DOCTORADO EN CIENCIAS APLICADAS

METODOLOGíAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE SISTEMAS DE DETECCIÓN Y DIAGNÓSTICO DE FALLAS

por

Addison Ríos Bolívar

www.bdigital.ula.ve

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO
PARCIAL PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS APLICADAS

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MÉRIDA, VENEZUELA

JUNIO 2003

C.C.Reconocimiento

A mis hijos...

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido x

Índice de Figuras xi

Agradecimientos xiii

Resumen xv

Prefacio xvii

INTRODUCCIÓN GENERAL 1

I Fundamentos Teóricos 5

1. Bases Fundamentales 7

1.1. Los Sistemas Lineales . . . 7

1.1.1. Los Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo, LTV . . . 7

1.1.1.1. La matriz de transición de estados . . . 9

1.1.1.2. Propiedades . . . 10

1.1.1.3. Ejemplos . . . 12

1.1.2. Propiedades de los sistemas LTV . . . 14

1.1.2.1. Alcanzabilidad y Controlabilidad . . . 15

1.1.2.2. Ejemplo . . . 17

1.1.2.3. Observabilidad y Reconstructibilidad . . . 19

1.1.2.4. Ejemplo . . . 21

1.1.2.5. Construcción de los Observadores . . . 27

1.1.3. Los sistemas lineales invariantes en el tiempo, LTI . . . 33

1.1.3.1. Detectabilidad de los sistemas LTI . . . 37

1.2. Los sistemas no lineales . . . 38

1.2.1. Controlabilidad . . . 39

1.2.2. Observabilidad . . . 41

1.2.2.1. La visión algebraica diferencial . . . 42

1.2.2.2. Diseño de observadores . . . 44

1.2.2.3. Ejemplos . . . 47

1.3. Los sistemas inversos . . . 50

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

1.3.1. El caso lineal . . . 52
1.3.1.1. Ejemplo . . . 56
1.3.2. El caso no lineal . . . 58
1.3.2.1. El algoritmo de inversión . . . 59
1.4. Control óptimo de sistemas lineales . . . 67
1.4.1. Control óptimo en $\mathcal{H}_2$ . . . 70
1.4.1.1. Cálculo de la norma $\mathcal{H}_2$ . . . 70
1.4.1.2. Cálculo de controladores óptimos en $\mathcal{H}_2$ . . . 71
1.4.1.3. Controladores óptimos en $\mathcal{H}_2$ basados en LMI . . . 72
1.4.2. Control óptimo en $\mathcal{H}_\infty$ . . . 75
1.4.2.1. Cálculo de la norma $\mathcal{H}_\infty$ . . . 75
1.4.2.2. Cálculo de controladores óptimos en $\mathcal{H}_\infty$ . . . 76
1.4.2.3. Controladores óptimos en $\mathcal{H}_\infty$ basados en LMI . . . 78
1.5. Conclusiones . . . 79

II Detección y Diagnóstico de Fallas: Métodos de Redundancia Analítica 81

2. Detección y Diagnóstico de Fallas en Sistemas Dinámicos 83
2.1. Introducción . . . 83
2.2. Clasificación de los métodos de generación de residuales . . . 86
2.3. Filtros de DDF basados en observadores . . . 88
2.3.1. El caso de los sistemas lineales . . . 88
2.4. Condiciones para el diagnóstico de fallas . . . 95
2.4.1. Sub-espacio de accesibilidad de las fallas . . . 95
2.4.1.1. Condición para la detectabilidad . . . 98
2.4.1.2. Condición para la separabilidad . . . 102
2.4.2. Detección de fallas en el caso de los sistemas LTV . . . 106
2.4.3. Detección de fallas en el caso de sistemas no lineales . . . 110
2.4.4. Síntesis de filtros de DDF basados en observador . . . 112
2.4.4.1. El observador de Luenberger generalizado . . . 114
2.4.4.2. Diseño de la ganancia del filtro de DDF . . . 117
2.4.4.3. Ejemplo . . . 120
2.5. Conclusiones . . . 122

3. Filtros Robustos de DDF 125
3.1. Introducción . . . 125
3.2. Generación robusta de residuos . . . 128
3.2.1. DDF robusta con observadores . . . 130
3.2.2. Filtros DDF y observadores de entrada desconocida . . . 133
3.3. Filtros basados en OED generalizados . . . 135
3.3.1. Ejemplos . . . 140
3.3.1.1. Ejemplo 1 . . . 141
3.3.1.2. Ejemplo 2 . . . 141

www.bdigital.ula.ve
C.C.Reconocimiento

3.4. Filtraje robusto y filtros DDF . . . 144
3.4.1. Solución en base a los sub-espacios (C_2, A)-invariantes . . . 150
3.5. Rechazo absoluto y filtros DDF . . . 151
3.5.1. Ejemplo . . . 154
3.5.1.1. Simulaciones y discusión de resultados . . . 155
3.6. Filtros robustos basados en el control óptimo $\mathcal{H}_\infty$ . . . 158
3.6.1. Diseño de un Post-Filtro . . . 159
3.6.2. Ejemplo Numérico . . . 164
3.7. Conclusiones . . . 166

III Detección y Diagnóstico de Fallas: Método basado en Modelos de Conocimientos 169

4. Detección y Diagnóstico de Fallas y Redes Neuronales 171
4.1. Introducción . . . 171
4.2. Redes Neuronales Artificiales . . . 172
4.2.1. Redes Neuronales Biológicas . . . 172
4.2.2. Redes Neuronales Artificiales . . . 174
4.2.2.1. Funciones de activación . . . 176
4.3. Modelos Neuronales . . . 178
4.3.1. Clasificación de las Redes Neuronales por su estructura . . . 178
4.3.1.1. Modelos neuronales en cascada . . . 179
4.3.1.2. Modelo Neuronales Retroalimentados . . . 181
4.3.1.3. Otros modelos neuronales . . . 183
4.3.2. Clasificación de las Redes Neuronales por su entrenamiento . . . 183
4.3.3. Algunos algoritmos de entrenamiento . . . 187
4.3.3.1. Algoritmo de Hebb y Hebb modificado . . . 187
4.3.3.2. Algoritmo del Vencedor toma todo . . . 188
4.3.3.3. Perceptrón de Rosenblatt . . . 189
4.3.3.4. Algoritmo de Widrow-Hoff . . . 190
4.3.3.5. La Regla Delta . . . 190
4.3.3.6. La Regla Delta Generalizada . . . 191
4.4. Algoritmo de Retropropagación . . . 192
4.4.1. Regla Delta para un nivel de múltiples perceptrones contínuos . . . 193
4.4.1.1. Resumen del Algoritmo de Entrenamiento para una capa de múltiples perceptrones . . . 195
4.4.2. Regla Delta Generalizada . . . 196
4.4.2.1. Resumen del Algoritmo de Entrenamiento usando la Regla Delta generalizada . . . 198
4.4.3. Retropropagación con factor de momento . . . 200
4.4.4. Retropropagación con tasa de aprendizaje variable . . . 200
4.5. Metodología para el diseño de aplicaciones usando RN . . . 201
4.6. Filtros de DDF basados en Redes Neuronales . . . 206
4.6.1. Ejemplo . . . 208

www.bdigital.ula.ve
C.C.Reconocimiento

4.7. Conclusiones 210

5. Conclusiones Generales **213**

A. Elementos del Algebra Diferencial **219**
A.1. Las Estructuras Algebraicas de Base 219
A.1.1. Espacio vectorial 219
A.1.2. Algebras de Lie 221
A.1.2.1. Ejemplos 222
A.2. Las Anillos Diferenciales 224
A.2.0.2. Ejemplos 224
A.3. Los Cuerpos Diferenciales 226
A.4. Teorema de Wei-Norman 228
A.5. Teorema de Eliminación de Estado de Diop 229

B. Espacio de Señales y Normas **231**
B.1. Señales y Normas de Señales 231
B.2. Sistemas y Normas de Sistemas 233
B.2.1. La Norma $\mathcal{H}_2$ 234
B.2.2. La Norma $\mathcal{H}_\infty$ 235

C. Desigualdades Matriciales Lineales, LMI **237**
C.1. Las LMI's 237

Bibliografía **241**

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Índice de figuras

1.1. La salida verdadera (—) y la salida estimada (- - -) 49
1.2. El error de las salidas 49
1.3. Los sistemas inversos : (a) por la izquierda. (b) por la derecha. 52
1.4. Diagrama esquemático para el control robusto. 68

2.1. Un Sistema de MDD 85
2.2. Clasificación de métodos de generación de residuos. 86
2.3. Representación de fallas en los actuadores. 89
2.4. Representación de fallas en los sensores. 90
2.5. Representación de fallas en el proceso. 90
2.6. Filtro para detección de fallas en los actuadores. 92
2.7. Filtro para detección de fallas en los sensores. 92
2.8. Filtro para detección de fallas en el proceso. 93
2.9. Diagrama esquemático del observador de Luenberger generalizado 116
2.10. Salidas del sistema con falla l_1 : $(- - -)$ $y_1(t)$, (—) $y_2(t)$. 124
2.11. Los residuos para la falla l_1 : $(- - -)$ $e_1(t)$, (—) $e_2(t)$. 124
2.12. Salidas del sistema con falla l_2 : $(- - -)$ $y_1(t)$, (—) $y_2(t)$. 124
2.13. Los residuos para la falla l_2 : $(- - -)$ $e_1(t)$, (—) $e_2(t)$. 124

3.1. Esquema para la detección robusta de fallas. 129
3.2. Esquema para la generación de residuos con un filtro generalizado. 137
3.3. Salidas del sistema. 141
3.4. Las señales de perturbación y falla, y el error de salida. 142
3.5. Señales de perturbación y de falla. 142
3.6. Señales de salida. 143
3.7. El error de la salida. 143
3.8. Diagrama de bloques para la simulación. 156
3.9. Salida y Error del sistema bajo perturbación y falla v_1. 156
3.10. Salida y Error del sistema bajo perturbación y falla v_2. 156
3.11. Señal de perturbación. 157
3.12. Señales de falla $v_1(t)$ y $v_2(t)$. 157
3.13. Esquema de post-filtraje. 163
3.14. Diagrama de Valores Singulares: $H_{e_z\nu_1}$ (solid line), $H_{\eta_z v}$ (dotted line). . . . 165
3.15. Respuestas del filtro a las señales de perturbación y fallas. 166

www.bdigital.ula.ve
C.C.Reconocimiento

4.1. Ilustración de una neurona biológica . . . 173
4.2. Modelo de Neurona Artificial a partir de neurona biológica . . . 174
4.3. Neurona Artificial considerando predisposición a la inhibición . . . 175
4.4. Función Sigmoide Unipolar . . . 176
4.5. Función Sigmoide Bipolar . . . 177
4.6. Función Tangente Hiperbólica . . . 177
4.7. Función Lineal . . . 178
4.8. Modelo de red perceptrónica multicapas . . . 179
4.9. Modelo de red de funciones de base radial . . . 180
4.10. Modelo de red de Hopfield . . . 181
4.11. Modelo de red de Elman . . . 182
4.12. Modelo de red auto-organizable de Kohonen . . . 183
4.13. Modelo de red de Carpenter-Grossberg (ART-1) . . . 184
4.14. Red Neuronal entrenada con supervisión . . . 184
4.15. Red Neuronal entrenada sin supervisión . . . 185
4.16. Clasificación de los Algoritmos de Entrenamiento basados en su fundamentación conceptual . . . 185
4.17. Ilustración geométrica de la idea de adaptación de pesos de interconexión 186
4.18. Ilustración del algoritmo el Vencedor toma todo . . . 189
4.19. Arreglo de dos capas de Neuronas . . . 192
4.20. Filtro de DDF basado en modelo inverso neuronal. . . . 207
4.21. Filtro de DDF con Redes Neuronales . . . 208
4.22. Salidas bajo la falla ν_1. . . . 210
4.23. ν_1 real y patrones estimados. . . . 210
4.24. Salidas bajo la falla ν_2. . . . 211
4.25. ν_2 real y modos de fallas estimados. . . . 211

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Agradecimientos

El desarrollo de esta tesis doctoral ha sido posible gracias a la colaboración de un excelente grupo de trabajo en el seno del *Departamento de Sistemas de Control* de la Universidad de Los Andes y en el grupo *Méthodes et Algorithmes en Commande* del Laboratorio de Análisis y Arquitectura de Sistemas, LAAS, en Toulouse, Francia. A ellos les extiendo mi inmenso agradecimiento.

De igual manera, expreso mi gratitud al **Dr. Eliezer Colina**, Profesor Titular de la Universidad de Los Andes, al **Dr. William Colmenares**, Profesor Titular de la Universidad Simón Bolívar, y al **Dr. Jesús Rivero**, Profesor Titular de la Universidad de Los Andes, quienes han tenido a bien conformar el jurado evaluador de este trabajo, examinar minuciosamente el manuscrito y aportarme oportunos, juiciosos y constructivos comentarios a la luz del problema que se ha abordado.

www.bdigital.ula.ve

Debo expresar un inmenso agradecimiento y gratitud al **Dr. Ferenc Szigeti**, Profesor Titular de la Universidad de Los Andes, quien, como tutor y maestro, ha tenido la sapiencia y las excelentes orientaciones para que este proyecto sea felizmente culminado.

Expreso mi gratitud al **Dr. Francklin Rivas**, Profesor Agregado de la Universidad de Los Andes, quien ha sido el soporte para el desarrollo del tema sobre redes neuronales y con quien tengo el gusto de trabajar.

Indudablemente que no existirán palabras para expresar mi infinito agradecimiento a **mi familia**, especialmente a mis hijos. Mi familia es un ejemplo de sacrificio, humildad y solidaridad.

Addison Ríos Bolívar — ULA, Mérida, 2003

C.C.Reconocimiento

Resumen

Actualmente los sistemas de producción industrial son de una gran complejidad, misma que repercute en todos los niveles de control de los procesos (regulaciones, supervisión, etc.). Al mismo tiempo, los sistemas son sometidos a altos niveles de desempeño y deben satisfacer criterios de calidad exigentes, lo cual conlleva al diseño de sistemas de control que respondan apropiadamente ante diferentes condiciones de funcionamiento y asegurando niveles de confiabilidad suficientes.

Cuando el sistema de producción es dotado con esos sistemas de control y confiabilidad, entonces es capaz de adaptarse rápidamente a perturbaciones y fluctuaciones que intervienen sobre el sistema y su ambiente con el objetivo de mantener condiciones seguras de producción.

En este orden de ideas, el diagnóstico se refiere en distinguir las condiciones de fallas, a partir de las observaciones de las condiciones de operación, y en identificar las variables que funcionan en modos de excepción.

En este contexto, el trabajo desarrollado constituye un elemento que interviene en la gestión de los sistemas de producción, en particular en su evolución entre modos nominales y modos de excepción (modos de fallas). El interés particular del trabajo está asociado a la seguridad de funcionamiento, esto es, los aspectos de *monitoreo-diagnóstico*, los cuales permiten distinguir los modos de excepción.

En general, el monitoreo-diagnóstico se define por el conjunto de acciones que se aplican con el objeto de detectar, localizar y diagnosticar los modos de excepción. Los elementos fundamentales de un sistema de monitoreo-diagnóstico son los *filtros de detección y diagnóstico de fallas*.

Los filtros de detección y diagnóstico de fallas tienen dos funciones primordiales: la primera es la generación de residuos que informan sobre la ocurrencia de un modo de excepción. La segunda es, a partir del análisis de los residuos, indicar cual dispositivo está en falla.

En este trabajo, por un lado, se aplica la filosofía de síntesis de filtros basada en modelos matemáticos analíticos de los diversos componentes del sistema de producción. Se aborda el problema de construcción de sistemas de detección y diagnóstico de fallas para los procesos dinámicos que se describen en el espacio de estados. Así, se consideran los sistemas lineales variantes e invariantes en el tiempo, al igual que una clase de sistemas no lineales.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Los filtros se conciben a partir de observadores de estados y del procedimiento de eliminación de estados. El diagnóstico de las fallas se asegura por medio de una condición de invertibilidad del sistema definido por las salidas y las fallas. Dichas fallas se reconstruyen por medio de un sistema inveerso.

Las alternativas de diseño se obtienen a partir de:

- El observador generalizado de Luenberger, el cual permite dotar la matriz dinámica del error de estimación de una estructura apropiada para el diagnóstico de las fallas.
- La reconstrucción de los modos de fallas por medio de un observador y un sistema inverso por la izquierda del error de estimación.
- La reconstrucción de los modos de fallas utilizando la eliminación de estados.

De igual manera, se aborda el problema de detección robusta de fallas. Así, se presentan métodos para el diseño de filtros robustos basados en observadores de entrada desconocida, en observadores generalizados y en problemas de síntesis de controladores óptimos robustos.

Por otro lado, se aplican métodos de la inteligencia artificial, particularmente las redes neuronales, para la construcción de filtros de detección de fallas. Básicamente, los filtros se fundamentan en modelos inversos neuronales, los cuales permiten reconstruir los modos de fallas.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Prefacio

La síntesis de varios años de trabajo ha producido este manuscrito de tesis doctoral. El trabajo desarrollado se cumplió en el marco del Programa de Estudios Doctorales en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes.

Sobre la base del reglamento que orienta el programa doctoral, varios han sido los aportes que se conjugan en lo siguiente: participación en varios seminarios nacionales e internacionales, elaboración y preparación de artículos para revistas internacionales, capítulos de libro, dirección de proyectos de grado para estudiantes de pre-grado y la elaboración de herramientas para la enseñanza de métodos de construcción de filtros de detección de fallas, así como también, la implementación de algunas metodologías.

El manuscrito se orienta a la presentación de metodologías para la concepción de sistemas para la detección y el diagnóstico de fallas en los sistemas dinámicos. Principalmente, el trabajo está orientado hacia las técnicas basadas en redundancia analítica y modelos heurísticos.

www.bdigital.ula.ve

Al mismo tiempo, se pretende mostrar ciertos mecanismos para la implementación de los sistemas de detección y diagnóstico de fallas en un ambiente de producción industrial.

Para analizar las metodologías desarrolladas es necesario disponer de herramientas fundamentales que permitan acceder, sin dificultad, a la información que a lo largo de los diferentes capítulos que conforman el manuscrito, es suministrada. En ese sentido, es necesario disponer de un nivel de conocimiento de los sistemas dinámicos, particularmente los sistemas lineales y no lineales y sus propiedades fundamentales: descripción modal, observabilidad, controlabilidad, estabilidad e invertibilidad. De igual manera, aquellas herramientas que soportan el estudio de los sistemas dinámicos: álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, análisis funcional, álgebra y geometría diferencial.

En relación a los métodos heurísticos es necesario el estudio de las técnicas emergentes, particularmente lo relacionado a las redes neuronales. Así mismo, el estudio referido a los requerimientos computacionales para la aplicación de estas técnicas.

Los trabajos desarrollados y que serán presentados en estas memorias son articulados alrededor de cinco partes.

En la primera parte, un capítulo de fundamentos de base, se presentan varias definiciones y resultados importantes que serán utilizados en el desarrollo de las memorias. Se estudian los sistemas lineales y no lineales en base a sus propiedades estructurales. Igualmente, se desarrolla una generalización del observador de Luenberger y para los sistemas

C.C.Reconocimiento

no lineales un observador basado sobre la eliminación de estados. Se aborda el problema de inversión de sistemas y se presentan las condiciones para la invertibilidad. Allí se muestran los algoritmos de inversión.

En el Capítulo 2 se estudia el problema de diseño de filtros de detección y diagnóstico de fallas. Se analizan los filtros basados en observadores de estados y se muestran condiciones para la detectabilidad y la separabilidad de las fallas. Las condiciones son mostradas, igualmente, en términos de la invertibilidad de sistemas.

En el Capítulo 3 se desarrolla una metodología para la construcción de filtros de detección y diagnóstico de fallas a partir de la reconstrucción de los modos de dichas fallas. Se establece la relación entre observabilidad de entradas e invertibilidad por la izquierda de los sistemas. Bajo esas condiciones las fallas se pueden reconstruir utilizando un sistema inverso.

En el Capítulo 4 se analizan técnicas para la detección robusta de fallas. Se desarrollan métodos basados en observadores de entrada desconocida y en el problema de control óptimo de sistemas sometidos a perturbaciones externas.

Finalmente, en el quinto y último capítulo, se estudia una metodología de diseño de filtros de detección de fallas a partir de redes neuronales. Así, se analizan las redes neuronales con la visión de su aplicación en el problema particular de detección de fallas.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

INTRODUCCIÓN GENERAL

En la actualidad los sistemas de producción son de una gran complejidad. Esta complejidad incide en los mecanismos involucrados en el proceso productivo y mayoritariamente sobre todos los niveles de control (regulaciones, supervisión, monitoreo, etc.). De igual manera, los sistemas son sometidos a altos niveles de desempeño a objeto de satisfacer exigentes criterios de calidad y productividad, lo cual conduce a la concepción de sistemas de control y supervisión que deben responder satisfactoriamente a distintas condiciones de funcionamiento, a fin de garantizar niveles de confiabilidad apropiados.

Cuando un sistema de producción es dotado de esos mecanismos de control y de confiabilidad, entonces es capaz de adaptarse, rápidamente, a perturbaciones y fluctuaciones que intervienen sobre el sistema y su ambiente, lo cual garantiza condiciones de producción seguras. En este caso se dice que el sistema de producción es *reactivo*, [3, 69].

www.bdigital.ula.ve

Por otro lado, es sabido que la confiabilidad operacional debe estar conformada por: la correcta operación de los procesos, los sistemas de control asociados y la coordinación de los mismos. Toda esta infraestructura está soportada por diversos sistemas de apoyo dentro de una estructura de automatización integral, donde la información y su intercambio se considera relevante, desde el punto de vista de confiabilidad, seguridad y productividad. En cualquiera de los niveles de la cadena de producción, esta información debe ser manejada en la dirección de mantener altos índices de eficiencia y productividad operacional.

En el contexto de la automatización de sistemas producción industrial es esencial trabajar en la búsqueda e implantación de herramientas y métodos para concebir, realizar y conducir los sistemas de producción reactivos. Esta idea es el núcleo fundamental del

C.C.Reconocimiento

presente trabajo, el cual se centra en los elementos que intervienen en la gestión de los sistemas de producción, en particular, aquellos que permiten analizar la evolución de modos de producción nominales y modos de producción de excepción (modos de fallas).

En esta vía de la reactividad de los sistemas, el interés de este trabajo está asociado a la seguridad de funcionamiento, particularmente a los aspectos de monitoreo-diagnóstico, los cuales permiten distinguir los modos de excepción.

En general, el monitoreo-diagnóstico se define por el conjunto de acciones que se aplican con la finalidad de detectar, localizar y diagnosticar los modos de excepción, [41, 63, 85, 111].

Concretamente, un sistema de monitoreo-diagnóstico tiene como tarea fundamental de dotar a los operadores de los procesos productivos de la información completa y detallada relativa al estado de funcionamiento de los procesos bajo supervisión. Esto le permite actuar con prontitud ante modos de excepción que puedan afectar la producción. Con estas actividades se busca disminuir los efectos nefastos de las fallas en relación a la producción y el ambiente.

www.bdigital.ula.ve

La etapa superior en la incoprporación de sistemas de monitoreo-diagnóstico consiste en automatizar todas las tareas relacionadas a objeto de alcanzar niveles de confiabilidad integral, lo cual corresponde a las funciones de control de procesos (producción), y de garantizar la seguridad de funcionamiento y el mantenimiento a partir de centros de coordinación, [69, 73]. Esta etapa superior corresponde a la implantación de una *cultura de confiabilidad* basada sobre la prevención, es decir, la búsqueda y la aplicación de acciones cuyos objetivos es mantener el funcionamiento del sistema en las mejores condiciones posibles.

Todo mecanismo de confiabilidad está centrado alrededor del sistema de monitoreo-diagnóstico. Los elementos de base de un sistema de monitoreo-diagnóstico son los dispositivos que permiten detectar las condiciones o modos de excepción. Esto constituye el diagnóstico de modos de fallas.

El diagnóstico consiste en distinguir las condiciones de fallas a partir de las observaciones que caracterizan el funcionamiento del sistema y en identificar las variables de origen

C.C.Reconocimiento

de un modo de excepción.

En general, los dispositivos que permiten el diagnóstico se denominan *filtros de detección*, los cuales, en el caso de fallas, se llaman **filtros de detección y diagnóstico de fallas**. Los filtros de detección tienen dos funciones básicas: la primera es la generación de unos residuos que informan sobre la ocurrencia de un modo de excepción. La segunda es, a partir del análisis de los residuos, indicar cual dispositivo ha originado la falla, [4, 50, 66].

Para la síntesis de filtros de detección existen, básicamente, dos filosofía: una está basada en la utilización de réplicas físicas de los dispositivos que conforman el sistema de producción. La otra se basa en la utilización de modelos matemáticos de esos dispositivos que constituyen el sistema.

En base a los métodos caracterizados por modelos (heurísticos y redundancia analítica), este trabajo aborda el problema de diseño de filtros de detección y diagnóstico de fallas para los sistemas de producción que se representan por dinámicas descritas en espacio de estados. En este sentido se consideran los sistemas lineales y no lineales variantes e invariantes en el tiempo; los sistemas lineales invariantes en el tiempo sometidos a perturbaciones y/o incertidumbres y las descripciones entrada-salida de los sistemas.

www.bdigital.ula.ve

Los filtros se construyen, por un lado, a partir de observadores de estados y por otro, en base a modelos inversos a objeto de reconstruir las fallas. En el diseño de los filtros también se hace uso de procedimientos particulares como es el caso de la eliminación de estados, [20, 61].

El diagnóstico de las fallas se asegura por medio de una condición de detectabilidad y una condición de separabilidad. Estas condiciones son descritas, además, como una condición de invertibilidad del sistema definido por las fallas y las salidas del proceso. Ello permite reconstruir las fallas a partir del modelo inverso.

Seguiendo la misma filosofía de generación de residuos y lógica de decisiones, en este trabajo presenta, también, la concepción de filtros de detección basados en redes neurales y razonamiento heurístico. Esta metodología está soportado por aquellos casos donde los métodos basados en redundancia analítica pudiesen fallar o donde su implementación resulta difícil desde el punto de vista práctico.

C.C.Reconocimiento

Referente a los mecanismos de implantación de un sistema de diagnóstico y detección de fallas, se sugieren algunos aspectos metodológicos basados en los soportes computacionales que se disponen en los procesos productivos con una marcada tendencia hacia la automatización integral.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Parte I

Fundamentos Teóricos

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Capítulo 1

Bases Fundamentales

1.1. Los Sistemas Lineales

En esta sección se presenta, de manera sucinta, un estudio de los sistemas lineales variantes (LTV) e invariantes (LTI) en el tiempo. De la misma manera, se estudian los sistemas no lineales afines en el control. El estudio se realiza sobre la base de la estructura de los sistemas, utilizando los fundamentos geométricos. De manera particular se estudia el diseño de observadores de estado y los sistemas inversos, los cuales son el núcleo en la concepción de filtros de detección. Además, en forma resumida, se presenta el problema de control óptimo robusto de sistemas LTI sometidos a perturbaciones y/o incertidumbres.

www.bdigital.ula.ve

1.1.1. Los Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo, LTV

Consideremos sistemas de producción que se representan por un modelo de estado, [52], en el cual un vector, denominado vector de estado, permite describir la dinámica interna del sistema. Sean

$$A(t) : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B(t) : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}, \quad C(t) : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^{q\times n}$$

unas funciones continuas. Si $t_f = +\infty$, entonces $[0, t_f] = [0, \infty)$.

Sea un sistema lineal variante en el tiempo descrito en espacio de estado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t); \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada o de control y

C.C.Reconocimiento

$y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salida o de observación. En esta descripción, $A(t)$ es denominada la matriz dinámica, $B(t)$ la matriz de control y $C(t)$ la matriz de salida.

Equivalentemente, el sistema (1.1) se puede representar por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{\hat{p}} a_i(t) A_i x(t) + \sum_{j=1}^{\hat{M}} b_j(t) B_j u(t); \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= \sum_{v=1}^{\hat{K}} c_v(t) C_v x(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde la base del álgebra de Lie generada por

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A(t) : \quad 0 \leq t \leq t_f)$$

es representada por

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}, \quad \hat{p} \leq p;$$

(ver Anexo A). De igual forma, la base del espacio vectorial

www.bdigital.ula.ve

$$V_B = V(B(t) : \quad 0 \leq t \leq t_f)$$

es

$$\{B_1, B_2, \ldots, B_M\}, \quad \hat{M} \leq M,$$

y la base del espacio vectorial engendrada por

$$V_C = V(C(t) : \quad 0 \leq t \leq t_f),$$

corresponde a

$$\{C_1, C_2, \ldots, C_K\}, \quad \hat{K} \leq K.$$

$\hat{p}$, $\hat{M}$ y $\hat{K}$ representa el número de los elementos de las base de las álgebras de Lie, las cuales se utilizan para describir las matrices del sistema. Los coeficientes paramétricos variantes en el tiempo

$$a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{\hat{p}}(t); \quad b_1(t), b_2(t), \ldots, b_{\hat{M}}(t); \quad c_1(t), c_2(t), \ldots, c_{\hat{K}(t)};$$

son linealmente independientes (ver Anexo A).

