



Universidad de los Andes
Centro de Física Fundamental
Area de Caos y Sistemas Complejos

Supresión de Escape en Redes de Repulsores Caóticos

www.bdigital.ula.ve

Trabajo de grado presentado ante la ilustre
Universidad de Los Andes

como requisito parcial para optar al Título de:

Licenciado en Física

Presentado por:

Br. Matías J. Agelvis D.

Tutor:

Dr. Mario Cosenza

Mérida, Julio 2018

Resumen

En la presente tesis investigamos un novedoso método para estabilizar el caos transitorio en sistemas espacialmente extendidos, este sistema es capaz de manera autónoma, sin la necesidad de que se aplique control externo en los parámetros, variables de estado o aplique ruido y control al sistema. Este método de control se basa en la propiedad emergente de autorregulación inducida por la interacción entre los elementos.

www.bdigital.ula.ve

Índice general

Resumen	I
Introducción	1
1. Repulsores, Escape y Caos Transitorio	3
1.1. Repulsores	4
1.2. Crisis	6
1.3. Caracterización del Caos Transitorio	7
1.3.1. Construcción los conjuntos repulsores	7
1.3.2. Tiempo de Escape	9
1.3.3. Medida Natural	10
1.3.4. Medida Invariante Condicional	11
1.4. Caos Transitorio en Sistemas Multidimensionales	11
1.4.1. Caos Supertransitorio	12
1.5. Control de Caos Transitorio	13
1.5.1. Método tipo OGY	13
1.5.2. Método de Control Parcial	14
1.5.3. Método de Forzamiento Periódico	15
2. Control Autónomo de Escape en Redes de Mapas Acoplados	17
2.1. Redes de Mapas Repulsores Globalmente Acoplados	18
2.1.1. Frontera de Estabilidad	19
2.1.2. Campo medio del sistema	22
2.2. Modelo	23
2.3. Control Autónomo de Escape con Otros Mapas Locales	26
2.4. Influencia de la Topología	27
2.4.1. Condiciones Mínimas para el Control Autónomo de Escape	28

3. Control Autónomo de Escape en Sistemas Multidimensionales	30
3.1. Mapa Lozi	30
3.2. Sistema de Linz - Sprott	32
Conclusiones	34

www.bdigital.ula.ve

“Sed fortuna, ..., Parvis momentis magnas rerum commutationes efficit.”

Julio Cesar

Introducción

Caos Transitorio es el nombre que se le da al caos con tiempo de vida finito, ya sea porque el este precede al comportamiento ordenado o porque las trayectorias escapan a un punto fijo en infinito, el colapso de la dinámica caótica al estado asintótico suele ser abrupto. En muchos sistemas no se puede estar completamente seguro de que las señales que aparentan ser caóticas estables no sean solo un estado transitorio con tiempo de vida mucho mayor al que jamás se ha estudiado.

El estudio de sistemas dinámicos suele centrarse en el estado asintótico de estos, aunque el estado transitorio puede ser más relevante en términos de estudio, control y predicción.

El comportamiento caótico transitorio se presenta de muchas maneras, un ejemplo es el comportamiento de una red eléctrica previa al colapso, cuando la red eléctrica se sobrecarga todos los voltajes asociados a esta varían de manera aleatoria antes de caer al cero [1,2]. Debido a la creciente demanda de electricidad a nivel mundial el estudio de la operación de la redes eléctricas cerca de sus límites operacionales ha ganado mucho interés.

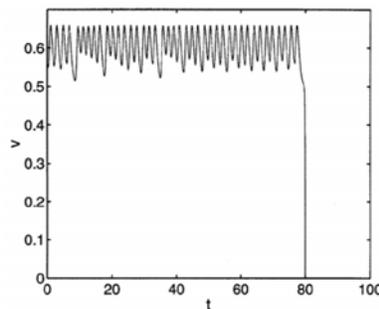


Figura 1: Ejemplo de colapso de voltaje en red eléctrica por sobrecarga, extraída de [1]

Otra situación en la que se presenta el caos transitorio es en los ecosistemas, donde la población de las especies varia dependiendo unas de las otras y de dónde se encuentren en la cadena alimenticia, debido al gran número de variables asociadas el sistema se comporta caóticamente, en el caso de que alguna especie se extinga su población cae a un punto fijo en cero [3].

Se han desarrollado varios métodos para la estabilización de caos transitorio, como una variación del método OGY por Grebogi y Lai en 1994, el método de control parcial de Sanjuan y Yorke en 2008 [4], y en 2018 Kurths y colaboradores utilizaron el forzamiento periódico para extender el tiempo de vida del estado transitorio [5].

En la presente tesis investigamos un novedoso método para estabilizar el caos transitorio en sistemas espacialmente extendidos, este método sería capaz de hacerlo de manera autónoma, sin la necesidad de que se aplique control externo en los parámetros, variables de estado o aplique ruido y control al sistema. Este método de control se basaría en la propiedad emergente de autorregulación inducida por la interacción entre los elementos.

En el Capítulo 1, hacemos una revisión de las bases de estudio del caos transitorio y de los principales métodos para su estabilización.

El Capítulo 2 presentamos la autorregulación por acoplamiento en mapas unidimensionales, calculamos las nuevas fronteras de estabilidad en función del número de nodos de la red y cómo reacciona el sistema dentro de estas, adicionalmente derivamos dos regiones de inestabilidad en las que el escape no puede ser controlado por el sistema autónomo. Posteriormente estudiamos cómo afecta la topología a la aparición de la autocontrol del escape, y si es viable transformar este en un método de control en el cual el acoplamiento se aplica con una probabilidad. Finalmente desarrollamos un modelo simplificado del fenómeno para desarrollar predicciones teóricas de los límites de este.

En el Capítulo 3 extendemos nuestro método de control autónomo de escape a sistemas multidimensionales para demostrar su universalidad.

El Capítulo 4 contiene las Conclusiones del presente trabajo.

“Confidence is what you have before you understand the problem.”

Woody Allen

Capítulo 1

Repulsores, Escape y Caos Transitorio

El fenómeno de caos transitorio fue observado por primera vez en los años 40 en osciladores de Van Der Pol forzados [6], donde el caos transitorio fue considerado como un comportamiento errático no deseado, previo a la estabilización en una órbita periódica, sin explicación aparente. A finales de los años 70 se publicaron en un breve lapso varios artículos que reportaban una transición de turbulencia a comportamiento periódico en las ecuaciones de Lorenz. El primer estudio formal que se hizo del caos transitorio fue realizado por Shimizu y Morioka [7] (Fig. 1.1), seguido por Kaplan y Yorke [8], Yorke y Yorke [9] y Pianigiani y Yorke [10], quienes estudiaron por primera vez el escape de las trayectorias en mapas unidimensionales.

En la Figura 1.1 se ve el fenómeno de caos transitorio en las ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} = \sigma(r - 1)x(x^2 - 1 + m), \\ \dot{m} = -bm + (2\sigma - b)x^2, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde σ, b y r son los parámetros.

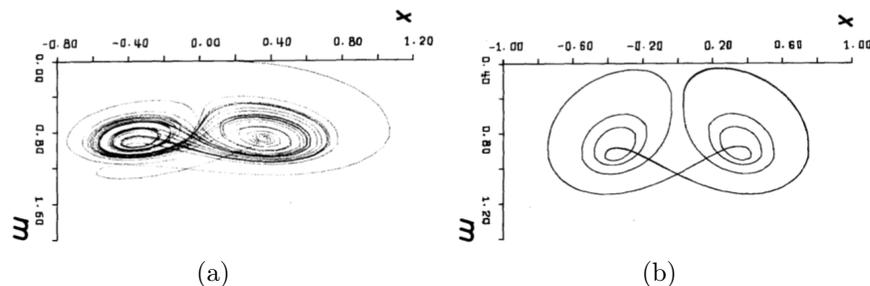


Figura 1.1: Trayectorias en el plano (x, m) de las ecuaciones 1.1 con $\sigma = 16$, $b = 4$, $r = 102.7997$ y condiciones iniciales $x(0) = m(0)0$ y $\dot{x}(0) = 16$ (a) Primeros 3000 pasos tiempo. (b) Sigüentes 3000 pasos de tiempo de la integración.

1.1. Repulsores

El escape de las trayectorias a infinito en sistemas dinámicos se puede ilustrar en mapas unidimensionales. Como se reportó en [10], el escape se debe a que para ciertos valores del parámetro, la función que define el mapa sale de su rango de definición, por lo tanto los iterados que siguen esta dinámica eventualmente serán mapeados fuera de la cuenca de atracción. Una vez fuera de esta cuenca, todas las trayectorias tienden a un punto fijo en infinito. Tomando el mapa tienda como ejemplo tenemos:

$$x_{t+1} = \frac{a}{2}(1 - |1 - 2x_t|), \quad (1.2)$$

donde $x_t \in [0, 1]$, t es un tiempo discreto ($t = 0, 1, 2, \dots$) y a es el parámetro del mapa. La figura 1.2 muestra este mapa para dos valores distintos de a .

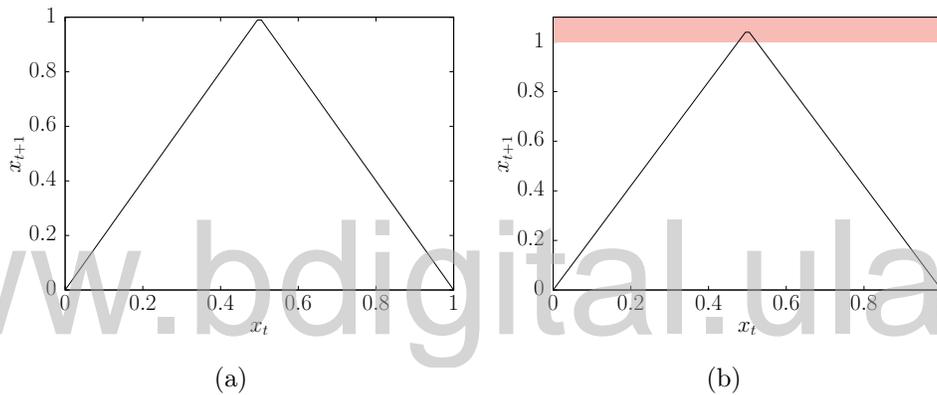


Figura 1.2: Mapa tienda para (a) $a = 2$, (b) $a = 2.1$, en gris la región que no pertenece a la cuenca de atracción.

Se denomina caos transitorio a la separación de trayectorias cercanas previa a la llegada a un estado estacionario estable, ya sea un punto fijo en infinito, (escape, ver Figura 1.3) o una órbita periódica acotada. La Fig. 1.3 muestra el fenómeno de caos transitorio para los iterados del mapa tienda con el parámetro $a = 2.1$.

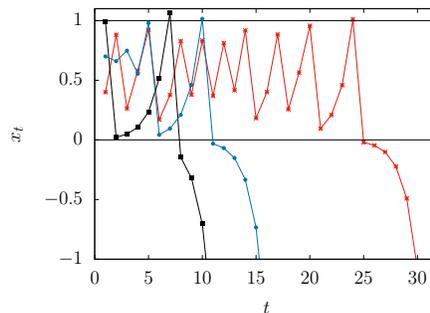


Figura 1.3: Trayectorias del mapa tienda con $a = 2.1$ exhibiendo escape. Condiciones iniciales: Circulo (Azul) $x_0 = 0.75$, Asterisco (Rojo) $x_0 = 0.4$, Caja (Negro) $x_0 = 0.99$.

Como se puede ver en la figura 1.2(b), el segmento del mapa que sale del intervalo $[0, 1]$ define una región para la cual todas las trayectorias escapan de la cuenca de atracción en un iterado; similarmente, todas las trayectorias cuyos iterados caigan en esta región también escapan, esta vez en dos iterados; siguiendo esta construcción se concluye que el tiempo de vida de una trayectoria está determinada por el nivel de construcción n en el que se encuentra en el repulsor. Esto se ilustra en la figura 1.4 se muestra el tiempo de vida en función de la condición inicial para el mapa tienda con $a = 2.1$. El conjunto repulsor corresponde a las regiones blancas en esta figura, mientras que el semiatractor está dado por las regiones negras. El semiatractor representa las órbitas que permanecen durante mayor tiempo en la cuenca de atracción dada por el intervalo $[0,1]$, y posee estructura fractal, como se muestra en la Figura 1.4.

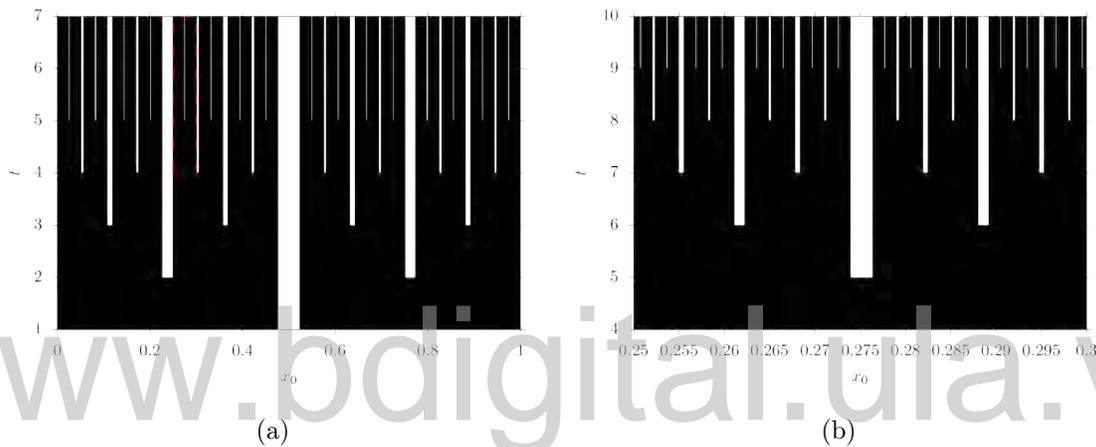


Figura 1.4: Tiempo de vida en función de las condiciones iniciales en el intervalo $[0, 1]$. Las regiones blancas corresponden al conjunto repulsor y marcan los intervalos donde las trayectorias escapan; su altura representa el tiempo que esas trayectorias pasan en la cuenca de atracción. Las regiones negras corresponden al conjunto semiatractor, y representan las trayectorias que permanecen más tiempo en la cuenca de atracción. (a) Construcción desde el nivel $t = 1$ hasta el $t = 7$. (b) Magnificación de la región marcada dentro del rectángulo rojo en (a); niveles de construcción desde $t = 4$ hasta $t = 10$.

