducido por B. Efron en 1979. Consiste básicamente en sustituir la distribución teórica por la muestral y estudiar las propiedades del estimador remuestreando esa nueva población en las mismas condiciones en que se obtuvo la muestra original [9](Efron y Tibshirani 1978).

Es decir, se tiene un conjunto de muestra aleatoria (el cual se trabaja con reemplazo) de tamaño n, en donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ son los valores observados de dicha muestra. Muestreando aleatoriamente n veces con reemplazo de la muestra original $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se obtienen las muestras Bootstrap las cuales están denotadas por $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ y el objetivo es obtener un número grande *B* de estas muestras Bootstrap el cual se denota $x^{1*}, x^{2*}, ..., x^{B*}$. Para cada una de estas *B* muestras se calculan sus respectivas estimaciones, y con esto se obtienen *B* estimaciones diferentes. Para esto se tiene que escoger un parámetro a estimar θ (en la mayoría de los casos se escoge la media o mediana), lo que indica que si se tiene que $\hat{\theta}(x)$ es un estimador de la muestra original *x*, entonces $\hat{\theta}(x^{*b})$ es el estimador correspondiente a la *b*-ésima muestra Bootstrap.

Las ideas claves del Bootstrap son [7]:

(1) remuestrear n observaciones con reemplazo de la muestra original y

(2) pensar de estos conjuntos de observaciones Bootstrap como datos "nuevos" que son representativos de la distribución de probabilidad fundamental que generó el dato original.

III.1 Estimación Bootstrap

Para construir el método de estimación Bootstrap es necesario seguir los siguientes pasos [8]:

1. Construir una distribución de probabilidad empírica $\hat{F}(X)$ a partir de la muestra, asignando una probabilidad de 1/*n* (siendo *n* el tamaño de la muestra) a cada punto $x_1, x_2, ..., x_n$. Esta es la función de distribución empírica $\hat{F}$ de X_i la cual es el estimador no paramétrico de máxima verosimilitud de la función de distribución de la población *F(X)*.

2. A partir de la Función de Distribución Empírica $\hat{F}(X)$, se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño *n* con reposición. Esta es la denominada "remuestra" representada de la siguiente manera x_b^*.

3. Se calcula el estadístico de interés $\hat{\theta}$ para cada una de las muestras Bootstrap, a partir de la remuestra obtenida, dando así $\hat{\theta}_b^*$. (donde *b=1,2,…,B*)
4. Se repiten los pasos 2 y 3 *B* veces, donde *B* es un número grande que representa la cantidad de remuestras hechas. La magnitud de *B* en la práctica depende de las pruebas que se van aplicar a los datos. En general, *B* debería ser de entre 50 a 200 para estimar el error estándar de $\hat{\theta}$, y al menos de 1000 para estimar intervalos de confianza en un punto o alrededor de $\hat{\theta}$.
5. Construir una distribución de probabilidad a partir de los *B* $\hat{\theta}_b^*$ asignando una probabilidad de 1/*B* a cada punto $(\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, ..., \hat{\theta}_B^*)$. Esta distribución es la estimación Bootstrap de la distribución muestral de $\hat{\theta} : \hat{F}^*(\hat{\theta}^*)$. Esta distribución puede usarse para hacer inferencias sobre θ.

El estimador Bootstrap del parámetro θ se define como:

$$\hat{\theta}^* = \frac{\sum_{b=1}^{B} \hat{\theta}_b^*}{B} \qquad \text{(III.1)}$$

La meta del Bootstrap es reemplazar derivaciones analíticas difíciles y que no siempre son factibles, con simulaciones de cálculos simples. El remuestreo

Bootstrap proporciona una estructura fácil de aplicar en muchas situaciones, ya que el análisis que se hace es exclusivamente de manejo de datos.

Para que el procedimiento Bootstrap tenga validez, estos puntos de datos disponibles tienen que ser idénticamente distribuidos e independientes.

III.2 Función de Distribución Empírica

La función de distribución empírica $\hat{F}$ es un estimador no-paramétrico de máxima verosimilitud de la función de distribución de la población *F*. La $\hat{F}$ se define como la distribución discreta que asigna probabilidad 1/*n* sobre cada valor x_i, *i=1,2,…,n*. Cuando los datos se repiten, la asignación será la cantidad de veces que se repiten (#) por 1/*n*. La Función de Distribución Empírica ($\hat{F}$), es una estimación simple de la Distribución *F* completa.

La Función de Distribución Empírica de *X* para una muestra de tamaño *n*, se define como

$$\hat{F}_n(X) = \frac{\#(X \leq x)}{n} \qquad \forall x \in R \qquad \text{(III.2)}$$

<u>Ejemplo</u>: En la siguiente tabla se puede apreciar una muestra aleatoria de 100 registros obtenidos en el lanzamiento de un dado común [9].

6	3	2	4	6	6	6	5	3	6	2	2	6	2	3	1	5	1
6	6	4	1	5	3	6	6	4	1	4	2	5	6	6	5	5	3
6	2	6	6	1	4	1	5	6	1	6	3	3	2	2	2	5	2
2	4	1	4	5	6	6	6	2	2	4	6	1	2	2	2	5	1
5	3	5	4	2	1	4	6	6	5	6	4	6	4	3	6	4	1
4	5	4	4	2	3	2	1	4	6								

Tabla III.1 Número de Registros Obtenidos en el Lanzamiento de un Dado.

Donde x_1 = 6, x_2 = 3, x_3 = 2,..., x_{100} = 6. Los resultados 1, 2, 3, 4, 5, 6 ocurrieron 13, 19, 10, 17, 14, 27 veces respectivamente. La Función de Distribución Empírica $\hat{F}$ asigna probabilidad 1/100 sobre cada uno de los 100 resultados; entonces la Función de Distribución Empírica $\hat{F}$ para éste caso es:

$$\hat{F} \rightarrow (.13, .19, .10, .17, .14, .27) \qquad \text{(III.3)}$$

En casos como éste, donde existen valores repetidos, $\hat{F}$ se puede expresar como un vector de frecuencias observadas f_k donde *k* = 1, 2, 3, 4, 5, 6, es decir,

$$\hat{f}_k = \# \{Xi = k\} / n \qquad \text{(III.4)}$$

En resumen, una Función de Distribución Empírica es una lista de valores tomados de la muestra $x = (x_1, x_2, ..., x_i)$ junto con la proporción de veces que cada valor ocurre.

II.3 **Bootstrapping** [10]

Bootstrapping es una técnica para estimar intervalos de confianza de estimadores estadísticos sin hacer supuestos sobre la distribución que da lugar a los datos.

La apreciación global que esto presenta generalmente es la siguiente:

- Si se asume que una variable aleatoria *X* o el estadístico tienen una distribución particular de la población, se puede estudiar cómo se comporta un estimador estadístico calculado de las muestras.

  No siempre se conoce cómo está distribuida una variable o un estadístico en la población. Por ejemplo, puede haber un estadístico para el cual el error estándar no ha sido formulado. Otro ejemplo también podría ser el impacto de los datos perdidos en una distribución, ya que no se podría saber cómo los datos perdidos difieren de los datos observados.

- Asuma que se tiene una muestra de tamaño *n* para la cual se requieren errores estándar más confiables para nuestras estimaciones, y para esto el Bootstrap proporciona una solución:
  - Toma varias muestras nuevas de la muestra original y calcula el estadístico para cada tiempo.
  - Calcula la media y su error estándar de la distribución empírica de las muestras Bootstrap, es decir, el error estándar se encuentra basándose en el muestreo de la muestra original.

- Se aplican los principios de inferencia, que son similares a los que se emplean para muestrear la población. “La población es a la muestra como la muestra lo es a las muestras Bootstrap”.

III.4 Bootstrap Paramétrico [11]

Existe una manera precisa de estimar la distribución muestral y la varianza de $\hat{\theta}$ en el ajuste paramétrico. Se extraen *B* muestras de tamaño *n* de la función de densidad $f_{\hat{\theta}}(x)$, y se calcula el estimador de máxima verosimilitud de θ para cada una de las muestras. La varianza muestral de éstos *B* valores estima la varianza muestral de $\hat{\theta}$. Este proceso es llamado el Bootstrap paramétrico. La única diferencia con el Bootstrap no paramétrico es que las muestras son extraídas de una estimación paramétrica de la población en lugar de ser de una estimación no paramétrica $\hat{F}$ [9]. En otras palabras, el Bootstrap paramétrico asume que $F_x(X)$ es conocida, excepto, por uno o más parámetros desconocidos designados con la letra Ψ. A menudo estas estimaciones se realizan por el método de máxima verosimilitud, pero también se pueden utilizar otras estimaciones [11]. En el Bootstrap paramétrico es necesario especificar cómo debe ser conducido el remuestreo.

III.5 Bootstrap No-Paramétrico [9]

En el Bootstrap no-paramétrico no se hace ninguna asunción sobre los parámetros de la población (incluyendo su forma). La población $F_x(x)$ es aproximada por la distribución empírica (FDE) de los valores observados. Cada muestra Bootstrap no-paramétrica incluye puntos de los datos que aparecen más de una vez, mientras otros no aparecen en absoluto.

Asuma que se tiene un conjunto de *n* medidas aleatorias de alguna característica de una población (por ejemplo el peso de *n* bebes recién nacidos) y se desea estimar algún parámetro de la población (por ejemplo la media del peso de nacimiento). La teoría Bootstrap procede a construir la distribución $\hat{f}$, generando *n* muestras aleatorias (con reemplazo) de $\hat{f}$ y calculando el estadístico de interés de la muestra generada. Esto se repite un número grande de veces hasta que se obtiene una distribución estable del estadístico de interés. Ésta es, entonces, la distribución de incertidumbre.

Algorítmicamente:

1) Recoja el conjunto de datos de la muestra de tamaño *n*, $x = \{x_1,...,x_n\}$.
2) Obtenga *B* muestras Bootstrap $\{x_1*,...,x_n*\}$ donde cada x_i* es una muestra aleatoria (con reemplazo) de $\{x_1,...,x_n\}$ de tamaño *n*.
3) Para cada muestra Bootstrap $\{x_1*,...,x_n*\}$ calcular el estadístico requerido $\hat{\theta}$. La distribución de estas *B* estimaciones de θ representa la estimación Bootstrap de incertidumbre sobre el valor verdadero de θ.

III.6 Principales Ventajas Del Método Bootstrap

El método Bootstrap posee diferentes ventajas sobre los métodos tradicionales encontrados en los libros de estadística, éstas son las siguientes [9]:

1. Cuando el Bootstrap es usado de manera no-paramétrica, éste suministra respuestas más aproximadas que las fórmulas que aparecen en los textos y también puede suministrar respuestas para aquellos problemas en donde ni siquiera existen fórmulas, además lo hace de una manera rápida y eficaz gracias al uso de la computadora.
2. El método Bootstrap capta la distribución empírica a partir de los datos de la muestra, es decir, no se utiliza una aproximación asintótica.
3. Las fórmulas teóricas, como se aprecia en los libros de estadística, son complejas. Resulta más sencillo las estimaciones obtenidas mediante el método Bootstrap.
4. Un problema añadido se presenta cuando los datos son dependientes. Tal y como señala Biewen, M (2002): los métodos Bootstrap tienen en cuenta la dependencia temporal de las variables sin necesidad de determinar su estructura de covarianzas.

III.7 Explicación del por qué del uso del Método Bootstrap y cuándo se debería usar [9]

El Bootstrap permite al analista determinar la exactitud de los datos en procedimientos estadísticos complicados, explotando la energía y la rapidez de la computadora. El uso del Bootstrap evita que el analista tenga que hacer cálculos matemáticos complicados y, en algunos casos, proporciona respuestas matemáticas que no son fácilmente obtenidas por vía tradicional. El Bootstrap puede ser usado tanto en forma paramétrica como en forma no paramétrica. Cuando se utiliza en forma no paramétrica se evitan hipótesis erróneas y parámetros indebidos acerca de la forma de la población subyacente.

Cuando se utiliza en forma paramétrica, puede proporcionar más exactitud en las estimaciones de error que los métodos tradicionales.

El Bootstrap es una forma de inferencia estadística que se puede usar, en lugar de los métodos tradicionales, en caso de que el modelo que se tiene es muy extenso o complicado y por esta razón el analista de datos no tiene la capacidad para trabajar con ellos.

El método Bootstrap es otra forma de simulación, esto es debido a que para hacer la aproximación de las cantidades Bootstrap, ya sea en el caso de muestreo con reemplazo de los datos o muestreo de un modelo paramétrico, generalmente implica cierto tipo de simulación. Lo que se quiere decir es que este método es un tipo especial de simulación que es llamado simulación basada en datos. Este método trata de estimar la población basada en los datos obtenidos en el muestreo de la población o de la misma muestra (remuestreo) mediante una simulación.

III.8 Limitaciones del Método Bootstrap [12]

1. Se necesitan bastantes datos. Las pruebas matemáticas de la exactitud de las estimaciones Bootstrap son válidas sólo con límites de muestras muy grandes. El Bootstrap puede producir buenos resultados con pocas muestras, pero no sería en todos los casos.
2. Se necesita tener un algoritmo para que no sea difícil duplicar datos. El procedimiento de muestrear con reemplazo producirá muestras donde muchos de los datos son usados más de una vez. Los promedios que se tienen sobre estos casos son buenos: los datos dobles no causan ningún problema, sin embargo hay algoritmos que para hacer ciertos cálculos se verían severamente afectados por los datos dobles, ya que sería un algoritmo que explícitamente busca datos únicos.

3. Se necesita un algoritmo cuya salida no sea controlada por un solo dato. Por ejemplo, usar el remuestreo Bootstrap para estimar el rango del máximo o mínimo de la muestra es una mala idea, ya que la mayoría de las veces cuando se remuestrea, se consigue la misma respuesta: el dato más grande en los datos remuestreados justamente es el dato más grande en la muestra. La estimación Bootstrap siempre será sesgada baja (para el máximo) o alta (para el mínimo) debido a que algunas veces la muestra Bootstrap no incluirá el dato más grande, y nunca incluirá puntos que estén sobre el dato más grande y recíprocamente para el mínimo.

4. Finalmente, el algoritmo no puede depender del orden de los datos, pues el proceso de re-muestreo rompe cualquier secuencia. Sin embargo, es posible conseguir muestrear un bloque entero de datos, y a través de esto el algoritmo puede ver el orden de cada bloque.

CAPITULO IV

IV TÉCNICAS PARA GENERAR VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS [13]

Modelar las distribuciones de entrada y generar variables aleatorias de éstas, es una tarea importante para muchos estudios de simulación.

Existen aproximaciones generales que podrían resolver la mayoría de las preguntas que surgen de las variables aleatorias en los estudios de simulación. Una aproximación es en la que se asume que, de algún modo (un conocimiento anterior, alguna suposición), se tiene especificado la densidad de la distribución de entrada. Estos algoritmos a menudo son diseñados especialmente para una distribución particular y se adaptan a las características de cada función de densidad de probabilidad. Las metas del diseño para estos métodos son los generadores rápidos y/o el código simple.

Una segunda aproximación que existe es la que puede usarse en el caso de que no se pueda, o no se quiera, especificar explícitamente la densidad de la distribución de entrada. Entonces, para estos casos, existen métodos simples para generar variables aleatorias directamente de los datos observados, es decir, de la muestra dada.

Por ejemplo, supongamos que se tiene una muestra dada $x_1,...,x_n$ de variables aleatorias IDEI. En este caso la elección de la distribución de entrada para el modelo de la simulación es un problema estadístico, el cual es llamado el modelo de las distribuciones de probabilidad de los datos. El problema puede resolverse en una aproximación paramétrica estimando los parámetros de una distribución normal conveniente o en una aproximación no-paramétrica estimando la distribución desconocida. Es aconsejable usar la aproximación no-paramétrica debido a su gran flexibilidad, a menos que haya profundas razones favoreciendo una cierta distribución normal.

No sólo se está interesado en estimar la distribución de entrada, sino además, se está interesado en estimar variables aleatorias de esa distribución. Esta tarea es llamada Generación de Variables de las Distribuciones Empíricas.

IV.1 Bootstrap Suavizado [13]

Existe un método simple para muestrear la distribución empírica que es el remuestreo ingenuo, en donde los miembros se escogen aleatoriamente de la muestra con reemplazo. Sin embargo, si la muestra que se tiene está basada en una variable aleatoria continua este método tiene el inconveniente de que sólo se puede generar un número pequeño de valores diferentes.

El Bootstrap suavizado es una modificación simple de este remuestreo. El Bootstrap suavizado [2] aproxima $F_x(x)$ como una versión suavizada de la Función de Distribución Empírica. Este método no solo hace remuestreo, sino que agrega una pequeña cantidad de ruido aleatorio a cada observación Bootstrap. Generalmente, este ruido es una variable aleatoria continua con media cero y una varianza pequeña. Lo que se quiere decir es que el Bootstrap suavizado es una técnica que usa el Bootstrap para generar variables aleatorias.

IV.1.1 Algoritmo para Generar Variables Aleatorias Continuas usando el Método Bootstrap [13]

A continuación se presenta el algoritmo que usa el método Bootstrap para generar variables aleatorias continuas:

Algoritmo.

Entrada: una muestra aleatoria $x_1, x_2, ..., x_n$.

Salida: una variable aleatoria.

0: escoger el parámetro suavizador *h*

1: generar un entero aleatorio *i* de una uniforme discreta en *n* puntos $(i = 1,...,n)$

2: generar una variable aleatoria *W* de la distribución kernel *K(x)*

3: devolver $x = x_i + hW$.

El *W* que se presenta en el punto (2) es la densidad de la distribución de ruido aleatoria y es llamada Kernel, la cual será denotada por $k(x)$. Claramente $k(x)$ debe ser una función de densidad y siempre se asume que es simétrica alrededor del origen.

En esta parte se va a trabajar con el kernel Gaussiano, es decir, se utilizará una de las funciones kernel más conocidas: la Normal de parámetros (0,1):

$$\text{Normal} \Rightarrow k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \text{(IV.1)}$$

Para la elección del parámetro suavizador h se presenta la siguiente fórmula:

$$h = \alpha(k) 1.364 \frac{\min(\hat{\sigma}, R)}{n^{1/5}} \qquad \text{(IV.2)}$$

donde la constante $\alpha(k)$ es 0.776 para la Gaussiana, $\hat{\sigma}$ denota la desviación estándar, *R* el rango intercuartílico de la muestra y *n* es el tamaño de la muestra.

Para conseguir el tamaño “óptimo” del parámetro suavizador para el Kernel Gaussiano, se puede utilizar la fórmula que se presenta en IV.2 pero de una manera más sencilla, ya que el cálculo del rango intercuartílico se hace un poco engorroso. Es por ello que esta fórmula se puede resumir utilizando directamente, como el mínimo, la desviación estándar de la muestra, esto no presentaría ningún problema, ya que los resultados no se ven afectados y de igual manera se consigue el valor “optimo” de *h*. Por lo tanto, la fórmula queda descrita de la siguiente manera:

$$h = 1.06 \frac{\hat{\sigma}}{n^{1/5}} \qquad \text{(IV.3)}$$

Esto quiere decir que las variables que se van a generar usando el método Bootstrap van a ser obtenidas a partir de la siguiente fórmula:

$$x = x_i + hNormal(0,1) \qquad \text{(IV.4)}$$

Donde *i* es un entero aleatorio que se va generar de una uniforme discreta.

IV.2 Algoritmos para Generar Variables Aleatorias Continuas usando las Técnicas Estadísticas Clásicas

A continuación se presentan algunas distribuciones de probabilidad con sus respectivos algoritmos para generar variables aleatorias continuas.

IV.2.1 Distribución de Probabilidad Normal

La *N(0,1)* es conocida como la distribución normal estándar y es el modelo de distribuciones de probabilidades de mayor aplicación para variables continuas.