C.C.Reconocimiento

1.1.1.1. La matriz de transición de estados

En la descripción de las propiedades estructurales de un sistema representado por (1.1), tales como la accesibilidad, la reconstructibilidad, la controlabilidad, la observabilidad y la estabilidad, la matriz de transición de estados juega un rol fundamental. Para definirla, supongamos que $u(t) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t); \qquad x(t_0) = x_0, \\ &= \sum_{i=1}^{\hat{p}} a_i(t)A_i x(t) \qquad \hat{p} \leq p. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Bajo las hipótesis precedentes, existe una solución única $x(t, x_0, t_0)$ para (1.3), a partir de la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

Definición 1.1 *La matriz $\Psi(t) : [t_0, t_f) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, se dice matriz fundamental de (1.3) si y solamente si las n columnas de Ψ son n soluciones linealmente independientes para (1.3).*

Así, Ψ satisface la ecuación matricial

www.bdigital.ula.ve

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t) \qquad \Psi(t_0) = L; \tag{1.4}$$

donde L es una matriz no singular.

La función matricial $\Psi(t)$ es una matriz fundamental de (1.3) si y solamente si $\Psi(t)$ satisface (1.4) y $\Psi(t)$ es non singular para todo t, $t \geq t_0$.

Definición 1.2 *Sea $\Psi(t)$ una matriz fundamental de (1.3). Entonces*

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) \qquad \textit{para todo} \qquad t, t_0 \in (-\infty, +\infty) \tag{1.5}$$

es la Matriz de Transición de Estado de (1.3).

Podemos notar que

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t_0)$$

y

$$\Phi(t_0, t_0) = LL^{-1} = \mathbb{I}.$$

Así,

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbb{I}. \tag{1.6}$$

C.C.Reconocimiento

Teorema 1.1 *Consideremos el sistema (1.3). Sea* $\Phi(t,t_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, la solución de*

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0) \qquad \Phi(t_0,t_0) = \mathbb{I}.$$

Por lo tanto, la solución de (1.3) está dada por

$$x(t,x_0,t_0) = \Phi(t,t_0)x_0.$$

Prueba Ver [130]. ■

La matriz de transición de estado $\Phi(t,t_0)$ se puede interpretar como una transformación lineal que transfiere el estado $x(t_0)$ en el tiempo t_0 al estado $x(t)$ en el tiempo t.

1.1.1.2. Propiedades

1. Si, para todo t, $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ y $A(t)$ permutan, entonces

   $$\Phi(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}.$$

   Ver [51, 130].

2. Sea $\Phi(t,t_0)$ la matriz de transición de estado de (1.3), luego:

   $$\det\left(\Phi(t,t_0)\right) = e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)d\tau},$$

   donde $\alpha(\tau)$ es la traza de $A(\tau)$. Esto significa que $\Phi(t,t_0)$ es no singular para todo t, [51, 130].

3. La matriz de transición de estado tiene la propiedad llamada de "semi-grupo", es decir que

   $$\Phi(t_1,t_2)\Phi(t_2,t_3) = \Phi(t_1,t_3),$$

   y

   $$\Phi^{-1}(t_1,t_2) = \Phi(t_2,t_1).$$

   Ver [51, 130].

Como consecuencia de la definición de la matriz de transición de estado, si consideramos el sistema (1.1), la solución para la ecuación matricial diferencial partiendo del estado x_0 al instante t_0 está dada por

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

$$x(t, x_0, t_0, u(\cdot)) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{1.7}$$

Se sabe que si $A(t) = A$, una matriz constante, entonces $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$. Si la dependencia con respecto al tiempo es del tipo $A(t) = a(t)A$, entonces

$$\Phi(t, t_0) = e^{A\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}.$$

Ver [130].

Si la dependencia de $A(t)$ con respecto al tiempo es cualquiera, no se puede afirmar que la matriz fundamental es la exponencial de una función matricial.

Si se considera el sistema descrito por la ecuación (1.2) entonces la matriz fundamental puede ser calculada a partir del teorema de Wei-Norman, [124] :

Teorema 1.2 *Sea Γ_i la representación matricial de la aplicación lineal $X \longrightarrow [A_i, X]$ (ver Annexe A), $X \in \mathcal{L}(A)$, con respecto a la misma base $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Sea $a(t) = (a_1(t), \ldots, a_p(t))^T$, y sea $E_{ij} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ una matriz de 0 y 1 cúyo elemento (i, j) es el único elemento igual a 1. La ecuación diferencial de Wei-Norman es definida por*

$$\dot{g}(t) = \left(\sum_{i=1}^{p} e^{g_1(t)\Gamma_1} e^{g_2(t)\Gamma_2} \cdots e^{g_{i-1}(t)\Gamma_{i-1}} E_{ii}\right)^{-1} a(t), \quad g(0) = 0.$$

www.bdigital.ula.ve

y la matriz fundamental $\Psi(t)$ de (1.3) posee una representación local que se escribe como un producto de exponenciales

$$\Psi(t) = e^{g_1(t)A_1} e^{g_2(t)A_2} \cdots e^{g_p(t)A_p}. \tag{1.8}$$

Prueba Ver [124]. ■

La representación global existe en algunos casos :

- Si $n = 2$.
- Si el algebra de Lie $\mathcal{L}(A)$ es soluble (ver la Sección A.1.2 en el Anexo A).

Además, $\Psi^{-1}(t)$, quien es la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{(\Psi^{-1})}(t) = -\Psi^{-1}(t)A(t),$$

se puede representar como un producto de exponenciales, esto es :

$$\Psi^{-1}(t) = e^{h_1(t)A_1} e^{h_2(t)A_2} \cdots e^{h_p(t)A_p}. \tag{1.9}$$

C.C.Reconocimiento

donde $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \ldots, h_p(t))^T$ satisface la ecuación diferencial de Wei-Norman

$$\dot{h}(t) = \left(\sum_{i=1}^{p} e^{h_p(t)\Gamma_p} \cdots e^{h_{i+1}(t)\Gamma_{i+1}} E_{ii} \right) a(t), \qquad h(0) = 0.$$

1.1.1.3. Ejemplos

1. Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}; \quad a_1(t), a_2(t) \quad \text{continuas}$$

$$A(t) = a_1(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_1(t)A_1 + a_2(t)A_2.$$

El corchete de Lie $[\![A_1, A_2]\!] = A_2$, y el álgebra de Lie generada $\mathcal{L}(A)$ es de dimensión 2. Una base está dada por A_1, A_2. Así, la matriz fundamental se puede describir por

$$\Psi(t) = e^{g_1(t)A_1} e^{g_2(t)A_2}, \quad g_1(0) = 0, \ g_2(0) = 0.$$

Además

$$\dot{\Psi}(t) = \dot{g}_1(t) A_1 e^{g_1(t)A_1} e^{g_2(t)A_2} + \dot{g}_2(t) e^{g_1(t)A_1} A_2 e^{g_2(t)A_2},$$

www.bdigital.ula.ve

pero por definición :

$$\dot{\Psi}(t) = \left(a_1(t)A_1 + a_2(t)A_2\right) e^{g_1(t)A_1} e^{g_2(t)A_2}.$$

Por comparación y multiplicando por la derecha por $e^{-g_2(t)A_2} e^{-g_1(t)A_1}$, se obtiene la siguiente ecuación

$$a_1(t)A_1 + a_2(t)A_2 = \dot{g}_1(t)A_1 + \dot{g}_2(t) e^{g_1(t)A_1} A_2 e^{-g_1(t)A_1}$$

$$e^{g_1(t)A_1} = \begin{pmatrix} e^{g_1(t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{-g_1(t)A_1} = \begin{pmatrix} e^{-g_1(t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

por ende,

$$\begin{aligned} e^{g_1(t)A_1} A_2 e^{-g_1(t)A_1} &= \begin{pmatrix} e^{g_1(t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-g_1(t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{g_1(t)} A_2, \end{aligned}$$

entonces

$$a_1(t)A_1 + a_2(t)A_2 = \dot{g}_1(t)A_1 + \dot{g}_2(t) e^{g_1(t)} A_2.$$

C.C.Reconocimiento

Como A_1, A_2 es una base de $\mathcal{L}(A)$, entonces

$$\dot{g}_1(t) = a_1(t), \quad \dot{g}_2(t)e^{g_1(t)} = a_2(t), \quad g_1(0) = g_2(0) = 0.$$

Finalmente

$$g_1(t) = \int_0^t a_1(\tau)d\tau, \qquad g_2(t) = \int_0^t a_2(\tau)e^{-\int_0^\tau a_1(v)dv}d\tau.$$

2. Sea el siguiente sistema :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a_1(t) & 0 \\ -a_1(t) & 0 & a_2(t) \\ 0 & -a_2(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}; \\
&= \left(a_1(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) x(t), \\
&= \left(a_1(t)A_1 + a_2(t)A_2\right) x(t). \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

El álgebra de Lie generada por las matrices $A(t)$ es el álgebra de Lie de las matrices anti-simétricas en $\mathbb{R}^{3\times 3}$, con la base A_1, A_2, A_3, donde la matriz A_3 es obtenida a partir de:

$$A_3 = [\![A_1, A_2]\!] = A_1A_2 - A_2A_1,$$

par conséquent

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las aplicaciones adjuntas

$$X \longrightarrow [A_1, X], \quad X \longrightarrow [A_2, X], \quad X \longrightarrow [A_3, X],$$

pueden ser representadas, respectivamente, como unas matrices: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, con respecto a la base A_1, A_2, A_3. Esto significa que

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C.C.Reconocimiento

La ecuación de Wei-Norman es, en ese caso

$$\left(E_{11}+e^{g_1(t)\Gamma_1}E_{22}+e^{g_1(t)\Gamma_1}e^{g_2(t)\Gamma_2}E_{33}\right)\begin{pmatrix}\dot{g}_1(t)\\ \dot{g}_2(t)\\ \dot{g}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1(t)\\ a_2(t)\\ a_3(t)\end{pmatrix},\ g_i(0)=0,\ i=1,2,3.$$

Como

$$e^{g_1(t)\Gamma_1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(g_1(t)) & \sin(g_1(t))\\ 0 & -\sin(g_1(t)) & \cos(g_1(t))\end{pmatrix},\ e^{g_2(t)\Gamma_2}=\begin{pmatrix}\cos(g_2(t)) & 0 & -\sin(g_2(t))\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(g_2(t)) & 0 & \cos(g_2(t))\end{pmatrix},$$

entonces, la ecuación de Wei-Norman es dada por

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \sin(g_2(t))\\ 0 & \cos(g_1(t)) & \sin(g_1(t))\cos(g_2(t))\\ 0 & -\sin(g_1(t)) & \cos(g_1(t))\cos(g_2(t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{g}_1(t)\\ \dot{g}_2(t)\\ \dot{g}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1(t)\\ a_2(t)\\ a_3(t)\end{pmatrix}.$$

Es evidente que el determinante de la matriz es $\cos(g_2(t))$. Por lo tanto, la matriz fundamental puede ser dada por el producto exponencial

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= e^{g_1(t)\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}e^{g_2(t)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}}e^{g_3(t)\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(g_1(t)) & \sin(g_1(t)) & 0\\ -\sin(g_1(t)) & \cos(g_1(t)) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(g_2(t)) & \sin(g_2(t))\\ 0 & -\sin(g_2(t)) & \cos(g_2(t))\end{pmatrix}\\ &\quad\begin{pmatrix}\cos(g_3(t)) & 0 & \sin(g_3(t))\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(g_3(t)) & 0 & \cos(g_3(t))\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Puesto que el determinante de la matriz en la ecuación de Wei-Norman es $\cos(g_2(t))$, la representación de la matriz fundamental que se obtiene es local; la misma no es válida si ese determinante es nulo.

1.1.2. Propiedades de los sistemas LTV

Para un sistema descrito en el espacio de estado, existen algunas propiedades, (controlabilidad, alcanzabilidad, accesibilidad, observabilidad y reconstructibilidad), que juegan un rol importante en los problemas de síntesis de controladores, de observadores y, particularmente, en el diseño de filtros de detección y diagnóstico de fallas.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

El análisis de esas propiedades, estudiadas por Kalman en un marco restringido, [52, 53], a dado lugar a unas condiciones extendidas, posteriormente, a un cuadro general [51, 61, 77, 128, 130].

Los dos conceptos fundamentales de controlabilidad y observabilidad para los sistemas lineales pueden ser caracterizadas por medio de una condición de rango generalizada que se presenta a continuación, [113, 114, 123].

1.1.2.1. Alcanzabilidad y Controlabilidad

La noción de controlabilidad está ligada a la existencia de una siñal de control que permita alcanzar el estado nulo en un tiempo finito a partir de un estado cualquiera.

Para comenzar, se presentan algunas definiciones importantes, en las cuales t_f es el tiempo final que se supone finito.

Definición 1.3 *El estado x_f en el instante t_f es alcanzable si $\forall$ t_0 tal que $t_0 < t_f$, existe $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ que transfiere el estado $x(t)$ del origen en el instante t_0 al estado x_f en el instante t_f.*

www.bdigital.ula.ve

Puesto que el estado x_f es alcanzable en el instante t_f (con $x(t_0) = 0$) existe un control $u(t)$ tal que :

$$x_f = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

Se puede definir el espacio alcanzable en el instante t_f como

$$\mathfrak{A}_{t_f} = \{x_f \text{ alcanzable en el instante } t_f\}.$$

Definición 1.4 *El sistema (1.1) es* alcanzable *en el instante t_f si cada estado del espacio de estado x_f es alcanzable en el instante t_f (es decir $\mathfrak{A}_{t_f} = \mathbb{R}^n$). Se habla, entonces, de la alcanzabilidad del par $(A(t), B(t))$ en el instante t_f.*

La noción de controlabilidad relacionada a la accesibilidad juega, igualmente, un rol importante.

Definición 1.5 *Un estado x_0 es controlable en el instante t_0 si para un tiempo finito $t_f > t_0$, existe $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ que transfiere el estado $x(t)$ de x_0 en el instante t_0 al origen del espacio de estado en el instante t_f.*

Puesto que el estado x_0 es controlable, existe $u(t)$ tal que :

$$-\Phi(t_f, t_0) x_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

C.C.Reconocimiento

donde, utilizando la propiedad de semi-grupo

$$-x_0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

De manera similar a la alcanzabilidad, se define el espacio controlable como :

$$\mathfrak{C}_{t_0} = \{x_0 \ \text{ controlable en el instante } \ t_0\}.$$

Definición 1.6 *El sistema (1.1) es* controlable *en el instante t_0 si cada estado del espacio de estado x_0 es controlable en el instante t_0 (es decir $\mathfrak{C}_{t_0} = \mathbb{R}^n$). Se habla, entonces, de controlabilidad del par $(A(t), B(t))$ en el instante t_0.*

Las definiciones precedentes no son siempre fáciles de utilizar. Un medio mas simple consiste en utilizar propiedades de las funciones matriciales : los *grammianos*.

Definición 1.7 *Se define el grammiano de accesabilidad para el sistema (1.1) como la matriz $n \times n$:*

$$\mathfrak{G}_A(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_f, \tau) d\tau$$

$\Phi(\cdot, \cdot)$ es la matriz de transición de estado. De la misma maniera, se define el grammiano de controlabilidad

www.bdigital.ula.ve

$$\mathfrak{G}_C(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_0, \tau) d\tau$$

En consideración a lo anterior, se puede mostrar que :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{t_f} &= \text{Im}\,[\mathfrak{G}_A(t_0, t_f)] \\ \mathfrak{C}_{t_0} &= \text{Im}\,[\mathfrak{G}_C(t_0, t_f)] \end{aligned}$$

Se puede notar que la dimensión de $\mathfrak{C}_{t_0}$ crece con el tiempo t, es decir, Im $[\mathfrak{G}_C(t_1, t_f)] \subseteq$ Im $[\mathfrak{G}_C(t_2, t_f)]$ si $t_1 \leq t_2$.

Por otro lado, es igualmente posible de demostrar los siguientes resultados :

Corolario 1.1

- *El sistema (1.1) es alcanzable en el instante t_f, ($A(t), B(t)$ alcanzable en el instante t_f), si y solamente si, existe t_0 finito, $t_0 < t_f$ tal que*

$$\text{rango}\,[\mathfrak{G}_A(t_0, t_f)] = n.$$

- *El sistema (1.1) es controlable en el instante t_0 si y solamente si, existe $t_f > t_0$ tal que*

$$\text{rango}\,[\mathfrak{G}_C(t_0, t_f)] = n.$$

C.C.Reconocimiento

Si se examinan las definiciones de la accesibilidad y de la controlabilidad, se tiene :

$$\mathfrak{G}_A(t_0, t_f) = \Phi(t_f, t_0)\mathfrak{G}_C(t_0, t_f)\Phi^T(t_f, t_0)$$

Como $\Phi(t_f, t_0)$ es invertible $\forall\ t_f, t_0$, se establece el siguiente teorema que relaciona la alcanzabilidad y la controlabilidad.

Teorema 1.3 *El sistema (1.1) es alcanzable si y solamente si, dicho sistema es controlable.*

Prueba Ver [51]. ■

El resultado anterior no es cierto para los sistemas a tiempo discreto. Por otro lado, debido a la monotonía de la familia de los sub-espacios controlables $\mathfrak{C}_{t_0}$, es posible afirmar que la dimensión del sub-espacio accesible $\mathfrak{A}_{t_f}$ crece con el tiempo t_f.

1.1.2.2. Ejemplo

Consideremos el sistema

www.bdigital.ula.ve

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

El cálculo de la matriz de transición de estado conlleva a :

$$\Phi(t, \tau) = \begin{pmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2}\left[e^{(t+\tau)} - e^{(-t+3\tau)}\right] \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix}$$

El grammiano de accesibilidad está dado por

$$\mathfrak{G}_A(t_0, t_f) = \begin{pmatrix} (t_f - t_0)e^{-2t_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall\ t_f$ finito, $t_f > t_0$, el sistema no es accesible. Sin embargo, el estado puede ser transferido del origen a un estado $x_f \in \text{Im}\ [\mathfrak{G}_A(t_0, t_f)]$. En particular, sea $x_f = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el control

$$u(t) = \frac{\alpha}{t_f - t_0} e^{t_f}$$

lleva el estado del origen a x_f.

El grammiano de controlabilidad estará dado por

$$\mathfrak{G}_C(t_0, t_f) = \begin{pmatrix} (t_f - t_0)e^{-2t_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C.C.Reconocimiento

Si los grammianos son mas fáciles de manipular que les definiciones originales para la accesibilidad y la controlabilidad, se pueden deducir unos criterios que se describen directamente en función de las matrices originales del sistema. Esto es posible en ciertos casos :

Consideremos que $x_0 \in \mathfrak{C}_{t_0}$, entonces :

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

que se puede escribir, aún, tomando $t_0 = 0$ para simplificar

$$x_0 = -\sum_{j=1}^{\hat{M}} \int_0^{t_f} e^{h_1(\tau)A_1} \cdots e^{h_p(\tau)A_p} b_j(\tau) B_j u(\tau) d\tau;$$

donde

$$e^{h_i(\tau)A_i} = \sum_{n_i=0}^{n-1} H_{in_i}\left(h_i(\tau)\right) A_i^{n_i},$$

con $H_{in_i}(z)$ funciones cuasi-polinomiales, analíticas que no dependen sino de las matrices A_i. Se puede, entonces, escribir :

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} x_0 &= -\sum_{j=1}^{\hat{M}} \sum_{n_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_p=0}^{n-1} \int_{t_0}^{t_f} b_j(\tau) H_{1n_1}(h_1(\tau)) \cdots H_{pn_p}(h_p(\tau)) A_1^{n_1} \cdots A_p^{n_p} B_j u(\tau) d\tau \\ &\in \sum_{j=1}^{\hat{M}} \sum_{n_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_p=0}^{n-1} \text{Im } \left(A_1^{n_1} \cdots A_p^{n_p} B_j\right). \end{aligned}$$

Esta última expresión es una generalización del sub-espacio de controlabilidad de Kalman (Im $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$) para el caso lineal invariante en el tiempo, [114].

Lema 1.1 *Criterio de Controlabilidad :*
Sea le sistema dado por (1.1). Consideremos los polinomios P y Q de la eliminación de estados, (ver la sección A.5 en el anexo A). Si los coeficientes $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{\hat{p}}(t)$ y los coeficientes $b_1(t), b_2(t), \ldots, b_{\hat{M}}(t)$ son tales que la condición algebraica-diferencial

$$P(0, \dot{0}, \ldots, a, \dot{a}, \ldots, b, \dot{b}, \ldots) \neq 0$$

o

$$Q(0, \dot{0}, \ldots, a, \dot{a}, \ldots, b, \dot{b}, \ldots) = 0,$$

es satisfecha en todos los sub-intervalos de $[t, t_f]$; $0 \leq t \leq t_f$, entonces el sistema (1.1) es controlable *si y solamente si, se satisface la siguiente condición*

$$\mathfrak{C} = \sum_{i=1}^{\hat{M}} \sum_{n_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_p=0}^{n-1} Im\left(A_1^{n_1} A_2^{n_2} \cdots A_p^{n_p} B_i\right) = \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

C.C.Reconocimiento

Prueba Ver [113, 114]. ■

1.1.2.3. Observabilidad y Reconstructibilidad

En muchos problemas prácticos, la medición del estado del sistema es necesaria. Por otro lado, es raro que todas las componentes del vector de estado sean medidas.

Un aspecto importante es, entonces, saber bajo cuales condiciones el conocimiento de la salida medida sobre un horizonte de tiempo fijo y para una entrada de control dada, permite posible determinar el estado del sistema en un instante determinado.

Las condiciones son las propiedades de observabilidad y de reconstructibilidad que serán discutidas a continuación.

Recordemos el sistema (1.1) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t); \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t). \end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

Se ha visto :

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t),$$

donde $t \in [a, b]$ y $\Phi(t, \tau)$ es la matriz de transición de estado.

Se puede escribir

$$\begin{aligned} C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) &= y(t) - \left[C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)\right] \\ &\triangleq \bar{y}(t). \end{aligned}$$

Se define, entonces, un estado inobservable.

Definición 1.8 *Un estado x es inobservable en el instante t_0 si*

$$C(t)\Phi(t, t_0)x = 0 \quad \forall \ \ t \geq t_0$$

Un estado qui no es inobservable se dice "observable".

Es posible definir el conjunto de los estados inobservables. Sea

$$\bar{\mathfrak{O}}_{t_0} = \{x \ \text{ inobservable en el instante } \ t_0\}$$

C.C.Reconocimiento

Ese conjunto juega un rol importante como mostraremos. La noción de estado inobservable permite definir la observabilidad del sistema (1.1).

Definición 1.9 *El sistema (1.1) es observable en t_0 (completamente observable o el par $(A(t), C(t))$ es observable en t_0), si el único estado $x \in \mathbb{R}^n$ inobservable en t_0 es el estado nulo (es decir $\bar{\mathfrak{O}}_{t_0} = \{0\}$).*

A partir de las definiciones precedentes, resulta que un estado no nulo inobservable no puede ser distinguido del estado nulo por examinación, solamente, de las salidas futuras. De la misma manera para la alcanzabilidad, se puede introducir el grammiano de observabilidad.

Definición 1.10 *El grammiano de observabilidad asociado al sistema (1.1) es la matriz $n \times n$ definida por*

$$\mathfrak{G}_O(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$$

$\mathfrak{G}_O(t_0, t_1)$ es simétrica y semi-definida positiva $\forall\ t_1 > t_0$.

Se puede probar la observabilidad del sistema a partir del estudio del grammiano de observabilidad. Así, se tiene el siguiente teorema :

www.bdigital.ula.ve

Teorema 1.4

- *El estado x es inobservable en t_0 si y solamente si*

$$x \in \ker\left[\mathfrak{G}_O(t_0, t_1)\right] \quad \forall \quad t_1 \geq t_0$$

- *El sistema (1.1) es observable en t_0 ($(A(t), C(t))$ es observable en t_0) si y solamente si, existe t_1 finito, $t_1 > t_0$ tal que*

$$\text{rango}\ \left[\mathfrak{G}_O(t_0, t_1)\right] = n$$

Prueba Ver [51, 130]. ■

Para la observabilidad, se utilizan las salidas futuras para determinar el estado presente. La noción de reconstructibilidad utiliza las salidas pasadas para el mismo asunto. Existe una relación entre observabilidad y reconstructibilidad de manera análoga al caso de la alcanzabilidad y la controlabilidad.

Definición 1.11 *El estado x no es reconstruible en el instante t_1 si para todo t finito $t \leq t_1$, se tiene :*

$$C(t)\Phi(t, t_1)x = 0 \quad \forall \quad t \leq t_1$$

C.C.Reconocimiento

De manera similar a la observabilidad, se define el conjunto de los estados no reconstruibles :

$$\bar{\mathfrak{R}}_{t_1} = \{x \quad \text{no reconstruible en el instante} \quad t_1\}$$

Definición 1.12 *El sistema (1.1) es reconstruible en t_1, (el par $(A(t), C(t))$ es reconstruible en t_1) si el único estado $x \in \mathbb{R}^n$ que no es reconstruible en t_1 es el origen (es decir $\bar{\mathfrak{R}}_{t_1} = \{0\}$).*

El grammiano de reconstructibilidad es, entonces, definido como la matriz $n \times n$

$$\mathfrak{G}_R(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_1) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_1) d\tau$$

Se tiene

$$\mathfrak{G}_O(t_0, t_1) = \Phi^T(t_1, t_0) \mathfrak{G}_R(t_0, t_1) \Phi(t_1, t_0)$$

Igualmente se establecen los siguientes teoremas :

Teorema 1.5 *El sistema (1.1) es reconstruible en t_1 si y solamente si, existe t_0 finito $t_0 < t_1$ tal que*

$$\text{rango } [\mathfrak{G}_R(t_0, t_1)] = n$$

www.bdigital.ula.ve

Teorema 1.6 *Si el sistema (1.1) es observable en t_0 entonces, ese sistema es reconstruible en $t_1 \geq t_0$.*

Si el sistema (1.1) es reconstruible en t_1 entonces él es observable en $t_0 \leq t_1$.

Prueba Ver [78, 130]. ■

1.1.2.4. Ejemplo

Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \end{pmatrix} x(t). \end{aligned}$$

Se tiene :

$$C(\tau)\Phi(\tau, t_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-2\tau + t_0} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathfrak{G}_O(t_0, t_1) = -\frac{1}{4} e^{2t_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t_1} - e^{-4t_0} \end{pmatrix}$$

C.C.Reconocimiento

Ese sistema no es observable puesto que rango$[\mathfrak{G}_O(t_0,t_1)] = 1 < 2$. Los estados inobservables son de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

Analizando las descripciones de los sub-espacios controlables y accesibles, inobservables y no reconstruibles, se puede remarcar la dualidad entre la controlabilidad y la observabilidad, y entre la accesibilidad y la reconstructibilidad. Sin embargo, esas descripciones y condiciones basadas sobre la utilización de los grammianos son muy complejas para ser verificadas en la práctica. Así, trataremos de presentar unas condiciones de rango basadas sobre las matrices originales del sistema.

En base a la Definición 1.8, el sub-espacio inobservable se puede describir de la siguiente forma :

$$\mathfrak{U} = \{x_0 : \quad C(t)\Psi(t)x_0 = 0 \quad \forall \quad t \in [t_0, t_f]\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C(t)\Phi(t)x_0 &= \sum_{v=1}^{\hat{K}} c_v(t) C_v e^{g_1(t)A_1} \cdots e^{g_p(t)A_p} x_0 \\ &= \sum_{v=1}^{\hat{K}} \sum_{n_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_p=0}^{n-1} c_v(t) H_{1n_1}(g_1(t)) \cdots H_{pn_p}(g_p(t)) C_v A_1^{n_1} \cdots A_p^{n_p} x_0. \end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

Se puede pensar el sub-espacio inobservable se define por:

$$\mathfrak{U} = \bigcap_{v=1}^{\hat{K}} \bigcap_{n_1=0}^{n-1} \cdots \bigcap_{n_p=0}^{n-1} \ker\left(C_v A_1^{n_1} \cdots A_p^{n_p}\right), \tag{1.12}$$

pero, es necesario que las coeficientes $a_1(t), \ldots, a_{\hat{p}}(t)$, $c_1(t), \ldots, c_{\hat{K}}(t)$ satisfacen unas condiciones suplementarias.

A fin de establecer las condiciones con respecto a los coeficientes, se puede utilizar el teorema de eliminación de Diop, [20]. En el caso general, este teorema indica que si se tiene un sistema non-lineal descrito por :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad y(t) = g(x(t), u(t)), \tag{1.13}$$

donde $f(\cdot), g(\cdot)$ son funciones polinomiales, entonces existen dos polinomios diferenciales

$$P(u, \dot{u}, \ldots, y, \dot{y}, \ldots), \qquad Q(u, \dot{u}, \ldots, y, \dot{y}, \ldots),$$

C.C.Reconocimiento

no triviales de tal manera que la ecuación entrada-salida

$$P(u, \dot{u}, \ldots, y, \dot{y}, \ldots) = 0, \tag{1.14}$$

con

$$Q(u, \dot{u}, \ldots, y, \dot{y}, \ldots) \neq 0, \tag{1.15}$$

es equivalente a la descripción de estado dada por (1.13). Además, la eliminación de estado se puede obtener por medio de un algoritmo algebraico en un número finito de pasos, [20]. Si (u, x, y) es une solución del sistema en espacio de estado, entonces u, y será solución de la descripción entrada-salida en une extensión apropiada de cuerpos diferenciales.

