UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
NÚCLEO UNIVERSITARIO "RAFAEL RANGEL"
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

DISEÑO DE UNA GUIA DE NIVELACIÓN MATEMÁTICA

(Caso: Estudiantes que ingresan a la carrera Licenciatura en Educación Mención Física y Matemática en el Núcleo Universitario Rafael Rangel de la Universidad de Los Andes durante el semestre A-2012)

Tutor: Prof. José Romano.

Autores:

Rosario V. Marbelys del C.

Viloria V. Reinaldo J.

Trujillo, Edo. Trujillo

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
NÚCLEO UNIVERSITARIO “RAFAEL RANGEL”
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

DISEÑO DE UNA GUIA DE NIVELACIÓN MATEMÁTICA

(Caso: Estudiantes que ingresan a la carrera Licenciatura en Educación Mención Física y Matemática en el Núcleo Universitario Rafael Rangel de la Universidad de Los Andes durante el semestre A-2012)

Autores:

Rosario V. Marbelys del C.

Viloria V. Reinaldo J.

Trujillo, Edo. Trujillo

Agradecimientos:

A Dios Todopoderoso por guiar con su Santo Espíritu cada paso emprendido en este caminar.

A nuestros padres que son pilares fundamentales en cada uno de los logros alcanzados.

Al Profesor José Romano por el apoyo brindado durante el desarrollo del presente trabajo.

A nuestros familiares y amigos por cada una de las oraciones en las que nos encomendaron y por la ayuda brindada cuando más se les necesito.

A la ilustre Universidad de Los Andes y al conjunto de Profesores que la conforman por contribuir en nuestra formación académica.

Los autores.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
NÚCLEO UNIVERSITARIO "RAFAEL RANGEL"
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA

DISEÑO DE UNA GUIA DE NIVELACIÓN MATEMÁTICA

Autores: Marbelys Rosario. Reinaldo Viloria
Tutor: José Romano
Fecha: Abril 2013

RESUMEN

El inicio de una carrera universitaria implica para muchos bachilleres nuevas dificultades; quienes ingresan a la carrera de Educación mención Física y Matemática en el NURR-ULA, deben afrontar gran cantidad de asignaturas relacionadas con la matemática y esto suele ser motivo de temor puesto que no se sienten suficientemente preparados para alcanzar las exigencias que estas plantean. Basados en la experiencia de los investigadores se afirma que gran parte de los estudiantes presenta dificultades desde las primeras asignaturas en lo referente a la matemática. Esto ocasionado por la diferencia de nivel entre herramientas y conocimiento del estudiante respecto a la exigencia que la carrera le presenta. Para afrontar dicha problemática se plantea elaborar una Guía de Nivelación que permita a los estudiantes, usándola apropiadamente, obtener las herramientas que facilitaran el desarrollo de su proceso académico, presentándoles contenidos de manera sencilla y ofreciéndoles un método de resolución de problemas (Método. Polya). En la investigación se describen las secciones de la guía, el método a emplear en la resolución de problemas y definiciones reflejando que la investigación es de tipo descriptiva y se emplea el método no experimental, presentando como muestra a los autores. La estructura de la guía consta de varios temas estudiados en el bachillerato, cambiando la forma usual de presentarlos de manera que cada tema se lleva a su expresión más sencilla para que el estudiante sea constructor de su propio conocimiento. Se implementó la resolución de problemas como medio para afianzar el conocimiento y la aplicación de la teoría en situaciones particulares a través del método de Polya. Se concluyo que, por medio de esta Guía puede llegarse a una nivelación ya que facilita herramientas que maximizan el conocimiento teórico, el razonamiento metodológico y la creatividad.

Términos claves: nivelación, problemas, método de resolución, construcción de conocimiento.

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

La matemática ha sido definida como una ciencia deductiva que estudia propiedades abstractas, sin embargo aunque esta ciencia no muestre sus elementos y leyes de forma tangible, verifica sus propiedades en la practica cotidiana, ya bien sea a través de situaciones sencillas como cuando se realizan compras diarias o en situaciones complejas como elaboración de medios tecnológicos, teorías administrativas, y así en muchos otros campos que se puedan pensar como campos distantes a esta ciencia. Debido a la importancia que ha cobrado esta ciencia en el mundo cotidiano, siempre en los programas educativos, tanto en la primaria como en la secundaria, de tal manera que todos puedan aprender a desarrollar distintas operaciones en esta área.

La enseñanza de la matemática ha variado de una u otra forma con el transcurrir del tiempo, con la intención de facilitar a los estudiantes su comprensión; aunque se han realizado distintas transformaciones y se han incorporado diversas estrategias que permiten al profesor despertar en sus estudiantes el interés por la asignatura es común observar el desarrollo de estas clases sólo como clases tradicionales, ocasionando esto la apatía hacia la materia por la mayoría de los estudiantes. En la actualidad la enseñanza de la matemática presenta ciertas deficiencias, reflejadas en el poco dominio que presentan los estudiantes al ubicarse en situaciones donde se les hace necesario aplicar propiedades fundamentales que se supone ya se han adquirido en los años de estudios realizados.

Al observar el desarrollo de las clases de matemáticas en la enseñanza secundaria queda en evidencia que la mayoría de los profesores centran su atención en la resolución de ejercicios "tipo", metodología que afianza en los alumnos el interés único por obtener la nota aprobatoria de la evaluación dejando a un lado el deseo de aprender para aplicar. El daño causado en los estudiantes se hace notorio en aquellos que deciden formarse en alguna profesión que requiere la profundización en el estudio de esta ciencia, puesto que en el periodo universitario los profesores encargados de impartir la enseñanza de esta materia inician sus clases tomando como base el perfil que debe estar cumpliendo los estudiantes en ese nivel de estudio, sin embargo es notable que muy pocos estudiantes cumplen este perfil, y por lo tanto los profesores en algunos casos modifican lo que tenían planificado trabajar realizando primero una nivelación y en otros casos continúan trabajando con los contenidos que le corresponden, razón por la cual los alumnos si desean tener éxito en la asignatura deben comenzar un proceso de nivelación extra a la materia.

Dentro de la realidad antes mencionada se hace énfasis en aquellos estudiantes que se plantean acercarse de manera formal a la matemática y deciden estudiar una carrera que le permita adquirir conocimientos respecto a esta ciencia y al mismo tiempo que le brinden herramientas para enseñarla a otros. En el Núcleo Universitario "Rafael Rangel" de la Universidad de Los Andes la carrera encargada de formar personas en esta área es la Licenciatura en Educación Mención Física y Matemática y, para sorpresa de muchos parte de los estudiantes que ingresan por esta mención, carecen de herramientas para cursar las primeras materias como: Introducción a la Matemática y Matemática I-95. Es por ello que el presente trabajo tiene como objetivo el diseñar una guía que sirva como herramienta de nivelación a los estudiantes que deciden iniciar estudios en esta carrera.

Los temas seleccionados para elaborar la guía son de algún modo temas básicos que constituyen una especie de andamiaje entre una materia y otra en la mención, además de ello brinda un método para la resolución de problemas, este método toma como referencia el planteado por G. Polya en su libro *Como Plantear y Resolver Problemas*. La estructura del presente trabajo de investigación es la siguiente:

El Capítulo I consta del planteamiento y formulación del problema, objetivos, justificación.

El Capítulo II comprende los antecedentes relacionados a la investigación, las bases teóricas y definición de los términos básicos.

El Capítulo III muestra la metodología empleada para el desarrollo de dicha investigación, tipo, diseño, selección de la muestra y técnicas aplicadas para recolectar la información y así especificar la manera de cómo se abordo la misma.

El Capítulo IV es aquí donde se hace la presentación de la guía que se ha diseñado para la nivelación.

El Capítulo V se presenta la guía como tal, mostrando su estructura y contenido, de la manera siguiente:

Problemas de Iniciación: esta sección está constituida por una serie de problemas sencillos y tiene por objetivo presentar algunas ideas sugeridas por G. Polya al momento de resolver un problema; además permite que el estudiante observe que este método es aplicable tanto en problemas sencillos como aquellos que se resolvían en los primeros años de educación como en problemas algo más complejos.

Números reales: en esta sección se trabaja de manera particular con las operaciones descritas en los números reales enfocadas en los números racionales también conocidos como números quebrados o fraccionarios.

Trigonometría: tiene como finalidad que el lector comprenda y aplique las razones trigonométricas, en situaciones particulares, es por ello que se comienza definiendo cada una de estas al mismo tiempo que se brindan herramientas que facilitan la interacción con las mismas.

Exponenciales y Logaritmos: se parte con la historia de Sessa, teniendo como objetivo encaminar al lector a plantearse una concepción sobre que es la función exponencial, mostrando situaciones que requieren hacer uso de esta en forma inversa definiéndose así el logaritmo, igualmente se trabaja de manera que el lector construya la definición, se presentan algunas propiedades y se plantean los ejercicios y problemas a resolver.

Funciones: Se inicia este tema con una definición informal de lo que es una función para fijar una base sobre la cual anclar la definición formal, utilizando la ejemplificación se explica en cuales casos existe inyectividad o sobreyectividad, se expresa formalmente qué es el dominio y el rango, se mencionan algunos tipos de funciones y por último se presentan éstas como instrumento para el estudio de situaciones reales.

Geometría (Cálculo de áreas): se "define" la geometría, seguidamente se presentan varias figuras y la manera de calcular su área, basándose en esto se plantea como calcular el área de figuras compuestas.

El Capitulo VI expone las conclusiones y se presentan algunas recomendaciones.

CAPÍTULO I: EL PROBLEMA

Planteamiento del Problema

El iniciar una carrera universitaria que implique una interacción con la matemática aun de manera leve, crea en la mayoría de los estudiantes un estado de preocupación e incluso de temor que luego se convierte en desinterés y rechazo, esto, aunque pueda sonar contradictorio, sucede incluso entre los estudiantes de carreras que tienen a la matemática como base. En muchos de los casos estos temores se fundamentan en experiencias de estudiantes que previamente han participado de las asignaturas y que transmiten sus vivencias negativas a otros que las afrontan por primera vez.

El ser humano, por naturaleza tiene temor a lo que desconoce y, a pesar de que un estudiante universitario se ha visto relacionado con la matemática durante todos los años de sus estudios en la educación primaria y media diversificada, sigue viendo a esta como un campo desconocido, en consecuencia, cuando inicia sus estudios superiores afronta un nivel de exigencia mayor en un área de estudio con la cual nunca afianzo su relación, sería interesante preguntarse como el estudiante sin haber consolidado las bases de su conocimiento matemático logró avanzar de año en año, pero no es este el objeto de estudio en este momento. El punto de mayor relevancia es, que sea cual sea la razón, tenemos un grupo de personas iniciándose en educación superior con amplias deficiencias respecto al conocimiento matemático y al modo de emplearlo, lo que les causará dificultades de comprensión de los nuevos contenidos, bajo rendimiento académico y falta de motivación.

La matemática requiere conocer una serie de reglas, de operaciones, de relaciones, de símbolos cuya cantidad durante la vida del estudiante va incrementándose es decir, nada de lo anteriormente estudiado es irrelevante, siempre servirá como fundamento para colocar sobre esto nuevo conocimiento. Es una certeza que un edificio sin una firme base no se sostiene, igualmente en matemáticas no comprender de manera clara las definiciones elementales, dificulta enormemente la comprensión de nuevos conceptos pues estos no tienen donde anclarse en medio del conocimiento de los estudiantes.

Se podría pensar que los profesores son los responsables de consolidar las bases y por lo tanto deberían retomar lo que no se afirmó durante los estudios previos a la educación superior, pero no es así muy a pesar de que ellos puedan tener esta intención, llevar una asignatura de tal manera haría imposible cubrir los contenidos respectivos de la misma, sería entonces más apropiado que antes de iniciar su proceso de formación académica los estudiantes contaran con una herramienta que les permita nivelar los conocimiento que poseen con los que deberían tener luego de concluir la educación media.

Por otro lado, en cantidades mucho menores se tiene estudiantes que cuentan con los conocimientos pero que catalogan a la matemática como aplicación de operaciones y resolución de ejercicios, mas no la ven como una opción para resolver problemas o afrontar situaciones reales, lo cual es necesario en carreras del área de ingeniería y ciencias, puesto que gran parte de los fundamentos de estas son la matemáticas, al igual que en las que implican la enseñanza de esta ciencia. El ver a la matemática de manera superficial ocasiona en el estudiante el deseo de alcanzar una calificación aprobatoria pero deja a un lado la posibilidad de emplearla para ampliar sus capacidades de análisis y de maximizar sus aptitudes en lo que a resolución de problemas respecta.

Al fijar la atención en la realidad planteada son notables dos situaciones, quienes no poseen las herramientas requeridas para afrontar una carrera universitaria y aquellos que podrían desenvolverse con facilidad si el nivel de exigencia se basara en sólo responder a preguntas o interrogantes elementales sin incluir un análisis de la situación, ambos casos son preocupantes pues estos serán profesionales que deberían contar con cualidades analíticas y amplios conocimientos en lo relacionado con su área de formación. Si se enfoca la atención en aquellos que se están preparando para ser responsables de la enseñanza de la matemática y se forman en medio de deficiencia o con una visión en la cual la matemática está fuera de la realidad o es un mundo distante y que basta con conocer lo básico y obtener una determinada calificación será inevitable que éstos a su vez multipliquen los errores y quienes desempeñen el rol de sus estudiantes terminen en la misma situación que ellos al iniciar sus estudios universitarios.

Determinar el por que un estudiante egresado del quinto año de bachillerato esté en alguna de las posiciones que se menciona y que cada vez esto sea más frecuente y notable, pero no es eso lo que se busca sino un medio por el cual esto no siga extendiéndose, sobre todo por aquellos que se forman para ser especialistas en la enseñanza de la matemáticas; específicamente en la Universidad de Los Andes – Núcleo Universitario "Rafael Rangel" (NURR) es notable la deficiencia en los estudiantes de licenciatura en Educación Mención Física y Matemática puesto que asignaturas como Introducción a la Matemática y Matemática I, que son de iniciación, causan dificultades a los estudiantes de esta carrera.

Formulación del Problema

En vista de la situación planteada no podría buscarse como solución inmediata una transformación total de la manera de enseñar matemática y dar por perdidos a los que ahora están estancados en sus estudios, seria en este caso más factible buscar la manera de que estos nivelen sus conocimientos y desarrollen las capacidades de análisis para facilitar la comprensión y resolución de problemas. En función de esto se plantea la siguiente incógnita *¿Podrá elaborarse una guía que permita ayudar a nivelar los conocimientos del bachillerato en los estudiantes que ingresan a la carrera de Educación Mención Física y Matemática en el NURR-ULA?*

Objetivo general

Elaborar una guía de nivelación para los estudiantes que ingresan a la carrera de Educación Mención Física y Matemática en el NURR-ULA.

Objetivos específicos

1. Describir conceptos de Matemática de bachillerato en forma sencilla y comprensible.
2. Presentar el Método de George. Polya como una herramienta que facilita y orienta la comprensión y resolución de problemas de matemática de Bachillerato.
3. Construir ejemplos que ilustren las definiciones planteadas.
4. Aplicar el método de Polya para la resolución de ejercicios.

Justificación

Diversas investigaciones muestran como realidad el hecho de que la matemática suele ser vista por gran parte de la población estudiantil como aquella asignatura fuerte que hará de su ciclo de estudio el dolor de cabeza diario, sin embargo existen estudiantes para los cuales esta es una materia que presenta un mundo por descubrir, haciendo esto que cada logro obtenido allí lo impulse a querer buscar y entender algo nuevo; comparando estas dos situaciones es natural preguntarse ¿Qué ha sucedido entonces para que unos se sientan atraídos y otros totalmente atemorizados con respecto a esta asignatura?, ¿qué tipo de matemática se está enseñando?, ¿qué tipo de matemática se debe enseñar?, ¿cómo se ha enseñado?. Para la primera interrogante suelen presentarse distintas respuestas, fundamentadas éstas en las respuestas dadas a cada una de las interrogantes que le siguen. Al orientar la mirada hacia los planes de estudio y los sistemas curriculares que se estén utilizando el país, se obtienen las respuestas de manera formal a dichas interrogantes, ya que en estos se describe el perfil que deben alcanzar los estudiantes durante cada año de estudio en cada una de las materias cursadas durante el año escolar.

En Venezuela gran parte de las instituciones educativas rigen sus programas de estudio tomando como guía el currículo del Subsistema de Educación Secundaria Bolivariana de los Liceos Bolivarianos, que considera elemental “desarrollar los procesos matemáticos para el estudio de situaciones, tendencias, patrones, formas, diseños, modelos y estructuras de su entorno, con énfasis en la participación y comprensión de la realidad para la transformación social” (p. 16), evidenciando ésto que la enseñanza de la matemática debe orientarse a que el estudiante sea capaz de aplicar lo aprendido para afrontar situaciones de su entorno.

Enseñar matemática para aplicar es una labor difícil para el docente, pues para los alumnos ya los avances se han alcanzado, por lo tanto parece no tener sentido, desarrollar soluciones donde invierten tiempo cuando se cuenta con un mundo tecnológico capaz de resolverlo en segundos, como consecuencia no sienten la necesidad de que deban aprender a aplicar la matemática. Aunado a esto, se ubican casos donde los profesores encargados de dictar esta asignatura "enseñan" única y exclusivamente lo que el libro de texto les presente, teniendo como objetivo que sus alumnos reproduzcan en el momento de la evaluación los métodos y procedimientos por él mostrados, sin importar el hecho que estos comprendan o no lo que están "aprendiendo" contribuyendo así en que cada año escolar vaya dejando espacios entre unos contenidos y otros.

El resultado de la unión de estas situaciones se refleja en el momento donde los estudiantes están ubicados en realidades que les exigen poner en manifiesto los conocimientos obtenidos en años anteriores, y que al tratar de hacerlo se pueden notar los huecos que existen entre estos conocimientos. Así lo afirma Grisolía (2007), cuando expone que "En general, los estudiantes muestran grandes dificultades en el uso de operaciones matemáticas, el manejo de ecuaciones y el desarrollo de habilidades para el análisis lógico-matemático de situaciones problemáticas" (p. 34) permitiendo ver que la enseñanza no ha sido del todo solida y que si se desea avanzar se tienen que llenar estos espacios, para ello el estudiante ya bien sea por voluntad o por que el profesor lo guie debe emprender un proceso de nivelación que le permita llenar estos espacios que le servirán de conexión con los nuevos conocimientos.

En el NURR-ULA se pueden observar grandes deficiencias en los alumnos que cursan las primeras matemáticas mostradas en el plan de estudio de la carrera Educación Mención Física y Matemática; partiendo de estas se decide diseñar una guía que permita a los estudiantes establecer conexión entre los conocimientos adquiridos en la etapa del bachillerato y los que se adquirirán en estas materias. A su vez esta guía busca llenar aquellos espacios que se han dejado y que son fundamentales para el progreso en la carrera, son diversos los temas que se pueden seleccionar para el diseño de una guía sin embargo se decide trabajar los siguientes: análisis de problemas, números racionales, trigonometría, exponenciales y logaritmos, funciones, geometría (cálculo de áreas) debido a que en éstos se evidencian la mayoría de las dificultades.

El diseño de la guía permitiría brindar a los alumnos aquella orientación y secuencia en los temas respecto a los cuales se deba realizar la nivelación, garantizando de cierta forma el éxito de este proceso y el mejor aprovechamiento del tiempo empleado para ejecutarlo.

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO

Antecedentes

En los últimos tiempos se refleja con mayor notoriedad las dificultades que se están presentando en el ámbito educativo, cada día en un aula de clase se muestra la apatía que presentan tanto estudiantes como profesores por llevar a cabo este acto de enseñanza aprendizaje. En el caso de las ciencias, específicamente el de las matemáticas, esta realidad se hace más palpable, como muestra de ello basta observar el rendimiento académico presentado por los estudiantes en esta asignatura, esto ocasionado, de alguna manera, por la forma en que se presenta la misma, es decir memorización y reproducción de conocimientos, desligado del verdadero fin de la enseñanza de la matemática, en torno a esto, Angulo (2006) hace mención a la enseñanza de la matemática como un acto a través del cual se proporcionan medios de reflexión para evaluar y disciplinar estructuras cognoscitivas relacionados con un marco referencial.

Precisamente esta visión se ha perdido y se ha comenzado a enseñar una matemática que no consiste en usar ingeniosamente los conocimientos sino en los que solo hay que fijar la forma de hallar la solución de cada tipo de ejercicio, acostumbrando a los estudiantes a no resolver problemas sino utilizar formulas o a repetir un mismo procedimiento, es decir basta con memorizar una serie de pasos para poder afrontar alguna situación, convirtiéndose esto en simple rutina, produciendo a su vez el aburrimiento y la desmotivación.

Esto genera entre los estudiantes una sensación de que la excelencia es inalcanzable por ello procuran solo trabajar con único objetivo "aprobar la asignatura", sin importar que la calificación obtenida sea la mínima aprobatoria.

Se ha querido afrontar esta situación disminuyendo el nivel de exigencia, lo que ha sido contraproducente puesto que los estudiantes al ver que se les exige menos se dedican menos.

Tal realidad impulsa a desarrollar nuevas metodologías o a realizar la aplicación de las ya existente con mayor eficacia, el método didáctico utilizado ha sido inadecuado para fijar en los estudiantes los conocimientos que el plan educativo ha previsto que estos obtengan, al igual que se ha perdido la capacidad de crear en estos el interés y capacitarlos en la acción de razonamiento que la matemática de manera natural genera.

Peña (2008), llevó a cabo una investigación titulada Método de Polya para facilitar la resolución de problemas relacionados con áreas de figura planas, el cual tuvo como objetivo central el diseño de estrategias que faciliten la resolución de problemas usando el método de Polya. La investigación se caracterizo por ser de campo e incluyó como población a cinco docentes y 263 estudiantes. Por medio de los resultados se evidenció que los docentes aplican estrategias que no proporcionan la reflexión necesaria al momento de la resolución de problemas. Por otro lado se reflejo por parte de los docentes las debilidades conceptuales sobre los elementos principales de los problemas dando mayor importancia al resultado que el camino recorrido para llegar a él.

Peñaloza (2011), presentó el trabajo titulado Selección de sugerencias y preguntas que modifican la manera de abordar problemas en matemática: basada en ideas de George Polya. La finalidad de esta investigación radicó en demostrar la efectividad de los principios propuestos por G. Polya para modificar la manera en que se plantean y resuelven problemas aplicando preguntas claves que permiten al estudiante analizar el proceso a través del cual se le da solución al problema.

De los resultados obtenidos, se evidenció que el apoyarse en sugerencias que orientan el desarrollo del problema, permiten al estudiante encontrar la solución de éste comprendiendo cada uno de los datos que se presentan y la manera en que deben ser empleados, alcanzando así el análisis del problema. Las sugerencias empleadas pueden ser aplicadas a diversos problemas, incluso a distintas situaciones que puedan estar desligadas de alguna manera de la matemática, por lo que interiorizarlas no se convierte en un proceso mecánico.

Por otra parte Guadalajara (2012), realizó un estudio denominado El método de Polya: una alternativa para resolver problemas de ajedrez y matemática. El objetivo de esta investigación fue contribuir como avance en la resolución de problemas de matemática y ajedrez, aplicando para ello el método planteado por Polya (1981), en su libro *Como plantear y resolver problemas*, como estrategia de enseñanza aprendizaje en un entorno ajedrecístico-matemático en el sistema educativo, viendo todo bajo una nueva perspectiva.

Para el estudio, se utilizó la investigación cualitativa, y por ser muy pocas las investigaciones en este ámbito se considera de tipo exploratoria. Del trabajo realizado el autor concluyó que el método planteado por Polya (1981), es una herramienta que favorece la enseñanza y resolución de problemas matemáticos, y por su generalidad es aplicable a otros tipos de problemas.

Ahora bien, los dos antecedentes mencionados anteriormente son significativos para la presente investigación debido a que los dos demuestran la aplicación y efectividad del método planteado por Polya en su libro *Como plantear y resolver problemas*, aspectos estrechamente relacionados con la presente investigación, puesto que esta busca diseñar una guía que contribuya a la nivelación de los conocimientos matemáticos adquiridos durante la educación media y brindar una herramienta para la resolución de problemas matemáticos.

Bases teóricas

A nivel de educación media se trabajan contenidos de manera reiterada en los distintos años que conforman esta etapa, los cuales crean una base de conocimientos que se supondría debe ser suficientemente firme para soportar el estudio universitario de los egresados, a continuación se describen algunas capacidades que debería poseer un egresado del nivel medio de educación.

1. Convierte números fraccionarios a decimales y viceversa.
2. Conoce y utiliza las convenciones para representar números fraccionarios o decimales en la recta numérica.
3. Resuelve problemas utilizando el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.
4. Resuelve problemas geométricos que impliquen el uso de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en triángulos.
5. Resuelve problemas aditivos que implican el uso de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos.
6. Resuelve problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y potencias de números naturales y decimales.
7. Resuelve problemas que implican el uso de las leyes de los exponentes y de la notación científica.
8. Resuelve problemas que impliquen calcular el área y el perímetro de círculos.
9. Resuelve problemas que implican el cálculo de porcentajes o de cualquier término de la relación: Porcentaje = cantidad base × tasa.
10. Compara cualitativamente la probabilidad de eventos simples.
11. Resuelve problemas aditivos con monomios y polinomios.

12. Resuelve problemas en los que sea necesario calcular cualquiera de las variables de las fórmulas para obtener el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos. Establece relaciones de variación entre dichos términos.
13. Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con expresiones algebraicas.
14. Justifica la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo o polígono y utiliza esta propiedad en la resolución de problemas.
15. Representa sucesiones de números enteros a partir de una regla dada y viceversa.
16. Resuelve problemas que implican calcular, interpretar y explicitar las propiedades de la media y la mediana.
17. Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
18. Resuelve problemas que implican determinar la medida de diversos elementos del círculo, como: ángulos inscritos y centrales, arcos y sectores.
19. Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.
20. Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.
21. Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
22. Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
23. Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen.

24. Lee y representa (gráfica y algebraicamente) relaciones lineales y cuadráticas.
25. Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Se debe tener en cuenta que estos contenidos presentados son coincidentes con la exigencias de las asignaturas Introducción a la Matemática (Operaciones con números Reales, Funciones Reales, Cónicas, Logaritmos y Exponenciales, Graficar en el Plano Cartesiano) y Matemática I, ambas son iniciales en el pensum de estudio de la carrera de educación mención Física y Matemática en el NURR-ULA. Esto nos permite verificar que los estudios realizados en el bachillerato deberían al menos en teoría ser suficientes para iniciar sin tropiezos en la carrera antes mencionada, mas en la realidad no ocurre así lo cual indica la necesidad de nivelar los conocimientos. No es como tal un proceso de iniciación en matemáticas sino uno que consiste en darle el sentido que le corresponde y en llenar los vacíos que pudieron quedar presente en el desarrollo de la educación media, al igual que presentar técnicas novedosas que sean de utilidad a los estudiantes que se formarán en esta carrera, con mayor intención estos deberían estar realmente preparados pues serán multiplicadores del conocimiento matemático.

Alderete, M. J y Porcar, M. L (2006) afirman:

> La matemática es una ciencia creada por el hombre y cultivada desde tiempo remotos por espíritus selectos para los cuales su estudio significó una profunda inspiración. (…) Hacer matemáticas es realizar las denominadas actividades matemáticas que, en gran parte, se identifican con una actividad de modelización matemática (…) Cabe destacar que, entre quienes estudian matemática hay genios creadores, personas creadoras y productos creativos. (p. 9).

Es notable que dentro del estudio de la matemática no se puede ser un simple espectador sino que se requiere una participación activa y creativa dentro de tal estudio, no podemos suponer que el problema es la matemática o que la nuevas generaciones están incapacitadas para estudiarlas y comprenderlas, sino que el problema esta en cómo la hemos presentado y en factores externos que han influenciado la capacidad de comprensión y de análisis de la matemática.

Se debe ahora prestar atención al proceso formativo, no enfocar sólo nuestra atención en lo que se enseña sino también en el cómo se enseña, es decir la matemática que estudiamos debe llevarnos a afrontar situaciones de interés que promuevan en los estudiantes la intención de maximizar sus capacidades de análisis y que les permitan verificar, que por medio del estudio matemático, todo lo relacionado con sus posibilidades de resolución de situaciones naturales se amplían y que la matemática consiste en construir estructuras cognoscitivas y desarrollar la creatividad al afrontar problemas o situaciones específicas.

Según Rico¸ Sierra y Castro (2000) la educación matemática se considera así: "todo sistema de conocimiento, instituciones, planes de formación y finalidad formativas que conforman una actividad social compleja y diversificada relativa a la enseñanza y aprendizaje de la matemática" (p. 352). Basándose en esto se puede comprender que no es importante solamente el conocimiento como tal sino la manera de presentarlo y todo lo que rodea el proceso de enseñanza, entre esto se menciona los programas de estudio los cuales no son desarrollados plenamente, dejando siempre entre un nivel y otro algunos vacíos que ocasionan dificultad en el asumir nuevos conocimientos y destrezas por no tener bases suficientemente firmes.

Por su parte Godino y Batanero (1996) exponen:

> La didáctica de las matemáticas estudia los procesos de enseñanza aprendizaje de los saberes matemáticos en los aspectos teóricos conceptuales y de resolución de problemas tratando de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos. Se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción (p. 18).

La didáctica de la matemática busca de manera particular el manejo del lenguaje matemático, es decir que el estudiante conozca el significado de éste y tenga las destrezas para interpretarlo y emplearlo en diferentes situaciones, de manera particular al afrontar problemas, pues por medio de la matemática y aunado a la creatividad de quien lo soluciona se puede dar respuesta a una interrogante planteada, es clave que se tenga una clara comprensión de lo planteado, por ello la matemática no puede enseñarse como simples pasos a seguir sino como el manejo de una realidad particular, que permite relacionar datos, variables y condiciones de forma tal que la interacción de estas permita alcanzar una solución.

Como se ha mencionado reiteradas veces, existen muchas deficiencias en este aspecto en los estudiantes de matemáticas puesto que la base de conocimientos que poseen es reducida, gran parte de ellos saben dar respuesta a interrogantes mas no tienen ninguna claridad en cual es el proceso que emplearon para alcanzar tal respuesta, de alguna forma esto es similar a un conductor que no comprende cual es el funcionamiento del vehículo pero que sin embargo lo conduce. Esto resulta bien mientras que las condiciones estén dadas tal y cual el estudiante las domina, mas al variar algún factor crea tal desconcierto que incluso puede producir el desinterés de afrontar el problema y optar por renunciar. Por esto es necesario que un estudiante afronte cada nivel educativo con la comprensión real de lo que estudio en el anterior.

En FUNDAR (Fundación Educacional Arauco) (2001) se expresa que: "Las guías en el proceso de enseñanza aprendizaje son una herramienta más para el uso del alumno que como su nombre lo indica apoyan, conducen, muestran un camino, orientan, encauzan, tutelan, entrenan, etc." (p. 3) y sobre las guías de nivelación, en forma particular, su objetivo es:

> Uniformar los conocimientos y destrezas en los alumnos que están atrasados respecto al curso. Al alumno le sirve para comprender contenidos, sobre todo aquellos que son conductas de entrada para otros. Al profesor le ayudan a tener una base común para sus alumnos (p. 3).

Por lo tanto una guía de nivelación constituye una herramienta práctica y útil en el proceso que implica la construcción del conocimiento de los estudiantes y de manera particular en el reforzar los conceptos y definiciones previamente estudiadas y que no lograron asumirse en su totalidad al momento de afrontarlas. De manera particular dicha guía presentaría una utilidad maximizada si se enfocara en presentar problemas que estimulen la creatividad y que impulsen al estudiante a procurar una profundización en los contenidos, pues esto permitiría una nivelación no exclusivamente en lo que al conocimiento se refiere sino a las capacidades interpretativas.

El afrontar problemas de forma continua desarrolla en los estudiantes una mayor capacidad de interpretar la realidad y de interactuar con la misma, lo cual permite por medio de las experiencias vividas una analogía entre un problema y otro ya que aparecen estructuras cognoscitivas que fortalecen la acción analítica del individuo. Por su parte López y Costa (1996) expresan:

> El proceso del aprendizaje humano desde el niño hasta el adulto, es esencialmente una actividad de resolución de problemas mediante la cual el individuo se adapta al medio, y que este proceso de resolución de problemas se lleva a cabo simultáneamente en los campos cognitivo, afectivo y psicomotor (p. 45).

Durante el proceso de aprendizaje se van adquiriendo técnicas que facilitan la producción del conocimiento, al respecto García (1998) expone:

> El proceso de resolución de problemas además de ser un elemento base en el aprendizaje, también lo es en el proceso de producción del conocimiento, así, desde la epistemología, los pensadores contemporáneos argumentan que plantear un problema es fundamental para avanzar en el conocimiento y que las teorías científicas surgen cuando los científicos, formulan, descubren o se enfrentan a campos polémicos nuevos (p. 149).

En muchos casos se confunden los ejercicios con los problemas, asignándoles a los primeros categoría de problemas, y utilizándolos para que los estudiantes puedan "aplicar" las formalizaciones elaboradas a partir de los conceptos y principios que se encuentran en las teorías científicas; esta confusión se debe a que los docentes no reconocen las características del problema desde su nivel de dificultad dado por el desconocimiento de la solución y desde los procedimientos utilizados para su resolución, características que no están presentes en un ejercicio. Pomés (1991), consciente de esta confusión afirma que "La diferencia esencial entre ejercicios y problemas, está en la exigencia de estos últimos del aporte por parte del sujeto de algo nuevo, desconocido hasta entonces" (p.78)

Por otra parte, aunque es importante reconocer que los ejercicios son herramientas útiles para que los alumnos automaticen grupos de rutinas y procedimientos, asimilen determinados algoritmos por la aplicación mecánica de los mismos o simplemente memoricen las formalizaciones por medio de transposiciones simples desde un grupo de datos y condiciones físicas hasta la expresión de las mismas en una fórmula que representa las relaciones existentes entre ellos; también es crucial entender que realizar ejercicios solamente requiere que los alumnos hagan uso de la memorización, selección y la aplicación de un grupo de fórmulas, algoritmos o patrones de resolución.

Modelos Didácticos y Resolución De Problemas

Modelo por transmisión-recepción

Este paradigma dominante en la enseñanza tradicional que consiste en un transmisor y un receptor de conocimientos, está caracterizado por:

El alumno es considerado como un depósito de conocimiento donde es posible grabar toda la información suministrada por el profesor.

El profesor se constituye como el principal artífice del proceso de enseñanza-aprendizaje, utilizando los recursos necesarios para optimizar el acto de la enseñanza verbal: repetición, asociación de ideas, analogías, contraste (mediante contraejemplos), deducción.

El contenido que se imparte debe estar lógicamente estructurado y ser de naturaleza preferentemente conceptual.

La evaluación del aprendizaje es de naturaleza esencialmente reproductiva (desarrollo de temas, cumplimentación de demostraciones, resolución de problemas-tipo, etc.).

Los problemas poseen un carácter esencialmente aplicativo y evaluador.

Se refuerza la consideración de los problemas-tipo como medio para resolver la mayoría de los problemas.

La gran parte de los problemas utilizados son cerrados y cuantitativos.

Se potencia la matemática del problema.

Se concede mayor importancia a la obtención de un resultado correcto que al propio proceso de resolución.

Modelo por descubrimiento

Este modelo ha sido publicitado y recomendado continuamente mas no es tan palpable su presencia en el campo educativo general. Las nuevas generaciones docentes han sido educadas en función de emplear métodos de enseñanza relacionados con este modelo. Las características predominantes son:

El alumno es considerado como el gran artífice del proceso de enseñanza-aprendizaje, a través de una construcción reinvención del conocimiento ya establecido.

El profesor juega un papel más o menos secundario en el aprendizaje, dependiendo de las distintas opciones del modelo (descubrimiento dirigido, semi dirigido o autónomo).

Confrontación del alumno a una situación problemática

Verificación de los datos recogidos con respecto a esa situación (se trataría de responder a la pregunta: ¿qué ha sucedido realmente?).

Experimentación en torno a dichos datos (separación de variables intervinientes y comprobación de su efecto).

Organización de la información recogida y explicación de la misma (es decir, elaboración de una teoría con respecto a la situación observada).

Los problemas suponen un medio para la adquisición de habilidades cognitivas (especialmente, el razonamiento hipotético-deductivo).

Lo que importa en la resolución es el método seguido, más que el contenido al que se refiere el problema.

Modelo constructivista

De acuerdo a lo expuesto por Díaz (2005): El constructivismo es la unión de varias líneas de pensamiento en lo que a psicológica se refiere que tienen como baluarte el hecho de que los seres racionales basan su aprendizaje en la ejecución de procesos activos y en la construcción del conocimiento, esto permite determinar los procesos y medios iniciales en la aparición del conocimiento, enfocándolo por sobre la memorización y dándole una dimensión de construcción del mismo. Además asevera que el conocimiento no se recibe pasivamente ni es copia fiel del medio. Es por ello que se considera que los estudiantes deben participar en las actividades desarrolladas en lugar de solo observar lo que se les explica.

En el constructivismo se deja a un lado la percepción de que el conocimiento se basa en la transmisión de información de una persona a otra y se procura que el aprendiz tenga el control de su aprendizaje e implemente las herramientas y bases que se le facilitan para iniciar la construcción de sus saberes, esto implica que el estudiante debe tener la iniciativa de ser protagonista en su proceso de instrucción. Los problemas deben jugar un papel esencial en el aprendizaje conceptual teniendo en cuenta que su enunciado y resolución deben estar conectados con la experiencia previa del sujeto.

El objetivo fundamental del problema será facilitar el contraste entre el conocimiento científico y los conocimientos previos del estudiante, permitiéndole partir de sus propias ideas y fundamentarlo en las definiciones para hallar la solución.

La resolución de problemas, también debería servir para un cambio de estrategias o metodológico, desde las espontáneas puestas de manifiesto habitualmente por los alumnos, a las heurísticas más propias del ámbito de resolución científica.

Complementando estos modelos y objetivos clásicos de la resolución de problemas de acuerdo con las nuevas tendencias educativas, se puede afirmar que la resolución de problemas podría permitir:

1. Diagnosticar las ideas previas de los alumnos y ayudarles a construir nuevos conocimientos a partir de las mismas.
2. Adquirir habilidades de distinto rango cognitivo.
3. Promover actitudes positivas hacia la matemática y demás ciencias.
4. Acercar los ámbitos de conocimiento científico y cotidiano, capacitando al alumno para resolver situaciones problemáticas.
5. Evaluar el aprendizaje del alumno.

Algunos factores a tener en cuenta para la Resolución de Problemas

Naturaleza del problema

Deberían combinarse en una proporción adecuada ejercicios para la verificación de leyes, cálculos matemáticos, unidades; problemas cuantitativos de una mayor complejidad; y problemas cualitativos que implican habitualmente la interpretación de situaciones y contemplando asimismo la inclusión de problemas abiertos (con más de una solución y con un carácter creativo).