En la referencia [11] se separa la cuenca de atracción en dos conjuntos, el conjunto semiatractor, donde los iterados pueden permanecer acotados por un tiempo considerable, y el conjunto repulsor, como la región en la que los iterados sobreviven poco tiempo antes del escape. Básicamente el semiatractor se refiere a niveles de construcción del repulsor muy altos, y el repulsor a los niveles más bajos de construcción. Como dijimos, el conjunto semiatractor es un conjunto fractal tipo Cantor el cual, para caso particular del mapa tienda, posee una dimensión fractal dada por

$$D_f = \frac{\ln 2}{\ln a}. \quad (1.3)$$

La estructura de la cuenca de atracción en función del parámetro a se muestra en la figura 1.5.

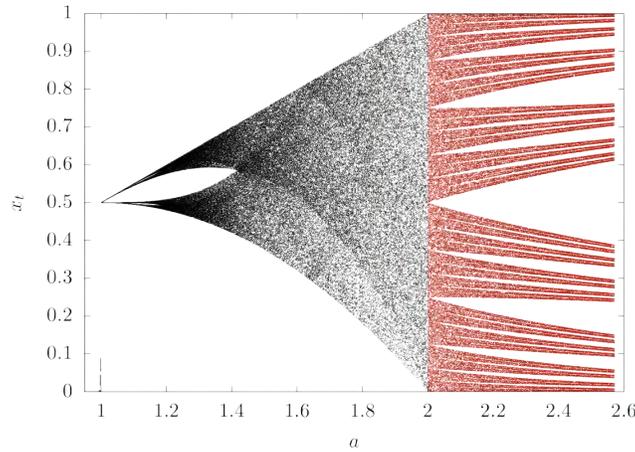


Figura 1.5: Diagrama de bifurcación del mapa tienda en función del parámetro a . En negro el atractor, en rojo el semiattractor. El conjunto repulsor está construido hasta el nivel 16, mucho más fino que la resolución de la imagen.

1.2. Crisis

Se denomina Crisis a los cambios cualitativos repentinos de un atractor caótico, causados por la colisión de una órbita inestable con el atractor caótico. El término *crisis* fue introducido por Ott, Grebogi y Yorke en 1982 [12], y posteriormente en 1983 por ellos mismos [13]. Para ilustrar el fenómeno de crisis usamos el mapa logístico definido por:

$$x_{t+1} = 1 - ax_t^2, \quad (1.4)$$

donde $x_t \in [-1, 1]$

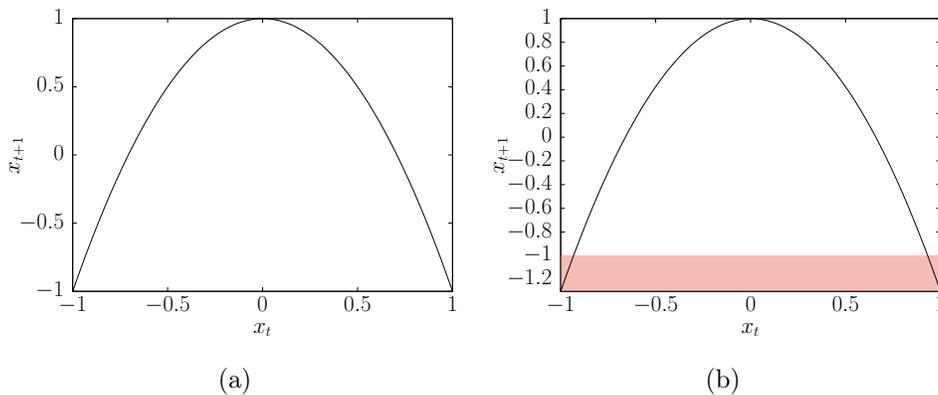


Figura 1.6: Mapa logístico con parámetro (a) $a = 2$, (b) $a = 2.3$, en rojo se indica la región fuera de la cuenca de atracción.

Ott, Grebogi y Yorke caracterizaron en *crisis* dos tipos básicos de crisis:

Crisis Interna, esta ocurre cuando una órbita inestable colisiona con el atractor caótico dentro de su cuenca de atracción, incrementando el tamaño del atractor. Un ejemplo ocurre en la ventana

de periodo tres del mapa logístico, en la Figura 1.7(b) donde tres puntos fijos estables y tres puntos fijos inestables son generados por bifurcaciones tangentes. La Figura 1.7(b) muestra que los puntos fijos inestables, al entrar en las regiones caóticas, inmediatamente repelen la trayectoria de manera que las regiones entre las bandas caóticas también se llenan con iterados caóticos.

Crisis Externa, también se le llama crisis de frontera; ocurre cuando, a medida que se varía el parámetro de control, una órbita inestable coincide con la frontera de su cuenca de atracción; cuando se sigue variando el parámetro una órbita inestable colisiona con el atractor en la frontera de la cuenca de atracción, lo que destruye el atractor, y lo sustituye por un par de conjuntos repulsor y semiatractor. Después de la crisis exterior el caos se manifiesta en la forma de trayectorias caóticas con tiempo de vida finito previas al escape de estas hacia un punto fijo en infinito u otra cuenca de atracción.

Ambos tipos de crisis se presentan gráficamente en la figura 1.7(b)

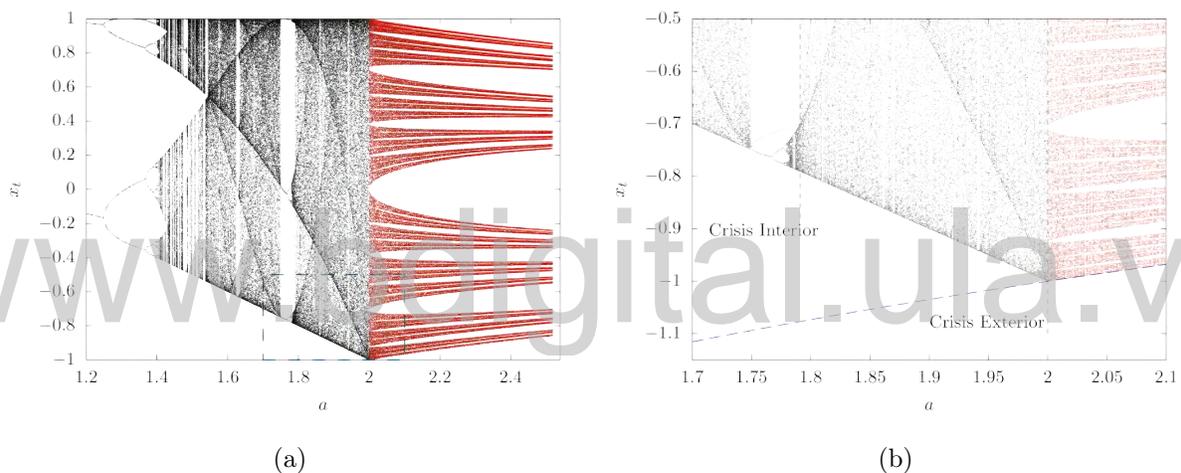


Figura 1.7: (a) Diagrama de bifurcación del mapa logístico en función del parámetro a , en negro el atractor, en rojo el semiatractor. El conjunto repulsor está construido hasta el nivel 16, mucho más fino que la resolución de la imagen. (b) Aumento del rectángulo azul del diagrama de bifurcación 1.7(a). Se muestra una crisis interior, donde la órbita inestable que la causa se representa con la línea punteada amarilla, y una crisis exterior, donde la órbita inestable se muestra como la línea punteada azul.

1.3. Caracterización del Caos Transitorio

1.3.1. Construcción los conjuntos repulsores

Método del Conjunto

En este método fue desarrollado por Kantz y Grassberger en 1985 [11]. Consiste en seguir la evolución de un conjunto de trayectorias y seleccionar las que permanecen acotadas. Se escoge una región R del espacio de fase en la que se supone que existe un par semiatractor - repulsor. Dentro

de esta región se distribuyen uniformemente N_0 condiciones iniciales y se iteran. Se define una región Γ tal que cubra toda la cuenca de atracción ($R \subseteq \Gamma$) y se descartan todas las trayectorias que hayan escapado Γ antes de un tiempo mínimo t_{min} , entonces se toman las trayectorias de mayor vida como una aproximación del conjunto semiatractivo; para asegurarse de que solo se tomaron las trayectorias cercanas al semiatractor se descartan los primeros t_1 puntos ($t_1 > t_0$) y se desprecian los últimos t_2 puntos para asegurarse de que no se ha llegado al repulsor.

Si se desea tener M trayectorias después de t_{min} iterados, se debe usar $N_0 \approx Mt_{min}e^{kt_{min}}$. Un ejemplo del semiatractor del mapa Lozi construido mediante este método se presenta en la Figura 1.8.

Las ecuaciones del Mapa Lozi son

$$x_{t+1} = 1 - \alpha|x_t| + y_t \tag{1.5}$$

$$y_{t+1} = \beta x_t \tag{1.6}$$

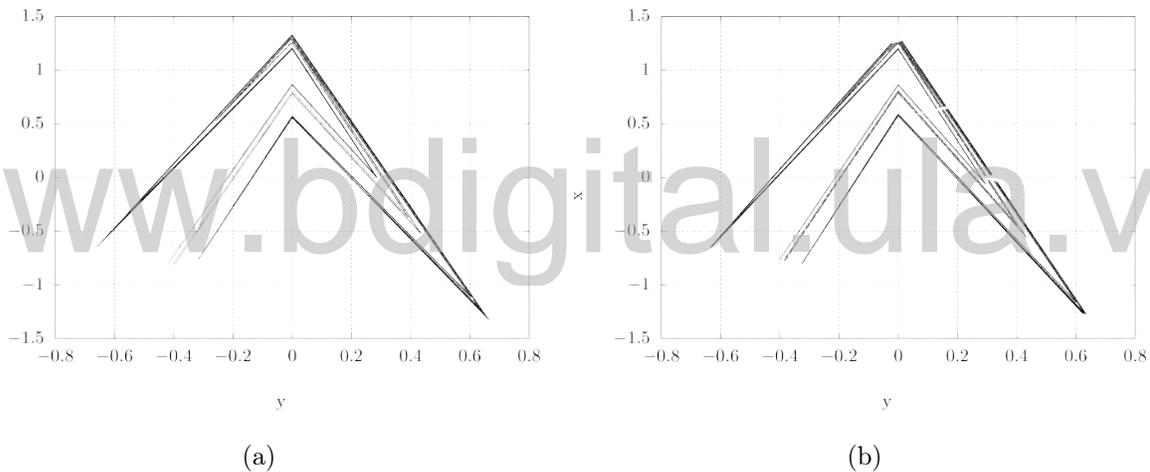


Figura 1.8: Semiatractores del mapa Lozi con $\beta = 0.5$, calculados con el método del conjunto con $t_{min} = 20$ (a) Con $\alpha = 1.75$ no hay escape, el atractor es estable. (b) Con $\alpha = 1.8$ hay escape, es un semiatractor.

Método del Rociador

Este método fue desarrollado por Hsu, Ott, Grebogi en 1988 [14]; es una variante del método del conjunto, con la ventaja de que permite calcular la cuenca de atracción y los conjuntos semiatractivos y repulsivos.

Se comienza distribuyendo N_0 condiciones iniciales uniformemente sobre la región R , se escoge un mínimo número de iterados t_{min} y solo se conservan las trayectorias que no escapen R en ese tiempo. Esta vez la evolución de las trayectorias se detiene cuando llegan a t_{min} sin haber escapado; para que una trayectoria sobreviva ese tiempo su condición inicial debe formar parte de la cuenca de atracción y que sus puntos finales (en t_{min}) estén distribuidos entre el semiatractor

y el repulsor. Los puntos en la mitad ($t = t_{min}/2$) se toman como parte del semiatractor (ya que están en el nivel $t_{min}/2$ de construcción del repulsor). En general los puntos iniciales, medios y finales de una trayectoria con tiempo de vida al menos t_{min} se toman como la cuenca de atracción, conjunto semiatractor y conjunto repulsor, respectivamente. Para estudiar todos los conjuntos en su totalidad se debe escoger $R = \Gamma$. Un ejemplo de este método se presenta en la Figura 1.9. Ya que no se debe seguir toda la evolución de una trayectoria previa a su escape, este método ofrece mejor rendimiento computacional que el método del conjunto.