Para encontrar las condiciones sobre los coeficientes a_i, c_v, a fin que $\mathfrak{U}$ sea el sub-espacio inobservable, se supone que existen unos estados $\zeta \in \mathfrak{U}$, indistinguibles del estado nulo, es decir,

$$t \longrightarrow C(t)\Psi(t)\zeta = 0, \quad \text{para todo} \quad t \in [0, t_f].$$

Entonces, en el intervalo donde $\Psi(t)$ permite una representación por productos de exponenciales, se obtiene

www.bdigital.ula.ve

$$0 = \sum_{v=1}^{\hat{K}} \sum_{n_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_p=0}^{n-1} c_v(t) H_{1n_1}(g_1(t)) \cdots H_{pn_p}(g_p(t)) C_v A_1^{n_1} \cdots A_p^{n_p} \zeta. \tag{1.16}$$

Por lo tanto, un sistema dinámico se puede definir a partir de la ecuación de Wei-Norman, la cual se describe por :

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{p} e^{x_1(t)\Gamma_1} \cdots e^{x_{i-1}(t)\Gamma_{i-1}} E_{ii} \right)^{-1} a(t), \quad x(0) = \zeta$$

y puesto que $\zeta \in \mathfrak{U}$, la salida está dada por (1.16).

Sobre ese sistema no se puede aplicar, de manera directa, la eliminación de estados de Diop a causa de la presencia de los términos exponenciales y trigonométricos. A partir de eso términos se puede introducir nuevos estados de tal manera que el sistema extendido sea polinomial. Así, considérese la representación del sistema en base a una ecuación diferencial y de una inecuación diferencial entre las entradas y las salidas, las cuales son descritas por (1.14) y (1.15). Dado que $y = 0$, para ζ inobservable, se obtienen las

C.C.Reconocimiento

condiciones con respecto a los coeficientes $a_1(t), \ldots, a_{\hat{p}}(t)$ y $c_1(t), \ldots, c_{\hat{K}}(t)$, [114, 119], los cuales son dados por :

$$P(a, \dot{a}, \ldots, c, \dot{c}, \ldots) \neq 0 \tag{1.17}$$

o

$$Q(a, \dot{a}, \ldots, c, \dot{c}, \ldots) = 0, \tag{1.18}$$

y deben ser satisfechas, para que el sub-espacio inobservable sea definido por (1.12).

Como ejemplo, considérese el sistema descrito por (1.10), con una salida dada por

$$y(t) = \begin{pmatrix} c_1(t)x_1(t) \\ c_2(t)x_2(t) \\ c_3(t)x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Se sabe que el álgebra de Lie generada por las matrices $A(t)$ del sistema, A_1, A_2, A_3, representa una base. La ecuación de Wei-Norman es dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(g_2(t)) \\ 0 & \cos(g_1(t)) & \sin(g_1(t))\cos(g_2(t)) \\ 0 & -\sin(g_1(t)) & \cos(g_1(t))\cos(g_2(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{g}_1(t) \\ \dot{g}_2(t) \\ \dot{g}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}.$$

www.bdigital.ula.ve

Como

$$C(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si $c_1(t)$ o $c_3(t)$ no son funciones nulas, entonces

$$\bigcap_{t \in [0, t_f]} \ker(C(t))\Psi(t) = 0;$$

la misma situación está presente si $c_1(t)$, $c_3(t)$ son funciones nulas pero $g_3(t) \neq 0$. En los dos casos el sistema es observable.

En resumen, para que el sub-espacio inobservable sea la recta $\left\{(0 \;\; 0 \;\; z)^T : \quad z \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^3$, entonces

1. $c_1(t) = 0$, $c_3(t) = 0$ en $[0, t_f]$,

2. $c_2(t) \neq 0$ sobre un sub-intervalo de $[0, t_f]$,

3. $g_3(t) = 0$ para todo $t \in [0, t_f]$.

C.C.Reconocimiento

A partir de la última condición, $g_3(t) = 0$, la ecuación de Wei-Norman es, por consiguiente, dada por :

$$\begin{aligned} \dot{g}_1(t) &= a_1(t), \\ \dot{g}_2(t)\cos(g_1(t)) &= a_2(t), \\ -\dot{g}_2(t)\sin(g_1(t)) &= a_3(t), \end{aligned}$$

con $g_1(0) = 0$, $g_2(0) = 0$, $g_3(0) = 0$. Así,

$$\tan(g_1(t)) = -\frac{a_3}{a_2}.$$

Por derivación de esta última ecuación

$$\dot{g}_1(t)\left(1 + \tan^2(g_1(t))\right) = a_1(t)\left(\frac{a_3^2(t)}{a_2^2(t)} + 1\right),$$

y

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{a_3}{a_2}\right) = \frac{\dot{a}_2(t)a_3(t) - \dot{a}_3(t)a_2(t)}{a_2^2(t)},$$

www.bdigital.ula.ve

entonces, por comparación

$$\dot{a}_2(t)a_3(t) - \dot{a}_3(t)a_2(t) = a_1(t)\left(a_1^2(t) + a_2^2(t)\right), \qquad a_2(t) \neq 0.$$

El sub-espacio inobservable del sistema es el sub-espacio $\left\{(0 \;\; 0 \;\; z)^T\right\}$ si y solamente si

$$\begin{aligned} c_1(t) &= 0, \\ c_2(t) &= 0 \\ \dot{a}_2(t)a_3(t) - \dot{a}_3(t)a_2(t) &= a_1(t)\left(a_1^2(t) + a_2^2(t)\right), \\ a_2(t) &\neq 0, \\ a_3(t) &\neq 0. \end{aligned}$$

Lema 1.2 *Condición de Observabilidad :*
Si los coeficientes $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{\hat{p}}(t)$ y los coeficientes $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_{\hat{K}}(t)$ son tales que la condición algebraica-diferencial

$$P(a, \dot{a}, \ldots, c, \dot{c}, \ldots) \neq 0$$

o

$$Q(a, \dot{a}, \ldots, c, \dot{c}, \ldots) = 0,$$

C.C.Reconocimiento

es satisfecha en todos los intervalos definidos por $[t, t_f]$*;* $0 \leq t \leq t_f$*, entonces el sistema (1.1) es* observable *si y solamente si la condición siguiente se satisface*

$$\mathfrak{O} = \sum_{j=1}^{\hat{K}} \sum_{n_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_p=0}^{n-1} Im \left(A_1^{T^{n_1}} A_2^{T^{n_2}} \cdots A_p^{T^{n_p}} C_j^T \right) = \mathbb{R}^n. \tag{1.19}$$

De manera equivalente, si el sub-espacio no observable

$$\mathfrak{U}_o = \bigcap_{j=1}^{\hat{K}} \bigcap_{n_1=0}^{n-1} \cdots \bigcap_{n_p=0}^{n-1} \ker \left(C_j A_1^{n_1} A_2^{n_2} \cdots A_p^{n_p} \right) = 0. \tag{1.20}$$

Prueba Ver [119, 114]. ■

Otra manera de evaluar la observabilidad de los sistemas LTV es utilizando el concepto de sistema *diferencialmente uniformemente observable*, [77].

Se dice que el sistema (1.1) es *diferencialmente uniformemente observable*, esto es, el par $(A(t), C(t))$ es diferencialmente uniformemente observable si y solamente si el rango de $\mathfrak{M}(t) = n$ para todo $t \geq t_0$, donde $\mathfrak{M}(t)$ es la matriz de observabilidad definida por

www.bdigital.ula.ve

$$\mathfrak{M}(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

con

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= C(t) \\ Q_2(t) &= Q_1(t)A(t) + \dot{C}(t) \\ &\vdots \\ Q_i(t) &= Q_{i-1}(t)A(t) + \dot{Q}_{i-1}; \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Finalmente, si se supone que la ecuación de Wei-Norman, para el sistema (1.1), es generico, es decir para toda base del álgebra de Lie, las componentes de la solución de la ecuación de Wei-Norman son todas diferentes de cero, entonces los enunciados siguientes son válidos :

1. Los sub-espacios de *controlabilidad* y *alcanzabilidad* coinciden.

C.C.Reconocimiento

2. El sub-espacio de alcanzabilidad es $A(t)$-invariante, (ver la Sección A.1.1 en el Anexo A).

3. El sub-espacio no observable es $A(t)$-invariante, (ver la Sección A.1.1 en el Anexo A).

1.1.2.5. Construcción de los Observadores

En base a la definición de la observabilidad de los sistemas, se desea construir los denominados estimadores de estados, elementos fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

Considérese el sistema dinámico dado en (1.1) y derivemos la salida :

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \left(\dot{C}(t) + C(t)A(t)\right)x(t) + C(t)B(t)u(t), \\
\ddot{y}(t) &= \left(\ddot{C}(t) + 2\dot{C}(t)A(t) + C(t)\dot{A}(t) + C(t)A^2(t)\right)x(t) + \left(2\dot{C}(t)B(t) + C(t)\dot{B}(t) + \right. \\
&\quad \left. + C(t)A(t)B(t)\right)u(t) + C(t)B(t)\dot{u}(t), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

Puesto que el rol de los términos que contienen las entradas no es importante, se puede notar que

$$\begin{aligned}
D_1(u) &= C(t)B(t)u(t), \\
D_2(u) &= \left(2\dot{C}(t)B(t) + C(t)\dot{B}(t) + C(t)A(t)B(t)\right)u(t) + C(t)B(t)\dot{u}(t), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Considérense los coeficientes de $x(t)$ sobre las bases $A_1, A_2, \ldots, A_p$ y $C_1, C_2, \ldots, C_K$. Así :

$$\begin{aligned}
\dot{C}(t) + C(t)A(t) &= \sum_{v=1}^{K} \dot{c}_v(t)C_v + \sum_{v=1}^{K}\sum_{i=1}^{p} c_v(t)a_i(t)C_vA_i, \\
\ddot{C} + 2\dot{C}A + C\dot{A} + CA^2 &= \sum_{v=1}^{K} \ddot{c}_v(t)C_v + \sum_{v=1}^{K}\sum_{i=1}^{p} \left(2\dot{c}_v(t)a_i(t) + c_v(t)\dot{a}_i(t)\right)C_vA_i + \\
&\quad + \sum_{v=1}^{K}\sum_{i_1=1}^{p}\sum_{i_2=1}^{p} c_v(t)a_{i_1}(t)a_{i_2}(t)C_vA_{i_1}A_{i_2}.
\end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

Sea la representación matricial de la aplicación lineal $\mathfrak{X} \longrightarrow [A_i, \mathfrak{X}]$, con respecto a la base $A_1, A_2, \ldots, A_p$, denotada por $\Gamma_i = \left(\Gamma^m_{i,j}\right)^p_{m=1,j=1}$, donde m es el índice de la fila y j es el índice de la columna. $\Gamma^m_{i,j}$ son los parámetros de estructura del álgebra de Lie, [8]. Por consecuencia, para $i_1 < i_2$

$$A_{i_1}A_{i_2} = A_{i_2}A_{i_1} + \sum_{i=1}^{p} \Gamma^i_{i_1,i_2} A_i, \tag{1.22}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\ddot{C} + 2\dot{C}A + C\dot{A} + CA^2 &= \sum_{v=1}^{K} \ddot{c}_v(t) C_v + \\
&\sum_{v=1}^{K}\sum_{i=1}^{p} \left(2\dot{c}_v(t)a_i(t) + c_v(t)\dot{a}_i(t) + c_v(t) \sum_{i_1<i_2}^{p} a_{i_1}(t)a_{i_2}(t)\Gamma^i_{i_1,i_2} \right) C_v A_i \\
&+2\sum_{v=1}^{K}\sum_{i_1>i_2}^{p} c_v(t)a_{i_1}(t)a_{i_2}(t) C_v A_{i_1}A_{i_2} + \sum_{v=1}^{K}\sum_{i=1}^{p} c_v(t)a_i^2(t) C_v A_i^2,
\end{aligned}$$

la cual tiene la forma

www.bdigital.ula.ve

$$\sum_{v=1}^{K}\sum_{n_p=0}^{n-1}\cdots\sum_{n_1=0}^{n-1} P_{2,v,\underline{n}}\left(a_1,\ldots,a_p,c_1,\ldots,c_K\right) C_v A_p^{n_p}\cdots A_1^{n_1},$$

en relación a los polinomios diferenciales $P_{k,\underline{n}}(a,c)$ considerados como coeficientes. $\underline{n}$ es el multi-índice $\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_p)$.

Así, por ejemplo, a partir de la ecuación anterior y seleccionando $\underline{n} = (0,\ldots,0,1,0\ldots,0) = e_i$, con el único 1 en la posición i, se obtiene :

$$P_{2,v,e_i}(a,c) = 2\dot{c}_v a_i + c_v\dot{a}_i + c_v \sum_{i_1<i_2} a_{i_1}a_{i_2}\Gamma^i_{i_1,i_2}.$$

De manera recursiva, para la l-ésima derivada de la salida, se obtiene

$$\begin{aligned}
y^{(l)} &= \left(\sum_{v=1}^{K}\sum_{n_p=0}^{n-1}\cdots\sum_{n_1=0}^{n-1} P_{l,v,\underline{n}}(a,c) C_v A_p^{n_p} A_{p-1}^{n_{p-1}}\cdots A_1^{n_1} \right) x + \\
&+D_l(u).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

A partir de la ecuación de commutación dada en (1.22), derivando (1.23), entonces se

C.C.Reconocimiento

obtiene

$$\begin{aligned} y^{(l+1)} &= \left(\sum_{v=1}^{K} \sum_{n_p=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_1=0}^{n-1} \frac{d}{dt} P_{l,v,\underline{n}}(a,c) C_v A_p^{n_p} A_{p-1}^{n_{p-1}} \cdots A_1^{n_1} \right) x + \\ &+ \left(\sum_{v=1}^{K} \sum_{n_p=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_1=0}^{n-1} P_{l,v,\underline{n}}(a,c) \sum_{i=1}^{p} a_i(t) C_v A_p^{n_p} A_{p-1}^{n_{p-1}} \cdots A_1^{n_1} A_i \right) x + \\ &+ \left(\sum_{v=1}^{K} \sum_{n_p=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_1=0}^{n-1} P_{l,v,\underline{n}}(a,c) C_v A_p^{n_p} A_{p-1}^{n_{p-1}} \cdots A_1^{n_1} \right) B(t)u + \frac{d}{dt} D_l(u). \end{aligned}$$

Por consecuencia, se puede deducir que :

$$D_{l+1}(u) = \left(\sum_{v=1}^{K} \sum_{n_p=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_1=0}^{n-1} P_{l,v,\underline{n}}(a,c) C_v A_p^{n_p} A_{p-1}^{n_{p-1}} \cdots A_1^{n_1} \right) B(t)u + \frac{d}{dt} D_l(u).$$

Es necesario mostrar que $\frac{d}{dt} P_{l,k,\underline{n}}$(a,c) es un polinomio diferencial. Se puede notar que ello es una implicación de las reglas de derivación. Así, la única cuestión que se debe mostrar es que $C_v A_p^{n_p} \cdots A_1^{n_1} A_i$ puede ser representado a partir de una combinación lineal de términos $C_v A_p^{m_p} \cdots A_1^{m_1}$, donde $n_p \geq m_p$, ..., $n_{p+1} \geq m_{p+1}$, $n_i \geq m_i$, $n_{i-1} \geq m_{i-1}$, ..., $n_1 \geq m_1$.

www.bdigital.ula.ve

La prueba se puede construir por inducción a partir del índice global $\sum_{i=1}^{p} m_i$ de los términos :

Si $\sum_{i=1}^{p} n_i = 0$, el enunciado es claro.

Si $\sum_{i=1}^{p} n_i = 1$, por ejemplo, $C_v A_j$ es el término y $j < i$, entonces a partir de la ecuación (1.22) :

$$C_v A_j A_i = C_v A_i A_j + \sum_{k=1}^{p} \Gamma_{i,j}^{k} C_v A_k$$

es la representación deseada.

Supóngase, ahora, que si $\sum_{i=1}^{p} n_i = \tilde{p}$, el enunciado sea verdadero. Entonces, considérese un término $C_v A_p^{n_p} \cdots A_1^{n_1} A_i$, con $\sum_{i=1}^{p} n_i = \tilde{p} + 1$. Se sabe que :

$$A_1^{n_1} A_i = A_1^{n_1 - 1} \left(A_1 A_i \right);$$

entonces si $n_1 > 0$, $i > 1$,

$$C_v A_p^{n_p} \cdots A_1^{n_1 - 1} A_1 A_i = C_v A_p^{n_p} \cdots A_1^{n_1 - 1} A_i A_1 + \sum_{k=1}^{p} \Gamma_{1,i}^{k} C_v A_p^{n_p} \cdots A_1^{n_1 - 1} A_k.$$

C.C.Reconocimiento

Para los términos en la suma, el enunciado es verdadero, puesto que $n_p + n_{p-1} + \cdots + n_2 + (n_1 - 1) = \tilde{p}$.

Si $n_1 = 0$, se aplica el primer término, donde $n_j \neq 0$. Si $i = 1$,

$$A_1^{n_1} A_1 = A_1^{n_1+1},$$

está bajo la forme deseada.

Si $n_1 - 1 > 0$, se puede continuar la commutación hasta obtener

$$C_v A_p^{n_p} \cdots A_2^{n_2} A_i A_1^{n_1} + \text{términos de orden inferior.}$$

Si $n_2 > 0$, y $2 < i$, se puede utilizar la ecuación de commutación siguiente

$$A_2 A_i = A_i A_2 + \sum_{k=1}^{p} \Gamma_{2,i}^k A_k,$$

hasta obtener

$$C_v A_p^{n_p} \cdots A_i^{n_i} A_i A_{i-1}^{n_{i-1}} \cdots A_1^{n_1} + \text{términos de orden inferior.}$$

www.bdigital.ula.ve

Sin embargo, $A_i^{n_i} A_i = A_i^{n_i+1}$, por consecuencia el primer término tiene la forme deseada, y los términos de orden mas pequeño, por inducción, son combinaciones lineales de los términos deseados. Sustituyendo esas expresiones en la ecuación original, se obtiene la representación deseada para la derivada de la salida.

En base a la representación de la derivada de la salida, ahora, se puede construir un *observador generalizado* :

Sean $G_0, G_1, \ldots, G_r$ unas ganancias que pueden ser, en principio, unas fracciones diferenciales de los coeficientes $a_1, \ldots, a_p$ y $c_1, \ldots, c_K$. Una generalización para el observador clásico de Luenberger, [61], para el sistema dado en (1.1), es definido por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= Ax + Bu + G_0 (y - C\hat{x}) + G_1 \left(\dot{y} - (\dot{C} + CA)\hat{x} - CBu \right) + \cdots + \\ &\quad + G_r \left(y^{(r)} - \sum_{v=1}^{K} \sum_{n_p=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_1=0}^{n-1} P_{r,v,\underline{n}}(a,c) C_v A_p^{n_p} \cdots A_1^{n_1} \hat{x} - D_r(u) \right) \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde t es omitido por simplicidad de las notaciones. Ver [115, 119, 120].

C.C.Reconocimiento

La ecuación dinámica para el error de estimación, $e = x - \hat{x}$, es

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \Big(A - G_0C - G_1\left(\dot{C} + CA\right) - \cdots - \\ &\quad -G_r \sum_{v=1}^{K}\sum_{n_p=0}^{n-1}\cdots\sum_{n_1=0}^{n-1} P_{r,v,\underline{n}}(a,c)C_vA_p^{n_p}\cdots A_1^{n_1}\Big)\, e. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Se desea encontrar unas condiciones para las cuales la dinámica del error de estimación sea asintóticamente estable.

Supóngase que la matriz dinámica del sistema y las matrices de ganancias se descomponen siguiendo el sub-espacio observable y el sub-espacio inobservable, (descomposición de Kalman, [51]) :

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & 0 \\ A_{21}(t) & A_{22}(t)\end{pmatrix}, \qquad G_i = \begin{pmatrix} G_{i\mathfrak{O}} \\ G_{i\mathfrak{U}}\end{pmatrix}.$$

Si les matrices $F_j = (0 \quad \tilde{F}_j)^T$ definen una base $\{F_j\}$ del espacio vectorial de las aplicaciones lineales del sub-espacio de las salidas al sub-espacio inobservable, entonces, cada una de las G_i es representada por :

$$G_i = \sum_{v=1}^{K}\sum_{n_p=0}^{n-1}\cdots\sum_{n_1=0}^{n-1} g_{i,v,\underline{n}}A_1^{T^{n_1}}A_2^{T^{n_2}}\cdots A_p^{T^{n_p}}C_v^T + \sum_j g_{ij}F_j.$$

www.bdigital.ula.ve

Así, la ecuación del error puede escribirse por bloques como sigue :

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\mathfrak{O}} &= \Bigg(A_{11} - \sum_{l=1}^{K}\sum_{v=1}^{K}\sum_{n_p=0}^{n-1}\cdots\sum_{n_1=0}^{n-1} g_{0,v,\underline{n}}c_lA_1^{T^{n_1}}\cdots A_p^{T^{n_p}}C_v^TC_l - \cdots - \\ &\quad -\sum_{l=1}^{K}\sum_{m_p=0}^{n-1}\cdots\sum_{m_1=0}^{n-1}\sum_{v,\underline{n}} g_{r,v,\underline{n}}P_{r,l,\underline{m}}A_1^{T^{n_1}}\cdots A_p^{T^{n_p}}C_v^TC_lA_p^{m_p}\cdots A_1^{m_1}\Bigg)\, e_{\mathfrak{O}}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

donde $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_p)$ y $\sum_{v,\underline{n}} = \sum_{v=1}^{K}\sum_{n_p=0}^{n-1}\cdots\sum_{n_1=0}^{n-1}$.

Para la parte inobservable, la dinámica se describe por :

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\mathfrak{U}} &= A_{22}e_{\mathfrak{U}} + \Bigg(A_{21} - \sum_j\sum_{v=1}^{K} g_{0j}c_vF_jC_v - \cdots - \\ &\quad -\sum_j\sum_{v,\underline{n}} g_{rj}P_{r,v,\underline{n}}(a,c)F_jC_vA_p^{n_p}\cdots A_1^{n_1}\Bigg)\, e_{\mathfrak{O}}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

El bloque A_{22} no puede ser modificado en razón de las estructuras de las matrices :

$$\begin{aligned} A_1^{T^{n_1}}\cdots A_p^{T^{n_p}}C_v^TC_lA_p^{m_p}\cdots A_1^{m_1} &= \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \\ F_jC_vA_p^{n_p}\cdots A_1^{n_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

Se dice, por lo tanto, que la matriz

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{011} & A_{012} \\ A_{021} & A_{022} \end{pmatrix}$$

es alcanzable si existe un observador correspondiente a las ganancias $G_0, G_1, \ldots, G_r$, de manera que la ecuación del error sea dada por:

$$\dot{e} = A_0 e.$$

Ver [119].

Con relación a la descomposición ortogonal del espacio de estados :

$$S_{\mathfrak{O}} \oplus S_{\mathfrak{U}} = \mathbb{R}^n,$$

une matriz A_0 es alcanzable si y solamente si

1. $A_{012} = 0$,

2. $A_{022} = A_{22}$, (la matriz inobservable),

www.bdigital.ula.ve

bajo una condición algebraica-diferencial sobre los coeficientes a, c, la misma que ha sido dada en el Lema 1.2, la cual expresa el hecho que las matrices en (1.26) y (1.27) tienen un rango máximo, [91, 119].

La existencia de las ganancias que satisfacen las condiciones de alcanzabilidad, es dada por :

$$\begin{aligned}
&A_{11} - \sum_{l=1}^{K}\sum_{v=1}^{K}\sum_{n_p=0}^{n-1}\cdots\sum_{n_1=0}^{n-1} g_{0,v,\underline{n}} c_l A_1^{T^{n_1}} \cdots A_p^{T^{n_p}} C_v^T C_l - \cdots - \\
&- \sum_{l=1}^{K}\sum_{m_p=0}^{n-1}\cdots\sum_{m_1=0}^{n-1}\sum_{v,\underline{n}} g_{r,v,\underline{n}} P_{r,l,\underline{m}} A_1^{T^{n_1}} \cdots A_p^{T^{n_p}} C_v^T C_l A_p^{m_p} \cdots A_1^{m_1} = A_{011}, \\
&A_{21} - \sum_{j}\sum_{v=1}^{K} g_{0j} c_v F_j C_v - \cdots - \\
&- \sum_{j}\sum_{v,\underline{n}} g_{rj} P_{r,v,\underline{n}}(a,c) F_j C_v A_p^{n_p} \cdots A_1^{n_1} = A_{021},
\end{aligned}$$

y representa la condición de observabilidad dada en el Lema 1.2.

Por consiguiente, se puede afirmar que un sistema es detectable si existe un observador generalizado con una dinámica para el error asintóticamente estable.

C.C.Reconocimiento

Corolario 1.2 *Si la condición algebraica-diferencial sobre las coeficientes a y c dada en el Lema 1.2 es satisfecha, entonces el sistema (1.1) es detectable si y solamente si la dinámica inobservable*

$$\dot{e}_{\mathfrak{U}}(t) = A_{22}(t)e_{\mathfrak{U}}(t) \tag{1.28}$$

es asintóticamente stable.

Prueba Puesto que el sistema, bajo una condición algebraica-diferencial sobre los coeficientes a_i y c_k, es alcanzable, [119, 120], se puede asignar, por ejemplo, la matriz

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & A_{22}(t) \end{pmatrix},$$

donde, la ecuación del error es dada por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\mathfrak{O}}(t) &= -e_{\mathfrak{O}}(t), \\ \dot{e}_{\mathfrak{U}}(t) &= A_{22}(t)e_{\mathfrak{U}}(t); \end{aligned}$$

la cual es asintóticamente estable si y solamente si (1.28) es asintóticamente estable. ■

www.bdigital.ula.ve

En la concepción del observador, se puede notar la presencia de las derivadas de la entrada. En la Sección 1.3 relativa a los sistemas inversos, se mostrará que es posible hacer una pequeña modificación en la construcción del observador a fin de evitar la derivación de la entrada.

1.1.3. Los sistemas lineales invariantes en el tiempo, LTI

Considérese el sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1.29}$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$ y $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Así, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

Como se sabe, la noción de controlabilidad está ligada a la existencia de una señal de control que permita la convergencia hacia el estado nulo en un tiempo finito. Así, en el caso particular de los sistemas LTI, es posible de establecer las condiciones siguientes :

1. **La Condición de Controlabilidad**.

C.C.Reconocimiento

El sistema (1.29) es completamente *controlable* si y solamente si, la condición de rango siguiente es satisfecha :

$$\text{rango}\left(B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B\right) = n. \tag{1.30}$$

Esta condición, desde el punto de vista geométrico, se puede interpretar como el hecho que las interacciones entre los modos del sistema y las señales de control dependen de B, quien define la inter-conexión del ambiente exterior con los modos del sistema. Esas interacciones dependen, por lo tanto, de $\mathcal{B} = Im(B)$. Los modos del sistema que son susceptibles de seguir la acción del control definiendo el *sub-espacio controlable*, el cual se establece por :

$$\mathcal{C} =< A|\mathcal{B} >= \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{B}. \tag{1.31}$$

Así, el sub-espacio controlable $\mathcal{C}$ es el sub-espacio A-invariante mas pequeño del espacio de estado que contiene a $\mathcal{B}$.

La condición de controlabilidad se traduce en lo siguiente :

www.bdigital.ula.ve

El sistema (1.29) es completamente *controlable* si y solamente si

$$\mathcal{C} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i\mathcal{B} = \sum_{i=0}^{n-1} Im(A^iB) = \mathbb{R}^n. \tag{1.32}$$

2. **La Condición de Observabilidad**.

La condición de observabilidad es la siguiente :

El sistema (1.29) es observable si y solamente si la condición de rango siguiente es satisfecha :

$$\text{rang}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \tag{1.33}$$

De manera equivalente, esta condición, en el sentido geométrico, se define por :

El sistema (1.29) es completamente *observable* si y solamente si

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(CA^i) = 0. \tag{1.34}$$

C.C.Reconocimiento

El sub-espacio A-invariante mas grande del espacio de estado contenido en $\ker(C)$ es el sub-espacio inobservable. Así, se puede caracterizar un sistema observador como un sistema dinámico que evoluciona en $\ker(C)$. Ese dispositivo dinámico genera la información de la parte del sistema que la salida no puede suministrar directamente. El observador depende de $\mathcal{B} = Im\ (B)$ y del $\ker(C)$. Es decir, si $< A|\mathcal{B} > \subset \ker(C)$ la acción del control no influencia la salida.

Definición 1.13 *El sub-espacio no observable $U_o \subset \mathbb{R}^n$ del par (C, A) se define por*

$$U_o = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(CA^i). \tag{1.35}$$

Se sabe que $AU_o \subset U_o$, es decir, U_o es un sub-espacio A-invariante. U_o es el sub-espacio A-invariante mas grande contenido en $\ker(C)$. Entonces, para todo $\tilde{x} \in U_o$ la salida $y = C\tilde{x} = 0$.