Enunciado del problema

Este debería ser expresado con un lenguaje fácilmente comprensible para los alumnos e incluyendo las explicaciones adicionales, verbales y gráficas adecuadas. Asimismo, deberían graduarse los datos o pistas precisas para el hallazgo de la solución de un modo decreciente. En cualquier caso los problemas deberían estar referidos a fenómenos reales y con datos que tengan sentido. Comúnmente los problemas se enuncian en palabras, ya sea oralmente o en forma escrita. Así, para resolver un problema, uno traslada las palabras a una forma equivalente del problema en la que usa símbolos matemáticos, resuelve esta forma equivalente y luego interpreta la respuesta.

Metodología de resolución del problema.

Para describir la metodología de resolución haremos referencia al Matemático George Polya el cual nació en Hungría en 1887. Obtuvo su doctorado en la

Universidad de Budapest y en su disertación para obtener el grado abordó temas de probabilidad. Fue maestro en el Instituto Tecnológico Federal en Zúrich, Suiza. En 1940 llegó a la Universidad de Brown en EE.UU. y pasó a la Universidad de Stanford en 1942. En sus estudios, estuvo interesado en el proceso del descubrimiento, o cómo es que se derivan los resultados matemáticos. Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello, su enseñanza enfatizaba en el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados. Para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas, generalizó su método en los siguientes cuatro pasos:

1. Entender el problema.
2. Configurar un plan
3. Ejecutar el plan
4. Mirar hacia atrás

Este método está enfocado a la solución de problemas matemáticos, por ello nos parece importante señalar alguna distinción entre "ejercicio" y "problema". Para resolver un ejercicio, se aplica un procedimiento rutinario que lo lleva a la respuesta. Para resolver un problema, se hace una pausa, se reflexiona y puede ejecutarse pasos originales que no se habían ensayado antes para dar la respuesta. Esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio. Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción no es absoluta; depende en gran medida del estadio mental de la persona que se enfrenta a ofrecer una solución: Para un niño puede ser un problema encontrar cuánto es 3 + 2 o bien, para niños de los primeros grados de primaria responder a la pregunta ¿Cómo repartes 96 lápices entre 16 niños de modo que a cada uno le toque la misma cantidad? le plantea un problema, mientras que para otros esta pregunta sólo sugiere un ejercicio rutinario: "dividir ".

La implementación del método de Polya como un medio o estrategia para resolver ejercicios de temas fundamentales podría resultar como una herramienta de nivelación, ya que viene a dar como aporte una visión distinta de la matemática y enfoca su estudio como un medio para resolver situaciones especificas, esto permitiría al estudiante no solo nivelar la cantidad de conocimiento sino el nivel de razonamiento, esto en función de que el estudio universitario ha de ser mas exigente y requerirá no solo aplicación sino verdadero análisis de las matemáticas y mas aun si la línea de formación va enfocada en esta ciencia y particularmente en la enseñanza de la misma. El estudio de la matemática implementando este método se convierte en un medio que desarrolla habilidades mentales y que a su vez permitirá un mejor desenvolvimiento en otras áreas que no necesariamente se enfoquen en esta.

CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO

El marco metodológico muestra el camino que se ha recorrido desde el inicio del trabajo hasta la culminación del mismo, permitiendo precisar el tipo y diseño de la investigación, como también fundamentar el hecho de haber seleccionado una población y muestra especifica. Así mismo permite jerarquizar las técnicas utilizadas para la recolección de los datos.

Diseño y Tipo de la investigación

Todo trabajo de investigación sigue un proceso compuesto por distintos pasos que determinan el camino recorrido, son esta serie de procedimientos los que enmarcan a la investigación en un diseño y tipo determinado. De acuerdo con Hernández (2003) el diseño hace referencia a la estrategia ideada para alcanzar los objetivos propuestos en la investigación. Atendiendo a los objetivos propuestos esta investigación se lleva a cabo aplicando el diseño no experimental, definido por Hernández (2003), como aquel "que se realiza sin manipular deliberadamente variables (…) y que consiste en observar fenómenos tal y como se dan en su contexto natural, para después analizarlos" (p. 267).

En todo proceso de enseñanza y aprendizaje se presentan dificultades, éstas se hacen más constantes cuando el proceso involucra a grupos, por ello el docente está llamado a explorar los conocimientos que poseen los alumnos respecto a los niveles ya estudiados y así poder buscar el punto común a todos, de tal manera que esto le permita partir con lo que él tiene planificado facilitar. Puesto que el aprendizaje se da de distintas formas y en tiempos distintos, existen alumnos en el aula de clase con escasos conocimientos, lo que ubica al profesor y a ellos mismos en dos posiciones distintas: comenzar a trabajar en la materia evadiendo la realidad de dificultad que existe o iniciar un proceso de nivelación que le permita relacionar unos conocimientos con otros, y a su vez que aquellos adquieran la capacidad de análisis en situaciones que ameriten la aplicación de resolución de problemas. En el NURR, los estudiantes de la Licenciatura en Educación Mención Física y Matemática no escapan a esta realidad, es por ello que con el fin de orientar un proceso de nivelación para las primeras asignaturas que se deben cursar en esta carrera se decide diseñar una guía de nivelación que incluye cinco secciones.

Puesto que la motivación para el diseño de la presente guía nace de la observación no estructurada a los estudiantes en su ambiente usual y la experiencia por parte de los investigadores en situaciones particulares sin aplicar técnicas que busquen medir o asociar alguna medida, es claro notar que dicho trabajo toma el enfoque cualitativo. Pues Hernández (2003) define al enfoque cualitativo como aquel que "involucra la recolección de datos utilizando técnicas que no pretenden medir ni asociar las mediciones con números, tales como observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, evaluación de experiencias personales (…)" (p. 12), aporte que sustenta de forma directa el enfoque tomado por esta investigación.

Todo trabajo de investigación amerita de revisión bibliográfica para sustentar lo que el investigador plantea y al mismo tiempo que brinde información de los trabajos relacionados con el que se está realizando, al consultar la literatura se obtiene que en el NURR-ULA no se ha trabajado directamente en la elaboración de guías de nivelación en el estudio de temas matemáticos, sin embargo existen trabajos de grado enfocados en el proceso de mejorar la enseñanza en la matemática para un tema determinado, por lo que existe información relacionada de alguna manera con el presente trabajo. Por lo antes mencionado y lo expuesto por Hernández (2003) se considera que este trabajo se inicia como una investigación de tipo exploratoria.

De la misma manera en esta investigación se describen las características que identifican el perfil del estudiante al que va dirigida la guía, así como también la estructura de la guía diseñada, las formas de proceder ante algunos ejercicios y problemas y a su vez, la finalidad de diseñar dicha guía, por lo que poco a poco se transforma en un trabajo descriptivo, conceptualizado por Hernández (2003) como aquel que especifica propiedades, perfiles importantes de personas o cualquier otro fenómeno sometido a análisis.

Población y Muestra

En toda investigación se hace necesario seleccionar sujetos, objetos, situaciones o fenómenos, con la finalidad de ser analizados y estudiados de acuerdo al perfil en el que se enmarca el problema planteado, para el investigador de acuerdo a las características que se desea estudiar algunas veces se presenta una amplia gama de casos de los cuales el puede extraer aquellos que se identifiquen mas con su investigación y otras veces se encuentra ante la posibilidad de muy pocos casos para su estudio, inclusive hasta la existencia de un único caso, como consecuencia de esta selección se hace necesario hablar de población y muestra dentro de la investigación.

Hernández (2003), considera que al hacer referencia en toda investigación a la población se está haciendo mención al conjunto de todos esos casos que presentan las características que se están estudiando, es por ello que en el presente trabajo la población está conformada por los investigadores (estudiantes en condición de graduandos de la carrera Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA, entre los meses enero a mayo del año 2013, correspondiente al semestre A-2013).

El trabajar con toda la población dificulta el trabajo, a causa de esto surge la necesidad de seleccionar parte de esta población. Hernández (2003) expone que la muestra es “la unidad de análisis o conjunto de personas, contextos, eventos o sucesos sobre el (la) cual se recolectan los datos sin que necesariamente sea representativo del universo” (p. 302), el hecho de seleccionar una muestra facilita el trabajo a los investigadores ya que permite que el proceso de recolección de los datos y la información sea más detallado en cuanto a las características necesarias para desarrollar la investigación, además al ser menor la cantidad de personas permiten realizarlo en menor tiempo. De acuerdo al enfoque cualitativo que es en el que se enmarca el presente trabajo se concreta el hecho de trabajar con una muestra no probabilística, definida por Hernández (2003) como aquellas que "suponen un procedimiento de selección informal, (…), la elección de los sujetos no depende de que todos tengan la misma probabilidad de ser elegidos, sino de la decisión de un investigador" (pp. 326-327) este tipo de muestra brinda gran información en este proceso de investigación por el hecho de ser seleccionada por los investigadores, realizándose la selección de acuerdo a características especificas que están directamente relacionados con el trabajo que se está desarrollando.

La característica que identifica primordialmente a la población a la que hace referencia este trabajo, es el hecho de haber formado parte en sus primeros semestres de la carrera Educación Mención Física y Matemática de una realidad llena de deficiencias en cuanto conocimientos previos, poco dominio de conceptos básicos matemáticos, lenguaje matemático, e incertidumbre al encontrarse ante situaciones que le pidieran aplicar la solución de problemas; una vez ya superada esta realidad por ellos, se encuentran en un papel de espectadores de esa misma realidad. La observación realizada ahora por estos es a aquellos estudiantes que se encuentran cursando los primeros semestres de la carrera, y que de forma voluntaria se han acercado a buscar ayuda para solventar parte de estas deficiencias en los que ya de algún modo la han superado; resulta curioso observar que la realidad que se vivió al inicio de la carrera se encuentra presente hoy día en los estudiantes que se están iniciando, y que se ha observado desde ese tiempo hasta ahora, año tras año.

La selección realizada de la muestra se identifica con la muestra de sujetos voluntarios, muestra de sujetos-tipo, y muestra de casos típicos, fundamentándose de esta manera en lo expuesto por Hernández y otros, debido a que la selección y participación de los sujetos que forman parte de la muestra es de manera fortuita y voluntaria, cuyo objetivo es la profundidad y la calidad de la información, no la cantidad; de la misma manera se aplica a sujetos que poseen claramente las mismas condiciones que se analizan y estudian. En este trabajo la muestra está compuesta por los investigadores estudiantes cursantes del noveno semestre de la carrera Educación mención Física y Matemática del Núcleo Universitario Rafael Rangel de la Universidad de Los Andes.

Técnicas e Instrumento de Recolección de Datos

En todo proceso de investigación se hace necesario recolectar datos relacionados con lo que se está trabajando, estos datos orientan la dirección del trabajo de investigación y a su vez brindan información que permiten desarrollar el estudio de la idea propuesta. Como ya se ha mencionado este trabajo se encuentra enmarcado bajo el perfil cualitativo, razón por la cual el objetivo de recolectar estos datos no es medir una variable como tal sino obtener información de los sujetos en su contexto con la finalidad de analizarla para comprenderla y así responder la interrogante planteada (Hernández, 2003). Con relación al perfil con el que se está trabajando, se requiere que los investigadores se introduzcan en el contexto donde se recolectarán los datos y ubiquen cuales son las personas que le pueden brindar esta información, seguidamente se determinara la técnica o método que se aplicara en este lugar para conseguir los datos. Es necesario acotar que los investigadores tratan en lo mejor posible de minimizar sus creencias respecto al tema estudiado.

Arias (2006), manifiesta que la técnica es “el procedimiento o forma particular de obtener datos e información” (p. 67). De acuerdo a lo antes citado, las técnicas por las cuales se rige la investigación para alcanzar los objetivos planteados son:

Observación

Arias (2006) conceptualiza que la observación “es una técnica que consiste en visualizar o captar mediante la vista, en forma sistemática, cualquier hecho, fenómeno o situación que se produzca en la naturaleza o en la sociedad, en función de unos objetivos de investigación preestablecidos” (p. 69), aunado a esto Hernández (2003) expone que la observación cualitativa tiene como propósito explorar ambientes, describir contextos, comprender situaciones y comportamientos, identificar problemas y generar hipótesis para futuros estudios. En este trabajo se aplica esta técnica desde el momento en que los investigadores seleccionan el contexto donde se desarrollara la investigación.

Los observadores al iniciar la investigación se hacen presentes en el contexto donde se desarrolla la realidad que se expone en el problema planteado, identificando así características comunes entre los distintos sujetos que se encuentran formando parte de esa realidad. Durante esta etapa de inmersión los investigadores realizan observaciones directas a estudiantes que se encuentran cursando los primeros semestres de la carrera mencionada durante el semestre A-2012, la observación se toma cómo observación no participante.

A medida que se desarrolla la investigación, los observadores se involucran directamente aplicando las sugerencias propuestas a problemas consultados por ellos mismos, así como también participan en el desarrollo de una serie de ejercicios que los sujetos observados tenían propuestos, cambiando de esta manera de la observación no participante que se realizo al inicio de la investigación a observación participante.

Documentos escritos

Se utilizan con la finalidad de analizar significados, expresiones, patrones y la profundidad de su contenido, (Hernández, 2003). Para el desarrollo del presente trabajo se utilizaron textos de matemática, de los cuales ejercen mayor influencia el Libro de José Nieto y otros, *Olimpiadas Matemáticas 2009* el cual propone una serie de problemas y ejercicios para estudiantes de bachillerato, problemas que requieren ser solucionados a través de un proceso de análisis y comprensión, y el libro de George Polya, *Como plantear y resolver problemas*, debido a que las ideas presentadas por este autor son relevantes al momento de brindar solución a un problema matemático, pues establece cierta orientación al proceso de analizar las condiciones y datos que brinde cada problema, por lo que se convierte en una herramienta que dirige el encuentro de los estudiantes con la aplicación de sus conocimientos matemáticos.

CAPITULO IV: MÉTODO DE RESOLUCION DE EJERCICIOS (G. Polya)

Al momento de solucionar un problema sea matemático o de cualquier tipo existen alternativas variadas, esto depende de las condiciones que el mismo presente, mas siempre es necesario realizar o seguir un procedimiento que nos lleve desde el planteamiento hasta la resolución, esto requiere siempre de una planificación y una ejecución. Polya define un método que divide en cuatro fases:

- **Comprender el Problema:** la esencia para solucionar un problema es comprender cuál es la situación que se nos plantea, esto es básico debido a que si no se tiene conciencia y claridad en el problema sería imposible determinar un procedimiento para afrontarlo. Consiste en determinar cuál es la incógnita, los datos y organizarlos de manera que se puedan utilizar para dar solución al problema.

- **Concebir el Plan:** en función de lo que el problema nos presenta es necesario elaborar un procedimiento a seguir, este consiste en verificar los datos y como se pueden emplear, determinar la forma o formas en las que estos se relacionan y los medios u operaciones que nos llevaran a dar solución al problema.

- **Ejecutar el Plan:** consiste en realizar los procedimientos y operaciones planteadas de manera de dar respuesta a la situación que se afronta.

- **Examinar la Solución:** al tener la solución es clave poder recapitular tanto el procedimiento como las operaciones, es importante poder plantear otro método o procedimiento para llegar a la solución.

El método planteado por Polya es aplicable a distintas disciplinas no solo a la matemática y se puede emplear en todos los niveles.

De alguna manera este procedimiento se realiza de forma automática cuando nos planteamos problemas de dificultad baja digamos algo como: *"si tengo 5 años y José tiene tres años más que yo ¿qué edad tiene José?"*. Pero la intención no es simplemente decir la solución es: ***8***, lo que se persigue es que el estudiante pueda con claridad comprender que la ***Edad de José es 8 años*** es decir, que comprenda que existe una relación entre la edad de Juan y la mía y que una está condicionada por la otra.

Por otro lado no se quiere dar al estudiante las soluciones sino que se le oriente por medio de algunas preguntas que lo puedan dirigir a él mismo a encontrar la solución al problema.

Dentro de la guía se presentan algunos ejercicios resueltos por medio del método de Polya de manera que el estudiante pueda asumir el procedimiento e implementarlo al momento de solucionar un problema. A continuación se presentan los mismos:

1. Si tengo cuatro manzanas y me como dos ¿Cuántas manzanas me quedan?

❖ **<u>FASE I: COMPRENDER EL PROBLEMA</u>**

- **Identifiquemos la incógnita:** veamos cuál es la interrogante a la que debemos dar respuesta.

En esta situación a que debemos dar respuesta: **¿Cuántas manzanas me quedan?**

- **Revisemos los datos:** determinemos que información nos proporcionan.

Los datos que nos están proporcionando son la cantidad de manzanas iniciales y las que han sido consumidas: **tengo cuatro manzanas y me como dos.**

Así tenemos

Cantidad de Manzanas Iniciales: 4

Cantidad de Manzanas Consumidas: 2

- **Describamos la Situación:**

Tengo cuatro manzanas, es decir el total de manzanas en mi posesión son cuatro.

Me como dos, es decir que del total (cuatro manzanas) dos están siendo consumidas lo que implicaría ya no contarlas en el total de las manzanas que están en mi posesión.

❖ FASE II: CONCEBIR EL PLAN

- **Veamos cómo se relacionan los datos:**

Cantidad de Manzanas Iniciales **es mayor que** Cantidad de Manzanas Consumidas

De las operaciones matemáticas que conoces ¿Podemos emplear alguna que ilustre la situación planteada? ¿Cuál?

La Sustracción "Resta"

Planteemos la situación:

Cantidad de Manzanas Iniciales "menos" **Cantidad de Manzanas Consumidas** "es igual a" **Cantidad de Manzanas que nos quedan.**

❖ FASE III: EJECUTAR EL PLAN

- **Describamos la situación con simbología matemática:**

$$4-2=?$$

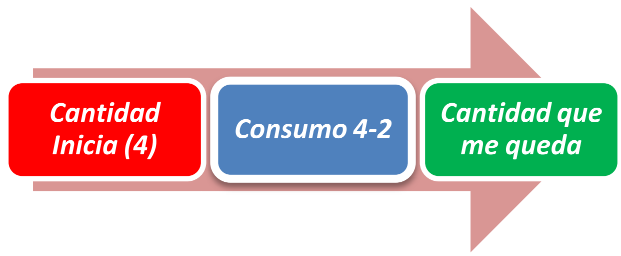
- **Realicemos la operación:**

$$4-2=2$$

• **Demos respuesta a la interrogante:** De las cuatro manzanas que se tenían (cantidad inicial), al ser consumidas dos (Cantidad consumida) tenemos que la "cantidad de manzanas que nos quedan" es dos.

❖ **FASE IV: EXAMINAR LA SOLUCIÓN**

• **Verifiquemos el Razonamiento:**



• **Verifiquemos el Resultado:** partiendo de la relación entre los datos y la incógnita busquemos la manera de comprobar que nuestra solución es correcta.

La cantidad de manzanas que me queda es el resultado de restar de la cantidad inicial la cantidad consumida. Viendo esto desde otra perspectiva la cantidad inicial debe ser igual a la cantidad que me queda unida (sumada) a la cantidad que he consumido.

$$2+2=4$$

2. *Si un lápiz cuesta Bs. 10 ¿Cuánto costarán 5 lápices?*

❖ **FASE I: COMPRENDER EL PROBLEMA**

• **Identifiquemos la incógnita:** veamos cuál es la interrogante a la que debemos dar respuesta.

En esta situación a que debemos dar respuesta: **¿Cuánto costaran 5 lápices??**

- **Revisemos los datos:** determinemos que información nos proporcionan

  El dato que nos proporcionan es el costo de un lápiz: **un lápiz cuesta Bs. 10**

  Así tenemos

Cantidad de Lápices: **1**

Costo de un lápiz: **10**

- **Describamos la Situación:**

Un lápiz cuesta Bs. 10, es decir el total a pagar por cada lápiz es Bs. 10.

Necesitamos saber cuánto nos costara comprar cinco lápices

❖ **<u>FASE II: CONCEBIR EL PLAN</u>**

- **Veamos cómo se relacionan los datos:**

  Un lápiz tiene valor Bs 10

Cantidad de Lápices --------- Costo de un lápiz

1 Lápiz ---------- Bs. 10

Debemos llevar la cantidad de lápices a cinco y determinar a cuanto varía el costo

- **<u>FASE III: EJECUTAR EL PLAN</u>**

  - **Describamos la situación con simbología matemática:**

Si un lápiz cuesta Bs. 10.

Entonces dos lápices (1+1=2) tendrán como valor (10+10=20)

Tres Lápices (2+1=3) tendrán como valor (20+10=30)

Cuatro Lápices (3+1=4) tendrán como valor (30+10=40)

Cinco Lápices (4+1=5) tendrán como valor (40+10=50)

- **Realicemos las operaciones:**

1 Lápiz=10Bs

1 Lápiz =10Bs

1 Lápiz =10Bs

1 Lápiz =10Bs

1 Lápiz =10Bs

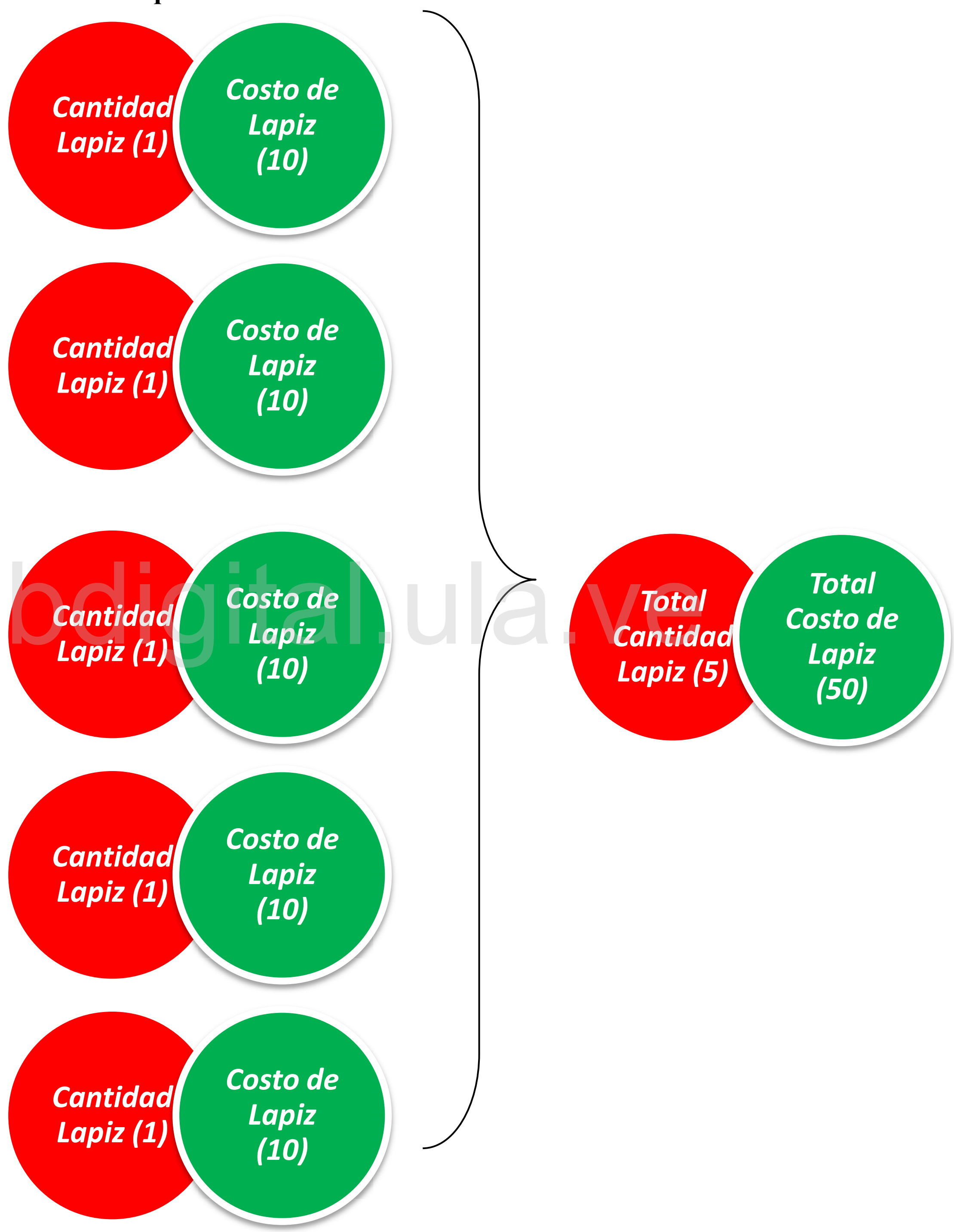
1 Lápiz +1 Lápiz +1 Lápiz +1 Lápiz +1 Lápiz =10Bs +10Bs +10Bs +10Bs +10Bs

5 Lápiz =50Bs

- **Demos respuesta a la interrogante:** Cinco lápices cuestan cincuenta Bolívares.

❖ **FASE IV: EXAMINAR LA SOLUCIÓN**

- **Verifiquemos el Razonamiento:**



El razonamiento utilizado nos proporciona una respuesta satisfactoria, sin embargo preguntémonos si existirá un proceso que igualmente nos dé una solución satisfactoria en menor cantidad de operaciones.

¿Cual son las características del proceso empelado? ¿Qué operaciones utilizamos? ¿Existe alguna otra que se pueda incluir o sustituir la empleada? ¿Qué operación conoces que nos permita hacer sumas repetidas de manera resumida?

El Producto "Multiplicación"

Un lápiz tiene valor Bs 10.

1 Lápiz = Bs. 10.

Por ser una igualdad podemos multiplicar a ambos lados por un determinado valor sin alterar la igualdad. Debemos llevar la cantidad de lápices a cinco y determinar a cuanto varía el costo por lo tanto multiplicamos por cinco a ambos lados y tenemos así:

5× 1 Lápiz = 5× 10Bs

5 Lápiz = 50Bs.

Y de esta manera hemos comprobado que el costo a pagar por 5 lápices es de Bs. 50.

Los ejercicios 3 y 4 los dejamos al lector para que ponga en práctica el método de resolución.

En estos primeros problemas que se pueden decir que son de una dificultad mínima para el nivel al cual va dirigida la guía tiene la intención de que el estudiante tome conciencia de los pasos que realiza de manera automática para resolver el problema, lo cual le permitirá emplear pasos similares al resolver uno de mayor complejidad.

3. Si en un establo hay cierta cantidad de vacas y al final del año cada vaca ha dado a luz un becerro obteniendo así un total de 40 animales en el establo ¿Cuántas vacas hay?

❖ **FASE I: COMPRENDER EL PROBLEMA**

- **Identifiquemos la incógnita:** veamos cuál es la interrogante a la que debemos dar respuesta.

En esta situación a que debemos dar respuesta: **¿Cuántas vacas hay?**

- **Revisemos los datos:** determinemos que información nos proporcionan

Los datos que nos están proporcionando son que cada vaca tuvo un becerro y que el total de animales es de cuarenta.

Así tenemos:

Cantidad de Becerros: desconocida (Sabemos que es igual a la de vacas pues cada una tuvo un becerro)

Cantidad total de animales: 40

- **Describamos la Situación:**

Tenemos una cantidad de vacas en el establo, cada una tiene un becerro así que la cantidad de vacas y becerros es la misma, sumando la cantidad de becerros y de vacas obtenemos un total de cuarenta animales en el establo.

❖ **FASE II: CONCEBIR EL PLAN**

- **Veamos cómo se relacionan los datos:**

Cantidad de Vacas **"es igual a"** Cantidad de becerros. Llamemos a esta cantidad: x.

De las operaciones matemáticas que conoces ¿Podemos emplear alguna que ilustre la situación planteada? ¿Cuál?

La Adición "Suma"

Planteemos la situación:

Cantidad de Vacas "más" **Cantidad de Becerros** "es igual a" **40 animales**

Debido a que la cantidad de Vacas y de Becerros es la misma podemos decir:

Cantidad de Vacas "más" **Cantidad de Vacas** "es igual a" **40 animales**

❖ **FASE III: EJECUTAR EL PLAN**

- **Describamos la situación con simbología matemática:**

$$x + x = 40$$

- **Realicemos la operación:**

$$2x = 40$$

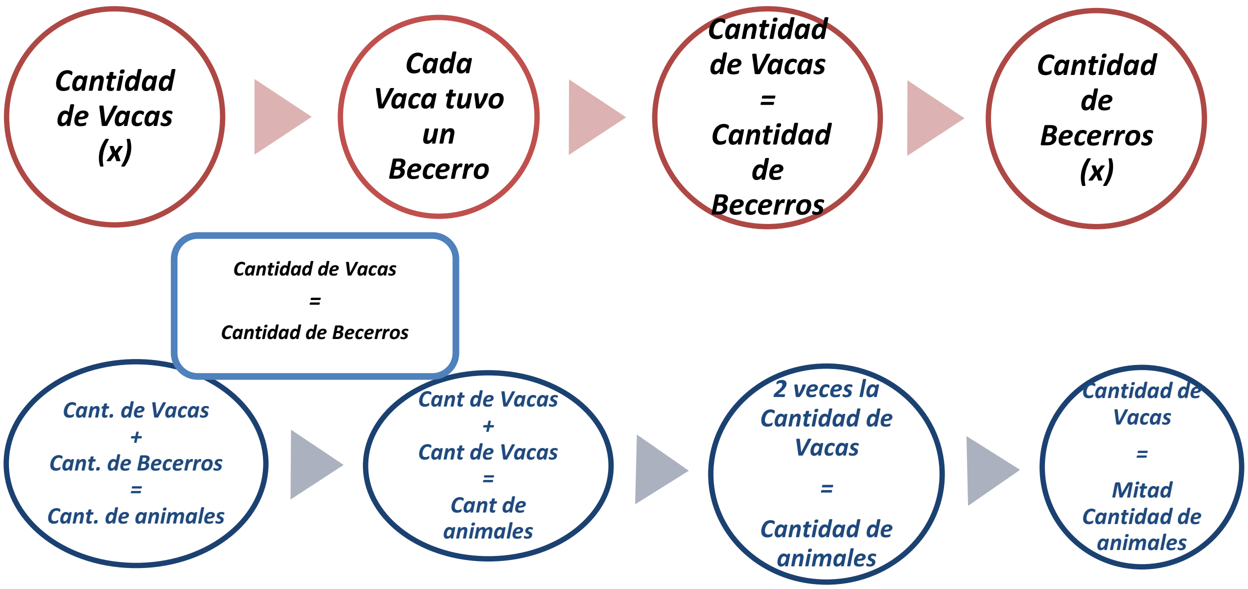
Podemos ver que 2x es un producto por lo tanto necesitamos hallar un número que multiplicado por dos me de cómo resultado 40.

Veamos las posibilidades y notemos que solo 20 cumple con esta condición así $x = 20$.

- **Demos respuesta a la interrogante:** ya que x representa la cantidad de vacas y el valor encontrado para x es de 20 se puede concluir que hay 20 vacas en el establo.

❖ **<u>FASE IV: EXAMINAR LA SOLUCIÓN</u>**

- **Verifiquemos el Razonamiento:**



- **Verifiquemos el Resultado:** partiendo de la relación entre los datos y la incógnita hemos planteado una ecuación busquemos la manera de comprobar que nuestra solución es correcta. Partamos de sustituir el resultado obtenido en la ecuación planteada si la igualdad se mantiene el valor obtenido para x es correcto.

$$2x=40$$

Como $x = 20$ tenemos:

$$2(20)=40$$

$$40=40$$

Notemos que ambos procedimientos (aditivo y multiplicativo) nos llevan al mismo resultado pero claramente uno de los métodos suele ser un proceso más corto en este caso es el producto, sin embargo esto no es motivo de exclusión del método aditivo es decir, puede existir más de un método para resolver algún ejercicio quedando a criterio de quien lo realiza el decidir cual aplicar en función de la mejor comprensión y desarrollo del mismo.

4. Juan y Julián son hermanos, si Juan tiene el triple de la edad de Julián y sumando las edades de los dos nos da como resultado 24, ¿Cuál es la edad de cada uno?

❖ **FASE I: COMPRENDER EL PROBLEMA**

- **Identifiquemos la incógnita:** veamos cuál es la interrogante a la que debemos dar respuesta.

En esta situación a que debemos dar respuesta: **¿Cuál es la edad de cada uno?**

- **Revisemos los datos:** determinemos que información nos proporcionan.

Los datos que nos están proporcionando son:

Juan tiene el triple de la edad de Julián

Sumando las edades de los dos nos da como resultado 24

Así tenemos:

Edad de Juan: Desconocida (es el triple de la edad de Julián)

Suma de las edades: 24

- **Describamos la Situación:**

Desconocemos la edad de cada hermano mas tenemos la relación entre ellas es decir la edad de Juan es el triple que la de Julián y además sabemos que al sumarlas tenemos como resultado 24 y debemos hallar la edad de cada uno.

❖ **FASE II: CONCEBIR EL PLAN**

- **Veamos cómo se relacionan los datos:**

Edad de Juan **es igual a** tres veces Edad de Julián.

La Suma de las edades: Edad de Juan **más** Edad de Julián **es igual a** 24.

Aunque conocemos las relaciones establecidas con las edades, desconocemos el valor de cada una, es por ello que asignaremos el nombre de x a la edad de Juan y z a la edad de Julián.

¿Cuántas relaciones podemos observar?

De las operaciones matemáticas que conoces ¿Podemos emplear algunas que ilustren la situación planteada? ¿Cuáles?

Necesitamos una que nos permita describir que el valor de una edad es tres veces el valor de la otra ¿Qué operación nos permite expresar que un número se aumente tres veces?

El Producto "Multiplicación"

En cuanto a la segunda operación implementemos **la adición** puesto que el enunciado nos dice la "suma de las edades".

Planteemos la situación:

1. **Edad de Juan es igual a tres veces Edad de Julián**
2. **Edad de Juan más Edad de Julián es igual a 24**

❖ **<u>FASE III: EJECUTAR EL PLAN</u>**

- **Describamos la situación con simbología matemática:**

1. $x = 3z$
2. $x + z = 24$

- **Realicemos la operación:**

¿Cuál variable está presente en ambas relaciones?

1. $x = 3z$
2. $x + z = 24$

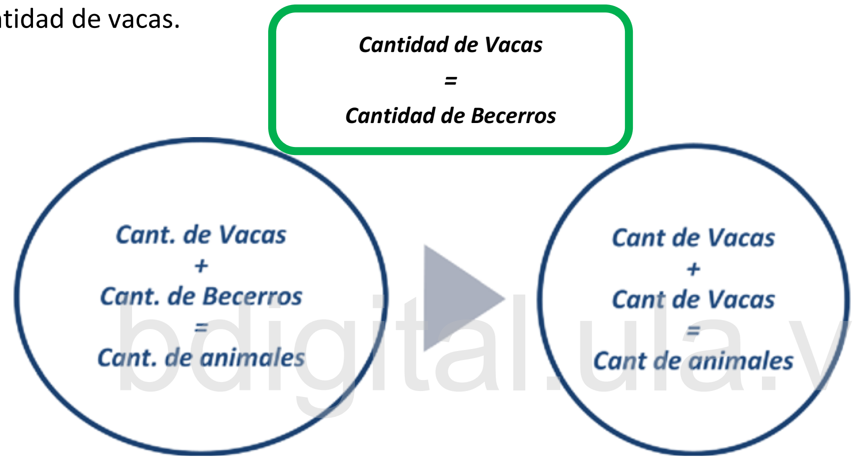
¿Y z? ¿Están presentes ambas variables en ambas relaciones?

Tanto x *como* z están presentes, solo que x aparece escrita de la misma forma en ambas y z está en una de ella acompañada por el numero **3**, trabajemos en esta ocasión con x.

¿Podemos escribir las dos relaciones como una sola? ¿Por qué?

Recordando el ejercicio anterior:

Identificamos que la cantidad de vacas y de becerros era igual esto nos permitió sustituir en una de las relaciones la cantidad de becerros por la cantidad de vacas, quedado todo expresado en la cantidad de vacas.



Si fijamos nuestra atención en la relación $x = 3z$ **observamos que es una igualdad, lo que implica que podemos sustituir a la x por $3z$.**

Hagamos esta sustitución en la otra relación $x + z = 24$.

Y obtenemos: $3z + z = 24$

Operemos: si tengo 3 **z** y le sumo una z ¿cuántas z obtengo?

$$4z = 24$$

Entonces z será un numero que multiplicado por 4 nos de cómo resultado 24. Así tenemos que:

$$z = 6$$

Veamos ahora cuánto vale x. ***¿Cómo podemos hacerlo?***

Ya que conocemos el valor de Z podemos sustituirlo en cualquiera de las relaciones de manera que:

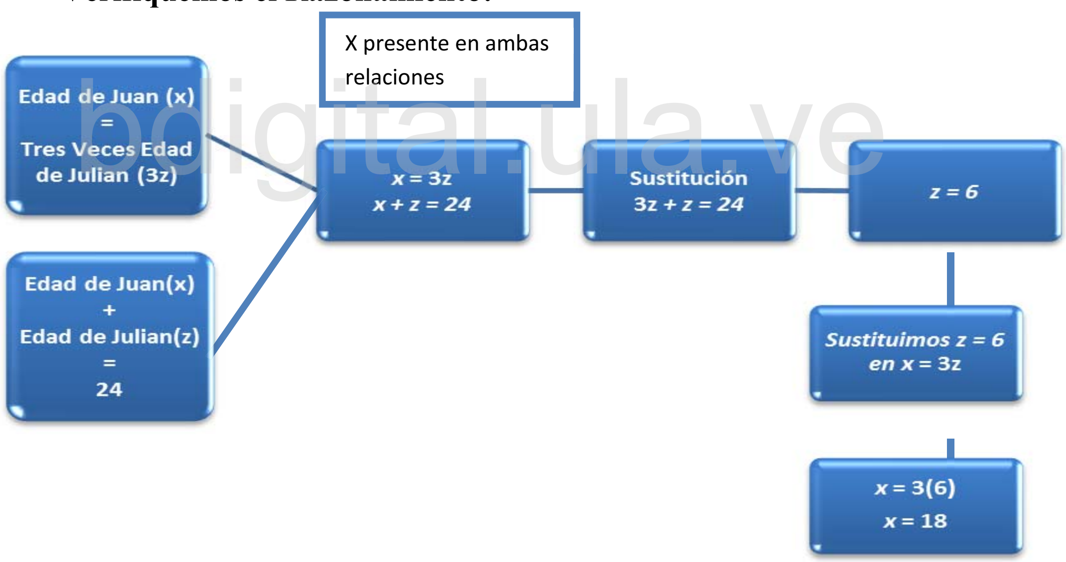
$$x = 3(6)$$

$$x = 18$$

- **Demos respuesta a la interrogante:** ya que x representa la edad de Juan y z la edad de Julián, podemos decir que Juan tiene 18 años y Julián 6 años.