Generación: [14]

Método de Box-Muller.

En este método tienen que generarse dos uniformes u_1 y u_2 (u_1 ~ *U(0,1)* y u_2 ~ *U(0,1)*), y permite calcular dos variables $N(\mu,\sigma)$ independientes usando lo siguiente:

$$x_1 = \mu + \sigma \cos(2\pi u_1)\sqrt{-2\ln(u_2)} \qquad \text{(IV.5)}$$

$$x_2 = \mu + \sigma \sin(2\pi u_1)\sqrt{-2\ln(u_2)}\ . \qquad \text{(IV.6)}$$

IV.2.2 Distribución de Probabilidad Exponencial

Esta distribución es comúnmente usada en modelos de cola, para modelar el tiempo entre eventos sucesivos.

Generación: [14]

Por transformación inversa.

En este método se tiene que generar *u ~ U(0,1)* y se retorna *Exp(a) ~ -aln(u)*, donde *a* es la media.

IV.2.3 Distribución de Probabilidad Chi-Cuadrado

Esta distribución se usa cuando se tiene una suma de cuadrados de normales estándar.

Generación: [14]

Se tiene que generar v *N(0,1)*, donde v son los grados de libertad, y se retorna la suma de sus cuadrados, $\chi^2_{(v)}$.

IV.2.4 Distribución de Probabilidad Erlang

Esta distribución usualmente se usa en modelos de cola como una extensión de la exponencial.

Generación: [14]

Por convolución.

Se tiene que generar *m U(0,1)* y se retorna:

$$\text{Erlang}(a,m) \sim -a\ln\left(\prod_{i=1}^{m} u_i\right).$$

IV.2.5 Distribución de Probabilidad Weibull

Esta distribución comúnmente es usada en análisis de confiabilidad, para modelar el tiempo de vida de un componente.

Generación: [14]

Por transformación inversa.

Se tiene que generar *u ~ U(0,1)* y se retorna $a(-\ln u)^{1/b}$ como la Weibull*(a,b)*.

IV.3 Código de los Algoritmos en el Lenguaje de Programación Pascal

En esta sección se presentan los algoritmos que se muestran en IV.1.1 y en IV.2, de manera codificada, de cada una de las distribuciones de probabilidades clásicas y del Bootstrap. Para este procedimiento de codificación se utiliza el lenguaje de programación Pascal y se presenta a continuación:

IV.3.1 Función Normal

```
function normal(m,d:real):real;
var u1,u2: real;
begin
   u1:=random; {devuelve números independientes uniformes en 0,1}
   u2:=random;
   normal := m + d*sqrt(-2*ln(u1))*cos(2*pi*u2);
   {en este caso se devuelve uno solo de los valores generables,
    el otro se descarta}
end.
```

IV.3.2 Función Exponencial

```
function exponencial(m:real):real;
var u1: real;
begin
   u1:=random;
   exponencial := -m*ln(u1);
end.
```

IV.3.3 Función Chi-Cuadrado

```
function chi2(v:integer):real;
var i:integer;
    s:real;
begin
   s:=0;
   {suma de sus cuadrados de las normales estándar}
   for i:=1 to v do s := s + potencia(normal(0,1),2);
   chi2 := s;
end.
```


Donde la función potencia está dada por:

```
function potencia(b:real;e:integer):real;
begin
   if e=1 then potencia:=b
   else potencia := b*potencia(b,e-1);
end.
```

Se podría usar también

```
function chi2(v:integer):real;
var i:integer;
    n,s:real;
begin
   s:=0;
   {suma de sus cuadrados de las normales estándar}
   for i:=1 to v do begin
     n:= normal(0,1)
     s:= s + n*n;
   end;
```

```
   chi2:= s;
end.
```

IV.3.4 Función Erlang

```
function erlang(a:real;m:integer):real;
var i: integer;
    ui: real;
begin
   ui :=1;
   for i:=1 to m do ui := ui * random;  {productoria del valor ui}
      erlang := -a *ln(ui);
end.
```

IV.3.5 Función Weibull

```
function weibull(a,b:real):real;
var u1: real;
begin
   u1:=random;
   weibull := a * (raiz(-ln(u1),b));
end.
```

Donde raíz es:

```
function raiz(x,y:real):real;
begin
   raiz := exp(ln(x)/y)
end.
```

Los códigos que se muestran en IV.3.1 - IV.3.5 son usados para generar un conjunto de muestras, para cada distribución, de las variables aleatorias respectivas. Dichas muestras obtenidas van a ser usadas como muestra de entrada del método Bootstrap.

En esta parte se presenta el procedimiento de la función Bootstrap para generar variables aleatorias; para ello se realiza un procedimiento para calcular el valor del parámetro suavizador *h* óptimo, mediante la fórmula que se muestra en IV.2, y luego se procede con la función Bootstrap, como se muestra en IV.3.6.

IV.3.6 Función Bootstrap

```
procedure calcular_H;
var i: integer;
   y, z, sum, r, xprom, temp:real;
begin
   assign(ent,arch); {asocia la variable ent con el nombre del archivo de entrada}
   reset(ent);        {abre el archivo de entrada para operación de lectura}
   Num:=0;
 while not(EOF(ent))do begin
   {se leen los datos del archivo de entrada y se almacenan en el vector}
   readln(ent,xi[Num+1]);
   Num:=Num+1;
 end;

 y:=0;
 sum:=0;
 for i:= 1 to B do begin y:= y + xi[i];
    xprom :=y/B;      {calcula la media de la muestra}
 end;

 for i:= 1 to B do begin  {estimación de la desviación de la muestra}
   {diferencia entre el valor de la muestra de la posición i
    con la media de la muestra}
```

```
    temp:= xi[i] - xprom;
    z:= sqr(temp);
    sum := sum + z;        {sumatoria del cuadrado de temp}
 end;

 temp:=(1/(B-1)) * sum;
 r:= sqrt(temp);
 temp:= raiz(B,5);         {calcula la raíz quinta del número de muestras B}
 h:= 1.06 * (r/temp);
 end;

function bootstrap(Xi,W:real):real;
begin
   bootstrap := Xi + h*W;
end;
procedure calcular_bootstrap;
var i,k:integer;
begin
   {asocia la variable sal con el nombre del archivo de salida}
   assign(sal,'boot.txt');
   {crea y abre un nuevo archivo. Si el archivo ya existe borra su contenido}
   rewrite(sal);
   for i:=1 to B do begin
        k:=trunc(1 + Num*random);
        {se guardan los datos bootstrap}
        writeln(sal,bootstrap(xi[k],normal(0,1)));
   end;
close(ent);
close(sal);
end;
begin
   calcular_bootstrap;
   calcular_H;
end.
```

Donde raíz es:

```
function raiz(x,y:real):real;
```

```
begin
   raiz := exp(ln(x)/y)
end.
```

El programa IV.3.6 también da como resultado un conjunto de muestras de las variables aleatorias generadas usando el algoritmo Bootstrap. Estas variables aleatorias obtenidas van a ser usadas para observar el comportamiento que siguen los datos de las muestras de las variables aleatorias generadas; se quiere contrastar si los datos de las muestras de las variables aleatorias generadas usando la técnica Bootstrap, siguen el mismo comportamiento de la muestra de entrada (la muestra original). Para tal propósito se puede hacer una prueba de dócima de bondad de ajuste a los datos de las muestras, y con esto ver qué distribución siguen. Se va a utilizar el software estadístico SPSS que permite llevar a cabo este procedimiento usando las pruebas de Kolmogorov-Smirnov.

IV.4 Análisis de los Datos utilizando el Software Estadístico SPSS

En esta sección se presenta un análisis a los datos obtenidos en la generación de variables aleatorias usando el método Bootstrap, con el fin de conocer cuál es el comportamiento que siguen estos datos. Para tal fin se va a trabajar con el paquete estadístico SPSS. Este paquete va a ser utilizado para hacer los análisis mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov y para hacer histogramas con los datos de las muestras.

Los histogramas que se van a presentar es con el fin de observar el comportamiento de los datos de las muestras obtenidos a través de la técnica Bootstrap y darnos una idea de la distribución que siguen dichos datos.

Se van a presentan los resultados obtenidos de cada prueba hecha a cada una de las muestras observadas. Para realizar estas pruebas se utiliza, para cada una de las variables aleatorias generadas, una muestra de tamaño 100. A continuación se presentan las tablas de los análisis de las muestras y los histogramas correspondientes a cada uno de los datos de las muestras, tanto de las distribuciones clásicas como del Bootstrap.

IV.4.1 Datos Normales – Bootstrap

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		NORMAL	BOOT
N		100	100
Parámetros normales[a,b]	Media	5,8687	5,8255
	Desviación típica	2,1823	2,3378
Diferencias más extremas	Absoluta	,067	,073
	Positiva	,067	,061
	Negativa	-,042	-,073
Z de Kolmogorov-Smirnov		,672	,727
Sig. asintót. (bilateral)		,758	,667

a. La distribución de contraste es la Normal.

b. Se han calculado a partir de los datos.

Tabla IV.1 Prueba de Kolmogorov-Smirnov para datos Normales-Bootstrap

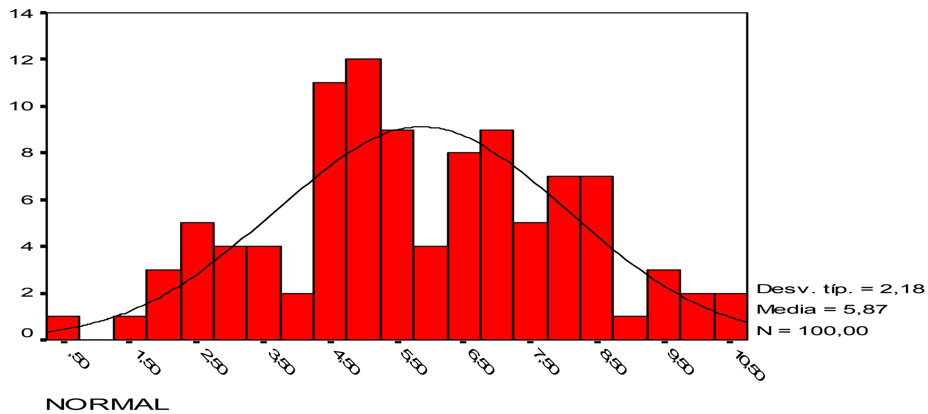


Figura IV.1 Histograma de datos Normales

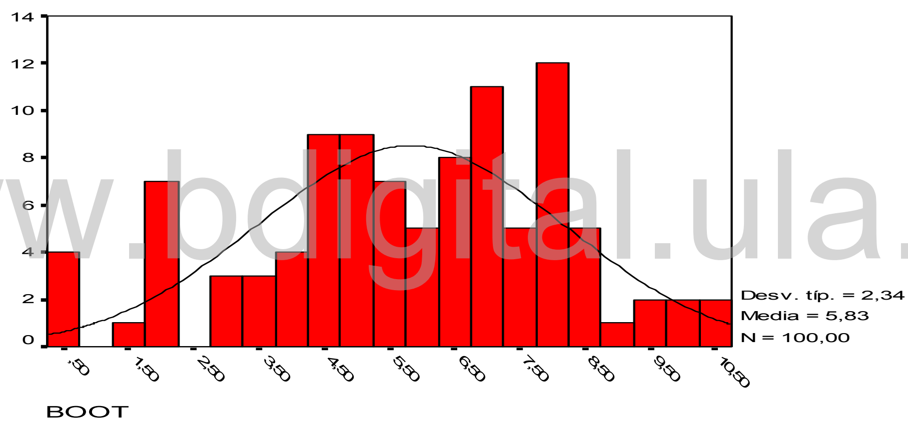


Figura IV.2 Histograma de datos Bootstrap-Nor

IV.4.2 Datos Exponenciales – Bootstrap

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		EXPO	BOOT
N		100	100
Parámetro exponencial.[a,b]	Media	2,1344	2,2651
Diferencias más extremas	Absoluta	,045	,094
	Positiva	,032	,057
	Negativa	-,045	-,094
Z de Kolmogorov-Smirnov		,451	,938
Sig. asintót. (bilateral)		,987	,342

a. La distribución de contraste es exponencial.

b. Se han calculado a partir de los datos.

Tabla IV.2 Prueba de Kolmogorov-Smirnov para datos Exponenciales-Bootstrap

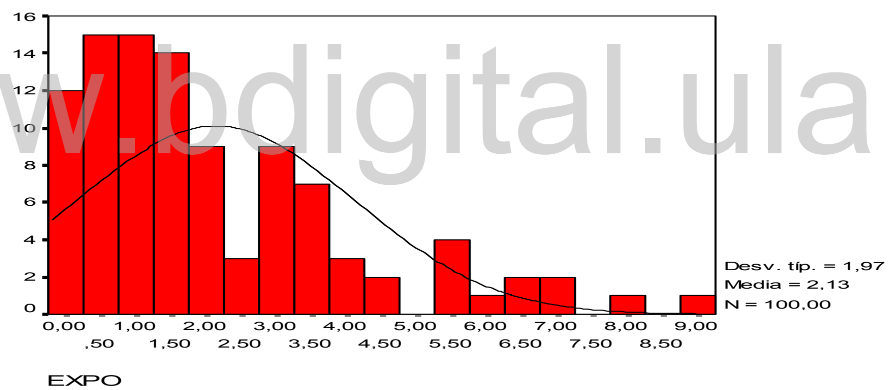


Figura IV.3 Histograma de datos Exponenciales

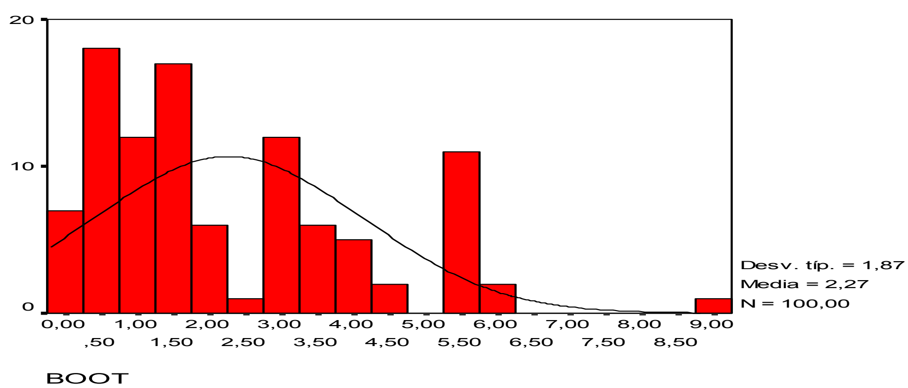


Figura IV.4 Histograma de datos Bootstrap-Exp

IV.4.3 Datos Chi-Cuadrado – Bootstrap

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		CHI	BOOT
N		100	100
Parámetro exponencial.[a,b]	Media	7,4573	7,8067
Diferencias más extremas	Absoluta	,275	,328
	Positiva	,104	,113
	Negativa	-,275	-,328
Z de Kolmogorov-Smirnov		2,755	3,278
Sig. asintót. (bilateral)		,000	,000

a. La distribución de contraste es exponencial.

b. Se han calculado a partir de los datos.

Tabla IV.3 Prueba de Kolmogorov-Smirnov para datos Chi-Cuadrado-Bootstrap

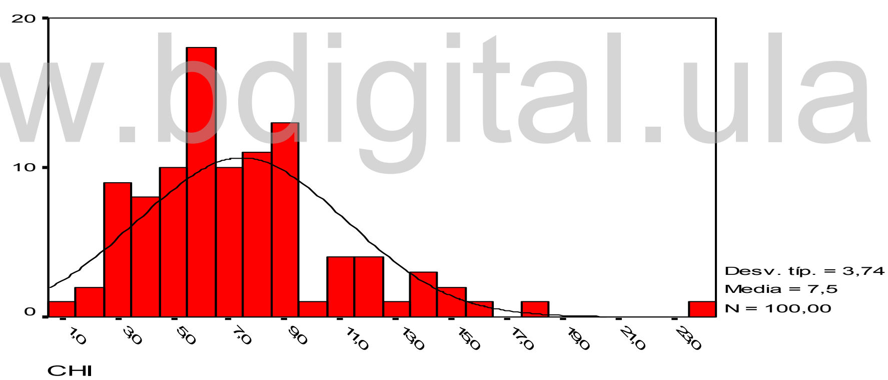


Figura IV.5 Histograma de datos Chi-cuadrado

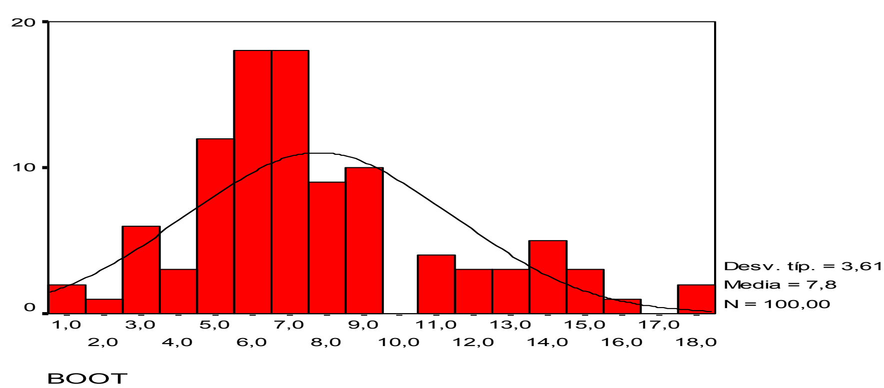


Figura IV.6 Histograma de datos Bootstrap-Chi

V.4.4 Datos Erlang – Bootstrap

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		ERLANG	BOOT
N		100	100
Parámetros normales[a,b]	Media	7,2146	6,7513
	Desviación típica	4,9558	4,6059
Diferencias más extremas	Absoluta	,126	,182
	Positiva	,126	,182
	Negativa	-,085	-,106
Z de Kolmogorov-Smirnov		1,262	1,822
Sig. asintót. (bilateral)		,083	,003

a. La distribución de contraste es la Normal.

b. Se han calculado a partir de los datos.

Tabla IV.4 Prueba de Kolmogorov-Smirnov para datos Erlang-Bootstrap

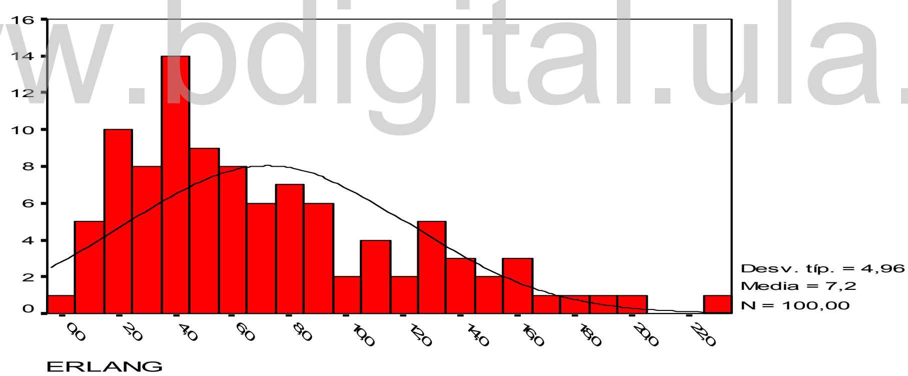


Figura IV.7 Histograma de datos Erlang

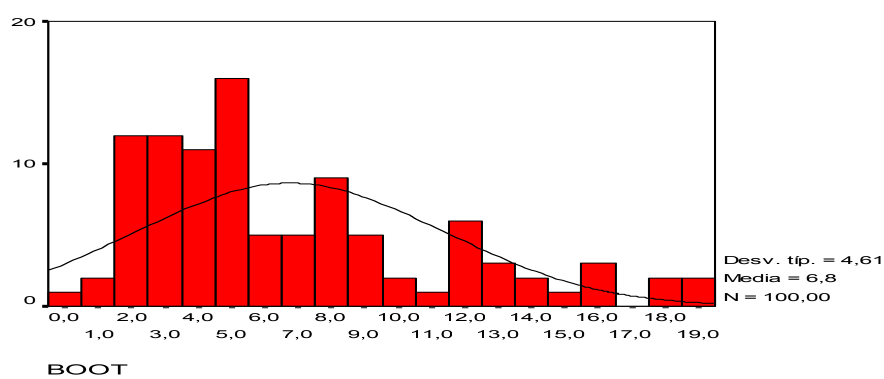


Figura IV.8 Histograma de datos Bootstrap-Erl

IV.4.5 Datos Weibull – Bootstrap

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		WEIBULL	BOOT
N		100	100
Parámetros normales[a,b]	Media	17,0746	17,3548
	Desviación típica	6,0014	5,6198
Diferencias más extremas	Absoluta	,050	,094
	Positiva	,050	,094
	Negativa	-,037	-,068
Z de Kolmogorov-Smirnov		,505	,938
Sig. asintót. (bilateral)		,961	,342

a. La distribución de contraste es la Normal.

b. Se han calculado a partir de los datos.