Se puede definir el sub-espacio cociente $\mathbb{R}^n/U_o$ como el sub-espacio observable $\mathcal{O}$. Entonces se satisface la siguiente igualdad :

www.bdigital.ula.ve

$$\dim(\mathcal{O}) = n - \dim(U_o).$$

Sea

$$P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{O}$$

la projección canónica correspondiente, y sea la transformación lineal

$$A_o : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$$

la aplicación inducida en $\mathcal{O}$ por A. Dado que $\ker(C) \supset U_o$, existe una aplicación

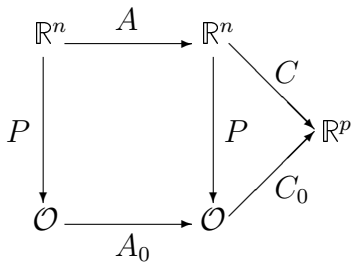
$$C_o : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

tal que

$$C_o P = C.$$

De manera esquemática, esto se representa por :

C.C.Reconocimiento



Lema 1.3 *El par* (A_o, C_o) *es observable.*

Prueba Ver [128]. ■

Por otro lado, aplicando el concepto de dualidad, el sub-espacio controlable se puede definir por

$$\mathcal{C} = \langle A|\mathcal{B}\rangle = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{B}. \tag{1.36}$$

Se nota que $A\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$, entonces, $\mathcal{C}$ es el sub-espacio A-invariante mas pequeño que contiene a $\mathcal{B}$.

www.bdigital.ula.ve

El sub-espacio no controlable, es decir, el sub-espacio U_c que no se le puede alcanzar por un control $u(\cdot) \in \mathbb{R}^q$, es definido como el sub-espacio cociente

$$U_c = \mathbb{R}^n/\mathcal{C}$$

Lema 1.4 *El par* (A, C) *es observable si y solamente si* $\left(A^T, C^T\right)$ *es controlable.*

Prueba

La prueba se obtiene considerando el sub-espacio ortogonal $U_o^{\perp}$ del sub-espacio inobservable U_o.

$$\begin{aligned} U_o^{\perp} &= \left[\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker\left(CA^i\right)\right]^{\perp} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\ker\left(CA^i\right)\right]^{\perp} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} Im\ \left(A^{T\,i} C^T\right) = \langle A^T | Im\ (C^T)\rangle. \end{aligned}$$

■

C.C.Reconocimiento

1.1.3.1. Detectabilidad de los sistemas LTI

Una condición estructural mas débil que la observabilidad, para el sistema (1.29), es la *détectabilité*, es decir, la observabilidad de los modos inestables. Se desea saber si los modos inestables del sistema son observables o, de manera equivalente, si el sub-espacio inobservable corresponde a los modos estables del sistema.

Puesto que, el polinomio minimal de A es el polinomio $\alpha(\lambda)$ de grado mas pequeño tal que $\alpha(A) = 0$, entonces

$$\alpha(\lambda) = \alpha^+(\lambda)\alpha^-(\lambda), \tag{1.37}$$

donde los ceros de $\alpha^+(\lambda)$ pertenecen al semi plano cerrado derecho del plano complejo $\mathbb{C}$, y los ceros de $\alpha^-(\lambda)$ están en el semi plano izquierdo del plano complejo $\mathbb{C}$, entonces se pueden definir los sub-espacios siguientes :

$$\mathbb{R}^+(A) = \ker \alpha^+(A) \tag{1.38}$$

$$\mathbb{R}^-(A) = \ker \alpha^-(A) \tag{1.39}$$

Definición 1.14 *El par (A, C) es detectable si*

www.bdigital.ula.ve

$$U_o = \bigcap_{i=1}^{n-1} \ker\left(CA^i\right) \subset \mathbb{R}^-(A). \tag{1.40}$$

Es decir, el sistema (1.29) es detectable si el sub-espacio inobservable U_o es un sub-espacio propio del sub-espacio $\mathbb{R}^-(A)$ de los modos estables de A.

En otros términos, y desde el punto de vista de la utilización de los *grammianos*, se puede derivar las siguientes condiciones :

El sistema (1.29) es observable si y solamente si el grammiano

$$G_o(t_f) = \int_0^{t_f} \exp(A^T t) C^T C \exp(At) dt. \tag{1.41}$$

es regular.

De la condición precedente, el estado inicial se puede calcular a partir de

$$\begin{aligned} G_o(t_f)x_0 &= \int_0^{t_f} \exp(A^T t) C^T [C \exp(At) x_0] dt \\ &= \int_0^{t_f} \exp(A^T t) C^T y_{(x_0,u)}(t) dt - \\ &\quad - \int_0^{t_f} \exp(A^T t) C^T C \int_0^t \exp(A(t-\tau)) B u(\tau) d\tau dt. \end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

Entonces, ya que el grammiano es regular, se obtiene

$$\begin{aligned} x_0 &= G(t_f)^{-1}\left[\int_0^{t_f}\exp(A^T t)C^T y_{(x_0,u)}(t)dt - \right. \\ &\left. -\int_0^{t_f}\exp(A^T t)C^T C\int_0^t \exp(A(t-\tau))Bu(\tau)d\tau dt\right]. \end{aligned}$$

En el peor de los casos, la inversión de las matrices será mal condicionada y el sistema será, prácticamente, inobservable. Si la condición de observabilidad se satisface, se puede reconstruir el estado. En ese caso, la ecuación dinámica de un observador es dada por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)] \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t), \end{aligned} \tag{1.42}$$

la cual se denomina **observador de Luenberger**, con $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ la ganancia a seleccionar y $\hat{x}(t)$ el estimado del estado $x(t)$.

Si se define el error de estimación de estado por

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{1.43}$$

entonces la dinámica del error será

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= (A - LC)e(t). \end{aligned}$$

Como se sabe, la ganancia L se debe seleccionar de tal manera que el error de estimación converja hacia cero, es decir, el error converge hacia cero para todo estado inicial desconocido si y solamente si, los valores propios de la matriz dinámica del error pertenecen al se mi plano izquierdo complejo.

Así, los valores propios de la matriz $A(L) = A - LC$ pueden ser arbitrariamente ubicados, seleccionando la ganancia L, si y solamente si el sistema (1.29) es observable. En otros términos, si el sistema (1.29) es observable, existe un estimador de estado tal que el error d observación converge hacia cero para todo estado inicial.

1.2. Los sistemas no lineales

En esta sección se presentan algunas nociones sobre las propiedades estructurales de los sistemas no lineales. En particular, se aborda el concepto de observabilidad.

C.C.Reconocimiento

1.2.1. Controlabilidad

Considérese el sistema no lineal representado por :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x,u), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= g(x); \end{aligned} \tag{1.44}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados. f es una familia de campos vectoriales suaves, parametrizados por u. Ello significa que para todo $\overline{u}$ fijo, entonces $f(\cdot, \overline{u})$ es un campo vectorial definido globalmente. $u \in \mathbb{R}^m$ son los control. $y \in \mathbb{R}^p$ son las salidas y $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^P$ es une transformación suave.

Así, se buscan las condiciones para las cuales el estado $x(t_f) = x_f$ puede ser alcanzado en un tiempo finito t_f, a partir del estado inicial x_0, por medio de la selección apropiada del control u. Este es el problema cásico de alcanzabilidad. En el caso de los sistemas no lineales, varios resultados han sido mostrados, [31, 42, 48].

Definición 1.15 *El sistema no lineal (1.44) se dice* controlable *si, cualquiera sean los estados x_0, x_f, existe un tiempo finito t_f y un control admisible u tal que*

www.bdigital.ula.ve

$$x(t_f, t_0, x_0, u) = x_f.$$

Definición 1.16 *Sea el sistema no lineal (1.44). $\mathfrak{A}(t_f, x_0)$ se define como el conjunto de estados alcanzables a partir de x_0 en el tiempo t_f exactamente, es decir*

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(t_f, x_0) &= \{x_f \in \mathbb{R}^n \ \textit{tal que existe una trayectoria} \ \ x(t), \\ &\quad \textit{generada por} \ \ f, \ \ \textit{tal que} \ \ x(0) = x_0 \ \ \textit{y} \ \ x(t_f) = x_f\}. \end{aligned}$$

Se dice que el sistema es fuertemente accesible si para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y para todo $t_f > 0$, el conjunto $\mathfrak{A}(t_f, x_0)$ tiene un interior no vacío, [74].

Una definición muy importante para la accesibilidad está asociada a los sistemas afines :

Considérese el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x) u_j(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x); \end{aligned} \tag{1.45}$$

donde f y $g_1, \ldots, g_m$ son campos vectoriales suaves sobre un dominio abierto y conexo $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$. El control es $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

C.C.Reconocimiento

Definición 1.17 *Sea el sistema dado en (1.45), y sea $\mathfrak{L}^{\infty}(\mathcal{E})$ el álgebra de Lie de los campos vectoriales sobre $\mathcal{E}$. Se define el álgebra de accesibilidad $\mathcal{A}$ como la sub-álgebra mas pequeña de $\mathfrak{L}^{\infty}(\mathcal{E})$ que contiene $f, g_1, \ldots, g_m$.*

Todos los elementos de $\mathcal{A}$ son combinaciones lineales de los corchetes de Lie que se forman a partir del conjunto $\{f, g_1, \ldots, g_m\}$, [74]. La álgebra de accesibilidad $\mathcal{A}$ es involutiva, esto significa que es un sub-espacio lineal tal que, para todo $a, b \in \mathcal{A}$ entonces $[\![a, b]\!] \in \mathcal{A}$.

Sobre el álgebra de accesibilidad se puede definir un sub-espacio vectorial. Entonces, sea $x \in \mathcal{E}$, se define el sub-espacio vectorial $\mathcal{A}(x) \subset \mathbb{R}^n$ par :

$$\mathcal{A}(x) = \{v(x) \quad : \quad v \in \mathcal{A}\}$$

Así, se puede establecer una condición de accesibilidad local :

Teorema 1.7 *Sea el sistema (1.45), con un álgebra de accesibilidad $\mathcal{A}$. Si $\dim(\mathcal{A}(x_0)) = n$, entonces el sistema es accesible, localmente, para todo $t_f > 0$ y para una vecindad V de x_0.*

Prueba Ver [74]. www.bdigital.ula.ve ■

El álgebra de accesibilidad $\mathcal{A}$ da las direcciones posibles bajo las cuales el sistema puede evolucionar, considerando los controles. Esas posibles direcciones son caracterizadas por campos vectoriales que definen un sub-espacio, $\mathcal{A}(x)$. Así, el espacio de estado completo debe estar contenido en ese sub-espacio definido a partir del álgebra de accesibilidad $\mathcal{A}$.

Definición 1.18 *Se define $\mathfrak{A}^V(t_f, x_0)$ como el conjunto de los estados alcanzables a partir del estado x_0 en un tiempo finito $t_f > 0$, siguiendo la trayectoria $x(t)$, $t \leq t_f$, en una vecindad V de x_0.*

Por lo tanto, por definición :

$$\mathfrak{A}^V(t_f, x_0) = \bigcup_{\tau \leq t_f} \mathfrak{A}^V(\tau, x_0).$$

Definición 1.19 *El sistema (1.45) es accesible localmente a partir del estado x_0, si $\mathfrak{A}^V(t_f, x_0)$ contiene un conjunto abierto no vacío de $\mathcal{E}$ para unas vecindades V de x_0 y todo $t_f > 0$.*

Siguiendo esa la definición anterior, se puede establecer el siguiente lema :

C.C.Reconocimiento

Lema 1.5 *Sea el sistema (1.45). Supóngase que*

$$\dim(\mathcal{A})(x_0) = n$$

entonces el sistema es localmente accesible a partir del estado x_0.

Prueba Ver [74]. ■

Si el sistema (1.45) es localmente accesible entonces $\dim(\mathcal{A})(x) = n$ para todo x pertenece a un sub-conjunto denso y abierto de $\mathcal{E}$.

1.2.2. Observabilidad

La noción de observabilidad será considerada sobre la base de la indistinguibilidad de los estados.

Para el sistema (1.45), $y(t, t_0, x_0, u) = h(t, t_0, x_0, u)$ se define como la salida para $u(\cdot)$ y el estado inicial $x(t_0) = x_0$.

Definición 1.20 *Sean dos estados* $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$. *Se dice que ellos son* indistinguibles *al instante* t_0, *denotado por* x_1 I x_2, *si para todo control admisible* u, *la función de salida del sistema,* $t \longmapsto y(t, t_0, x_1, u) = h(x(t, t_0, x_1, u))$, $t \geq t_0$, *para el estado inicial* $x(t_0) = x_1$, *y la función de salida,* $t \longmapsto y(t, t_0, x_2, u) = h(x(t, t_0, x_2, u))$, $t \geq t_0$, *para el estado inicial* $x(t_0) = x_2$, *son idénticamente iguales sobre el dominio común de definición.*

www.bdigital.ula.ve

Por consiguiente, es posible definir el conjunto de los estados indistinguibles. Sea

$$\bar{\mathfrak{O}}_{t_0} = \{x_1, x_2 \quad \text{indistinguibles al instante} \quad t_0\}$$

Definición 1.21 *Un sistema se dice* observable *si para todos* $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$, *ellos son distinguibles; vale decir, si* x_1 I x_2 *entonces* $x_1 = x_2$, *o* $\bar{\mathfrak{O}}_{t_0} = \varnothing$.

Considérese un conjunto abierto $V \subset \mathcal{E}$, el cual contiene x_1 y x_2. Se dice que x_1 y x_2 son V-indistinguibles, denotado por x_1 I^V x_2, si para todo control constante admisible $u = U$, con sus soluciones respectivas que permanecen en V para todo $t \leq t_f$, $t_f > 0$, las funciones de salidas $y(t, t_0, x_1, u)$ y $y(t, t_0, x_2, u)$, respectivamente, son iguales para $t \leq t_f$ sobre el dominio común de definición.

Definición 1.22 *El sistema (1.45) se dice localmente observable en* x_0 *si existe una vecindad* W *alrededor de* x_0 *tal que para toda vecindad* $V \subset W$ *de* x_0, *el estado* x_1 *es distinguible de* x_0, *esto es, la relación* x_0 I^V x_1 *implica que* $x_1 = x_0$.

C.C.Reconocimiento

Un sistema es localmente observable si para cada x_0, él es localmente observable. Por consecuencia, un sistema es localmente observable si todos los estados en una vecindad de x_0 generan unas trayectorias vecinas, pero no idénticas.

Definición 1.23 *Sea el sistema (1.45). El espacio de observación $\mathfrak{O}$ de (1.45) es el espacio lineal en $\mathbb{R}$ de las funciones sobre $\mathcal{E}$, el cual contiene $h_1, h_2, \ldots, h_p$ y todas las derivadas de Lie*

$$L_{X_1} L_{X_2} \cdots L_{X_k} h_j,$$

con $j = 1, 2, \ldots, p$ y todo X_i que pertenecen al conjunto $\{f, g_1, g_2, \ldots, g_m\}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Así, el espacio de observación $\mathfrak{O}$ define la *co-distribución de observabilidad*, [74], es decir, él contiene las funciones de salidas y todas sus derivadas a lo largo de las trayectorias del sistema.

La co-distribución de observabilidad, denotada por $d\mathfrak{O}$, es dada por :

$$d\mathfrak{O}(z) = \operatorname{Im}\{dH(z) \ \text{ tel que } \ H \in \mathfrak{O}\}, \quad z \in \mathcal{E}. \tag{1.46}$$

La co-distribución de observabilidad es involutiva, [74].

En base a esos resultados, se puede establecer el teorema principal para la observabilidad local :

www.bdigital.ula.ve

Teorema 1.8 *Considérese el sistema dado en (1.45). Si se supone que*

$$\dim(d\mathfrak{O}) = n, \tag{1.47}$$

n es el orden del sistema, entonces ese sistema es localmente observable en t_0.

Prueba Ver [74]. ■

La ecuación (1.47) representa la *condición de rango de observabilidad*. Una consecuencia inmediata es que si el sistema satisface la condición de rango de observabilidad, entonces él es localmente observable. Además , si el sistema es localmente observable entonces $\dim(d\mathfrak{O}(x)) = n$ para todo x que pertenece a un sub-conjunto denso y abierto de $\mathbb{R}^n$.

1.2.2.1. La visión algebraica diferencial

La noción de observabilidad presentada precedentemente se apoya sobre la visión de la geometría diferencial. Enseguida se presenta la caracterización de la observabilidad en el marco del álgebra diferencial, (Anexo A).

C.C.Reconocimiento

Sea $\mathfrak{k}$ un campo diferencial dado. Sea $\mathfrak{k} < u >$ el campo diferencial generado por $\mathfrak{k}$ y un conjunto finito $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ de cantidades diferenciales.

Esta representación permite hacer une descripción abstracta de los sistemas dinámicos. En efecto, el conjunto u juega el rol de las variables de entrada o controles, los cuales se suponen independientes. Eso significa que el conjunto u es diferencialmente $\mathfrak{k}$-algebraicamente independiente, ver el Anexe A.

Definición 1.24 *Una dinámica es une extensión diferencial algebraica $\mathfrak{D}/\mathfrak{k} < u >$, la cual es generada de manera finita.*

Un elemento cualquiera de $\mathfrak{D}$ satisface una ecuación diferencial algebraica a coeficientes que son funciones racionales sobre $\mathfrak{k}$ en unas componentes de u y un número finito de sus derivadas.

Puesto que las variables de salida son los sensores respecto a la dinámica, se puede definir una salida como un conjunto finito $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$ en $\mathfrak{D}$. El orden del sistema dinámico se caracteriza por el grado de transcendencia no diferencial de $\mathfrak{D}/\mathfrak{k} < u >$, el cual es finito, por ejemplo n.

www.bdigital.ula.ve

A titulo de ejemplo, considérese un sistema dinámico de orden n, es decir, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, con unas entradas $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ y unas salidas $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$, entonces, en base a la Definición 1.24, el sistema es descrito por :

$$\begin{cases} P_1\left(\dot{x}_1, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\alpha_1)}\right) &= 0 \\ P_2\left(\dot{x}_2, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\alpha_2)}\right) &= 0 \\ & \vdots \\ P_n\left(\dot{x}_n, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\alpha_n)}\right) &= 0 \\ Q_1\left(y_1, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\beta_1)}\right) &= 0 \\ Q_2\left(y_2, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\beta_2)}\right) &= 0 \\ & \vdots \\ Q_p\left(y_p, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\beta_p)}\right) &= 0 \end{cases}$$

donde P_i y Q_j son funciones polinomiales sobre el campo $\mathbb{R}$. En ese contexto, x se denomina estado generalizado.

Por respecto a la definición de la observabilidad, considérese un conjunto z de variables de entradas y de salidas $\{u, y\}$ y un conjunto S de variables de estado x. Entonces un estado x es observable si y solamente si, él es observable con respecto a $\{u, y\}$. Esta

C.C.Reconocimiento

definición puede ser establecida en el marco del álgebra diferencial de la manera siguiente :

Definición 1.25 *Sea $z = \{z_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ un sub-conjunto de $\mathfrak{D}$ en una dinámica dada por $\mathfrak{D}/\mathfrak{k} < u >$. Un elemento $\zeta \in \mathfrak{D}$ es* observable *con respecto a z si es algebraica sobre $\mathfrak{k} < u >$.*

Ello significa que ζ puede expresarse por medio de una función algebraica de las componentes de z y un número finito de sus derivadas.

Así, un sub-conjunto S de $\mathfrak{D}$ es observable con respecto a z si y solamente si, un elemento cualquiera de S es observable con respecto a z.

Si se considera una dinámica extendida, es decir, una dinámica con unas salidas, entonces se tiene la siguiente definición :

Definición 1.26 *Una dinámica $\mathfrak{D}/\mathfrak{k} < u >$ con una salida y es observable si y solamente si, un estado generalizado cualquiera es observable también.*

Esta noción de observabilidad significa que la extensión diferencial $\mathfrak{D}/\mathfrak{k} < u, y >$ es algebraica, es decir, un elemento cualquiera de $\mathfrak{D}$ puede se calcularse a partir de $\mathfrak{k} < u, y >$ a través de una ecuación algebraica no diferencial.

www.bdigital.ula.ve

Por ejemplo, sea el sistema descrito por :

$$\dot{x}_1 = x_1 \quad \dot{x}_2 = x_2 + u; \quad y = x_1 + x_2.$$

Por consecuencia, $x_1 = \frac{1}{2}(y - \dot{y} + u)$ y $x_2 = \frac{1}{2}(y + \dot{y} - u)$, eso significa que el sistema es observable.

1.2.2.2. Diseño de observadores

Enseguida será considerado un nuevo método para la síntesis de observadores para los sistemas no lineales. La idea del diseño del observador está centrada en el teorema de eliminación de estados de Diop, la cual se basa sobre la inyección de la salida y de sus derivadas utilizando las técnicas del algebra diferencial.

Tradicionalmente, la concepción de observadores no lineales está basada sobre la geometría diferencial, por ejemplo, el método denominado "Bracket Vanishing Algorithm", [58, 59]; el "Bracket Spanning Algorithm", [6] y los resultados que son presentados en [89].

C.C.Reconocimiento

La característica común en esos métodos es que los cálculos son muy pesados, a veces, hasta son imposibles.

Para el método que se propone, considérese el sistema no lineal (1.44), con $f(\cdot), g(\cdot)$ funciones polinomiales.

Se trata de reconstruir el estado a partir de un sistema dinámico llamado *observador*, de las entradas y de las salidas del sistema no lineal. Los estados estimados $\hat{x}$, a partir del observador, son tales que, el error de estimación $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ satisface :

$$e(t) \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow \infty.$$

La forme del observador no lineal considerado es la siguiente :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= f(x,u) + \mathrm{D}(x - \hat{x}), \\ \hat{y} &= g(x) + d(x - \hat{x}), \end{aligned} \tag{1.48}$$

donde D y d son las ganancias del observador a seleccionar y $\hat{y}$ es la salida estimada. Además, $e \mapsto \mathrm{D}(e), d(e)$ son funciones algebraicas, tales que $\mathrm{D}(0) = 0$, $d(0) = 0$. Se tiene :

www.bdigital.ula.ve

$$\dot{e} = -\mathrm{D}(e),$$

que es una ecuación algebraica diferencial seleccionada asintóticamente estable. El sistema (1.48) es considerado como un observador.

En efecto, si ahora se considera la eliminación del estado x a partir del sistema :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u), \\ \dot{\hat{x}} &= f(x,u) + \mathrm{D}(x - \hat{x}) \\ y &= g(x), \qquad \hat{y} = g(x) + d(x - \hat{x}). \end{aligned}$$

Se obtiene una ecuación implícita del observador :

$$\mathbf{F}\left(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, u, \dot{u}, \ddot{u}, \ldots, y, \dot{y}, \ldots, \hat{y}, \dot{\hat{y}}, \ldots\right) = 0,$$

con la inecuación :

$$\mathbf{G}\left(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, u, \dot{u}, \ddot{u}, \ldots, y, \dot{y}, \ldots, \hat{y}, \dot{\hat{y}}, \ldots\right) \neq 0.$$

C.C.Reconocimiento

Teorema 1.9 *Supóngase que el sistema (1.44) es observable en el sentido algebraico (ver la definición 1.26). Entonces el estado x del sistema puede ser eliminado a partir de (1.48) a través del algoritmo de eliminación de Diop.*

Prueba

Lea prueba se basa en la definición de la observabilidad en el marco del álgebra diferencial, es decir, todos los elementos de la dinámica son algebraicos, no diferencialmente, sobre el cuerpo diferencial $\mathbb{R} < u, y >$, [21].

■

El método de síntesis, así propuesto, se puede utilizar en el caso de los sistemas lineales. Por simplicidad, considérese un sistema lineal bajo la forme canónica :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + u, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

Entonces, el observador propuesto se puede calcular a partir del sistema :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} \\ \dot{\hat{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \mathrm{D}(x - \hat{x})$$

Los estados se expresan en función de las derivadas de la salida por :

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)}.$$

Sea la matriz de la estructura del sistema denotada por A, el vector $\left(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}\right)^T$ por Y, y $(0, \ldots, 0, 1)^T$ por e_n. Entonces, el observador es dado por:

$$\dot{\hat{x}} = AY + \mathrm{D}(Y - \hat{x}) + e_n u.$$

C.C.Reconocimiento

Por consecuencia, la ecuación dinámica del error $e = x - \hat{x}$ es

$$\dot{e} = -\mathrm{D}e,$$

la cual se selecciona asintóticamente estable.

1.2.2.3. Ejemplos

1. Considérese el sistema, [31] :

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1$$

Por medio de la derivación de la salida : $\dot{y} = x_2^2$ y $\ddot{y} = 2ux_2$, entonces, el observador es descrito por :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2^2 \\ u \end{bmatrix} + \mathrm{D} \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{y} \\ u \end{bmatrix} + \mathrm{D} \begin{bmatrix} y - \hat{x}_1 \\ \frac{\ddot{y}}{2u} - \hat{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

La ecuación del error

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = -\mathrm{D} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

puede ser asintóticamente estable si se selecciona una matriz $-D$ estable.

2. Si se considera el sistema bilineal siguiente, [21] :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ -u_1 & 0 & u_3 \\ -u_2 & -u_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad y = x_2;$$

la cual es observable. La eliminación del estado se logra por derivación de la salida y la eliminación de Gauss elemental. Así,

$$x_1 = \frac{u_3\ddot{y} + (u_1u_2 - \dot{u}_3)\dot{y} + u_3(u_1^2 + u_3^2)}{u_1\dot{u}_3 - \dot{u}_1u_3 - u_2(u_1^2 + u_3^2)}, \tag{1.49}$$

$$x_2 = y, \tag{1.50}$$

$$x_3 = \frac{u_1\ddot{y} - (\dot{u}_1 + u_2u_3)\dot{y} + u_1(u_1^2 + u_3^2)y}{u_1\dot{u}_3 - \dot{u}_1u_3 - u_2(u_1^2 + u_3^2)}. \tag{1.51}$$

C.C.Reconocimiento

Considerando el observador bajo la forma siguiente :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ -u_1 & 0 & u_3 \\ -u_2 & -u_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \\ +\mathrm{D} \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \\ x_3 - \hat{x}_3 \end{bmatrix}, \tag{1.52}$$

la ecuación de error resultante estará dada por :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = -\mathrm{D} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$

Se puede notar que si el sistema lineal $\dot{e} = -\mathrm{D}e$ es asintóticamente estable, el observador (1.52) es convergente. Estos resultados se obtienen por eliminación de estado. Utilizando las ecuaciones (1.49), (1.50), (1.51), para x_1, x_2, x_3, la dinámica del observador se describe por

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_1u_2\ddot{y} - u_2(\dot{u}_1 + u_2u_3)\dot{y} + u_1(u_1\dot{u}_3 - \dot{u}_1u_3)y}{u_1\dot{u}_3 - \dot{u}_1u_3 - u_2(u_1^2+u_3^2)} \\ \dot{y} \\ \frac{-u_2u_3\ddot{y} + u_2(\dot{u}_3 - u_1u_2)\dot{y} - u_3(u_1\dot{u}_3 - \dot{u}_1u_3)y}{u_1\dot{u}_3 - \dot{u}_1u_3 - u_2(u_1^2+u_3^2)} \end{bmatrix} + \\ +\mathrm{D} \begin{bmatrix} \frac{u_3\ddot{y} + (u_1u_2 - \dot{u}_3)\dot{y} + u_3(u_1^2+u_3^2)}{u_1\dot{u}_3 - \dot{u}_1u_3 - u_2(u_1^2+u_3^2)} - \hat{x}_1 \\ y - \hat{x}_2 \\ \frac{u_1\ddot{y} - (\dot{u}_1 + u_2u_3)\dot{y} + u_1(u_1^2+u_3^2)y}{u_1\dot{u}_3 - \dot{u}_1u_3 - u_2(u_1^2+u_3^2)} - \hat{x}_3 \end{bmatrix}.$$

www.bdigital.ula.ve

A continuación se muestran los resultados de las simulaciones para $u_1 = \cos(t)$, $u_2 = -1$, y $u_3 = \sin(t)$, (ver las Figs. 1.1, 1.2). Esas simulaciones ponen a la luz la reconstrucción de la salida a partir del observador de estados, lo cual ilustra la pertinencia del método propuesto.

Para los sistemas no lineales, existen unas entradas universales, es decir, unas entradas que permiten distinguir todos los estados distinguibles, las cuales juegan un rol importante para la concepción de los observadores, [5].

En efecto, si ahora se consideran los controles no universales : $u_1 = u_3 = 1$, $u_2 = 0$ para el ejemplo 2 (sistema bilineal), el sistema obtenido

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3 = -x_2, \quad y = x_2$$

C.C.Reconocimiento

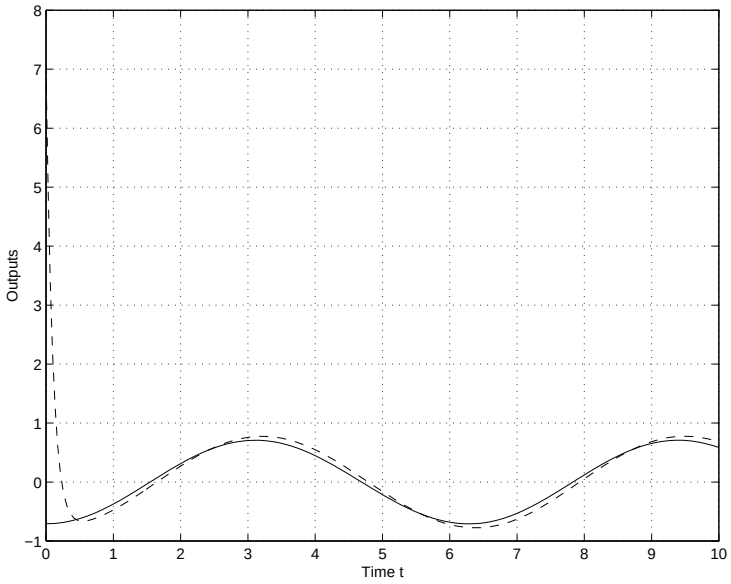


Figura 1.1: La salida verdadera (—) y la salida estimada (- - -) .