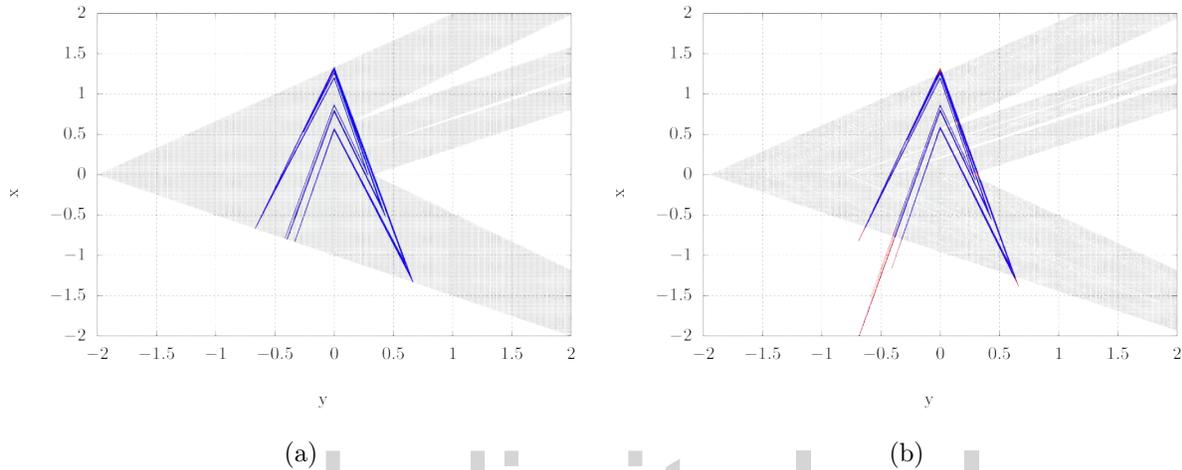


Figura 1.9: Cuencas de atracción (en gris), Conjunto atractivo (en azul) y conjunto repulsivo (en rojo) para el mapa Lozi con $\beta = 0.5$, calculadas usando el método del rociador con $t_{min} = 16$ y (a) $\alpha = 1.75$ (parámetro crítico para la crisis exterior), (b) $\alpha = 1.8$ (parámetro posterior a la crisis exterior).

1.3.2. Tiempo de Escape

Como hemos comentado, cada condición inicial tiene un tiempo de vida definido, tal como se muestra en la Figura 1.10(a). El tiempo de escape se define como la probabilidad de que una condición inicial aleatoria dentro de la cuenca de atracción permanezca dentro de esta un cierto tiempo. Yorke y Yorke en 1979 [9] y Kadanoff y Tang en 1984 [15] encontraron que la probabilidad de que una trayectoria no haya escapado de Γ después de un tiempo t se comporta como

$$P(t) \propto e^{\kappa t}, \quad (1.7)$$

donde κ es la velocidad de escape del sistema, a la cual se le suele asociar el tiempo de vida promedio, definido como

$$\tau \approx \frac{1}{\kappa}. \quad (1.8)$$

Un ejemplo de este comportamiento en el mapa tienda se muestra en la Figura 1.10(b).

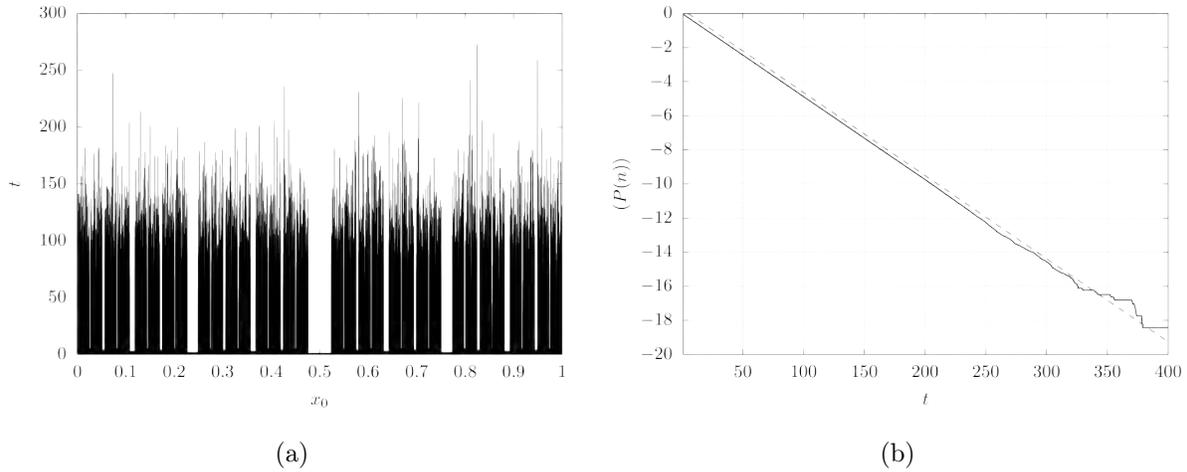


Figura 1.10: Para el mapa tienda con $a = 2.1$ (a) Tiempo de vida para cada condición inicial, distribuidas uniformemente con precisión de 1^{-8} . (b) Logaritmo de la probabilidad de que una condición inicial aleatoria se encuentre en la cuenca de atracción, la línea punteada representa la pendiente de la distribución con $\kappa \simeq 0.04875$.

En 1990 Cosenza y Swift [16] estudiaron $\kappa(\epsilon)$ (donde ϵ es la diferencia entre el parámetro y el parámetro crítico de la crisis de exterior $\epsilon = a - a_c$), y lograron determinar de manera analítica $\kappa(\epsilon)$ y $D_f(\epsilon)$ en función de ϵ y el orden del máximo z del mapa mediante el empleo de análisis multifractal.

1.3.3. Medida Natural

Fue definida como por Kantz y Grassberger en 1985 [11], se denota con μ , y mide que tan seguido una región del semiatractor es visitado por un conjunto denso de trayectorias, de manera práctica esto significa: qué tan probable es que las trayectorias transitorias visiten una caja de tamaño finito $B \ll 1$, lo que dará una aproximación del verdadero semiatractor en el espacio de fase. La Figura 1.11(b) muestra la medida natural (en negro) para el mapa de Henon, calculada realizando un histograma sobre el método del rociador.

Las ecuaciones del Mapa de Henon son

$$x_{t+1} = 1 - ax_t^2 + by_t \quad (1.9)$$

$$y_{t+1} = x_t \quad (1.10)$$

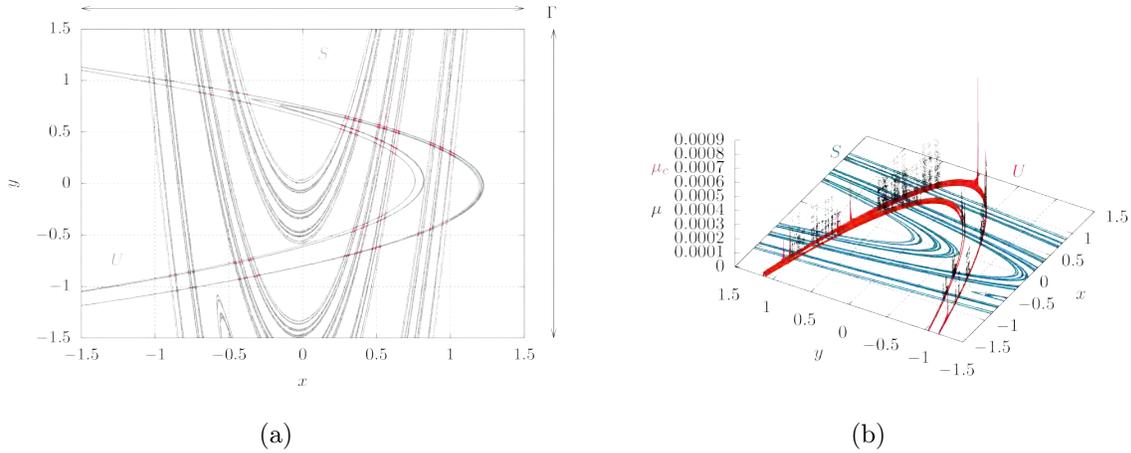


Figura 1.11: (a) Cuencas de atracción (en gris claro) marcada como S , Conjunto atractivo (en rojo) y conjunto repulsivo (en azul) marcada como U para el mapa de Henon con $a = 2$ y $b = 0.3$ y usando el método del rociador con $t_{min} = 16$. (b) Medidas natural μ (en negro) e invariante condicional μ_c (en rojo) y cuencas de atracción (en azul) marcada como S , Conjunto atractivo (en negro) y conjunto repulsivo (en rojo) marcada como U .

1.3.4. Medida Invariante Condicional

Esta fue introducida por Pianigiani y Yorke en [10], abreviada como μ_c . La medida invariante condicional se define sobre toda la cuenca repulsiva (conjuntos semiatractor y repulsor) y mide cómo se distribuyen las trayectorias sobre el conjunto repulsivo antes de escapar, para esto las trayectorias deben viajar ascendentemente por los niveles de construcción del repulsor, hasta converger en las regiones del primer nivel de construcción del repulsor, a través del cual escapan de la cuenca de atracción (o numéricamente la región Γ), las trayectorias cuentan con una pequeña región del espacio de fases para culminar su escape, ya que todas las trayectorias deben transitar por estas pequeñas regiones del espacio de fases, la medida invariante condicional cuantifica las regiones de escape, los picos están relacionados con los primeros niveles de construcción del repulsor. La medida natural μ puede ser considerada como la medida invariante condicional μ_c restringida a la intersección de la cuenca de atracción y la cuenca repulsiva.

1.11(b)

1.4. Caos Transitorio en Sistemas Multidimensionales

El caos transitorio se puede presentar en sistemas multidimensionales y en sistemas continuos en el tiempo. Los primeros ejemplos de caos transitorio fueron desarrollados en ecuaciones de tipo Lorenz; en la presente tesis utilizaremos las ecuaciones de Linz-Sprott, dadas por

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -az - y - |x| + 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

Estas ecuaciones pueden presentar escape a medida que se disminuye el parámetro a , como se muestra en la Figura 1.12(b)

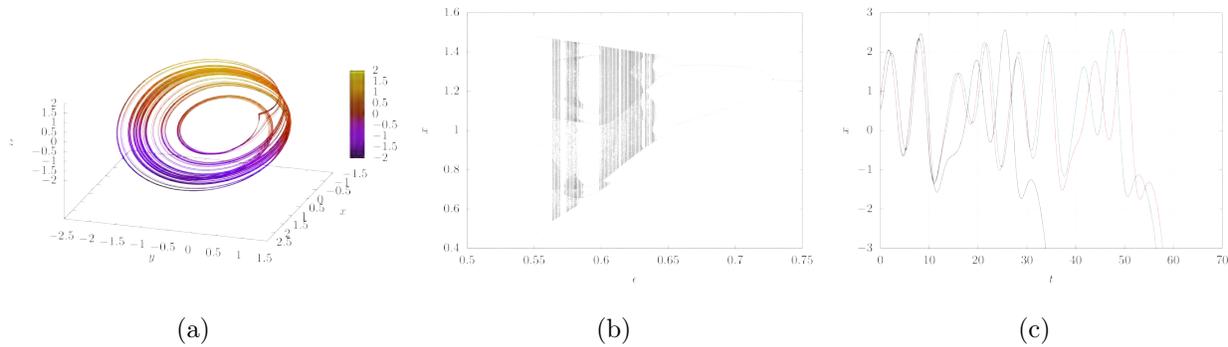


Figura 1.12: (a) Atractor de Linz-Sprott con $a = 5.8$. (b) Diagrama de bifurcación de los máximos locales de la variable x en las ecuaciones de Linz-Sprott. (c) Caos transitorio y escape de tres trayectorias en las ecuaciones de Linz-Sprott con $a = 5$.

En 2012, Ercsey-Ravasz y Toroczkai estudiaron los sudokus como mapas unidimensionales en dos dimensiones con ocho vecinos verticales y ocho vecinos horizontales y condiciones de contorno periódicas. Los autores tomaron el cambio de decisión sobre cual número tentativo va en una determinada casilla como la dinámica. Eventualmente cuando se llega a la solución final la dinámica se detiene. Este comportamiento lo relacionaron con la transición de caos transitorio (proceso de resolución) a un punto fijo (solución final correcta); encontraron que la dificultad del sudoku se puede determinar en función de la velocidad de escape [17].

Recientemente Sabarathinam y Thamilmaran [18] encontraron experimentalmente caos transitorio en sistemas continuos y espacialmente extendidos.

1.4.1. Caos Supertransitorio

Este fenómeno fue descubierto por Kaneko en 1990 [19] y ocurre en sistemas espacialmente extendidos. Para sistemas débilmente acoplados o en grafos con diámetro medio similar al tamaño del sistema, el tiempo que dura el régimen transitorio crece exponencialmente con el tamaño del sistema. Kaneko presentó estos resultados para una red unidimensional con condiciones de contorno periódicas y acoplamiento difusivo, definida como

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2}(f(x_t^{i+1}) + f(x_t^{i-1})), \quad (1.12)$$

donde $f(x)$ es el mapa logístico (Eq. 1.4), $i = 1, \dots, N$ donde N es el tamaño del sistema y ϵ es la fuerza del acoplamiento. Este sistema puede generar patrones espaciotemporales como los que se muestran en la Figura 1.13(a). En particular Kaneko encontró que el tiempo que duraba este régimen transitorio sigue la relación

$$t(\epsilon, N) \propto e^{\epsilon N}, \quad (1.13)$$

donde N es el tamaño del sistema, esto se puede ver en la Figura 1.13(b)

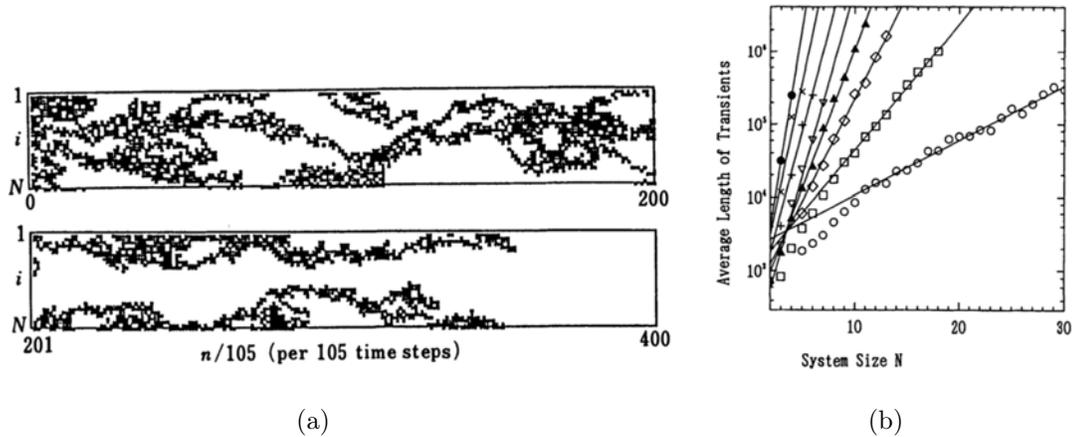


Figura 1.13: (a) Patrones espaciotemporales del sistema 2.16. Si $|x_t^i - x_{t+1}^i| > \delta$, el pixel es negro, en caso contrario se deja blanco, con $N = 30$, $\delta = 0.3$, $a = 1.752$ y $\epsilon = 0.001$. La duración del transitorio es de aproximadamente 31000 iterados. (b) Duración del transitorio en función del número de mapas de la red, imágenes extraídas de [20].