Tabla IV.5 Prueba de Kolmogorov-Smirnov para datos Weibull-Bootstrap

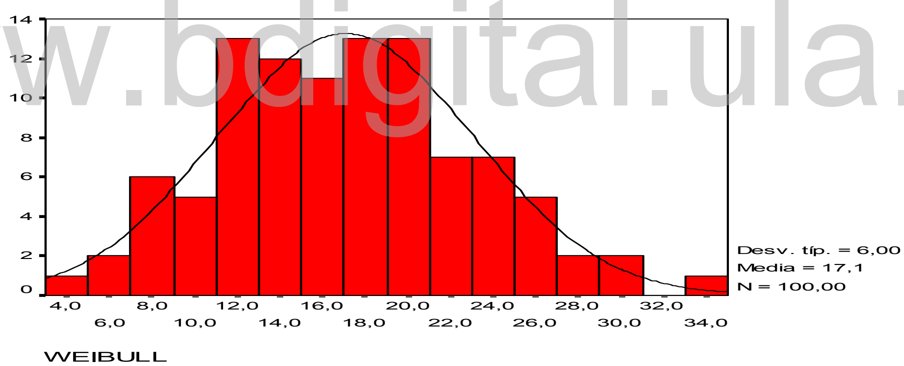


Figura IV.9 Histograma de datos Weibull

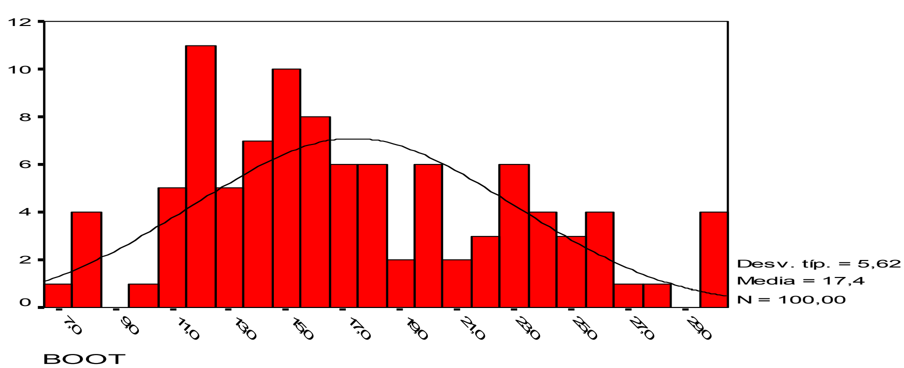


Figura IV.10 Histograma de datos Bootstrap-Wei

Luego de observar estos resultados, se puede notar que los datos de las variables aleatorias generadas por la función Bootstrap tienen un comportamiento parecido a los datos de la muestra original, es decir, a los datos de las muestras de las variables aleatorias generadas a partir de las distribuciones estadísticas clásicas. Mediante los histogramas se puede ver que los datos de las muestras Bootstrap siguen el mismo comportamiento de los datos de la muestras de las distribuciones clásicas. Lo que se quiere decir es que las muestras de las variables aleatorias Bootstrap siguen el comportamiento, cada una, como su respectiva muestra original que se le han pasado como parámetro de entrada a la función Bootstrap. Por ejemplo, cuando a la función Bootstrap se le pasa como parámetro de entrada los datos generados por la función normal, el resultado de los datos generados por la función Bootstrap sigue la forma de la distribución normal.

En las tablas de las pruebas de Kolmogorov-Smirnov también se puede observar que los valores de la media y desviación estándar de los datos de la variables aleatorias generadas usando la función Bootstrap son parecidos a los generados por las funciones clásicas.

Esto quiere decir que el método Bootstrap para generar variables aleatorias continuas se comporta de una manera adecuada, como se pudo ver en los resultados anteriores, ya que no se presentan diferencias significativas con los datos de la muestra generados de dichas variables. Esto nos indica que este método nos puede dar una gran ayuda en el caso de generar variables aleatorias continuas sin necesidad de conocer cuál es la distribución de los datos que se tienen o sin necesidad de hacer dócima de bondad de ajuste para ver qué distribución siguen dichos datos. Este método nos asegura que las variables aleatorias generadas de un conjunto de muestras son confiables, como se ha podido verificar con los resultados obtenidos en las pruebas realizadas.

IV.5 Procedimiento para Generar Variables Aleatorias con Datos que no siguen ninguna Distribución Específica

En esta sección se muestran procedimientos para generar variables aleatorias en caso de que los datos que se tienen no siguen ninguna distribución particular y por consecuencia, no se conoce la distribución que generó dichos datos.

Para esto, se van a utilizar las técnicas clásicas y la técnica Bootstrap para observar cómo se comportan los resultados respectivos y ver cómo el Bootstrap responde ante este tipo de caso en donde las técnicas clásicas no son mucha ayuda y difíciles de aplicar. Para realizar estas pruebas se sabe a qué distribución pertenecen los datos que se tienen, sin embargo, la idea es observar si se puede utilizar el método Bootstrap cuando se tengan datos extraños como los que se van a presentar y no se conozca nada sobre ellos.

IV.5.1 Procedimiento para Generar Variables Aleatorias derivadas de dos Erlang

```
procedure genera_Erlang;
var x: real;
    i: integer;
begin
  randomize;
  assign(sal,'gen_erl.txt');
  rewrite(sal);
  for i:=1 to Num do
    if random <0.5 then begin {con probabilidad de 50% genera datos Erlang con
                               parámetros (10,2)}
        x :=Erlang(10,2);
        writeln(sal,x);
    end
    else begin {con probabilidad de 50% genera datos Erlang con parámetros (30,10)}
        x:=Erlang(30,10);
        writeln(sal,x);
    end;
  close(sal);
end;
begin
  genera_Erlang;
end.
```

IV.5.2 Procedimiento para Generar Variables Aleatorias derivadas de Normales

```
procedure genera_normal;
var u1,u2,x: real;
    i: integer;
begin
  randomize;
  assign(sal,'gen_normal.txt');
  rewrite(sal);
```

```
  for i:=1 to Num do
    if random<0.5 then begin  {con probabilidad de 50% genera datos normal con
                               parámetros (10,3)}
        u1:=random;
        u2:=random;
        x:=10+3*cos(2*PI*u1)*sqrt(-2*ln(u2));
        writeln(sal,x);
    end
    else begin   {con probabilidad de 50% genera datos normal con parámetros (20,2)}
        u1:=random;
        u2:=random;
        x:=20+2*cos(2*PI*u1)*sqrt(-2*ln(u2));
        writeln(sal,x);
    end;
  close(sal);
end;
begin
genera_normal;
end.
```


IV.5.3 Procedimiento para Generar Variables Aleatorias de una Exponencial y Normal

```
procedure genera_expo_normal;
var u1,u2,x,y: real;
    i: integer;
begin
  randomize;
  assign(sal,'gen_exp_nor.txt');
  rewrite(sal);
  for i:=1 to Num do
    if random <0.5 then begin {con probabilidad de 50% genera datos exponencial
                               con parámetro (1)}
        x:=exponencial(1);
        writeln(sal,x);
    end
```

```
    else begin  {con probabilidad de 50% genera datos normal con parámetros (10,2)}
        u1:=random;
        u2:=random;
        x:=10+2*cos(2*PI*u1)*sqrt(-2*ln(u2));
        writeln(sal,x);
    end;
  close(sal);
end;
begin
genera_expo_normal;
end.
```

El procedimiento para generar variables aleatorias con Bootstrap es el mismo que se muestra en IV.3.6.

IV.6 Análisis a través de Histogramas de los Datos de las muestras obtenidas usando las Técnicas Clásicas y el Método Bootstrap

En esta sección se presentan histogramas realizados a los datos obtenidos de cada muestra, generada con ambas técnicas, con el fin de observar si dichos datos siguen alguna distribución en particular o si no se tiene idea del comportamiento que siguen los datos de la muestra obtenida, sin tener en cuenta que se especifica la distribución con la que se está trabajando.

IV.6.1 Histogramas de Datos Erlang – Erlang

Para realizar estos histogramas se tiene una muestra de tamaño 100, en donde el 50% de los datos son generados de una distribución Erlang con ciertos parámetros y el otro 50% de los datos también son generados de una Erlang pero con distintos parámetros.

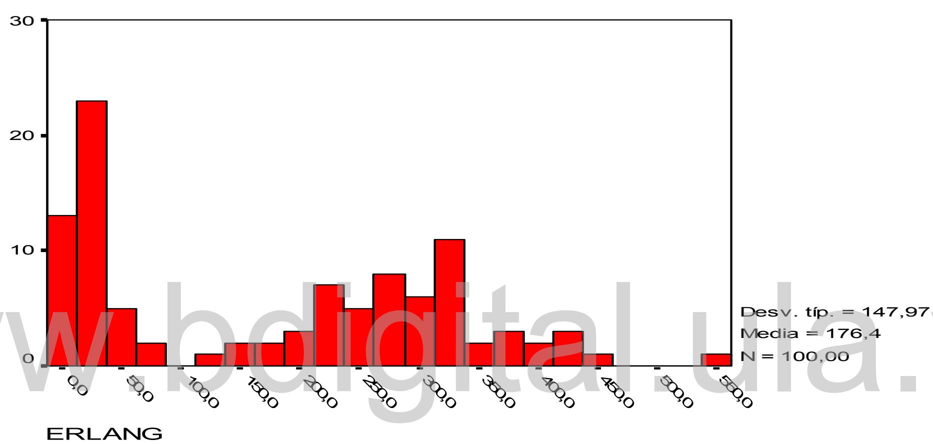


Figura IV.11 Histograma de datos Erlang-Erlang

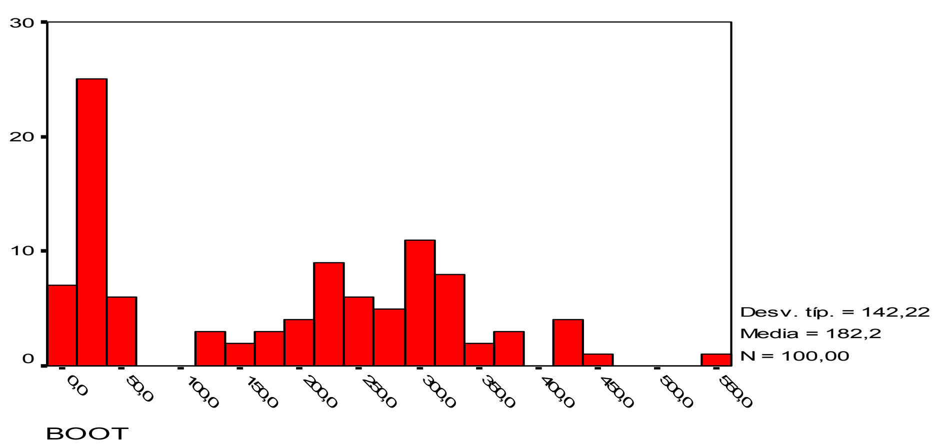


Figura IV.12 Histograma de datos Bootstrap-Erlang

IV.6.2 Histogramas de Datos Normal – Normal

Para realizar estos histogramas se tiene una muestra de tamaño 100, en donde el 50% de los datos son generados de una distribución normal con ciertos parámetros y el otro 50% de los datos también son generados de una normal pero con distintos parámetros.

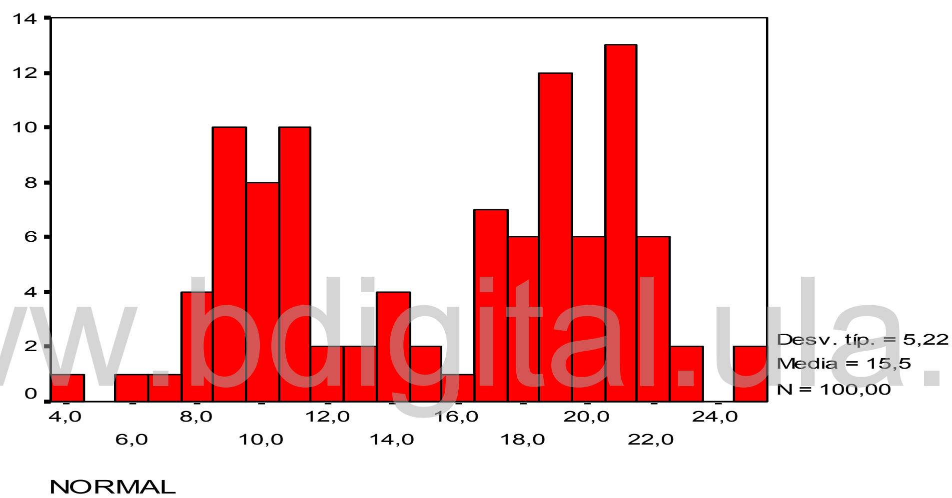


Figura IV.13 Histograma de datos Normal-Normal

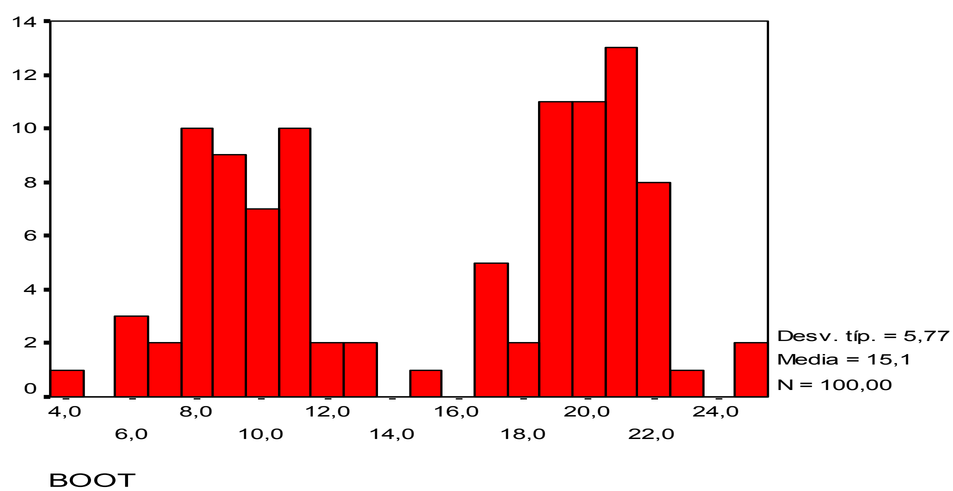


Figura IV.14 Histograma de datos Bootstrap-Normal

IV.6.3 Histogramas de Datos Exponencial – Normal

Para realizar estos histogramas se tiene una muestra de tamaño 100, en donde el 50% de los datos son generados de una distribución exponencial con cierta media y el otro 50% de los datos son generados de una normal con ciertos parámetros.

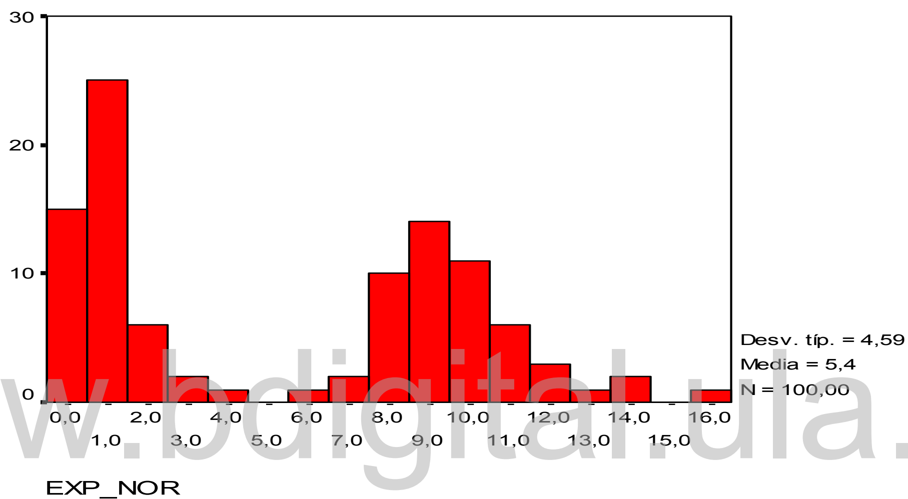


Figura IV.15 Histograma de datos Expo-Normal

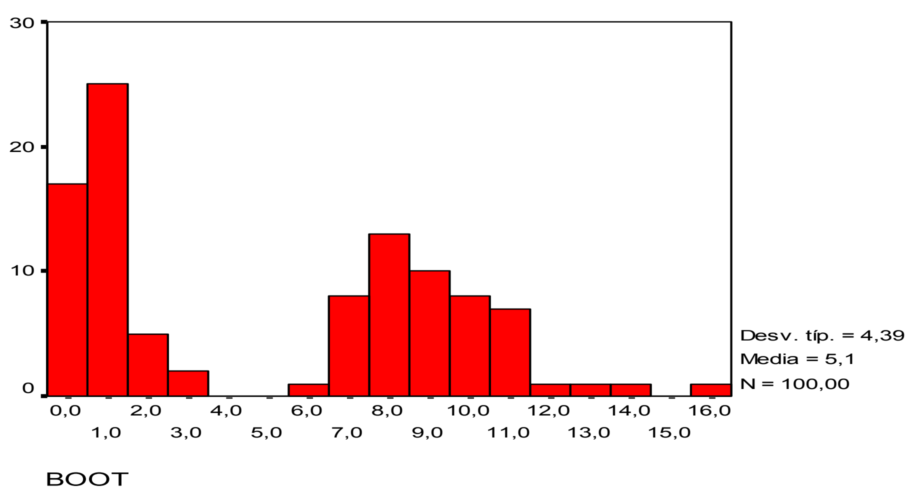


Figura IV.16 Histograma de datos Bootstrap-Exp-Normal

Luego de esta inspección visual, observar estos resultados, se puede notar que el método Bootstrap también puede ser usado para generar variables aleatorias en caso de que los datos de la muestra original que se tiene no siguen ninguna distribución específica, es decir, cuando no se tenga idea de la distribución que da lugar a los datos original.

En este caso, este método resulta ser muy útil ya que no siempre se va a tener información específica acerca de los datos de la muestra que se tiene, es por ello que el método Bootstrap es el método ideal que se presenta para estos casos, ya que para su aplicación no es necesario tener información alguna referente a la muestra original.

En el próximo capitulo se hará un análisis más formal del uso de la técnica Bootstrap cuando no se tiene certeza de la distribución que siguen los datos.