❖ **<u>FASE IV: EXAMINAR LA SOLUCIÓN</u>**

- **Verifiquemos el Razonamiento:**



• **Verifiquemos el Resultado:** partiendo de la relación entre los datos y la incógnita hemos planteado dos relaciones, busquemos la manera de comprobar que la solución encontrada es correcta. Partamos de sustituir el resultado obtenido en cada una de las relaciones, si la igualdad se mantiene, los valores encontrados son correctos.

En la primera relación se observa que:

$$x = 3z$$

Como $z = 6$ *y* $x = 18$ **se tiene que:**

$$18 = 3(6)$$

$$18 = 18.$$

En cuanto a la segunda relación se establece que:

$x + z = 24$, ***sustituyendo*** $z = 6$ ***y*** $x = 18$ ***se cumple que:***

$$18 + 6 = 24$$

$$24 = 24.$$

Observando los resultados al realizarse la sustitución en ambas relaciones se puede notar que la igualdad se cumple por lo tanto los valores encontrados son correctos.

Los problemas que implican el uso de ecuaciones o sistemas de ecuaciones en general presentan al estudiante dificultad no en la resolución de la ecuación o el sistema sino en el cómo organizar los datos y definir la incógnita, por ello es necesario describir cual es la situación a la cual nos enfrentamos y como reescribirla por medio de una ecuación o sistema de estas.

8. En el país Pies raros, todos tienen el pie izquierdo una o dos tallas más grandes que el pie derecho. Sin embargo, los zapatos se venden en pares del mismo tamaño. Para ahorrar, un grupo de amigos deciden comprar un lote de zapatos: cada uno toma dos zapatos que le queden, y sobran un zapato talla 36 y otro talla 45. ¿Cuál es el menor número de personas que puede haber en el grupo?

❖ **<u>FASE I: COMPRENDER EL PROBLEMA</u>**

- **Identifiquemos la incógnita:** veamos cuál es la interrogante a la que debemos dar respuesta.

En esta situación a que debemos dar respuesta**: ¿Cuál es el menor número de personas que puede haber en el grupo?**

- **Revisemos los datos:** determinemos que información nos proporcionan

Los datos que nos están proporcionando son:

✓ *todos tienen el pie izquierdo una o dos tallas más grandes que el pie derecho*

✓ *los zapatos se venden en pares del mismo tamaño*

✓ *un grupo de amigos deciden comprar un lote de zapatos*

✓ *cada uno toma dos zapatos que le queden*

✓ *sobran un zapato talla 36 y otro talla 45*

Así tenemos

✓ cada miembro del grupo puede tener una o dos tallas (no especifica) de diferencia entre el tamaño de sus pies

✓ todos los zapatos vienen en pares de la misma talla

✓ Entre un grupo de amigos (cantidad desconocida) se comprara un lote de zapatos

✓ Si sobra un zapato 36 y uno 45 quiere decir que se uso uno 36 y se uso uno 45.

- **Describamos la Situación:**

El grupo de amigos (no conocemos la cantidad) compra un lote de zapatos, tenemos como dato que sobra uno talla 36 y otro 45.

❖ **FASE II: CONCEBIR EL PLAN**

- **Veamos cómo se relacionan los datos:**

Supongamos que uno de los miembros del grupo calza 40 en su pie derecho por ende calza 41 o 42 en el pie izquierdo. Esto a su vez implica que en grupo debe haber alguien que calce 41 o 42 en el pie derecho pues no sobra ningún zapato de estas dos tallas.

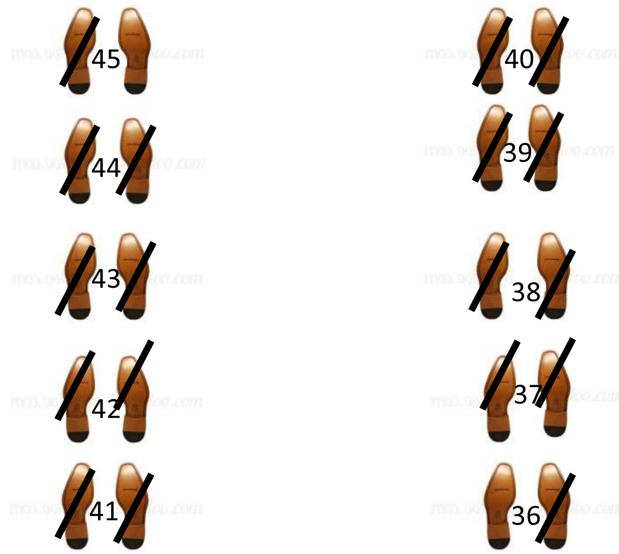
Si se dio uso a un zapato 45 y a uno 36 ¿Podemos saber de cual pie es cada uno de los que sobro? ¿Por qué sobraron? ¿Qué relación guardan con las otras tallas?

Estudiemos las posibilidades:

Si el talla 36 sobrante es derecho quiere decir que alguien uso el 36 izquierdo y este debe usar un derecho 35 o 34 trayendo como consecuencia que alguien debe usar el izquierdo 35 o 34 pues no sobra ninguno de esta talla análogamente podemos proceder y llegar a tallas más pequeñas y siempre sobraría un derecho de la menor talla en el lote, en base a esto podríamos decir que el zapato 36 sobrante debe ser izquierdo y a su vez esa es la menor talla del lote.

De manera análoga a lo mencionado anteriormente sucedería con el zapato 45 solo que el sobrante seria derecho y esta sería la mayor talla del lote.

Supongamos que se toman en cuenta todas las tallas entre ellos dos teniendo así lo siguiente:



❖ **FASE III: EJECUTAR EL PLAN**

- **Describamos la situación de manera simbólica:**

¿Cambiara la cantidad de personas en el grupo si se aumenta de una en una talla o de dos en dos? ¿En cuál de las dos posibilidades la cantidad de personas en el grupo es menor?

De uno en uno

45	~~I~~	D
44	~~I~~	~~D~~
43	~~I~~	~~D~~
42	~~I~~	~~D~~
41	~~I~~	~~D~~
40	~~I~~	~~D~~
39	~~I~~	~~D~~
38	~~I~~	~~D~~
37	~~I~~	~~D~~
36	I	~~D~~

De dos en dos

45	~~I~~	D
44	~~I~~	~~D~~
43	I	D
42	~~I~~	~~D~~
41	I	D
40	~~I~~	~~D~~
39	I	D
38	~~I~~	~~D~~
37	I	D
36	I	~~D~~

Posibilidad personalizada

45	I	D
44	I	D
43	I	D
42	I	D
41	I	D
40	I	D
39	I	D
38	I	D
37	I	D
36	I	D

Tengamos en cuenta que al saltar de dos en dos siempre será necesario al menos un salto de una sola talla.

¿Existirá alguna posibilidad que reduzca la cantidad de personas más que saltando de dos en dos? ¿Por qué?

Observando la primera tabla diríamos que participan 9 personas y en la segunda 5 personas ¿Cuántas participan en la tabla que elaboraste? ¿Es una cantidad mayor o menor que las participantes en las otras dos?

- **Demos respuesta a la interrogante:** el menor número de miembros en el grupo de manera que cada uno tenga un par de zapatos y sobre un zapato 36 y uno 45 es de: 5 personas.

❖ **FASE IV: EXAMINAR LA SOLUCIÓN**

- **Verifiquemos el Razonamiento:**

9. En un gran corral hay 2009 cabras, cada una de las cuales tiene piel oscura o clara. Un pastor compara las alturas de las cabras y encuentra que hay una cabra de piel clara que es más alta que exactamente 8 de las de piel oscura, hay otra cabra de piel clara que es más alta que exactamente 9 de las de piel oscura, otra cabra de piel clara es más alta que exactamente 10 de las de piel oscura, y así sucesivamente, hasta llegar a la última cabra de piel clara, que es más alta que todas las de piel oscura. ¿Cuántas cabras de piel clara hay?

❖ **FASE I: COMPRENDER EL PROBLEMA**

• **Identifiquemos la incógnita:** veamos cuál es la interrogante a la que debemos dar respuesta. En esta situación a que debemos dar respuesta: **¿Cuántas cabras de piel clara hay?**

• **Revisemos los datos:** determinemos que información nos proporcionan.
Los datos que nos están proporcionando son: **Cabras totales: 2009**

Cada una de las cuales tiene piel oscura o clara.

Hay una cabra de piel clara que es más alta que exactamente 8 de las de piel oscura

Hay una cabra de piel clara que es más alta que exactamente 9 de las de piel oscura

Hay una cabra de piel clara que es más alta que exactamente 10 de las de piel oscura

Hasta llegar a la última cabra de piel clara, que es más alta que todas las de piel oscura.

• **Describamos la Situación:**

						Total
Claras	**1**	**1**	**1**	**1**	**…**	***x***
Oscura	**8**	**1**	**1**	**1**	**…**	***y***
Total	**9**	**2**	**2**	**2**	**…**	**2009**

***x* : número total de cabras claras *y*: número total de cabras oscuras.**

❖ FASE II: CONCEBIR EL PLAN

- **Veamos cómo se relacionan los datos:**

Cabras Totales: 2009.

Cabras Totales: cabras claras más cabras oscuras.

¿Existe alguna relación entre la cantidad de cabras claras y cabras oscuras?, ¿Cuál es mayor? ¿Cuánto es la diferencia entre las cantidades?

Al observar la tabla se evidencia que primero hay 1 clara y 8 oscuras, luego se agrega otra clara (teniendo como total dos claras) y otra oscura (teniendo como total 9 oscuras), es decir que ambas van aumentando en 1. Es mayor el número de cabras oscuras, puesto que como partida se observaron 8 oscuras y solo una clara, y ambas van aumentando en una hasta llegar a la cantidad final. Por lo tanto las cabras claras son: *"cierta cantidad" (lo que aumentaron)* más una (lo que había inicialmente) y las oscuras *"cierta cantidad" (lo que aumentaron)* mas ocho (lo que había inicialmente). De esta manera La diferencia entre la cantidad de cabras oscuras y cabras claras es de 7 (la diferencia está en las Cantidades iniciales 8-1=7).

Planteemos la situación:

Cabras totales es igual a 2009

El número de cabras claras "más" el número de cabras oscuras "es igual a" 2009 (número total de Cabras)

El número de cabras oscuras "es igual a" número de cabras claras "más" 7

❖ FASE III: EJECUTAR EL PLAN

- **Describamos la situación con simbología Matemática:**

1. $x + y = 2009$

2. $y = x + 7$

- **Realicemos la operación:**

¿Cuál variable está presente en ambas relaciones?

1. $x + y = 2009$
   $y = x + 7$

¿Y *x*? ¿Están presentes ambas variables en ambas relaciones?

Tanto ***y*** *como* ***x*** están presentes, solo que ***y*** aparece escrita de la misma forma en ambas y ***x*** está en una de ella acompañada por el número **7**, trabajemos en esta ocasión con ***y***.

¿Podemos escribir las dos relaciones como una sola? ¿Por qué?

Si fijamos nuestra atención en la relación $y = x + 7$

Observamos que es una igualdad, lo que implica que podemos sustituir a la **y** por $x+7$.

Hagamos esta sustitución en la otra relación $x + x + 7 = 2009$

Y obtenemos: $2x + 7 = 2009$

$$2x = 2009 - 7$$

$$2x = 2002$$

Entonces ***x*** será un número que multiplicado por 2 nos de cómo resultado 2002. Así tenemos que:

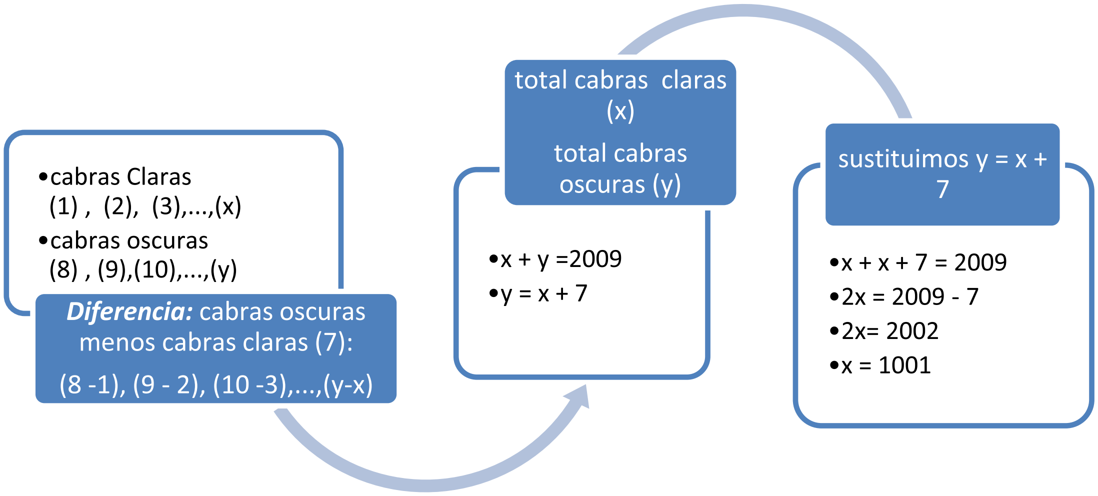
$$x = 1001$$

Debido a que x corresponde al número de cabras blancas y este es el número de cabras que se está solicitando.

- **Demos respuesta a la interrogante:** ya que ***x*** representa el número de cabras claras, podemos decir que hay 1001 cabras claras.

❖ FASE IV: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

- **Verifiquemos el Razonamiento:**



- **Verifiquemos el Resultado:** Utilizando la metodología del *ejercicio #6 (edades Juan y Julián)*. Halla el valor de la y y verifique que se mantienen las igualdades en ambas relaciones.

El problema de pies raros se plantea de manera que la solución no se halla con ecuaciones u operaciones matemáticas evidentes sino que por medio del análisis y estudio de casos se da respuesta a la incógnita planteada, similar a este el problema de las ovejas necesita una ilustración previa de la situación y posterior a ello se puede plantear el sistema de ecuación que permitirá solucionar el problema.

CAPITULO V: ESTRUCTURA GUIA DE NIVELACIÓN

Con la elaboración de la guía de nivelación uno de los objetivos que se persigue es que pueda facilitar la comprensión de temas que el estudiante de alguna manera a afrontado mas no ha logrado consolidar sus conocimientos con bases sólidas, esto puede tener diversas causas, como la falta de comprensión del lenguaje matemático, la poca dedicación, el desinterés, la dificultad de atención en clase, la idea de que la comprensión de los contenidos es de alta dificultad, por todo esto la intención es presentar de forma sencilla y por medio de la construcción del propio conocimiento de algunos temas con los que un bachiller debe estar familiarizado y que en particular al iniciar la carrera de educación Mención Física y Matemática necesitara dominar.

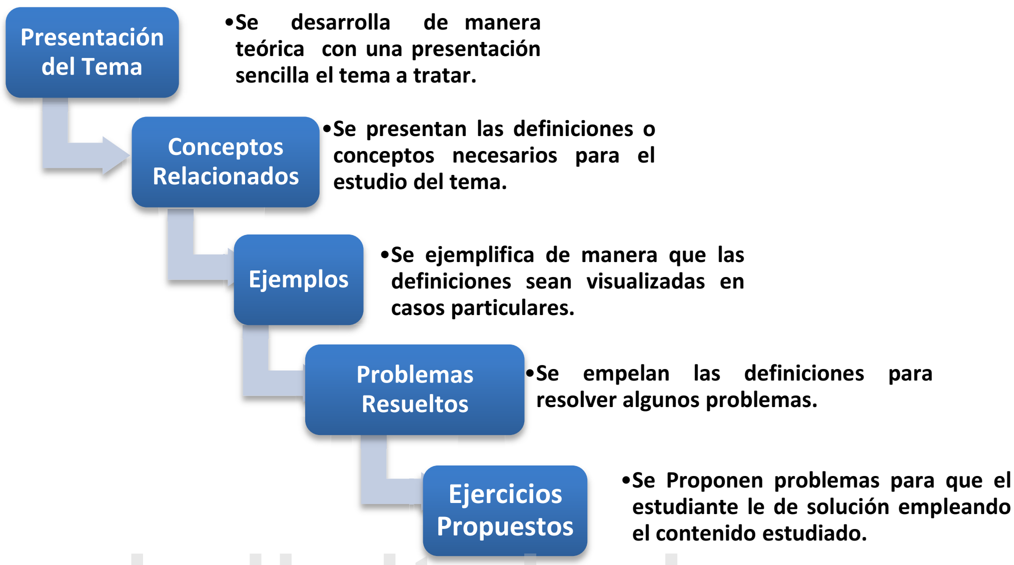
Presentación de la guía

A continuación se presenta la estructura general de la guía:

Presentación	Portada
	Introducción
	Método Polya
	Conceptos básicos
Problemas de Iniciación	Operaciones Básicas
	Ecuaciones y Sistemas
	Razonamiento
Temas a Nivelar	Números Racionales
	Trigonometría
	Exponencial y Logaritmos
	Funciones
	Geometría
Problemas desafío	Fácil
	Medio
	Difícil

Presentación de los Temas

Cada tema se desarrolló de la manera siguiente:



Presentación de la Guía según los temas planteados.

NÚMEROS RACIONALES (QUEBRADOS-Fracciones)

Para comenzar a hablar de los números racionales (fracciones) tengamos en cuenta que estos son consecuencia de la existencia de los números naturales y los números enteros, por ello partiremos de describir a los números naturales. Estos son los números que conocemos de manera espontánea es decir los utilizados para contar son a su vez los pertenecientes al conjunto: {1,2, 3,4, 5,6, 7,8, 9,…} estos están denotados por la letra $\mathbb{N}$.

Los números naturales fueron insuficientes al momento de dar respuesta a la siguiente ecuación $2 = x + 3$. Como consecuencia fue necesario definir a los números enteros, estos son a su vez son los pertenecientes al conjunto {…, -3, -2, -1, 0, 1,2, 3,…}, estos están denotados por la letra $\mathbb{Z}$. Análogamente a los números naturales también los números enteros fueron insuficientes al dar respuesta a la siguiente ecuación: $5 = 2x$.

Por esto se hace necesaria la definición de un conjunto más grandes en el cual están contenidos ya a los antes mencionados y además está en la capacidad de satisfacer la ecuación antes indicada, este nuevo conjunto recibe el nombre de números racionales denotados por la letra$\mathbb{Q}$. De esta manera definimos a los números racionales como todo número de la forma *p* sobre *q* donde *p* y *q* pertenecen a los números enteros y *q* es distinto de cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : \ p, q \ \in \ \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$

A p lo llamaremos numerador y a q denominador.

Todo número racional puede expresarse como un número decimal finito* o periódico, puesto que p sobre q, denotan un cociente entre números enteros. Por Ejemplo:

- ✓ $\frac{5}{2} = 2{,}5$ - $\frac{10}{3} = 3{,}333 \ldots = 3{,}\hat{3}$

Tengamos en cuenta que por ser $\mathbb{Z}$ un subconjunto de $\mathbb{Q}$ todo número ***a*** perteneciente a $\mathbb{Z}$ y por ende todo elemento de N puede escribirse como un elemento de $\mathbb{Q}$ de la manera siguiente $\boldsymbol{\frac{a}{1}}$.

Veamos algunos ejemplos: 23, -5, -39,18923.

$$\frac{23}{1}, \frac{-5}{1}, \frac{-39}{1}, \frac{18923}{1}$$

Resulta equivalente denotar a los racionales de las formas siguientes:

✓ $a \div b$	a/b	$\frac{a}{b}$	$a\underline{\lfloor b}$	c
✓ $3 \div 2$	3/2	$\frac{3}{2}$	$3\underline{\lfloor 2}$	1,5
✓ $10 \div 5$	10/5	$\frac{10}{5}$	$10\underline{\lfloor 5}$	2

Identifique de la siguiente lista cuales números son racionales y cuáles no, justifique su respuesta.

- 3/7
- -1,98
- 0/1
- π
- 1/0
- -20÷3
- e
- 4
- $\sqrt{\frac{2}{5}}$
- -25
- $\frac{\sqrt{12}}{7}$
- $\frac{\sqrt{4}}{2}$

Todo número racional puede ser expresado mediante una fracción. A su vez para toda fracción existen fracciones equivalentes. **¿Qué quiere decir equivalente?**

Generalmente al hacer referencia a algo equivalente se piensa en que debemos buscar algo lo más parecido a lo que se no está pidiendo, esto es correcto, sin embargo es necesario que se nos exprese la característica en la que se busca la equivalencia, esta puede ser en forma, valor, color, altura, peso, entre otras. Al referirnos a **fracciones equivalentes** estamos hablando de fracciones que **expresadas con términos distintos su cociente es el mismo**. Sean p_1, q_1, p_2 y q_2 números enteros, con q_1 y q_2 distinto de cero, se cumple:

$\frac{p_1}{q_1} = c$ y $\frac{p_2}{q2} = c$ donde c es el cociente de cada fracción, entonces $\frac{p_1}{q_1}$ es equivalente a $\frac{p_2}{q_2}$ y viceversa.

Ejemplo:

$\frac{9}{2} = 4{,}5$ Y $\frac{18}{4} = 4{,}5$, entonces se puede decir que $\frac{9}{2}$ es equivalente a $\frac{18}{4}$ y a su vez $\frac{18}{4}$ es equivalente a $\frac{9}{2}$.

Teniendo una idea clara de fracción equivalente es natural que surja la interrogante **¿Cómo obtener una fracción equivalente?**

A esto los matemáticos se han encargado de responder con dos métodos, estos son:

Amplificación:

Consiste en multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número (debido a que si multiplicamos tanto el numerador como el denominador por el mismo número, es porque estamos multiplicando la fracción inicial por otra cuyo cociente es 1, lo que no altera el cociente de la anterior). Este método se aplica cuando se quiere una fracción equivalente a otra pero con numerador y denominador de mayor valor a la fracción inicial. Ejemplo:

Amplificar por 3 a la fracción $\frac{7}{4}$.

Solución: aplicando lo expresado por el método de amplificación, debemos multiplicar por 3 el numerador y por 3 el denominador de la fracción $\frac{7}{4}$.

$\frac{7}{4} = \frac{(7)(3)}{(4)(3)} = \frac{21}{12}$. Resultando así que la fracción $\frac{7}{4}$ **es equivalente** a la fracción $\frac{21}{12}$. Y esto se puede verificar al calcular el cociente a cada una y compararlo; el cociente de $\frac{7}{4}$ es $1,75$ y el cociente de $\frac{21}{12}$ es $1{,}75$, por lo que efectivamente la fracción que se **amplifico** por tres es **equivalente** al resultado de **la amplificación** y viceversa.

$\mathbf{\frac{7}{4}}$: **Fracción que se desea amplificar**. La fracción utilizada para amplificar es: $\frac{3}{3}$ cuyo cociente es 1, por lo que no altera el cociente de $\frac{7}{4}$ aunque se vea escrito de forma distinta.

$\mathbf{\frac{21}{12}}$: **Fracción amplificada.**

Simplificación:

La simplificación consiste en obtener una fracción equivalente con respecto a otra tomando en consideración que el numerador y denominador de la segunda fracción (la obtenida) tiene que ser menor que la primera (a la que se le aplica la simplificación). En este proceso procedemos de forma inversa a la amplificación, es decir dividimos el numerador y el denominador de la fracción que nos piden simplificar entre el mismo número. Ejemplo:

Obtener por **simplificación la fracción equivalente a** $\mathbf{\frac{27}{12}}$.

Para proceder a simplificar la fracción lo primero que haremos es **buscar los divisores*** **tanto del numerador como del denominador**:

Divisores del numerador: 27, 9, 3, 1.

Divisores del denominador: 12, 6, 4, 3, 2, 1.

Una vez realizado el procedimiento anterior, buscamos los números comunes entre esos dos grupos de divisores, en nuestro ejemplo los únicos comunes son 3 y 1, es decir que la simplificación solo la podremos realizar dividiendo entre 3 o entre 1. Dividiendo entre 3 se tiene que $\frac{27 \div 3}{12 \div 3} = \frac{9}{4}$ es decir que la fracción $\frac{9}{4}$ es equivalente a la fracción $\frac{27}{12}$, para comprobarlo comparamos el cociente de cada una, cociente de $\frac{9}{4}$ es **2,25** y efectivamente el cociente de $\frac{27}{12}$ es **2,25**.

Ahora bien si decidimos dividir entre 1 no tendría sentido alguno, pues debido a que al hacerlo el resultado es la misma fracción, es decir no se está realizando ninguna transformación, es por ello que **no se considera significativo** para encontrar una fracción equivalente el **hecho de multiplicar o dividir el numerador o el denominador por uno**. Por lo que para realizar una amplificación o simplificación se debe tener en cuenta la forma del numerador o denominador que se quiera obtener según sea el caso y así proceder a multiplicar o dividir en ambas partes de la fracción por el mismo número, es importante acotar que la simplificación además de ser un proceso que nos permite obtener una fracción especifica que se necesita en un determinado momento, también se aplica a la hora de expresar una fracción de forma irreducible (numerador y denominador son números primos* entre sí), es decir que ya no se le pueda seguir encontrando fracciones equivalentes por simplificación.

Amplificar las siguientes fracciones por la cantidad indicada entre paréntesis en cada caso.

- $\frac{3}{2}$ ------- (5)
- $\frac{10}{2}$ ------- (4)
- 98/4 -------(6)
- 56 $\lfloor\underline{23}$ --- (2)
- 82 $\div$ 14 ---(3)
- $\frac{3}{2}$ --------- $\left(\frac{2}{3}\right)$

Simplificar las siguientes fracciones hasta la fracción que se le indica entre paréntesis según sea el caso:

- $\frac{470}{20}$ ------ $\left(\frac{94}{4}\right)$
- $\frac{200}{360}$ -------(*su mínima expresión*)
- $\frac{182}{343}$ ------- (*su mínima expresión*)
- $\frac{276}{216}$ ------- $\left(\frac{23}{18}\right)$

Operaciones entre Números Racionales

•***Suma y Resta***

Al Sumar o restar fracciones podemos encontrar dos casos:

1- ***Igual denominador:*** en este caso es suficiente sumar los numeradores y mantener el denominador común para el resultado de la suma. : sean ***a, b, c*** Números enteros, con ***c*** distinto de cero.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

$$\frac{8}{3}+\frac{7}{3}=\frac{15}{3}$$

$$\frac{8}{3}+\frac{7}{3}+\frac{23}{3}-\frac{12}{3}=\frac{38}{3}-\frac{12}{3}=\frac{26}{3}$$

2- ***Distinto denominador:*** para afrontar esta situación vamos a utilizar al mcm

Mínimo común Múltiplo (mcm): debemos hallar fracciones equivalentes con el mismo denominador. Para ello encontramos el mcm entre los denominadores, este será a su vez el denominador común. Luego dividimos el mcm entre cada denominador y el resultado lo multiplicamos con el numerador respectivo, este producto será el nuevo numerador y procedemos como en el caso anterior (igual denominador).

$$\frac{8}{5}+\frac{2}{7}=?$$

$$\frac{8}{5}=1,6 \qquad \frac{2}{7}=0,29$$

Hallamos el mcm entre los denominadores. ***mcm (5,7) = 35***

Dividimos el mcm entre cada denominador y lo multiplicamos con el numerador respectivo.

$$\frac{8}{5}=1,6 \qquad \frac{2}{7}=0,29$$

35÷5=7 *7×8=56* $\frac{56}{35}=1.6$ $\frac{56}{35}$ ***es equivalente a*** $\frac{8}{5}$

35÷7=5 *5×2=10* $\frac{10}{35} = 0,29$ $\frac{10}{35}$ ***es equivalente a*** $\frac{2}{7}$

Empleando las fracciones equivalentes hallamos el resultado de la suma procediendo según el caso de igual denominador.

$$\frac{8}{5} + \frac{2}{7} = \frac{56}{35} + \frac{10}{35} = \frac{66}{35}$$

Este método lo podemos usar independientemente de la cantidad de fracciones que estemos sumando.

$$\frac{8}{5} - \frac{2}{7} + \frac{14}{3} - \frac{15}{8} = ?$$

$\frac{8}{5} = 1,6$ $\frac{2}{7} = 0,29$ $\frac{14}{3} = 4,67$ $\frac{15}{8} = 1,88$

Hallamos el mcm entre los denominadores. ***mcm (5, 7, 3, 8) =840***

Dividimos el mcm entre cada denominador y lo multiplicamos con el numerador respectivo.

840÷5=168 *168×8=1344* $\frac{1344}{840} = 1.6$ $\frac{1344}{840}$ ***es equivalente a*** $\frac{8}{5}$

840÷7=120 *120×2=240* $\frac{240}{840} = 0,29$ $\frac{240}{840}$ ***es equivalente a*** $\frac{2}{7}$

840÷3=280 *280×14=3920* $\frac{3920}{840} = 4,67$ $\frac{3920}{840}$ ***es equivalente a*** $\frac{14}{3}$

840÷8=105 *105×15=1575* $\frac{1575}{840} = 1,88$ $\frac{1575}{840}$ ***es equivalente a*** $\frac{15}{8}$

$$\frac{8}{5} - \frac{2}{7} + \frac{14}{3} - \frac{15}{8} = \frac{1344}{840} - \frac{240}{840} + \frac{3920}{840} - \frac{1575}{840} = \frac{3665}{840}$$

De forma resumida podemos sumar o restar dos fracciones utilizado la siguiente aplicación: sean ***a, b, c, d*** Números enteros, con ***b y d*** distintos de cero, entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) + (c \times b)}{d \times b}$$

Ó

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) - (c \times b)}{d \times b}$$

Recordemos el primer ejemplo de suma hallemos el resultado usando esta aplicación.

$$\frac{8}{5} + \frac{2}{7} = \frac{(8 \times 7) + (2 \times 5)}{5 \times 7} = \frac{56 + 10}{35} = \frac{66}{35}$$

● ***Multiplicación***

Al momento de multiplicar fracciones seguiremos un proceso que relaciona a los numeradores entre sí y a los denominadores entre sí. Vamos a multiplicar los numeradores y el resultado de este será el numerador de la fracción resultante, multiplicamos los denominadores y este será el denominador de la fracción resultante (es indiferente si los denominadores son iguales o no).

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f}$, **con** $b, d, y\ f$ distintos de cero.

Ejemplo:

$$\frac{-5}{3} \times \frac{8}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{-5 \times 8 \times 4}{3 \times 3 \times 7} = \frac{-160}{63}$$

● ***División:***

Cuando se necesita realizar la división entre dos fracciones generalmente son tres los métodos más aplicados. El primer método con el que nos sentimos familiarizados a la hora de realizar una división entre fracciones es aquel que comúnmente llamamos "cruzado", este consiste en multiplicar **el numerador de la primera fracción** por el **denominador de la segunda fracción**, donde el resultado obtenido es el **numerador de la fracción final**, seguidamente multiplicamos **el denominador de la primera fracción** por **el numerador de la segunda**, donde el resultado obtenido constituye el **denominador de la fracción final**. Sean a, b, c, y d números enteros, y b y $\boldsymbol{d}$ se cumple que:

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a(d)}{b(c)}$, este método a su vez se resume en otro denominado "**multiplicación por el inverso**". El **inverso de una fracción** o fracción inversa como también suele llamarse es otra fracción que tiene la propiedad de multiplicarse con la inicial y obtener como resultado uno, es por ello que al calcularlo solo basta con tomar la fracción a la que se le desea calcular e intercambiar la posición del denominador y el numerador, por lo tanto si nos solicitan hallar el inverso de $\frac{a}{b}$ solo basta con intercambiar a por b y b por a y así obtenemos la fracción $\frac{b}{a}$.

Si deseamos dividir una fracción entre otra solo nos basta con multiplicar la fracción que queremos dividir por el inverso de la siguiente fracción. De esta manera se tiene que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{a(d)}{b(c)}.$$

Ejemplos: realizar la división indicada por uno de los métodos y verificar el resultado por el otro.

$\left(\frac{9}{8}\right) \div \left(\frac{7}{3}\right)$. La resolveremos por el método de la multiplicación del inverso y verificaremos el resultado realizando la división de nuevo, solo que por el método cruzado.

Multiplicando por el inverso:

$\left(\frac{9}{8}\right) \div \left(\frac{7}{3}\right)$ Una vez planteada la división se ubica la fracción que desempeña el papel de divisor* y se procede a calcularle el inverso, en el ejercicio que se nos presenta esta fracción es $\frac{7}{3}$ y su inverso es $\frac{3}{7}$.

Ahora la división $\left(\frac{9}{8}\right) \div \left(\frac{7}{3}\right)$ la transformamos en el producto: $\left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{7}\right)$

Seguidamente resolvemos el producto $\left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{9(3)}{8(7)} = \frac{27}{56}$ por lo que la división $\left(\frac{9}{8}\right) \div \left(\frac{7}{3}\right) = \frac{27}{56}$.

Luego de haber obtenido el resultado de la división procedemos a realizarla por el método de "la multiplicación cruzada" para verificar que el procedimiento realizado anteriormente es correcto.

Multiplicación "cruzado":

$$\left(\frac{9}{8}\right) \div \left(\frac{7}{3}\right) = \qquad \frac{9}{8}\;\frac{7}{3} \qquad = \frac{9(3)}{8(7)} = \frac{27}{56}$$

Como se puede observar ambos métodos son correctos y equivalentes, pues al aplicarlos se obtiene el mismo resultado, a su vez podemos decir que se reducen a la misma operación es decir al producto.

¿Qué ocurre si encontramos la división de la forma siguiente $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$*? Pues esta es una forma de expresar la división*

Para muchos esta expresión puede ser familiar y para otros no tanto, sin embargo por lo que conocemos hasta ahora de los números racionales (fracciones) se puede decir que el numerador es la fracción $\frac{a}{b}$ y el denominador es la fracción $\frac{c}{d}$, también que $\frac{a}{b}$ es la fracción que queremos dividir y $\frac{c}{d}$ es la fracción entre la que queremos dividir a $\frac{a}{b}$, por lo tanto aquí se puede resolver la división después de haber identificado el rol que desempeña cada fracción por cualquiera de los métodos anteriores, sin embargo al tener la división expresada de la forma $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ se puede aplicar otro método comúnmente conocido como **"doble C".**

El método de la **"doble C"** consiste en multiplicar el extremo superior por el extremo inferior y el resultado obtenido se coloca como numerador de la nueva fracción, posteriormente se multiplica los elementos ubicados en el centro y el resultado obtenido se coloca en la posición del denominador de la nueva fracción**. En expresión matemática esto es:**

a por d $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ **y** b **por** c , luego $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{(a)(d)}{(b)(c)}$

Ilustraremos lo anterior con el ejemplo utilizado en los métodos del inverso y el método "cruzado", esta vez desarrollado aplicando la **"doble C".**

Hallar $\dfrac{\frac{9}{8}}{\frac{7}{3}}$.

$$(9)(3) \quad \dfrac{\frac{9}{8}}{\frac{7}{3}} \quad \text{y} \quad (8)\,(7) = \dfrac{\frac{9}{8}}{\frac{7}{3}} = \dfrac{(9)(3)}{(8)\,(7)} = \mathbf{\dfrac{27}{56}}$$

Como se puede notar aplicando el procedimiento de la **"doble C"** nos dio como resultado el mismo que se obtuvo al aplicar los métodos anteriores. Es por ello que ahora amigo lector es tu decisión el aplicar uno o el otro.

Ejercicios:

Resolver las siguientes divisiones por uno de los tres métodos enunciados y verificar el resultado por uno de los dos restantes. (Emplee métodos distintos en cada ejercicio):

- $\frac{12}{5} \div \frac{9}{2}$
- $\frac{20}{3} / \frac{15}{2}$
- $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{21}{7}}$
- $(42 \div 14) \div (3 \div 1)$
- $(16/7)/(28\ /6)$
- $\frac{19}{9} / (25/4)$

Potenciación de números racionales (fracciones):

Así como la multiplicación expresa una suma resumida la potenciación expresa una multiplicación resumida, esta multiplicación es respecto a un mismo número. De acuerdo al DRAE se define la potencia como: "Producto que resulta de multiplicar una cantidad o expresión por sí misma una o más veces".

Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$ números enteros entonces se cumple que:

$\boldsymbol{a}^n = \overbrace{(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}) \ldots (\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a})}^{n\ veces}$, donde $\boldsymbol{a}$ recibe el nombre de **base** y $\boldsymbol{n}$ de **exponente**. Podemos leer la expresión matemática como la multiplicación de la base por si misma tantas veces como lo indique el exponente.

Ejemplo: $2^3 = (2)(2)(2) = 8$.

De manera análoga se define la potenciación entre números racionales, solo que en este conjunto de números se debe estar al pendiente de sustituir a la base $\boldsymbol{a}$ por un número de la forma $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$**.** Redefiniendo lo anterior se tiene que:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) \ldots \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)}^{n\ veces}$ Donde $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$**.** Recibe el nombre de **base** y $\boldsymbol{n}$ de **exponente**, con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{n}$ enteros .Podemos leer la expresión matemática como la multiplicación de la base por si misma tantas veces como lo indique el exponente.

Ejemplo: $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\mathbf{81}}{\mathbf{16}}$.

Es necesario iniciar el estudio de las propiedades que se ubican dentro de esta operación matemática con potencias sencillas, como lo es la “potencia cuyo exponente es 1” y “la potencia cuya base es 1”.

“Potencia con exponente 1”

Es una potencia de la forma $\left(\frac{a}{b}\right)^1$, aplicando la definición de potencia se tiene que el exponente nos indica que la base $\frac{a}{b}$ la multiplicaremos una sola vez, es decir que se escribirá una sola vez, teniendo así que:

$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$, que equivale a decir que toda potencia constituida por cualquier base y elevada al exponente **1** dará como **resultado la misma base,** generalizando podemos afirmar que cuando escribimos un numero sin exponente sobrentendemos que el exponente que lo acompaña es 1.

Ejemplo: $4, \frac{15}{3}, 1000, \frac{-24}{7}, \ldots$

"Potencia de base 1"

Dicha potencia se expresa como $(1)^n$, donde n es un número entero, aplicando la definición de potencia, llegamos a que $(1)^n = (1)\ (1)\ (1)\ (1)\ (1)\ldots\ (1)$ es decir multiplicaremos el 1 por si mismo n veces, a su vez conocemos que (1) (1)= 1 por lo tanto se cumple que:

$(1)^n = 1$, lo que corresponde a decir que toda potencia cuya base sea el numero uno tendrá como resultado al uno sin importar que cantidad exprese el exponente.