1.5. Control de Caos Transitorio

El control de caos transitorio se refiere a un procedimiento para evitar que una órbita caótica escape de su cuenca de atracción, o para evitar que alcance una órbita periódica estable. Se ha propuesto tres métodos principales para el control de caos transitorio, los cuales son

1.5.1. Método tipo OGY

El método OGY de control de caos fue desarrollado por Ott, Grebogi y Yorke en 1990 [21]. El método se basa en la variación de algún parámetro p_0 de la dinámica. Se debe escoger una órbita periódica inestable que pertenezca al atractor; cuando la trayectoria se aproxima a un punto de la órbita que se desea estabilizar, se modifica el valor del parámetro de forma tal que el parámetro perturbado p satisfaga $|p - p_0| < \delta$, para un δ pequeño. De esta manera se puede estabilizar una órbita periódica inestable permanentemente.

En 1994 Lai y Grebogi [22] estudiaron la capacidad de este método para estabilizar órbitas inestables en un semiatractor. El método OGY en este caso no puede estabilizar indefinidamente

una órbita periódica debido a la falta de estabilidad del sistema, pero el tiempo extra de vida que gana la trayectoria le da la oportunidad de volver a pasar por el vecindario de una de las órbitas pertenecientes al semiatractor y reiniciar el proceso, como se muestra en la Figura 1.14.

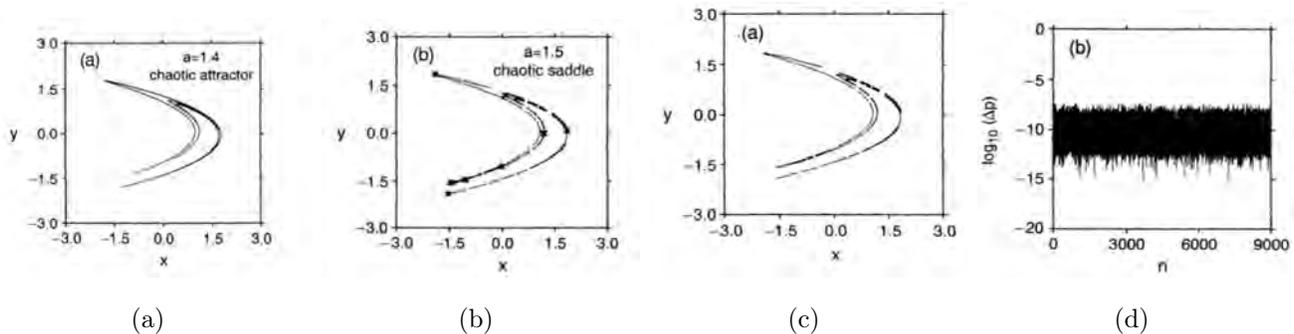


Figura 1.14: (a) Atractor del mapa de Henon con $a = 1.4$ y $b = 0.3$. (b) semiatractor del mapa de henon con $a = 1.5$ y $b = 0.3$, los puntos de la órbita de periodo 8 inestable se muestran con cruces. (c) Atractor restablecido por el método OGY del mapa de Henon con $a = 1.5$ y $b = 0.3$. (d) Logaritmo de la perturbación del parámetro requerida para estabilizar el caos transitorio, mostrado para cada iterado.

1.5.2. Método de Control Parcial

Sanjuan, Yorke y colaboradores en 2008 [4] introdujeron un nuevo método para evitar el escape de la trayectorias. Este consiste en la idea contra intuitiva de incluir una perturbación aleatoria de magnitud ξ (tal que $\xi \leq \xi_0$) a la dinámica y posteriormente a través de un control u (tal que $u \leq u_0 \leq \xi_0$) forzar la variable de estado q en dirección a lo que llaman un *conjunto seguro*. El corazón de este método consiste en encontrar el *conjunto seguro*, este corresponde a un subconjunto de la cuenca de atracción en la cual se ta seguro que la trayectoria esta lejos del escape, un esquema de este método se presenta en la figura 1.15. Para aplicar control parcial se redefine la dinámica como

$$q_{t+1} = f(q_t) + \xi_t + u_t, \tag{1.14}$$

donde ξ es la perturbación aleatoria y u control, la dinámica de este método se muestra en la Figura 1.16. El control u se puede aplicar de diferentes maneras, puede ser aplicado periódicamente [23], o cada vez que la trayectoria visita una región del espacio de fases [24], lo que permite extender este método a sistemas continuos [25], para todos los casos demuestran que la amplitud de $u < \xi_0$.

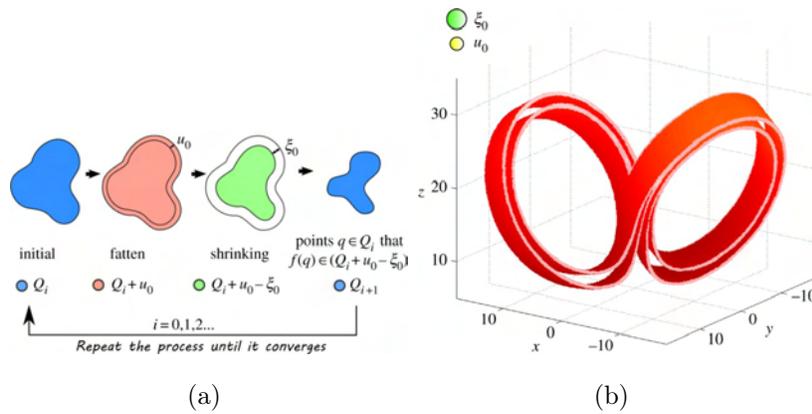


Figura 1.15: (a) Esquema de la construcción del conjunto seguro, la región inicial se agranda el máximo tamaño del control u_0 y se contrae el máximo tamaño del ruido ξ_0 , el proceso se repite hasta que esta región converge. (b) El conjunto seguro asintótico para las ecuaciones de Lorenz con $\Delta t = 1.8$, con $\xi_0 = 1.5$ (bola verde) y $u_0 = 1.0$ (bola amarilla).

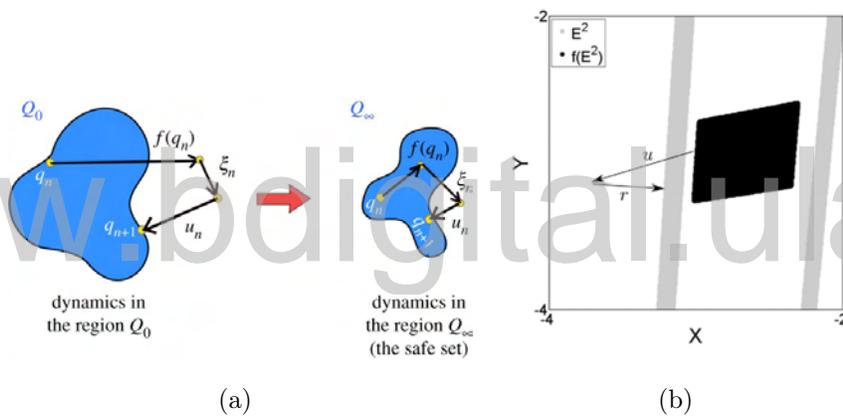


Figura 1.16: (a) Esquema del funcionamiento del método, primero se itera la variable, luego se aplica la perturbación aleatoria y finalmente se aplica el control para regresar la trayectoria al conjunto seguro. (b) El método de control parcial en funcionamiento para el mapa de Henon, la región gris (que pertenece al conjunto seguro) muestra las trayectorias que será mapeados a la caja negra (que no pertenece al conjunto seguro) y el accionar del método de control parcial, se aplica la perturbación aleatoria y el control para regresar la trayectoria al conjunto seguro.

1.5.3. Método de Forzamiento Periódico

En 2018 Maslennikov, Nekorkin y Kurths [5] estudiaron un sistema posterior a la crisis de exterior al cual le aplicaban un forzamiento periódico, este generalmente disminuye el tiempo de vida de la trayectoria, pero para los parámetros correctos de γ , ω y A puede incrementarlo, la dinámica que utilizaron es la siguiente

$$x_{t+1} = x_t + F_H(x_t) - \gamma t \quad (1.15)$$

donde F_H representa un mapa cúbico con una discontinuidad por la función Heaviside Θ

$$F_H(x) = x(x - 0.1)(1 - x) - 0.3\Theta(x - 0.45) \quad (1.16)$$

y donde el término de forzamiento periódico viene dado por

$$\gamma_t = \gamma_0 + A \sin(\omega t) \quad (1.17)$$

El nuevo sistema con forzamiento periódico sufre una crisis de exterior para $\gamma_{cr} \approx 0.0198$, así que por comodidad definen $\delta = \gamma - \gamma_{cr}$, ya que para $\gamma > \gamma_{cr}$ el atractor deja de existir, se concentran en los caos en los que $\delta \geq 0$, como se ve en la Figura 1.17, a pesar de esto el forzamiento periódico con $\delta > 0$ aun puede disminuir la velocidad de escape de la trayectoria.

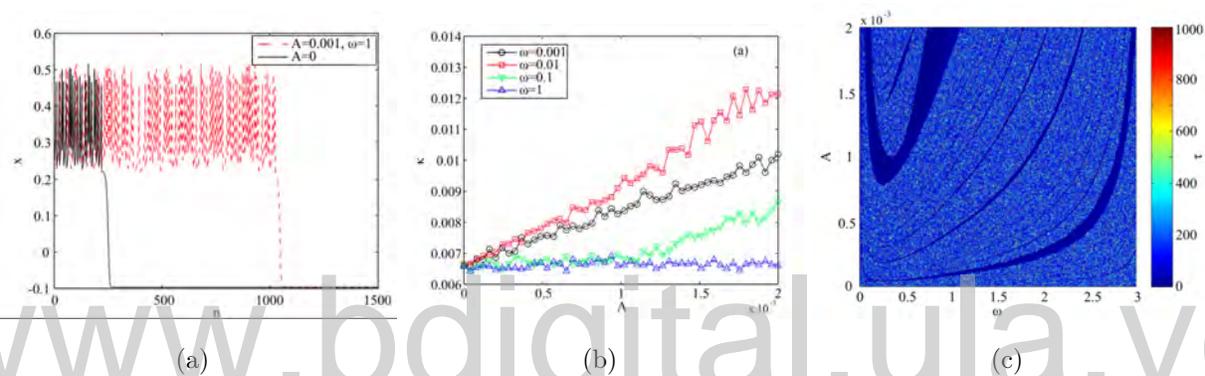


Figura 1.17: (a) Dinámica de x para el caso autónomo con $x_0 = 0.25$ (línea negra solida) y el caso forzado con $x_0 = 0.25$, $\gamma_0 = 0.001$, $A = 0.001$ y $\omega = 1$ (línea roja punteada). (b) Velocidad de escape en función de la amplitud para diferentes $\omega = 0.001, 0.01, 0.1, 1$, y $\gamma_0 = 0.001$ y $\delta = 0.001$ (c) Tiempo de vida para trayectorias con la misma condición inicial $x_0 = 0.25$ con $\gamma = \gamma_{cr} + 0.001$.

Capítulo 2

Control Autónomo de Escape en Redes de Mapas Acoplados

El estudio de los sistemas complejos ha revelado que el comportamiento colectivo emergente de un conjunto de elementos dinámicos no lineales puede ser diferente del comportamiento de un elemento aislado. Las observaciones recientes de comportamientos colectivos ordenados que surgen en una variedad de estos sistemas indican que estos comportamientos son, en general, no triviales y no pueden derivarse a partir del conocimiento de las propiedades de los elementos constituyentes, ni mediante simples consideraciones estadísticas. Fenómenos como sincronización caótica, formación de estructuras, organización jerárquica, patrones espaciales, comportamiento colectivo no trivial, formación de clusters y estados quiméricos, son ejemplos de comportamientos colectivos que emergen en muchos sistemas dinámicos.

En este contexto, proponemos investigar el comportamiento colectivo de una red de mapas acoplados que exhiben el fenómeno de escape y caos transitorio en su dinámica individual. Específicamente consideraremos una red de mapas globalmente acoplados definidos por

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon S_t, \quad (2.1)$$

donde $i = 1, \dots, N$, es un índice que distingue los N nodos del sistema, t es un tiempo discreto, ϵ es un parámetro que mide la intensidad del acoplamiento entre los elementos, $f(x)$ es la función que describa la dinámica local y S_t es el campo medio del sistema en el instante t , dado por

$$S_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j). \quad (2.2)$$

En este capítulo la dinámica local f corresponde a un mapa con un conjunto repulsor, cuyos

iterados escapan al infinito.