CAPITULO V

V APLICACIÓN BOOTSTRAP Y TÉCNICAS ESTADÍSTICAS CLÁSICAS EN SIMULACIONES

En la mayoría de los estudios que se realizan se hace la suposición que los datos manejados siguen una distribución específica, sin embargo, puede suceder que no se tenga la certeza sobre la forma general de dicha distribución. En el presente capítulo se muestra una manera general de cómo el método de remuestreo Bootstrap es empleado para realizar simulaciones. También se presentan simulaciones sencillas realizadas con algunas técnicas estadísticas clásicas, con el fin de hacer comparaciones de las simulaciones usando ambas técnicas y ver cómo se comporta el método Bootstrap ante las técnicas clásicas.

Para las simulaciones con la técnica Bootstrap se toma en cuenta el algoritmo planteado en el capítulo IV, ya que en él se encuentra desarrollado la forma que el método Bootstrap se utiliza para hacer estimación de densidades.

Estas simulaciones se realizan usando el lenguaje de Simulación GLIDER. Este procedimiento se presenta a lo largo de este capítulo.

V.1 Simulación con las Técnicas Estadísticas Clásicas y el Método Bootstrap

En esta parte del capítulo se ejecutan varias pruebas de simulaciones, con la ayuda del lenguaje de Simulación GLIDER, utilizando las técnicas clásicas y el método Bootstrap. Para este procedimiento se utilizan simulaciones sencillas, como un sistema de taquilla simple, donde los tiempos de llegada y de permanencia se van a ir variando, tanto con las distribuciones clásicas como con el Bootstrap. A continuación se presentan las pruebas de las simulaciones realizadas, utilizando un conjunto de 100 datos para cada una de ellas.

V.1.1 Prueba de Simulaciones de un Sistema de Taquilla Simple utilizando las Técnicas Clásicas y la Técnica Bootstrap

Los individuos llegan a ser atendidos en una taquilla [15] con intervalos de llegadas distribuidos exponencial con media TELL. Si la taquilla está ocupada forma una cola. Si son atendidos toman el recurso taquilla por un tiempo de atención tomado de una distribución Erlang con media MED y desviación DES.

Los resultados de una corrida de simulación son muestras de alguna distribución, por lo tanto pueden variar de una corrida a otra. Por lo que generalmente es aconsejable realizar varias corridas independientes para tomar varias muestras como repuestas tanto para calcular la media como la varianza (y la desviación estándar), siendo estos los parámetros que más interesan en el análisis estadístico de los experimentos de simulación. A continuación se presenta el programa GLIDER utilizando ambas técnicas con 10 réplicas para cada simulación:

```
TITLE SISTEMA SIMPLE DE TAQUILLA
NETWORK
  LLEGADA (I) :: IT := EXPO(TELL);
  TAQUILLA (R) :: STAY := ERLG(MED,DES);
  SALIDA (E) ::
INIT
  TSIM := 10000; MED := 4; DES := 2; TELL := 1;
  ACT(LLEGADA,0);
```

```
DECL VAR TELL, MED : REAL;
         DES : INTEGER;
  STATISTICS ALLNODES;
END.


TITLE SISTEMA SIMPLE DE TAQUILLA CON BOOTSTRAP
NETWORK
  LLEGADA (I) :: N:=1; BOOTS; IT:=VALOR;  {donde N=1 indica que el tiempo entre llegadas
                                           se distribuyen exponenciales}
  TAQUILLA(R) :: N:=2; BOOTS; STAY:=VALOR; {donde N=2 indica que el tiempo entre
                                            llegadas se distribuyen Erlang}
  SALIDA(E) ::

  LEE_ARC (A) VAR I: INTEGER; :: {nodo donde se leen los archivos de entrada}
    ASSIGN(ENT,'exp.txt');       {asocia la variable ent con la entrada exponencial}
    RESET(ENT);    {abre el archivo de entrada para la operación de lectura}
    N1:=0;
    FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN
      READLN(ENT,M1[N1+1]);
      N1:=N1+1;
    END;
    CLOSE(ENT);
    ASSIGN(ENT,'erl.txt');  {asocia la variable ent con la entrada Erlang}
    RESET(ENT);             {abre el archivo de entrada para la operación de lectura}
    N2:=0;
    FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN
      READLN(ENT,M2[N2+1]); {se leen los datos del archivo de entrada y se almacenan en
                             el vector}
      N2:=N2+1;
    END;
    CLOSE(ENT);

CALC_H1 (A) VAR I: INTEGER; {nodo donde se calcula el parámetro suavizador h para N=1}
                W, SUM, XPROM, TEMP1, TEMP2, TEMP3: REAL; ::
   W:= 0;
   SUM:= 0;
   FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN
     W := W + M1[I];
     XPROM := W/5000;       {calcula la media de la muestra}
   END;
   FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN   {estimación de la desviación de la muestra}
     TEMP1:= M1[I] - XPROM;
     TEMP2:= CUADRADO(TEMP1);  {diferencia entre el valor de la muestra de la posición i
                                con la media de la muestra}
     SUM:= SUM + TEMP2;        {sumatoria del cuadrado de temp}
```

```
   END;
   TEMP1:= (1/(5000-1))*SUM;
   TEMP2:= RAIZN(TEMP1,2);
   TEMP3:= RAIZN(5000,5);      {calcula la raíz quinta del número de muestras B}
   H1:= 1.06 * (TEMP2/TEMP3);

 CALC_H2 (A) VAR I: INTEGER;  {nodo donde se calcula el parámetro suavizador h para N=2}
                W, SUM, XPROM, TEMP1, TEMP2, TEMP3: REAL; ::
   W:= 0;
   SUM:= 0;
   FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN
     W := W + M2[I];
     XPROM := W/5000;         {calcula la media de la muestra}
   END;

   FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN  {estimación de la desviación de la muestra}
     TEMP1:= M2[I] - XPROM;
     TEMP2:= CUADRADO(TEMP1); {diferencia entre el valor de la muestra de la posición i
                               con la media de la muestra}
     SUM:= SUM + TEMP2;       {sumatoria del cuadrado de temp}
   END;
   TEMP1:= (1/(5000-1))*SUM;
   TEMP2:= RAIZN(TEMP1,2);
   TEMP3:= RAIZN(5000,5);     {calcula la raíz quinta del número de muestras B}
   H2:= 1.06 * (TEMP2/TEMP3);

INIT
  TSIM := 10000;
  ACT(LEE_ARC,0);
  ACT(LLEGADA,0);
DECL
  VAR N1, N2, N: INTEGER;
      M1, M2, M: ARRAY[1..10000] OF REAL;
      VALOR, H1, H2: REAL;
      ENT : TEXT;
  STATISTICS LLEGADA, TAQUILLA, SALIDA;

  PROCEDURES
   PROCEDURE BOOTS; {Procedimiento para calcular el valor Bootstrap}
    VAR I: INTEGER;
    BEGIN
      IF N=1 THEN BEGIN
        I:=TRUNC(1 + N1*UNIF(0,1)) - 1 ;
        VALOR := M1[I] + H1*NORM(0,1); {Calcula el valor Bootstrap Exponencial}
      END ELSE BEGIN
        I:=TRUNC(1 + N2*UNIF(0,1)) - 1 ;
```

```
        VALOR := M2[I] + H2*NORM(0,1); {Calcula el valor Bootstrap Erlang}
      END;
    END;

  FUNCTION RAIZN (J,I:REAL):REAL; {Función que calcula la raíz enésima}
  BEGIN RAIZN := EXP(LN(J)/I)
  END;
  FUNCTION CUADRADO(J:REAL):REAL; {Función que calcula el cuadrado de un numero}
  BEGIN CUADRADO := J*J;
  END;
  END.
```

V.1.2 Análisis de los Datos de la Simulación a través de la Teoría Clásica

Las técnicas estadísticas son usadas para analizar las salidas de las corridas de simulación. Usualmente se construyen intervalos de confianza y pruebas de hipótesis para decidir cuál es mejor respecto a cierta medida de desempeño. En esta sección se presentan unas pruebas de medias de cada simulación realizadas para comprobar qué tan significativa es la diferencia entre las medias de las simulaciones usando las técnicas clásicas y usando la técnica Bootstrap. El análisis que se presenta es realizado a las medias tomadas del tiempo en el sistema de cada simulación.

Para observar la diferencia de una media con otra, se puede determinar el intervalo de confianza (IC) al 90% y se hace la prueba de la diferencia entre las medias de las dos alternativas. A continuación se muestra un intervalo de confianza del 90% para las medias de la simulación usando las técnicas clásicas y para las medias de la simulación que usan Bootstrap. También se presenta una prueba de diferencia de medias entre las medias de las simulaciones que usan ambas técnicas:

- Intervalo de Confianza para las medias de la simulación usando las Técnicas Clásicas.

$$\text{IDC}_{90\%}:\ \overline{X}_1 - t_{0.05,9}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}} \le \mu_1 \le \overline{X}_1 + t_{0.05,9}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}} \qquad \text{(V.1)}$$

La media global de todas las réplicas, *m*=10, de la simulación con las técnicas clásicas es

$$\overline{\overline{X}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overline{X}_i \qquad \text{(V.2)}$$

$$\overline{X}_1 = 4398{,}92$$

La varianza de la media de las réplicas es

$$Var(\overline{X}) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\overline{X}_i - \overline{\overline{X}})^2 \qquad \text{(V.3)}$$

$$Var(\overline{X}) = \sigma_1^2 = 1623{,}52$$

$$\text{IDC}_{90\%}:\ \left[4398{,}92 - (1{,}8331)\sqrt{\frac{1623{,}52}{10}} \le \mu_1 \le 4398{,}92 + (1{,}8331)\sqrt{\frac{1623{,}52}{10}}\right]$$

$\text{IDC}_{90\%}$: [4375,56; 4422,28]

- Intervalo de Confianza para las medias de la simulación usando Bootstrap.

$$\text{IDC}_{90\%}: \ \overline{X}_2 - t_{0.05,9}\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n}} \le \mu_2 \le \overline{X}_2 + t_{0.05,9}\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n}} \qquad \text{(V.4)}$$

La media global de todas las réplicas, *n*=10, de la simulación con la técnica Bootstrap es

$$\overline{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_i \qquad \text{(V.5)}$$

$$\overline{X}_2 = 4377{,}39$$

La varianza de la media de las réplicas es

$$Var(\overline{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}_i - \overline{\overline{X}})^2 \qquad \text{(V.6)}$$

$$Var(\overline{X}) = \sigma_2^2 = 4967{,}7$$

$$\text{IDC}_{90\%}: \left[4377{,}39 - (1{,}8331)\sqrt{\frac{4967{,}7}{10}} \le \mu_2 \le 4377{,}39 + (1{,}8331)\sqrt{\frac{4967{,}7}{10}}\right]$$

$\text{IDC}_{90\%}$: [4302,49; 4452,29]

- Prueba de medias e intervalos de confianza de las simulaciones que usan las técnicas clásicas con las simulaciones que usan Bootstrap.

Hipótesis Nula $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Hipótesis Alternativa $H_1 : \mu_1 \ne \mu_2$

H_0 se rechaza si $|t_0| > t_{\alpha/2,v}$, es decir, si $|t_0| > t_{0.05,18}$

La estadística de prueba que se utiliza es la siguiente:

$$t_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \qquad \text{(V.7)}$$

Donde $\overline{X}_1 =$ 4398,92. $\overline{X}_2 =$ 4377,39. $\sigma_1^2 =$ 1623,52. $\sigma_2^2 =$ 4967,7. m=n=10.

Por lo tanto, se tiene que

$$t_0 = 0{,}8387$$

Se especifica que α = 0.10, entonces, a partir de las tablas de estadísticas, se obtendrá $t_{0.05,18} =$ 1,7341.

Ya que se tiene $|t_0| =$ 0,8387 < 1,7341, no se puede rechazar H_0. Lo que indica, que se puede decir que no hay evidencia estadística para indicar una diferencia significativa entre las medias de las simulaciones usando Bootstrap con respecto a las simulaciones que usan las técnicas clásicas.

Un intervalo de confianza del 90% para la diferencia entre las medias se muestra a continuación

IDC: $\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm t_{0.05,18} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_1^2}{n}} \right]$

$$\left[4398{,}92 - 4377{,}39 - (1{,}8331) * 25{,}67 \le \mu_1 - \mu_2 \le 4398{,}92 - 4377{,}39 + (1{,}8331) * 25{,}67\right]$$

IDC $_{90\%}$ = $\left[-25{,}53 \le \mu_1 - \mu_2 \le 68{,}59\right]$

Este intervalo de confianza que se tiene de la diferencia entre las medias incluye el cero. Esto indica, expresado de otra manera, que las dos medias no tienen una diferencia significativa.

V.2 Comparación de las Simulaciones que usan las Técnicas Estadísticas Clásicas con las Simulaciones que usan Bootstrap

Las simulaciones realizadas con el método Bootstrap arrojan resultados similares a los resultados de las simulaciones realizadas con las técnicas clásicas. La diferencia que se presenta en los resultados de un método con respecto al otro es poco significativa. Esto se puede notar observando las medias de los resultados de cada una de las corridas hechas con ambos métodos, ya que a través de estos datos se hizo una prueba de medias para comprobar si hay o no alguna evidencia estadística para decir que los resultados de las simulaciones con las técnicas clásicas presentan una diferencia significativa con respecto a los resultados de las simulaciones con la técnica Bootstrap. Gracias al análisis que se le hizo a los datos a través de la teoría clásica, se pudo verificar que el método Bootstrap trabaja adecuadamente.

V.3 Simulación con las Técnicas Estadísticas Clásicas y el Método Bootstrap utilizando Datos que no siguen una Distribución Específica

En esta sección se pretende conocer si el método Bootstrap funciona bien para ser utilizado en simulaciones en caso de que los datos que se tienen no siguen alguna distribución específica o ésta sea difícil de determinar. Para ello, se van a realizar simulaciones utilizando tanto las técnicas clásicas como la técnica Bootstrap y así comparar dichos resultados para poder concluir si el método Bootstrap también puede ser utilizado de manera segura en este caso particular. Además, este caso es de gran interés ya que en realidad un problema estadístico se presentaría cuando se tienen datos totalmente extraños que no vienen distribuidos de manera específica para nosotros y por esta causa se hace complicado o imposible aplicar las técnicas clásicas.

V.3.1 Prueba de Simulaciones de un Sistema de Taquilla Simple utilizando Tiempos de Permanencia tomados de varias Distribuciones Erlang

Usaremos un modelo similar al anterior pero en este caso los tiempos de atención serán tomados de una distribución hibrida: Erlang de parámetros (10,2) o Erlang de parámetros (30,10) con una probabilidad 0.5 para cada caso.

El programa GLIDER utilizando ambas técnicas se presenta a continuación:

```
TITLE TAQUILLA CON DISTRIBUCIONES ERLANG
NETWORK
LLEGADA(I) :: IT:= EXPO(5);
              IF BER(0.5) THEN TP:=ERLG(10,2) ELSE TP:= ERLG(30,10);
TAQUILA (R) :: STAY := TP;
SALIDA (E) ::
INIT
  TSIM := 10000;
  ACT(LLEGADA,0);
DECL
 VAR RESUL: REAL;
 MESSAGES LLEGADA(TP:REAL);
 STATISTICS ALLNODES;
END.

TITLE TAQUILLA CON DISTRIBUCIONES ERLANG USANDO BOOTSTRAP
```

```
NETWORK
  LLEGADA (I) :: N:=1; BOOTS; IT:=VALOR;  {donde N=1 indica que el tiempo entre llegadas
                                           se distribuye exponencial}
  TAQUILLA(R) :: N:=2; BOOTS; STAY:=VALOR; {donde N=2 indica que el tiempo entre
                                            llegadas es de la distribución hibrida}
  SALIDA(E) ::
  LEE_ARC (A) VAR I: INTEGER; :: {nodo donde se leen los archivos de entrada}
    ASSIGN(ENT,'exp.txt');       {asocia la variable ent con la entrada exponencial}
    RESET(ENT);    {abre el archivo de entrada para la operación de lectura}
    N1:=0;
    FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN
      READLN(ENT,M1[N1+1]);
      N1:=N1+1;
    END;
    CLOSE(ENT);
    ASSIGN(ENT,'gen_erl.txt');  {asocia la variable ent con la entrada Erlang}
    RESET(ENT);             {abre el archivo de entrada para la operación de lectura}
    N2:=0;
    FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN
      READLN(ENT,M2[N2+1]); {se leen los datos del archivo de entrada y se almacenan en
                             el vector}
      N2:=N2+1;
    END;
    CLOSE(ENT);

CALC_H1 (A) VAR I: INTEGER; {nodo donde se calcula el parámetro suavizador h para N=1}
                W, SUM, XPROM, TEMP1, TEMP2, TEMP3: REAL; ::
   W:= 0;
   SUM:= 0;
   FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN
     W := W + M1[I];
     XPROM := W/5000;       {calcula la media de la muestra}
   END;
   FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN   {estimación de la desviación de la muestra}
     TEMP1:= M1[I] - XPROM;
     TEMP2:= CUADRADO(TEMP1);  {diferencia entre el valor de la muestra de la posición i
                                con la media de la muestra}
     SUM:= SUM + TEMP2;        {sumatoria del cuadrado de temp}
   END;
   TEMP1:= (1/(5000-1))*SUM;
   TEMP2:= RAIZN(TEMP1,2);
   TEMP3:= RAIZN(5000,5);      {calcula la raíz quinta del número de muestras B}
   H1:= 1.06 * (TEMP2/TEMP3);

 CALC_H2 (A) VAR I: INTEGER;  {nodo donde se calcula el parámetro suavizador h para N=2}
                W, SUM, XPROM, TEMP1, TEMP2, TEMP3: REAL; ::
```

```
   W:= 0;
   SUM:= 0;
   FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN
     W := W + M2[I];
     XPROM := W/5000;         {calcula la media de la muestra}
   END;

   FOR I:=1 TO 5000 DO BEGIN  {estimación de la desviación de la muestra}
     TEMP1:= M2[I] - XPROM;
     TEMP2:= CUADRADO(TEMP1); {diferencia entre el valor de la muestra de la posición i
                               con la media de la muestra}
     SUM:= SUM + TEMP2;       {sumatoria del cuadrado de temp}
   END;
   TEMP1:= (1/(5000-1))*SUM;
   TEMP2:= RAIZN(TEMP1,2);
   TEMP3:= RAIZN(5000,5);     {calcula la raíz quinta del número de muestras B}
   H2:= 1.06 * (TEMP2/TEMP3);
INIT
  TSIM := 10000;
  ACT(LEE_ARC,0);
  ACT(LLEGADA,0);
DECL
  VAR N1, N2, N: INTEGER;
      M1, M2, M: ARRAY[1..10000] OF REAL;
      VALOR, H1, H2: REAL;
      ENT : TEXT;
  STATISTICS LLEGADA, TAQUILLA, SALIDA;

  PROCEDURES
   PROCEDURE BOOTS; {Procedimiento para calcular el valor Bootstrap}
    VAR I: INTEGER;
    BEGIN
      IF N=1 THEN BEGIN
        I:=TRUNC(1 + N1*UNIF(0,1)) - 1 ;
        VALOR := M1[I] + H1*NORM(0,1); {Calcula el valor Bootstrap Exponencial}
      END ELSE BEGIN
        I:=TRUNC(1 + N2*UNIF(0,1)) - 1 ;
        {Calcula el valor Bootstrap es de la distribución hibrida}
        VALOR := M2[I] + H2*NORM(0,1);
      END;
    END;
   FUNCTION RAIZN (J,I:REAL):REAL; {Función que calcula la raíz enésima}
   BEGIN RAIZN := EXP(LN(J)/I)
   END;
   FUNCTION CUADRADO(J:REAL):REAL; {Función que calcula el cuadrado de un numero}
   BEGIN CUADRADO := J*J;
```

```
END;
END.
```

V.3.1.1 Análisis de los Datos de la Simulación a través de la Teoría Clásica cuando los datos no siguen una Distribución Específica

- Intervalo de Confianza para las medias de la Simulación usando las Técnicas Clásicas.