***Ejemplo*:** $(1)^3 = 1, (1)^8 = 1, (1)^{1000} = 1, (1)^{-4} = 1, (1)^{-100} = 1, \ldots$

Producto de potencia de igual base:

Para multiplicar potencia de igual base, se **expresa la misma base** y se **suma** los exponentes. Dados $\frac{a}{b}$, n y m se cumple que:

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$

Ejemplo:

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3 \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \left(\frac{4}{7}\right)^{3+2} = \left(\frac{4}{7}\right)^5 = \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1024}{16807}$$

División de potencia de igual base:

Para dividir potencia de igual base **se escribe la misma** base y **se resta** los exponentes. $\frac{a}{b}$, n y m **se verifica que:**

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

Ejemplos:

a) $\frac{\left(\frac{8}{7}\right)^6}{\left(\frac{8}{7}\right)^4} = \left(\frac{8}{7}\right)^{6-4} = \left(\frac{8}{7}\right)^2 = \left(\frac{8}{7}\right)\left(\frac{8}{7}\right) = \left(\frac{64}{49}\right)$

¿Qué sucede si el exponente que corresponde a la fracción denominador es negativo?, es decir si se presenta algo similar a $\dfrac{\left(\frac{6}{4}\right)^{3}}{\left(\frac{6}{4}\right)^{-2}}$.

Quizá muchos observadores pueden tender a pensar que al encontrarse presente el signo menos en el exponente nos están diciendo que se puede realizar la resta de forma directa, si se ha pensado esto, estamos en una posición incorrecta ya que la condición del exponente al momento de definirse la potencia es que este debe ser un numero entero por lo que tiene la opción de ser un numero positivo, un numero negativo o el cero. El que esto suceda no nos cambia totalmente el procedimiento, observemos:

b) $$\frac{\left(\frac{6}{4}\right)^{3}}{\left(\frac{6}{4}\right)^{-2}} = \left(\frac{6}{4}\right)^{3-(-2)} = \left(\frac{6}{4}\right)^{3+2} = \left(\frac{6}{4}\right)^{5} = \left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{6}{4}\right) = \left(\frac{7776}{1024}\right)$$

Lo que varía en este ejercicio es que al momento de expresar la resta entre estos dos exponentes se colocan dos signos menos, a saber el de la diferencia que establece la propiedad de división de potencia de igual base y el que le pertenece al exponente, luego por aplicación de ley de los signos la sustracción que se presenta se transforma en una adición (suma), resolvemos normalmente y obtenemos el resultado.

¿Qué sucede si $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}, \dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^{4}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{4}}, \ldots, \dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}$?

Sin pensar mucho llegaríamos a aplicar la propiedad de la división de potencia de igual base obteniendo que:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{4}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{4}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{4-4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{0}, \ldots, \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0}$$

Eso es lo que se obtiene aplicando la propiedad luego si resolvemos solo aplicando definición de potencia se tiene que:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{8} = \mathbf{1}$$

$$\boxed{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}} \Rightarrow \boxed{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \text{ y } \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 1} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1}$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^4}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{16}{625}}{\frac{16}{625}} = \frac{400}{400} = \mathbf{1}$$

$$\boxed{\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^4}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^4}{\left(\frac{2}{5}\right)^4}} \Rightarrow \boxed{\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^4}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} = \left(\frac{2}{5}\right)^0 \text{, y } \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^4}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} = 1} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \underbrace{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}}_{n\ veces} = \frac{\frac{a^n}{b^n}}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{a^n b^n}{a^n b^n} = \mathbf{1}$$

$$\boxed{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}} \Rightarrow \boxed{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \text{ y } \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}}$$

¿Es posible que esto sea una propiedad?

Efectivamente la expresión $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ es una propiedad de la potencia y recibe el nombre de ***"Potencia con exponente igual a cero"*** (algo creativo el nombre), esta nos dice que "toda potencia con cualquier base distinta de cero y como exponente cero su resultado es **1**", resumiendo así el procedimiento realizado para encontrar el resultado en cada ejemplo anteriormente.

Potencia de una potencia:

Recibe el nombre de **"potencia de una potencia"** toda expresión de la forma: $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right)^{m}$ Donde a, b, n, m son números enteros. Cuando se tiene una expresión de la forma anterior se procede de la siguiente manera:

$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right)^{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{(n)(m)}$.

Como se puede observar en la expresión anterior cuando nos encontramos ante una **"potencia de una potencia"** se procede a escribir la **base** y se multiplican **los exponentes.**

Ejemplo: resolver la siguiente potencia aplicando el uso de la propiedad **"potencia de una potencia":**

a) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right)^{2} =$

Escribimos la misma base en este caso: $\frac{2}{3}$

Multiplicamos los exponentes: 3 y 2

Obteniendo la expresión: $\left(\frac{2}{3}\right)^{(3)(2)}$

Realizando las operaciones pertinentes se obtiene que $\left(\frac{2}{3}\right)^{(3)(2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{(6)} =$ $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{64}{729}\right)$

b) $\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\right)^{1}$

Escribimos la misma base en este caso: $\frac{5}{2}$

Multiplicamos los exponentes: -3 y 1

Obteniendo la expresión: $\left(\frac{5}{2}\right)^{(-3)(1)}$

Realizando las operaciones pertinentes se obtiene que $\left(\frac{5}{2}\right)^{(-3)(1)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{(-3)}$

Al llegar a este resultado como se puede notar estamos ante una potencia de exponente negativo, exponente que no hemos trabajado aun, por lo que para obtener el resultado final de esta operación trabajaremos **“potencia con exponente negativo”**

Potencia con exponente negativo:

Sean a, b, n números enteros y si $\left(\frac{a}{b}\right)^{(-n)}$ entonces se cumple que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{(-n)} = \left(\frac{b}{a}\right)^{(n)}$$

Es decir que cuando se está en presencia de una potencia con exponente negativo, se intercambia la posición del numerador con el denominador y el exponente cambia a positivo.

Conociendo esta nueva propiedad nos encontramos en condiciones de continuar con el ejercicio planteado en el segundo ejemplo de la propiedad anterior. Después de trabajarlo un poco habíamos quedado en $\left(\frac{5}{2}\right)^{(-3)}$, ahora lo retomaremos y llegaremos al resultado final.

$\left(\frac{5}{2}\right)^{(-3)}$ Aplicando la propiedad **“potencia con exponente negativo”** obtenemos que:

$\left(\frac{5}{2}\right)^{(-3)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(3)} = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{8}{125}\right)$ y así llegamos al resultado final, es decir que:

$$\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\right)^{1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{(-3)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(3)} = \frac{8}{125}.$$

¿Puede la base ser negativa?

Así como se presento el caso de la potencia con exponente negativo nos encontramos con la situación de que la base puede ser negativa, ya que al definir un número racional se hizo utilizando dos enteros, lo que nos ubica en que los dos sean positivos, los dos sean negativos, o uno sea negativo y el otro positivo. Siempre que **el numerador y el denominador** tengan **el mismo signo** la **base será positiva** mientras que al poseer **signos**

distintos tendremos una **base negativa**, es por ello que también existe una propiedad que nos muestra que hacer en este caso.

"Potencia con base negativa"

Esta propiedad simbólicamente se representa de la siguiente forma: $\left(-\frac{a}{b}\right)^{(n)}$ **ya fijada la condición de la base, observemos el exponente. En cada potencia el exponente puede ser par o impar, por ello esta propiedad se subdivide en dos:**

1. "Potencia con base negativa y exponente par"

$\left(-\frac{a}{b}\right)^{(n)}$, con n par.

Cuando la base es negativa y el exponente es par el resultado será un número positivo (debido a que el producto de dos signos negativos es positivo, y al ser par los signos estarán completos al multiplicarse de dos en dos).

Ejemplo:

$\left(-\frac{3}{2}\right)^{(4)} =$

Menos por menos

Más por más = más

$\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \qquad \left(+\frac{9}{4}\right)\left(+\frac{9}{4}\right) = \left(+\frac{81}{16}\right) = \frac{81}{16}$

2. "Potencia con base negativa y exponente impar"

$\left(-\frac{a}{b}\right)^{(n)}$, con n par.

Cuando la base es negativa y el exponente es par el resultado será un número negativo.

Ejemplo:

Menos por menos =

Más por más =

más por menos = menos

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{(5)} = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(+\frac{9}{4}\right)\left(+\frac{9}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(+\frac{81}{16}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{243}{32}$$

“Producto de potencias con el mismo exponente”

Se aplica esta propiedad cuando nos encontramos ante una expresión de la forma $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right)^{n}$, donde $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ son números racionales distintos (son fracciones distintas).

$\left(\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}\left(\frac{c}{d}\right)^{n}$. Es decir que la potencia del producto de dos fracciones distintas es igual al producto de las potencias de cada una de ellas.

Ejemplo:

- Verificar que $\left(\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\right)^{3} = \left(\frac{3}{7}\right)^{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{3}$.

Para verificar que se cumple la siguiente igualdad procedemos a resolver la expresión que muestran de cada lado de la igualdad por separado.

$\left(\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\right)^{3}$: Dentro del paréntesis más grande la operación que se muestra es un producto de fracciones, recordando lo estudiado hace algunas páginas atrás lo resolvemos, y se obtiene como resultado $\left(\frac{12}{21}\right)^{3}$.

Ahora quedando esta potencia $\left(\frac{12}{21}\right)^{3}$ aplicamos **la definición de potencia** y obtenemos que $\left(\frac{12}{21}\right)^{3} = \left(\frac{12}{21}\right)\left(\frac{12}{21}\right)\left(\frac{12}{21}\right) = \frac{1728}{9261}$, **por lo tanto** $\left(\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\right)^{3} = \frac{1728}{9261}$.

Resolviendo el segundo lado de la igualdad:

$\left(\frac{3}{7}\right)^{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{3}$: La operación que se muestra es el producto de dos potencias por lo tanto resolveremos cada potencia por separado.

$\left(\frac{3}{7}\right)^{3} = \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{27}{343}$

$\left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27}$. Una vez realizadas las potencias nos queda resolver el producto entre los valores obtenidos de cada una de ellas.

$\left(\frac{27}{343}\right)\left(\frac{64}{27}\right) = \frac{1728}{9261}$, por lo que se puede decir que: $\left(\frac{3}{7}\right)^{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{1728}{9261}$

Después de haber trabajado con cada lado de la igualdad comparemos los resultados.

Teníamos que:

$$\left(\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\right)^3 = \left(\frac{3}{7}\right)^3\left(\frac{4}{3}\right)^3 \text{, luego}$$

$$\left(\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\right)^3 = \frac{1728}{9261} \text{ y } \left(\frac{3}{7}\right)^3\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{1728}{9261} \text{ entonces}$$

$$\frac{1728}{9261} = \frac{1728}{9261}$$

Observándose así que se verifica la igualdad y consecuentemente $\left(\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\right)^3 = \left(\frac{3}{7}\right)^3\left(\frac{4}{3}\right)^3$, **es decir que la propiedad enunciada se verifica en este ejercicio.**

"División de potencias con el mismo exponente"

Se aplica esta propiedad cuando nos encontramos ante una expresión de la forma $\left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}\right)^n$, donde $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ son números racionales distintos (son fracciones distintas).

$\left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}\right)^n = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{c}{d}\right)^n}$. Es decir que la potencia de la división de dos fracciones distintas es igual a la división de las potencias de cada una de ellas.

Ejemplo:

Verificar que se mantienen la igualdad.

$$\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)}\right)^4 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(\frac{2}{5}\right)^4}$$

Resolvemos los lados de la igualdad por separado.

$\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)}\right)^4 = \left(\frac{10}{6}\right)^4 = \left(\frac{10}{6}\right)\left(\frac{10}{6}\right)\left(\frac{10}{6}\right)\left(\frac{10}{6}\right) = \frac{10000}{1296}$ (resolvemos primero aplicando división de números racionales y luego aplicamos la definición de potencia).

$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\left(\frac{16}{81}\right)}{\left(\frac{16}{625}\right)} = \frac{10000}{1296}$ (resolvemos primero aplicando la definición de potencias tanto en el numerador como en el denominador, seguidamente realizamos la división de números racionales).

Como $\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)}\right)^4 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(\frac{2}{5}\right)^4}$ **y** $\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)}\right)^4 = \frac{\mathbf{10000}}{\mathbf{1296}}$ **y** $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} = \frac{\mathbf{10000}}{\mathbf{1296}}$ entonces podemos decir que $\frac{\mathbf{10000}}{\mathbf{1296}} = \frac{\mathbf{10000}}{\mathbf{1296}}$, de esta manera concluimos que la igualdad se mantiene y que por lo tanto la propiedad se cumple en este ejercicio.

Ejercicio: hallar el valor de la siguiente expresión aplicando los distintos conocimientos que ahora posees de los números racionales.

$$\frac{\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{5}{10}\right]^3}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}\right]+\left[\left[\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^2}{\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^8+\left(\frac{5}{6}\right)^2}{3}\right]^0}$$

Solución:

¿Qué te parece el ejercicio? ¿Cómo comenzarías a abordarlo?

Al dar un vistazo a la expresión que se nos muestra, los primeros pensamientos harán referencia quizá a lo largo que es, a que incluye distintas operaciones, a que parece ser complejo, entre otras muchas que comienzan a inducir en quien lo debe desarrollar el desanimo, cansancio, sueño y todas esas cosas que induzcan a querer escapar de este. Sin embargo si estamos en una situación donde debemos resolverlo porque es decisivo para algo importante, pues nos armamos de fuerza y valentía y comenzamos a resolver.

Lo primero que se debe tener es disposición a resolverlo, una vez presente esta podemos optar por dividirlo en partes, como las siguientes:

$$\frac{\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{5}{10}\right]^3}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}\right]+\left[\left[\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^2}{\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^8+\left(\frac{5}{6}\right)^2}{3}\right]^0}$$

¿En qué me ayudara esto? ¿Me reduce lo que debo hacer?

Lo primero que facilitara el dividir el ejercicio en partes es **ubicar ciertas operaciones**, y así **comenzar a trabajar** con estas, puede que en algunos casos esto reduzca la cantidad de pasos como puede que no, aun así **sigue siendo conveniente** dividir el ejercicio en partes ya que permitirá tener las ideas claras y ordenadas al resolver.

$\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{5}{10}\right]^3}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}\right]$ = de manera análoga dividimos esta parte, comenzando a resolver lo que está dentro de los paréntesis primero.

$\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^2$ (Suma de fracciones con distinto denominador)

$\left(\frac{2+3}{10}\right)^2$ (Método del mcm para la suma de fracciones con distinto denominador)

$\left(\frac{5}{10}\right)^2$ (Definición de potencia)

$\frac{25}{100}$ **. Es decir que** $\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^2=\frac{25}{100}$ **luego se tiene que:**

$$\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{5}{10}\right]^3$$

Por lo que: $\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{5}{10}\right]^3 = \left[\frac{25}{100}-\frac{5}{10}\right]^3$ quedando dentro del corchete la siguiente operación:

$\frac{25}{100}-\frac{5}{10}$ (Resta de fracciones con distinto denominador)

$\frac{25-50}{100}$ (Método del m. c. m para la suma o resta de fracciones con distinto denominador)

$\frac{-25}{100}$ (Suma algebraica de números enteros)

$\frac{-1}{4}$ (Simplificación de números racionales)

Por lo tanto $\frac{25}{100}-\frac{5}{10}=\frac{-1}{4}$ y $\left[\frac{25}{100}-\frac{5}{10}\right]^3 = \left[\frac{-1}{4}\right]^3$

$\left[\frac{-1}{4}\right]^3$ (Aplicamos la propiedad potencia de un cociente)

$\frac{-1^3}{4^3}$ Por definición de potencia y la propiedad de base negativa con exponente impar se obtiene que:

$\left[\frac{-1}{4}\right]^3 = \frac{-1}{64}$, así: $\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{5}{10}\right]^3 = \frac{-1}{64}$.

Continuamos con la parte siguiente:

$\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$: resolvemos la operación interna en el corchete.

$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$ (Aplicamos el producto de fracciones)

$\frac{3}{8}$ Así tenemos que: $\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2=\left[\frac{3}{8}\right]^2$ reduciendo la operación solo una potencia.

$\left[\frac{3}{8}\right]^2 = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)= \frac{9}{64}$ o lo que es lo mismo $\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 = \frac{9}{64}$, por lo tanto ya tenemos que :

$$\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^{2}-\frac{5}{10}\right]^{3}}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{2}}\right]=\frac{\frac{-1}{64}}{\frac{9}{64}}$$, para que el resultado quede expresado de forma sencilla aplicamos **"doble c"**

$\frac{\frac{-1}{64}}{\frac{9}{64}}=\frac{(-1)(64)}{(64)(9)}$, antes de resolver el producto tanto en el numerador como en el denominador observamos que en ambos se está multiplicando por 64, recordándonos **el proceso de amplificación de fracciones entonces podemos decir que la fracción** $\frac{(-1)(64)}{(64)(9)}=\left(\frac{-1}{9}\right)\left(\frac{64}{64}\right)$ a su vez la fracción $\left(\frac{64}{64}\right)$ tiene como **cociente 1**, por lo tanto $\left(\frac{-1}{9}\right)\left(\frac{64}{64}\right)=\left(\frac{-1}{9}\right)(1)$ seguidamente $\left(\frac{-1}{9}\right)(1)=\frac{-1}{9}$, concluyendo por esto que:

$$\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^{2}-\frac{5}{10}\right]^{3}}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{2}}\right]=\frac{-1}{9}.$$

Como ya expresamos la primera parte de la forma más sencilla que se encontró procedemos a expresar la segunda parte de esta forma también.

$$\left[\left[\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{4}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}$$: Análogamente dividimos este ejercicio en sus partes más pequeñas, comenzando a resolver la primera de ellas.

$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{4}$ por la forma en que esta expresada identificamos que estamos ante **la potencia de una potencia, aplicando esta propiedad resulta que:**

$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{(2)(4)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$ al llegar a este resultado estamos tentados a continuar desarrollando la potencia, sin embargo aunque es correcto no es lo más apropiado, esto lo deducimos porque al observar el ejercicio del que estamos partiendo encontramos la potencia $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ que de algún modo se puede relacionar con el resultado que hemos encontrado. Por ahora solo dejaremos expresado que $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{8}$ y continuamos con la siguiente parte:

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$: Donde la primera característica que identificamos es el exponente negativo, además tenemos que esta potencia que nos están mostrando forma parte de una fracción donde el numerador es $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{4}$ cuya base es $\frac{2}{3}$, mostrándonos esto que si aplicamos la propiedad de la potencia con exponente negativo obtendremos un denominador con base parecida a la del numerador. Quien está dando solución al ejercicio debe estar muy al pendiente de la operación que está realizando, por ello es recomendable guiarse por las expresiones que se tienen.

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$ (por aplicar la propiedad potencia con exponente negativo).

Ya desarrolladas estas dos pequeñas partes volvemos sobre el ejercicio completo y sustituimos por los resultados obtenidos:

$$\left[\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{4}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}\right] = \left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{8}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}\right]$$

$$\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{8}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^{8-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}.$$

Así la segunda parte ya la hemos transformado en algo mas pequeño y eso lo podemos notar en la siguiente igualdad:

$$\left[\left[\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{4}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}.$$

Observando la expresión ubicada dentro del corchete nos puede llevar a varias ideas para resolver, entre ellas transformar el exponente -2 de la base $\left(\frac{2}{3}\right)$ a 2, sin embargo esto no seria muy conveniente ya que al transformar el exponente invertiremos el orden entre numerado y denominador obteniendo una nueva base, la idea que nos beneficia permitiéndonos escribir una sola potencia es: dejar las bases como están y aplicar la propiedad **“producto de potencias con igual base”.**

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5+(-2)}\right]^{2}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5-2}\right]^{2}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{2}$$ así:

$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{2}$ ubicándonos ahora ante **“la potencia de una potencia”**, donde $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{6}$, consecuentemente la segunda parte del ejercicio queda expresada a través de la siguiente igualdad:

$$\left[\left[\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{4}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{6}.$$

Después de tener la primera y segunda parte escritas en forma de una sola potencia procedemos resolver la tercera y última parte.

$$\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{8}+\left(\frac{5}{6}\right)^{2}}{3}\right]^{0}.$$

Distintas pueden ser las ideas que pueden surgir al tratar de resolver esta parte, unos quizá piensen en trabajar por partes como lo hemos venido haciendo, otros desarrollar las potencias y luego la suma entre fracciones, no obstante existirán otros que luego de realizar su observación inmediatamente dijeron **¡listo esa parte vale 1!, ¿Por qué dijeron esto?, ¿Qué los motivo a dar la respuesta de inmediato?**

Exactamente has encontrado el detalle, es porque la potencia más grande que muestra dicha expresión tiene como exponente **cero**, y aplicando la propiedad **“potencia con exponente cero”,** no importa qué valor tenga la base, siempre y cuando sea distinta de cero, **el resultado de sacar su potencia es 1.** Podemos estar totalmente seguros que la base es distinta de cero pues su numerador es la suma de potencias distintas de cero y su denominador es distinto de cero, así:

$$\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^8+\left(\frac{5}{6}\right)^2}{3}\right]^0=\mathbf{1.}$$

Como ya conocemos el valor de cada parte, las uniremos para representar el ejercicio general:

$$\frac{\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{5}{10}\right]^3}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}\right]+\left[\left[\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^2}{\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^8+\left(\frac{5}{6}\right)^2}{3}\right]^0}=\frac{\frac{-1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^6}{1}\quad ;\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$$

Así $\frac{\frac{-1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^6}{1}=\frac{\frac{-1}{9}+\frac{64}{729}}{1}$, lo que nos muestra una suma de fracción con distinto denominador, procedemos a encontrar el mcm entre $\mathbf{9}\ \boldsymbol{y}\ \mathbf{729}$.

$$\begin{array}{rr|l} 9, & 729 & 3 \\ 3, & 243 & 3 \\ 1, & 81 & 81 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

mcm = $(\mathbf{3^2})(\mathbf{81})=(\mathbf{9})(\mathbf{81})=\mathbf{729}$

Por lo que $\frac{-1}{9}+\frac{64}{729}=\frac{-81+64}{729}=\frac{-17}{729}$ **teniendo así que:** $\frac{\frac{-1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^6}{1}=\frac{\frac{-17}{729}}{1}=\frac{-17}{729}$.

Finalmente hemos encontrado el valor de toda la expresión es decir que:

$$\frac{\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{5}{10}\right]^3}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}\right]+\left[\left[\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^2}{\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^8+\left(\frac{5}{6}\right)^2}{3}\right]^0}=\frac{-17}{729}\ .$$

Es necesario acotar que aunque el ejercicio cuando se está revisando ocupa seis páginas aproximadamente no es largo pues aquí se está presentando de forma detallada, explicando el razonamiento secuencialmente, a la hora de resolver tus ejercicios no es necesario que des tantos detalles, y así esto te ahorraría tiempo y espacio, claro está el razonamiento estará incluido en el momento que estés expresando tus resultados.

Solución al ejercicio de forma resumida:

$$\frac{\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^{2}-\frac{5}{10}\right]^{3}}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{2}}\right]+\left[\left[\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{4}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}}{\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{8}+\left(\frac{5}{6}\right)^{2}}{3}\right]^{0}}=\frac{\left[\frac{\left[\left(\frac{2+3}{10}\right)^{2}-\frac{5}{10}\right]^{3}}{\left[\frac{3}{8}\right]^{2}}\right]+\left[\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{8}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}}{1}=$$

$$\left[\frac{\left[\left(\frac{5}{10}\right)^{2}-\frac{5}{10}\right]^{3}}{\frac{9}{64}}\right]+\left[\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{8-3}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}=$$

$$\left[\frac{\left[\frac{25}{100}-\frac{5}{10}\right]^{3}}{\frac{9}{64}}\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}=$$

$$\left[\frac{\left[\frac{25-50}{100}\right]^{3}}{\frac{9}{64}}\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5+(-2)}\right]^{2}=$$

$$\left[\frac{\left[\frac{-25}{100}\right]^{3}}{\frac{9}{64}}\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5-2}\right]^{2}=$$

$$\left[\frac{\left[\frac{-1}{4}\right]^{3}}{\frac{9}{64}}\right]+\left[\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]\right]^{2}=$$

$$\left[\frac{\left[\frac{-1}{4}\right]^{3}}{\frac{9}{64}}\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{2}=$$

$$\left[\frac{\frac{-1}{64}}{\frac{9}{64}}\right]+\left(\frac{2}{3}\right)^{6}=$$

$$\frac{(-1)(64)}{(64)\,(9)}+\frac{64}{729}=$$

$$\frac{-1}{9}+\frac{64}{729}=$$

$$\frac{-81+64}{729}=$$

$$\frac{-17}{729}\,.$$

Concluyendo así que:

$$\frac{\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)^{2}-\frac{5}{10}\right]^{3}}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{2}}\right]+\left[\left[\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{4}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}}{\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{8}+\left(\frac{5}{6}\right)^{2}}{3}\right]^{0}} = \frac{-17}{729}.$$

Ahora se te presentaran algunos ejercicios que te permitirán afirmar los conocimientos obtenidos durante esta sección.

Ejercicios propuestos:

Resuelve los siguientes ejercicios aplicando las operaciones de números racionales.

- $\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{3}\right)-\frac{4}{7}\right].$
- $\frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{7}\right)-\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{8}{3}\right)\right]}{\frac{1}{2}}.$
- $(3/2) \div \left(\frac{4/8}{3/5}\right).$
- $\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{4}}.$
- $\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{3}\right)-\frac{4}{7}\right]^{2}.$
- $\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{4}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}(2)^{-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{4}}\right]^{-3}$
- $\frac{\left[\left(\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{3}\right)^{1}\right)^{0}-\left[\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^{2}\left((2)^{2}\right)^{-2}\right]\right]^{-1}}{\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{6}\right)^{0}+\left[\left[\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}\right)^{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)^{-7}\right]^{0}\right]^{-3}}.$

Problemas resueltos

1) El restaurante chino.

Alejandro, para celebrar su cumpleaños, nos ha invitado a unos cuantos amigos a comer en un restaurante chino.

A la hora de poner la mesa, observo que cada dos amigos compartimos un plato de arroz, cada tres un plato de salsa y cada cuatro uno de vegetales. Sabiendo que en total nos sirvieron 65 platos, ¿Cuántos invitados acudimos a la fiesta?

Solución:

❖ **<u>FASE I: COMPRENDER EL PROBLEMA</u>**

¿Cuál es la interrogante a la que debemos dar solución?

Cuántos invitados acudimos a la fiesta

¿Cuáles son los datos?

- **dos amigos** compartimos **un plato de arroz**
- **cada tres un plato de salsa**
- **cada cuatro uno de vegetales**
- En total nos sirvieron **65 platos**

❖ **<u>FASE II: CONCEBIR EL PLAN</u>**

¿Qué relación tiene los datos entre sí?

Leamos detenidamente los datos y busquemos que hay de común entre ellos.

Si en un grupo hay dos amigos ¿pueden estos comer salsa? ¿Y vegetales? ¿Por qué?

- No comerán salsa ya que para que le sirvan un plato de esta deben haber como mínimo tres, tampoco podrán comer vegetales porque como mínimo deben haber cuatro, por lo tanto solo comerán arroz.

Si el grupo es de tres ¿Qué podrán comer?

- Dos comerán arroz y salsa, y el otro solo salsa. No comerán vegetales porque falta uno más para que le puedan servir este plato.

Si el grupo es de cuatro personas ¿podrán comer las tres cosas?

- Podrán comer arroz ya que por cada dos personas servirán un plato de arroz, por lo tanto si hay **cuatro personas** servirán **dos platos de arroz**.
- Tres comerán salsa y uno de ellos no ya que un plato de salsa es para tres personas.
- Todos comerán vegetales. Debido a que un plato de vegetales es servido para cuatro personas.

Observando que en cada una de las posibilidades anteriores cada vez que se arma un grupo con un mínimo de personas, queda alguien por falta de uno de los tres platos, entonces es necesario preguntarnos **¿Cuál es el mínimo de personas que tienen que existir en el grupo para que puedan servirles las tres comidas a todos?**

Como se ha observado para que se les pueda servir los platos los amigos deben acercarse en grupo, de acuerdo a la relación entre los datos el número de estos grupos deben ser:

- Múltiplo de dos para que les sirvan arroz
- Múltiplo de tres para que les sirvan salsa
- Múltiplo de cuatro para que les sirvan vegetales

Es decir que debemos buscar el menor número que sea al mismo tiempo múltiplo de dos, tres y cuatro. Una vez conocido el numero mínimo de personas que se deben acercar, podemos saber cuántos platos en total le sirven a este grupo, relacionando este valor con el valor total de platos servidos obtenemos el número de personas totales que asistieron a la reunión.

❖ **FASE III: EJECUTAR EL PLAN**

Describamos la situación con simbología Matemática:

X: platos de arroz
Y: platos de salsa
Z: platos de vegetales

Por lo tanto:

X + **Y** + **Z** = **65**

Ahora realicemos las operaciones para saber ¿Cuántas personas mínimo deben estar en el grupo?

Múltiplos de dos: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20,…
Múltiplos de tres: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,…
Múltiplos de cuatro: 4, 8, 12, 16, 20,…

Observando los resultados, buscamos el múltiplo común a las tres cantidades. Este es **12**.Sabiendo que existiendo como mínimo 12 personas en el grupo ¿podremos calcular la cantidad de platos que se entregaran a este grupo?

Si lo podemos calcular. Ya que en los datos conocemos la cantidad de personas que deben agruparse para que sirvan uno de los platos.

- Si por dos personas sirven un plato de arroz, a 12 personas ¿Cuántos platos le servirán?

$$\mathbf{2x_1 = 12\ .}$$

$x_1 = \frac{12}{2} = 6$, donde x_1 = número de platos de arroz que servirán a un grupo de 12 personas.

- Si por tres personas sirven un plato de salsa, a 12 personas ¿Cuántos platos le servirán?

$$3y_1 = 12\ .$$

$y_1 = \frac{12}{3} = 4$, donde y_1 = numero de platos de salsa que servirán a un grupo de 12 personas.

-Si a cuatro personas le sirven un plato de vegetales, ¿Cuántos platos le servirán a 12 personas?

$$4z_1 = 12\ .$$

$z_1 = \frac{12}{4} = 3$, donde z_1 = numero de platos de vegetales que servirán a un grupo de 12 personas.

Así tenemos que al grupo de 12 personas les servirán 6 platos de arroz, 4 platos de salsa y 3 platos de vegetales lo que sumara un total de 13 platos servidos.

¿Hemos utilizado todas las condiciones expuestas en la fase dos?

No. Ya que no hemos empleado aun el hecho de que **X** + **Y** + **Z** = **65**, lo que nos dice que el total de platos servidos fueron 65, en el trabajo realizado anteriormente se obtuvo que a 12 personas les sirvieran 13 platos, por lo tanto el número de personas total es mayor a 12. ¿Será posible conocer el número de personas que acudieron a la reunión utilizando estos datos?

Tenemos la siguiente relación:

12 personas $\longrightarrow$ 13 platos

¿Cuántas personas? $\longleftarrow$ 65 platos, por lo que:

$$\#\text{personas} = \frac{65 \times 12}{13} = \frac{780}{13} = 60\ .$$

- **Demos respuesta a la interrogante:** a la fiesta asistieron 60 invitados.

❖ FASE IV: EXAMINAR LA SOLUCIÓN

- **Verifiquemos el Resultado:** partiendo de la relación entre los datos y la incógnita busquemos la manera de comprobar que nuestra solución es correcta.

Tenemos por las relaciones que $X + Y + Z = 65$, es decir que el numero de platos totales de arroz mas el numero de platos totales de salsa mas el numero de platos totales de vegetales deben sumar 65.

Puesto que conocemos el número total de personas invitadas y el mínimo de personas para cada plato, podemos calcular el número total de platos de arroz, salsa y vegetales.

Por dos personas servían un plato de arroz. ¿Cuántos platos de arroz sirvieron a 60 personas?

$$X = \frac{60}{2} = 30.$$

Por tres personas servían un plato de salsa. ¿Cuántos platos de salsa sirvieron a 60 personas?

$$Y = \frac{60}{3} = 20.$$

Por cuatro personas servían un plato de vegetales. ¿Cuántos platos de vegetales sirvieron a 60 personas?

$$Z = \frac{60}{4} = 15.$$

Por lo tanto se sirvieron 30 platos de arroz, 20 platos de salsa y 15 platos de vegetales. Ahora verifiquemos que se cumple la relación $\mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{Z} = \mathbf{65}$.

Si $\mathbf{X = 30}$, $\mathbf{Y = 20}$ **y** $\mathbf{Z = 15}$, tenemos que $\mathbf{30} + \mathbf{20} + \mathbf{15} = \mathbf{65}$ y así

$$\mathbf{65 = 65.}$$

Por lo tanto se cumple la relación, y esto comprueba que los resultados obtenidos son correctos.

TRIGONOMETRÍA

La trigonometría es una rama importante de las matemáticas dedicada al estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, con una aplicación inmediata en geometría. Para comenzar a estudiar lo relacionado con la trigonometría es necesario conocer algunos aspectos que utilizaremos en toda esta sección. Te invitamos a que te preguntes lo siguiente:

- ¿Qué es un ángulo?
- ¿Cuáles son las unidades empeladas para medir ángulos? ¿Y cómo se relacionan?
- ¿Qué es un triángulo?
- ¿Partes de un triángulo?
- ¿Cómo se clasifican los triángulos?
- ¿Cuáles son las características de un triángulo rectángulo?

Si no tienes claridad en algunas de estas interrogantes o te gustaría profundizar, revisa la sección de conceptos básicos donde encontraras respuesta a estas que te ayudaran en la comprensión de la trigonometría.

Con este propósito se definieron una serie de razones, las que han sobrepasado su fin original para convertirse en elementos matemáticos estudiados en sí mismos y con aplicaciones en campos diversos.

Iniciemos nuestro estudio trigonométrico partiendo de un triángulo rectángulo

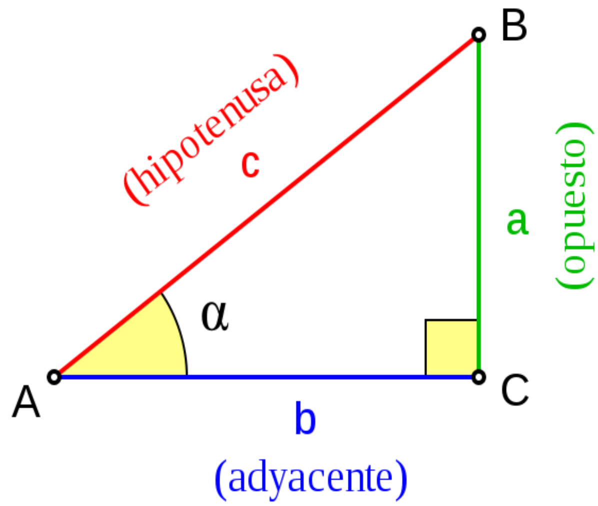
En triángulos rectángulos, las razones trigonométricas del seno, el coseno y la tangente pueden ser usadas para encontrar los ángulos y las longitudes de lados desconocidos. Los lados del triángulo se denominan como sigue, con respecto a uno de los ángulos agudos:

- La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto. Es el lado más largo de un triángulo rectángulo.
- El cateto opuesto es el lado opuesto al ángulo agudo considerado.
- El cateto adyacente es el cateto que forma el ángulo agudo considerado.

Seno, coseno y tangente

El seno de un ángulo es el cociente entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa.

$$sen\,\alpha = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$



El coseno de un ángulo es el cociente entre la longitud del cateto del lado adyacente y la longitud de la hipotenusa.

$$cos\,\alpha = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

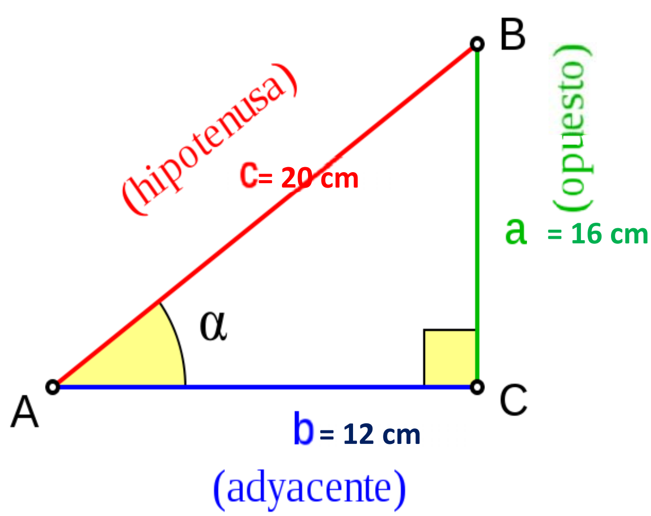
La tangente de un ángulo es el cociente entre la longitud del cateto opuesto y la longitud del cateto adyacente.

$$tan\,\alpha = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{a}{b}$$

Vamos a encontrar el valor del seno, coseno y tangente en los siguientes triángulos, tomando como ángulo de referencia al Angulo α.

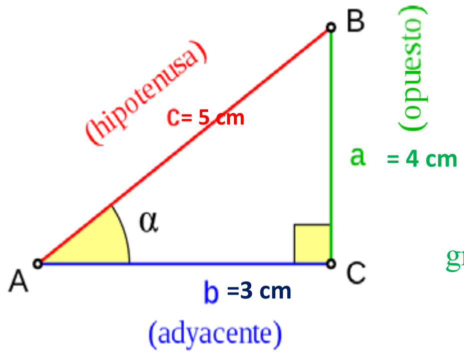
¿Crees que el valor da las razones trigonométricas será mayor en cuál de los triángulos? ¿En el más grande o el más pequeño?

1.



2.

Triángulo (1) más



grande

- $\boldsymbol{sen\,\alpha} = \dfrac{opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{16\cancel{cm}}{20\cancel{cm}} = \mathbf{0,8}$
- $\boldsymbol{cos\,\alpha} = \dfrac{adyacente}{hipotenusa} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{12\cancel{cm}}{20\cancel{cm}} = \mathbf{0,6}$
- $\boldsymbol{tan\,\alpha} = \dfrac{opuesto}{adyacente} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{16\cancel{cm}}{12\cancel{cm}} = \mathbf{1,33}$

Triángulo (2) más pequeño

- $\boldsymbol{sen\,\alpha} = \dfrac{opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{4\cancel{cm}}{5\cancel{cm}} = \mathbf{0,8}$
- $\boldsymbol{cos\,\alpha} = \dfrac{adyacente}{hipotenusa} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{3\cancel{cm}}{5\cancel{cm}} = \mathbf{0,6}$
- $\boldsymbol{tan\,\alpha} = \dfrac{opuesto}{adyacente} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{4\cancel{cm}}{3\cancel{cm}} = \mathbf{1,33}$

¿A qué crees que se debe que en ambos casos obtengamos el mismo resultado?

Está claro que el tamaño de los lados es distinto pero ¿hay algo que no varía entre los dos triángulos?