Como hemos mostrado en el capítulo anterior, la dinámica local de los mapas se vuelve inestable para valores del parámetro posteriores a la crisis exterior, por lo cual existe un valor crítico del parámetro local que impone una frontera que separa la dinámica estable de la inestable. También vimos que el tiempo de vida del estado transitorio depende de la diferencia entre el parámetro y el valor crítico para el cual ocurre la crisis de frontera.

2.1. Redes de Mapas Repulsores Globalmente Acoplados

Al acoplar elementos no lineales pueden surgir gran cantidad de comportamientos emergentes; pero la supresión del escape de las trayectorias no pareciera ser la mas evidente, ya que el escape de un elemento puede desencadenar el escape de todos aquellos con los que este conectado; en especial cuando la trayectoria escapa exponencialmente a un punto fijo en infinito.

Como ejemplo de un mapa cuya dinámica exhibe el fenómeno de escape, consideraremos el mapa tienda, definido por

$$x_{t+1} = \frac{a}{2}(1 - |1 - 2x_t|). \quad (2.3)$$

Este mapa presenta el fenómeno de escape para $a > 2$.

La Figura 2.1 muestra las trayectorias de un mapa tienda aislado y de un mapa tienda acoplado en el sistema 2.1 con parámetro $a = 2.2$, $\epsilon = 0.3$ y la misma condición inicial.

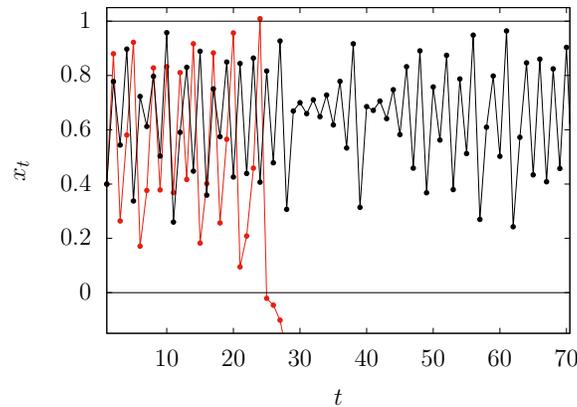


Figura 2.1: Trayectorias de: (Línea Roja) Mapa tienda aislado con $a = 2.2$ y $x_0 = 0.4$, y (Línea Negra) un mapa i en el sistema de mapas tienda globalmente acoplados con $a = 2.2$, $\epsilon = 0.3$, $N = 1000$ y $x_0 = 0.4$. Nótese que ambas trayectorias tienen la misma condición inicial.

La figura 2.1 sintetiza el hallazgo central y novedoso de la presente tesis: El fenómeno de escape y caos transitorio puede ser controlado de manera autónoma en un sistema de elementos acoplados, sin la necesidad de perturbar el parámetro de los elementos [22], de aplicar un forzamiento

periódico [5] o de aplicar un forzamiento de ruido y perturbar las variables [4, 23–25], esta nueva estabilidad causada por el acoplamiento entre las dinámicas es una propiedad emergente del sistema no estudiada previamente.

Si el valor del parámetro a del mapa tienda globalmente acoplado 2.1 está suficientemente alejado del valor crítico $a = 2$, los mapas eventualmente escapan del intervalo $[0, 1]$. Para valores del acoplamiento suficientemente altos, los mapas se sincronizan y la dinámica se reduce a la de un solo mapa aislado, el cual también escapa eventualmente, como muestra la Figura 2.2(b).

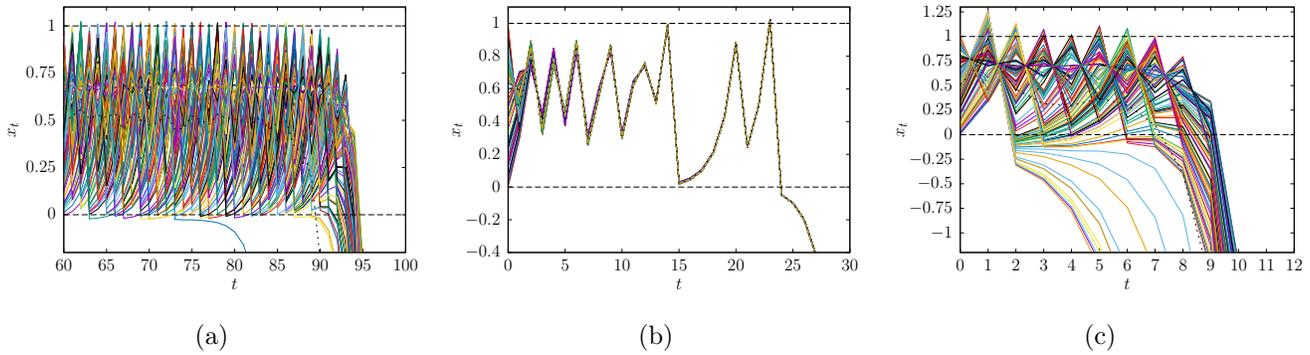


Figura 2.2: Trayectorias de $N = 100$ mapas tienda globalmente acoplados y su media (línea negra gruesa punteada) (a) $a = 2.1$, $\epsilon = 0.05$. (b) $a = 2.05$, $\epsilon = 0.6$. (c) $a = 3.2$, $\epsilon = 0.4$.

Llama la atención que en la Figura 2.2(a) los nodos pueden transitar momentáneamente fuera de la cuenca de atracción original de los mapas sin escapar; esto se debe a que una de las propiedades emergentes del sistema globalmente acoplado es que este cuenta con una cuenca de atracción mayor, que retrasa la aparición de la crisis exterior.

2.1.1. Frontera de Estabilidad

Las Figuras 2.1 y 2.2 sugieren que deben existir valores críticos de los parámetros del sistema a , ϵ y N , que definen el escape de los mapas. En tal sentido requerimos definir una condición de escape para los elementos del sistema globalmente acoplado, verificamos en cada iterado que su magnitud sea menor que 10 veces el tamaño de la cuenca de atracción del mapa aislado. Para los mapa tienda con $x_t \in [0, 1]$, empleamos el campo medio del sistema S_t , con la condición

$$|S_t| \leq 10. \quad (2.4)$$

Cuando esta condición no se cumple podemos estar razonablemente seguros de que todo el sistema está escapando y que no tiene posibilidades de retornar a su cuenca de atracción original.

La Figura 2.3 muestra la distribución de probabilidad de los estados x_i de los elementos del sistema globalmente acoplado para valores de parámetro $a = 3$, $\epsilon = 0.45$ y $N = 1000$, acumulada durante 10^5 iteraciones.

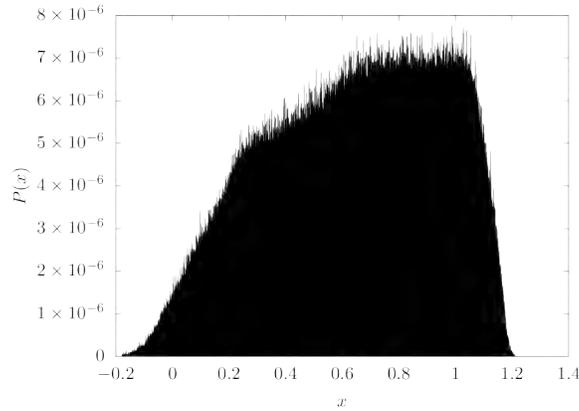


Figura 2.3: Distribución de probabilidad para mapas tienda globalmente acoplados, $N = 1000$, $a = 3$, 10^4 iterados de transiente, estudiando 1000 iterados y 100 realizaciones.

Esta Figura muestra que el tamaño del atractor en el sistema globalmente acoplado aumenta con respecto al intervalo $[0, 1]$ de un mapa tienda aislado. Se puede ver que la condición de escape $|S_t| < 10$ es completamente válida para definir la frontera de escape.

La Figura 2.4 muestra el tamaño crítico N_c para satisfacer la condición de escape 2.4 del sistema globalmente acoplado 2.1 en función de a ($a > 2$) y ϵ fijo. Para cada valor de a , incrementamos el número de elementos de uno en uno hasta que cumpla la condición $|S_t| < 10$.

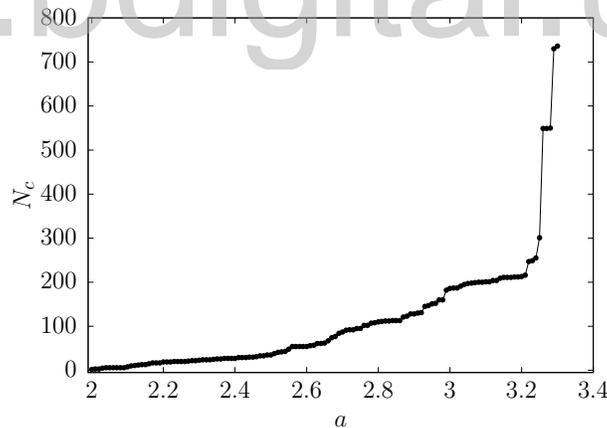


Figura 2.4: Tamaño crítico del sistema para estabilizar el caos transiente en mapas tienda globalmente acoplados, $\epsilon = 0.45$.

La Figura 2.5 muestra el comportamiento colectivo de escape del sistema globalmente acoplado Eq. 2.1 en el espacio de parámetro (ϵ, a) . Para cada punto (ϵ, a) , el tamaño crítico N_c para el cual se cumple la condición $|S_t| < 10$. La región de estabilidad, donde se cumple esta condición para tamaños $N_c \leq 10^3$, está limitada por dos fronteras, fuera de las cuales el sistema escapa para cualquier tamaño N .

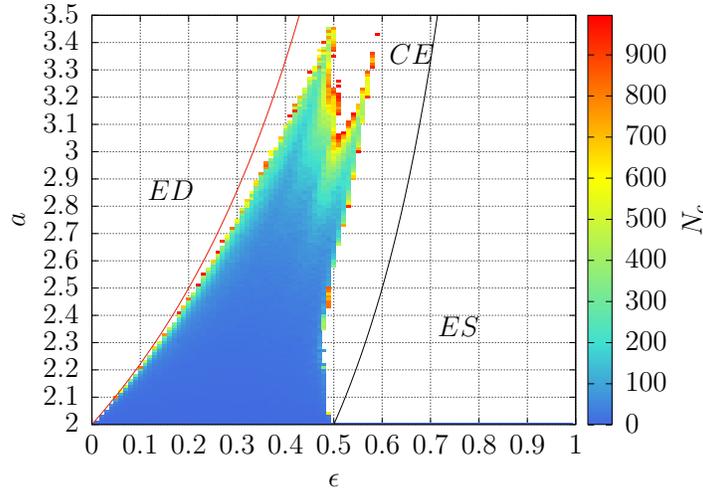


Figura 2.5: Comportamiento colectivo de escape para el sistema 2.1 con el mapa tienda, en el espacio de parámetros (ϵ, a) . Región de estabilidad del caos transitorio y de control de escape (CE) está indicada. Regiones de inestabilidad: ED corresponde a escape desincronizado de los mapas; ES indica que los elementos se sincronizan y escapan. Las líneas continuas (negras) corresponden a las fronteras teóricas de estabilidad $a(1 - \epsilon) = 2$ (ED) y $a(1 - \epsilon) = 1$ (ES), calculadas en la Sección 2.2. Para cada punto (a, ϵ) considerado, tomamos 5000 iterados, después de despreciar 10^5 transientes y 5 realizaciones de condiciones iniciales. El valor máximo considerado de N es 10^3 .

La región de escape a la derecha (ES) de la zona de estabilidad corresponde a un estado sincronizado del sistema; los N mapas se sincronizan y escapan al infinito, tal como se muestra en la Figura 2.2(b). Este estado sincronizado es independiente del tamaño N . La condición de sincronización para un sistema de mapas globalmente acoplados está dado por [20] y está dada por

$$|(1 - \epsilon)e^\lambda| < 1, \quad (2.5)$$

donde λ es el valor del exponente de Lyapunov local del mapa f . Para el mapa tienda $\lambda = \ln a$; para el mapa tienda $\lambda = \ln a$. Luego la frontera de sincronización para este sistema de mapas tienda globalmente acoplado corresponde a

$$|(1 - \epsilon)a| < 1 \quad (2.6)$$

En la región de escape a la izquierda (ED) de la zona de estabilidad, los mapas escapan de manera desincronizada, tal como se muestra en la Figura 2.2(c); esto ocurre para cualquier tamaño N del sistema. Las fronteras para ambas regiones de escape pueden ser calculadas analíticamente, con base en el modelo que introduciremos en la Sección 2.2, y se muestran como líneas negras en la figura 2.5.

La Figura 2.5 muestra, mediante código de colores, el tamaño crítico N_c en función de (ϵ, a) en la zona de control de escape (CE); el color blanco en esta zona indica que la condición numérica para la estabilidad requiere valores de $N_c > 1000$.

2.1.2. Campo medio del sistema

Adicionalmente estudiamos el comportamiento del campo medio S_t en el espacio de parámetros (a, ϵ) del sistema. La figura 2.6(a) muestra el valor promedio de $\langle S_t \rangle$, calculado con 5000 iterados, despreciando 10^5 transientes, y 5 realizaciones de condiciones iniciales, con $N = N_c$. La figura 2.6(b) muestra la correspondiente dispersión del valor medio S_t en el espacio de parámetros (a, ϵ) .