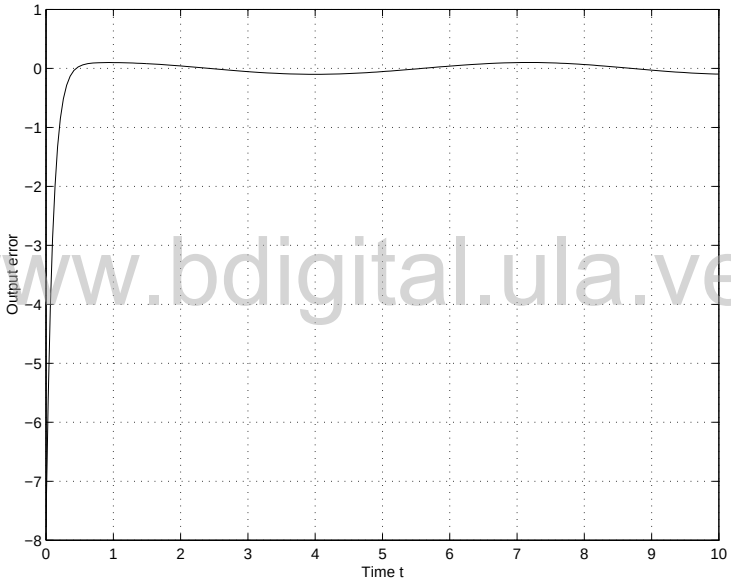


Figura 1.2: El error de las salidas

www.bdigital.ula.ve

no es observable. Luego de la transformación de estados

$$x_4 = x_3 - x_1, \qquad x_5 = x_3 + x_1,$$

el estado inobservable puede ser fácilmente puesto en evidencia

$$\dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -2x_2, \quad \dot{x}_5 = 0.$$

El procedimiento de eliminación permite calcular los estados $x_2 = y$, y $x_4 = \dot{y}$, sin embargo, la relación entrada-salida no permite obtener la variable de estado x_5, $\ddot{y} = \dot{x}_4 = -2y$. Dado que el estado inobservable no es asintóticamente estable, el

C.C.Reconocimiento

sistema no es detectable. Así, un procedimiento general de eliminación de estados no funciona. Considerando la ecuación del observador

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_4 \\ \dot{\hat{x}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{D} \begin{bmatrix} x_2 - \hat{x}_2 \\ x_4 - \hat{x}_4 \\ x_5 - \hat{x}_5 \end{bmatrix},$$

con una matriz de ganancia D asintóticamente estable, el estado x_5 no puede ser eliminado.

Comentario 1.1 *Se puede notar que una prueba rigurosa para el Teorema 1.9 requiere tomar en consideración las entradas universales, las cuales constituyen un verdadero obstáculo para la existencia de los observadores.*

Por otro lado, se debe distinguir, claramente, los observadores inicializados y los observadores no inicializados. Los observadores no inicializados funcionan de manera apropiada para cualquier estado inicial del observador. Por el contrario, la dependencia del observador con respecto a sus estados iniciales produce otra dificultad, se hace necesario conocer esos estados iniciales, [76]. Por ejemplo, sea el sistema

$$\dot{x} = u, \qquad y = \sin(x),$$

mismo que se puede describir por las ecuaciones algébraicas diferenciales

$$\dot{x} = u, \quad (\dot{y})^2 = (uy)^2 + u^2.$$

www.bdigital.ula.ve

A partir de esta última representación, se puede afirmar que el sistema es inobservable en base a la observabilidad caracterizada en el marco del álgebra diferencial, [21]. Si ese sistema es considerado con criterios que involucren los estados iniciales, surge un problema bien complejo, [76].

En resumen, es posible concebir unos observadores para los sistemas no lineales a través de la eliminación de estados. Las dificultades del método están asociadas a la naturaleza de los sistemas no lineales : la excitación y la universalidad de los controles, la dependencia de la convergencia del observador con respecto a los estados iniciales.

La complejidad de los cálculos se debe, básicamente, a la complejidad del algoritmo de eliminación. Con respecto al caso de los sistemas lineales, el método produce los mismos resultados que el observador de Luenberger generalizado, [119].

1.3. Los sistemas inversos

En est sección se presentan unas nociones acerca de los sistemas inversos, los cuales son utilizados varias aplicaciones prácticas : transmisión de información, control de procesos.

C.C.Reconocimiento

En el caso de competencia de este trabajo, los sistemas inversos serán utilizados para la detección y diagnóstico de fallas.

Desde un punto de vista general, a partir de las salidas del sistema original, un sistema inverso permite obtener sus entradas.

Definición 1.27 *Sean los sistemas dinámicos Σ_A y Σ_B. Ellos son llamados* sistemas opuestos *si para todo par entrada-salida (u, y) de Σ_A, entonces (y, u), (y es la entrada y u es la salida), es un par entrada-salida para Σ_B.*

En base a la definición, si Σ_A y Σ_B son sistemas opuestos entonces el espacio de las funciones de entrada de Σ_A es el espacio de las funciones de salida de Σ_B, y viceversa.

Un ejemplo de sistemas opuestos corresponde al caso cuando Σ_A es un integrador, $(\dot{y} = u)$, y Σ_B es un diferenciador, $(y = \dot{u})$.

Definición 1.28 *Sean los sistemas dinámicos $\Sigma_A(x, u, y)$ y $\Sigma_B(z, v, w)$, donde x y z, u y v, y y w son los estados, las entradas y las salidas para Σ_A y Σ_B respectivamente. De manera recíproca, se supone que el espacio de entrada de Σ_A es el espacio de salida de Σ_B. Entonces Σ_A y Σ_B son denominados* sistemas inversos*, el uno del otro, si y solamente si para todo estado x de Σ_A hay un estado z_x de Σ_B tal que*

www.bdigital.ula.ve

$$\Sigma_B(z_x, y, u), \quad \forall u;$$

y para todo estado z de Σ_B existe un estado x_z de Σ_A tal que

$$\Sigma_A(x_z, w, v), \quad \forall v.$$

Un sistema Σ_A se dice *invertible* si hay un sistema inverso.

A partir de esas definiciones, se puede notar que si Σ_A y Σ_B son sistemas inversos entonces, ellos son, igualmente, sistemas opuestos. La implicación contraria no es necesariamente cierta.

Por otro lado, en concordancia con la Definición 1.28, si x_0 es el estado inicial de Σ_A, entonces existe un estado inicial equivalente, denotado por x_0^{-1}, para su sistema inverso. Por consiguiente, la caracterización de los sistemas inversos puede requerir el conocimiento del estado inicial. Respecto a los detalles particulares sobre ese problema, los mismos serán considerados en la Sección **??**.

A manera de ejemplo, para los sistemas lineales propios la propiedad de invertibilidad se define bajo la invertibilidad de la función de transferencia del sistema, bajo suposición

C.C.Reconocimiento

de que el estado inicial es conocido, [110]. En el caso de los sistemas lineales propios, se puede decir que los sistemas opuestos son sistemas inversos.

Así, si $\Sigma_A^{-1}(y,u)$ es el sistema inverso de $\Sigma_A(u,y)$, entonces

$$\Sigma_A^{-1}(y,u)\Sigma_A(u,y) \equiv \Sigma_A(u,y)\Sigma_A^{-1}(y,u) \equiv \mathbb{I}.$$

Existen sistemas que tienen la propiedad de invertibilidad en una dirección, es decir, $\Sigma_A^{-1}\Sigma_A \equiv \mathbb{I}$ o $\Sigma_A\Sigma_A^{-1} \equiv \mathbb{I}$, pero no las dos simultáneamente. En ese caso el inverso se define por la izquierda o por la derecha :

$$\Sigma_A^{-1}(y,u)\Sigma_A(u,y) \equiv \mathbb{I}, \quad \text{la invertibilidad por la izquierda.}$$

$$\Sigma_A(u,y)\Sigma_A^{-1}(y,u) \equiv \mathbb{I}, \quad \text{la invertibilidad por la derecha.}$$

De manera ilustrativa, la Fig. 1.3 muestra las dos nociones.

www.bdigital.ula.ve

Figura 1.3: Los sistemas inversos : (a) por la izquierda. (b) por la derecha.

El interés, en este momento, es establecer unas condiciones bajo las cuales un sistema es invertible por la izquierda. El estudio será restringido al caso de los sistemas lineales propios y a la clase de sistemas no lineales afines en el control.

1.3.1. El caso lineal

Considérese el sistema lineal descrito por (1.1), pero con el efecto de la entrada sobre la salida a través de la matriz $D(t) \in \mathbb{R}^{q\times m}$, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t); \end{aligned} \tag{1.53}$$

donde $D(t)$, al igual que $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son funciones suaves.

C.C.Reconocimiento

Sean las aplicaciones lineales diferenciales $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, ..., definidas por :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_0(t) &= C(t), \\
\mathbf{C}_1(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{C}_0(t) + \mathbf{C}_0(t)A(t), \\
\mathbf{C}_2(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{C}_1(t) + \mathbf{C}_1(t)A(t), \\
&\vdots \\
\mathbf{C}_{k+1}(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{C}_k(t) + \mathbf{C}_k(t)A(t);
\end{aligned}$$

Aplicando la derivación sucesiva sobre la salida, entonces se obtienen las relaciones siguientes :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathbf{C}_0(t)x(t) + D_{00}(t)u(t) \\
\dot{y}(t) &= \mathbf{C}_1(t)x(t) + D_{10}(t)u(t) + D_{11}(t)\dot{u}(t) \\
\ddot{y}(t) &= \mathbf{C}_2(t)x(t) + D_{20}(t)u(t) + D_{21}(t)\dot{u}(t) + D_{22}(t)\ddot{u}(t) \\
&\vdots \\
y^{(k)}(t) &= \mathbf{C}_k(t)x(t) + \sum_{i=0}^{k} D_{ki}(t)u^{(i)}(t);
\end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

donde los coeficientes D_{ki}, son funciones de $A(t), B(t), C(t), D(t)$ y sus derivadas.

Sea la aplicación lineal $\mathbf{P}(t)$, la cual es la proyección ortogonal sobre $\mathfrak{D}(t)$, con $\mathfrak{D}(t)$ dado por :

$$\mathfrak{D}(t) = \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ D_{11}(t) \\ D_{21}(t) \\ \vdots \\ D_{k1}(t) \end{pmatrix}\right) + \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{22}(t) \\ \vdots \\ D_{k2}(t) \end{pmatrix}\right) + \cdots + \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ D_{kk}(t) \end{pmatrix}\right).$$

Por consiguiente,

C.C.Reconocimiento

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{I}-\mathbf{P}(t))\begin{pmatrix} y(t)\\ \dot{y}(t)\\ \ddot{y}(t)\\ \vdots\\ y^{(k)}(t)\end{pmatrix} &= (\mathbb{I}-\mathbf{P}(t))\begin{pmatrix}\mathbf{C}_0(t)\\ \mathbf{C}_1(t)\\ \mathbf{C}_2(t)\\ \vdots\\ \mathbf{C}_k(t)\end{pmatrix}x(t)+(\mathbb{I}-\mathbf{P}(t))\begin{pmatrix}D_{00}(t)\\ D_{10}(t)\\ D_{20}(t)\\ \vdots\\ D_{k0}(t)\end{pmatrix}u(t)+\\
&\quad +(\mathbb{I}-\mathbf{P}(t))\begin{pmatrix}0\\ D_{11}(t)\\ D_{21}(t)\\ \vdots\\ D_{k1}(t)\end{pmatrix}\dot{u}(t)+\cdots+(\mathbb{I}-\mathbf{P}(t))\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ D_{kk}(t)\end{pmatrix}u^{(k)}(t),\\
(\mathbb{I}-\mathbf{P}(t))\begin{pmatrix} y(t)\\ \dot{y}(t)\\ \ddot{y}(t)\\ \vdots\\ y^{(k)}(t)\end{pmatrix} &= (\mathbb{I}-\mathbf{P}(t))\begin{pmatrix}\mathbf{C}_0(t)\\ \mathbf{C}_1(t)\\ \mathbf{C}_2(t)\\ \vdots\\ \mathbf{C}_k(t)\end{pmatrix}x(t)+(\mathbb{I}-\mathbf{P}(t))\begin{pmatrix}D_{00}(t)\\ D_{10}(t)\\ D_{20}(t)\\ \vdots\\ D_{k0}(t)\end{pmatrix}u(t). \qquad (1.54)
\end{aligned}
$$

Lema 1.6 *Sea el sistema dado por (1.53). Entonces, si existe un índice k tal que* rango $\mathfrak{D}(t)$ *es constante, y si*

$$
\operatorname{rang}\left((\mathbb{I}-\mathbf{P}(t))\begin{pmatrix}D_{00}(t)\\ D_{10}(t)\\ D_{20}(t)\\ \vdots\\ D_{k0}(t)\end{pmatrix}\right)=m \qquad (1.55)
$$

donde m es el número de controles, entonces $\mathbf{P}(t)$ *es suave y el sistema es invertible. Por consecuencia, los controles u pueden ser reconstruidas. Los coeficientes del sistema inverso son igualmente suaves.*

www.bdigital.ula.ve

Prueba Sea

$$
\bar{\mathfrak{D}}(t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ D_{11}(t) & 0 & & \vdots\\ D_{21}(t) & D_{22}(t) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ D_{k1}(t) & D_{k2}(t) & \cdots & D_{kk}(t)\end{pmatrix}
$$

donde Im $(\bar{\mathfrak{D}}(t))=\mathfrak{D}(t)$. Si rango $(\bar{\mathfrak{D}}(t))=\dim(\mathfrak{D}(t))$ es r, una constante, entonces a partir de $\bar{\mathfrak{D}}(t)$ se puede seleccionar r columnas linealmente independientes, $\forall\ \tau\in(t_0,t_1)$. Por ejemplo, las columnas $d_{i_1}(\tau),\ldots,d_{i_r}(\tau)$, entonces existe una vecindad de τ, (a_τ,b_τ), tal que $d_{i_1}(t),\ldots,d_{i_r}(t)$ son linealmente independientes para todo $t\in(a_\tau,b_\tau)$. Esas columnas son una base de $\mathfrak{D}(t)$. Se sabe que la ortonormalización de Gram-Schmidt, [68],

C.C.Reconocimiento

de la base $d_{i_1}(t), \ldots, d_{i_r}(t)$ es una transformación analítica de esas columnas. Puesto que $d_{i_1}(t), \ldots, d_{i_r}(t)$ son funciones suaves, la base ortogonal, $d_{\sigma_1}(t), \ldots, d_{\sigma_r}(t)$, de $\mathfrak{D}(t)$ es suave en el intervalo (a_τ, b_τ).

Par consiguiente, si $v \in \underbrace{\mathbb{R}^q \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^q}_{k+1}$, entonces la proyección ortogonal de v sobre $\mathfrak{D}(t)$ está dada por

$$\mathbf{P}(t)v = \sum_{i=1}^{k} \langle d_{\sigma_i}(t), v\rangle \, d_{\sigma_i}(t),$$

así, $t \longrightarrow \mathbf{P}(t)$ es suave.

El rango de (1.55) permite la inversión de la ecuación dada en (1.54) con respecto a $u(t)$. En efecto,

$$\left(D_{00}^T(t) \;\; D_{10}^T(t) \;\; \cdots \;\; D_{k0}^T(t)\right) (\mathbb{I} - \mathbf{P}(t)) \begin{pmatrix} D_{00}(t) \\ D_{10}(t) \\ D_{20}(t) \\ \vdots \\ D_{k0}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

es una matriz invertible. Su inverso es suave puesto que sus términos son suaves.

www.bdigital.ula.ve

Multiplicando la ecuación (1.55), por la izquierda, por el inverso

$$\left(\left(D_{00}^T(t) \;\; D_{10}^T(t) \;\; \cdots \;\; D_{k0}^T(t)\right) (\mathbb{I} - \mathbf{P}(t)) \begin{pmatrix} D_{00}(t) \\ D_{10}(t) \\ D_{20}(t) \\ \vdots \\ D_{k0}(t) \end{pmatrix} \right)^{-1} \left(D_{00}^T(t) \;\; D_{10}^T(t) \;\; \cdots \;\; D_{k0}^T(t)\right),$$

entonces se obtiene el control u. Como consecuencia, u se puede obtener por :

$$u(t) = H(t)x(t) + \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{D}_i(t) y^{(i)}(t) \tag{1.56}$$

entonces, el sistema inverso está dado por :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A(t) + B(t)H(t))\, x(t) + \sum_{i=0}^{k} B(t)\mathfrak{D}_i(t) y^{(i)}(t) \\ u(t) &= H(t)x(t) + \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{D}_i(t) y^{(i)}(t) \end{aligned} \tag{1.57}$$

donde todos los coeficientes son suaves.

C.C.Reconocimiento

En el sistema inverso, a fin de evitar la utilización de las derivadas de la salida en la dinámica, se puede aplicar la transformación de estado siguiente :

$$\bar{x}(t) = x(t) + \sum_{i=0}^{k-1} X_i(t) y^{(i)}(t),$$

donde $X_i(t) \in \mathbb{R}^{n\times q}$, los cuales se pueden calcular a partir de la siguiente recursión lineal :

$$\begin{aligned}
X_{k-1}(t) &= -B(t)\mathfrak{D}_k(t), \\
X_{k-2}(t) &= (A(t) + B(t)H(t))X_{k-1}(t) - \dot{X}_{k-1}(t) - B(t)\mathfrak{D}_{k-1}(t), \\
&\vdots \\
X_{i-1}(t) &= (A(t) + B(t)H(t))X_i(t) - \dot{X}_i(t) - B(t)\mathfrak{D}_i(t), \qquad i = k-2, \ldots, 2, 1.
\end{aligned}$$

En consecuencia, el sistema inverso tendrá la forma :

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= F(t)x(t) + G(t)y(t) \\
u(t) &= \mathcal{H}(t)x(t) + \sum_{i=0}^{k} G_i(t) y^{(i)}(t)
\end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

■

Comentario 1.2 *El procedimiento para construir el sistema inverso se puede utilizar en el diseño del observador generalizado de Luenberger a objeto de evitar el uso de las derivadas de los controles.*

1.3.1.1. Ejemplo

Considérese el sistema LTI siguiente :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + u_2(t), \\
\dot{x}_2(t) &= 2x_2(t) + u_1(t), \\
y_1(t) &= x_1(t) + u_1(t), \\
y_2(t) &= x_2(t).
\end{aligned}$$

De la derivada de la segunda salida :

$$\dot{y}_2(t) = \dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + u_1(t),$$

C.C.Reconocimiento

entonces, se tiene :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) + u_1(t), \\ \dot{y}_2(t) &= 2x_2(t) + u_1(t), \end{aligned}$$

$u_1(t)$ se puede deducir de la primera ecuación y reemplazando en la segunda

$$\begin{aligned} u_1(t) &= y_1(t) - x_1(t), \\ \dot{y}_2(t) &= 2x_2(t) - x_1(t) + y_1(t). \end{aligned}$$

En consecuencia, el nuevo sistema está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + u_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_2(t) - x_1(t) + y_1(t), \end{aligned}$$

y la nueva salida es

$$\dot{y}_2(t) - y_1(t) = 2x_2(t) - x_1(t).$$

www.bdigital.ula.ve

Entonces, derivando la ecuación precedente

$$\ddot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t) = 4x_2(t) - 3x_1(t) + 2y_1(t) - u_2(t),$$

y

$$u_2(t) = 4x_2(t) - 3x_1(t) + 2y_1(t) + \dot{y}_1(t) - \ddot{y}_2(t).$$

Finalmente, el sistema inverso es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + 4x_2(t) + 2y_1(t) + \dot{y}_1(t) - \ddot{y}_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + y_1(t), \\ u_1(t) &= -x_1(t) + y_1(t), \\ u_2(t) &= -3x_1(t) + 4x_2(t) + 2y_1(t) + \dot{y}_1(t) - \ddot{y}_2(t). \end{aligned}$$

Las derivadas de las nuevas entradas, $\dot{y}_1(t)$, $\ddot{y}_2(t)$, se pueden eliminar de la ecuación diferencial a partir de la transformación de estado descrita anteriormente.

C.C.Reconocimiento

1.3.2. El caso no lineal

Considérese el problema de inversión de los sistemas no lineales de orden n, afines en el control de la forma :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + F(x)u(t), \\ y(t) &= g(x) + G(x)u(t); \end{aligned} \tag{1.58}$$

donde $u \in \mathbb{R}^m$ y $y \in \mathbb{R}^p$. Las funciones de dimensiones apropiadas $f(\cdot), F(\cdot)$ y $g(\cdot), G(\cdot)$ son funciones suaves, es decir, ellas son $\mathbb{C}^\infty$.

Para los sistemas anal'ticos, se satisface la regularidad siguiente : si el rango de una matriz analítica $A(x)$, definido para todo $x \longrightarrow A(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, en un punto, es k, y es inferior o igual a k en todo el dominio D, entonces el rango de $A(x)$ es k, en un sub-dominio abierto, denso del dominio de $A(x)$. Si la matriz $A(x)$ es suave, es decir, es una matriz $\mathbb{C}^\infty$, entonces se puede suponer esa regularidad. En efecto, $A(x)$ es analítica sobre un sub-conjunto denso y abierto de D, donde $A(x)$ es de rango k.

www.bdigital.ula.ve

Para los objetivos particulares de este trabajo, la analiticidad se satisface en un sub-dominio abierto y denso, sin embargo, se supone que el sistema es algebraico, es decir, todas las entradas de los vectores y de las matrices $f(x)$, $F(x)$, $g(x)$ y $G(x)$, son fracciones con coeficientes reales. El conjunto de los ceros de los denominadores son las singularidades. El conjunto de los ceros es cerrado y su complementario, el conjunto de analiticidad, es denso y abierto.

La inversión de los sistemas no lineales afines ha sido considerada, en primer lugar, en [43]. En ese trabajo, los conceptos de invertibilidad son definidos en el espacio de estado, y se propone un algoritmo en el espacio de estado también.

Por otro lado, en [30, 29] se ha presentado un marco algebraico para el problema de inversión.

En lo que respecta a los intereses de este trabajo, el problema de inversión para los sistemas no lineales se resume en lo siguiente : si se considera un sistema descrito por unas ecuaciónes diferenciales entre las entradas y las salidas, entonces las entradas y las

C.C.Reconocimiento

salidas están ligadas por la ecuación implícita :

$$P\left(u(t), \dot{u}(t), \ldots, y(t), \dot{y}(t), \ldots\right) = 0. \tag{1.59}$$

Supóngase que (1.59), al menos localmente, se puede resolver, unívocamente, para $y(t)$, si $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))^T$ es dada. En ese caso, los $u_i(t)$ se consideran como las entradas y las $y_i(t)$ como las salidas. Si (1.59) puede ser, unívocamente, resuelta para $u(t)$, al menos localmente, para $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_q(t))^T$ dada, entonces las $y_i(t)$ son consideradas como las entradas y las $u_i(t)$ son las salidas. Si los dos casos son posibles, entonces el sistema es invertible.

En base a los resultados presentados en [29], un sistema posee un sistema inverso, por la izquierda o por la derecha, en concordancia con su rango de entrada y su rango de salida. Los conceptos de rangos no dependen de una realización particular en el espacio de estado, mismo si su definición utiliza el espacio de estado.

Enseguida se presentará el algoritmo de inversión desarrollado en [43], con una ligera modificación a objeto de producir un concepto para la invertibilidad en razón de la descripción del dominio de invertibilidad, en base a los términos entrada-salida en vez de los estados, lo cual es completamente adecuado para el diagnóstico de fallas.

www.bdigital.ula.ve

1.3.2.1. El algoritmo de inversión

Considérese el sistema no lineal afín en el control dado en (1.58). La proyección ortogonal $P_0(x)$ sobre la imagen de $G(x)$ es analítica en el dominio de analiticidad de $G(x)$.

Sean las funciones siguientes :

$$\begin{aligned} G_0(x) &= G(x), \\ g_0(x, y) &= y(t) - g(x) \end{aligned}$$

Considérese la proyección ortogonal $P_0(x)$ sobre la imagen de $G(x)$, la cual es analítica en el dominio de analiticidad de $G(x)$. Entonces

$$\ker\left(P_0(x)\right) = \text{Im}\ \left(G_0(x)\right);$$

C.C.Reconocimiento

por lo tanto

$$\begin{aligned} P_0(x)y(t) &= P_0(x)g(x) + P_0(x)G(x)u(t) = P_0(x)g(x) \\ P_0(x)g_0(x,y) &= P_0(x)G_0(x)u(t) = 0 \end{aligned}$$

Ahora, considérese la derivada temporal sobre la última ecuación :

$$\frac{d}{dt}\left(P_0(x)g_0(x,y)\right) = 0.$$

Dado que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(P_0(x)g_0(x,y)\right) &= \left(\partial_x P_0(x)\right)\left(f(x)+F(x)u\right)y + P_0(x)\dot{y} \\ &\quad - \left(\partial_x P_0(x)g(x)\right)\left(f(x)+F(x)u\right), \end{aligned}$$

entonces

$$\left(\partial_x P_0(x)\right) f(x)y + P_0(x)\dot{y} - \left(\partial_x P_0(x)g(x)\right) f(x) = \left(\partial_x P_0(x)g(x)\right) F(x)u - \left(\partial_x P_0(x)\right) F(x)uy.$$

Sean

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} G_1(x,y) &= \left(\partial_x P_0(x)g(x)\right) F(x)u - \left(\partial_x P_0(x)\right) F(x)uy, \\ g_1(x,y,\dot{y}) &= \left(\partial_x P_0(x)\right) f(x)y + P_0(x)\dot{y} - \left(\partial_x P_0(x)g(x)\right) f(x). \end{aligned}$$

por lo tanto

$$g_1(x,y,\dot{y}) = G_1(x,y)u.$$

En consecuencia, $g_0(x,y), g_1(x,y,\dot{y})$ y $G_0(x), G_1(x,y)$, satisfacen la siguiente ecuación :

$$\begin{pmatrix} g_0(x,y) \\ g_1(x,y,\dot{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0(x) \\ G_1(x,y) \end{pmatrix} u.$$

Siguiendo un procedimiento recursivo, sea $P_1(x,y)$ la proyección ortogonal sobre la imagen de $\begin{pmatrix} G_0(x) \\ G_1(x,y) \end{pmatrix}$, por lo tanto :

$$\ker P_1(x,y) = \text{Im } \begin{pmatrix} G_0(x) \\ G_1(x,y) \end{pmatrix}.$$

En consecuencia

$$P_1(x,y) \begin{pmatrix} g_0(x,y) \\ g_1(x,y,\dot{y}) \end{pmatrix} = P_1(x,y) \begin{pmatrix} G_0(x) \\ G_1(x,y) \end{pmatrix} u = 0.$$

C.C.Reconocimiento

Para esta última ecuación se aplica la derivación con respecto al tiempo, siguiendo el mismo procedimiento hasta el orden k.

En resumen,

$$\begin{aligned} g_0(x,y) &= G_0(x)u \\ g_1(x,y,\dot{y}) &= G_1(x,y)u \\ &\vdots \\ g_k\left(x,y,\ldots,y^{(k)}\right) &= G_k\left(x,y,\ldots,y^{(k-1)}\right)u \end{aligned}$$

A partir de la etapa k, sea $P_k\left(x,y,\ldots,y^{(k-1)}\right)$ la proyección ortogonal sobre

$$\operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} G_0(x) \\ G_1(x,y) \\ \vdots \\ G_k\left(x,y,\ldots,y^{(k-1)}\right) \end{pmatrix}\right).$$

A objeto de facilitar la escritura de las ecuaciones, sean :

$$P_k = P_k\left(x,y,\ldots,y^{(k-1)}\right), \quad \tilde{g}_k = \begin{pmatrix} g_0(x,y) \\ g_1(x,y,\dot{y}) \\ \vdots \\ g_k\left(x,y,\ldots,y^{(k)}\right) \end{pmatrix};$$

www.bdigital.ula.ve

entonces

$$P_k\tilde{g}_k = P_k\begin{pmatrix} G_0(x) \\ G_1(x,y) \\ \vdots \\ G_k\left(x,y,\ldots,y^{(k-1)}\right) \end{pmatrix}u = 0.$$

Derivando esta última ecuación :

$$\partial_x\left(P_k\tilde{g}_k\right)\left(f(x)+F(x)u\right)+\sum_{j=0}^{k}\partial_{y^{(j)}}\left(P_k\tilde{g}_k\right)y^{(j+1)}=0.$$

En consecuencia, sean

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= -\left(\partial_x\left(P_k\tilde{g}_k\right)\right)F(x) \\ g_{k+1} &= \left(\partial_x\left(P_k\tilde{g}_k\right)\right)f(x)+\sum_{j=0}^{k}\partial_{y^{(j)}}\left(P_k\tilde{g}_k\right)y^{(j+1)}; \end{aligned}$$

por lo tanto

$$g_{k+1}\left(x,y,\ldots,y^{(k+1)}\right) = G_{k+1}\left(x,y,\ldots,y^{(k)}\right)u.$$

C.C.Reconocimiento

Así, para un k suficientemente grande, el rango de la matriz

$$\tilde{G}_k = \begin{pmatrix} G_0(x) \\ G_1(x,y) \\ \vdots \\ G_k\left(x, y, \ldots, y^{(k-1)}\right) \end{pmatrix}$$

no aumenta mas. En ese caso, k se dice el orden de la salida, [30, 29]. La algoritmo se termina cuando, para un k, el rango de $\tilde{G}_k$ es constante (maximal).