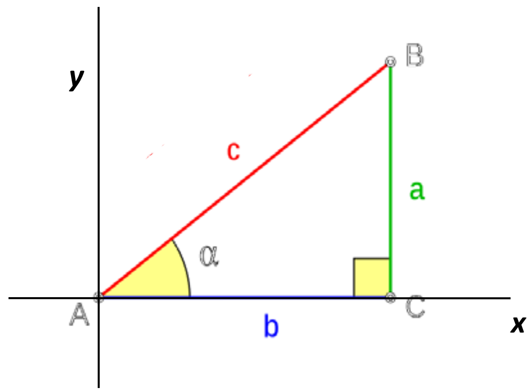
¿Cómo es el ángulo de referencia del triángulo 1 respecto al del triángulo 2?

¿Será que las razones trigonométricas no se ven afectadas por la longitud de los lados si los ángulos mantienen el mismo valor?

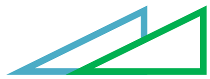
¿Podemos decir que si los ángulos son iguales las fracciones resultantes para cada una de las razones trigonométricas son fracciones equivalentes?

Veamos si lo que se cumple en este caso particular puede generalizarse para todos los triángulos que comparten el ángulo de referencia.

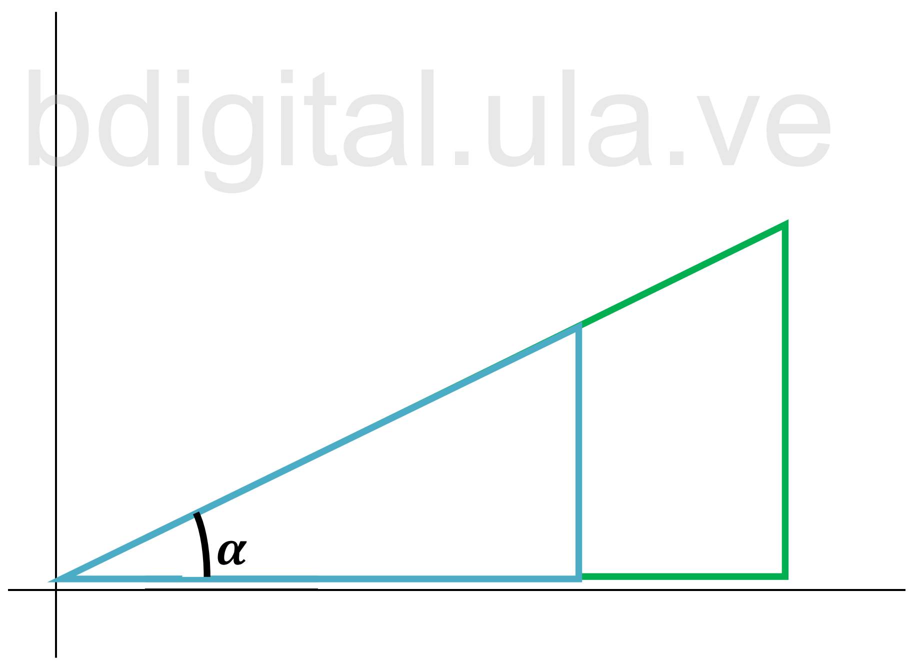
- $\boldsymbol{sen\,\alpha = \frac{a}{c}}$
- $\boldsymbol{cos\,\alpha = \frac{b}{c}}$
- $\boldsymbol{tan\,\alpha = \frac{a}{b}}$



Veamos ahora si ampliamos el triángulo o si lo reducimos:

¿Logras ver los dos triángulos en la grafica? 

Pensemos en el triángulo verde como el triángulo inicial y el triángulo azul como uno más pequeño.



Los triángulos poseen el mismo ángulo de referencia $\boldsymbol{\alpha}$ y también un ángulo recto. Por lo tanto para ambos triángulos tendríamos:

$$sen\,\alpha = \frac{opuesto}{hipotenusa} \qquad cos\,\alpha = \frac{adyacente}{hipotenusa} \qquad tan\,\alpha = \frac{opuesto}{adyacente}$$

Describamos los triángulos de la siguiente manera:

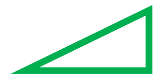
Cateto opuesto: a

Cateto adyacente: b

Hipotenusa: c

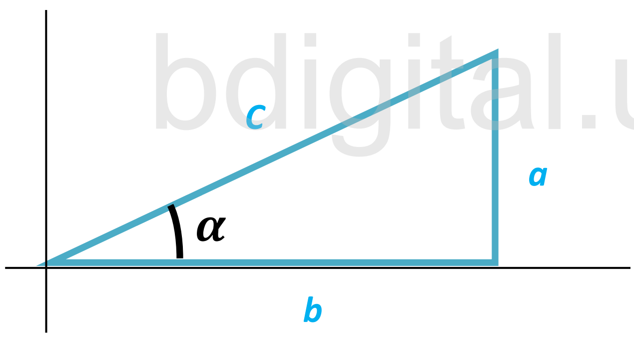
Cateto opuesto: d

Cateto adyacente: e



Hipotenusa: f

Primer triángulo

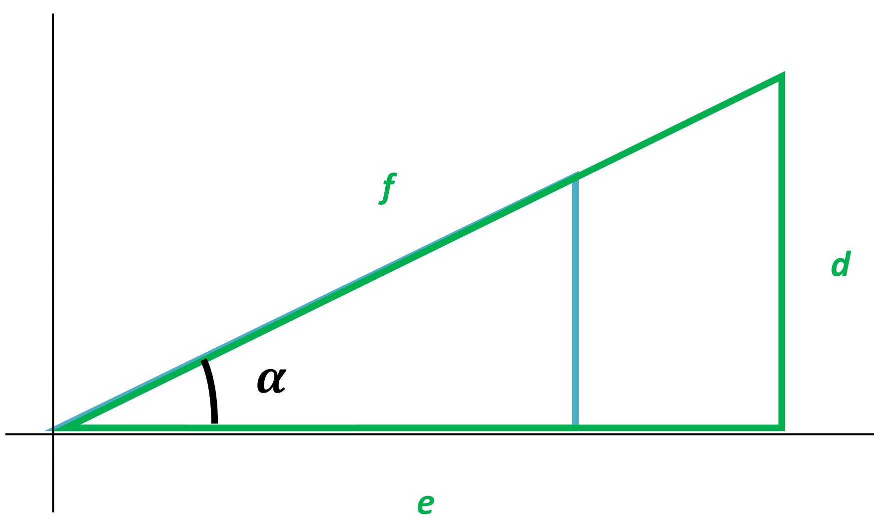


$$sen\,\alpha = \frac{a}{c}$$

$$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tan\,\alpha = \frac{a}{b}$$

Segundo triángulo



$$sen\,\alpha = \frac{d}{f}$$

$$cos\,\alpha = \frac{e}{f}$$

$$tan\,\alpha = \frac{d}{e}$$

En ambos casos estamos hablando del mismo ángulo $\boldsymbol{\alpha}$. Vamos a suponer que $\boldsymbol{sen\,\alpha = s}$. Así tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{sen\,\alpha = \frac{a}{c} = s} \\ \\ \boldsymbol{sen\,\alpha = \frac{d}{f} = s} \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{\frac{d}{f} = sen\,\alpha = s = \frac{a}{c}} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{a}{c} = \frac{d}{f}}$$

De esta manera notamos que:

$\boldsymbol{\frac{a}{c} = \frac{d}{f}}$ son fracciones equivalentes. Esto ***NO*** quiere decir que ***a*=*d*** y ***c*=*f***, pues claramente vemos en la grafica que ***f*** es mayor que ***c*** y ***d*** mayor que ***a***, sino que para los cocientes se tiene ***a/c*** = ***d/f***

Si hacemos lo mismo con el coseno y la tangente obtendremos también como fracciones equivalentes: $\boldsymbol{\frac{e}{f} = \frac{b}{c}}$ $\quad \boldsymbol{y} \quad$ $\boldsymbol{\frac{d}{e} = \frac{a}{b}}$.

De esta manera podemos ver que siempre que dos triángulos compartan el mismo ángulo de referencia los cocientes de sus lados respectivos son equivalentes.

Pensemos ahora en lo siguiente para cualquier triángulo que tengamos ¿podemos construir un triángulo más pequeño o más grande y por medio de este hallar las razones trigonométricas? Notemos que las razones seno y coseno siempre son una división de uno de los catetos sobre la hipotenusa. ¿Cuál es el mayor lado de un triángulo?¿ La hipotenusa o alguno de los catetos?

¿Si dividimos un numero entre otro mayor que este como es el cociente?

- $\boldsymbol{\frac{14}{15} = 0,9\widehat{3}}$
- $\boldsymbol{\frac{4}{11} = 0,\widehat{36}}$
- $\boldsymbol{\frac{1000}{1900} = 0,53}$
- $\boldsymbol{\frac{2}{10} = 0,2}$
- $\boldsymbol{\frac{1}{1000000000} = 0,00000001}$
- $\boldsymbol{\frac{1000}{1001} = 0,9\widehat{99000}}$

Los valores $\mathbf{0,00000001}$ $\boldsymbol{y}$ $\mathbf{0,9\widehat{9900}0}$ se pueden aproximar teniendo:

$$\mathbf{0,00000001 \approx 0}$$

$$\mathbf{0,9\widehat{9900}0 \approx 1}$$

¿Qué tienen en común todos estos cocientes?

¿Cuál es el valor máximo y cual el mínimo entre los cocientes?

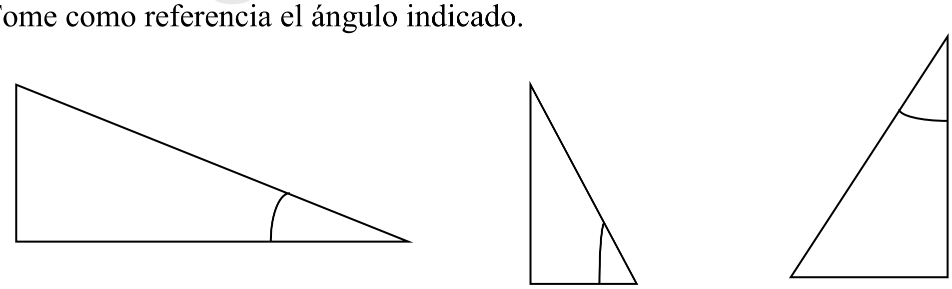
Todos los valores están comprendidos entre 0 y 1. Y ya que la hipotenusa siempre será mayor que los catetos las razones de seno y coseno siempre estarán comprendidos entre 0 y 1 incluyendo a estos dos valores.

¿Sucederá lo mismo con la tangente?

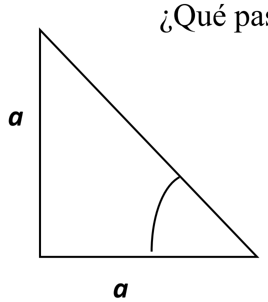
$$\boldsymbol{tan\,\alpha = \frac{opuesto}{adyacente}}$$

¿Siempre el cateto opuesto es mayor que el adyacente?

¿En cuál de los siguientes triángulos el cateto opuesto es mayor que el adyacente o viceversa? Tome como referencia el ángulo indicado.



¿Qué pasaría si ambos catetos miden lo mismo?



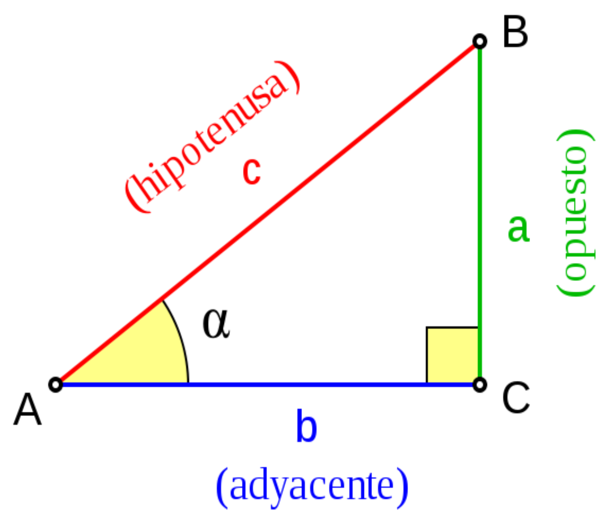
En este caso la tangente seria:

$$\boldsymbol{tan\,\alpha = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{a}{a} = 1}$$

A demás de las razones seno, coseno y tangente existe algunas más que están relacionadas con estas veamos sus equivalencias con las razones ya conocidas:

La Cosecante: inverso multiplicativo de seno

$$\csc\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{hipotenusa}{opuesto} = \frac{c}{a}$$



La Secante: inverso multiplicativo de coseno

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{hipotenusa}{adyacente} = \frac{c}{b}$$

La Cotangente: inverso multiplicativo de la tangente

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{adyacente}{opuesto} = \frac{b}{a}.$$

Por lo tanto todas las razones trigonométricas están relacionadas y pueden escribirse una en términos de las otras. Veamos que podemos escribir la tangente como una relación entre los catetos, pero a su vez cada cateto puedo ser descrito en función de una razón trigonométrica es el caso del seno y cateto opuesto y del coseno y el cateto adyacente.

Analicémoslo de la siguiente manera:

$$sen\,\alpha = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$sen\,\alpha = \frac{a}{c}$$

$$c \times sen\,\alpha = a$$

$$hipotenusa \times sen\,\alpha = opuesto$$

$$\cos\alpha = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$c \times \cos\alpha = b$$

$$hipotenusa \times \cos\alpha = adyacente$$

De ambas relaciones anteriores concluimos que:

$$\boldsymbol{opuesto} = \boldsymbol{hipotenusa} \times \boldsymbol{sen\,\alpha}$$

$$\boldsymbol{adyacente} = \boldsymbol{hipotenusa} \times \boldsymbol{cos\,\alpha}$$

Si sustituimos esto en la ecuación de la tangente

$$\boldsymbol{tan\,\alpha} = \frac{\boldsymbol{opuesto}}{\boldsymbol{adyacente}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$

Tenemos:

$$\boldsymbol{tan\,\alpha} = \frac{\boldsymbol{hipotenusa} \times \boldsymbol{sen\,\alpha}}{\boldsymbol{hipotenusa} \times \boldsymbol{cos\,\alpha}} = \frac{\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{sen\,\alpha}}{\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{cos\,\alpha}}$$

Ya que el termino ***hipotenusa (c)*** esta multiplicándose tanto en el numerador como en el denominador pueden ser simplificados

$$\boldsymbol{tan\,\alpha} = \frac{\cancel{\boldsymbol{hipotenusa}} \times \boldsymbol{sen\,\alpha}}{\cancel{\boldsymbol{hipotenusa}} \times \boldsymbol{cos\,\alpha}} = \frac{\cancel{\boldsymbol{c}} \times \boldsymbol{sen\,\alpha}}{\cancel{\boldsymbol{c}} \times \boldsymbol{cos\,\alpha}}$$

Y así nos resulta la siguiente relación:

$$\boldsymbol{tan\,\alpha} = \frac{\boldsymbol{sen\,\alpha}}{\boldsymbol{cos\,\alpha}} \quad .$$

De esta forma podemos relacionar las razones trigonométricas entre sí a continuación presentamos una tabla con estas relaciones:

TABLA DE RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Funciones trigonométricas en función de las otras cinco.

sen	$\operatorname{sen}\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\dfrac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\dfrac{1}{\csc\theta}$
cos	$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$	$\cos\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\dfrac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\sec\theta}$	$\dfrac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
tan	$\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\dfrac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
cot	$\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$	$\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\csc^2\theta-1}$
sec	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\dfrac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\dfrac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
csc	$\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\dfrac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$

Los ángulos pueden ser expresados en varias unidades, es importante recordar algunas de estas medidas y el valor de las razones trigonométricas en algunos casos particulares.

Radianes	Grados	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Secante
0	0^o	$\dfrac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\dfrac{\sqrt{4}}{2}=1$	0	$(\pm\infty)$	1	$(\pm\infty)$
$\dfrac{1}{6}\pi$	30^o	$\dfrac{\sqrt{1}}{2}=\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\dfrac{1}{4}\pi$	45^o	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\dfrac{1}{3}\pi$	60^o	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{1}}{2}=\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$\dfrac{1}{2}\pi$	90^o	$\dfrac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\dfrac{\sqrt{0}}{2}=0$	$(\pm\infty)$	1	$(\pm\infty)$	0

Todas las razones trigonométricas potienen inversa, que se denota como la misma función elevada a la menos uno, no se debe confundir con las razones reciprocas, esto quiere decir, que la razón inversa no es el inverso multiplicativo sino q es como tal una operación que como su nombre lo indica es inversa a la respectiva razón trigonométrica.

$\sin\alpha\,;\sin^{-1}\alpha$ $\qquad$ $\sin(\sin^{-1}\alpha)=\alpha$ $\qquad$ $\sin^{-1}(\sin\alpha)=\alpha$

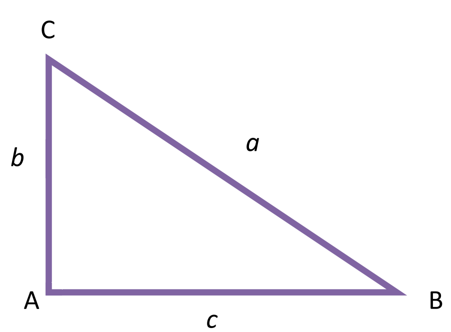
$\cos\alpha\,;\ \cos^{-1}\alpha$ $\qquad$ $\cos(\cos^{-1}\alpha)=\alpha$ $\qquad$ $\cos^{-1}(\cos\alpha)=\alpha$

$\tan\alpha\,;\ \tan^{-1}\alpha$ $\qquad$ $\tan(\tan^{-1}\alpha)=\alpha$ $\qquad$ $\tan^{-1}(\tan\alpha)=\alpha.$

De igual manera la secante, cosecante y cotangente también tienen razones trigonométricas inversas.

Una aplicación de las razones trigonométricas es determinar los valores de los lados o ángulos de un triángulo tomando en cuenta algunos de estos que se proporcionen como dato, veamos cómo utilizarlas.

Tenemos el triángulo ABC, con $b=20\,cm$ y $c=\ 40cm$ determinar las magnitudes de A, B, C.



Por medio de las razones podemos hallar las magnitudes que nos solicitan, los datos que tenemos hasta el momento son dos lados del triángulo, ¿cuál de las razones nos permiten relacionar estos datos con alguna de las incógnitas?

Veamos.

- $\boldsymbol{sen\,\alpha}=\frac{\boldsymbol{opuesto}}{\boldsymbol{hipotenusa}}.$

- $\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{adyacente}{hipotenusa}}$.
- $\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{opuesto}{adyacente}}$.

Para usar el seno necesitamos un ángulo, el cateto opuesto y la hipotenusa.

No conocemos ninguno de los ángulos, ni el valor de la hipotenusa no podríamos usar el seno directamente.

¿Y el coseno? Analiza lo que necesitarías

¿Y la tangente?

Para emplear la tangente necesitaríamos los dos catetos y un ángulo. Tanto a como b son conocidos y serán cateto opuesto o adyacente dependiendo del ángulo que tomemos, entre B y C.

Si tomamos a B como el ángulo de referencia tenemos los valores del cateto opuesto y el adyacente. Así que podemos usar

$$\tan B = \frac{b}{c}$$

$$\tan B = \frac{20}{40}$$

$$\tan B = \frac{1}{2}.$$

Aplicando la tangente inversa a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\tan^{-1}(\tan B) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$B = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}57°$$

$$\boldsymbol{B = 26{,}57°.}$$

¿Nos puede ser útil B para hallar alguna otra de las incógnitas?

Utilizando a B como referencia, ¿Qué lado es el cateto opuesto? ¿Qué lado es la hipotenusa? ¿Qué lado es el cateto adyacente?

"b" es el opuesto y "*a"* la hipotenusa ¿alguna de las razones relaciona a estos dos elementos?

Si conocemos el ángulo en este momento *B también el cateto opuesto podemos usar la función seno para hallar el valor de la hipotenusa.*

Entonces

$$sen\,B = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$sen\,B = \frac{b}{a}$$

$$a\,.\,sen\,B = b$$

$$a = \frac{b}{sen\,B}$$

$$a = \frac{20}{sen\,26{,}57}$$

$$a = 44{,}71$$

Usemos ahora el coseno y comprobemos

$$cos\,B = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$cos\,B = \frac{c}{a}$$

$$a\,.\,cos\,B = c$$

$$a = \frac{c}{cos\,B}$$

$$a = \frac{40}{cos\,26{,}57}$$

$$a = 44{,}7$$

Ambos resultados podemos redondearlos como

$$a = 44{,}7.$$

Tenemos así la magnitud de *a y* de *B* hallemos ahora la magnitud de *C.*

Podemos hacer un proceso análogo al que usamos para determinar *B* o emplear la propiedad de los ángulos internos de un triángulo que nos dice. Al sumar los 3 ángulos internos de un triángulo siempre tendrá como resultado 180.

Así al sumar

$$\boldsymbol{A + B + C = 180}$$

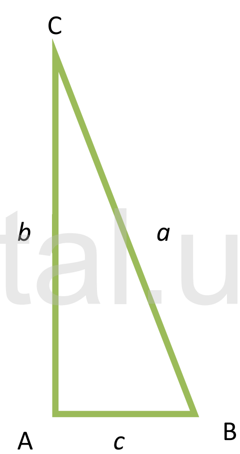
$$\boldsymbol{90° + 26,57° + C = 180°}$$

$$\boldsymbol{116,57° + C = 180°}$$

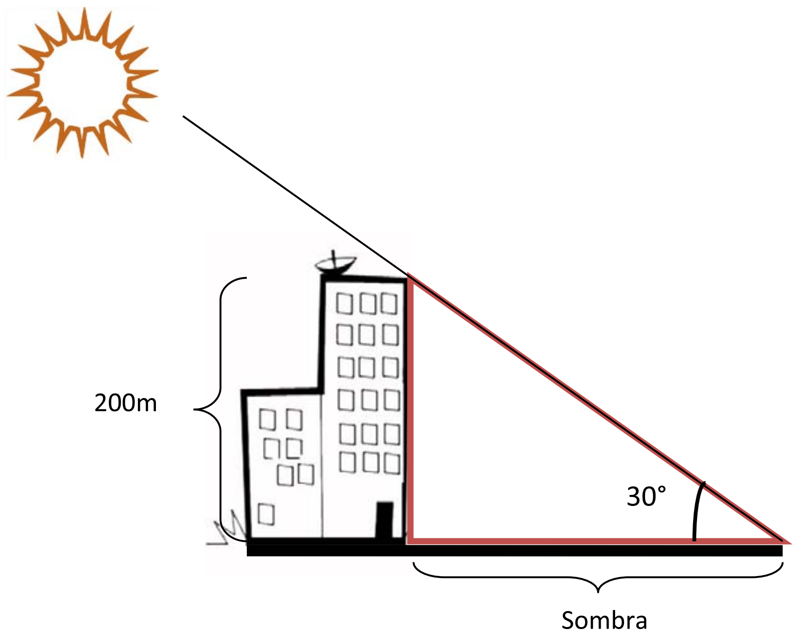
$$\boldsymbol{C = 180° - 116,57°}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C = 63,43°.}}$$

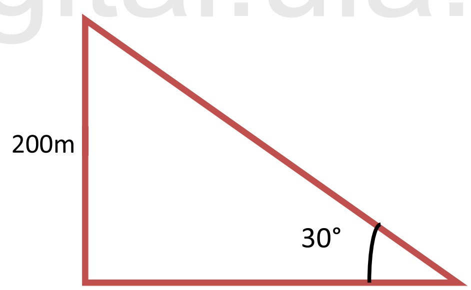
Ejercicio: en triángulo rectángulo del que se conocen B=45° y c = 20 cm, utilizando las razones trigonométricas halla las demás magnitudes.



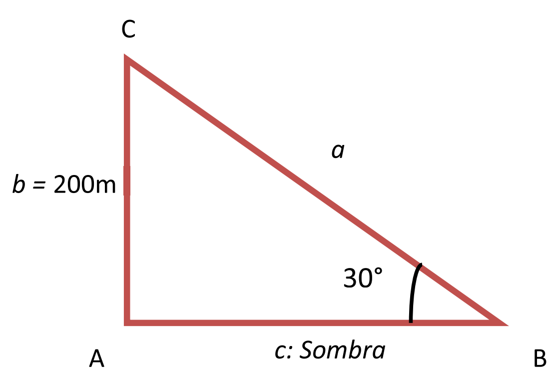
Hallar la longitud de la sombra proyectada por un edificio de 200 m de altura cuando la inclinación de los rayos del sol es de 30°.



Para iniciar tomemos el triángulo que nos interesa de manera independiente.



Coloquemos una notación ya conocida al triángulo



¿Qué es lo que queremos hallar?

¿Se relación de alguna manera con los ejercicios ya trabajados?

¿Qué datos nos proporcionan?

¿Cómo se relacionan los datos?

Si nos piden hallar la longitud de la sombra ¿cuál razón nos sería más útil en este caso?

- $sen\,30 = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{200}{a}.$
- $cos\,30 = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}.$
- $tan\,30 = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{200}{c}.$

Analiza cada una de las razones y verifica cual nos permite calcular la longitud de la sombra, el procedimiento no es único.

1. Podríamos hallar la hipotenusa usando la razón seno.

2. Emplear la hipotenusa hallada en la razón coseno y hallar así el cateto adyacente que es la sombra.

$$1.\quad sen\,30 = \frac{200}{a}$$

$$a = \frac{200}{sen\,30}$$

$$a = \frac{200}{0,5} = 400$$

$$a = 400.$$

$$2.\quad cos\,30 = \frac{c}{a}$$

$$cos\,30 = \frac{c}{400}$$

$$c = 400\,.\,cos\,30$$

$$c = 400 \times 0,866 = 346,4$$

$$c = 346,4.$$

La longitud de la sombra es de 346,4 metros.

¿Existirá alguna **otra** forma de hallar la longitud de la sombra?

Usamos seno y coseno ¿nos serviría la tangente de alguna manera?

$$\boldsymbol{tan\,30 = \frac{200}{c}}$$

$$\boldsymbol{c = \frac{200}{tan\,30}}$$

$$\boldsymbol{c = \frac{200}{0,577}}$$

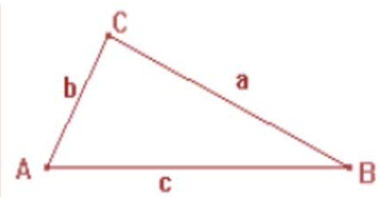
$$\boldsymbol{c = 346{,}6.}$$

Por medio de la tangente también hemos hallado la longitud de la sombra.

Problemas Propuestos:

1. Rellenar los datos desconocidos de 4 triángulos dados por las filas de la siguiente tabla

	A	B	C	a	b	c
Triángulo 1		45º	90º		10.5	
Triángulo 2			60º	24	16	
Triángulo 3				4	6	5
Triángulo 4		45º	75º	48		

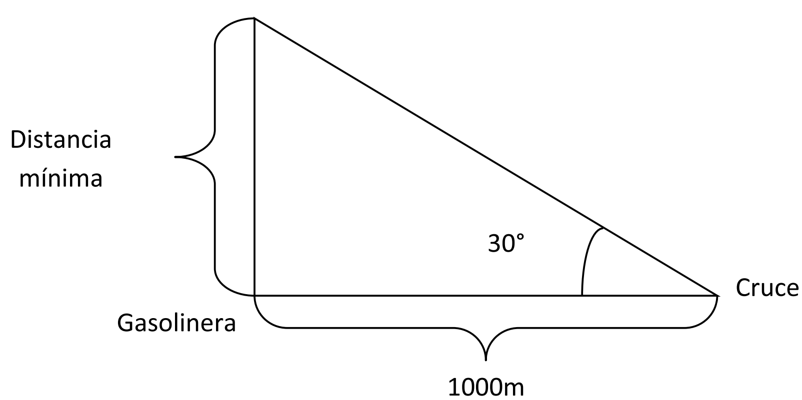


2. El vigía de un barco pirata observa el punto más alto de un acantilado bajo un ángulo de 60°. Si el barco se aleja 100 m se observa bajo un ángulo de 45°. Calcula la altura del acantilado. Solución: 236,60m

3. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles, sabiendo que su altura mide 10 m y que el ángulo desigual es de 120°. Solución: Los lados iguales miden 20 m, y el lado desigual, 34,64 m.

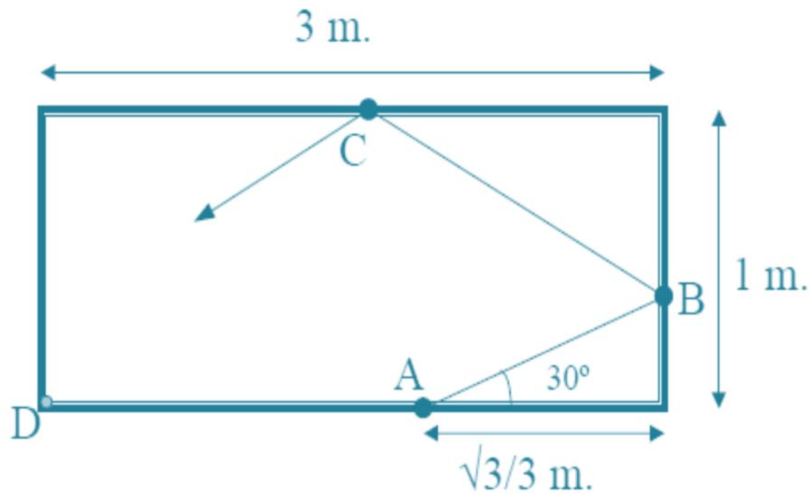
4. Calcula la altura de una torre, sabiendo que a 300 m de su pie se ve bajo un ángulo de 10°. Solución: h = 52,89 m.

5. Dos caminos rectos que se cortan forman un ángulo de 30°. En uno de ellos, a 1000m del cruce, hay una gasolinera. Encontrar la menor distancia desde la estación de Gasolina hasta el otro camino.



6. Un jugador de billar golpea la bola desde la posición A con un ángulo de 30º la banda. Después rebota en el punto B y más tarde en el C. La intención del jugador

es que al bola entre por el agujero de la esquina D. ¿Conseguirá el jugador meter la bola o fallará? Recuérdese que si una bola de billar rebota en una banda con ángulo $\boldsymbol{\alpha}$, sale después con el mismo ángulo $\boldsymbol{\alpha}$.



EXPONENCIAL Y LOGARITMOS

Cuenta la leyenda que un Rey quiso recompensar a un afamado matemático de la india llamado Sessa quien invento el juego del ajedrez y se lo enseño, el Rey ofreció joyas, terrenos entre otras cosas pero el matemático tuvo una petición especial:

“La recompensa habrá de corresponder a vuestra generosidad. No deseo, sin embargo, ni oro, ni tierras, ni palacios. Deseo mi recompensa en granos de trigo.

-¿Granos de trigo?, exclamó el rey sin ocultar su sorpresa ante tan insólita petición. ¿Cómo voy a pagarte con tan insignificante moneda?

-Nada más sencillo, explicó Sessa. Me daréis un grano de trigo para la primera casilla del tablero; dos para la segunda; cuatro para la tercera; ocho para la cuarta; y así, doblando sucesivamente hasta la sexagésima y última casilla del tablero. Os ruego, ¡oh rey!, de acuerdo con vuestra magnánima oferta, que autoricéis el pago en granos de trigo tal como he indicado…

No solo el rey sino también los visires, los brahmanes, todos los presentes se echaron a reír estrepitosamente al oír tan extraña petición”.

Veamos que tan sin sentido era la petición del matemático.

1	***2***	***4***	***8***	***16***	***32***	***64***	***128***
		8.192		***2.048***		***512***	***256***
2.147.483.648							

Calculemos el maíz necesario para algunas casillas.

¿Trata de calcular todos los valores de la filas 2 y 4? ¿Qué cantidad de granos de trigo estarán en la última casilla? ¿Te parece insignificante el pago solicitado por Sessa?

Observemos la relación que presentan los valores de la cantidad de trigo correspondiente a cada casilla:

Conocemos que la cantidad de granos en una casilla es el doble de la cantidad de granos de la casilla anterior, así si queremos saber cuántos granos hay en la casilla 5 basta con tomar el resultado de la casilla 4 y multiplicarlo por dos. Ejemplo: en la casilla donde hay 8 granos de trigo, tenemos la certeza de que este 8 es el resultado de realizar el producto (4 x 2) donde 4 es la cantidad de granos de la casilla anterior, de la misma manera podemos decir que 4 es el resultado del producto (2 x 2) donde 2 es la cantidad de granos en la casilla anterior a esta, aplicando la definición de potencia estudiada en la sección dedicada a "los números racionales" la casilla donde hay 2 granos se puede representar como 2^1, de igual forma 4 se puede expresar como 2^2, y 8 lo podemos escribir como el producto (2 x 2 x 2) que a su vez lo podemos resumir como 2^3, aun mas aplicando una de las propiedades ya estudiadas de la potencia podemos decir que la casilla donde hay solo un grano se puede escribir como 2^0, observando estos resultados podemos decir que la cantidad de granos en cada casilla se puede expresar como una potencia de base 2.

Si llamamos a la primera casilla **"casilla 0"** *en función de que el exponente 0 nos dará como resultado solo un grano* ***(2^0= 1)*** tenemos lo siguiente:

# casilla	Cantidad de granos	Expresado como Potencia.
0	1	2^0
1	2	2^1
2	4	2^2
3	8	2^3
4	16	2^4
5	32	2^5
. . .	. . .	. . .
30	1.073.741.824	2^{30}
. . .	. . .	. . .
60	1.152.921.504.606.850.000	2^{60}
63	9.223.372.036.854.780.000	2^{63}

¿Qué sucedería si Sessa en lugar de pedir que en cada casilla se le colocara el doble de la cantidad de granos de la casilla anterior hubiese solicitado que se le coloque el triple? Tendríamos la misma relación solo que esta vez el aumento de los granos se realizaría como producto de tres, convirtiéndose en una potencia esta vez de base tres. Observemos:

# casilla	Cantidad de granos	Expresado como Potencia.
0	1	3^{0}
1	3	3^{1}
2	9	3^{2}
3	27	3^{3}
. . .	. . .	. . .
6	729	3^{6}

Estudiemos otra situación parecida a esta, sólo que esta vez:

Nos encontramos en una piscina con una capacidad de almacenamiento de 2.097.152 litros de agua, disponemos de un cuentagotas mágico, y depositamos un litro de agua en la superficie de esta. La magia del cuentagotas permitirá que la cantidad de agua que se encuentra en esta duplique su tamaño cada minuto**.** ¿Cuánto tiempo nos tomara llenar la piscina? Relacionemos los datos a través de una tabla. Como punto de partida la piscina posee un litro de agua, transcurrido un minuto esto se duplicara y así comienza a aumentar la cantidad de agua, hasta alcanzar el límite y este completamente llena.

Minutos	Litros de agua	Expresado como Potencia.
0	1	2^{0}
1	2	2^{1}
2	4	2^{2}
3	8	2^{3}
. . .		. . .
10	1024	2^{10}
. . .		. . .
19	32768	2^{19}
. . .		. . .
X	2.097.152	2^{x}

Analizando ambos casos observamos un incremento de la cantidad en una base fija, en los casos estudiados esta base es 2 (el doble), sin embargo esta base puede variar de acuerdo a la condición de ya bien sea si se expresa el triple, el cuádruple, etc. Este tipo de comportamiento lo llamaremos *crecimiento exponencial* aunque podemos afrontar situaciones en los cuales no se produce un crecimiento de este estilo sino un *decrecimiento*.

Ejemplo:

En una reserva ganadera existen 531441 cabezas de ganado, una de las vacas contrae una curiosa enfermedad contagiosa de tal manera que a causa de esto cada día mueren 2/3 del total es decir que sobreviven la tercera parte de lo que había el día anterior. ¿En Cuántos días desaparecerá por completo las cabezas de ganado?

Si cada día sobrevive la tercera parte, es claro que no hay un incremento sino una reducción.

¿Si nos preguntan cuál es la tercera parte de 300, 27, 243 que haríamos para hallarla?

Tendríamos que dividir entre 3:

$$\frac{300}{3} = 100 \rightarrow \frac{300}{3} = 300 \times \frac{1}{3} = 300 \times 3^{-1} = 100,$$

$$\frac{27}{3} = 9 \rightarrow \frac{27}{3} = 27 \times \frac{1}{3} = 27 \times 3^{-1} = 9,$$

$$\frac{243}{3} = 81 \rightarrow \frac{243}{3} = 243 \times \frac{1}{3} = 243 \times 3^{-1} = 81.$$

Por propiedades de potencia podemos escribir la división en forma de producto.

Veamos ahora si este decrecimiento es sucesivo tendríamos lo siguiente:

a) $\frac{243}{3} = 243 \times \frac{1}{3} = 243 \times 3^{-1} = 81$

b) $\frac{81}{3} = (243 \times 3^{-1})\frac{1}{3} = 243 \times 3^{-1} \times 3^{-1} = 243 \times 3^{-2} = 9$

c) $\frac{9}{3} = (243 \times 3^{-2}) \times \frac{1}{3} = 243 \times 3^{-2} \times 3^{-1} = 243 \times 3^{-3} = 3$

d) $\frac{3}{3} = (243 \times 3^{-3}) \times \frac{1}{3} = 243 \times 3^{-3} \times 3^{-1} = \underbrace{243 \times 3^{-4}} = 1.$

Si notamos cada uno de los decrecimientos puede ser expresado como la cantidad inicial por la base por medio de la cual estamos reduciendo elevada a un exponente negativo.

Días	Cantidad de Ganado	Expresado como Potencia.
0	531441	$(531441)(3^{0})$
1	177147	$(531441)(3^{-1})$
2	59049	$(531441)(3^{-2})$
3	19683	$(531441)(3^{-3})$
4	6561	$(531441)(3^{-4})$
5	2187	$(531441)(3^{-5})$
6	729	$(531441)(3^{-6})$
7	243	$(531441)(3^{-7})$
8	81	$(531441)(3^{-8})$
9	27	$(531441)(3^{-9})$
10	9	$(531441)(3^{-10})$
11	3	$(531441)(3^{-11})$
12	1	$(531441)(3^{-12})$
13	0	Ya que queda sólo una vaca esa muere.

Cuando hablamos de crecimiento o decrecimiento exponencial nos referimos a que una cierta cantidad aumentan o disminuyen en forma de potencia. Entonces se denomina exponencial a una cierta condición que permite describir ***cada término o elemento*** como un producto entre ***la cantidad inicial existente*** y ***la condición (base) de crecimiento o decrecimiento*** elevado a un determinado ***exponente***. Se denotara como:

$$E(x) = k \times a^{x}.$$

Empleando la ecuación que define el crecimiento exponencial, halle en el ejercicio del trigo en caso que el aumento es del triple, cuanto trigo habría en la casilla #10. *Recuerde que la primera casilla la llamamos casilla #0.*

En el ejemplo en el cual tratamos de llenar la piscina tuvimos que hacer repetidamente el procedimiento para hallar en cuantos minutos se llenara la misma, pero habrá alguna forma de calcular esto empelando la ecuación. Última casilla nos mostraba:

X	2.097.152	2^{x}

Y se nos decía que la cantidad inicial era 1litro y que el aumento era el doble. Escribamos la ecuación que nos define este crecimiento.