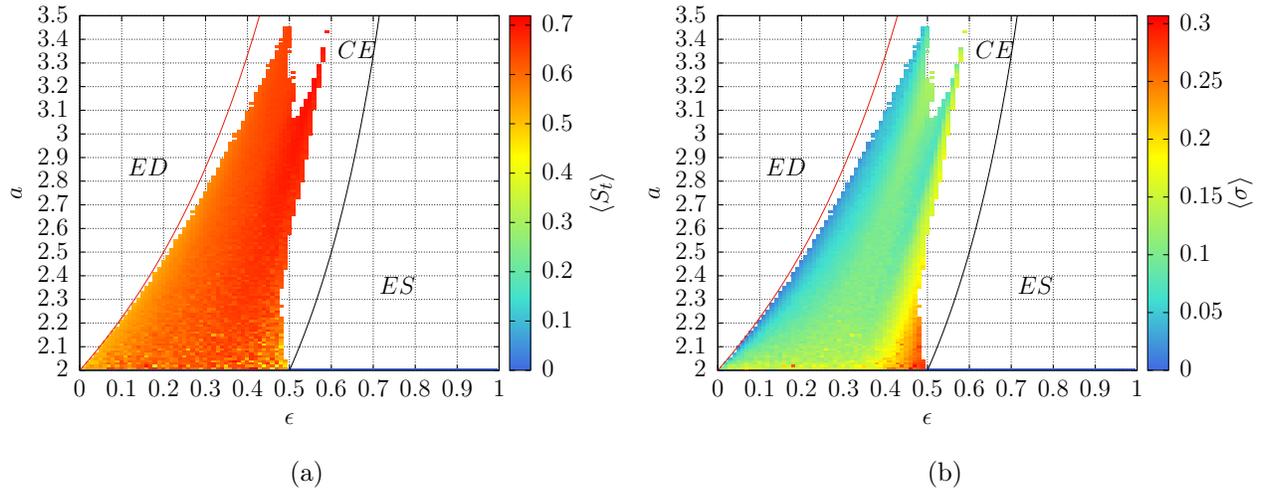


Figura 2.6: (a) Valor promedio de $\langle S_t \rangle$, calculado con 5000 iterados, despreciando 10^5 transientes, y 5 realizaciones de condiciones iniciales, con $N = N_c$. (b) Desviación estándar de la media S_t , calculada con $N = N_c$, estudiando 5000 iterados, despreciando 10^5 de transiente y 5 realizaciones de condiciones iniciales.

La figura 2.7(a) muestra el valor de $\langle S_t \rangle$ en función del tamaño del sistema para valores fijos de los parámetros a y ϵ . Nótese que el campo medio alcanza un valor asintótico a medida que aumenta N . La Figura 2.7(b) desviación estándar de $\langle S_t \rangle$ en función de N para valores fijos de a y ϵ ; la desviación estándar sigue la ley de los grandes números, como es de esperarse.

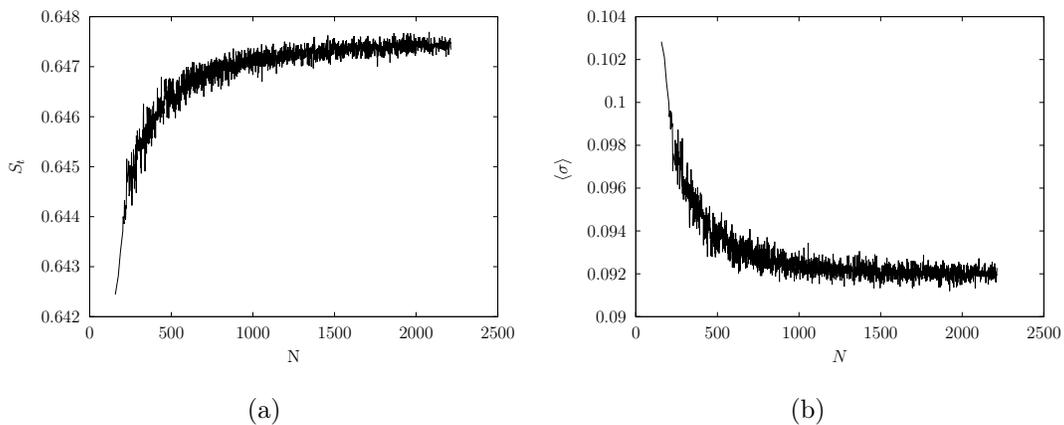


Figura 2.7: (a) $\langle S_t \rangle$ en función del tamaño del sistema. (b) Desviación estándar de $\langle S_t \rangle$. Ambas para mapas tienda globalmente acoplados, $a = 3$, $\epsilon = 0.45$, 50000 iterados de transiente, 50000 Iterados, 3 realizaciones de condiciones iniciales.

La Figura 2.8(a) muestra el diagrama de bifurcación de un mapa en el sistema Eq. 2.1, en función del parámetro ϵ . La Figura 2.8(b) muestra el diagrama de bifurcación del campo medio del sistema en función del parámetro ϵ .

Un ejemplo de los comportamientos que sigue la media en esta nueva frontera de estabilidad se presenta en las Figuras 2.8(b).

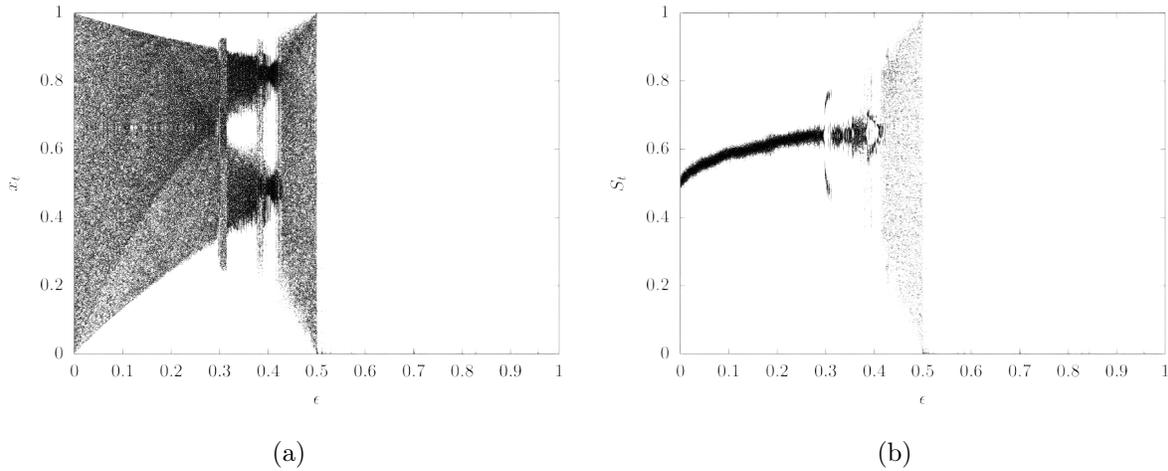


Figura 2.8: (a) Diagrama de bifurcación de un mapa en función de ϵ , mapas tienda globalmente acoplados, $N = 1000$, $a = 2$, 10^3 iterados, despreciando 10^5 iterados de transiente. (b) Diagrama de bifurcación de $\langle x \rangle_t$ en función de ϵ , $N = 1000$, $a = 3$, 10^3 iterados, despreciando 10^5 iterados de transiente.

2.2. Modelo

Una interacción global en un sistema ocurre cuando todos sus elementos están sujetos a un campo o a una influencia común, un campo global puede consistir en un agente externo actuando sobre los elementos del sistema, como en un sistema forzado; o puede originarse a partir de la interacción entre los elementos, en cuyo caso hablamos de un sistema dinámico autónomo.

A nivel local, cada mapa en el sistema autónomo globalmente acoplado Eq.2.1 puede ser visto como sujeto a un campo que eventualmente induce un comportamiento colectivo en el sistema. Luego, bajo ciertas condiciones la dinámica local en el sistema globalmente acoplado puede ser comparable a la dinámica de un simple mapa forzado por un agente externo en la forma

$$x_{t+1} = (1 - \epsilon)f(x_t) + \epsilon g(y_t), \quad (2.7)$$

$$y_{t+1} = g(y_t), \quad (2.8)$$

donde x_t es el estado del mapa forzado en un tiempo discreto t , f es la misma función que describe la dinámica local en el sistema Eq. 2.1, y la función $g(y_t)$ expresa la influencia de la señal externa y_t .

En general una analogía entre un sistema autónomo globalmente acoplado 2.1 y un mapa forzado 2.8, surge cuando la evolución temporal del capo medio S_t es idéntica a la evolución de la función $g(y_t)$ [26], entonces, las correspondientes dinámicas locales en ambos sistemas son similares y, por lo tanto, la evolución de cualquier elementos el sistema globalmente acoplado puede ser equivalente a la evolución del mapa forzado.

Esta analogía entre un simple mapa forzado y un sistema autónomo globalmente acoplado ha sido empleada para describir comportamientos colectivos en sistemas globalmente acoplados [26]. La idea básica en el presente trabajo es que, conociendo la dinámica de un simple mapa forzado cuyo parámetro local corresponde a escape, podemos inferir el comportamiento colectivo del escape en un sistema autónomo de mapas globalmente acoplados con la misma dinámica local. En particular si el escape puede ser controlado en un mapa forzado, entonces este fenómeno también debería controlarse en un sistema de mapas globalmente acoplados. Pero en este caso tendríamos un control autónomo del escape.

En nuestro caso consideraremos la dinámica local f un mapa tienda con $a > 2$, para el cual sus iterados escapan. Puesto que el campo medio del sistema globalmente acoplado tiende a un valor asintótico a media que aumenta el tamaño del sistema, podemos asumir que el forzamiento del mapa simple corresponde a una constante. Luego, nuestro modelo de mapa forzado corresponde a

$$x_{t+1} = (1 - \epsilon)f(x_t) + \epsilon K, \quad (2.9)$$

donde K representa una constante.

La Figura 2.9 muestra el diagrama de bifurcación del mapa forzado x_t en función del parámetro ϵ con a y K fijos. Existe un valor crítico $\epsilon = 0.325$ donde el diagrama de bifurcación no exhibe puntos; por debajo de este valor los iterados del mapa escapan a infinito. Definimos la condición de escape para el mapa forzado $|x_t| < 10$, de manera análoga al campo medio en el sistema autónomo.

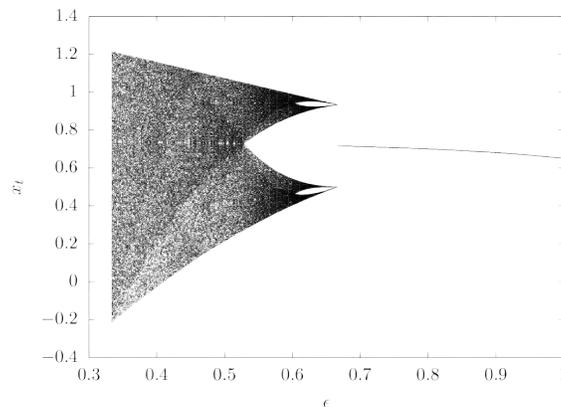


Figura 2.9: Diagrama de bifurcación de un mapa forzado en función de ϵ con $a = 3$ y $K = 0.65$, usando el Mapa Tienda.

Nótese que la constante K no influye en la derivada del mapa forzado, que es lo que determina la estabilidad de sus órbitas. La condición de escape del mapa forzado está asociada con su pendiente efectiva $(1 - \epsilon)a$, luego, la condición de escape para el mapa tienda forzado ocurre cuando

$$(1 - \epsilon)a > 2, \tag{2.10}$$

La Figura 2.10 muestra el valor crítico de a en función de ϵ para el cual se cumple la condición numérica de escape $|x_t| < 10$. Se puede verificar que esta curva está descrita por la función $a = 2/(1 - \epsilon)$, que corresponde a la frontera de estabilidad ED.

La Figura 2.10 también muestra el valor crítico de a en función de ϵ para el mapa tienda asimétrico, definido por las ecuaciones

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{si } x < \frac{b}{a+b}, \\ b(1-x), & \text{si } x > \frac{b}{a+b}, \end{cases} \tag{2.11}$$

donde usamos $b = 2a$. En este caso la frontera de estabilidad de la región ED está definida por la función $a = 3/2(1 - \epsilon)$.

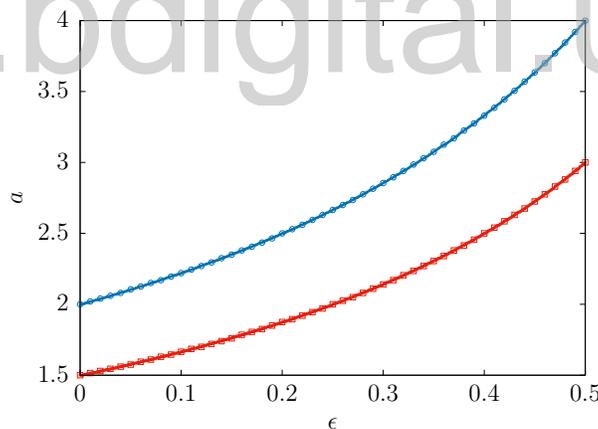


Figura 2.10: Valor crítico del parámetro a en función de ϵ para el cual se cumple la condición numérica de escape $|x_t| < 10$, para el mapa tienda (círculos azules) y curva teórica $a = 2/(1 - \epsilon)$ (línea azul). Valor crítico del parámetro a en función de ϵ para el cual se cumple la condición numérica de escape $|x_t| < 10$, para el mapa tienda asimétrico (cuadrados rojos) con $b = 2a$ y curva teórica $a = 3/2(1 - \epsilon)$ (línea roja).