Lema 1.7 *Sea el sistema dado en (1.58). Entonces, si existe un k tal que*

$$\text{rango } \left(\tilde{G}_k\right) = c$$

e igual al número de entradas, $c = m$, entonces u se puede calcular a partir de :

$$\tilde{g}_k = \tilde{G}_k u.$$

Prueba Considérense dos casos :

1. Si el rango maximal de la matriz $\tilde{G}_k$ coincide con el número de controles, debido a la analiticidad, el rango es maximal en un conjunto abierto y denso, donde el control $u(t)$ puede ser descrito de manera explícita, a partir de la matriz inversa de $\tilde{G}_k$.

   El determinante de la matriz $\tilde{G}_k^T \tilde{G}_k$ puede anularse en un conjunto cerrado, el cual tiene un conjunto complementario abierto y denso en razón a la analiticidad. En ese caso, existe un dominio de excepción para la inversión del sistema. Ese dominio se puede definir sobre un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forme :

   $$Q_i(x, y, \dot{y}, \ldots) = 0;$$

   es decir, sea

   $$D_u = \bigcup_i \{(y, x) : Q_i(x, y, \dot{y}, \ldots) = 0 \ \ \}$$

   para lo cual el determinante de $\tilde{G}_k^T \tilde{G}_k$ es nulo.

   Así, se buscan unas condiciones para la inversión en función de las entradas y de las salidas. Entonces, a partir de las ecuaciones diferenciales $Q_i(x, y, \dot{y}, \ldots) = 0$ se elimina el estado aplicando el algoritmo de eliminación sobre la dinámica :

   $$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + F(x)u(t), \\ y(t) &= g(x) + G(x)u(t) \\ Q_i(x, y, \dot{y}, \ldots) &= 0. \end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Así, se obtienen dos polinomios diferenciales dados por :

$$\begin{aligned} p(y, \dot{y}, \ldots, u, \dot{u}, \ldots) &= 0, \quad \text{y} \\ q(y, \dot{y}, \ldots, u, \dot{u}, \ldots) &\neq 0 \end{aligned}$$

los cuales representan una descripción entrada-salida para el sistema.

En consecuencia, la condición de no invertibilidad de la matriz $\tilde{G}_k^T \tilde{G}_k$ se establece cuando

$$\left.\begin{aligned} p(y, \dot{y}, \ldots, u, \dot{u}, \ldots) &= 0, \\ q(y, \dot{y}, \ldots, u, \dot{u}, \ldots) &\neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.60}$$

se satisfacen.

Así, la condición para la invertibilidad es dada por la negación de (1.60) :

$$\begin{aligned} p(y, \dot{y}, \ldots, u, \dot{u}, \ldots) &\neq 0, \quad \text{o} \\ q(y, \dot{y}, \ldots, u, \dot{u}, \ldots) &= 0. \end{aligned} \tag{1.61}$$

www.bdigital.ula.ve

2. Si el rango maximal de la matriz $\tilde{G}_k$ es mas pequeño que el número de controles, entonces, se puede definir una proyección ortogonal sobre la imagen de $\tilde{G}_k$. Así, se pueden aún aplicar el algoritmo recursivo. Luego de un número finito de pasos :

   a) El rango maximal de la ecuación lineal para $u(t)$ coincide con el número de controles, y la inversión se obtiene como de manera precedente. Además, la condición de invertibilidad (1.61) se obtiene en términos de las entradas y salidas.

   b) El rango maximal de la ecuación lineal para $u(t)$, no aumenta al desarrollar la aplicación del algoritmo, entonces, se puede deducir que la ecuación diferencial entre las entradas y las salidas no contiene todas las entradas, lo cual significa no invertibilidad del sistema.

■

De manera ilustrativa, considérense dos ejemplos :

C.C.Reconocimiento

1. Sea el sistema no invertible en el sentido de [43] descrito por :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= u_1(t)x_1(t),\\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) - u_1(t)x_3(t),\\
\dot{x}_3(t) &= u_2(t)x_1(t),\\
y_1(t) &= x_1(t),\\
y_2(t) &= x_2(t).
\end{aligned}$$

Por derivación de las salidas, se obtienen dos ecuaciones lineales para la misma entrada $u_1(t)$:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= u_1(t)x_1(t),\\
\dot{y}_2(t) &= x_3(t) - u_1(t)x_3(t),
\end{aligned}$$

entonces,

www.bdigital.ula.ve

$$x_3(t)\dot{y}_1(t) + x_1(t)\dot{y}_2(t) = x_1(t)x_3(t).$$

Derivando otra vez

$$u_2(t)x_1(t)\dot{x}_1(t) + x_3(t)\ddot{y}_1(t) + \dot{y}_1(t)\dot{y}_2(t) + x_1(t)\ddot{y}_2(t) = \dot{y}_1(t)x_3(t) + u_2(t)x_1^2(t),$$

por consiguiente :

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= \frac{\dot{y}_1(t)x_3(t) - x_3(t)\ddot{y}_1(t) - \dot{y}_1(t)\dot{y}_2(t) - x_1(t)\ddot{y}_2(t)}{x_1(t)\left(\dot{x}_1(t) - x_1(t)\right)}\\
u_1(t) &= \frac{\dot{y}_1(t)}{x_1(t)}, \quad \text{o} \quad u_1(t) = \frac{x_3(t) - \dot{y}_2(t)}{x_3(t)}.
\end{aligned}$$

Así, los estados iniciales $x_1(0) = 0$, $x_3(0) = 0$ y el control $u_1(t) = 1$ son prohibidos. Esta última condición se obtiene a partir de la primera ecuación diferencial y la primera salida.

Ese ejemplo muestra claramente que se debe excluir un conjunto de estados y un conjunto de valores de control ($u_1(t) \neq 1$), para los cuales hay ciertos problemas.

C.C.Reconocimiento

2. Para el segundo ejemplo, considérese una pequeña modificación del sistema anterior, sea :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= u_1(t)\left(x_1(t) - x_3(t)\right), \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) - u_1(t)x_3(t), \\
\dot{x}_3(t) &= u_2(t)x_1(t), \\
y_1(t) &= x_1(t), \\
y_2(t) &= x_2(t).
\end{aligned}$$

Por derivación de las salidas se obtienen dos ecuaciones lineales para la misma entrada $u_1(t)$.

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= u_1(t)\left(x_1(t) - x_3(t)\right), \\
\dot{y}_2(t) &= x_3(t) - u_1(t)x_3(t),
\end{aligned}$$

donde

www.bdigital.ula.ve

$$x_3(t)\dot{y}_1(t) + \left(x_1(t) - x_3(t)\right)\dot{y}_2(t) = \left(x_1(t) - x_3(t)\right)x_3(t).$$

Considerando la derivada de esta última ecuación :

$$u_2(t)x_1(t)\dot{x}_1(t) + x_3(t)\ddot{y}_1(t) + \dot{y}_1(t)\dot{y}_2(t) + y_1(t)\ddot{y}_2(t) - u_2(t)x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_3(t)\ddot{y}_2(t) = \dot{y}_1(t)x_3(t) + u_2(t)x_1(t)^2 - 2u_2(t)x_3(t)x_1(t),$$

y los controles se escriben :

$$u_1(t) = \frac{\dot{y}_1(t)}{x_1(t)-x_3(t)}, \quad \text{donde} \quad u_1(t) = \frac{x_3(t)-\dot{y}_2(t)}{x_3(t)}$$

$$u_2(t) = \frac{\dot{y}_1(t)x_3(t)+x_3(t)\ddot{y}_2(t)-y_1(t)\ddot{y}_2(t)-\dot{y}_1(t)\dot{y}_2(t)-x_3(t)\ddot{y}_1(t)}{x_1(t)(\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)-x_1(t)+2x_3(t))}.$$

Las singularidades están asociadas a :

$$x_1(t) - x_3(t) = 0, \quad x_3(t) = 0, \quad x_1(t) = 0, \quad \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) - x_1(t) + 2x_3(t) = 0.$$

Sustituyendo $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ en la última ecuación, entonces se obtienen las siguientes relaciones lineales :

C.C.Reconocimiento

a) $x_1(t) - x_3(t) = 0$,

b) $x_3(t) = 0$,

c) $x_1(t) = 0$,

d) $u_1(t)x_1(t) - x_1(t) + x_3(t) = 0$.

Los estados se pueden eliminar en cada ecuación, sea :

a) $0 = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t) = (u_1(t) - u_2(t))x_1(t) - u_1(t)x_3(t)$.

Para que el sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_3(t) &= 0, \\ (u_1(t) - u_2(t))x_1(t) - u_1(t)x_3(t) &= 0 \end{aligned}$$

admite una solución no trivial, por lo que es necesario que su determinante sea nulo, es decir,

$$-u_2(t) = 0.$$

www.bdigital.ula.ve

Entonces, si $(x_1(t), x_3(t))$ no es idénticamente nulo y $u_2(t) = 0$, se tiene $x_1(t) - x_3(t) = 0$.

b)

$$\begin{aligned} x_3(t) &= 0, \\ \dot{x}_3(t) &= u_2(t)x_1(t) = 0, \\ \ddot{x}_3(t) &= \dot{u}_2(t)x_1(t) + u_2(t)u_1(t)(x_1(t) - x_3(t)) = \dot{u}_2(t)x_1(t) = 0. \end{aligned}$$

Si $x_1(t) \neq 0$, entonces $u_2(t) = 0$. Otra solución es $x_1(t) = 0, x_2(t) = c, x_3(t) = 0$.

c)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0, \\ \dot{x}_1(t) &= u_1(t)(x_1(t) - x_3(t)) = -u_1(t)x_3(t) = 0. \end{aligned}$$

Si $x_3(t) \neq 0 \Longrightarrow u_1(t) = 0$.

Si $x_3(t) = 0$, entonces la solución trivial está dada por : $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = c$, $x_3(t) = 0$.

C.C.Reconocimiento

d) $u_1(t)x_1(t) - x_1(t) + x_3(t) = 0$, se nota que, por derivación :

$$\begin{aligned}\left(\dot{u}_1(t) + u_1(t)^2 - u_1(t) + u_2(t)\right) x_1(t) + \left(u_1(t) - u_1(t)^2\right) x_3(t) &= 0,\\ (u_1(t) - 1)x_1(t) + x_3(t) &= 0,\end{aligned}$$

es una ecuación lineal homogénea, la cual admite una solución no trivial si y solamente si su determinante es nulo, es decir,

$$\dot{u}_1(t) + u_1(t)^3 - u_1(t)^2 + u_2(t) = 0.$$

En resumen, si

$$u_2(t) \neq 0, \quad u_1(t) \neq 0, \quad \dot{u}_1(t) + u_1(t)^3 - u_1(t)^2 + u_2(t) \neq 0,$$

entonces, para todas las condiciones iniciales no triviales, el sistema es invertible.

Si $\dot{u}_1(t) + u_1(t)^3 - u_1(t)^2 + u_2(t) = 0$, entonces, en base a los resultados de Hirschorn, [43], el sistema no es invertible.

www.bdigital.ula.ve

1.4. Control óptimo de sistemas lineales

En esta sección analizaremos, de manera resumida, el problema de control óptimo robusto de sistemas LTI.

En general, los procesos industriales deben satisfacer exigentes demandas de seguridad y de calidad de productos. Los criterios de seguridad se pueden vincular a los aspectos de estabilidad de los procesos, los cuales se deben cumplir a pesar de cambios y de situaciones anormales que pudiesen surgir. En ese mismo sentido, los criterios de desempeño (calidad) relativos a la productividad de los procesos, se traducen en niveles de funcionamiento que deben satisfacerse, también, bajo los distintos escenarios de producción, aún en situaciones de ciertas incertidumbres.

Las consideraciones anteriores se traducen en el problema de *diseñar controladores de tal manera que ciertos niveles de funcionamiento del sistemas controlado sean garantizados irrespectivamente de los cambios en la dinámica de los procesos dentro de una clase predifinida*. Este paradigma es lo que se conoce como **control robusto**.

C.C.Reconocimiento

Desde el punto de vista de la teoría de control, los niveles desempeño al cual se refiere el control robusto son relativos a: estabilidad, seguimiento de señales, rechazo a perturbaciones, ruido de sensores, dinámicas no modeladas, variaciones de carga, incertidumbres de modelos, limites de actuadores, etc.

En lo que sigue, estudiaremos el problema de control óptimo robusto de sistemas LTI bajo los criterios de los espacios Hardy $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_\infty$.

Sea el sistema dinámico definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}\omega(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}\omega(t) + D_{22}u(t) \end{aligned} \tag{1.62}$$

donde $z(t)$ son las salidas controladas, $y(t)$ son las salidas medidas que serán utilizadas para el diseño del controlador, $\omega(t)$ son las señales externas: ruidos, perturbaciones, referencias, etc. Las matrices del sistema son de dimensiones apropiadas. La Figura 1.4 esquematiza las relaciones de las señales involucradas.

www.bdigital.ula.ve

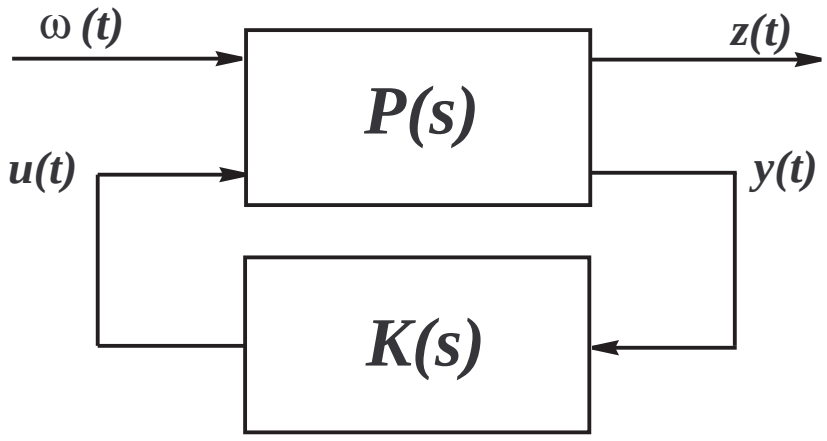


Figura 1.4: Diagrama esquemático para el control robusto.

La función de transferencia de la planta está dada por :

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s); \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

por consiguiente

C.C.Reconocimiento

$$\begin{aligned} z &= P_{11}(s)\omega + P_{12}(s)u \\ y &= P_{21}(s)\omega + P_{22}(s)u \end{aligned}$$

Conocida la planta $P(s)$, el problema consiste en determinar un controlador $K(s)$ que estabilice el sistema en lazo cerrado y al mismo tiempo garantice un nivel de desempeño caracterizado por una cierta "medida". Esa medida debe corresponderse por el impacto de las señales externas $\omega(t)$ sobre las salidas controladas $z(t)$. En todo caso, se busca minimizar el efecto de las señales $\omega(t)$ sobre las salidas controladas $z(t)$.

Considérese que el controlador $K(s)$ se define por la dinámica siguiente :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= A_k\zeta(t) + B_k y(t) \\ u(t) &= C_k\zeta(t) + D_k y(t) \end{aligned} \tag{1.64}$$

para lo cual

www.bdigital.ula.ve

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array}\right] = C_k\left(s\mathbb{I} - A_k\right)^{-1}B_k + D_k \tag{1.65}$$

Ese controlador producirá una dinámica en lazo cerrado que debe satisfacer los requerimientos previamente definidos. Sin pérdida de generalidad, considérese que $D_{22} = 0$, en la dinámica de la planta, (1.62), en vista de que $u(t)$ es una señal medida, al igual que $y(t)$. Entonces, la dinámica en lazo cerrado se puede definir de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{lc}(t) &= \mathfrak{A}x_{lc}(t) + \mathfrak{B}\omega(t) \\ z(t) &= \mathfrak{C}x_{lc}(t) + \mathfrak{D}\omega(t); \end{aligned} \tag{1.66}$$

donde $x_{lc}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix}$ y las matrices dinámicas corresponden a :

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A + B_2D_kC_2 & B_2C_k \\ B_kC_2 & A_k \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} B_1 + B_2D_kD_{21} \\ B_kD_{21} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} C_1 + D_{12}D_kC_2 & D_{12}C_k \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D} = D_{11} + D_{12}D_kD_{21}.$$

C.C.Reconocimiento

Así, la función de transferencia en lazo cerrado de las perturbaciones a las salidas controladas, definida por

$$G_{\omega z}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \hline \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{array}\right] = \mathfrak{C}\left(s\mathbb{I} - \mathfrak{A}\right)^{-1}\mathfrak{B} + \mathfrak{D}; \tag{1.67}$$

tendría como propiedades importantes que la matriz $\mathfrak{A}$ sea asintóticamente estable y que una medida de desempeño debe satisfacerse en algún sentido de normas para sistemas.

1.4.1. Control óptimo en $\mathcal{H}_2$

El problema de control óptimo en $\mathcal{H}_2$ tiene su versión primaria en el regulador lineal gaussiano, [133], el cual consiste en un regulador cuadrático lineal y un filtro de Kalman, [87]. El interés es construir un controlador que permita estabilizar el sistema en lazo cerrado y al mismo tiempo se minimice la norma-2 de la función de transferencia en lazo cerrado.

Sobre la base de las descripciones que hemos mostrado, el problema de control óptimo en $\mathcal{H}_2$ consiste en que, dada la planta $P(s)$, diseñar un controlador $K(s)$ tal que :

www.bdigital.ula.ve

1. $\mathfrak{A}$ sea asintóticamente estable.

2. $||G_{\omega z}(s)||_2$ sea mínima.

$||\cdot||_2$ denota la norma $\mathcal{H}_2$.

Para satisfacer esos requerimientos el sistema dinámico dado en (1.62) debe tener ciertas propiedades: el par (A, B_2) debe ser estabilizable; el par (C_2, A) debe detectable. Otros requerimientos se originan de la definición de la norma-2.

1.4.1.1. Cálculo de la norma $\mathcal{H}_2$

Las definiciones de normas para sistemas son presentadas en la Sección B.2 del Apéndice B.

Teorema 1.10 *Considérese el sistema definido por (1.66) y supóngase que el mismo es una representación minimal de $G_{\omega z}(s)$. Si $G_{\omega z}(s)$ es una función de transferencia estable, entonces*

1. $||G_{\omega z}(s)||_2 < \infty$ si y solamente si $\mathfrak{D} = 0$.

C.C.Reconocimiento

2. Si $\mathfrak{O}$ *es el grammiano de observabilidad de (1.66) entonces*

$$||G_{\omega z}(s)||_2^2 = traza(\mathfrak{B}^T\mathfrak{O}\mathfrak{B}); \tag{1.68}$$

donde el grammiano de observabilidad $\mathfrak{O}$ *satisface la ecuación*

$$\mathfrak{O}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^T\mathfrak{O} + \mathfrak{C}^T\mathfrak{C} = 0 \tag{1.69}$$

Prueba Ver [25]. ■

Así, la norma $\mathcal{H}_2$ es dada por la ecuación de una traza que involucra las matrices dinámicas del sistema (1.66), a partir de las cuales se calcula el grammaiano de observabilidad $\mathfrak{O}$. Por consecuencia, el Teorema 1.10 representa una caracterización algebraica de la norma $\mathcal{H}_2$, la cual resulta extremadamente útil para propósitos de cálculos.

De manera dual al Teorema 1.10, la norma $\mathcal{H}_2$ se puede calcular a partir del grammiano de controlabilidad, [25].

1.4.1.2. Cálculo de controladores óptimos en $\mathcal{H}_2$

www.bdigital.ula.ve

La síntesis de controladores óptimos en $\mathcal{H}_2$ puede ser conducido a través de dos problemas independientes haciendo uso de una estructura de separación: primero; diseñar un regulador cuadrático lineal de realimentación de estados. Esto requiere la disposición de los estados para implementar el regulador. Segundo; sobre la base de los requerimientos de los estados, diseñar un estimador óptimo en el sentido de $\mathcal{H}_2$. Es decir, construir un observador de estados que minimice el efecto de las perturbaciones sobre el error de estimación. Este estimador óptimo se conoce como el filtro de Kalman, [25, 133].

Los problemas así propuestos involucran dos ecuaciones de Riccati, tal como mostraremos a continuación en el siguiente teorema :

Teorema 1.11 *Considérese el sistema dinámico representado por (1.62) con* $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$ *y donde*

1. (A, B_1, C_1) *es estabilizable y detectable;*
2. (A, B_2, C_2) *es estabilizable y detectable;*
3. $D_{12}^T[C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad \mathbb{I}]$;
4. $D_{21}[B_1^T \quad D_{21}^T] = [0 \quad \mathbb{I}]$.

C.C.Reconocimiento

Entonces el controlador estabilizante óptimo $K(s)$, definido en (1.65), para el problema de síntesis en $\mathcal{H}_2$ está dado por :

$$A_k = A + B_2F + LC_2; \quad B_k = -L; \quad C_k = F; \quad D_k = 0,$$

con

$$L = -YC_2^T; \quad F = -B_2^TX,$$

donde X y Y son soluciones definidas positivas de las ecuaciones de Riccati siguientes :

$$A^TX + XA - XB_2B_2^TX + C_1^TC_1 = 0$$
$$AY + YA^T - YC_2^TC_2Y + B_1B_1^T = 0.$$

Prueba Ver [25, 133] ■

La solución del problema de control óptimo en $\mathcal{H}_2$ así presentado constituye la aplicación del *principio de equivalencia cierta* o *principio de separación*. Por un lado, se diseña un filtro óptimo, el cual minimiza la norma $\mathcal{H}_2$ de la función de transferencia de las perturbaciones $\omega(t)$ al error de estimación $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. La ganancia del estimador de estado es L y la norma $\mathcal{H}_2$ mínima de esa función de transferencia esta dada por $\sqrt{\text{traza}(Y)}$.

www.bdigital.ula.ve

Por otro lado, se diseña un regulador por realimentación de estados óptimo, el cual minimiza la norma $\mathcal{H}_2$ de la función de transferencia de $\omega(t)$ a $z(t)$. La ganancia de realimentación es F y la norma $\mathcal{H}_2$ mínima que se obtiene es $||G_{\omega z}(s)||_2^2 = \text{traza}(B_1^TXB_1)$.

El controlador óptimo $K(s)$ se obtiene combinando, entonces, ambos procedimientos.

Una visión novedosa, estudiada en los años recientes, es presentar soluciones al problema de control óptimo en $\mathcal{H}_2$ a partir de las *desigualdades matriciales lineales* (LMI), ver la Seccion C.1 del Apéndice C.

1.4.1.3. Controladores óptimos en $\mathcal{H}_2$ basados en LMI

En la sección previa, el eje central para la construcción de la solución óptima al problema de síntesis se basa en ecuaciones de Riccati. A continuación se presenta una solución basada en la maquinaria de LMI. En ese sentido, la caracterización LMI de la norma $\mathcal{H}_2$ y la estabilidad de los sistemas será considerada.

Enunciado 1.1 *Considérese el sistema definido por (1.66) y supóngase que $\mathfrak{D} = 0$. Entonces*

C.C.Reconocimiento

1. $\mathfrak{A}$ *es una matriz estable y*

2. $||G_{\omega z}(s)||_2 < 1$

y solamente si existe una matriz simétrica $X > 0$ *tal que traza*$(\mathfrak{C}X\mathfrak{C}^T) < 1$ *y*

$$\mathfrak{A}X + X\mathfrak{A}^T + \mathfrak{B}\mathfrak{B}^T < 0$$

Prueba Ver [25]. ■

Se puede observar que X representa el grammiano de controlabilidad del sistema (1.66). En base a la definición de norma-2, se establece una cota superior máxima para $||G_{\omega z}(s)||_2$, considerando, en vez de una ecuación algebraica, una desigualdad.

Para mostrar el procedimiento de síntesis del controlador, supóngase el sistema (1.62) con $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$, $C_2 = \mathbb{I}$ y $D_{21} = 0$. Esas consideraciones permiten el diseño de un controlador basado en realimentación de estados. El procedimiento general puede ser estudiado en [106].

www.bdigital.ula.ve

Supóngase, entonces, que $u(t) = Fx(t)$. Por consiguiente, para el sistema en lazo cerrado (1.66) se tiene :

$$\mathfrak{A} = A + B_2F, \quad \mathfrak{B} = B_1, \quad \mathfrak{C} = C_1 + D_{12}F, \quad \mathfrak{D} = 0.$$

Así, aplicando el Enunciado 1.1, existe $X > 0$ tal que traza$(\mathfrak{C}X\mathfrak{C}^T) < 1$. Sea W una matriz de dimensión apropiada, tal $W > \mathfrak{C}X\mathfrak{C}^T$. Por lo tanto,

$$W - (C_1 + D_{12}F)\, X\, (C_1 + D_{12}F)^T > 0.$$

Por otro lado, a partir del Enunciado 1.1, se tiene

$$(A + B_2F)\, X + X\, (A + B_2F)^T + B_1B_1^T < 0.$$

Sea

$$FX = Z,$$

entonces

$$AX + XA^T + B_2Z + Z^TB_2^T + B_1B_1^T < 0,$$

C.C.Reconocimiento

$$W - (C_1X + D_{12}Z)\, X^{-1}\, (C_1X + D_{12}Z)^T > 0.$$

Utilizando el complemento de Schur, [25], se obtienen la desigualdades matriciales siguientes :

$$\begin{pmatrix} AX + XA^T + B_2Z + Z^TB_2^T & B_1 \\ B_1^T & \mathbb{I} \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} W & C_1X + D_{12}Z \\ (C_1X + D_{12}Z)^T & X \end{pmatrix} > 0.$$

Finalmente, para satisfacer todos los requerimientos de acuerdo al Enunciado 1.1, entonces, traza$(W) < 1$.

Así, el siguiente teorema puede ser establecido :

Teorema 1.12 *Sea el sistema (1.62) con $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$, $C_2 = \mathbb{I}$, $D_{21} = 0$ y el par (A, B_2) estabilizable. Existe un controlador realimentado $K(s)$, con ganancia F que estabiliza el sistema en lazo cerrado y satisface que $||G_{\omega z}(s)||_2 < 1$ si y solamente si existen matrices simétricas X, W y una matriz rectangular Z tal que*

$$F = ZX^{-1}$$

www.bdigital.ula.ve

y las siguientes desigualdades matriciales son satisfechas :

$$\begin{pmatrix} AX + XA^T + B_2Z + Z^TB_2^T & B_1 \\ B_1^T & -\mathbb{I} \end{pmatrix} < 0, \tag{1.70}$$

$$\begin{pmatrix} W & C_1X + D_{12}Z \\ (C_1X + D_{12}Z)^T & X \end{pmatrix} > 0, \tag{1.71}$$

$$traza(W) < 1. \tag{1.72}$$

Prueba Como se ha demostrado, las desigualdades matriciales surgen de la aplicación del complemento de Schur, todo basado en el Enunciado 1.1. Estos resultados producen controladores sub-óptimos. ■

En definitiva, el problema de síntesis en $\mathcal{H}_2$ se ha reducido a la obtención de una ganancia de realimentación bajo un problema de optimización convexa para las variables W, X y Z. Dado un punto de factibilidad en ese problema, la ganancia de control F se obtiene por operaciones algebraicas. La solución para las tres variables en el problema de optimización convexa se puede obtener por métodos numéricos, [9].

C.C.Reconocimiento

1.4.2. Control óptimo en $\mathcal{H}_\infty$

El paradigma de control robusto en $\mathcal{H}_\infty$ surgió en los años 80's, [131], desde entonces ha inspirado muchos trabajos en distintas áreas tales como filtraje, identificación, modelaje iterativo [116], etc.

El problema de control robusto en $\mathcal{H}_\infty$ fue, esencialmente, un método de optimización en el dominio frecuencial. La idea está centrada en el diseño de controladores realimentados que estabilicen un sistema en lazo cerrado y al mismo tiempo minimice la norma $\mathcal{H}_\infty$ de una función de transferencia de lazo cerrado.

En razón de que se presenta una visión somera, analizaremos una solución del problema de control $\mathcal{H}_\infty$ que es computacionalmente factible y eficiente, conocida como la "solución en espacio de estado", mostrada en [23]. Al mismo tiempo, estudiaremos las condiciones bajo las cuales esta solución admite implementaciones desde el punto de vista práctico, por tal motivo, extenderemos la solución bajo la consideración de LMI's.

En base a las descripciones que hemos mostrado, el problema de control óptimo en $\mathcal{H}_\infty$ consiste en que, dada la planta $P(s)$, diseñar un controlador $K(s)$ tal que :

www.bdigital.ula.ve

1. $\mathfrak{A}$ sea asintóticamente estable.

2. $||G_{\omega z}(s)||_\infty$ sea mínima. El problema de control óptimo.

Si bien este problema es duro de resolver, se puede considerar un versión mas práctica, conocida como *el problema estándar*, el cual consiste en diseñar un controlador $K(s)$ tal que :

1. $\mathfrak{A}$ sea asintóticamente estable.

2. $||G_{\omega z}(s)||_\infty < \gamma$, para $\gamma > 0$.

1.4.2.1. Cálculo de la norma $\mathcal{H}_\infty$

La computación de la norma $\mathcal{H}_\infty$ de una función de transferencia, por ejemplo $G_{\omega z}(s)$, es ligeramente difícil. Por el contrario, utilizando un algoritmo algebraico se puede obtener, en vez de un valor exacto, una condición algebraica de la forma

$$||G_{\omega z}(s)||_\infty < \gamma$$

C.C.Reconocimiento

para algún número real $\gamma \geq 0$.