La media global de todas las réplicas, *m*=10, de la simulación con las técnicas clásicas es

$$\overline{X}_1 = 4638{,}11$$

La varianza de la media de las réplicas es

$$Var(\overline{X}) = \sigma_1^2 = 190374{,}71$$

IDC $_{90\%}$: [4385,19; 4891,03]

- Intervalo de Confianza para las medias de la simulación usando Bootstrap

La media global de todas las réplicas, *n*=10, de la simulación con la técnica Bootstrap es

$$\overline{X}_2 = 4500{,}15$$

La varianza de la media de las réplicas es

$$Var(\overline{X}_2) = \sigma_2^2 = 181318{,}86$$

IDC $_{90\%}$: [4422,08; 4578,22]

- Prueba de medias e intervalos de confianza de las simulaciones que usan las técnicas clásicas con las simulaciones que usan Bootstrap.

Hipótesis Nula $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Hipótesis Alternativa $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

H_0 se rechaza si $|t_0| > t_{\alpha/2,v}$, es decir, si $|t_0| > t_{0.05,18}$

La estadística de prueba que se utiliza es la siguiente:

$$t_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}$$

donde $\overline{X}_1 =$ 4638,11 $\overline{X}_2 =$ 4500,15 $\sigma_1^2 =$ 190374,71 $\sigma_2^2 =$ 181318,86 m=n=10.

Por lo tanto, se tiene que

$$t_0 = 0{,}716$$

Se especifica que α = 0.10, entonces, a partir de las tablas de estadísticas, se obtendrá $t_{0.05,18} =$ 1,7341.

Ya que se tiene $|t_0| =$ 0,716 < 1,7341, no se puede rechazar H_0. Lo que indica, que se puede decir que no hay evidencia estadística de una diferencia significativa entre las medias de las simulaciones usando Bootstrap con respecto a las simulaciones que usan las técnicas clásicas.

Un intervalo de confianza del 90% para la diferencia entre las medias se muestra a continuación:

IDC: $\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm t_{0.05,18} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_1^2}{n}} \right]$

IDC $_{90\%}$ = $\left[-196{,}36 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 472{,}28 \right]$

Este intervalo de confianza que se tiene de la diferencia entre las medias incluye el cero. Esto indica, expresado de otra manera, que las dos medias no tienen una diferencia significativa.

V.3.2 Prueba de Simulaciones de un Sistema de Taquilla Simple utilizando Tiempos de Permanencia tomados de varias Distribuciones Normales

Seguimos con el mismo ejemplo, pero ahora los tiempos de atención provienen de la distribución híbrida: normal de parámetros (10,3) o de una distribución normal de parámetros (20,2) con una probabilidad 0.5 cada una.

El programa GLIDER utilizando ambas técnicas se presenta a continuación:

```
TITLE TAQUILLA CON DISTRIBUCIONES NORMAL
NETWORK
LLEGADA(I) :: IT:= EXPO(5);
              IF BER(0.5) THEN TP:=NORM(10,3) ELSE TP:= NORM(20,2);
TAQUILA (R) :: STAY := TP;
SALIDA (E) ::
INIT
  TSIM := 10000;
  ACT(LLEGADA,0);
DECL
 VAR RESUL: REAL;
```

```
 MESSAGES LLEGADA(TP:REAL);
 STATISTICS ALLNODES;
END.
```

El progama en GLIDER usando Bootstrap es el mismo que se presenta en V.3.1 pero con las muestras respectivas a este.

V.3.2.1 Análisis de los Datos de la Simulación a través de la Teoría Clásica cuando los datos no siguen una Distribución Específica (Normal)

- Intervalo de Confianza para las medias de la Simulación usando las Técnicas Clásicas.

La media global de todas las réplicas, *m*=10, de la simulación con las técnicas clásicas es

$$\overline{X}_1 = 3363,45$$

La varianza de la media de las réplicas es

$$Var(\overline{X}) = \sigma_1^2 = 8608,24$$

IDC $_{90\%}$: [3309,67; 3417,23]

- Intervalo de Confianza para las medias de la Simulación usando Bootstrap.

La media global de todas las réplicas, *n*=10, de la simulación con la técnica Bootstrap es

$$\overline{X}_2 = 3267{,}28$$

La varianza de la media de las réplicas es

$$Var(\overline{X}_2) = \sigma_2^2 = 33458{,}20$$

IDC $_{90\%}$: [3160,98; 3373,31]

- Prueba de medias e intervalos de confianza de las simulaciones que usan las técnicas clásicas con las simulaciones que usan Bootstrap.

Hipótesis Nula $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Hipótesis Alternativa $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

H_0 se rechaza si $|t_0| > t_{\alpha/2,v}$, es decir, si $|t_0| > t_{0.05,18}$

La estadística de prueba que se utiliza es la siguiente:

$$t_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$$

donde $\overline{X}_1 = 3363{,}45$ $\overline{X}_2 = 3267{,}28$ $\sigma_1^2 = 8608{,}24$ $\sigma_2^2 = 33458{,}20$ m=n=10.

Por lo tanto, se tiene que

$$t_0 = 1{,}483$$

Se especifica que α = 0.10, entonces, a partir de las tablas de estadísticas, se obtendrá $t_{0.05,18} = 1{,}7341$.

Ya que se tiene $|t_0| = 1{,}483 < 1{,}7341$, no se puede rechazar H_0. Lo que indica, que se puede decir que no hay evidencia estadística de una diferencia significativa entre las medias de las simulaciones usando Bootstrap con respecto a las simulaciones que usan las técnicas clásicas.

Un intervalo de confianza del 90% para la diferencia entre las medias se muestra a continuación:

IDC: $\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm t_{0.05,18} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_1^2}{n}} \right]$

IDC $_{90\%}$ = $\left[-16{,}3 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 208{,}64 \right]$

Este intervalo de confianza que se tiene de la diferencia entre las medias incluye el cero. Esto indica, expresado de otra manera, que las dos medias no tienen una diferencia significativa.

V.3.3 Prueba de Simulaciones de un Sistema de Taquilla Simple utilizando Tiempos de Permanencia tomados de Distribuciones Exponencial – Normal

En este caso usa una distribución híbrida para los tiempos de atención dada por exponencial de parámetro (1) o normal de parámetros (10,2) con una probabilidad de 0.5 cada uno.

El programa GLIDER utilizando ambas técnicas se presenta a continuación:

```
TITLE TAQUILLA CON DISTRIBUCIONES EXPO_NOR
NETWORK
LLEGADA(I) :: IT:= EXPO(2);
              IF BER(0.5) THEN TP:=EXPO(1) ELSE TP:= NORM(10,2);
TAQUILA (R) :: STAY := TP;
SALIDA (E) ::
INIT
  TSIM := 10000;
  ACT(LLEGADA,0);
DECL
 VAR RESUL: REAL;
 MESSAGES LLEGADA(TP:REAL);
 STATISTICS ALLNODES;
END.
```

El progama en GLIDER usando Bootstrap es el mismo que se presenta en V.3.1 usando las muestras respectivas.

V.3.3.1 Análisis de los Datos de la Simulación a través de la Teoría Clásica cuando los datos no siguen una Distribución Específica (Expo-Normal)

- Intervalo de Confianza para las medias de la Simulación usando las Técnicas Clásicas

La media global de todas las réplicas, *m*=10, de la simulación con las técnicas clásicas es

$$\overline{X}_1 = 3188{,}28$$

La varianza de la media de las réplicas es

$$Var(\overline{X}) = \sigma_1^2 = 8662{,}389$$

IDC $_{90\%}$: [3134,33; 3242,23]

- Intervalo de Confianza para las medias de la Simulación usando Bootstrap

La media global de todas las réplicas, *n*=10, de la simulación con la técnica Bootstrap es

$$\overline{X}_2 = 3226{,}93$$

La varianza de la media de las réplicas es

$$Var(\overline{X}_2) = \sigma_2^2 = 12703{,}85$$

IDC $_{90\%}$: [3161,59; 3292,27]

- Prueba de medias e intervalos de confianza de las simulaciones que usan las técnicas clásicas con las simulaciones que usan Bootstrap

Hipótesis Nula $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Hipótesis Alternativa $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

H_0 se rechaza si $|t_0| > t_{\alpha/2,v}$, es decir, si $|t_0| > t_{0.05,18}$

La estadística de prueba que se utiliza es la siguiente:

$$t_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}$$

donde $\overline{X}_1 = 3188{,}28$ $\overline{X}_2 = 3226{,}93$ $\sigma_1^2 = 8662{,}389$ $\sigma_2^2 = 12703{,}85$ *m*=*n*=10.

Por lo tanto, se tiene que

$$t_0 = 0{,}836$$

Se especifica que α = 0.10, entonces, a partir de las tablas de estadísticas, se obtendrá $t_{0.05,18} = 1{,}7341$.

Ya que se tiene $|t_0| = 0{,}836$ < 1,7341, no se puede rechazar H_0. Lo que indica, que se puede decir que no hay evidencia estadística de una diferencia significativa entre las medias de las simulaciones usando Bootstrap con respecto a las simulaciones que usan las técnicas clásicas.

Un intervalo de confianza del 90% para la diferencia entre las medias se muestra a continuación:

$$\text{IDC: } \left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm t_{0.05,18} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_1^2}{n}} \right]$$

$$\text{IDC}_{90\%} = \left[-118{,}8 \le \mu_1 - \mu_2 \le 41{,}5 \right]$$

Este intervalo de confianza que se tiene de la diferencia entre las medias incluye el cero. Esto indica, expresado de otra manera, que las dos medias no tienen una diferencia significativa.

V.4 Comparación de las Simulaciones que usan las Técnicas Estadísticas Clásicas con las simulaciones que usan Bootstrap utilizando Datos que no siguen alguna Distribución Específica

Las simulaciones realizadas con el método Bootstrap en caso de que se tienen datos que no siguen una distribución particular arrojan resultados similares a los resultados de las simulaciones realizadas con las técnicas clásicas. En los ejemplos presentados se usaron las técnicas clásicas para generar tanto las distribuciones hibridas como las muestras para ser usadas con Bootstrap. Se quiere hacer notar que en la práctica si se tienen datos de una de estas distribuciones híbridas, no seria nada fácil determinar cuál es esta distribución por las técnicas clásicas. En la práctica se tiene la muestra y se analiza para ver si sigue alguna distribución particular.

La diferencia que se presenta entre ambos métodos no es estadísticamente significativa. Esto se puede notar observando las pruebas de comparación de medias realizadas a las corridas hechas con cada método, en donde se muestra que no existe evidencia estadística para decir que hay una diferencia significativa entre ellas.

Con esto se puede decir, que el método bootstrap trabaja muy bien para ser utilizado en simulaciones, como se pudo observar, en caso de que no se tenga información de la distribución que siguen los datos de la muestra original, en especial cuando dichos datos no siguen ninguna distribución específica. En casos como este, las técnicas clásicas no proporcionan ninguna solución. Por esta razón y en estas situaciones, el método Bootstrap es muy útil en estos casos ya que no se necesita hacerle un análisis estadístico a los datos que se tienen.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En la investigación realizada sobre la técnica que usa el Bootstrap para generar variables aleatorias continuas se observó lo siguiente:

- El algoritmo de la función Bootstrap para generar variables aleatorias continuas es fácil de implementar y utilizar. La técnica agrega un ruido aleatorio a las observaciones obtenidas por muestreo de muestras, el cual está distribuido normal, permitiendo generar valores que no están en la muestra original.
- Las muestras generadas utilizando el algoritmo Bootstrap siguen la distribución de la muestra original de acuerdo a las pruebas realizadas en este trabajo.
- El uso del Bootstrap es una técnica adecuada para realizar simulaciones y arroja resultados similares a los obtenidos mediante el uso de técnicas clásicas para la generación de variables aleatorias.
- Cuando la muestra no sigue alguna distribución conocida, la generación de variables aleatorias por métodos clásicos puede ser complicada o simplemente no es posible. En este caso Bootstrap resulta muy conveniente ya que no requiere analizar la muestra y simplemente la usa para generar las variables. Es más, así la muestra siga algunas de las distribuciones conocidas, con Bootstrap se hace innecesario averiguarlo.

De manera más detallada, se logró el objetivo de conocer cómo usar el método Bootstrap para generar variables aleatorias continuas y se pudo observar que se comporta de una manera aceptable. Trabaja muy bien a partir de las muestras sin requerir que éstas sean analizadas.

Usando el método Bootstrap no es necesario saber cómo están distribuidos los datos de una muestra aleatoria. Este método puede trabajar sin ningún problema aún cuando no se conoce la distribución que sigue la muestra.

Lo que indica, que la técnica que emplea el Bootstrap para generar variables aleatorias puede ser utilizada sin ningún problema, obteniendo resultados similares a los que producen las técnicas clásicas, y de una manera sencilla, como se observó en el capítulo IV.

Con respecto a la aplicación del método Bootstrap en simulaciones, se consiguió el propósito planteado de realizar simulaciones con este método para compararlas con simulaciones usando las técnicas estadísticas clásicas. Con los resultados obtenidos empleando el lenguaje de simulación GLIDER, realizando 10 replicaciones, se pudo observar que el método Bootstrap se puede emplear fácilmente y los resultados obtenidos fueron buenos. Esto se pudo constatar haciendo comparaciones entre las medias de cada una de las simulaciones que usan las técnicas clásicas con las simulaciones que usan Bootstrap, donde se pudo observar que los resultados obtenidos de las simulaciones con Bootstrap no presentan diferencias significativas respecto a los resultados de las simulaciones con las técnicas clásicas.

El método Bootstrap trabaja muy bien para generar variables aleatorias y realizar simulaciones en caso de que los datos que se tienen no siguen ninguna distribución conocida, es decir, después de analizar la muestra no se logra determinar la distribución que estos siguen. En este caso particular, el Bootstrap juega un papel importante, ya que para su uso no se requiere analizar los datos o muestras de entrada.

Es necesario mencionar la dificultad de encontrar información referente a las técnicas que usa el método Bootstrap para hacer estimación de densidades. Actualmente se conoce poco sobre esta técnica de generar variables aleatorias y es muy difícil encontrar información referente a ella. Esta técnica es poco utilizada comparándola con técnicas estadísticas clásicas. Sin embargo, se recomienda tenerla en cuenta para generar variables aleatorias y emplearse para realizar simulaciones ya que es muy útil cuando no se conoce la distribución de los datos de entrada o cuando estos no quieran ser analizados para determinar su distribución.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] VARIABLE ALEATORIA. Disponible en: http://server2.southlink.com.ar/vap/VARIABLE%20ALEATORIA.htm

[2] VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS. Disponible en: http://persona15.iddeo.es/ztt/Tem/t20_variable_aleatoria_continua.htm

[3] LA DISTRIBUCIÓN NORMAL. Disponible en: http://descartes.cnice.mecd.es/Bach/HCS_2/distribuciones_probabilidad/dis_normal.htm

[4] TEMA 5: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD PARA VARIABLES ALEATORIAS CONTÍNUAS. Disponible en: http://halweb.uc3m.es/esp/docencia/Tecnicos/Industriales/Grupo43/Gonzalo%20Arevalo/Tema%205%20Distribuciones%20continuas.pdf

[5] Distribuciones discretas y continuas. Disponible en: http://www.unavarra.es/estadistica/I.T.T.Imagen/distribuciones.pdf

[6] The Bootstrap. Disponible en: tomveatch.com/Veatch1991/node61.html

[7] USING THE BOOTSTRAP TO CALCULATE REORDER POINTS. Disponible en: http://www.rand.org/publications/MR/MR1096.appd.pdf

[8] INFERENCIA ESTADÍSTICA MEDIANTE BOOTSTRAP http://www.psico.uniovi.es/Dpto_Psicologia/metodos/tutor.9/boot2.html

[9] Efron, B. and R. J. Tibshirani, 1993. An Introduction to the Bootstrap. New York. Chapman & Hall.

[10] Regression III: Advanced Methods. Lecture 11. Resampling and Regression. Bob Andersen McMaster University. Disponible en: http://socserv.mcmaster.ca/andersen

[11] Measuring Bias and Uncertainty in Ideal Point Estimates via the Parametric Bootstrap. Disponible en: wc.wustl.edu/eitm/Lewis_and_Poole_4_1.pdf

[12] Brute Force as a Statistical Tool. Disponible en: kochanski.org/gpk/teaching/0401Oxford/bfi.pdf

[13] AUTOMATIC RANDOM VARIATE GENERATION FOR SIMULATION INPUT. W. Hörmann Department of Industrial Engineering,Bo?gaziçi University Istanbul, 80815 Bebek-Istanbul, TURKEYhttp.

J. Leydold Department for Applied Statistics, University of Economics and BA Vienna,Augasse 2-6, A-1090 Vienna, AUSTRIA, EU. Disponible en: http://www.informs-sim.org/wsc00papers/089.PDF

Simulación automática, método Bootstrap y sus aplicaciones.Dr Javier Portela. Escuela Universitaria de Estadística. Universidad Complutense de Madrid

[14] DISTRIBUCIONES COMUNMENTE USADAS. Disponible en:

[15] GLIDER Lenguaje Para Simulación de Sistemas.

Universidad de los Andes. Instituto de Estadística Aplicada y Computación Facultad de Economía. Mérida Venezuela 1992

GLOSARIO

Bootstrap: Método estadístico que consiste en sustituir la distribución teórica por la muestral y estudiar las propiedades del estimador.

Bootstrapping: Es un remuestreo de datos de una muestra, con reemplazo.

Datos: Son los valores cualitativos o cuantitativos mediante los cuales se miden las características de los objetos, sucesos o fenómenos a estudiar.

Desviación Estándar: Es la medida más común de dispersión. Dicho de manera sencilla, mide qué tan dispersos están los valores en una colección de datos. La desviación estándar está definida como la raíz cuadrada de la varianza. Se define de esta manera para darnos una medida de la dispersión que es (1) un número no negativo y (2) tiene las mismas unidades que los datos.

Distribución de Probabilidad: Modelo teórico que describe la forma en que varían los resultados de un experimento aleatorio. Lista de los resultados de un experimento con las probabilidades que se esperarían ver asociadas con cada resultado.

Estadística: Ciencia estudia los métodos para recoger, organizar, resumir y analizar datos, así como para sacar conclusiones válidas y tomar decisiones razonables basadas con tal análisis. En un sentido menos amplio, el término estadística se usa para denotar los propios datos, o número derivados de ellos, tales como los promedios.

Estadístico: Es una función de variables aleatorias observables que no contiene parámetros desconocidos.

Estimación: Es el valor numérico que toma el estimador para una muestra concreta.

Estimador: Es un estadístico que se construye con la intención de estimar un parámetro de la población y que, consecuentemente, debe reunir condiciones que lo hagan deseable en algún sentido.

Frecuencia Acumulada: Es el número de estudiantes con calificaciones iguales o menores que el rango de cada intervalo sucesivo.

Función de densidad de probabilidad: función que mide concentración de probabilidad alrededor de los valores de una variable aleatoria continua.

Histograma: Es una representación gráfica de una variable en forma de barras, se utilizan con preferencia a gráficas de puntos o de líneas cuando se quiere agrupar los datos. Se utiliza cuando se estudia una variable continua, como franjas de edades o altura de la muestra.

Inferencia Estadística: Es aplicar resultados de estudios de una muestra a la poblaciones y emitir juicios o conclusiones sobre esa población en general.

Mediana: Es el valor que deja a cada lado (por encima y por debajo) la mitad de los valores de la muestra.