2.3. Control Autónomo de Escape con Otros Mapas Locales

Con el fin de estudiar el fenómeno de control autónomo de escape en sistemas globalmente acoplados con otras dinámicas locales, consideramos el mapa logístico

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t), \quad (2.12)$$

con $a > 4$. En este caso las fronteras de estabilidad de las regiones ED y ES no se pueden derivar mediante simples expresiones analíticas.

La frontera de estabilidad de la región ED se puede estimar considerando que la pendiente de un mapa en el sistema autónomo globalmente acoplado se modifica en la forma $(1 - \epsilon)a$. La condición de escape corresponde *grosso modo* a

$$(1 - \epsilon)a < 4. \quad (2.13)$$

Por otro lado la frontera de estabilidad para la región ES esta dada por la condición de sincronización para mapas globalmente acoplados, que es la siguiente [20]

$$\ln(1 - \epsilon) + \lambda < 0, \quad (2.14)$$

donde λ es el exponente de Lyapunov del mapa local, el cual depende de a .

La Figura 2.11 muestra la región de control de escape CE en el espacio de parámetros (a, ϵ) para la red de mapas globalmente acoplados (Eq. 2.1) con el mapa logístico 2.12. La región CE está limitada por la frontera de estabilidad calculadas numéricamente. La frontera numérica de la región ED corresponde a la condición $|S_t| < 10$, y se muestra en la Figura 2.11 con línea roja. La Figura 2.11 también muestra la curva estimada teóricamente $a = 4/(1 - \epsilon)$. La frontera de la región de escape sincronizado (ES) calculada numéricamente con la condición $\ln(1 - \epsilon) + \lambda(a) = 0$ se muestra en la Figura 2.11 como una línea azul.

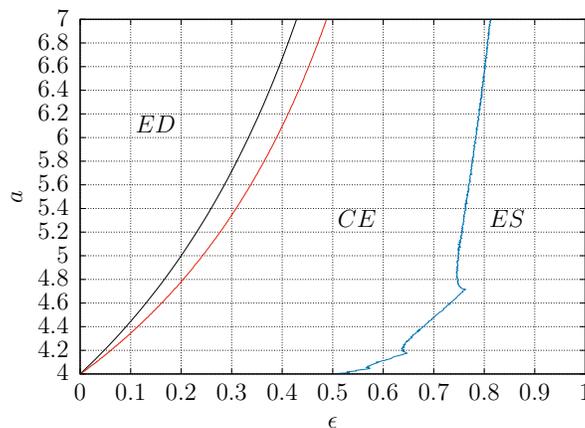


Figura 2.11: Región de control autónomo de escape CE en el espacio (a, ϵ) y curvas de estabilidad numéricas que separan las regiones ED y ES. La curva estimada teóricamente para la frontera ED también se muestra en la Figura como la línea negra.

Nuestro método de control autónomo de escape puede ser aplicado a mapas generales que presentan una crisis de frontera, como tales se pueden considerar mapas de la forma [27]

$$f(\gamma, x) = (1 + \gamma)(1 - |1 - 2x|^z), \quad (2.15)$$

donde $z \geq 1$ es el orden del mapa en su máximo, $\gamma \geq 0$ es la desviación del mapa caótico $f(0, x) : \text{de}[0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

2.4. Influencia de la Topología

Hemos visto que el fenómeno de control autónomo de escape puede lograrse en una red de mapas globalmente acoplados donde el campo medio actúa como un campo externo que induce una dinámica efectiva en los mapas tal que estos no escapan bajo ciertas condiciones.

En esta sección estudiaremos la influencia de la topología de la red de conectividad en la ocurrencia de control de escape en sistemas dinámicos autónomos.

En tal sentido consideramos una red de N mapas acoplados en la forma de red anillo unidimensional donde el rango de acoplamiento se denota por R . Esto significa que cada elemento en el anillo está acoplado con R vecinos a cada lado, el sistema esta definido por la siguiente ecuación

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} f(x_t^j), \quad (2.16)$$

nótese que el límite de un sistema globalmente acoplado ocurre cuando $R = N/2$. Como dinámica local f utilizaremos el mapa tienda.

La Figura 2.12 muestra el valor crítico del parámetro a en función del rango relativo de acoplamiento $2R/N$ para el cual se cumple la condición de escape $|S_t| < 10$ para mapas tienda en red anillo con $N = 1001$, $\epsilon = 0.3$, nótese que para $R \rightarrow 2N$ el sistema se comporta como una red de mapas globalmente acoplados.

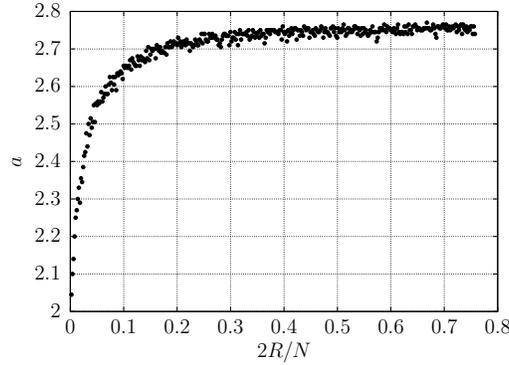


Figura 2.12: Valor crítico del parámetro a en función del rango relativo de acoplamiento $2R/N$ para el cual se cumple la condición de escape $|S_t| < 10$ para mapas tienda en red anillo con $N = 1001$, $\epsilon = 0.3$, 5 realizaciones de condiciones iniciales con 10^5 iterados de transiente. La línea roja corresponde al valor de $a = 2.75$, que es el valor crítico del parámetro para un sistema globalmente acoplado con los mismos valores de N y ϵ .

La Figura 2.12 muestra que no es necesario un acoplamiento global para que ocurra control autónomo del escape; este fenómeno puede aparecer con un rango de interacción del orden del 10% del tamaño del sistema.

2.4.1. Condiciones Mínimas para el Control Autónomo de Escape

El fenómeno de control de escape tiene lugar cuando un sistema está sujeto a un acoplamiento global o de suficiente rango de interacción. En todos los casos la interacción entre los elementos está presente permanentemente, en esta sección nos proponemos estudiar las condiciones mínimas de permanencia de la interacción entre los elementos. Nos preguntamos cuál debe ser la probabilidad de la interacción para que surja un control autónomo de escape en un sistema.

En tal sentido consideramos un sistema de mapas globalmente acoplados donde el campo medio actúa con probabilidad P , es decir

$$x_{t+1}^i = \begin{cases} (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon S_t, & \text{con probabilidad } P, \\ f(x_t^i), & \text{con probabilidad } (1 - P). \end{cases} \quad (2.17)$$

De igual manera podemos definir un mapa forzado con probabilidad P :

$$x_{t+1} = \begin{cases} (1 - \epsilon)f(x_t) + \epsilon K, & \text{con probabilidad } P, \\ f(x_t), & \text{con probabilidad } (1 - P), \end{cases} \quad (2.18)$$

La Figura 2.13 muestra el valor crítico del parámetro a para el cual se cumple la condición de escape $|S_t| < 10$ para mapas tienda en función de P para el sistema autónomo 2.17 con $N = 100$ y $\epsilon = 0.3$. Igualmente, la Figura 2.13 muestra el valor crítico del parámetro a para el sistema forzado

con el mapa tienda como f , $K = 0.63$ y $\epsilon = 0.3$. Nótese que ambas curvas coinciden bastante bien. La figura 2.13 muestra que no es indispensable la presencia permanente de las interacciones para el control de escape, tanto en sistemas autónomos como forzados. Los resultados indican que el control efectivo autónomo de escape requiere de una probabilidad de aplicación de la interacción de al menos 75 %.

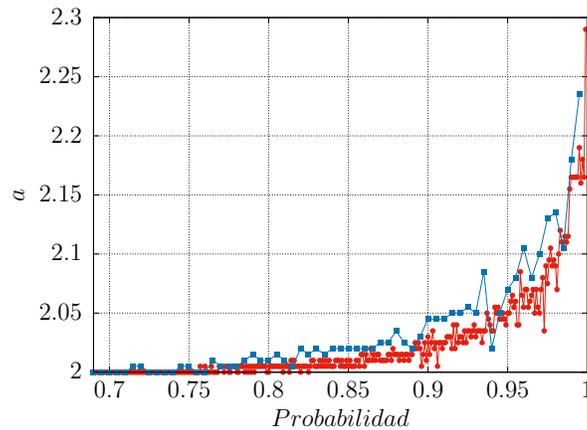


Figura 2.13: Valor crítico del parámetro a en función de la probabilidad de interacción P y $\epsilon = 0.3$ para: (Azul) Acoplamiento global con $N = 100$ (Eq. 2.17), (Rojo) Mapa forzado por constante con $K = 0.63$ (Eq. 2.18). Ambas realizadas con el mapa tienda como dinámica local, 10^5 iterados de transiente y verificado con 10 realizaciones de condiciones iniciales.

En las curvas de la Figura 2.13 se puede ver que ambos sistemas tienden exponencialmente a su máximo valor crítico del parámetro.

Capítulo 3

Control Autónomo de Escape en Sistemas Multidimensionales

En el Capítulo anterior hemos presentado nuestro método de control autónomo de caos en sistemas globalmente acoplados, donde la dinámica local estaba descrita por mapas caóticos unidimensionales. Con el fin de investigar la universalidad de este comportamiento colectivo emergente, y como una extensión natural, en este Capítulo aplicamos este método a sistemas acoplados cuya dinámica local es multidimensional, incluyendo mapas discretos y ecuaciones con tiempo continuo.

3.1. Mapa Lozi

Para este estudio usamos mapas Lozi globalmente acoplados, definidos por

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)(1 - \alpha|x_t^i| + y_t) + \epsilon\langle x \rangle_t \quad (3.1)$$

$$y_{t+1}^i = \beta x_t^i \quad (3.2)$$

donde i es un índice que distingue los N distintos nodos del sistema. Por comodidad redefiniremos el segundo término como:

$$\langle x \rangle_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j, y_t^j) \quad (3.3)$$

que representa el campo medio del sistema.

Como se ve en la Figura 1.9 los iterados de la variable $x \in [-1.5, 1.5]$, así que la condición numérica de escape que utilizamos es

$$|\langle x \rangle_t| \leq 15, \quad (3.4)$$

lo que significa que el valor absoluto del campo medio de la variable x no supera en ningún momento el 15.

En la Figura 3.1 se muestra el comportamiento colectivo de escape en el espacio de fases (ϵ, a) de los mapas Lozi globalmente acoplados (Eq. 3.1) con $\beta = 0.999$ fijo, para el valor del parámetro $\beta = 0.999$ el valor crítico de α es $\alpha = 1$ [28]. Para cada punto (ϵ, a) se muestra el tamaño crítico del sistema N_c para los cuales se cumple la condición de escape numérica 3.4.

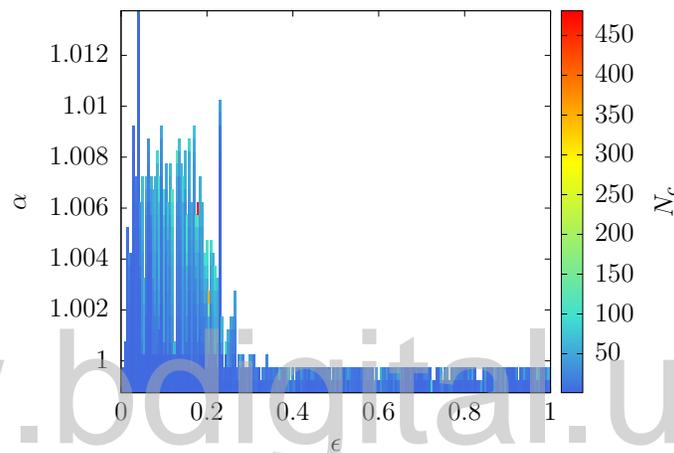


Figura 3.1: (Izquierda) Comportamiento colectivo de escape para el sistema 3.1 en el espacio de parámetros (α, ϵ) , $\beta = 0.999$, 10^5 iterados de transiente, estudiando 5000 iterados, en 5 realizaciones de condiciones iniciales y con valor máximo de $N = 1000$.

La Figura 3.2(a) muestra el valor del campo medio $\langle x \rangle$ del sistema para el tamaño crítico $N = N_c$, calculado tomando 5000 iterados, después de despreciar 10^5 transientes y 5 realizaciones de condiciones iniciales. La Figura 3.2(b) muestra la correspondiente dispersión del valor medio $\langle x \rangle$ en el espacio de parámetros (α, ϵ) .