En este sentido se puede plantear el siguiente teorema :

Teorema 1.13 *Sea $G_{\omega z}(s)$ una función de transferencia representada por el modelo de realización mínima (1.66). Entonces*

1. $||G_{\omega z}(s)||_\infty < \infty$ *si y solamente si los autovalores de $\mathfrak{A}$ tienen parte real negativa.*
2. $||G_{\omega z}(s)||_\infty < \gamma$ *si y solamente si existe una solución estabilizante X de la ecuación de Riccati*

$$\mathfrak{A}^T X + X\mathfrak{A} + \left(\mathfrak{B}^T X - \mathfrak{D}^T \mathfrak{C}\right)^T \left[\gamma^2 \mathbb{I} - \mathfrak{D}^T \mathfrak{D}\right]^{-1} \left(\mathfrak{B}^T X - \mathfrak{D}^T \mathfrak{C}\right) + \mathfrak{C}^T \mathfrak{C} = 0. \quad (1.73)$$

Prueba Ver [23, 133]. ■

El resultado del Teorema 1.13 es que el cálculo de la norma $\mathcal{H}_\infty$, aproximada, se puede convertir en la aplicación de un algoritmo de bisección seleccionando un valor de γ primario que satisfaga las condiciones y reduciéndolo sistemáticamente hasta alcanzar el valor aproximado.

www.bdigital.ula.ve

1.4.2.2. Cálculo de controladores óptimos en $\mathcal{H}_\infty$

Se ha mostrado que la caracterización de la norma $\mathcal{H}_\infty$ de una función de transferencia se expresa en términos de la existencia de una solución particular para una ecuación algebraica sde Riccati. Resulta evidente, entonces, que la síntesis de controladores óptimos en $\mathcal{H}_\infty$ conlleve al cálculo de soluciones específicas de ecuaciones de Riccati.

Desde el punto de vista del problema estándar, un algoritmo de síntesis demanda los siguientes pasos :

- Seleccionar un valor de $\gamma > 0$.
- Analizar si existe un controlador $K(s)$ tal que $||G_{\omega z}(s)||_\infty < \gamma$.
- Si lo anterior es cierto, entonces decrementar γ. Por el contrario, incrementar γ.

En la solución del problema, considérese el sistema definido por (1.62) y supóngase lo siguiente :

R.1 $D_{11} = 0$, y $D_{22} = 0$

C.C.Reconocimiento

R.2 El par (A, B_2) estabilizable y el par (C_2, A) detectable.

R.3 El par (A, B_1) estabilizable y el par (C_1, A) detectable.

R.4 $D_{12}^T[C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad \mathbb{I}]$.

R.5 $D_{21}^T[B_1^T \quad D_{21}^T] = [0 \quad \mathbb{I}]$.

Esas suposiciones tienen que ver con: la no excitación directa entre las funciones de transferencia de ω a z y u a y, la existencia de controladores estabilizantes, y algunas consideraciones técnicas que facilitan el diseño del controlador, [23]. En este sentido la síntesis del controlador se establece bajo el siguiente teorema, [23] :

Teorema 1.14 *Sea el sistema (1.62) bajo las condiciones R.1-R.5, entonces, existe un controlador estabilizante $K(s)$ con realización definida por (1.65) que alcanza que*

$$||G_{\omega z}(s)||_\infty < \gamma$$

si y solamente si existen soluciones estabilizantes $X = X^T \geq 0$, $Y = Y^T \geq 0$ de las ecuaciones de Riccati

$$A^T X + XA - X\left(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T\right) X + C_1^T C_1 = 0, \tag{1.74}$$

$$AY + YA^T - Y\left(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1\right) Y + B_1 B_1^T = 0, \tag{1.75}$$

y el radio espectral $\bar{\sigma}(XY) < \gamma^2$.

Un tal controlador es dado por :

$$A_k = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 F + ZHC_2, \quad B_k = -ZH, \quad C_k = F, \quad D_k = 0, \tag{1.76}$$

donde

$$F = -B_2^T X, \quad H = YC_2^T, \quad Z = \left(\mathbb{I} - \gamma^{-2} YX\right)^{-1}.$$

Prueba Ver[23, 133]. ■

Es concluyente que la existencia del controlador se logra si las tres condiciones algebraicas, las soluciones estabilizantes y el radio espectral, son satisfechas. La solución explícita del controlador, (1.76), se obtiene si las condiciones son satisfechas. Dicho controlador puede ser descrito por una ganancia de realimentación de estados y la síntesis de un observador, [133].

Uno de los mayores inconvenientes en esta solución basada en ecuaciones de Riccati es que se requieren condiciones de rango innecesarias sobre la planta. Para salvar esos inconvenientes se plantea el uso de desigualdades de Riccati que apuntan en la dirección de LMI's.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

1.4.2.3. Controladores óptimos en $\mathcal{H}_\infty$ basados en LMI

La síntesis de controladores óptimos en $\mathcal{H}_\infty$ basados en LMI tiene su fundamento en el *Lema Real Acotado*, [25, 38].

Lema 1.8 *Sea el sistema definido por (1.66). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes :*

1. *La matriz* $\mathfrak{A}$ *es Hurwitz y* $||G_{\omega z}(s)||_\infty < \gamma$, *para algún* $\gamma > 0$.
2. *Existe una matriz simétrica* $\mathcal{X} > 0$ *tal que*

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}^T\mathcal{X} + \mathcal{X}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}^T\mathfrak{C} & \mathcal{X}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}^T\mathfrak{D} \\ \mathfrak{B}^T\mathcal{X} + \mathfrak{D}^T\mathfrak{C} & \mathfrak{D}^T\mathfrak{D} - \gamma^2\mathbb{I} \end{pmatrix} < 0. \tag{1.77}$$

Por lo tanto, el problema de síntesis correspondiente significa la búsqueda de los parámetros del controlador, (A_k, B_k, C_k, D_k) y un $\mathcal{X} > 0$ tal que la desigualdad (1.77) se satisfaga.

Dado que $\mathcal{X}$ es una variable y, por ejemplo, $\mathfrak{A}$ depende de los parámetros del controlador existen dependencias no lineales sobre las variables objeto de solución. Esto se realiza por cambios de variables y transformaciones, [25, 38].

www.bdigital.ula.ve

Si se define

$$v := \begin{pmatrix} X, & Y, & \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

entonces, se definen :

$$\mathbb{X}(v) := \begin{pmatrix} Y & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & X \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}(v) & \mathbb{B}(v) \\ \mathbb{C}(v) & \mathbb{D}(v) \end{pmatrix} := \left(\begin{array}{cc|c} AY + B_2M & A + B_2NC_2 & B_1 + B_2ND_{21} \\ K & AX + LC_2 & XB_1 + LD_{21} \\ \hline C_1Y + D_{12}M & C_1 + D_{12}NC_2 & D_{11} + D_{12}ND_{21} \end{array}\right).$$

A partir de esas definiciones, la desigualdad (1.77) puede ser reemplazada por :

$$\mathbb{X}(v) > 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbb{A}(v)^T + \mathbb{A}(v) & \mathbb{B}(v) & \mathbb{C}(v)^T \\ \mathbb{B}(v)^T & -\gamma\mathbb{I} & \mathbb{D}(v)^T \\ \mathbb{C}(v) & \mathbb{D}(v) & -\gamma\mathbb{I} \end{pmatrix} < 0. \tag{1.78}$$

Así se obtiene una dependencia afín sobre el nuevo conjunto de variables de decisión. Finalmente, la relación uno a uno entre las variables de decisión en (1.77), las variables de decisión en (1.78) y las soluciones al problema de control en $\mathcal{H}_\infty$ se establecen en el siguiente resultado :

C.C.Reconocimiento

Teorema 1.15 *Sea el sistema definido por (1.62), con (C_2, A, B_2) detectable y estabilizable, $D_{22} = 0$. Entonces las siguientes enunciados son equivalentes :*

1. *Existe un controlador $K(s)$ definido por la realización (A_k, B_k, C_k, D_k) y un $\mathcal{X}$ que satisfacen (1.77).*
2. *Existe $v = \left(X, \quad Y, \quad \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \right)$ tal que las desigualdades en (1.78) se cumplen.*

Mas aún, para tal v, la matriz $\mathbb{I} - XY$ es invertible y existen matrices no singulares U, V tal que $\mathbb{I} - XY = UV^T$. Las soluciones únicas $\mathcal{X}$ y (A_k, B_k, C_k, D_k) están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \begin{pmatrix} Y & V \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ X & U \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U & XB \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K - XAY & L \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^T & 0 \\ CY & \mathbb{I} \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Prueba Ver [25]. ■

Se ha presentado, de esta manera, un procedimiento general para derivar, a partir de desigualdades de análisis, las correspondientes desigualdades de síntesis y por ende, para la construcción de los controladores apropiados. La potencia de este método es su simplicidad y su generalidad. Las desigualdades se pueden resolver por procedimientos numéricos al momento disponibles.

www.bdigital.ula.ve

Los resultados que han sido mostrados en esta sección serán utilizados para la construcción de filtros robustos de detección y diagnóstico de fallas.

1.5. Conclusiones

Este capítulo ha sido dedicado a la presentación de algunas nociones fundamentales de los sistemas dinámicos.

En primer lugar, se ha presentado un estudio sobre las propiedades estructurales de los sistemas lineales variantes en el tiempo (LTV) y los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI).

A partir de la descripción de la matriz fundamental como un producto de exponenciales (teorema de Wei-Norman), se han generalizados las condiciones para la controlabilidad y la observabilidad de los sistemas (LTV). Esas condiciones se fundamentan en unas condiciones algebraicas diferenciales para los coeficientes variantes en el tiempo que describen las matrices del sistema.

C.C.Reconocimiento

Se ha mostrado que las condiciones de controlabilidad y observabilidad para los sistemas LTV son generalizaciones de las condiciones de Kalman en el caso de sistemas LTI.

Enseguida, se ha mostrado una generalización del observador de Luenberger. El observador generalizado considera la salida y sus derivadas para producir los estados estimados. Este observador tiene una importancia particular para el diseño de filtros de diagnóstico de fallas, ya que permite definir una estructura particular para la matriz dinámica del error de estimación.

De manera similar al aso de los sistemas lineales, se ha abordado el estudio de las propiedades estructurales de una gran clase de sistemas no lineales. Desde el punto de vista de la geometría diferencial y del álgebra diferencial, se ha analizado la observabilidad de esos sistemas. En ese contexto, basado en la eliminación de estados de Diop, se ha presentado un método de síntesis de observadores no lineales.

Por otro lado, se han introducido unas nociones sobre los sistemas inversos. A este respecto, se ha mostrado una condición de rango para la invertibilidad por la izquierda de los sistemas lineales. Analizado el caso de los sistemas no lineales afines en el control, se ha presentado un resultado análogo para la condición de invertibilidad por la izquierda, la cual se caracteriza por su dependencia con respecto a las propiedades entrada-salida del sistema.

Todos los resultados de este capítulo serán utilizados en los sub-siguientes desarrollos a la luz del objetivo principal que se refiere a la construcción de filtros de detección y diagnóstico de fallas.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Parte II

Detección y Diagnóstico de Fallas: Métodos de Redundancia Analítica

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Capítulo 2

Detección y Diagnóstico de Fallas en Sistemas Dinámicos

En este capítulo se presenta el problema de detección y separación de fallas. Igualmente, se estudian las técnicas para la síntesis de filtros de detección y diagnóstico de fallas en los sistemas dinámicos. Al mismo tiempo, se analizan las condiciones que garantizan que se puede distinguir cual es el origen de una falla, luego de que múltiples son factibles de suceder.

www.bdigital.ula.ve

2.1. Introducción

Los procesos industriales, en base a las exigencias de seguridad en todos sus aspectos: ambiental, personal, etc., y por la competitividad del mercado, requieren de sistemas automatizados de control altamente complejos. En este contexto, la ingeniería de confiabilidad, conjuntamente con la ingeniería de control, buscan cada día mejores sistemas ante los exigentes problemas de la producción industrial.

La confiabilidad integral de un proceso productivo se mide en relación al nivel de seguridad que se puede garantizar en cada uno de los subprocesos que lo constituyen. La garantía de la seguridad exige de sofisticados sistemas que deben responder oportuna y adecuadamente ante cualquier situación del proceso productivo. En particular, si el proceso de producción presenta, eventualmente, cualquier anomalía, se debe contar con sistemas que permitan distinguir y evaluar tal situación y a su vez, los sistemas de control deben responder en la dirección de minimizar o rechazar los impactos negativos que se

C.C.Reconocimiento

puedan presentar, es decir, los sistemas deben ser tolerantes a los eventos no considerados como de operación normal.

Por otro lado, en los procesos industriales, a objeto de garantizar la producción, se debe verificar el funcionamiento de los componentes, de los sensores y actuadores. La regularidad de esas inspecciones es guiada, por lo general, por la experiencia, lo cual se traduce en el *mantenimiento preventivo*. Una alternativa a ese método consiste en seguir, permanentemente, el estado del proceso productivo a fin de detectar, automáticamente, todo cambio significativo del funcionamiento de un componente. La información que así se deriva puede ser utilizada para planificar las labores del equipo de mantenimiento. Este segundo método, denominado *mantenimiento centrado en confiabilidad*, permite evitar los costos suplementarios debido a las operaciones de mantenimiento inútiles o repetitivos, [60, 69, 73].

Para implantar este tipo de mantenimiento es necesario disponer de metodologías que permitan detectar y de localizar los disfuncionamientos incipientes. Tales metodologías explotan el hecho de que, en funcionamiento seguro, las mediciones deben verificar ciertas relaciones construidas sobre la base de un modelo del proceso productivo. En ese caso se habla de relaciones de *redundancia analítica*. Dichas relaciones cesan de ser verificadas luego de la aparición de un disfuncionamiento. El empleo simultáneo de varias relaciones de redundancia, juiciosamente construidas, permite entonces localizar el origen del comportamiento anómalo. Así, la automatización de las operaciones de mantenimento relativa a la confiabilidad, está ligada a los sistemas de supervisión, monitoreo y diagnóstico, [3, 41, 111].

www.bdigital.ula.ve

Dado que la confiabilidad está relacionada con el concepto de seguridad, entonces es fundamental dotar a los procesos industriales de exigentes sistemas de seguridad, en los cuales los elementos de base son los sub-sistemas de detección y diagnóstico de fallas, (DDF). Los DDF se distinguen porque, a partir de los sensores, indicadores y de las variables medidas, permiten una supervisión continua y constante del comportamiento evolutivo de la producción.

Así, los sistemas de monitoreo, detección y diagnóstico, MDD, se fundamentan en su

C.C.Reconocimiento

capacidad para responder ante situaciones inesperadas del comportamiento del proceso, de manera que su principal tarea es la del Diagnóstico y Detección de Fallas, (DDF). Un sistema de DDF, tal como se muestra en la Figura 2.1, utiliza las *mediciones* del proceso a objeto de producir unos *residuos*, a partir de los cuales, mediante funciones de evaluación y lógicas de decisión, se busca la identificabilidad y la separabilidad de las fallas. En el marco de estas ideas, cualquier sistema que permita, a partir de las variables medidas de los procesos, generar los residuos y de evaluar dichos residuos en forma objetiva, en relación a las tomas de decisiones orientadas en el reconocimiento de fallas, se denomina *Filtro de Detección y de Diagnóstico de Fallas.*

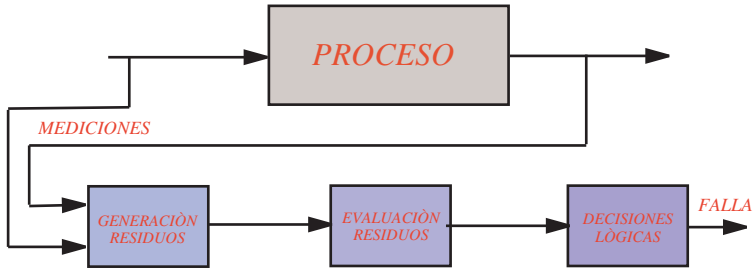


Figura 2.1: Un Sistema de MDD

www.bdigital.ula.ve

En el caso de los sistemas lineales, los primeros en abordar el problema de generación de residuales para la detección de fallas fueron R.V. Beard, [4], y H.L. Jones, [50], quienes utilizando un modelo del sistema producen un estimado de la salida, el cual es comparado con la salida medida, de manera que los residuos son las diferencias entre estas dos variables. Actualmente este filtro se denomina *Filtro de Detección de Beard-Jones.* A partir de este enfoque se han presentado varias extensiones, por ejemplo: la formulación geométrica de M. Massoumnia, [66]. J.E. White y J.L. Speyer, [125], presentan un enfoque donde, bajo ciertas restricciones, es posible la asignación de la estructura del filtro en lazo cerrado. J. Park y G. Rizzoni, [80], definen las estructuras de los filtros para direcciones de fallas dadas. Paralelamente a estos resultados, se trata el problema de diseño de *filtros robustos*:P.M. Frank, [33]; R.K. Douglas y J.L. Speyer, [22]; R.J. Patton y J. Chen, [83]; A. Edelmayer *et al.*, [27]. En este mismo contexto se han presentado varios estudios de actualización: A.s. Willsky [126], R. Iserman [46], J.J. Gertler [41], R.S. Mangoubi [63], J. Chen et R.J. Patton [12], R.J. Patton *et al.* [84], F. Kratz *et al.* [57], W. Nuninger *et*

C.C.Reconocimiento

al. [75].

2.2. Clasificación de los métodos de generación de residuales

Desde el punto de vista de la generación de residuales por comparación, las técnicas de diseño de filtros de DDF se pueden clasificar en, (ver la Figura 2.2) :

1. Métodos de *Redundancia Física*; en los cuales se hace uso de las réplicas físicas de los dispositivos y sistemas bajo estudio. En la comparación de las respuestas de los distintos elementos se generan los residuales. Estas técnicas tienen el inconveniente principal de los costos involucrados para su implementación y seguimiento.

2. Métodos *Basados en Modelos*; a partir de los cuales se producen valores estimados de las salidas de los procesos para la generación de los residuales, mediante su comparación con las salidas medidas. El principal inconveniente de estas técnicas es el de construir o disponer de modelos muy precisos.

www.bdigital.ula.ve

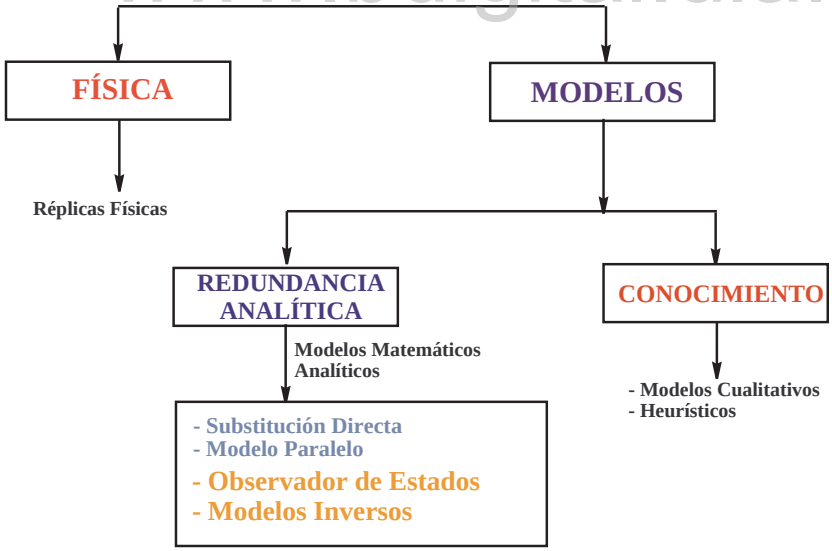


Figura 2.2: Clasificación de métodos de generación de residuos.

En este capítulo se abordaran los métodos basados en modelos. En particular, se estudian, en esta parte, los modelos lineales de los procesos continuos.

En este caso, los métodos de síntesis de filtros para la DDF se pueden dividir en dos categorías, (ver la Figura 2.2) :

C.C.Reconocimiento

1. *Métodos de Redundancia Analítica*; en los cuales se utilizan modelos matemáticos analíticos de los sistemas.

2. *Métodos Basados en el Conocimiento*; en los cuales se emplean modelos cualitativos de los sistemas, asociados con razonamiento heurísticos.

En algunos casos es posible combinar, adecuadamente, ambas metodologías, [33, 47].

En referencia a los métodos análiticos, los sistemas dinámicos se pueden describir por modelos que entran dentro de dos categorías: los *modelos representativos* y los *modelos de diagnóstico*. Los modelos representativos permiten describir el comportamiento dinámico de los sistemas en términos de una estructura estandarizada que, de manera satisfactoria, se aproxima al comportamiento entrada-salida o al comportamiento de estado de los sistemas. Por el contrario, los modelos de diagnóstico permiten describir el comportamiento dinámico a través de una réplica de la estructura o arquitectura física de los sistemas. Allí, las unidades funcionales básicas, o de interés, se modelan en forma explícita: modelos de sensores, de actuadores, etc. Si bien con estos modelos se obtiene un mayor conocimiento del desempeño global de los sistemas, tiene el inconveniente de que el número de ecuaciones algebraicas se incrementan, en comparación con los modelos representativos.

www.bdigital.ula.ve

A los fines de diseñar los filtros de DDF, los modelos de diagnóstico son los más útiles, mientras que para propósitos de control, lo son los modelos representativos.

En este orden de ideas, en las técnicas analíticas, toda la información proveniente de los dispositivos de medición del proceso, del cual se dispone de un modelo matemático de diagnóstico, es procesada para generar los residuales a través de :

1. La sustitución *directa* en las ecuaciones del modelo.

2. La utilización del modelo en forma *paralela* con el proceso real, de manera que en ambos se aplican las mismas entradas.

3. La utilización de un *observador* de estados. Esta es una extensión del método del modelo paralelo. La idea es la generación de residuales con propiedades direccionales precisas, mediante una selección adecuada de la ganancia del observador, [14, 44, 47, 82, 115].

C.C.Reconocimiento

4. El empleo de *modelos inversos* a partir de los cuales es posible reconstruir los modos de las fallas, [92].

2.3. Filtros de DDF basados en observadores

Se trata de definir las condiciones bajo las cuales se pueden construir filtros de DDF como observadores de estados.

2.3.1. El caso de los sistemas lineales

Dado que en este técnica analítica de diseño de filtros de DDF es fundamental un modelo matemático, consideremos la dinámica de un sistema lineal, continuo e invariante en el tiempo, LTI,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t); \end{aligned} \tag{2.1}$$

www.bdigital.ula.ve

donde los estados $x \in \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n$, los controles $u \in \mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^m$, las salidas $y \in \mathfrak{Y} \subset \mathbb{R}^q$; y la matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$. Allí, el par (A, C) es observable.

En la descripción del sistema en (2.1) es fácil distinguir tres sub-sistemas:

- la estructura principal representada por A;
- los actuadores que se describen por B;
- los sensores representados por C.

En cualquiera de esos sub-sistemas pueden presentarse situaciones de comportamiento anormales con respecto a las características de desempeño establecidas en el diseño. De modo que se deben construir los esquemas de monitoreo que generen los residuos en función de las posibles fallas en cada una de las unidades funcionales.

En virtud de que la evaluación del desempeño del sistema dinámico se obtiene a partir del monitoreo de sus variables, se pueden establecer los siguientes conceptos :

C.C.Reconocimiento

Definición 2.1 *Un proceso, como en (2.1), se dice que está en un estado de operacíon normal si sus variables de estados medidas (observadas) están en la vecindad de una referencia definida* a priori.

La *situación de anomalía* se determina por un valor de las salidas en las variables pre-determinadas que indican que el punto de operación está fuera de la vecindad de la referencia pre-definida o que cierto criterio de funcionamiento está siendo violado.

Definición 2.2 *Las* ***fallas*** *son funcionamientos anómalos que perturban la operación normal del sistema, causando una declinación inaceptable del desempeño integral de dicho sistema.*

Como cualquier tipo de mal funcionamiento puede presentarse en cada uno de los subsistemas o unidades funcionales, la concepción de los filtros de DDF se basan en los tipos de modelos del sistema y en las descripciones de las fallas. En el caso de los sistemas lineales que estamos estudiando, las fallas se pueden describir en relación al modelo adoptado. Así, las fallas en los actuadores se pueden modelar como entradas aditivas en la dinámica del proceso, (ver la Figura 2.3), esto es,

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_f f_a, \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

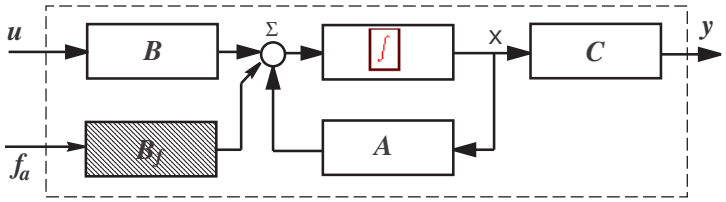


Figura 2.3: Representación de fallas en los actuadores.

Las fallas en los sensores se pueden representar como una función vectorial en el espacio de las salidas, (ver la Figura 2.4), es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + C_f f_s. \end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

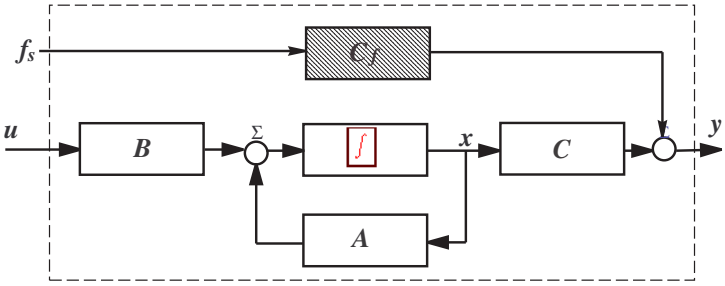


Figura 2.4: Representación de fallas en los sensores.

En el caso de fallas en el proceso, estructuralmente, en el modelo adoptado, la matriz A rige el comportamiento dinámico del sistema, entonces, cualquier funcionamiento anormal del mismo se pueden representar por cambios en esa matriz dinámica. De esta manera, podemos adoptar un modelo de fallas en el proceso mediante la incorporación de una matriz dinámica adicional, (ver la Figura 2.5), esto es,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_f x(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

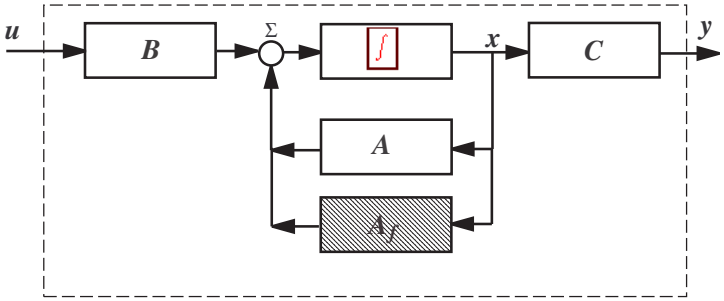


Figura 2.5: Representación de fallas en el proceso.

Si consideramos que $A_f x = A_f f_p$, entonces, para los modelos de fallas adoptados, f_a, f_s y f_p son funciones temporales vectoriales que se presentan en un determinado tiempo $t \geq t_0$, $t_0 > 0$. Es decir, $f_a, f_s, f_p = 0$ si $t < t_0$ y $f_a, f_s, f_p \neq 0$ si $t \geq t_0$. En ese mismo orden, B_f, C_f, A_f son matrices de dimensiones apropiadas e indican las direcciones de las fallas.

El diseño de filtros de DDF se puede dividir es dos etapas: la primera fase es la generación de los residuales, (el problema de detección). La segunda etapa es la evaluación de

C.C.Reconocimiento

los residuales a objeto de determinar el origen de las fallas, (el problema de separación de las fallas).

Así, los residuos son señales escalares o vectoriales que contienen la información sobre el tiempo y localización de las fallas. En principio, los residuos deben ser iguales a cero en ausencia de fallas y, obviamente, distintos de ceros cuando alguna falla hace su aparición.

Bajo esas premisas, los observadores de estados se pueden emplear para la generación de los residuos, [4, 50, 66, 125]. La idea es construir un observador cásico, en general de orden completo, para el sistema dado en (2.1), mediante el uso de las variables de salida $y(t)$ y las variables de control $u(t)$, a objeto de producir un vector de estados estimados. Los residuos se producen al comparar la salida estimada con la salida verdadera.

Así, para el sistema (2.1) existe una matriz de ganancia $D \in \mathbb{R}^{n\times q}$ de modo que el estimado $\hat{x}(t)$ del vector de estados $x(t)$ será la solución para la ecuación del observador de orden completo, [62, 77, 51] :

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + D(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $\hat{y}(t)$ son las salidas estimadas y D la ganancia de ralimentación del observador que se debe seleccionar adecuadamente.