Muestra: Parte representativa de la población en la que nos apoyamos para realizar el análisis.

Parámetro: Son valores desconocidos de características de una distribución teórica. El objetivo de la estadística es estimarlos dando un valor concreto.

Población: Es todo conjunto de elementos, finito o infinito, definido por una o más características, de las que gozan todos los elementos que lo componen, y sólo ellos.

Probabilidad: Es el conjunto de posibilidades de que un evento ocurra o no en un momento y tiempo determinado. Dichos eventos pueden ser medidos a través de una escala de 0 a 1, donde el evento que no pueda ocurrir tiene una probabilidad de 0 y uno que ocurra con certeza es de 1.

Rango: Situación de un dato respecto de una distribución.

Remuestrear: Aplicar un remuestreo en un estudio estadístico.

Variable Aleatoria: Variable que cuantifica los resultados de un experimento aleatorio y que toma diferentes valores como resultado de este.

Variable aleatoria continua: Variable que toma un valor infinito de valores no numerables. Variable aleatoria que puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado de valores.

BOOTSTRAP

El Bootstrap es un método estadístico creado para facilitar los cálculos que no se pueden hacer con fórmulas simples (por medio de las técnicas estadísticas clásicas) teniendo como herramienta importante la ayuda del computador.

Este método Consiste básicamente en sustituir la distribución teórica por la muestral y estudiar las propiedades del estimador remuestreando esa nueva población en las mismas condiciones en que se obtuvo la muestra original.

El método Bootstrap trabaja como sigue:

- Se tiene un conjunto de muestra aleatoria (el cual se trabaja con reemplazo) de tamaño *n*, en donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ son los valores observados de dicha muestra.
- Se crea una nueva muestra del mismo tamaño muestreando aleatoriamente *n* veces con reemplazo de la muestra original ($x_1, x_2, ..., x_n$), donde la probabilidad de escoger cualquier punto de los datos es 1/*n*.
- Luego se calcula el estadístico de interés $\hat{\theta}$ para cada una de las muestras Bootstrap, a partir de la remuestra obtenida, dando así $\hat{\theta}_b^*$. (donde *b=1,2,…,B*).
- Se repiten los puntos 2 y 3 B veces, donde *B* es un número grande que representa la cantidad de remuestras hechas. La magnitud de *B* en la práctica depende de las pruebas que se van aplicar a los datos. En general,

B debería ser de entre 50 a 200 para estimar el error estándar de $\hat{\theta}$, y al menos de 1000 para estimar intervalos de confianza en un punto o alrededor de $\hat{\theta}$.

MÉTODO BOOTSTRAP PARA GENERAR VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Para generar variables aleatorias continuas usando la técnica Bootstrap se deben seguir los pasos que se presentan en el siguiente algoritmo:

Algoritmo:

Entrada: una muestra aleatoria $x_1, x_2, ..., x_n$

Salida: una variable aleatoria

0: escoger el parámetro suavizador *h*

Para calcular el *h* se presenta la siguiente fórmula:

$$h = \alpha(k) 1.364 \frac{\hat{\sigma}}{n^{1/5}}$$

donde la constante $\alpha(k)$ es 0.776 para la Gaussiana, $\hat{\sigma}$ denota la desviación estándar y *n* es el tamaño de la muestra. La fórmula queda descrita

$$h = 1.06 \frac{\hat{\sigma}}{n^{1/5}}$$

1: generar un entero aleatorio *i* de una uniforme discreta en *n* puntos $(i = 1, ..., n)$

2: generar una variable aleatoria *W* de la distribución kernel *K(x)*

El *W* que se presenta es la densidad de la distribución de ruido aleatoria y es llamada Kernel. Claramente esta debe ser una función de densidad y siempre se asume que es simétrica alrededor del origen.

Para la elección de esta función de densidad se va a utilizar una de las funciones kernel más conocidas: la Normal de parámetros (0,1):

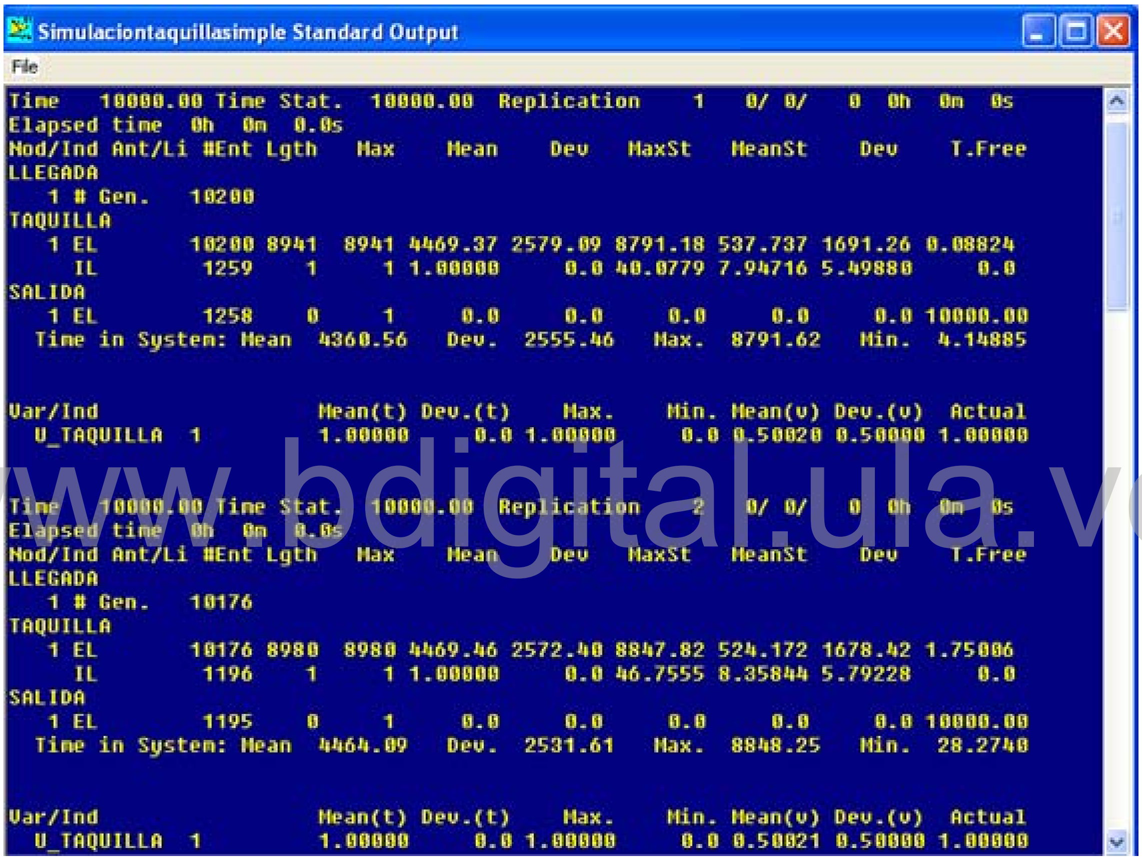
$$\text{Normal} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

3: devolver $boot = x_i + hW$

$$boot = x_i + hNormal(0,1)$$

CORRIDAS DE LAS SIMULACIONES EN GLIDER

- **Simulación de un Sistema de Taquilla Simple utilizando las Técnicas Clásicas**



```
Simulaciontaquillasimple Standard Output
File
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    1   0/ 0/   0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max    Mean    Dev   MaxSt   MeanSt    Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    10200
TAQUILLA
   1 EL        10200 8941  8941 4469.37 2579.09 8791.18 537.737 1691.26 0.08824
     IL         1259    1     1 1.00000     0.0 40.0779 7.94716 5.49880     0.0
SALIDA
   1 EL         1258    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4360.56   Dev.  2555.46   Max.  8791.62   Min.  4.14885


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA   1        1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    2   0/ 0/   0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max    Mean    Dev   MaxSt   MeanSt    Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    10176
TAQUILLA
   1 EL        10176 8980  8980 4469.46 2572.40 8847.82 524.172 1678.42 1.75006
     IL         1196    1     1 1.00000     0.0 46.7555 8.35844 5.79228     0.0
SALIDA
   1 EL         1195    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4464.09   Dev.  2531.61   Max.  8848.25   Min.  28.2740


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA   1        1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50021 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    3   0/ 0/    0  0h   0m  0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt   MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     9909
TAQUILLA
   1 EL          9909 8673   8673 4344.86 2503.01 8738.28 544.599 1694.50 0.84482
     IL          1236    1      1 1.00000     0.0 40.7185 8.08476 5.85908     0.0
SALIDA
   1 EL          1235    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4370.15   Dev.  2515.69   Max.  8739.30   Min.  5.11741


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    4   0/ 0/    0  0h   0m  0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt   MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    10188
TAQUILLA
   1 EL         10188 8940   8940 4442.85 2582.74 8746.20 533.093 1667.74 0.24720
     IL          1248    1      1 1.00000     0.0 35.3794 8.01316 5.64050     0.0
SALIDA
   1 EL          1247    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4355.94   Dev.  2465.74   Max.  8746.90   Min.  14.8640


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000
```



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    5   0/ 0/    0  0h   0m  0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt   MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    10117
TAQUILLA
   1 EL         10117 8864   8865 4437.56 2543.04 8789.29 545.745 1700.20 0.33790
     IL          1253    1      1 1.00000     0.0 38.4502 7.98682 5.58059     0.0
SALIDA
   1 EL          1252    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4417.98   Dev.  2501.08   Max.  8789.44   Min.  6.07066


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    6   0/ 0/    0  0h   0m  0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt   MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     9982
TAQUILLA
   1 EL          9982 8766   8766 4386.07 2516.67 8789.51 538.753 1704.64 0.15681
     IL          1216    1      1 1.00000     0.0 34.8846 8.22757 5.83699     0.0
SALIDA
   1 EL          1215    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4426.75   Dev.  2582.74   Max.  8789.82   Min.  18.2114


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50021 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    7   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    9935
TAQUILLA
   1 EL         9935 8672   8674 4353.55 2483.00 8813.98 551.588 1711.14 4.02906
     IL         1263    1      1 1.00000     0.0 34.7482 7.92304 5.55777      0.0
SALIDA
   1 EL         1262    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4350.26   Dev.  2555.21   Max.  8815.66   Min.  18.1190


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    8   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   10039
TAQUILLA
   1 EL        10039 8786   8786 4424.36 2518.45 8784.67 551.716 1711.85 1.06589
     IL         1253    1      1 1.00000     0.0 40.9144 7.98481 5.83606      0.0
SALIDA
   1 EL         1252    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4424.39   Dev.  2524.13   Max.  8785.25   Min.  1.27447


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000
```



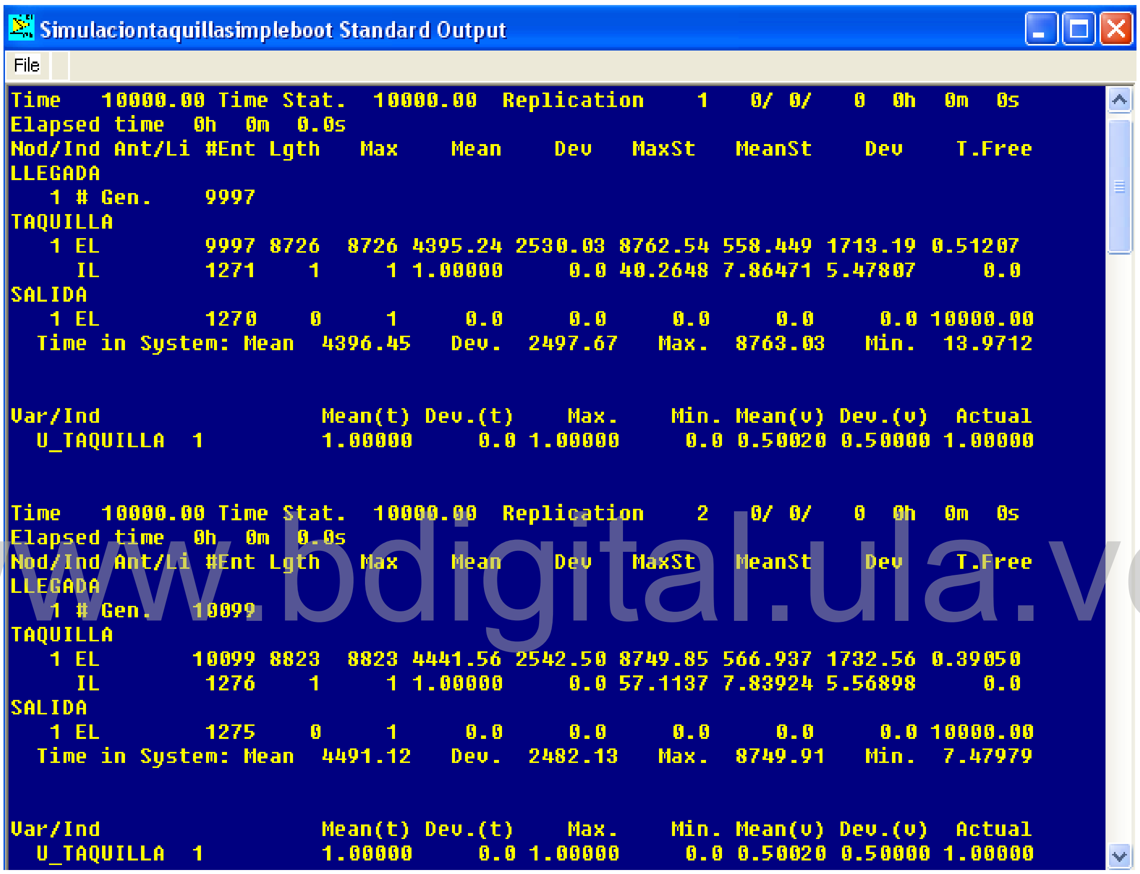
```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    9   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   10144
TAQUILLA
   1 EL        10144 8893   8894 4451.78 2559.79 8776.55 546.117 1706.87 0.94911
     IL         1251    1      1 1.00000     0.0 42.4747 7.99993 5.66279      0.0
SALIDA
   1 EL         1250    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4439.85   Dev.  2521.86   Max.  8778.26   Min.  8.99513


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication   10   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    9924
TAQUILLA
   1 EL         9924 8661   8662 4343.52 2506.46 8729.23 555.881 1715.85 0.34235
     IL         1263    1      1 1.00000     0.0 39.9687 7.92327 5.72772      0.0
SALIDA
   1 EL         1262    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4379.21   Dev.  2532.38   Max.  8729.28   Min.  9.39145


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000
```

- **Simulación de un Sistema de Taquilla Simple utilizando la Técnica Bootstrap**



```
Simulaciontaquillasimpleboot Standard Output
File
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    1   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     9997
TAQUILLA
   1 EL         9997 8726  8726 4395.24 2530.03 8762.54 558.449 1713.19 0.51207
     IL         1271    1     1 1.00000     0.0 40.2648 7.86471 5.47807     0.0
SALIDA
   1 EL         1270    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4396.45   Dev.  2497.67   Max.  8763.03   Min.  13.9712


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    2   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    10099
TAQUILLA
   1 EL        10099 8823  8823 4441.56 2542.50 8749.85 566.937 1732.56 0.39050
     IL         1276    1     1 1.00000     0.0 57.1137 7.83924 5.56898     0.0
SALIDA
   1 EL         1275    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4491.12   Dev.  2482.13   Max.  8749.91   Min.  7.47979


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    3   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     9917
TAQUILLA
   1 EL         9917 8665   8666 4337.90 2491.38 8761.06 562.384 1730.79 1.44487
     IL         1252     1      1 1.00000      0.0 35.9768 7.99327 5.63490      0.0
SALIDA
   1 EL         1251     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4466.15   Dev.  2513.33   Max.  8761.49   Min.  21.9196


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    4   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    10116
TAQUILLA
   1 EL        10116 8825   8826 4414.79 2535.57 8760.07 553.457 1710.90 0.84535
     IL         1291     1      1 1.00000      0.0 57.1137 7.75182 5.80239      0.0
SALIDA
   1 EL         1290     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4347.89   Dev.  2541.79   Max.  8760.24   Min.  1.68721


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50019 0.50000 1.00000
```



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    5   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    10242
TAQUILLA
   1 EL        10242 8988   8988 4513.97 2606.13 8795.87 531.137 1674.42 0.16356
     IL         1254     1      1 1.00000      0.0 40.4308 7.97782 5.87388      0.0
SALIDA
   1 EL         1253     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4342.04   Dev.  2525.47   Max.  8796.80   Min.  6.80032


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    6   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     9996
TAQUILLA
   1 EL         9996 8763   8763 4368.01 2520.19 8749.97 530.074 1668.03 0.92675
     IL         1233     1      1 1.00000      0.0 35.9619 8.11051 5.68073      0.0
SALIDA
   1 EL         1232     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4301.41   Dev.  2522.11   Max.  8750.80   Min.  21.3447


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    7   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max    Mean    Dev   MaxSt   MeanSt    Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    9979
TAQUILLA
   1 EL        9979 8733  8733 4355.17 2525.46 8771.26 540.515 1692.25 0.41952
     IL        1246    1     1 1.00000     0.0 40.4308 8.02850 5.54414     0.0
SALIDA
   1 EL        1245    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4332.92   Dev.  2555.24   Max.  8772.18   Min.  5.03257


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    8   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max    Mean    Dev   MaxSt   MeanSt    Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   10029
TAQUILLA
   1 EL       10029 8788  8788 4387.97 2549.73 8740.56 542.342 1696.84 0.71901
     IL        1241    1     1 1.00000     0.0 33.5000 8.05922 5.89787     0.0
SALIDA
   1 EL        1240    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4386.99   Dev.  2535.67   Max.  8746.10   Min.  22.2389


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000
```



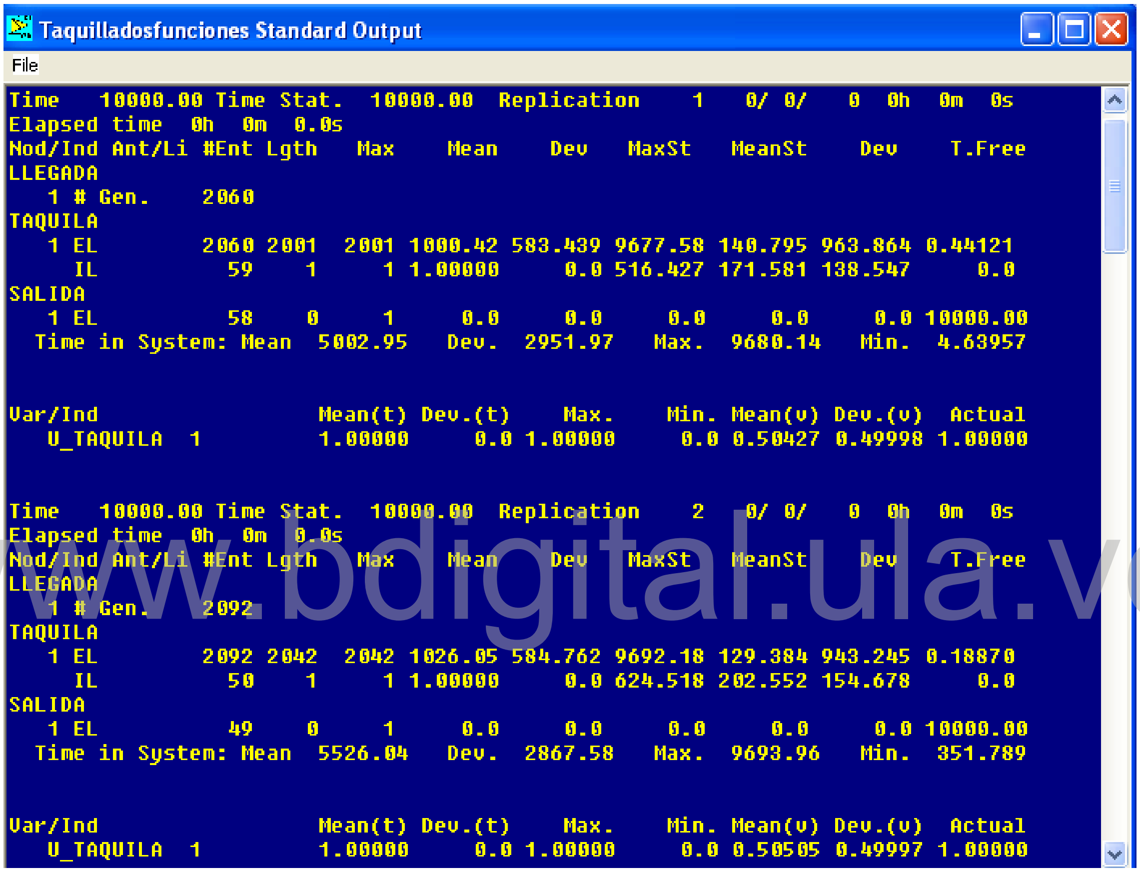
```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    9   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max    Mean    Dev   MaxSt   MeanSt    Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    9960
TAQUILLA
   1 EL        9960 8746  8746 4388.14 2506.25 8828.01 520.618 1652.39 0.73283
     IL        1214    1     1 1.00000     0.0 40.2648 8.24016 5.89741     0.0
SALIDA
   1 EL        1213    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4275.35   Dev.  2524.73   Max.  8828.09   Min.  4.14895


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50021 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication   10   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max    Mean    Dev   MaxSt   MeanSt    Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    9913
TAQUILLA
   1 EL        9913 8652  8652 4309.14 2498.17 8705.48 563.462 1723.86 0.08010
     IL        1261    1     1 1.00000     0.0 34.1680 7.93609 5.60689     0.0
SALIDA
   1 EL        1260    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4433.59   Dev.  2495.93   Max.  8706.83   Min.  14.2786


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50020 0.50000 1.00000
```