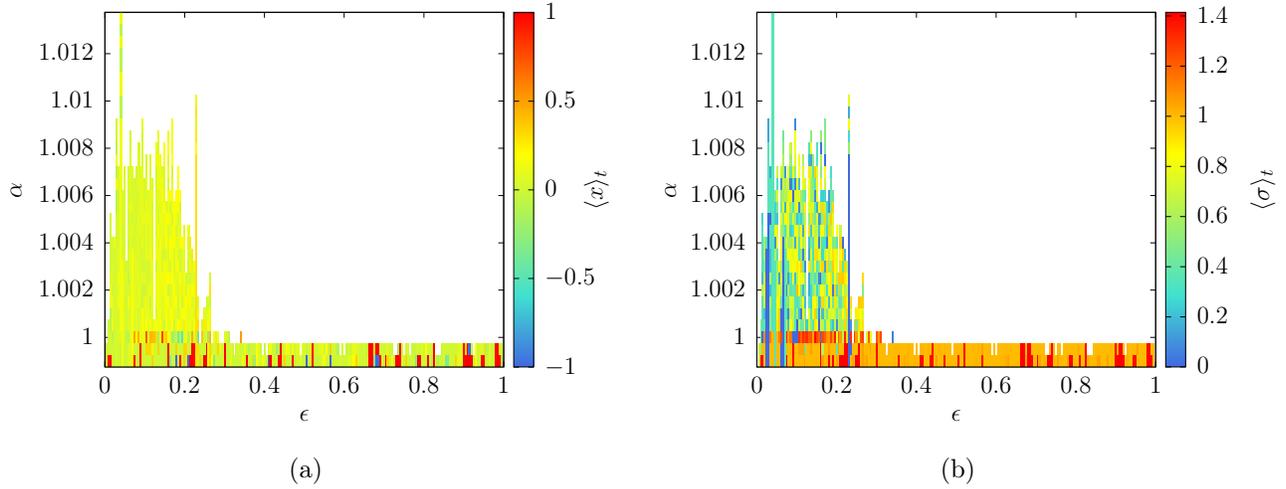


Figura 3.2: (a) Valor promedio de $\langle x \rangle$, calculado con $\beta = 0.999$ fijo, $N = N_c$, 10^5 iterados de transiente, estudiando 5000 iterados, para 5 realizaciones de condiciones iniciales. (b) Desviación estándar de la media del sistema $\langle x \rangle$, calculada con $N = N_c$, 10^5 iterados de transiente, estudiando 5000 iterados, para 5 realizaciones de condiciones iniciales.

3.2. Sistema de Linz - Sprott

Estudiamos el sistema de ecuaciones de Linz - Sprott (Eq. 3.5), utilizamos este sistema por ser el sistema continuo no lineal mas simple que se conoce. Para verificar la existencia del control autónomo de escape utilizamos un sistema de ecuaciones de Linz - Sprott globalmente acopladas, definidas como

$$\begin{cases} \dot{x}^i = y^i, \\ \dot{y}^i = z^i, \\ \dot{z}^i = (1 - \epsilon)(-az^i - y^i - |x^i| + 1) + \epsilon \langle z \rangle_t. \end{cases} \quad (3.5)$$

Y

$$\langle z \rangle_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z_t^j. \quad (3.6)$$

que representa el campo medio de la variable z para un instante dado.

En la Figura 3.3(a) se muestra el diagrama de bifurcación de los máximos locales sucesivos de la variable z para un sistema aislado en función de ϵ , se puede ver que en este sistema para valores del parámetro $a \approx 0.55$ el atractor pierde estabilidad y se transforma en un repulsor. Ya que $z \in [0, 1.6]$ utilizamos como condición numérica de escape

$$|\langle z \rangle_t| \leq 16, \quad (3.7)$$

lo que significa que el valor absoluto del campo medio de la variable z no supera en ningún momento el 16.

En la figura 3.3(a) se muestra el diagrama de bifurcación de los máximos locales sucesivos de la variable z de un sistema de Linz - Sprott aislado en función de ϵ , el sistema pierde estabilidad a medida que a disminuye y en $a \approx 0.55$ ocurre la crisis de frontera. En la figura 3.3(b) se muestra el tamaño crítico del sistema para que no se viole la condición numérica de escape en función del parámetro a para dos valores de ϵ fijos.

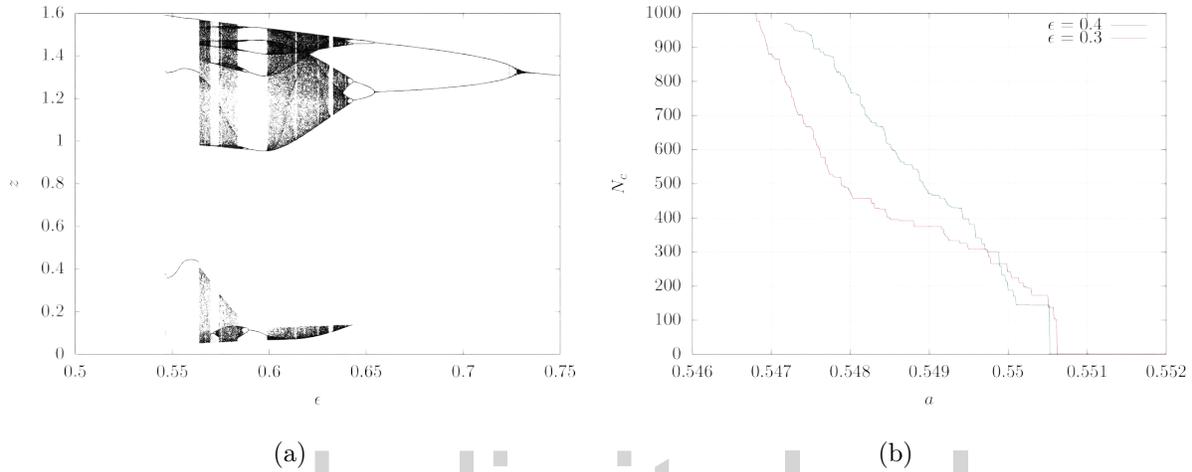


Figura 3.3: (a) Máximos sucesivos de la variable z de 3.5, ecuaciones integradas con método Runge-Kutta 4to orden con paso de integración de 0.01, 10^6 de pasos de integración como transiente y estudiando los últimos 5000. (b) Comportamiento colectivo de escape de sistema de Linz-Sprott globalmente acoplados (Eq. 3.1), en rojo $\epsilon = 0.3$, en azul $\epsilon = 0.4$. Ecuaciones integradas con método Runge-Kutta 4to orden con paso de integración $dt = 0.01$, con 10^6 pasos de integración transiente y 5 realizaciones de condiciones iniciales.

Conclusiones

Como hemos descrito en la Introducción de esta Tesis, el fenómeno de escape y caos transitorio aparece en muchos sistemas dinámicos y su estudio tiene mucho interés. Se han desarrollado varios métodos para controlar o retrasar el tiempo de escape; todos basados en la aplicación de alguna perturbación o forzamiento externo.

En la presente Tesis hemos propuesto e investigado un mecanismo de control autónomo de escape de sistemas de elementos dinámicos acoplados. A diferencia de los métodos propuestos anteriormente, en nuestro modelo el control de escape surge espontáneamente como un comportamiento colectivo emergente de las interacciones entre los elementos, sin necesidad de la intervención de agentes ni perturbaciones externas, sin variar parámetros y sin añadir ruido.

Hemos encontrado que el sistema de elementos acoplados posee una nueva cuenca de atracción de las trayectorias que escaparían en las dinámicas individuales aisladas. Específicamente, hemos demostrado que en sistemas globalmente acoplados, el campo medio efectivamente modifica la dinámica local, produciendo el control del caos transitorio.

Como un modelo conceptualmente simple y computacionalmente eficiente, hemos empleado una red de mapas globalmente acoplados mediante el campo medio del sistema, donde el valor del parámetro local se encuentra cercano al valor crítico para una crisis de frontera, o de escape al infinito. Hemos utilizado mapas tienda, lo cual nos ha permitido hacer cálculos analíticos de las regiones de estabilidad del escape en el espacio de parámetros del sistema. Hemos encontrado que las predicciones teóricas y los resultados de las simulaciones numéricas concuerdan muy bien.

Para entender el fenómeno de control autónomo de escape en redes de elementos interactivos, hemos utilizado la analogía entre redes de mapas globalmente acoplados y un mapa simple forzado. Esta analogía ha sido propuesta y empleada en diversos trabajos de investigación del grupo de Caos y Sistemas Complejos, particularmente para investigar fenómenos colectivos en redes de mapas globalmente acoplados, como la formación de clusters, sincronización generalizada y estados quiméricos. Nuestro trabajo representa la comprensión adicional de otro fenómeno colectivo basados en esa analogía.

Puesto que el campo medio del sistema autónomo evoluciona en forma aproximadamente constante para cierto rango de parámetros, hemos estudiado el comportamiento de un mapa tienda forzado mediante una constante. El mapa simple forzado representa el límite de tamaño infinito del sistema autónomo y nos permitió comprender las limitaciones asociadas con el tamaño del sistema.

Igualmente, el estudio de la respuesta dinámica del mapa forzado provee una aproximación segura al máximo valor del parámetro local que puede lograr el control autónomo de escape, de tal manera que nos da un rango de predicción sobre las regiones de parámetros donde el control autónomo de escape funciona. Cabe destacar el resultado aparentemente contra-intuitivo que, para impedir el escape, hay que incrementar el valor del parámetro por encima del valor crítico de escape.

Hemos explorado la universalidad del fenómeno de control autónomo de escape con otros mapas locales, como el mapa logístico, y con dinámicas locales multidimensionales, tanto discretas como continuas en el tiempo.

Hemos encontrado que el acoplamiento global no es indispensable para la ocurrencia de control autónomo de escape en un sistema. Este fenómeno puede emerger si el rango de la interacción es suficientemente grande. Por último, hemos demostrado que no es necesario que la interacción entre los elementos tenga lugar en forma permanente: basta que el acoplamiento entre los elementos ocurra con cierta probabilidad para que aparezca el control autónomo de escape en un sistema.

Finalmente, consideramos que el fenómeno de control autónomo de escape es un descubrimiento relevante y novedoso, cuyas implicaciones y aplicaciones apenas hemos comenzado a dilucidar en esta Tesis y que abre un amplio campo para la investigación en sistemas no lineales.

Bibliografía

- [1] H.-D. Chiang, I. Dobson, R. J. Thomas, J. S. Thorp, and L. Fekih-Ahmed. On voltage collapse in electric power systems. *IEEE Trans. Power Syst.*, 5:601–607, 1990.
- [2] I. Dobson and H.-D. Chiang. Towards a theory of voltage collapse in electric power systems. *Sys. Contr. Lett.*, 13:253–262, 1989.
- [3] K. McCann and P. Yodzis. Nonlinear dynamics and population disappearances. *Am. Nat.*, 144:873–879, 1994.
- [4] Samuel Zambrano, Miguel A. F. Sanjuan, and James A. Yorke. Partial control of chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 77:055201, May 2008.
- [5] Oleg V. Maslennikov, Vladimir I. Nekorkin, and Jürgen Kurths. Transient chaos in the lorenz-type map with periodic forcing. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28(3):033107, 2018.
- [6] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood. On non-linear differential equations of the second order: Ii. *Annals of Mathematics*, 48(2):472–494, 1947.
- [7] T. Shimizu and N. Morioka. Transient behavior in periodic regions of the lorenz model. *Physics Letters A*, 69(3):148 – 150, 1978.
- [8] James L. Kaplan and James A. Yorke. Preturbulence: A regime observed in a fluid flow model of lorenz. *Communications in Mathematical Physics*, 67(2):93–108, Jun 1979.
- [9] James A. Yorke and Ellen D. Yorke. Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the lorenz model. *Journal of Statistical Physics*, 21(3):263–277, Sep 1979.
- [10] Giulio Pianigiani and James A. Yorke. Expanding maps on sets which are almost invariant: Decay and chaos. *American Mathematical Society*, 252:351–366, 1979.
- [11] H. Kantz and P. Grassberger. Repellers, semi-attractors, and long-lived chaotic transients. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 17(1):75 – 86, 1985.

- [12] Celso Grebogi, Edward Ott, and James A. Yorke. Chaotic attractors in crisis. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1507–1510, May 1982.
- [13] Celso Grebogi, Edward Ott, and James A. Yorke. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, pages 181–200, 1983.
- [14] G.H. Hsu, Edward Ott, and Celso Grebogi. Strange saddles and the dimensions of their invariant manifolds. *Physics Letters A*, 127:199–204, 1988.
- [15] Leo P. Kadanoff and Chao Tang. Escape from strange repellers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81(4):1276–1279, 1984.
- [16] M. G. Cosenza and J. B. Swift. Scaling properties of multifractal functions at an attractor-repeller transition. *Phys. Rev. A*, 41:6615–6620, Jun 1990.
- [17] Maria Ercsey-Ravasz and Zoltan Toroczkai. The chaos within sudoku. *Scientific Reports*, 725(2), 2012.
- [18] S. Sabarathinam and K. Thamilmaran. Transient chaos in a globally coupled system of nearly conservative hamiltonian duffing oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*, 73:129 – 140, 2015.
- [19] Kunihiro Kaneko. Supertransients, spatiotemporal intermittency and stability of fully developed spatiotemporal chaos. *Physics Letters A*, 149(2):105 – 112, 1990.
- [20] K. Kaneko and Ichiro Tsuda. *Complex Systems: Chaos and Beyond*. Springer, 1996.
- [21] Edward Ott, Celso Grebogi, and James A. Yorke. Controlling chaos. *Physical Review Letters*, 64:1196–1199, 1990.
- [22] Ying-Cheng Lai and Celso Grebogi. Converting transient chaos into sustained chaos by feedback control. *Phys. Rev. E*, 49:1094–1098, Feb 1994.
- [23] Miguel A. F. Sanjuan. Dynamics of partial control of chaotic systems. In *Nostradamus 2013: Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*, pages 3–4, Heidelberg, 2013. Springer International Publishing.
- [24] Juan Sabuco, Samuel Zambrano, and Miguel A F Sanjuán. Partial control of chaotic transients using escape times. *New Journal of Physics*, 12(11):113038, 2010.
- [25] Rubén Capeáns, Juan Sabuco, Miguel A. F. Sanjuán, and James A. Yorke. Partially controlling transient chaos in the lorenz equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 375(2088), 2017.

- [26] A. Parravano and M. G. Cosenza. *Phys. Rev. E*, 58:1665, 1998.
- [27] O. B. Christensen and T. Bohr, 1988.
- [28] V. Botella-Soler, J. M. Castelo, J. A. Oteo, and J. Ros. Bifurcations in the lozi map. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2011.

www.bdigital.ula.ve