$k = 1$; $a = 2$; $E(x)$: *cantidad de Litros a los* x *minutos*;

$$2097152 = 1 \times 2^x$$

$$2^x = 2097152$$

Partiendo de esta expresión ¿Cómo podemos hallar el valor de *x*?

Para afrontar este tipo de situaciones es necesario definir una nueva operación que llamaremos **logaritmo**, esta viene a cumplir el rol inverso **de la exponencial** es decir, la **exponencial** consiste en **tomar una base fija** y **elevarla a diversos exponentes** para **obtener un resultado para cada exponente**. Por su parte **el logaritmo** toma un **número cualquiera (resultado), fija una base** y **determinar a qué exponente** se debe elevar esta base para que se corresponda con el número inicialmente seleccionado. En el ejemplo anterior tenemos la base (2) y el resultado 2097152, ahora necesitamos saber a cual exponente debe elevarse 2 para que se corresponda con 2097152.

Prueba en la calculadora cuanto es el logaritmo en base 2 de 2097152 y obtendrás que el valor del exponerte será 21.

De esta manera podemos definir el logaritmo como:

$$\log_a \frac{C}{k} = x.$$

Donde cada elemento se corresponde con los elementos de la exponencial tal que ***a=a*, *K=K* y *C=E(x)*.** Llamaremos base del Logaritmo a ***"a"***, argumento a ***C/k***.

Apliquemos la definición en la situación que nos planteamos. ***a=2*, *k=1* y *C=E(x)=2097152*.**

$$\log_2 \frac{2097152}{1} = \log_2 2097152 = 21.$$

$$2^x = 2097152$$

$$2^{21} = 2097152$$

$$2097152 = 2097152$$

Estudiemos otros ejemplos sencillos:

- $log_3 \frac{729}{1} = log_3 729 = 6$.

$$3^x = 729,$$

$$3^6 = 729,$$

$$729 = 729.$$

- $log \frac{100000}{1} = log\, 100000 = 5.$

$$10^x = 100000,$$

$$10^5 = 100000,$$

$$100000 = 100000.$$

- $log \frac{2535}{1} = log\, 2535 = 3{,}404.$

$$10^x = 2535,$$

$$10^{3{,}4039} = 2535,$$

$$2535 = 2535.$$

El logaritmo de un número (en una base determinada) es el exponente al cual hay que elevar la base para obtener dicho número. Por ejemplo, el logaritmo de 1000 en base 10 es 3, porque 1000 es igual a 10 a la potencia 3:

$$1000 = 10^3 = 10 \times 10 \times 10.$$

De la misma manera que la operación opuesta de la suma es la resta y la de la multiplicación la división, el cálculo de logaritmos es la operación inversa a la potenciación de la base del logaritmo.

Si nos pidieran expresar el número 6 como un logaritmo en base 2.

$$6 = log_2 2^6.$$

Los logaritmos poseen propiedades aritméticas que ayudan al momento de realizar cálculos.

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{log_b(xy) = log_b(x) + log_b(y).}$$

$$\boldsymbol{log(15 \times 4) = log(15) + log(4),}$$

$$\boldsymbol{log(60) = log(15) + log(4),}$$

$$\boldsymbol{1,778 \ = 1,176 + 0,602,}$$

$$\boldsymbol{1,778 \ = 1,778.}$$

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\boldsymbol{log_b\left(\frac{x}{y}\right) = log_b(x) - log_b(y).}$$

$$\boldsymbol{log_2\left(\frac{1}{16}\right) = log_2(1) - log_2(16),}$$

$$\boldsymbol{-4 = 0 - 4,}$$

$$\boldsymbol{-4 = -4.}$$

El logaritmo de una potencia es igual al producto entre el exponente y el logaritmo de la base de la potencia.

$$\boldsymbol{log_b(x^y) = y.\, log_b(x).}$$

$$\boldsymbol{log_3(9^2) = 2.\, log_3(9),}$$

$$\boldsymbol{log_3(81) = 2 \times 2,}$$

$$\boldsymbol{4 = 4.}$$

El logaritmo de una raíz es igual al producto entre la inversa del índice y el logaritmo del radicando.

$$\boldsymbol{log_b(\sqrt[y]{x}) = \frac{log_b(x)}{y}}.$$

$$\boldsymbol{log_8(\sqrt[2]{64}) = \frac{log_8(64)}{2}},$$

$$\boldsymbol{log_8(8) = \frac{2}{2}},$$

$$\boldsymbol{1 = 1.}$$

El logaritmo de un número x en una cierta base b, es igual al cociente de los respectivos logaritmos de a y b en cualquier otra base B.

$$\boldsymbol{log_b(x) = \frac{log_B(x)}{log_B(b)}}.$$

$$\boldsymbol{log_6(1296) = \frac{log_4(1296)}{log_4(6)}},$$

$$\boldsymbol{log_6(1296) = \frac{5{,}1699}{1{,}2924}},$$

$$\boldsymbol{4 = 4.}$$

El logaritmo de base 10 lo llamamos logaritmo decimal y podemos denotarlo sin colocar la base del mismo

$$\boldsymbol{log_{10}\, x = log\ x}$$

El logaritmo de base e lo llamamos logaritmo natural y podemos denotarlo ln

$$\boldsymbol{log_e\, x = ln\ x}$$

Ejercicios

1. *Calcula el valor aproximado de los siguientes logaritmos, sabiendo que el* $log\ 2 \cong 0{,}301$*:*

a) *log 8*
b) *log 40*
c) *log 25*
d) *log 200*
e) *log 0,04*
f) *log 1,25*
g) *log 0,008*
h) *log 0,0016*

2. *Calcula las siguientes expresiones sin hacer uso de la calculadora:*

a) $log_{\ 4}\ (\sqrt[3]{4^5})^2$
b) $log_{15}\ 5^2\ + log_{15}\ 3^2$
c) $log_2\ \sqrt[4]{2\ \sqrt[3]{2^2}}$
d) $log_{\ 3}\left(\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt[3]{75}\ \sqrt[6]{225}}\right)$

3. *Reduce las siguientes expresiones logarítmicas a un solo logaritmo:*

a) 5 log 2 – 3 log 2
b) log x4 – log x3
c) log 3 + log 4 – log 2
d) (log 27 + log 64) – (log 8 – log 9)

Problemas

1. *En una ciudad de 900 habitantes se esparce un rumor de manera que cada hora se duplica la cantidad de personas que se enteran del mismo. ¿Cuántas personas conocerán el rumor al pasar 12 horas?*

2. *Si en enero del 2003 Guillermo adquirió un automóvil en Bs. 100000 si cada año reduce su valor en un 13% ¿cuánto valdrá en el año 2012? Si en lugar de reducir su costo, lo aumenta en un 13% cada año ¿cuál sería el valor en el año 2012?*

3. *En condiciones ideales se sabe que una población de bacterias se duplica cada 3 horas, si la población inicial era 100 bacterias ¿cuántas habrá después de 15 horas y después de 20 horas? ¿Cuál sería la ecuación que permita saber la población para un tiempo (t) cualquiera?*

4. *El pH de un líquido es el logaritmo de la inversa de la concentración de iones H+ que hay en este. Por ejemplo, si la concentración de H^+ es 10^{-7}, entonces su pH es:*

$$log\frac{1}{10^{-7}} = log\, 10^{7} = 7.$$

Calcula el pH de los líquidos que tienen las siguientes concentraciones de H^+:

a) 5×10^{-5}
b) $3{,}8 \times 10^{-8}$
c) $9{,}32 \times 10^{-7}$

5. *La población de un municipio del estado Trujillo disminuye un 2 % cada año. Si la población actual del municipio es de 100000 habitantes, y suponiendo que la disminución se sigue realizando en la misma proporción, ¿En cuántos años su población quedara reducida a 60000 habitantes? (Nota: la formula de crecimiento o disminución continuos de una población es:* $\boldsymbol{P(t) = P_0 \cdot (1 \pm c)^t}$ *siendo* $\boldsymbol{P_0}$ *la población inicial y* $\boldsymbol{c}$ *porcentaje con el que crece o disminuye la población).*

6. La población de un estado crece en un año un 2,5 % ¿Cuánto tiempo se necesitara para duplicarse suponiendo que sigue creciendo con el mismo ritmo?

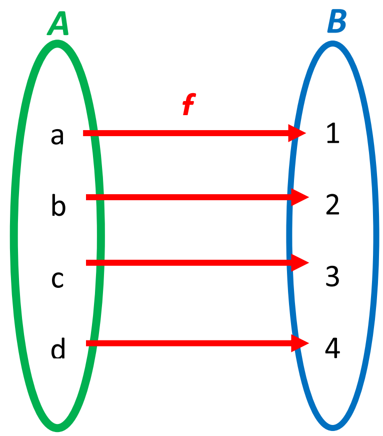
7. El 1 de enero de 1960 la población de una ciudad era de 75000 habitantes y el 1 de enero de 2010 alcanzó 180000 habitantes. ¿Cuál fue su porcentaje de crecimiento anual, si este se hizo de manera continua?

8. La constante de desintegración del polonio 218 (Po218) es:
$\lambda = 4 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$ *¿Cuanto tiempo necesitara una muestra de ese elemento para que se reduzca a la mitad de sus átomos? (Nota: la formula de la desintegración continua de los átomos es* $N = N_0 \cdot e^{-\lambda} \cdot t$ *Siendo* N_0 *el número inicial de átomos).*

9. La constante de desintegración del torio C es $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}\, s^{-1}$ *¿Cuantos átomos quedaran sin desintegrarse, al cabo de 15 minutos de una muestra que inicialmente tenía un millón de átomos?*

FUNCIONES

Al hablar de funciones de inmediato es necesario pensar en dos conjuntos y la manera en que estos se relacionan.



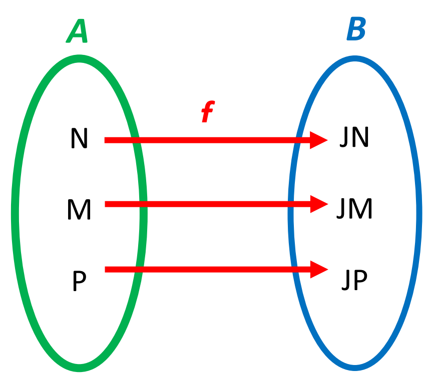
*Esto nos dice tomamos a todos los elementos de un conjunto **A** (conjunto de partida) y la función le asignara a cada uno de ellos un único elemento del conjunto **B** (conjunto de llegada)*

Tratemos de ver esto en otro contexto. Pensemos en ellas como una aplicación a la cual le suministramos un determinado contenido (elemento del conjunto de partida) y ella nos proporciona un resultado a partir de lo que nosotros le suministramos (elemento del conjunto de llegada) por ejemplo. Una máquina para hacer jugo. Si introducimos una naranja ella proporciona jugo de naranja, una manzana jugo de manzana y una pera jugo de pera, más o menos esto es lo que nos mostraría el diagrama de Venn de esta función.

f: máquina de hacer jugo

A: frutas

B: jugos de frutas



Nuestra función seria descrita como esto ***f(x)=jugo de x***

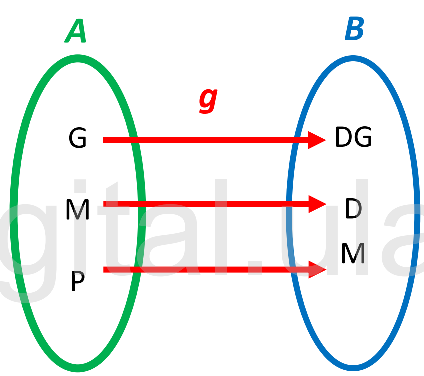
- *f(x)=jugo de x* — *f(naranja)=jugo de naranja*
- *f(x)=jugo de x* — *f(manzana)=jugo de manzana*
- *f(x)=jugo de x* — *f(pera)=jugo de pera*

Planteémonos ahora una función que esculpe al David de Miguel Ángel en diversos materiales.

g: escultura del David

A: Materiales de alta dureza

B: el David en distintos materiales



Nuestra función seria descrita como esto *f(x)=David en x*

- *f(x)=David en x* — *f(Granito)=David en Granito*
- *f(x)=David en x* — *f(Mármol)=David en Mármol*
- *f(x)=David en x* — *f(piedra)=David en Piedra*

Volvamos ahora a la función ***f*** es decir la máquina de hacer jugo y suministrémosle piedra ¿Tendríamos jugo de piedra?

Sería extraño pensar en eso y en el mundo que conocemos no encontramos jugo de piedra "comúnmente". Pensemos ahora ¿será que cada función tiene un conjunto **A** (conjunto de partida) especifico? O ¿podemos usar cualquier elemento para cualquier función?

Si pudiéramos usar cualquier elemento deberíamos claramente poder disfrutar de un nutritivo jugo de piedra, o de mármol o de granito e igualmente ver al David hecho de manzana, naranja o pera, mas no es así, el conjunto ***A*** *(conjunto de partida)* en la función ***f***: máquina de hacer jugo aparece descrito como Frutas

f: máquina de hacer jugo

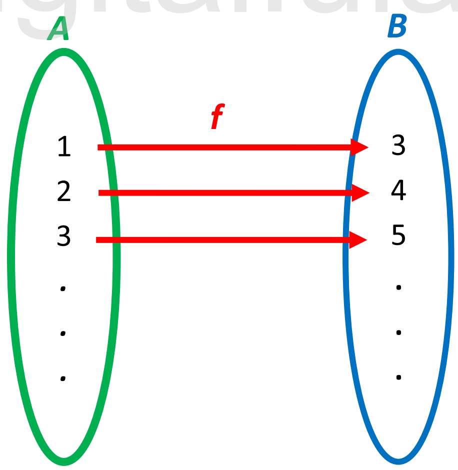
A: frutas

B: Jugos de frutas

Por lo tanto la función puede trabajar sólo con frutas pues estos son los elementos del conjunto de partida y en consecuencia los únicos a quienes se les puede aplicar la función, es decir en este caso nuestra máquina de hacer jugo nos permite hacer jugo sólo con frutas.

Veamos esto en un caso donde trabajemos con números:

Tomemos como conjunto de partida el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es decir los números: $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ y digamos que la función es *f*: ***sumar 2***, nuestra función sería entonces ***f(x)=x+2.***



¿Tendría algún sentido querer aplicar la función al número $\frac{3}{2}$? Aunque podríamos sumar a 2 al número $\frac{3}{2}$ no tiene sentido el aplicar la función a este puesto que no está en el conjunto de partida ya que $\frac{3}{2}$ no pertenece al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ que hemos seleccionado como conjunto de partida.

Indica otros tres números que no podríamos usar por no ser parte del conjunto de partida.

De esta manera debemos tener en cuenta algunas condiciones para saber si una aplicación o relación es realmente una función. Recordemos que decíamos de las funciones al iniciar el capítulo:

*Tomamos a todos los elementos de un conjunto **A** (conjunto de partida) y la función le asignara a cada uno de ellos un único elemento del conjunto **B** (conjunto de llegada).*

Siendo más explícitos una aplicación será función siempre que tome *a todos los elementos de un conjunto **A** (conjunto de partida)* es decir, no pueden existir elementos en el conjunto de partida que no tengan relación con algún elemento del conjunto de llegada. *Y asignara a cada uno de ellos un único elemento del conjunto **B** (conjunto de llegada).* Cada elemento está relacionado con solo un elemento del conjunto de llegada. Ningún elemento de ***A*** estará relacionado con más de un elemento de ***B.***

Así denotamos que la función toma elementos del conjunto ***A*** y los asigna al conjunto ***B.***

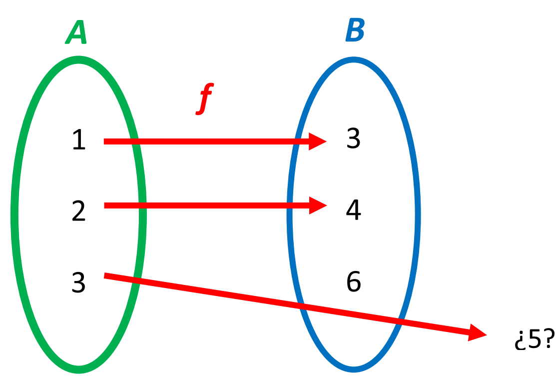
$f: A \to B$ Esto indica que la función va del conjunto ***A*** al conjunto ***B.***

Usando la misma aplicación anterior ***f(x)=x+2*** pero ahora tomando como conjunto de partida: ***A:*** $\{1, 2, 3\}$ y conjunto de llegada ***B:*** $\{3, 4, 6\}$,

***f*: sumar 2**

A: $\{1, 2, 3\}$

B: $\{3, 4, 6\}$



Nuestra "función" sería descrita como esto ***f(x)= x+2.***

- ***f(x)= x+2***

  f(1)=1+2

  f(1)=3

- ***f(x)= x+2***

  f(2)=2+2

  f(2)=4

- ***f(x)= x+2***

  f(3)=3+2

  f(3)=5

¿Qué pasa en esta ocasión? Todos los elementos que estamos usando pertenecen al conjunto de partida pero al aplicar al 3 la función vemos que su resultado no está en el conjunto de llegada, al ocurrir esto decimos que la aplicación en no es una función, bajo las condiciones empeladas.

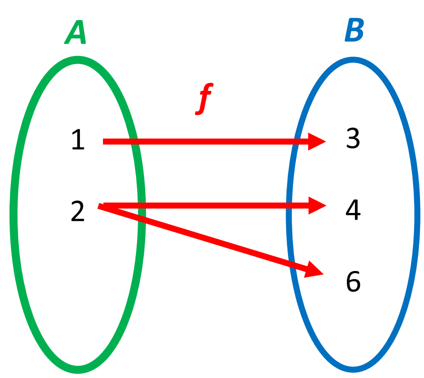
f: ***sumar 2***

A: $\{1, 2, 3\}$

B: $\{3, 4, 6\}$

Por lo tanto la aplicación ***f***: ***sumar 2*** con conjunto de partida ***A:*** $\{1, 2, 3\}$ y de llegada ***B:*** $\{3, 4, 6\}$ no es una función ya que el elemento 3 del conjunto de partida no tiene correspondencia con ningún elemento del conjunto de llegada.

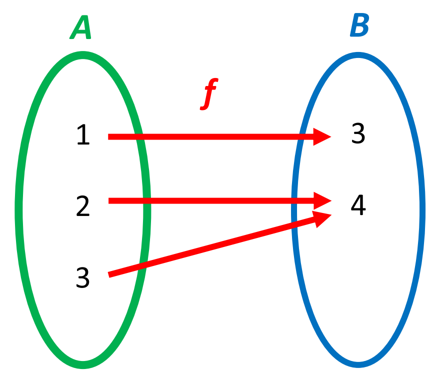
Supongamos ahora que tenemos una aplicación ***f*** con conjunto de partida ***A:*** $\{1, 2\}$ y de llegada ***B:*** $\{3, 4, 6\}$ tal que al emplearla nos genera:



Podemos ver que todos los elementos del conjunto de partida están relacionados con elementos del conjunto de llegada y el elemento 2 particularmente está relacionado con 2 elementos del conjunto ***B***. Tomando en cuenta las condiciones que se requieren para que una aplicación sea función ¿esta lo será?

No lo es, ya que cada elemento del conjunto de partida debe estar relacionado con un único elemento del conjunto de llegada y en este caso el elemento 2 está relacionado con 4 y 6.

Y si el caso lo ocurrirá así:



¿Sería o no función? Comprobemos

- ¿Todos los elementos del conjunto de partida tienen imagen?

Si. 1, 2, 3 son los elementos del conjunto de partida y todos tienen imagen.

- ¿Cada elemento del conjunto de partida tiene solo un elemento del conjunto de llegada?

1 está relacionado solo con 3, 2 estar relacionado solo con 4 y 3 está relacionado solo con 4.

El hecho de que 2 y 3 estén relacionados con el mismo elemento no causa problema.

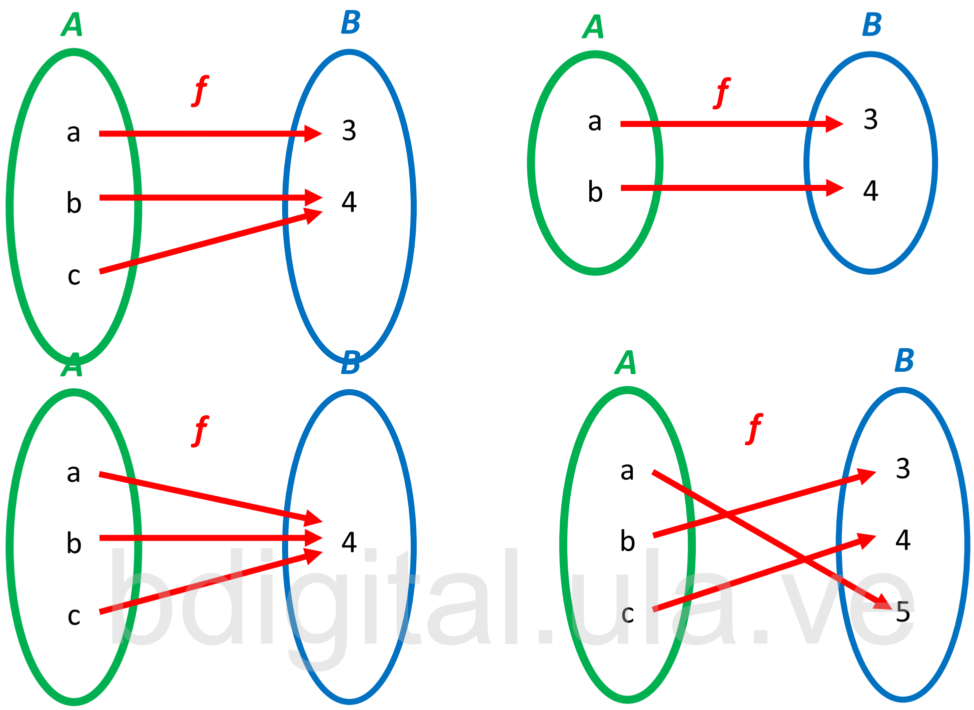
- Ya que todos los elemento de ***A*** están relacionados con un único elemento de ***B*** podemos decir que ***f*** es función.

Existen algunas otras particularidades dentro de las funciones, por ejemplo la inyectividad y la sobreyectividad. ¿Has escuchado alguna vez esas palabras? ¿Qué recuerdas de su significado?

A partir de este momento a los elementos del conjunto de partida los llamaremos pre-imágenes y los del conjunto de llegada imágenes.

Cuando una función asigna una imagen distinta para cada pre-imagen, es decir los elementos se relacionan uno a uno decimos que esta función es inyectiva.

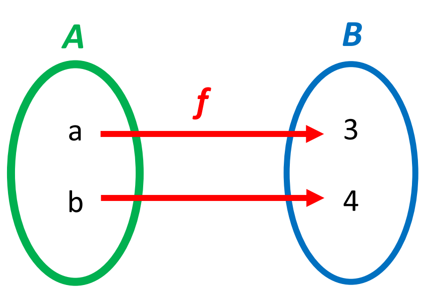
¿En Cuál de los casos siguiente la función es inyectiva?



Podemos expresar la inyectividad de la siguiente forma:

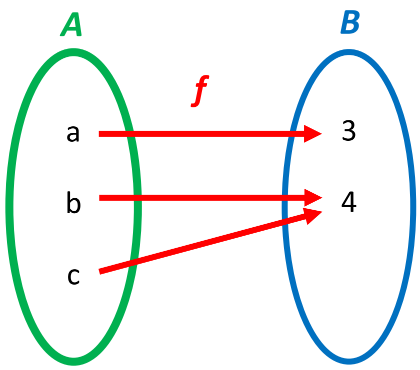
$$f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2.$$

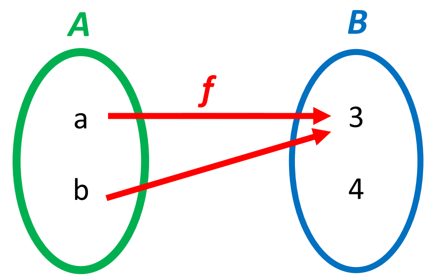
Esto quiere decir que si se toma dos imágenes cuales quiera y estas son iguales es porque su pre-imagen es la misma. Ilustremos esto con el segundo ejemplo de la parte anterior.

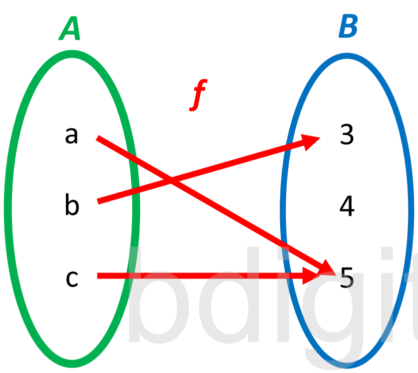


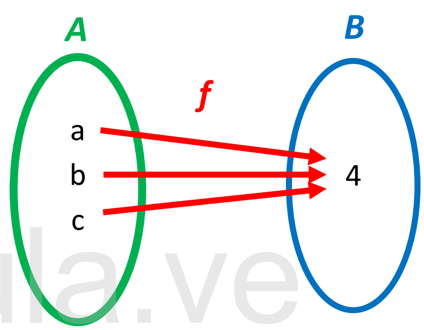
$$f(x_1) \neq f(x_2) \rightarrow x_1 \neq x_2$$
$$f(a) \neq f(b) \rightarrow a \neq b$$
$$3 \neq 4 \rightarrow a \neq b$$

¿Diremos que una función es sobreyectiva cuando todos los elementos del conjunto de llegada están relacionados con algún elemento del conjunto de partida?

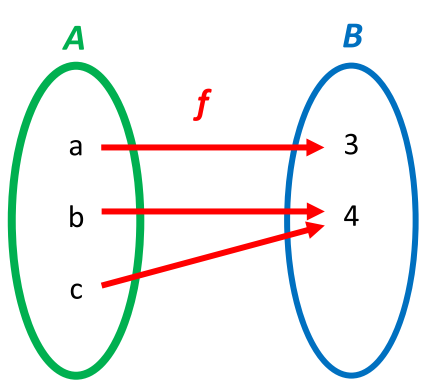








Para cada "y" en el conjunto de llegada existe un "x" en el conjunto de partida tal que ***f(x)=y.***



A partir de este momento llamaremos al conjunto de partida dominio y al conjunto de llegada rango.

Las funciones con las que trabajaremos son funciones son funciones reales, es decir que tanto sus pre-imágenes como sus imágenes deben estar dentro de los números reales.

Hasta ahora hemos representado a las funciones de forma sagital (diagramas de Venn) pero podemos representar las funciones por medio de graficas en el plano cartesiano. Elementos del conjunto de partida lo ubicaremos sobre el eje de las “x” a los elementos del conjunto de llegada sobre el eje de las y.

Como mencionamos anteriormente las funciones a usar están enmarcadas en los números reales, es decir los valores que suministraremos deben ser reales y el resultado de aplicar la función a este debe ser también real.

Usando la función ***f(x)= x+2*** realicemos la representación en el plano cartesiano de la misma. Para esto asignemos algunos valores a *x* y apliquemos la función para determinar cuál es su imagen.

X	Y
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4

f(x)= x+2

f(-2)= -2+2=0

f(-2)=0

f(-1)= -1+2=1

f(-1)=1

f(0)= 0+2=2

f(0)=2

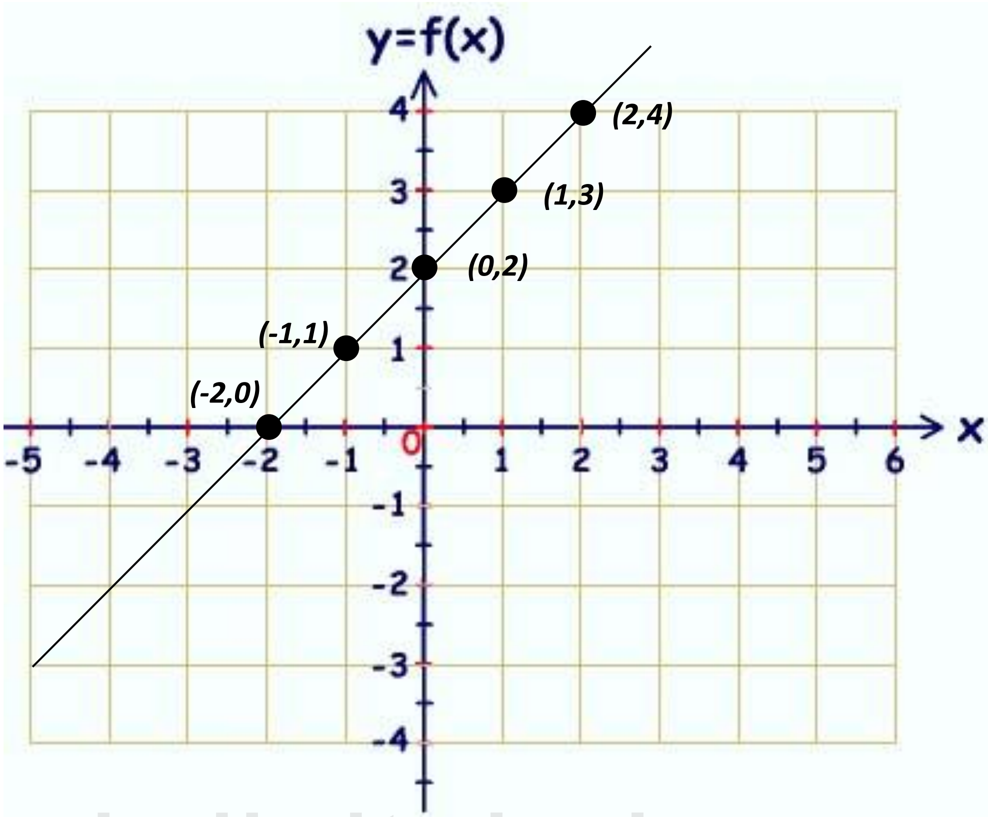
f(1)= 1+2=3

f(1)=3.

f(2)= 2+2=4

f(2)=4

Basados en esto, determinamos los puntos a emplear para realizar el bosquejo de la grafica: ***(-2,0); (-1,1); (0,2); (1,3); (2,4).*** Para graficar representamos la primera coordenada en el eje “x” y la segunda en el eje “y”.



En general emplearemos los valores enteros comprendidos entre -2 y 2 para dibujar la grafica.

Analicemos *f(x)*= $\frac{x+2}{x}$

X	Y
-2	0
-1	-1
0	-
1	3
2	2

$f(-2) = \frac{-2+2}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$

$f(-2) = 0$

$f(-1) = \frac{-1+2}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$

$$f(-1) = -1$$

$f(0) = \frac{0+2}{0} = \frac{2}{0}$ $(la\ division\ entre\ 0\ no\ está\ definida)$

$f(1) = \frac{1+2}{1} = \frac{3}{1} = 3$

$f(1) = 3$

$f(2) = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$f(2) = 2.$

En este caso notamos que para el valor 0 la función no puede proporcionarnos una imagen, esto nos permite afirmar que el valor 0 no es parte del dominio de la función y por esta razón no podemos evaluarla en 0.

Veamos que el valor cero en el denominador siempre nos causara problemas ya que la división entre cero no está definida.

Por ejemplo

f(x)= $\frac{3x-5}{x}$ nos traerá problema el valor cero pues este quedara en el denominador.

f(x)= $\frac{3x-5}{x-1}$ ¿tendrá problema en cero?

f(0)= $\frac{3(0)-5}{0-1} = \frac{0-5}{-1} = \frac{-5}{-1} = 5$ no tiene problema pero ¿existe algún valor que haga cero al denominador?

Podemos ver que para el valor 1 tendríamos

f(1)= $\frac{3(1)-5}{1-1} = \frac{3-5}{0} = \frac{-2}{0}$ *(la división no está definida entre cero)*

De esta manera para el valor 1 la función no está definida.

Estudiémoslo de manera formal, pues no es tan evidente notar los valores que hacen cero al denominador.

¿Qué es lo que nos causa problema?

¿El denominador puede ser cualquier valor?

¿Existe la función cuando el denominador es 0?

¿Existe la función si la evaluamos en 0?

¿Cuando el denominador se hace cero?

Para determinar cuándo “el denominador es igual a cero” basta con escribir de manera simbólica la frase anterior. En este caso tendríamos

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{3x-5}{x-1}}$$

Y el denominador es igual a cero lo escribimos así

$$\boldsymbol{x-1=0}$$

Pero no basta con hacer eso pues lo que necesitamos saber es para qué valor de x el denominador se hace cero y en consecuencia la función no existe en ese valor.

Si $x-1=0$ que valor de x permite que se cumpla esta igualdad. Basta con despejar la x para hallar el valor.

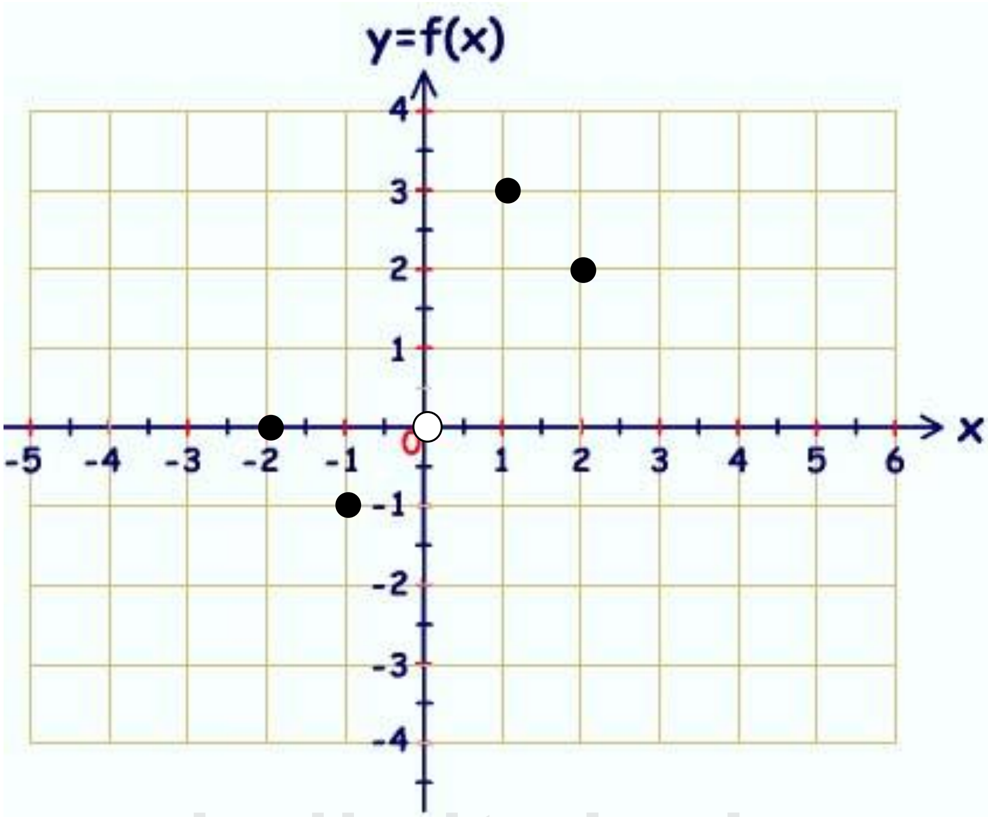
$$x-1=0,$$

$$x=1.$$

De esta manera determinamos el valor en que el denominador se hace cero es $x=1$ por lo tanto en este valor la función no existe.

Podemos generalizando esto decir que para los valores que el denominador sea igual a cero la función no existirá y como consecuencia dicho valor no estará en el dominio de la función.

Partiendo de esto podemos ver que el dominio de una función estará restringido por ciertas condiciones, una de ellas es que su denominador no puede ser cero.



○ ***: Salto en el dominio***

Grafiquemos la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{3x - 5}.$$

Podemos observar que no hay denominador que nos genere problema. ¿Será que el dominio son todos los reales?

Estructuremos la tabla de valores

X	Y
-2	-
-1	-
0	-
1	-
2	1

$$f(x) = \sqrt{3x - 5}$$

$f(-2) = \sqrt{3(-2) - 5} = \sqrt{-6 - 5} = \sqrt{-11}$ Cálculo de raíces negativas no está definido en los números reales.

$f(-1) = \sqrt{3(-1) - 5} = \sqrt{-3 - 5} = \sqrt{-8}$ Cálculo de raíces negativas no está definido en los números reales.

$f(0) = \sqrt{3(0) - 5} = \sqrt{0 - 5} = \sqrt{-5}$ Cálculo de raíces negativas no está definido en los números reales.

$f(1) = \sqrt{3(1) - 5} = \sqrt{3 - 5} = \sqrt{-2}$ Cálculo de raíces negativas no está definido en los números reales.

$f(2) = \sqrt{3(2) - 5} = \sqrt{6 - 5} = \sqrt{1} = 1$

Si analizamos las características de las raíces cuadradas nos daremos cuenta que necesariamente el argumento ($\sqrt{\bigcirc} \rightarrow$ argumento) debe ser mayor o igual que cero, es decir lo que está dentro de la raíz debe ser mayor que cero por lo tanto en este caso $3x - 5$ debe ser mayor que cero. ¿Simbólicamente como expresamos que algo es mayor que otro algo?

$$3x - 5 \geq 0.$$

Para hallar los valores de x en los que el argumento de la raíz es mayor debemos despejarla x y tomar el intervalo que obtenemos como los valores de x en los cuales la función existe.

$$3x - 5 \geq 0$$

$$3x \geq 5$$

$$x \geq \frac{5}{3}.$$

Entonces x pertenece al intervalo que va desde $\frac{5}{3}$ hasta infinito positivo.

$$\boldsymbol{x} \in \left[\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}, +\infty\right)$$

De esto concluimos que para los números mayores que $\frac{5}{3}$, $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{3x-5}}$ es función.

Como hemos visto hasta ahora existen algunas condiciones que se deben cumplir para que una función exista, es decir la función debe tener un conjunto de partida o Dominio especifico, no cualquier dominio puede ser el apropiado para cualquier función. A continuación enumeraremos algunas condiciones útiles para determinar el dominio de algunas funciones. Pero antes clarifiquemos que es el dominio y el rango de una función.

Dominio de una función: Es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen. Los valores admitidos por la función que le damos a "x" forman el conjunto de partida.

El dominio de una función está formado por aquellos valores de "x" (números reales) para los que se puede calcular la imagen *f(x)*. Denotaremos al dominio como ***Dom.***

Rango de una función: Es el conjunto formado por las imágenes. Son los valores que toma la función "y", por eso se denomina *f(x)*, su valor depende del valor que le demos a "x". Denotaremos al rango como ***Rang.***

Calculemos el dominio y rango de algunas funciones con características especificas.