- **Simulación de un Sistema de Taquilla Simple utilizando Tiempos de Permanencia tomados de varias Distribuciones Erlang a través de las Técnicas Clásicas**




```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    1   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     2060
TAQUILA
   1 EL         2060 2001   2001 1000.42 583.439 9677.58 140.795 963.864 0.44121
     IL           59    1      1 1.00000     0.0 516.427 171.581 138.547     0.0
SALIDA
   1 EL           58    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  5002.95   Dev.  2951.97   Max.  9680.14   Min.  4.63957


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50427 0.49998 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    2   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     2092
TAQUILA
   1 EL         2092 2042   2042 1026.05 584.762 9692.18 129.384 943.245 0.18870
     IL           50    1      1 1.00000     0.0 624.518 202.552 154.678     0.0
SALIDA
   1 EL           49    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  5526.04   Dev.  2867.58   Max.  9693.96   Min.  351.789


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50505 0.49997 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    3   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     1948
TAQUILA
   1 EL         1948 1885   1885 932.682 541.878 9495.87 144.386 937.900 5.73071
     IL           63    1      1 1.00000     0.0 478.226 157.843 141.751     0.0
SALIDA
   1 EL           62    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4538.87   Dev.  2780.93   Max.  9501.09   Min.  7.38427


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   V_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50400 0.49998 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    4   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     2023
TAQUILA
   1 EL         2023 1962   1962 994.845 558.610 9693.98 142.841 917.025 0.69151
     IL           61    1      1 1.00000     0.0 571.552 164.533 164.829     0.0
SALIDA
   1 EL           60    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4816.72   Dev.  2422.36   Max.  9695.29   Min.  317.088


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   V_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50413 0.49998 1.00000
```



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    5   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     1998
TAQUILA
   1 EL         1998 1931   1931 961.984 558.607 9597.39 154.698 1007.45 3.91724
     IL           67    1      1 1.00000     0.0 466.762 150.449 154.039     0.0
SALIDA
   1 EL           66    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4685.83   Dev.  3087.98   Max.  9601.36   Min.  12.6522


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   V_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50376 0.49999 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    6   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     1983
TAQUILA
   1 EL         1983 1911   1911 958.086 553.297 9476.28 130.942 844.285 12.4652
     IL           72    1      1 1.00000     0.0 519.851 138.142 143.050     0.0
SALIDA
   1 EL           71    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3659.98   Dev.  2650.56   Max.  9481.35   Min.  28.7222


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   V_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50350 0.49999 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    7   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     2017
TAQUILA
   1 EL         2017 1960  1960 965.013 563.159 9534.33 121.535 855.651 2.17361
     IL           57    1     1 1.00000     0.0 638.830 174.860 158.997     0.0
SALIDA
   1 EL           56    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4379.85   Dev.  2786.34   Max.  9537.75   Min.  327.844


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50442 0.49998 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    8   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     2148
TAQUILA
   1 EL         2148 2098  2098 1040.64 597.136 9601.08 104.770 797.906 0.11353
     IL           50    1     1 1.00000     0.0 464.765 201.079 150.134     0.0
SALIDA
   1 EL           49    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4595.77   Dev.  2704.67   Max.  9615.36   Min.  277.250


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50505 0.49997 1.00000
```



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    9   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     2046
TAQUILA
   1 EL         2046 1985  1985 997.476 583.376 9530.64 146.774 961.402 15.3925
     IL           61    1     1 0.99975 0.01580 541.738 163.627 167.290 2.49601
SALIDA
   1 EL           60    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  5007.33   Dev.  2688.02   Max.  9532.61   Min.  9.73664


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         0.99975 0.01580 1.00000     0.0 0.50413 0.49998 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication   10   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     1949
TAQUILA
   1 EL         1949 1889  1889 939.734 552.383 9453.33 135.167 896.383 2.84810
     IL           60    1     1 1.00000     0.0 460.213 165.105 155.120     0.0
SALIDA
   1 EL           59    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4467.75   Dev.  2689.60   Max.  9463.40   Min.  41.1426


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50420 0.49998 1.00000
```

- **Simulación de un Sistema de Taquilla Simple utilizando Tiempos de Permanencia tomados de varias Distribuciones Erlang a través de la Técnica Bootstrap**

```
Taquilladosfuncionesboot Standard Output
File
Time   10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    1   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   95188
TAQUILLA
   1 EL       9518890616 90616 47780.3 26642.7 9496.04 232.954 1208.38 0.54590
     IL        4572     1      1 0.99995 .739- 2 424.893 2.16777 24.2471 0.54590
SALIDA
   1 EL        4571     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4851.15   Dev.  2829.23   Max.  9496.04   Min.      0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         0.99995 .739- 2 1.00000     0.0 0.50005 0.50000 1.00000


Time   10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    2   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   91769
TAQUILLA
   1 EL       9176987602 87602 42772.0 24481.9 9494.21 183.538 1008.38     0.0
     IL        4167     1      1 1.00000     0.0 432.371 2.36923 25.8638     0.0
SALIDA
   1 EL        4166     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4043.04   Dev.  2606.75   Max.  9494.21   Min.      0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50006 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    3   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    88290
TAQUILLA
   1 EL        8829085224 85224 42747.8 24240.3 9470.84 177.131 1093.88      0.0
     IL         3066     1      1 1.00000      0.0 483.727 3.21346 31.4731      0.0
SALIDA
   1 EL         3065     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  5102.49   Dev.  3055.76   Max.  9470.84   Min.       0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000      0.0 1.00000     0.0 0.50008 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    4   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    91887
TAQUILLA
   1 EL        9188788129 88129 43766.2 25790.5 9388.25 199.997 1128.77 4.49500
     IL         3758     1      1 0.99955 0.02120 483.727 2.59642 26.9517 4.49500
SALIDA
   1 EL         3757     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4891.47   Dev.  2866.12   Max.  9388.25   Min.       0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          0.99955 0.02120 1.00000     0.0 0.50007 0.50000 1.00000
```



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    5   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    95095
TAQUILLA
   1 EL        9509591381 91456 45172.4 26669.6 9545.49 185.903 1081.63 19.1645
     IL         3714     1      1 0.99808 0.04374 432.371 2.68046 28.5029 19.1645
SALIDA
   1 EL         3713     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4761.31   Dev.  2859.96   Max.  9545.49   Min.       0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          0.99808 0.04374 1.00000     0.0 0.50007 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    6   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    94064
TAQUILLA
   1 EL        9406490445 90445 43798.3 25563.7 9274.26 175.594 1037.69      0.0
     IL         3619     1      1 1.00000      0.0 424.893 2.67700 27.3816      0.0
SALIDA
   1 EL         3618     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4565.32   Dev.  2820.67   Max.  9274.26   Min.       0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000      0.0 1.00000     0.0 0.50007 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    7   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   88434
TAQUILLA
   1 EL        8843483039 83039 41651.8 23821.4 9096.47 233.386 1086.78 5.98367
     IL         5395     1      1 0.99940 0.02445 424.893 1.79003 21.5483 5.98367
SALIDA
   1 EL         5394     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3826.39    Dev.  2369.89    Max.  9096.47   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)     Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         0.99940 0.02445 1.00000     0.0 0.50005 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    8   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   93104
TAQUILLA
   1 EL        9310489036 89036 44974.1 24912.1 9446.03 180.089 997.397     0.0
     IL         4068     1      1 1.00000     0.0 411.517 2.43438 25.8436     0.0
SALIDA
   1 EL         4067     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4122.75    Dev.  2553.41    Max.  9446.03   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)     Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50006 0.50000 1.00000
```



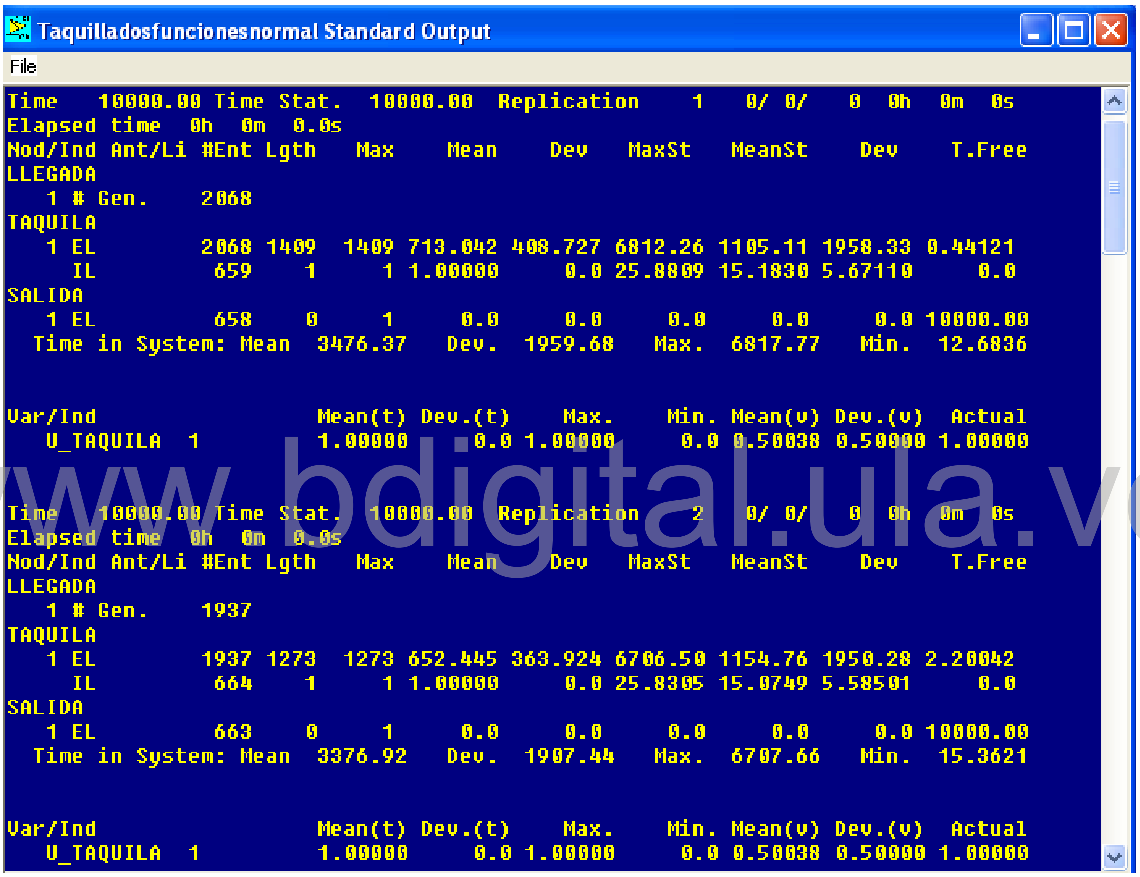
```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    9   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   92701
TAQUILLA
   1 EL        9270188298 88298 43113.7 25179.4 9293.44 220.536 1154.44 14.7656
     IL         4403     1      1 0.99852 0.03840 424.893 2.20333 24.8277 14.7656
SALIDA
   1 EL         4402     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4644.28    Dev.  2742.56    Max.  9293.44   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)     Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         0.99852 0.03840 1.00000     0.0 0.50006 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication   10   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   88729
TAQUILLA
   1 EL        8872985216 85232 43068.4 24233.7 9698.28 165.974 989.195     0.0
     IL         3513     1      1 1.00000     0.0 483.727 2.84294 29.6550     0.0
SALIDA
   1 EL         3512     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  4193.29    Dev.  2798.99    Max.  9698.28   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)     Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50007 0.50000 1.00000
```

- **Simulación de un Sistema de Taquilla Simple utilizando Tiempos de Permanencia tomados de varias Distribuciones Normales a través de las Técnicas Clásicas**



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication     3    0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev   MaxSt    MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    2019
TAQUILA
   1 EL        2019 1361   1361 681.497 387.221 6732.77 1119.71 1954.14 4.88611
     IL         658    1      1 1.00000     0.0 25.9372 15.2098 5.59798     0.0
SALIDA
   1 EL         657    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3444.18   Dev.  1939.11   Max.  6733.95   Min.  18.1067


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50038 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication     4    0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev   MaxSt    MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    2017
TAQUILA
   1 EL        2017 1336   1336 670.133 385.492 6627.07 1126.07 1924.75 1.49127
     IL         681    1      1 1.00000     0.0 26.0763 14.6991 5.62715     0.0
SALIDA
   1 EL         680    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3343.41   Dev.  1898.57   Max.  6629.16   Min.  15.4636


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50037 0.50000 1.00000
```



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication     5    0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev   MaxSt    MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    1928
TAQUILA
   1 EL        1928 1272   1272 604.751 363.446 6362.29 1085.10 1849.19 3.90115
     IL         656    1      1 1.00000     0.0 25.2148 15.2406 5.55652     0.0
SALIDA
   1 EL         655    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3197.88   Dev.  1827.70   Max.  6365.23   Min.  22.4528


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50038 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication     6    0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev   MaxSt    MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    2042
TAQUILA
   1 EL        2042 1374   1375 679.281 398.318 6739.02 1095.35 1940.28 6.63638
     IL         668    1      1 1.00000     0.0 24.4672 14.9870 5.62535     0.0
SALIDA
   1 EL         667    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3368.38   Dev.  1970.94   Max.  6748.12   Min.  18.8096


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50037 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    7   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     1981
TAQUILA
   1 EL         1981 1318   1318 693.395 376.995 6962.35 1148.04 1981.26 2.27742
     IL          663    1      1 1.00000     0.0 26.4965 15.1041 5.47617     0.0
SALIDA
   1 EL          662    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3438.30   Dev.  1974.86   Max.  6962.93   Min.  15.8277


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   V_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50038 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    8   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     1983
TAQUILA
   1 EL         1983 1303   1303 639.479 381.271 6506.08 1101.04 1898.51 3.81989
     IL          680    1      1 1.00000     0.0 25.6771 14.7132 5.79715     0.0
SALIDA
   1 EL          679    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3219.06   Dev.  1933.10   Max.  6510.82   Min.  11.0890


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   V_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50037 0.50000 1.00000
```



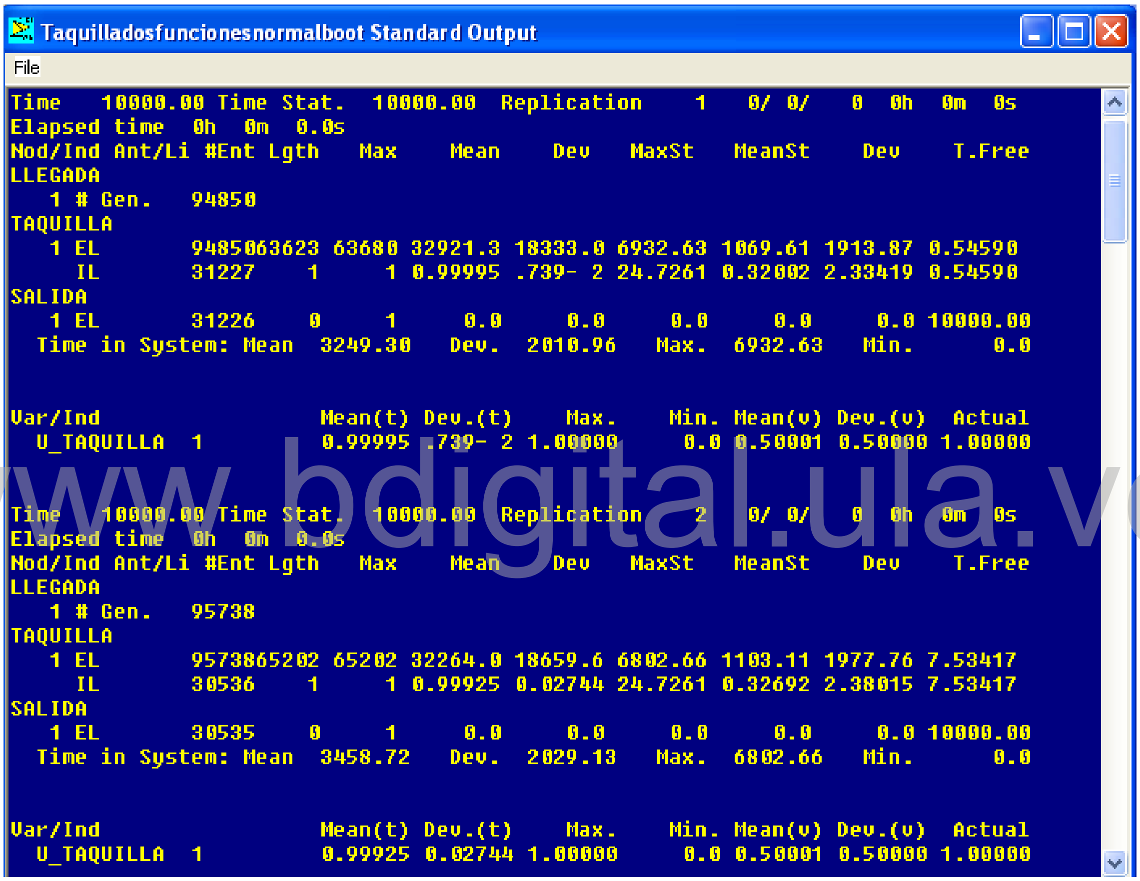
```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    9   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     1984
TAQUILA
   1 EL         1984 1330   1330 671.939 390.473 6763.36 1100.64 1933.81 3.62664
     IL          654    1      1 1.00000     0.0 26.2677 15.2861 5.55343     0.0
SALIDA
   1 EL          653    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3347.31   Dev.  1967.33   Max.  6765.57   Min.  16.2285