- Funciones Polinómica

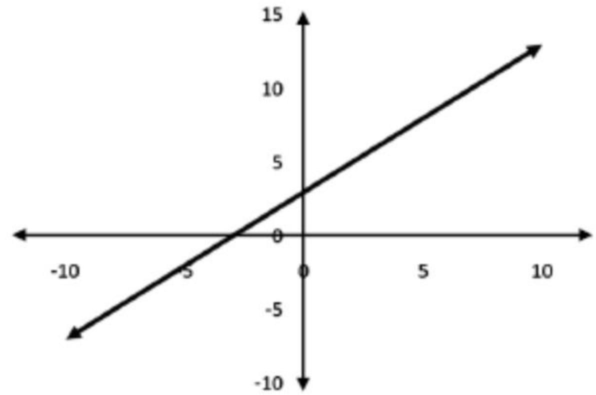
Aquellas funciones cuya expresión algebraica es un polinomio*, es decir, las funciones polinómica, tienen como dominio todo el conjunto de los números reales: $\mathbb{R}$, puesto que a partir de una expresión polinómica, se puede sustituir el valor de "x" por cualquier número real que hayamos elegido y se puede calcular sin ningún problema el número real imagen $f(x)$.

Determinemos el Dominio y Rango de:

1. $f(x) = x + 3$

Como es una función lineal el dominio será todo el conjunto de los números reales:

$$Dom\ \boldsymbol{f} = \mathbb{R}.$$



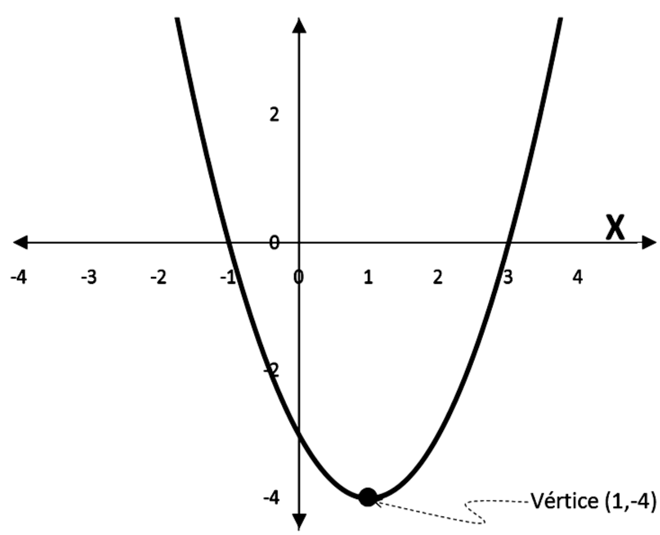
El Rango será todo el conjunto de los números reales. Seguimos el eje "y" de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre.

$$Rang\ \boldsymbol{f} = \mathbb{R}.$$

2. $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Como es una función polinómica de segundo grado el dominio será todo el conjunto de los números reales.

$$Dom\ \boldsymbol{f} = \mathbb{R}.$$



El eje "y" empieza a tomar valores (de abajo hacia arriba) a partir de -4.

$$Rang\ \boldsymbol{f} = [-\ \mathbf{4}\ , +\infty\ ).$$

3. $f(x)\ = x^{\,3} - 6x^2\ +\ 8x$.

- Funciones Racionales:

Para calcular el dominio de este tipo de funciones el primer paso es igualar el denominador a cero y resolver esa ecuación, una vez resuelta esa ecuación el dominio estará formado por todos los reales excepto las soluciones de la ecuación.

$$Dom\ \boldsymbol{f} = \mathbb{R} - \{valores\ donde\ x = 0\}.$$

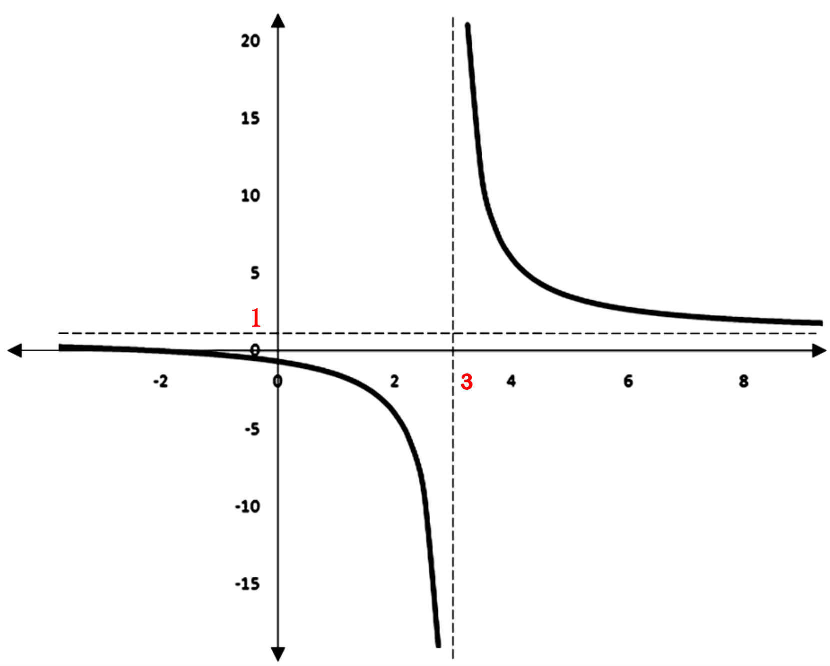
Determinemos el Dominio y Rango de:

1. $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{x+3}}$

Igualando el denominador a cero*:*

$\boldsymbol{x+3} =\ 0\ \ ;\ \boldsymbol{x = 3}$

$$Dom\ \boldsymbol{f} = \mathbb{R} - \{3\}.$$



Esta gráfica presenta una asíntota horizontal en y = 1, La función estará definida en todos los valores de y menos en y = 1.

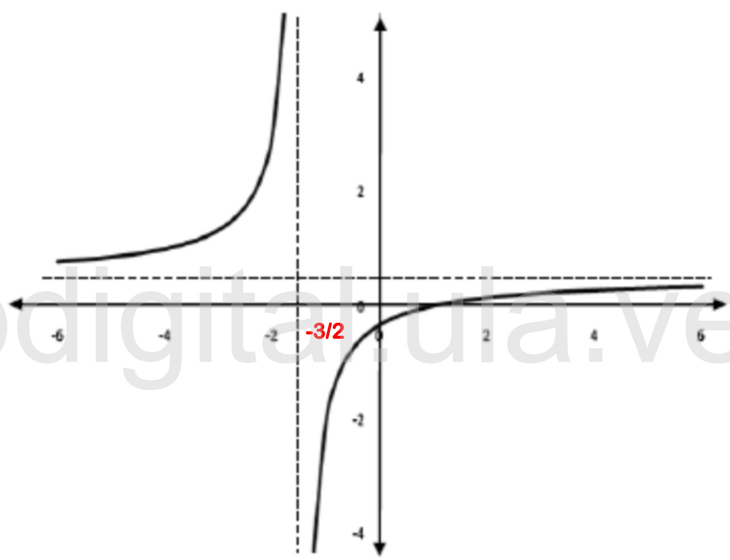
$$Rang\ \boldsymbol{f} = \mathbb{R} - \{1\}.$$

2. $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$

Igualando el denominador a cero:

$\boldsymbol{2x + 3 =}\ 0\ ;\ 2\boldsymbol{x = -3};\ \ \boldsymbol{x = -\frac{3}{2}}$

$$Dom\ \boldsymbol{f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}.$$



Esta gráfica presenta una asíntota horizontal en $y\ = \frac{1}{2}$. Luego la función estará definida en todos los valores de y menos en $y\ = \frac{1}{2}$.

$$Rang\ \boldsymbol{f} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Hallar dominio, rango y graficar la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8}}$$

- Funciones Irracionales:

Funciones irracionales son las que vienen expresadas a través de un radical que lleve en su radicando la variable independiente.

Si el radical tiene índice impar, entonces el dominio será todo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ porque al elegir cualquier valor de x siempre vamos a poder calcular la raíz de índice impar de la expresión que haya en el radicando.

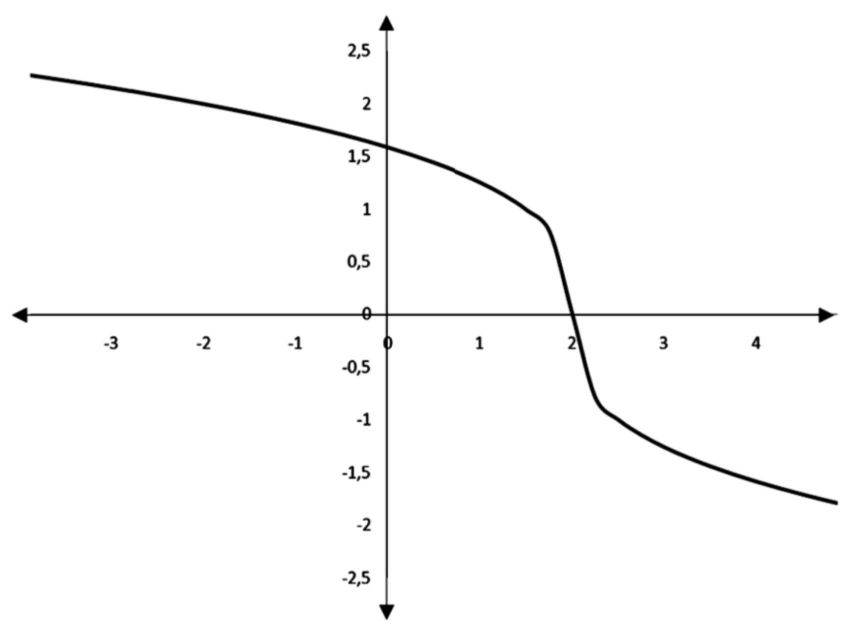
Pero si el radical tiene índice par, para los valores de x que hagan el argumento negativo no existirá la raíz y por tanto no tendrán imagen. Cuando queremos hallar el dominio de este tipo de funciones lo primero que debemos hacer es tomar lo que hay dentro de la raíz y hacer que sea mayor o igual que cero. A continuación se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

Determinemos el dominio y rango de:

1. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{-2x+4}}$

Raíz de índice impar:

$$Dom\ \boldsymbol{f} = \mathbb{R}.$$



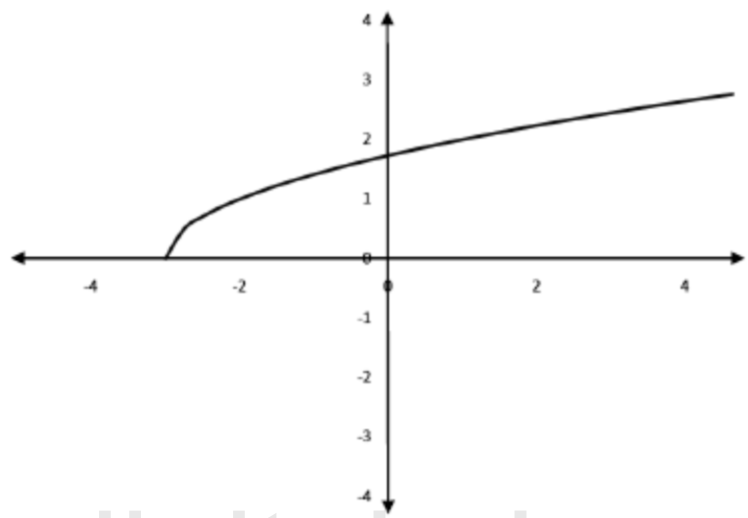
$$Rang\ \boldsymbol{f} = \mathbb{R}.$$

2. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+3}}$

$x + 3 \geq 0;\ \boldsymbol{x} \geq -\ \mathbf{3}$

$$x + 3 \geq 0;\ \boldsymbol{x} \geq -\ \mathbf{3}$$

$$Dom\ \boldsymbol{f} = [\mathbf{-3}, +\infty)\mathbf{.}$$



$$Rang\ \boldsymbol{f} = [\mathbf{0}, +\infty)\mathbf{.}$$

Hallar dominio, rango y graficar la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$$

- Funciones Exponenciales:

Son aquellas funciones del tipo $f(x) = a^x$ donde *a* debe ser un número mayor que cero y distinto de 1 ($a > 0$; $a \neq 1$) .

Todas las funciones exponenciales tienen como Dominio todos los números reales.

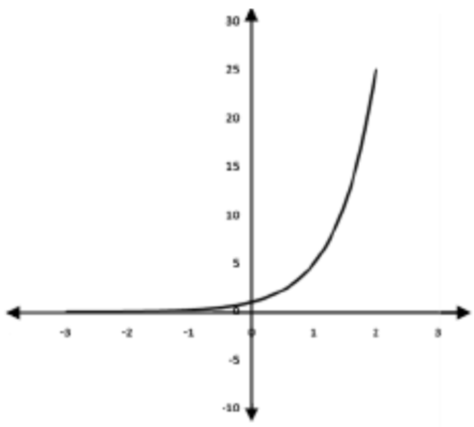
$$Dom\ f = \mathbb{R}.$$

Todas las funciones exponenciales tienen como rango a todos los números reales positivos.

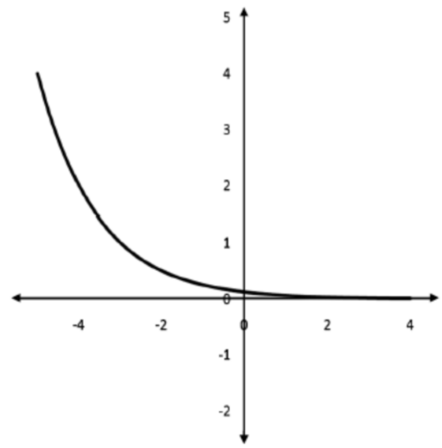
$$Rang\ f = (0, +\infty).$$

Tomando en cuenta lo indicado anteriormente no es necesario realizar ningún análisis para determinar el dominio y rango de una función exponencial. Al determinar que es de este tipo simplemente se indica cual es su dominio y su rango.

$f(x) = 5^x$



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



- Funciones Logarítmicas:

Los logaritmos de números negativos y el de 0 no existen. Luego, todas las expresiones a las que se le pretenda calcular su logaritmo deben ser mayores a cero.

El procedimiento para calcular su dominio es bastante similar al de las funciones irracionales. Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero.

A continuación resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio. El rango estará representado por el conjunto de todos los números reales.

Determinar dominio y rango de

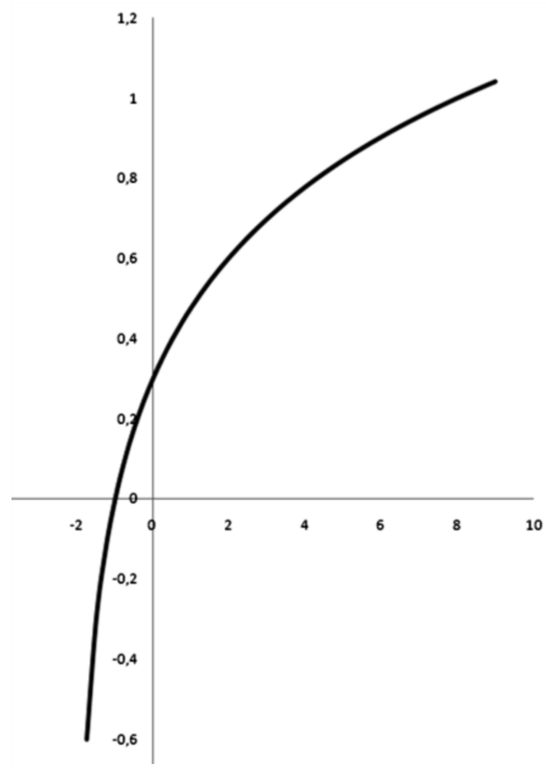
$$\boldsymbol{f(x) = \log(x+2).}$$

Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero.

A continuación resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio.

$$x + 2 > 0 ; x > -2$$

$$Dom\ f(x) = (-2, +\infty)$$



$$Rang\ f(x) = \mathbb{R}$$

Función como modelo matemático

Muchas cantidades dependen de otras por ejemplo:

El nivel de contaminación en una determinada región puede depender del número de vehículos circulando en la vía, el área de un círculo depende del radio, la presión depende de la temperatura y así como estas muchas más cantidades dependen las unas de las otras.

Para describir como una cantidad depende o es determinada por otra se usa el concepto de función.

Estudiemos en nuestra cotidianidad un caso en el cual podamos ver que una cantidad depende de otra.

El saldo de nuestro teléfono está relacionado con la cantidad de mensajes de texto enviados, digamos que nuestro saldo inicial es Bs. 25 y que por cada mensaje d texto tenemos un consumo de Bs. 0,25, llamaremos x a la cantidad de mensajes enviados y $f(x)$ será cantidad de saldo luego de haber enviado "x" cantidad de mensajes. La compañía telefónica no permite enviar mensajes que superen el saldo es decir no puede quedar un saldo negativo.

¿Con cada mensaje enviado que pasa con el saldo inicial? ¿Aumenta o disminuye?

Entonces la operación matemática que relaciona el saldo y la cantidad de mensajes ¿Cuál debe ser?

Recuerda las operaciones que conoces ¿tendremos que sumar, restar, multiplicar, dividir?

Si pensamos en disminuir la resta puede sernos útil

Hagamos un primer intento de función:

$$\boldsymbol{saldo\ despues\ de\ enviar\ x\ cant\ de\ mejs} = \boldsymbol{saldo\ inicial} - \boldsymbol{x\ cantidad\ de\ mensajes}$$

$$\boldsymbol{f(x) = 25 - x.}$$

¿Te parece correcto este planteamiento?

Calculemos el saldo después de envía un mensaje.

$$\boldsymbol{f(1) = 25 - 1}$$

$$\boldsymbol{f(1) = 24.}$$

¿Después de enviar un mensaje nuestro saldo es 24?

De ser así cada mensaje tendría un costo de Bs 1

¿Hemos pasado por alto algún dato o relación? Puesto que el costo por mensaje que nos dieron es de Bs 0,25, mas con nuestra función obtenemos que es Bs 1.

¿Será necesario usar el costo de cada mensaje de alguna forma?

Si un mensaje cuesta Bs 0,25 ¿cuál es el costo de 5 mensajes?

Tendríamos que multiplicar $0{,}25 \times 5 = 1{,}25$

Y de el costo de 10 mensajes $0{,}25 \times 10 = 2{,}5$

Y el de 20 $0{,}25 \times 20 = 5.$

¿Notas alguna relación?

Parece que el costo de cierta cantidad de mensajes es la cantidad por el costo de cada mensaje. ¿Podemos expresar esto matemáticamente y de forma general?

¿Qué elemento representa la cantidad de mensajes? $\boldsymbol{x}$ es la cantidad de mensajes.

Así el costo de x cantidad de mensajes es de $0{,}25 \times x$

Partiendo de esto construyamos una nueva función.

$$\boldsymbol{saldo\ al\ enviar\ x\ cant\ de\ mejs} = \boldsymbol{saldo\ inicial} - \boldsymbol{cost\ de\ menj}\ \boldsymbol{por\ cant\ de\ menjs}$$

$$\boldsymbol{f(x) = 25 - 0,25\ x.}$$

¿Hemos tomado en cuenta todas las condiciones que se nos planteaban?

Construyamos una tabla con algunos valores.

x	***y= f(x)***
1	*24,75*
10	*22,5*
40	*15*
90	*2,5*
100	*0*
0	*25*

- $\boldsymbol{f(1) = 25 - 0,25\ (1)}$

  $\boldsymbol{f(1) = 25 - 0,25}$

  $\boldsymbol{f(1) = 24,75}$

- $\boldsymbol{f(10) = 25 - 0,25\ (10)}$

  $\boldsymbol{f(10) = 25 - 2,5}$

  $\boldsymbol{f(10) = 22,5}$

- $\boldsymbol{f(40) = 25 - 0,25\ (40)}$

  $\boldsymbol{f(40) = 25 - 10}$

  $\boldsymbol{f(40) = 15}$

- $\boldsymbol{f(90) = 25 - 0,25\ (90)}$

  $\boldsymbol{f(90) = 25 - 22,5}$

  $\boldsymbol{f(90) = 2,5}$

- $\boldsymbol{f(100) = 25 - 0,25\ (100)}$

  $\boldsymbol{f(100) = 25 - 25}$

  $\boldsymbol{f(100) = 0}$

- $\boldsymbol{f(0) = 25 - 0,25\ (0)}$

  $\boldsymbol{f(0) = 25}$

Por medio de esta función podemos comprobar que se cumple que nuestro saldo inicial es el correcto pues al no enviar ningún mensaje x=0 se cumple que el saldo total es 25. Si hacemos el cálculo sin usar la función sino restando del saldo inicial uno a uno el consumo por mensajes veremos la coincidencia con los valores obtenidos con la función.

¿Cuál es el dominio de esta función?

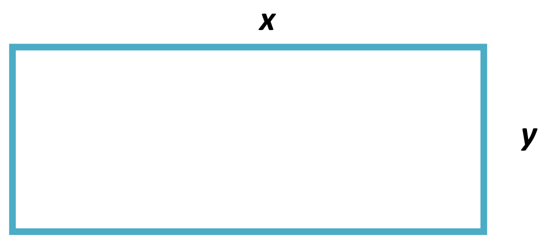
¿Se puede enviar medio mensaje? $\frac{1}{2}$

¿Por lo tanto no seria los racionales se puede enviar -5 mensajes? tampoco han de ser los enteros.

Y más aun ya que el saldo no puede ser negativo no puede enviarse más de 100 mensajes entonces los valores que puede tomar x varían entre 0 y 100 así $x \in [0,100]$

Se quiere cercar un terreno rectangular con 200 metros de malla. Si x e y son las dimensiones de los lados.

a) Exprese el área como función de x.



El área de un rectángulo está dada por

$$A = x \cdot y.$$

En este caso la función área viene expresada en términos de las dos variable x e y.

¿Existe alguna forma de relacionar x con y?

¿Además del área que otra característica conoces de las figuras geométricas?

¿A que nos hace referencia la malla de 200 metros?

Recuerdas la ecuación del perímetro de un rectángulo. Es la suma de sus lados.

Si el terreno se cerca con 200 metros de malla quiere decir que el contorno del rectángulo mide 200 metro lo cual es el perímetro del mismo.

Así tendríamos.

$$\boldsymbol{P = x + x + y + y = 200}$$

$$\boldsymbol{2x + 2y = 200.}$$

Esto nos permite relacionar a las variables x, y ¿cómo?

¿Podemos escribir a y en términos de x?

¿Podemos despejar y?

$$y = \frac{200 - 2x}{2}$$

$$y = 100 - x.$$

Tenemos y escrito en términos de x. ya los hemos relacionado. ¿Esto nos sirve de algo?

Necesito reescribir y en términos de x en algún lugar.

Recordemos la ecuación del área $A = x \cdot y.$

Si escribimos y en términos de x que tendríamos: $A = x \cdot (100 - x).$

De esta manera tenemos el área descrito en términos de x. hallemos algunos valores del área según x varia.

x	$A(x)$
1	99
20	1600
50	2500

$$A(x) = x \cdot (100 - x)$$

$$A(1) = 1 \cdot (100 - 1)$$

$$A(1) = 99$$

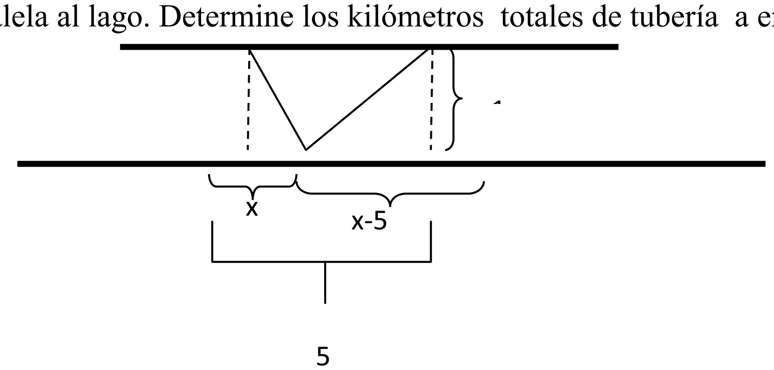
$$A(20) = 20 \cdot (100 - 20)$$

$$A(20) = 1600$$

$$A(50) = 50 \cdot (100 - 50)$$

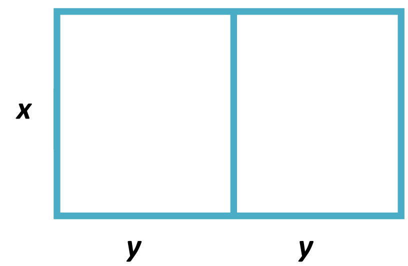
$$A(50) = 2500$$

1. Se quiere tender dos tuberías que salgan desde un mismo punto de la orilla un lago y lleguen 10 km. arriba a dos puntos diferentes A y B de una ciudad, los cuales están 5 km. distantes uno del otro. Suponga que la línea que une estos puntos corre paralela al lago. Determine los kilómetros totales de tubería a emplear en términos de x.



2.	Se corta un alambre de 20cm. de longitud en cuatro trozos para formar un rectángulo. Si x representa el lado más corto. Expresar el área del rectángulo en función de x.

3.	Con 120 metros se quiere cercar 2 corrales idénticos como muestra la figura.
a) Exprese el área total como función de x



4.	Exprese el área de un sector circular de una circunferencia, de radio fijo **r**, en función de **α**, el ángulo del sector dado en grados.

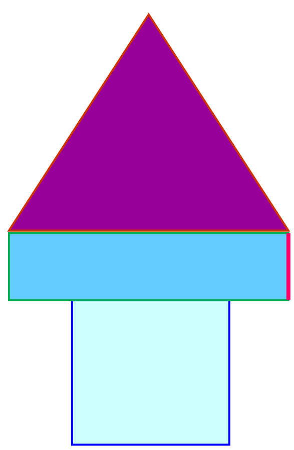
GEOMETRÍA: ÁREA DE FIGURAS PLANAS

La Geometría es la rama de las matemáticas que se encarga de problemas métricos siendo los más comunes el cálculo de áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos sólidos. En más de una oportunidad nos han pedido en las clases de matemática calcular el área de figuras geométricas, muchas veces sin entender el porqué; sin embargo son diversas las situaciones encargadas de hacer ver la importancia de aprender a realizar medidas de este estilo.

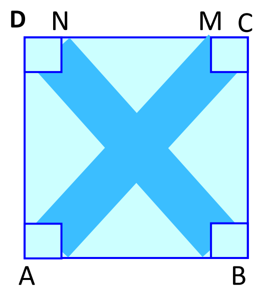
Como abordarías problemas como estos:

Conociendo los lados de cada uno de los rectángulos y conociendo el área del cuadrado ¿puedes hallar el área de color verde?

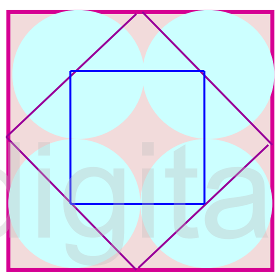
Se tiene una torre formada por un cuadrado, un rectángulo y un triángulo equilátero. El perímetro de las tres estructuras es el mismo. El lado del cuadrado mide 9 cm. ¿Cuánto mide el lado fucsia del rectángulo señalado en la figura?



ABCD es un cuadrado de 10 cm de lado. La distancia del punto N al punto M es 6 cm. Cada región no sombreada representa triángulos isósceles iguales o cuadrados iguales. Halle el área de la región sombreada dentro del cuadrado ABCD.



O nos presentan formas como esta:



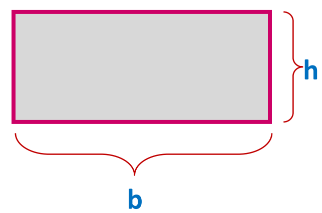
Donde se nos pregunta ¿Qué porción del cuadrado más pequeño está sombreada de verde?, ¿Qué porción del mediano está pintada de rosa? Y así otras preguntas que ameritan para ser abordadas ciertos conocimientos respecto a áreas y figuras geométricas.

Llamamos área a la medida de una superficie que considera dos dimensiones, siendo estas el largo y el ancho de la figura, en su mayoría la unidad utilizada para su medida es el metro cuadrado, sin embargo de acuerdo a la situación esta unidad suele ser transformada a otra más grande o pequeña. En el campo matemático identificamos el área con la letra **A.**

Cálculo del área de figuras planas:

Área del rectángulo:

El área de un rectángulo se halla multiplicando la longitud de su base por la longitud de su altura.



b: base
h: altura

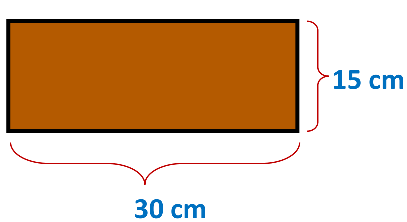
$$\boxed{A = b \times h}$$

¿Qué sucede si ahora trazamos una de las dos diagonales del rectángulo? ¿Qué observas?

Como podemos observar el rectángulo se divide en dos partes iguales y que a su vez esas partes tienen la forma de triángulos. Por lo tanto es claro ver que la superficie total de rectángulo está formada por la suma de la superficie de cada triángulo, es decir que al encontrar el área del rectángulo si la *separamos en dos partes iguales* estamos encontrado el área de cada uno de los triángulos que lo forman, es por ello que el área del triángulo se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A = \frac{b \times h}{2}}.$$

Ejemplo: ¿Cuánto nos cobraran por pintar una base color madera de forma rectangular cuyas medidas son 15cm de ancho por 30 de cm de largo, si por cada cm^2 nos cobran Bs. 0,5?



Solución:

Para saber cuánto nos cobraran por pintar la base necesitamos conocer cuántos centímetros tiene su superficie, es decir debemos hallar el valor del área.

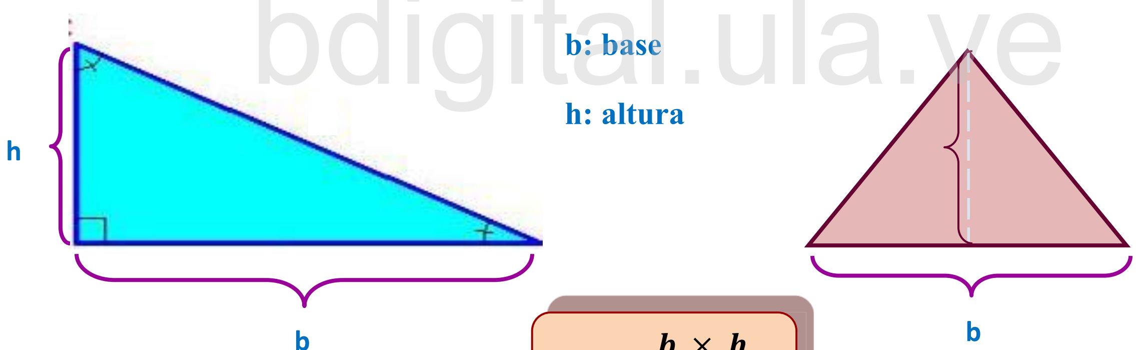
$$A = 30cm \times 15cm = 450\ cm^2\ .$$

Utilizando los datos sabemos que por 1 cm^2 se debe cancelar Bs. 0,5 , y como queremos hallar el valor de 450 cm^2 solo tenemos que multiplicar eso por el costo de cada cm^2.

Cantidad a pagar $= 450 \times 0{,}5 = 225$ bs

Área del triángulo:

El área de un triángulo se halla multiplicando la longitud de su base por la longitud de la altura y después el resultado se divide entre dos.

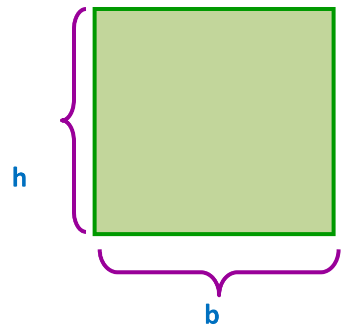


$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Cuando el triángulo es rectángulo no existe problema en ubicar la base porque coincide con el cateto adyacente y la altura con el cateto opuesto, ahora bien cuando el triángulo con el que se desea trabajar no es rectángulo, la base será el lado más largo y la altura será la longitud del segmento de recta que se traza desde el vértice opuesto a la base hasta esta en forma perpendicular, así como se puede observar en el triángulo número 2.

Área del cuadrado:

El área de un cuadrado se halla elevando al cuadrado la longitud del lado.



b: base
h: altura

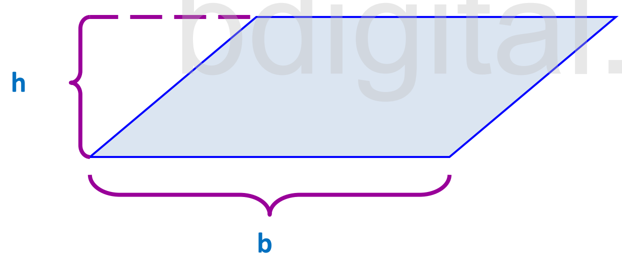
$$A = b \times h$$

Por ser un cuadrado sabemos que la altura tiene el mismo valor de la base, por lo tanto b = h, por lo que el área queda expresada:

$$A = b \times b = b^2$$

Área del romboide:

El área del romboide se halla multiplicando la longitud de su base por la longitud de su altura.



b: base

h: altura

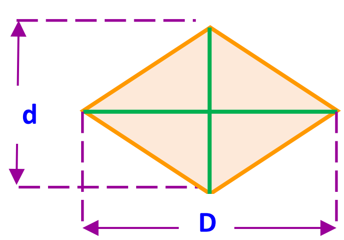
$$A = b \times h$$

Área del rombo:

El área de un rombo se halla multiplicando la longitud de la diagonal mayor por la longitud de la diagonal menor y después se divide el resultado entre dos.

D = diagonal mayor.

d = diagonal menor.



$$A = \frac{D \times d}{2}$$

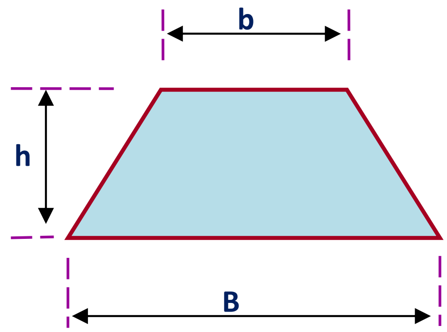
Área del trapecio:

El área del trapecio se halla sumando la base mayor y la base menor después se divide entre dos y luego se multiplica por la altura.

B = base mayor.

b= base menor.

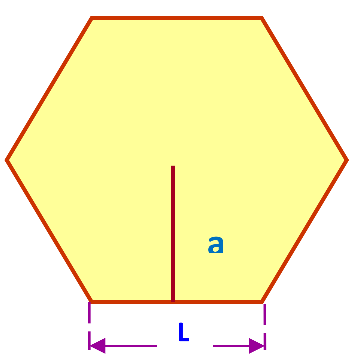
h= altura



$$A = \frac{B + b}{2} \times \mathbf{h}$$

Área de polígonos regulares:

El área de un polígono regular se halla multiplicando su perímetro por su **apotema (**segmento que une el centro del polígono con el punto medio de uno de los lados**)** y después se divide este resultado entre dos.



n = Numero de lados

L = Lado

p = Perímetro

a = Apotema

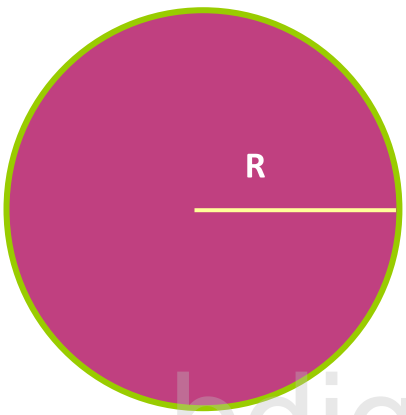
$$p = L \times n$$

$$A = \frac{p \times a}{2}$$

Longitud de la circunferencia y Área del círculo:

La longitud de la circunferencia se halla multiplicando el doble del radio por 3,14 a este número se le conoce con el nombre de π.

El área del círculo se halla multiplicando p por el cuadrado del radio.



L: longitud de la circunferencia

A = area del circulo.

R: radio

π : 3,14

$$L = 2 \times \pi \times R$$

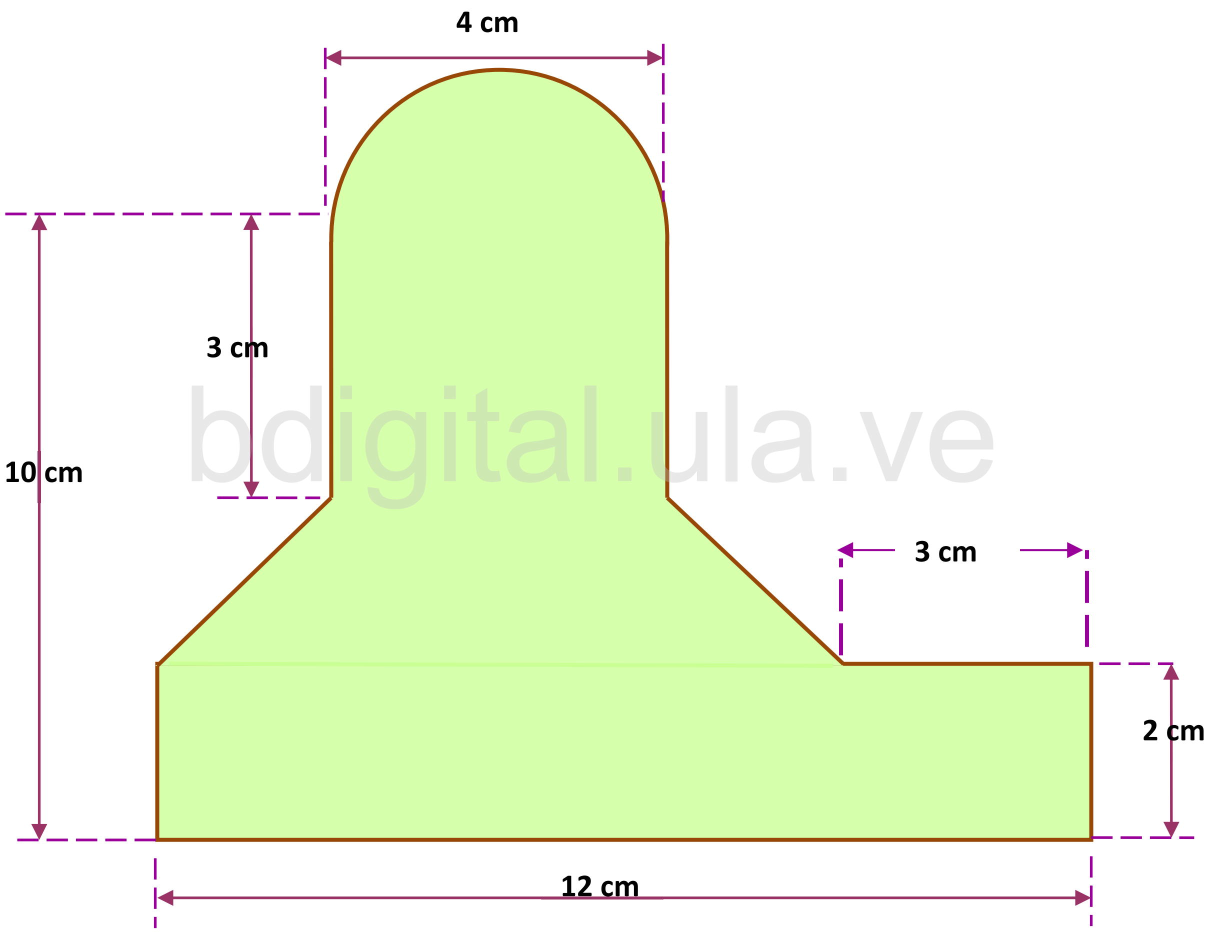
$$A = \pi \times R^2$$

Área de figuras compuestas:

Para hallar el área de figuras compuestas basta con dividirlas en otras de las cuales ya hemos aprendido a calcular su área.

Ejemplo:

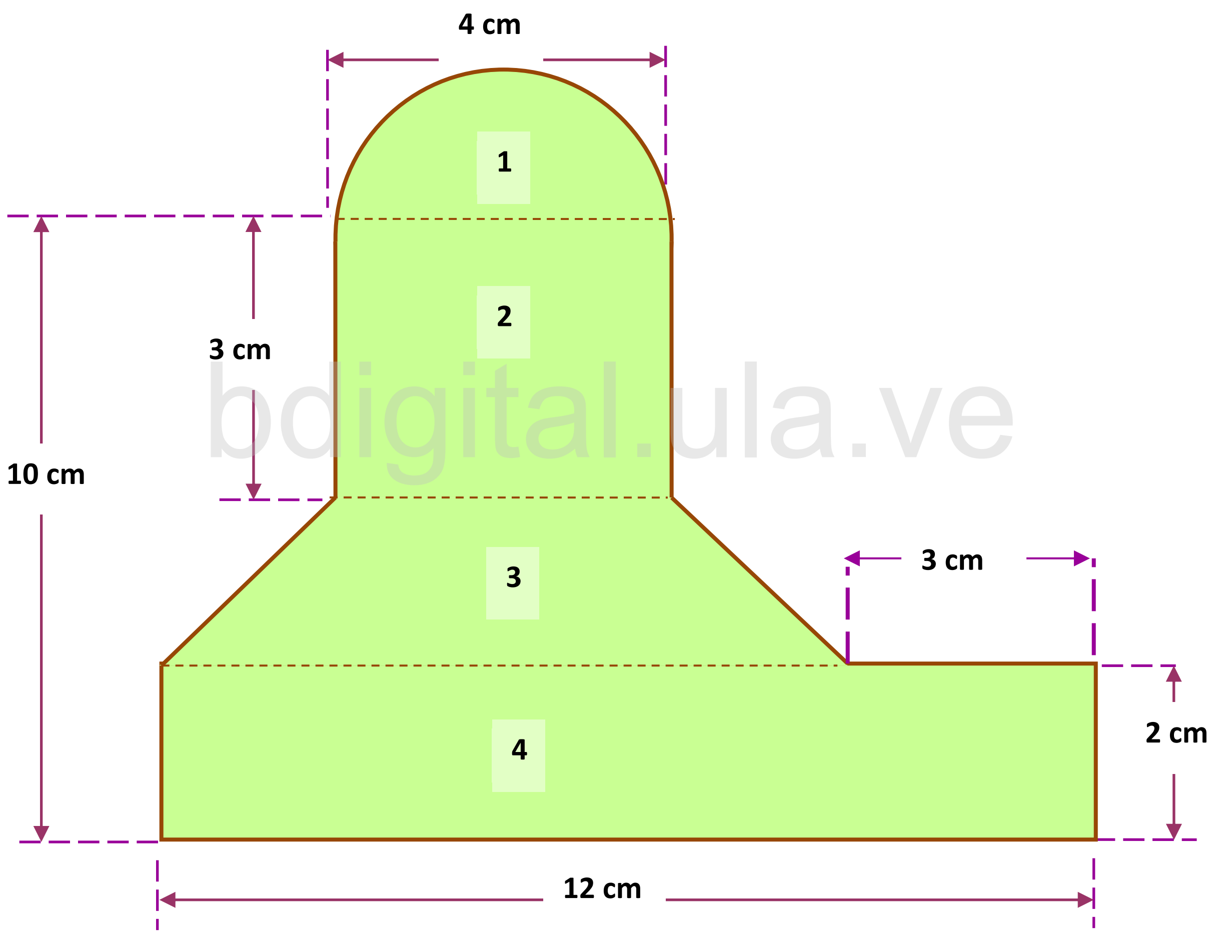
Calcular el área de la siguiente figura:



Solución:

Para calcular el área de esta figura lo primero que hacemos es trazar las divisiones de tal manera que a las figuras obtenidas se les pueda calcular el área aplicando las formulas o ecuaciones estudiadas para el cálculo de área de figuras planas.

✓ Dividamos la figura en otras más sencillas:



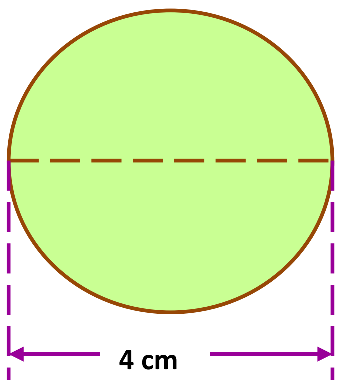
Así se tiene que la figura principal queda divida en cuatro figuras más sencillas, éstas son:

1. Semicírculo
2. Rectángulo.
3. Trapecio.
4. Rectángulo**.**

Es decir que el área del semicírculo mas el área del rectángulo mas el área del trapecio mas el área del rectángulo es igual al área de la figura total.

- ✓ Calculemos el área del semicírculo:

Como se puede observar en el círculo nos muestran que la longitud del diámetro es 4cm, por lo tanto si conocemos el diámetro podemos calcular el radio.



$$\boldsymbol{A = \pi \times R^2}$$

$$\boldsymbol{R = \frac{d}{2}} \qquad \boldsymbol{d = 2\,R}$$

Comenzamos encontrando el valor del radio a partir del diámetro:

$$\boldsymbol{R = \frac{d}{2}\,,\;\; R = \frac{4\,cm}{2} = 2\,cm\,.}$$

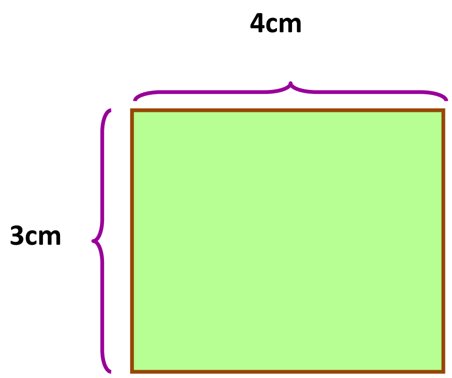
Seguidamente sustituimos los valores en la ecuación del área del círculo, teniendo así que:

$$\boldsymbol{A = \pi \times R^2}$$

$$\boldsymbol{A = 3{,}14 \times (2\,cm)^2 = 3{,}14 \times 4\,cm^2 = 12{,}56\,cm^2\,.}$$

Por lo tanto el área del circulo de la figura es de $\boldsymbol{12{,}56\,cm^2}$, sin embargo en la figura se observa es un semicírculo, es decir la mitad del circulo, por ello el área que necesitamos conocer es la mitad de la que encontramos es decir $\boldsymbol{A_1 = \frac{12{,}56\,cm^2}{2} = 6{,}28\,cm^2}$. $\boldsymbol{A_1}$(Á**rea uno).**

- ✓ Ahora calculamos el área dos $\boldsymbol{A_2}$ que corresponde al primer rectángulo.



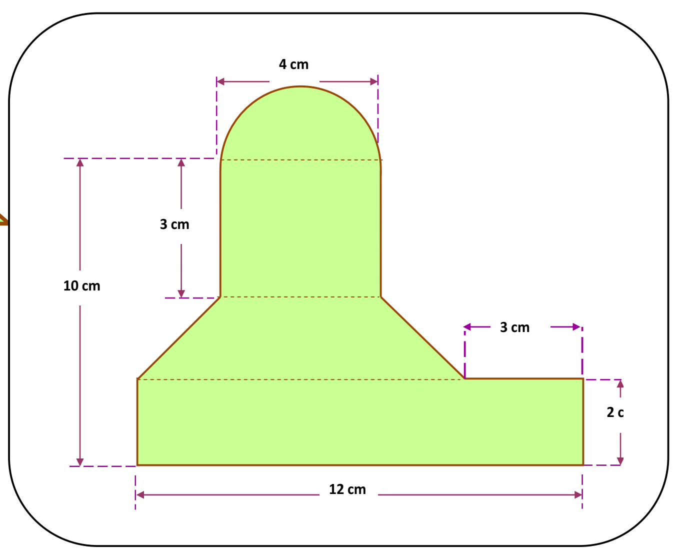
Es un rectángulo con un lado de tres centímetros, que se puede observar directamente en la figura principal y el otro de cuatro centímetros que corresponde al diámetro del círculo. Debido a que se tienen los datos necesarios para encontrar esta área, procedemos a sustituirlos en la ecuación correspondiente:

$$A = b \times h$$

$$\boldsymbol{A = b \times h}$$
$$\boldsymbol{A = 4cm \times 3\ cm}$$
$$\boldsymbol{A = 12\ cm^2.}$$

Así se tiene que el área dos es decir $\boldsymbol{A_2 = 12\ cm^2}$ **.**

✓ Trabajamos ahora con la figura numero tres que corresponde a un trapecio.



La ecuación para hallar el área del trapecio es la siguiente:

$$\boldsymbol{A = \frac{B+b}{2} \times h.}$$

Observando el trapecio en relación con la figura principal se puede notar que:

- **la base menor** coincide con uno de los lados del **rectángulo pequeño** por lo tanto b = 4 cm.

- **La base mayor** corresponde a una parte del lado **del rectángulo más grande**.

Como se puede observar el **lado de ese rectángulo** está formado por **dos segmentos,** el que corresponde a **la base mayor del trapecio** y **otro cuyo valor es 3 cm**, puesto que el lado completo mide 12 cm tenemos que:

La base mayor + 3cm = 12 cm y de aquí se deduce que: **base mayor** = 12 cm – 3 cm = **9 cm** o lo que es lo mismo B = 9 cm.

- Para encontrar la altura del trapecio debemos encontrar la longitud del segmento que une de forma perpendicular la base menor con la base mayor. Observando la figura principal se puede ver que si el segmento vertical se forma desde el diámetro del semicírculo hasta la base del rectángulo mas grande mide 10 cm y que a su vez este segmento esta formado por tres segmentos más pequeños, estos son: la altura del rectángulo pequeño que es igual a 3 Cm, la altura del trapecio cuyo valor desconocemos y la altura del rectángulo grande que tiene como valor 2 cm, o lo que es lo mismo:

Altura de rectángulo pequeño + altura del trapecio + altura del rectángulo grande = 10 cm

3cm + altura del trapecio + 2 cm = 10 cm

5cm + altura del trapecio = 10 cm

Altura del trapecio = 10cm – 5 cm

Altura del trapecio = 5 cm.

Después de encontrar los valores que se necesitaban para aplicar la ecuación del área del trapecio procedemos a sustituir los datos en ella:

$$A = \frac{B + b}{2} \times \mathrm{h}$$
$$A = \frac{9cm + 4\ cm}{2} \times 5\mathrm{cm}$$
$$A = \frac{13\ cm}{2} \times 5\ \mathrm{cm}$$
$$A = 6{,}5\ cm \times 5\ \mathrm{cm}$$
$$A = 32.5\ \mathrm{cm}^2.$$

De esta manera se tiene que $A_3 = 32{,}5\ cm^2$.

Calculando el área cuatro ($\boldsymbol{A_4}$).

El área cuatro corresponde al rectángulo más grande, por procedimiento análogo al cálculo del área dos podemos decir que: $A_4 = 12\ cm \times 2\ cm = 24\ cm^2$

Puesto que ya conocemos el área de cada una de la cuatro figuras en que se ha divido la figura principal, procedemos a calcular el área de esta figura.

Área de la figura principal = $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Área de la figura principal = $6{,}28\ cm^2 + 12\ cm^2 + 32{,}5\ cm^2 + 24\ cm^2 = 74,78\ cm^2$

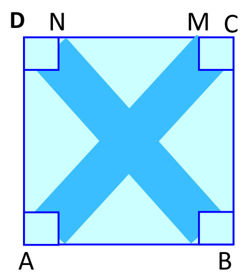
Área de la figura principal = $74,78\ cm^2$.

Por lo tanto ya podemos dar solución al ejercicio, es decir que el área de la figura que nos presentan es de $\mathbf{74{,}78\ cm^2}$, área que quizá por un momento al decidir calcularla parecía algo compleja por la forma que mostraba la figura, sin embargo el proceso para encontrarla resulta entendible y trabajable. El dividir una figura en otras "básicas" pues ayuda a que los cálculos sean más sencillos y permite utilizar valores de lados que por un momento pareciera no tener alguna relación entre sí y que en realidad guardan mucha relación.

Problemas resueltos:

Al inicio de este tema se presentaron dos problemas a los cuales no se les dio solución, pues en ese momento no contábamos con las herramientas que se necesitaban para hacerlo, a continuación resolveremos uno de ellos:

1. ABCD es un cuadrado de 10 cm de lado. La distancia del punto N al punto M es 6 cm. Cada región de color claro representa triángulos isósceles iguales o cuadrados pequeños iguales. ¿Cuál es el área de la región sombreada de color oscuro dentro del cuadrado ABCD?



Solución:

●***Identifiquemos la incógnita:***

¿Cuál es el área de la región sombreada de color oscuro dentro del cuadrado ABCD? En la figura esta es la región que forma una “x”

●***Revisemos los datos:***

Lado del cuadrado: 10 cm

Distancia del punto N al punto M: 6 cm

Región de color claro representa **triángulos isósceles iguales** y **cuadrados pequeños iguales.**

●***Relacionemos los datos:***

Lado del cuadrado está representado por el segmento **DC** y lado del cuadrado vale **10 cm**, es decir **DC = 10 cm.**

El segmento **DC** está formado por la unión de los segmentos **DN, NM y MC,** donde **NM = 6cm.**

DN es el lado de uno de los cuadrados pequeños y **MC** es el lado de otro de los cuadrados pequeños, como los cuadrados pequeños son iguales entonces **DN = MC.**

¿De qué manera se relacionan las áreas de la región claro con la de la región oscura?

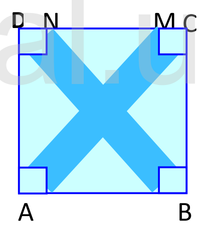
El área del cuadrado grande está formada por el área de color claro más el área de color oscuro.

El área de la región clara está formada por el área de los cuadrados pequeños más el área de los triángulos isósceles.

El ángulo del vértice interno de cada triángulo es 90^o, debido a que la figura oscura divide a la parte interna del cuadrado en cuatro triángulos iguales, por lo tanto estos cuatro ángulos son iguales, y tomando como referencia los 360^o totales de la circunferencia tenemos que: $360^o/4 = 90^o$.

- ***Describamos la situación con simbología matemática:***

DC = 10 cm
DC = DN + NM + MC
NM = 6cm
DN = MC



$A_T = A_c + A_o$ (área cuadrado grande es igual a el área de la región clara mas el área de la región oscura)

$A_o = A_T - A_c$.

- ***Realicemos las operaciones:***

a) $A_T = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$ (esto debido a que cada lado del cuadrado grande mide 10 cm)

b) DC = DN + NM + MC

10 cm = DN + 6cm + MC; como DN = MC entonces

10 cm = DN + 6cm + DN

10 cm = 2DN + 6cm

$10cm - 6\ cm = 2DN$

$4\ cm = 2DN$

$\frac{4}{2}$ cm = DN y así tenemos que 2 cm = DN, que es lo mismo que decir DN = 2cm.

De acuerdo a los datos conocemos que DN = MC por lo tanto MC = 2cm, y este es el valor de cada lado de cada uno de los cuadrados pequeños.

¿Nos ayuda en algo saber que el lado de cada cuadrado pequeño es 2 cm?

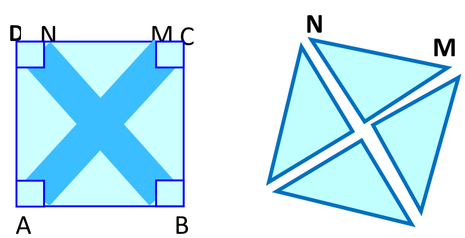
Si nos ayuda puesto que con este valor podemos calcular el área de cada cuadrado pequeño.

A = **(2cm)** ^{2} **= 4 cm** ^{2}**.**

¿Cuántos cuadrados pequeños hay? ¿Cuál es el área total de los cuatro?

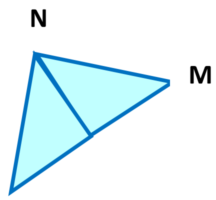
Hay un cuadrado pequeño en cada vértice del cuadrado grande, por lo tanto hay cuatro cuadrados pequeños. Como consecuencia de que son iguales entonces el área de uno es igual al área de cada uno de los otros, y así tenemos que el área de estos cuatro cuadrados juntos es $A_t = 4 \times 4\ cm^2 = 16\ cm^2$.

Ahora para completar el área total de color claro solo nos falta hallar el área relacionada con los triángulos. En los datos nos muestran que el segmento NM = 6cm, y a su vez el segmento NM es el lado externo de uno de los triángulos, por los datos conocemos que los **triángulos son isósceles iguales**, es decir que cada triángulo tiene la longitud de sus lados igual a cada uno de los otros tres triángulos, por lo que el lado externo de cada triángulo mide 6cm.

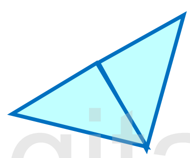


Conociendo las condiciones de los triángulos ¿qué se puede hacer con ellos?, ¿conviene calcularle el área a cada uno?, ¿de qué manera podríamos calcular el área a los cuatro juntos?

Podríamos calcular el área a cada uno y luego multiplicarla por cuatro siguiendo el procedimiento de los cuadrados pequeños aunque se puede hacer no resulta conveniente, pues aunque conocemos la base no conocemos la altura, razón por la cual tendríamos que buscar otro procedimiento para encontrarla. Considerando que cada uno es **isósceles e igual a los otros,** sabemos que los lados de cada uno corresponden con los lados de los otros, por lo que tomamos dos de ellos y los juntamos de tal manera que el lado externo de cada uno siga siendo externo y su unión se realice mediante uno de los lados internos comunes:

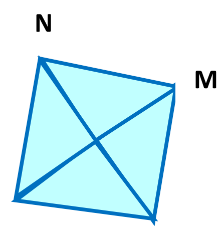


Análogamente procedemos con el otro par de lados:



¿Qué sucede si ahora juntamos las dos figuras formadas?

Se forma aparentemente un cuadrado. Verifiquemos que lo es.



a) Cada lado externo vale 6 cm. Por lo que sus cuatro lados son iguales.

b) El vértice tomado para la unión de cada triángulo tiene un ángulo recto (90^{o}), por lo que las diagonales son perpendiculares entre sí. Con estas dos condiciones también se puede decir que **la figura formada es un rombo**, no obstante esta opción queda descartada puesto que al recordar que los triángulos son isósceles e iguales y se unieron con el lado común entre ellos se puede garantizar que las diagonales son iguales concluyendo así que la figura es un cuadrado de **lado 6 cm.**

Luego de haber verificado que los triángulos forman un cuadrado calculamos su área.

$\mathbf{A = (6\ cm)^2 = 36\ cm^2}$ **.**

Como ya conocemos el área total de los cuadrados pequeños y conocemos el área de los triángulos podemos hallar el valor del área total de la superficie clara.

$\mathbf{A_c = 16\ cm^2 + 36\ cm^2 = 52\ cm^2}$**.**

Tomando en cuenta que el área total del cuadrado principal es igual a la suma del área clara con el área oscura tenemos que:

$100\ cm^2 = A_c + A_o$

$100\ cm^2 = 52\ cm^2 + A_o$

$100\ cm^2 - 52\ cm^2 = A_o$

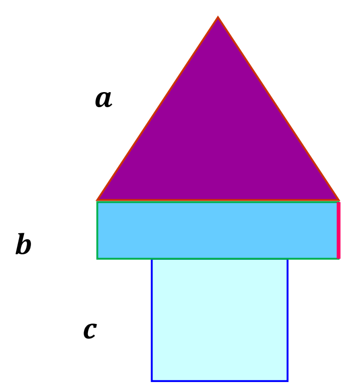
$48\ cm^2 = A_o$ o $A_o = 48\ cm^2$.

El área de la región sombreada de color oscuro dentro del cuadrado ABCD es de $48\ cm^2$.

●**Verificar la solución:**

Para verificar la solución te sugerimos amigo lector que calcules esta área aplicando otro procedimiento.

2. Se tiene una torre formada por un cuadrado, un rectángulo y un triángulo equilátero. El perímetro de las tres estructuras es el mismo. El lado del cuadrado mide 9 cm. ¿Cuánto mide el lado fucsia del rectángulo señalado en la figura?



Solución:

En esta ocasión se dará solución al problema sin justificar el razonamiento utilizado, por lo que es tarea del lector y observando lo sucedido con la finalidad de justificar cada paso.

a) **Identifiquemos la incógnita:**

¿Cuánto mide el lado fucsia del rectángulo señalado en la figura?

b) **Revisemos los datos:**

Torre formada por un cuadrado, un rectángulo y un triángulo equilátero.

El perímetro de las tres estructuras es el mismo.

El lado del cuadrado mide 9 cm.

c) --

d) $P_c =$ 9cm + 9cm + 9cm + 9cm = 36 cm

$P_r = 2b + 2\,a = 36$ cm

$P_t = a + a + a = 36$ cm

$3\,a = 36$ cm

$a = \frac{36}{3}$ cm = 12 cm

$P_r = 2b + 2\,a = 2b + 2\,(12)$ cm = 2b +24 cm

36cm = 2b +24 cm

36 cm – 24 cm = 2b

12 cm = 2b

$\frac{12}{2}$ cm = b

6 cm = b y así b = 6 cm.

e) El lado pintado de color fucsia en el rectángulo mide 6 cm.

f) $P_r = 2b + 2\,a = 36$ cm

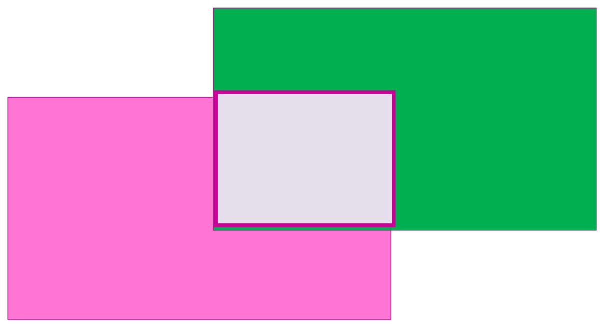
P_r = 2(6cm) + 2(12cm) = 12 cm + 24 cm = 36cm

36cm = 36 cm.

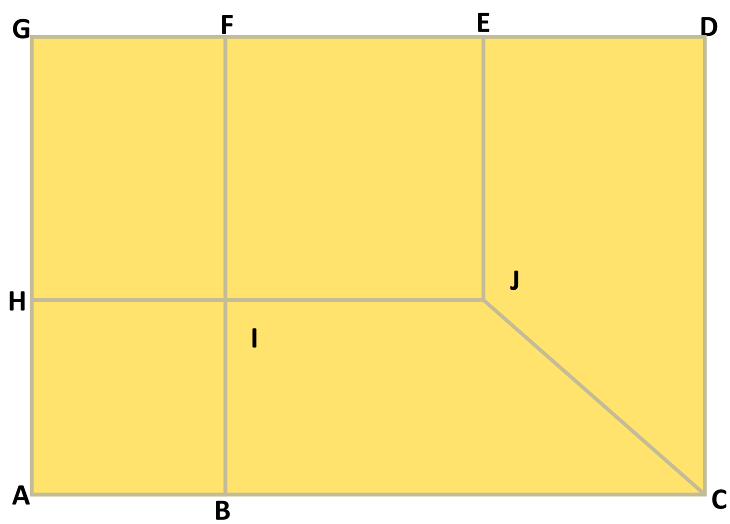
Debido a que se presenta el problema resuelto solo a través de los cálculos se le recuerda al lector justificar cada paso realizado en el procedimiento, al mismo tiempo que verificar el razonamiento empleado, de ser posible intente resolverlo de nuevo partiendo del enunciado justificando cada operación realizada.

Problemas propuestos:

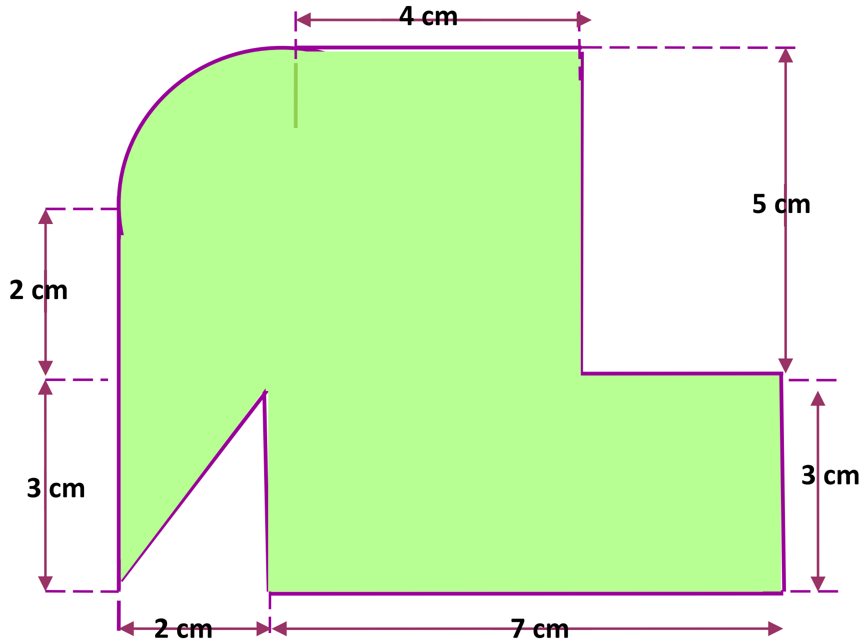
a) Dos rectángulos de 8 × 10 y 9 × 12 se solapan como muestra la figura. El área de la parte gris oscura es 37. ¿Cuál es el área de la parte de color verde?



b) La figura muestra un rectángulo dividido en cinco partes. Se sabe que el área del cuadrado ABIH es 25 cm2, el área del cuadrado FIJE es 49 cm2 y el área del trapecio BCJI es 45 cm^2. ¿Cuál es el área del trapecio DEJC?



Calcular el área de la figura que se te muestra a continuación:



De esta forma se presenta la guía de nivelación, con los temas desarrollados a nivel teórico-práctico, presentando algunos conceptos de manera directa y algunos otros construyéndolos en función de la necesidad y el descubrimiento del lector. Se relacionan ejercicios y problemas de tal manera que el conocimiento pueda ser profundizado en cuanto a que las definiciones se involucran en situaciones practicas por medio de los problemas luego de que se comprende la forma de usarla por medio de los ejercicios.

CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

El proceso de enseñanza de la matemática en los últimos tiempos a nivel universitario ha puesto en manifiesto que existen numerosas deficiencias o carencias en lo que a conocimiento y comprensión se refiere, lo que trae como consecuencia que quienes inician en una carrera universitaria tengan como referente negativo el estudio de ésta ciencia y se ve esta como un obstáculo y a su vez se le etiqueta como la asignatura de mayor dificultad. Todo esto ocasionado principalmente porque los fundamentos o conocimientos básicos que se poseen y el nivel de exigencia a en el campo universitario son disparejos, es decir el estudiante afronta una realidad para la cual no está preparado.

En razón de lograr el equilibrio entre el conocimiento que el estudiante posee y la exigencia que se le hará, es necesario realizar un proceso de nivelación, el cual se puede llevar a cabo por medio el estudio de una guía que contenga los temas elementales desarrollados de modo sencillo y presentados de manera que el estudiante logre su comprensión rápida y profunda y de este modo sea mas duradera.

Al emplear el método de Polya en la elaboración de una guía se logra apreciar como este facilita la comprensión de los temas ya que el estudiante va construyendo su propio conocimiento mientras lee, lo cual le permite relacionar lo aprendido con ideas que posee y llegar a una comprensión que supera el solo hecho de saber resolver ejercicios y lo lleva a una profundidad en la que es capaz de explicar incluso teóricamente los fundamentos básicos de los temas tratados.

Algunas de las conclusiones a las que se llegaron por medio de la elaboración de esta guía son las siguientes:

La comprensión de los temas se logra de forma profunda si ésta se va construyendo de la mano del estudiante (lector), de esta manera no se les presentan directamente leyes o definiciones sino que se parte de su conocimiento y se va recorriendo el tema, mientras se avanza se profundiza en las partes y se ejemplifica cada una. Esto permite que el estudiante tenga un manejo de la teoría y los fundamentos relacionados al tema lo cual le da una amplia gama de posibilidades y medios que unidos a la creatividad del estudiante le permitirán dar solución a problemas que se le planteen empleando como herramientas la teoría estudiada y permitiéndole diferenciar los problemas y los ejercicios.

El método de Polya posee una validez que perdura en el tiempo, de una manera menos elaborada o probablemente mecánica, todos empleamos algún método en la resolución de problemas e internamente aplicamos gran parte del de Polya, pero esto ocurre generalmente con los problemas implica un esfuerzo mínimo ya que en los más complejos éste no se puede ejecutar mecánicamente lo cual crea una especie de estancamiento y exige un análisis mayor y una comprensión más detallada de lo que se nos solicita "¿cuál es la incógnita?", en medido del desarrollo de la investigación se aplica el método a problemas que se solucionarían de manera automática y a su vez se usa este mismo en ejercicios de mayor complejidad.

En medio de la investigación y la comparación del método Polya con otros era evidente la similitud entre estos, puesto q de alguna forma tienen un punto de partida común y muchos de los aspectos planteados por Polya son empleados en todos los demás métodos. Otro detalle interesante es que este método se puede aplicar a distintos campos y no solo a la matemática.

Tener un método bien definido al momento de resolución de problemas desarrolla la habilidad y la rapidez. Al momento de dar solución a los ejercicios basta con aplicar un método o proceso estudiado y/o alguna variación o parte del mismo, mas al afrontar un problema es necesario aplicar alguna serie de pasos particular para llegar a la solución, es decir no existe una secuencia fija y a demás cabe la posibilidad de diversos medios para obtener una misma solución. Sin embargo al tener una referente en la construcción del camino que nos lleva a la solución, se logra evitar el divagar o el caminar sin tener una dirección clara de adonde se va, en otras palabras al aplicar un método de resolución no tenemos trazado el camino pero tenemos señales que nos indican por donde debe ser trazado el mismo.

Luego de hallar solución a una cantidad de problemas utilizados en la elaboración de la guía de nivelación, se percibe evidentemente en los investigadores una mayor facilidad al afrontar los problemas, lo cual se manifiesta a través de la disminución en el tiempo que toma analizarlo, al igual que la experiencia y comprensión que se obtiene al resolver mayor cantidad crea una especie de base de datos con estrategias a emplear en situaciones similares o problemas relacionados con los ya trabajados.

La resolución de problemas es una mezcla de conocimiento, método y creatividad. Para poder afrontar cualquier problema no solo matemático pero estos en particular requieren la presencia de estos tres elementos: conocimiento, método y creatividad, una buena armonía entre estos conllevan al éxito en la resolución de problemas, en medio del estudio realizado se hacia notable que no basta tener solo los conocimientos teóricos para dar solución, esto permite verificar como se ha mencionado ya en varias ocasiones que es distinto resolver problemas y ejercicios.

Por otro lado si se carece de un método de resolución, el problema puede estancarse en leer una y otra vez el enunciado sin tener idea de que hacer, o de intentar aplicar procesos u operaciones sin ningún sentido o quizá relacionemos los datos de manera incorrecta por el solo hecho de pensar que se deben usar en alguna parte, por el contrario al poseer un método que oriente la resolución se tiene claridad en lo que el enunciado solicita, en como relacionar los datos y cuales son la operaciones a llevar a cabo en función de dar respuesta a la incógnita planteada.

Otro factor de gran importancia es la creatividad, ya que en general los problemas relacionan varias procesos, datos y en muchos casos es necesario hallar datos que se presentan de manera disimulada, a demás el tener la posibilidad de emplear mas de un método en encontrar la solución queda a libertad del estudiante y a su creatividad cual emplear o cual le resulta mas acorde a su comprensión o cual le facilita alcanzar la solución.

Para que el proceso de nivelación se pueda llevar a cabo de manera satisfactoria es necesario la dedicación y el estudio paso a paso de la guía iniciando por la asimilación del método de Polya, es igualmente influyente el interés del estudiante, es indispensable que se lleve el estudio sin prisa de manera que se logre por medio de la práctica y del incremento de la dificultad comprender y emplear el método con existo y a su vez es de suma importancia que el estudiante analice y realice la lectura completa de la teoría presentada y que vaya con el proceso consolidando, reforzando o iniciando la construcción de su conocimiento.

Recomendaciones

La elaboración de una guía de nivelación es una alternativa que permite afrontar el problema de la deficiencia de los estudiantes que ingresan en una institución universitaria, puesto que un estudio detallado de los contenidos que pudieron quedar incompletos o en los cuales no se logro una comprensión total y mas aun si estos son presentados de forma sencilla e incluso la teoría se va construyendo de la mano del lector.

Basándose en el estudio realizado, la elaboración de la guía y en las conclusiones presentadas anteriormente se pueden presentar algunas recomendaciones entre estas se tiene:

Al iniciarse una carrera universitaria realizar una prueba diagnostico en lo que respecta al conocimiento matemático que incluya ejercicios, preguntas teóricas y problemas para poder determinar cuales son las carencias que el estudiante presenta.

El proceso de nivelación debe tener una dimensión individual, es decir se presenta la necesidad de que el estudiante afronte los problemas y procure la comprensión de la teoría por si mismo, esto no quiere decir que el trabajo en grupo u orientado se descarte al contrario este puede implementarse mas es indispensable la dedicación personal.

El uso de problemas es una parte esencial en la nivelación pues si se piensa en esta solo como que se repase los temas pierde sentido, puesto que la intención no es solo pensar en lo que les falto de conocimiento sino lo que le falta nivelar en la actitud con la que se ve la matemática y como la afronta. Esto puede lograrse empleando los problemas puesto que lleva al estudiante a cambiar de mentalidad y a razonar, implementar la teoría y necesariamente a realizar un aporte propio en la búsqueda de la solución.

Implementando la guía de nivelación se debe seguir el proceso de manera secuencial, no saltar de una parte a otra sino estudiar de manera progresiva, sobre todo es indispensable asimilar el método de Polya, por ello se deben estudiar los problemas modelo aun cuando puedan parecer demasiado elementales. La comprensión de lo básico es lo que permitirá asimilar el conocimiento más profundo, por eso es necesario que el estudiante maneje con claridad las definiciones primeras, como operación, cifra, igualdad, ecuación por mencionar algunas, puesto que al leer la guía y al plantearse los enunciados el comprender el lenguaje matemático (de que se habla) y las definiciones (que es) será lo que le lleve a exitosamente a determinar las soluciones y asimilar las teorías planteadas.

Un proceso de nivelación llevara sin duda a los estudiantes a tener un mayor éxito académico y a presentarse ante las asignaturas relacionadas con la matemática con una actitud distinta y confiada puesto que poseen las herramientas con las que podrán afrontar la exigencia que se les presenta.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Cátedra de Calculo-Departamento de Matemática-Facultad de Ciencias de la Educación-Universidad de Carabobo Publicación Periódica N° 1- Año 4 La enseñanza de la Matemática: Proceso Versus Resultado. Valencia, 9 de Enero de 2006 **http://www.face.uc.edu.ve/deparmate/homotecia/09-01-06.htm**

DÍAZ-BARRIGA, ***Frida et all. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, México: McGraw-Hill, 2005.***

FUNDAR (Fundación Educacional Arauco) (2001). ***¿CÓMO HACER GUÍAS DIDÁCTICAS?*****. Tirua. Chile. Pagina 3**

GODINO, J. y BATANERO, M. (1996). ***Pasos hacia una Teoría del Significado y la Comprensión en Didáctica de las Matemáticas. Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática*****. Departamento de Didáctica de la Matemática- Universidad de Granada. España**

Grisolía, M. (Abril, Mayo, Junio, 2007). ***Nuevas Concepciones en enseñanzas de las ciencias; una experiencia de investigación_accion*****. Educere. 11(37) 333-338**

Hernández, R.; Fernández, C. y Batista, P (2003). ***Metodología de la Investigación*****. México: Mc Gran Hill**

Isoda M. y Olfos, R. 2009. ***El Enfoque De Resolución De Problemas En La Enseñanza De La Matemática A Partir Del Estudio De Clases*****. Ediciones Universitarias de Valparaíso de la Universidad Católica de Valparaíso.Chile**

López B., Costa N. ***Modelo de enseñanza aprendizaje centrado en resolución de problemas, fundamentación, presentación e implicaciones educativas*****. Enseñanza de las ciencias, Barcelona, volumen 14, número 1, 1996, pgs. 45.**

Mendomatica revista digital revista número 21 octubre 2010 sección temas didáctica pag. 9

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2007) ***Subsistemas de Educación Secundaria Bolivariana: Liceos Bolivarianos.*** **Edición: Fundación Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia. Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación**

Parra, C. y Saiz, I. ***Didáctica de matemáticas Aportes y reflexiones*****. Editorial Paidós Ecuador. 1997, Buenos Aires (Argentina)**

Polya G. Cómo ***plantear y resolver problemas*****. Editorial Trillas. Decimo quinta expresión 1989. Impreso en México**

Pomés Ruiz, J. 1991. ***La metodología de resolución de problemas y el desarrollo cognitivo: un punto de vista postpiagetiano*****. Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol. 9, No. I; pgs. 7 8 - 8 2 universidad Autónoma de Barcelona (España)**

REVISTA EDUCACION Y PEDAGOGA. VOL. X N° 21 MAYO - AGOSTO 1998. ***La creatividad y la resolución de problemas como bases de un modelo didáctico alternativo*****, p. 149. Universidad de Antioquia - Facultad de Educación.**

Rico, L. Sierra, M. y Castro, E. (2000). ***Didáctica de la matemática*****. En, L. Rico y D. Madrid, Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares. Madrid: Síntesis.**