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   V_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50038 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication   10   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     1991
TAQUILA
   1 EL         1991 1334   1334 671.464 382.398 6816.60 1126.68 1967.53 9.72169
     IL          657    1      1 0.99962 0.01940 25.6945 15.2181 5.55776 3.76632
SALIDA
   1 EL          656    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3422.64   Dev.  1979.92   Max.  6821.01   Min.  4.85738


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   V_TAQUILA  1         0.99962 0.01940 1.00000     0.0 0.50038 0.50000 1.00000
```

- **Simulación de un Sistema de Taquilla Simple utilizando Tiempos de Permanencia tomados de varias Distribuciones Normales a través de la Técnica Bootstrap**



```
Taquilladosfuncionesnormalboot Standard Output
File
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    1   0/ 0/   0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   94850
TAQUILLA
   1 EL        9485063623 63680 32921.3 18333.0 6932.63 1069.61 1913.87 0.54590
     IL        31227     1      1 0.99995 .739- 2 24.7261 0.32002 2.33419 0.54590
SALIDA
   1 EL        31226     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3249.30   Dev.  2010.96   Max.  6932.63   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         0.99995 .739- 2 1.00000     0.0 0.50001 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    2   0/ 0/   0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   95738
TAQUILLA
   1 EL        9573865202 65202 32264.0 18659.6 6802.66 1103.11 1977.76 7.53417
     IL        30536     1      1 0.99925 0.02744 24.7261 0.32692 2.38015 7.53417
SALIDA
   1 EL        30535     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3458.72   Dev.  2029.13   Max.  6802.66   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         0.99925 0.02744 1.00000     0.0 0.50001 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    3   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    92406
TAQUILLA
   1 EL        9240662185 62185 29432.2 18034.2 6588.79 1044.77 1860.93 4.35319
     IL        30221     1      1 0.99956 0.02086 24.7261 0.33048 2.38121 4.35319
SALIDA
   1 EL        30220     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3194.77   Dev.  1929.03   Max.  6588.79   Min.       0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          0.99956 0.02086 1.00000     0.0 0.50001 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    4   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    88677
TAQUILLA
   1 EL        8867757903 57903 28576.0 16307.9 6657.05 1085.49 1854.50     0.0
     IL        30774     1      1 1.00000     0.0 24.7261 0.32434 2.38256     0.0
SALIDA
   1 EL        30773     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3128.08   Dev.  1876.60   Max.  6657.05   Min.       0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50001 0.50000 1.00000
```

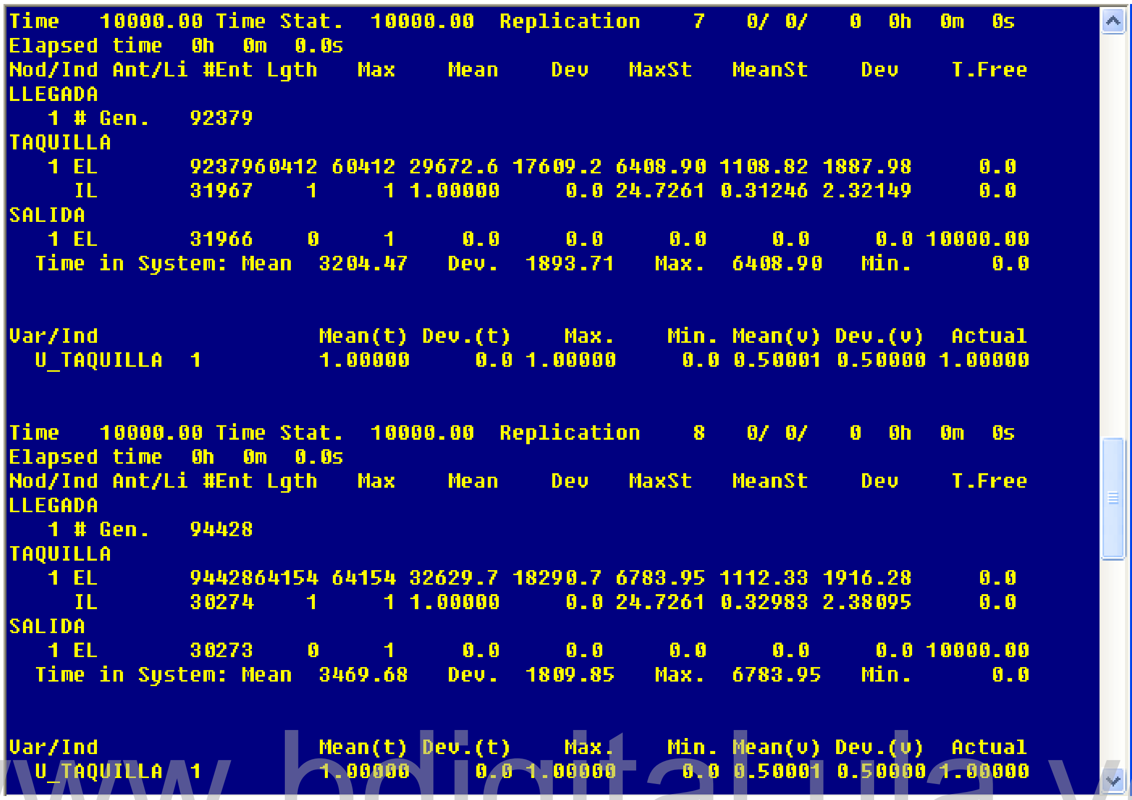


```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    5   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    94762
TAQUILLA
   1 EL        9476263630 63760 32592.4 18400.5 6718.09 1153.07 1949.45     0.0
     IL        31132     1      1 1.00000     0.0 24.7261 0.32119 2.36054     0.0
SALIDA
   1 EL        31131     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3510.24   Dev.  1815.03   Max.  6718.09   Min.       0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50001 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    6   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    92865
TAQUILLA
   1 EL        9286562705 62705 30690.0 17932.7 6704.33 1075.93 1885.92     0.0
     IL        30160     1      1 1.00000     0.0 24.7261 0.33095 2.39121     0.0
SALIDA
   1 EL        30159     0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3313.06   Dev.  1881.65   Max.  6704.33   Min.       0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50001 0.50000 1.00000
```

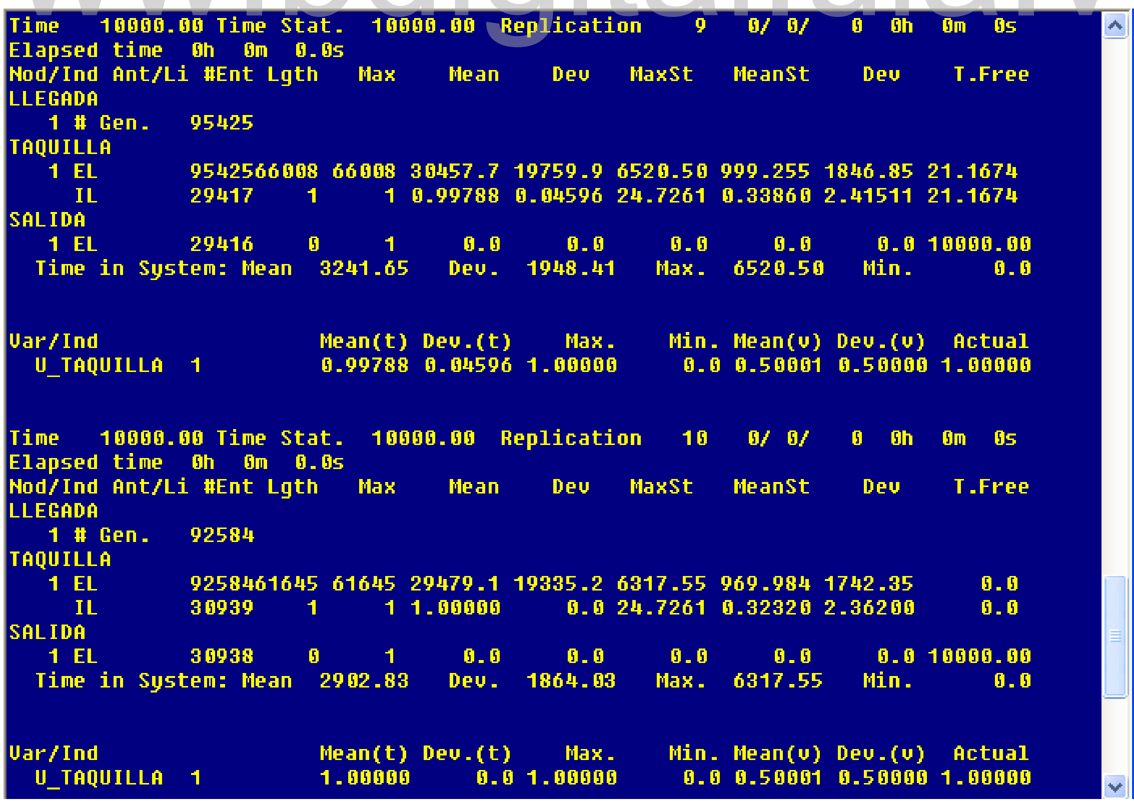


```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    7   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean    Dev    MaxSt   MeanSt    Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    92379
TAQUILLA
   1 EL        9237960412 60412 29672.6 17609.2 6408.90 1108.82 1887.98      0.0
     IL        31967     1      1 1.00000      0.0 24.7261 0.31246 2.32149      0.0
SALIDA
   1 EL        31966     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3204.47   Dev.  1893.71   Max.  6408.90   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50001 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    8   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean    Dev    MaxSt   MeanSt    Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    94428
TAQUILLA
   1 EL        9442864154 64154 32629.7 18290.7 6783.95 1112.33 1916.28      0.0
     IL        30274     1      1 1.00000      0.0 24.7261 0.32983 2.38095      0.0
SALIDA
   1 EL        30273     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3469.68   Dev.  1809.85   Max.  6783.95   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50001 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    9   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean    Dev    MaxSt   MeanSt    Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    95425
TAQUILLA
   1 EL        9542566008 66008 30457.7 19759.9 6520.50 999.255 1846.85 21.1674
     IL        29417     1      1 0.99788 0.04596 24.7261 0.33860 2.41511 21.1674
SALIDA
   1 EL        29416     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3241.65   Dev.  1948.41   Max.  6520.50   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         0.99788 0.04596 1.00000     0.0 0.50001 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication   10   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean    Dev    MaxSt   MeanSt    Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.    92584
TAQUILLA
   1 EL        9258461645 61645 29479.1 19335.2 6317.55 969.984 1742.35      0.0
     IL        30939     1      1 1.00000      0.0 24.7261 0.32320 2.36200      0.0
SALIDA
   1 EL        30938     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  2902.83   Dev.  1864.03   Max.  6317.55   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50001 0.50000 1.00000
```

- **Simulación de un Sistema de Taquilla Simple utilizando Tiempos de Permanencia tomados de Distribuciones Exponencial – Normal a través de las Técnicas Clásicas**

```
Taquilladosfuncionesex_nor Standard Output
File
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication     1   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     4995
TAQUILA
   1 EL         4995 3188   3190 1573.68 912.060 6359.59 1140.82 1866.63 0.29033
     IL         1807    1      1 1.00000     0.0 17.0795 5.53673 4.82145     0.0
SALIDA
   1 EL         1806    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3160.79   Dev.  1805.13   Max.  6361.30   Min.  0.33018


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50014 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication     2   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     4954
TAQUILA
   1 EL         4954 3173   3173 1590.41 915.124 6375.01 1155.53 1877.78 1.86222
     IL         1781    1      1 1.00000     0.0 17.0214 5.61374 4.81691     0.0
SALIDA
   1 EL         1780    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3217.39   Dev.  1786.33   Max.  6376.70   Min.  7.08942


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50014 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication     3   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     5030
TAQUILA
   1 EL         5030 3182   3182 1563.63 921.656 6267.37 1115.96 1829.43 6.47163
     IL         1848    1      1 0.99980 0.01412 15.8362 5.40765 4.82712 1.99383
SALIDA
   1 EL         1847    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3040.55   Dev.  1809.28   Max.  6269.97   Min.  2.08092


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1          0.99980 0.01412 1.00000     0.0 0.50014 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication     4   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     4892
TAQUILA
   1 EL         4892 3107   3107 1566.76 881.559 6397.18 1201.52 1940.59 5.35182
     IL         1785    1      1 1.00000     0.0 16.4186 5.60325 4.78934     0.0
SALIDA
   1 EL         1784    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3296.10   Dev.  1853.23   Max.  6401.78   Min.  5.07617


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50014 0.50000 1.00000
```



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication     5   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     5050
TAQUILA
   1 EL         5050 3263   3263 1631.88 953.397 6471.71 1148.20 1922.97 3.71882
     IL         1787    1      1 1.00000     0.0 16.2677 5.59767 4.78234     0.0
SALIDA
   1 EL         1786    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3247.92   Dev.  1909.75   Max.  6477.53   Min.  6.66893


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50014 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication     6   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth    Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     5067
TAQUILA
   1 EL         5067 3257   3257 1609.16 931.191 6372.86 1170.23 1908.31 3.07411
     IL         1810    1      1 1.00000     0.0 16.4449 5.52503 4.73500     0.0
SALIDA
   1 EL         1809    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3279.15   Dev.  1815.54   Max.  6378.13   Min.  11.4172


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50014 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    7   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     4869
TAQUILA
   1 EL         4869 3039  3039 1536.91 876.493 6287.77 1185.39 1888.43 3.53820
     IL         1830    1     1 1.00000     0.0 16.4370 5.46301 4.71246     0.0
SALIDA
   1 EL         1829    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3157.02   Dev.  1811.14   Max.  6287.81   Min.  10.4516


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50014 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    8   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     4812
TAQUILA
   1 EL         4812 3021  3021 1493.67 875.664 6232.47 1132.26 1819.63 5.17734
     IL         1791    1     1 0.99979 0.01460 16.4538 5.58442 4.76059 2.13205
SALIDA
   1 EL         1790    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3045.29   Dev.  1756.79   Max.  6233.49   Min.  0.06071


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         0.99979 0.01460 1.00000     0.0 0.50014 0.50000 1.00000
```



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    9   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     5020
TAQUILA
   1 EL         5020 3205  3206 1585.27 914.730 6425.85 1138.83 1879.24 0.60779
     IL         1815    1     1 1.00000     0.0 15.6168 5.51140 4.78056     0.0
SALIDA
   1 EL         1814    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3157.07   Dev.  1845.87   Max.  6430.38   Min.  9.82691


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50014 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication   10   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m   0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.     4970
TAQUILA
   1 EL         4970 3128  3128 1570.47 887.781 6276.20 1215.05 1934.72 0.07529
     IL         1842    1     1 1.00000     0.0 16.5887 5.43122 4.73827     0.0
SALIDA
   1 EL         1841    0     1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3281.54   Dev.  1826.42   Max.  6277.07   Min.  11.7427


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
   U_TAQUILA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50014 0.50000 1.00000
```

- **Simulación de un Sistema de Taquilla Simple utilizando Tiempos de Permanencia tomados de Distribuciones Exponencial – Normal a través de la Técnica Bootstrap**

Taquilladosfuncionesex_norboot Standard Output

File

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    1   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.  228110
TAQUILLA
   1 EL      228110143218143218 73617.1 41462.9 6333.47 1218.74 1952.81 0.21836
     IL        84892    1      1 0.99998 .467- 2 14.6822 0.11773 1.07355 0.21836
SALIDA
   1 EL        84891    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3274.89   Dev.  1874.49   Max.  6333.47   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         0.99998 .467- 2 1.00000     0.0 0.50000 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    2   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h  0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.  227033
TAQUILLA
   1 EL      227033143794143878 68146.7 41400.2 6192.91 1090.85 1811.40 3.82052
     IL        83239    1      1 0.99962 0.01954 14.6822 0.12003 1.08954 3.82052
SALIDA
   1 EL        83238    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  2975.35   Dev.  1828.29   Max.  6192.91   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         0.99962 0.01954 1.00000     0.0 0.50000 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    3   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt   MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.  226749
TAQUILLA
   1 EL       226749147368147553 73877.2 42817.4 6465.36 1142.41 1909.69 0.62694
     IL        79381    1      1 0.99994 .792- 2 14.6822 0.12593 1.10928 0.62694
SALIDA
   1 EL        79380    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3263.31   Dev.  1869.89   Max.  6465.36   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         0.99994 .792- 2 1.00000     0.0 0.50000 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    4   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt   MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.  229865
TAQUILLA
   1 EL       229865148151148172 72971.5 42358.2 6270.58 1158.54 1869.53 0.12722
     IL        81714    1      1 0.99999 .357- 2 14.6822 0.12233 1.09770 0.12722
SALIDA
   1 EL        81713    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3259.10   Dev.  1728.14   Max.  6270.58   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         0.99999 .357- 2 1.00000     0.0 0.50000 0.50000 1.00000
```



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    5   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt   MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.  229259
TAQUILLA
   1 EL       229259151293151361 77642.7 43996.1 6691.65 1138.76 1946.88     0.0
     IL        77966    1      1 1.00000     0.0 14.6822 0.12825 1.11600     0.0
SALIDA
   1 EL        77965    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3348.69   Dev.  1935.32   Max.  6691.65   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50000 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    6   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time  0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt   MeanSt     Dev    T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.  226349
TAQUILLA
   1 EL       226349139905139905 71481.0 40848.6 6222.89 1203.22 1886.73     0.0
     IL        86444    1      1 1.00000     0.0 14.6822 0.11563 1.06119     0.0
SALIDA
   1 EL        86443    0      1     0.0     0.0     0.0     0.0     0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3150.63   Dev.  1784.87   Max.  6222.89   Min.       0.0


Var/Ind                 Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1         1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50000 0.50000 1.00000
```

```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    7   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   233832
TAQUILLA
   1 EL       233832151683151920 76578.7 44714.5 6561.86 1128.83 1913.56 15.0351
     IL        82149     1      1 0.99850 0.03875 14.6822 0.12147 1.09549 15.0351
SALIDA
   1 EL        82148     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3213.21    Dev.  1930.20   Max.  6561.86   Min.        0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          0.99850 0.03875 1.00000     0.0 0.50000 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    8   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   231674
TAQUILLA
   1 EL       231674150041150041 73984.9 43865.2 6479.67 1108.66 1866.41 3.48761
     IL        81633     1      1 0.99965 0.01867 14.6822 0.12238 1.09849 3.48761
SALIDA
   1 EL        81632     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3146.45    Dev.  1864.04   Max.  6479.67   Min.        0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          0.99965 0.01867 1.00000     0.0 0.50000 0.50000 1.00000
```



```
Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication    9   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   230571
TAQUILLA
   1 EL       230571146472146663 74915.6 41813.4 6364.81 1222.52 1945.86      0.0
     IL        84099     1      1 1.00000      0.0 14.6822 0.11889 1.07436      0.0
SALIDA
   1 EL        84098     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3351.80    Dev.  1801.22   Max.  6364.81   Min.        0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50000 0.50000 1.00000


Time    10000.00 Time Stat.  10000.00  Replication   10   0/ 0/    0  0h   0m   0s
Elapsed time   0h   0m  0.0s
Nod/Ind Ant/Li #Ent Lgth   Max     Mean     Dev    MaxSt    MeanSt     Dev     T.Free
LLEGADA
   1 # Gen.   233092
TAQUILLA
   1 EL       233092152252152252 76804.1 43534.9 6626.09 1139.58 1928.18      0.0
     IL        80840     1      1 1.00000      0.0 14.6822 0.12367 1.10086      0.0
SALIDA
   1 EL        80839     0      1      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0 10000.00
  Time in System: Mean  3285.91    Dev.  1915.16   Max.  6626.09   Min.        0.0


Var/Ind                  Mean(t) Dev.(t)    Max.    Min. Mean(v) Dev.(v)  Actual
  U_TAQUILLA  1          1.00000     0.0 1.00000     0.0 0.50000 0.50000 1.00000
```