Si ahora se considera que el proceso puede presentar fallas en cualquiera de los subsistemas, esto es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_f f_p + Bu(t) + B_f f_a \\ y(t) &= Cx(t) + C_f f_s \end{aligned}$$

entonces, definiendo el error entre los estados y sus estimados por :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \tag{2.3}$$

la innovación de la salida se define por :

C.C.Reconocimiento

$$\eta(t) = y(t) - \hat{y}(t), \tag{2.4}$$

y la dinámica del error está dada por :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) + A_f f_p + B_f f_a - DC_f f_s, \\ \eta(t) &= Ce(t) + C_f f_s. \end{aligned}$$

Si D se selecciona de manera que $(A - DC)$ sea estable, es decir, todos sus autovalores tienen parte real negativa, en el límite, $t \longrightarrow \infty$, el error de estimación será nulo, $e(t) = 0$. En este caso se dice que el observador es exponencial o asintótico. Puesto que para $t < t_0$, el proceso tiene un funcionamiento normal, es decir, no existen fallas en el mismo, en ese momento el residual o la innovación de la salida es aproximadamente igual cero. Cuando cualquier falla se hace presente, en $t \geq t_0$, el residual es muy distinto de cero y ello es propicio para la detección de las fallas. Las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8, muestran, esquemáticamente, las dinámicas de los filtros resultantes ante fallas en los actuadores, sensores y proceso, respectivamente.

www.bdigital.ula.ve

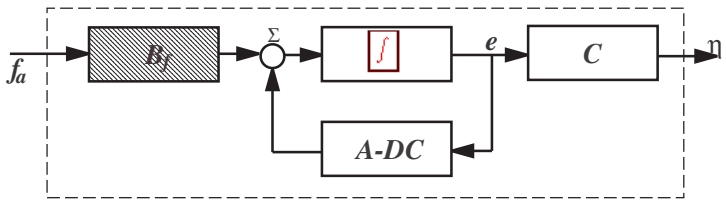


Figura 2.6: Filtro para detección de fallas en los actuadores.

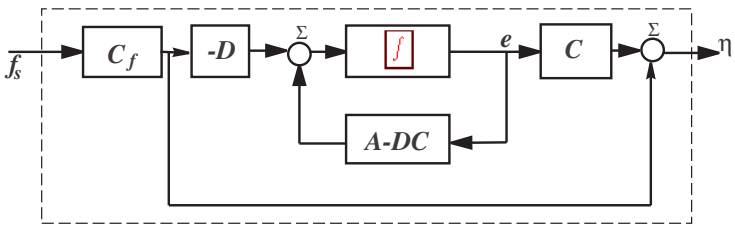


Figura 2.7: Filtro para detección de fallas en los sensores.

Si bien, hemos podido presentar, a través del diseño de un observador de orden completo, un mecanismo de generación de residuos, el problema de evaluar esos residuos a

C.C.Reconocimiento

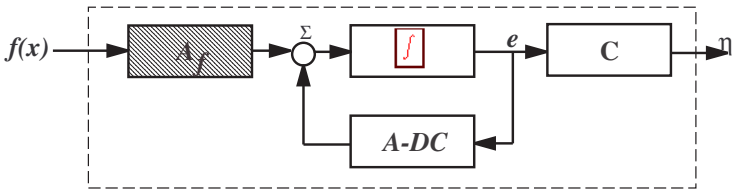


Figura 2.8: Filtro para detección de fallas en el proceso.

objeto de poder distinguir el origen de las fallas, vale decir, si la falla es en el sensor, en el actuador o en el proceso, aún está presente. Ese problema será analizado en profundidad posteriormente.

Podemos observar, a partir de las diferentes representaciones de las fallas, que las mismas se pueden describir como entradas adicionales en la dinámica del proceso, además, de la susceptibilidad a la existencia de distintas fallas en un mismo sub-sistema, y, finalmente, utilizando los resultados presentados en [81], donde fallas en los sensores se pueden representar como fallas en los actuadores, en adelante adoptaremos la siguiente descripción para los sistemas sometidos a fallas :

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i \nu_i(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + \sum_{i=1}^{k} M_i \nu_i(t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde

- $L_i \in \mathbb{R}^{n\times p}$, es la dirección de la falla. Se supone que esta dirección es conocida. En lo sucesivo, se supone que las direcciones de fallas son linealmente independientes. De manera similar, $M_i \in \mathbb{R}^{q\times p}$ es la dirección de la falla en el sub-espacio de salida.

- $\nu_i \in \mathfrak{V}_i \subset \mathbb{R}^p$, corresponde al modo de la falla, el cual es una función independiente, arbitraria y desconocida. Además , $\nu_i(t) = 0$ si $t < t_1$; y $\nu_i(t) \neq 0$ para $t \in [t_1, t_1+\tau]$, $\tau > 0$.

- k es el número de fallas que funcional y estadísticamente son significativas.

Bajo esta representación, donde existen múltiples fallas posibles, con diferentes direcciones, el problema de separabilidad de las fallas se hace evidente. Se debe construir un

C.C.Reconocimiento

generador de residuos que nos permita distinguir cual de las fallas se ha hecho presente.

En el caso de filtros basados en observadores, se debe construir una ganancia del observador de modo que el vector de residuos, esto es, la salida del error de estimación, tenga características en una sola dirección asociada con alguna dirección de falla conocida. El resultado es la separabilidad de las fallas en el espacio de las salidas. Como la información importante está en la dirección de la falla, no se requiere del conocimiento preciso del modo de la falla.

Consideremos un observador de estados como en (2.2), para el sistema (2.5), entonces, la dinámica del error de estimación estará regida por :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) + \sum_{i=1}^{k} (L_i - DM_i)\,\nu_i(t), \quad e(0) = x_0 - \hat{x}_0 \\ \eta(t) &= Ce(t) + \sum_{i=1}^{k} M_i\nu_i(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

www.bdigital.ula.ve

Si D se selecciona de modo que $(A - DC)$ sea estable, y si $\nu_i(t) \neq 0$, entonces $e(t) \neq 0$, por lo tanto se producen los residuos puesto que $\eta(t) \neq 0$. Cualquier cambio en el proceso, por efecto de fallas, es notoriamente acentuado en la innovación de la salida del observador. De este modo se completa la fase de generación de residuos. Por otro lado, debido a las propiedades de los observadores, el desacoplamiento en las condiciones iniciales no tiene mayor efecto.

En este momento, si la única condición que se impone para la selección de la matriz de ganancia del observador, D, es que $(A - DC)$ sea estable, no se está en capacidad para establecer una clara distinción entre los efectos de las diferentes fallas. En principio, se pudiese pensar en el diseño de un conjunto de observadores, cada uno de los cuales se hace corresponder con una dirección de falla específica, lo que sugiere el diseño de D_i, $i = 1, \ldots, k$, ganancias lo cual no es ni práctica, ni elegantemente factible. La idea es construir un único filtro de DDF.

C.C.Reconocimiento

2.4. Condiciones para el diagnóstico de fallas

El problema de separación de las fallas, tal como se ha apuntado, es mas complicado que el problema de detección. Una manera de abordar el problema es por medio del diseño de generadores de señales de residuos estructurados en el sentido de que cada residuo se hace sensible a un conjunto determinado de fallas e insensible a otros ciertos grupos, [85, 40]. Esa propiedad de sensibilidad o insensibilidad permiten la separación de las fallas. Otro método es por la vía del diseño de un vector residual direccional, es decir, hacer que el vector residual esté ligado a una dirección de falla específica y fija en el espacio de los residuos como respuesta a cada una de las fallas. La separación de las fallas se obtiene al determinar a cual, de las direcciones de fallas, se aproxima el vector residual direccional.

En el caso particular del diseño mediante observadores de estados, el problema consiste, entonces, en diseñar un observador que permita la asignación de propiedades direccionales al vector residual, es decir, debemos diseñar una matriz de ganancia del observador de modo que la salida del error de estimación exhiba características unidireccionales asociadas con alguna de las direcciones de fallas conocidas.

www.bdigital.ula.ve

Para poder establecer las condiciones de diseño de la matriz de ganancia del observador, en el contexto del problema de la separación de las fallas, es importante, entonces, analizar como se propagan las fallas dentro de la diámica del error de estimación y que propiedades direccionales deben caracterizarlas.

2.4.1. Sub-espacio de accesibilidad de las fallas

Consideremos la dinámica del error de estimación dada en (2.6). Supongamos que $M_i = 0,\ i = 1, \ldots, k$; y que la i-ésima falla se ha activado. Esa falla se propagará en diferentes direcciones del espacio de estados de 2.6), de acuerdo a su dirección L_i. Esto se define por el dimensión del sub-espacio de controlabilidad de Kalman del par $(A-DC, L_i)$, [128, 51].

Así, el sub-espacio de accesibilidad de cada una de las fallas está dado por el espacio de controlabilidad de Kalman de cada una de ellas. Esto es,

C.C.Reconocimiento

$$\mathfrak{W}_i = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left((A-DC)^j L_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.7}$$

Se puede apreciarse que el sub-espacio $\mathfrak{W}_i$ determina el espacio de propagación de la falla dentro del espacio de estado del sistema original. Este análisis de accesibilidad es completamente geométrico y no establece, en lo absoluto, alguna relación con el sub-espacio de controlabilidad de las entradas de control. Este primer análisis nos induce hacia una selección particular de la matriz de ganancia D a objeto de que los efectos de los modos de las fallas ν_i sean asignados a sub-espacios independientes $\mathfrak{W}_i \subseteq \mathbb{R}^n$, con la condición de que $(A - DC)$ sea estable.

El siguiente análisis se fundamenta en la noción de sub-espacios invariantes, (ver el Anexo A).

Se puede afirmar que el sub-espacio de accesibilidad de la i-ésima falla, $\mathfrak{W}_i$, $i = 1, \ldots, k$, es el sub-espacio $(A - DC)$-invariante mas pequeño del espacio de estados que contiene a Im (L_i).

www.bdigital.ula.ve

Puesto que L_i es una aplicación lineal de $\mathfrak{V}_i \longrightarrow \mathfrak{X}$, entonces, su propiedad primaria es que no debe proyectar el modo de la falla al espacio nulo de $\mathbb{R}^n$, esto es, $\ker(L_i) = \{0\}$.

Por otro lado, puede ocurrir que la proyección sea sobre el sub-espacio inobservable del sistema, de modo que la falla queda oculta y no se puede detectar. Por lo tanto, se deben establecer condiciones para que esta situación no ocurra.

De la dinámica del error de estimación en (2.6) se puede establecer la siguiente definición :

Definición 2.3 *Para el sistema dado en (2.6) el sub-espacio inobservable está caracterizado por :*

$$\mathcal{U}_o = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker\left(C(A-DC)^i\right).$$

Así, los modos de las fallas deben ser proyectados al sub-espacio complementario del sub-espacio inobservable.

Definición 2.4 *Sea $\mathcal{O}_o$ el sub-espacio complementario al sub-espacio inobservable $\mathcal{U}_o$, ($\mathbb{R}^n = \mathcal{O}_o \oplus \mathcal{U}_o$). Se define el* ***sub-espacio de detección*** *del observador, denotado por $\mathfrak{W}_{\mathcal{O}}$, como el sub-espacio del espacio de estado del error de estimación que es producido*

C.C.Reconocimiento

por todos los sub-espacios de accesibilidad de las fallas $\mathfrak{W}_i$, $i = 1, \ldots, k$, *que pertenecen al sub-espacio* $\mathcal{O}_o$, *es decir,*

$$\mathfrak{W}_{\mathcal{O}} \triangleq \left[\bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{W}_i\right] \bigcap \mathcal{O}_o.$$

De manera equivalente, el sub-espacio de detección se define por los estados del système (2.6) que no están en el sub-espacio inobservable $\mathcal{U}_o$.

Esta última afirmación constituye un criterio muy claro para la selección de la matriz de ganancia D para la solución del problema de detección. Dicha ganancia debe proyectar el sub-espacio (C, A)-invariante que contiene Im (L_i) sobre el sub-espacio $\mathcal{O}_o$.

A partir de sistema representado por (2.5), se sabe el sub-espacio inobservable está dado por :

$$\mathfrak{U}_o = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker\left(CA^i\right).$$

Comentario 2.1 *Es claro que el sub-espacio inobservable* $\mathcal{U}_o$ *del sistema descrito por (2.6), contiene el sub-espacio* $\mathfrak{U}_o$, *es decir,* $\mathfrak{U}_o \subseteq \mathcal{U}_o$. *Además,* $\mathfrak{U}_o = \mathcal{U}_o$ *en un conjunto denso y abierto del espacio de las ganancias* $\mathbb{R}^{n\times q}$.

www.bdigital.ula.ve

En efecto, el sub-espacio ortogonal de $\mathcal{U}_o$, definido por :

$$\mathcal{U}_o^{\perp} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left((A - DC)^{Tj} C^T\right)$$

es de dimensión máxima si y solamente si $\mathfrak{U}_o = \mathcal{U}_o$, y la dimensión de $\mathcal{U}_o^{\perp}$ es máxima sobre un conjunto denso y abierto en $\mathbb{R}^{n\times q}$. Si $\mathfrak{U}_o = \mathcal{U}_o$, se puede afirmar que el observador de estados es regular.

Por otro lado, sea $\mathfrak{O}_o$ el sub-espacio complementario del sub-espacio inobservable $\mathfrak{U}_o$. Se sabe que

$$\mathfrak{O}_o \bigcap \mathfrak{U}_o = \{0\}.$$

Comúnmente se admite que

$$\mathfrak{O}_o = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(A^{Tj} C^T\right)$$

es el sub-espacio observable. Sin embargo, si solamente se quiere considerar los estados observables, $\mathfrak{O}_o$, sobre los mismos se puede definir la dinámica inducida por el sistema original. En general, $\mathfrak{O}_o$ no es A-invariante. Así, no existe razón especial de distinguir $\mathfrak{O}_o$ en el conjunto de los sub-espacios complementarios.

C.C.Reconocimiento

Estos resultados permiten establecer las condiciones de detectabilidad y de separabilidad de las fallas con respecto al sistema de diagnóstico (2.5). En efecto, si las condiciones son satisfechas para el sistema (2.5), entonces serán, igualmente, satisfechas para el sistema (2.6).

2.4.1.1. Condición para la detectabilidad

Si en algún momento dado una falla se hace presente, la propagación de la misma en el espacio de estados, debido a su dirección de falla, no debe estar contenida en el sub-espacio inobservable de sistema, lo cual permitirá su detectabilidad por medio de las salidas. La falla debe, igualmente, estar en el sub-espacio de détection, de acuerdo con la Definición 2.4. Así, a través de la interpretación geométrica y sobre la base del sistema original, se puede establecer el siguiente resultado :

Sea $\mathcal{W}_{L_j} = \text{Im}\,(L_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Se puede construir una condición de detectabilidad para las fallas, misma que es formulada en el siguiente teorema, [66] :

Teorema 2.1 *Sea el sistema dinámico representado por (2.5), con el par (C, A) detectable y $M_i = 0,\ i = 1, \ldots, k$. Entonces, la i-ésima falla, $i = 1, \ldots, k$, es detectable si*

www.bdigital.ula.ve

$$\mathcal{W}_{L_j} \bigcap \mathfrak{U}_o = \{0\} \quad j = 1, 2, \ldots, k; \tag{2.8}$$

o, dicho de otra forma :

$$\ker \left(\left(\begin{array}{c} CL_i \\ CAL_i \\ CA^2L_i \\ \vdots \\ CA^{n-1}L_i \end{array} \right) \right) = \{0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.9}$$

Prueba Ver [66, 125]. ■

La condición señala el hecho de que la proyección de las fallas sobre el espacio de estado, por medio de L_i, debe pertenecer al sub-espacio de observabilidad del sistema, de manera que se puedan propagar hasta los residuos vectoriales a través de C.

Sea $\mathfrak{O}$ la matriz de observabilidad del sistema (2.5), es decir,

$$\mathfrak{O} \triangleq \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

C.C.Reconocimiento

Luego,

$$\mathbb{R}^n = \text{ Im } (\mathfrak{O}) \ \oplus \mathfrak{U}_o.$$

Se tiene :

$$\text{Im } (L_i) = \text{Im } (\mathfrak{O} L_i) \oplus \ker (\mathfrak{O} L_i).$$

Si la condición del Teorema 2.1 es verificada, entonces

$$\text{Im } (L_i) = \text{Im } (\mathfrak{O} L_i).$$

Desde un punto de vista mas general y en el marco de los principales resultados de este trabajo, ahora se presenta una condición de detectabilidad sobre la base de la inversión des sistemas.

Definición 2.5 *Una falla ν_i, $i = 1, \ldots, k$, para el sistema de diagnóstico (2.5) es detectable si existe un observador con ganancia D, asintóticamente estable, de tal manera que si la función $\nu_i : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es tal que $\nu_i(t) = 0$ si $t \leq t_0$, y $\nu_i \neq 0$ para $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, $\tau > 0$, entonces el error de salida*

$$\eta(t) = Ce(t) + M_i \nu_i(t)$$

no es nulo en el intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$.

www.bdigital.ula.ve

Si todas las fallas son detectables se dice que el error de estimación del sistema de diagnóstico es detectable.

Resulta evidente que si $\ker (M_i) = \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces, por la Definición 2.5, la falla ν_i es detectable. Se tiene el siguiente teorema :

Teorema 2.2 *Sea el sistema de diagnóstico (2.5). El error de estimación del sistema es detectable si, y solamente si, existe un observador de tipo Luenberger con ganancia D y asintóticamente estable de tal forma que la ecuación dinámica del error dada por :*

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) + \sum_{i=1}^{k} (L_i - DM_i)\, \nu_i(t), \\ \eta(t) &= Ce(t) + M_i \nu_i(t); \end{aligned} \tag{2.10}$$

es invertible por la izquierda.

Prueba En efecto, si se considera el sistema dado en (2.10) con la condición de que $e(t_1) = 0$, donde t_1 es el tiempo a partir del cual la falla existe, entonces la detectabilidad del error significa que el núcleo de la aplicación lineal $\nu_i \longrightarrow \eta$ es $\{0\}$. Eso es equivalente a la invertibilidad por la izquierda, [51, 110]. ■

C.C.Reconocimiento

Lema 2.1 *Una condición necesaria para la detectabilidad (la invertibilidad) del error, bajo la i-ésima falla, es que*

$$\ker\left(\begin{pmatrix} C(L_i - DM_i) \\ C(A-DC)(L_i - DM_i) \\ \vdots \\ C(A-DC)^{n-1}(L_i - DM_i) \end{pmatrix}\right) = \{0\}. \tag{2.11}$$

Prueba El sistema (2.10) es invertible si y solamente si su matriz de transferencia es invertible, [51, 110, 130].

Una matriz fraccionaria representada por $C(s\mathbb{I}-A+DC)^{-1}(L_i-DM_i)$, es invertible por la izquierda si y solamente si, para un vector $P(s)$ de polinomios de s, se tiene, [51, 130] :

$$C(s\mathbb{I} - A + DC)^{-1}(L_i - DM_i)P(s) = 0 \quad \Longrightarrow P(s) = 0.$$

Supóngase que la condición (2.11) no se satisface. Entonces existe un vector $v \neq 0$, tal que $C(s\mathbb{I} - A + DC)^j(L_i - DM_i)v = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Aplicando el teorema de Caley-Hamilton, [51], se puede mostrar que $C(s\mathbb{I} - A + DC)^{-1}(L_i - DM_i)v = 0$, por consiguiente el sistema (2.10) no es invertible.

www.bdigital.ula.ve

Supóngase ahora que $(L_i - DM_i)$ es un vector tal que

$$C(s\mathbb{I} - A + DC)^{-1}(L_i - DM_i) \neq 0.$$

Luego, eso es equivalente a (2.11).

A partir del Comentario 2.1, la condición dada en (2.11) es cierta si

$$\ker\left(\begin{pmatrix} CL_i \\ CAL_i \\ \vdots \\ CA^{n-1}L_i \end{pmatrix}\right) = \{0\}. \tag{2.12}$$

■

Así, para un conjunto denso y abierto de las ganancias D, la condición (2.11) es satisfecha. Por consiguiente, se puede establecer el siguiente teorema :

Teorema 2.3 *Sea el sistema de diagnóstico dado en (2.5), con el par (C, A) detectable. Si L_i satisface la ecuación (2.12), entonces la falla ν_i es detectable.*

C.C.Reconocimiento

Prueba La condición dada en (2.12) implica que en un sub-conjunto $\mathfrak{D}_1$ denso y abierto de las ganancias D, la condición dada en (2.11) se satisface también. En lo que concierne a la detectabilidad del par (C, A), entonces existe un observador con ganancia D_0 tal que el sistema de error es asintóticamente estable. Así, existe una vecindad $\mathfrak{D}_2 \subset \mathbb{R}^{n\times q}$ alrededor de D_0 tal que $\forall\ D \in \mathfrak{D}_2$ el sistema de error es asintóticamente estable. Por consecuencia, para todo $D \in \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$, el sistema de error que corresponde al observador con ganancia D, es invertible. Así, ν_i es détectable. ■

En el siguiente contexto, se puede generalizar el teorema precedente :

Teorema 2.4 *Sea el sistema de diagnóstico dado en (2.5) detectable. Sea el sistema que considera la i-ésima falla, el cual es representado por*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + L_i\nu_i(t) \\ y(t) &= Cx(t) + M_i\nu_i(t). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Si ese sistema es invertible por la izquierda entonces la i-ésima falla es detectable.

www.bdigital.ula.ve

Prueba La condición de invertibilidad del sistema (2.13) puede ser descrita a partir de una condición de rango, (ver la Sección 1.3.1). En efecto, sean las derivadas de la salida dadas por :

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + M_i\nu_i(t) \\ \dot{y}(t) &= CAx(t) + CL_i\nu_i(t) + M_i\dot{\nu}_i(t) \\ \ddot{y}(t) &= CA^2x(t) + CAL_i\nu_i(t) + CL_i\dot{\nu}_i(t) + M_i\ddot{\nu}_i(t) \\ &\vdots \\ y^{(l)} &= CA^lx(t) + CA^{l-1}L_i\nu_i(t) + \cdots + CL_i\nu_i^{(l-1)}(t) + M_i\nu_i^{(l)}(t). \end{aligned}$$

Denotemos por P_l la proyección ortogonal al sub-espacio

$$\mathrm{Im}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\M_i\\CL_i\\\vdots\\CA^{l-2}L_i\end{pmatrix}\end{pmatrix} + \mathrm{Im}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\M_i\\\vdots\\CA^{l-3}L_i\end{pmatrix}\end{pmatrix} + \cdots + \mathrm{Im}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\M_i\\CL_i\end{pmatrix}\end{pmatrix} + \mathrm{Im}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\M_i\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

C.C.Reconocimiento

Aplicando el Lema 1.6, el sistema descrito por (2.13) es invertible si y solamente si, existe un l tal que

$$\text{rango} \left((\mathbb{I} - P_l) \begin{pmatrix} M_i \\ CL_i \\ \vdots \\ CA^{l-1}L_i \end{pmatrix} \right)$$

es igual a la dimensión de ν_i y por consiguiente la i-ésima falla es détectable.

■

Comentario 2.2 *La condición en el teorema 2.4 juega el mismo rol que la condición dada en (2.12).*

Si la dimensión de $\mathcal{W}_{L_i} = \text{Im}\ (L_i)$ es mas grande que el número de salidas, entonces la condición dada en (2.12) no es suficiente para la inversibilidad del sistema (2.13).

2.4.1.2. Condición para la separabilidad

El problema principal, luego de haber analizado las condiciones de detectabilidad de las fallas, es poder asignar las mismas a unas direcciones particulares en el espacio de salidas, a fin de identificar sus origines. En el enfoque que hemos utilizado, esto significa que los modos de las fallas $\nu_i(t)$ deben poder ser asignados, a través de D, a sub-espacios independientes.

www.bdigital.ula.ve

En un marco general, la condición de separabilidad se puede caracterizar a partir de los sistemas inversos.

Definición 2.6 *Sea el sistema dado en (2.5). Se dice que las fallas son separables si existe un observador de ganancia D tal que cada una de las fallas puede ser asignada a un sub-espacio independiente en el espacio de las salidas del error de estimación.*

De manera explícita, la separabilidad de las fallas se establece en la siguiente definición :

Definición 2.7 *Sea el sistema (2.5). Se dice que las fallas son separables si existe un observador de ganancia D y unos sub-espacios $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \ldots, \mathfrak{Y}_k \subset \mathbb{R}^q$, en el espacio de las salidas, tales que :*

1. *Las salidas del sistema de error dado por :*

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) + (L_i - DM_i)\nu_i(t) \\ \eta_i(t) &= Cx(t) + M_i\nu_i(t), \end{aligned}$$

son tales que $\eta_i(t) \in \mathfrak{Y}_i$ para $\nu_i : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $t > 0$.

C.C.Reconocimiento

2.

$$\mathfrak{Y}_i \bigcap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathfrak{Y}_j \right) = 0.$$

Comentario 2.3 *Si la separabilidad de las fallas es satisfecha para una ganancia D, entonces para*

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}_i &= \text{Im } (M_i) + \sum_{j=0}^{n-1} C\text{Im } \left((A - DC)^j (L_i - DM_i) \right) \\ &= \text{Im } (M_i) + C\mathfrak{W}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k \end{aligned}$$

la condición es, igualmente, satisfecha y el sub-espacio de accesibilidad $\mathfrak{W}_i$ es el sub-espacio mas grande en el cual la falla tiene efecto. Así, esta última condición es equivalente a la condición geométrica dada en [66], misma que es presentada en el Teorema 2.5 :

Considérese el sub-espacio $\mathcal{W}_{L_i} = \text{Im } (L_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

Teorema 2.5 *Sea el sistema descrito por (2.5). La matriz de observabilidad del sistema es $\mathfrak{O}$. Sea el sub-espacio $\mathcal{W}_{L_i}$. Entonces, las fallas son separables si cada uno de los $\mathcal{W}_{L_i}$ y cada una de las direcciones de las fallas en el espacio de la salida del error de estimación están aisladas, es decir, si*

www.bdigital.ula.ve

$$(\text{Im } (M_i) + \mathfrak{O}\mathcal{W}_{L_i}) \bigcap \left(\text{Im } (M_j) + \sum_{j \neq i}^{k} \mathfrak{O}\mathcal{W}_{L_j} \right) = \{0\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.14}$$

Prueba Ver [66]. ■

Sobre los mismos fundamentos y a fin de establecer un resultado para la separabilidad, considérense las siguientes matrices :

$$L = (L_1 \;\; L_2 \;\; \cdots \;\; L_k) \quad M = (M_1 \;\; M_2 \;\; \cdots \;\; M_k).$$

Considérense las fallas ν_i de manera individual, con sus residuos correspondientes η_i. Por tanto, se puede considerar la ecuación de error para cada una de las fallas, la cual es descrita por :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) + (L_i - DM_i)\nu_i(t) \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots, k, \\ \eta_i(t) &= Ce(t) + M_i\nu_i(t); \end{aligned} \tag{2.15}$$

C.C.Reconocimiento

Si cada una de las fallas ν_i produce un residuo η_i, entonces ellas son détectables.

Si bien, con abuso de notación, se ha establecido un residuo η_i para cada una de las fallas ν_i, se observa que diferentes fallas pueden activar un mismo residuo. Así, se define el sistema de la clase de equivalencia de las salidas $(\eta_1(t), \ldots, \eta_k(t))$ a $\eta(t)$, es decir, el sistema $(\eta_1(t), \ldots, \eta_k(t)) \longrightarrow \eta(t)$, el cual es descrito por la dinámica siguiente :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) + (L - DM)\nu(t), \\ \eta(t) &= Ce(t) + M\nu(t), \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde $\nu(t) = (\nu_1 \quad \nu_2 \quad \cdots \quad \nu_k)^T$. Nótese que $\eta(t)$ no depende de la selección de $\nu_1(t), \cdots, \nu_k(t)$ si no de sus salidas correspondientes $\eta_1(t), \ldots, \eta_k(t)$, entonces dos residuos iguales η_i's tienen una misma imagen en η.

En este orden de ideas, se puede establecer el siguiente resultado para la separabilidad de las fallas :

Teorema 2.6 *Considérese la ecuación de error para las fallas individuales descrito por (2.15). Sea el sistema de las salidas $(\eta_1(t), \ldots, \eta_k(t)) \longrightarrow \eta(t)$ descrito por (2.16).*

Entonces el sistema de error es de salida separable si y solamente si, el sistema

$$(\eta_1(t), \ldots, \eta_k(t)) \longrightarrow \eta(t)$$

es invertible por la izquierda.

www.bdigital.ula.ve

Prueba

Supóngase que D no separa las salidas en la dinámica del error. Entonces, no existen sub-espacios $\mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_k$ descritos en la definición de separabilidad. De manera particular, para los sub-espacios

$$\mathfrak{Y}_i = \text{Im } (M_i) + \sum_{j=1}^{n-1} C\text{Im } \left((A - DC)^j (L_i - DM_i)\right) = \text{Im } (M_i) + C\mathfrak{W}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

existe un i tal que

$$\mathfrak{Y}_i \bigcap \left(\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{k} \mathfrak{Y}_j \right) \neq 0.$$

Esto significa que existen unas entradas $\nu_1, \ldots, \nu_k$ tales que, para las salidas correspondientes $\eta_1(t), \ldots, \eta_k(t)$, la ecuación

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &= \eta_1(t) + \cdots + \eta_{i-1} + \eta_{i+1} + \cdots + \eta_k \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

se satisface. Sin embargo, en ese caso, si las entradas son dadas por :

$$(\nu_1 \quad \cdots \quad \nu_{i-1} \quad -\nu_i \quad \nu_{i+1} \quad \cdots \quad \nu_k)^T$$

entonces la salida en el sistema (2.16) es $\eta(t) = 0$; por consiguiente el sistema

$$\begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_k(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \eta(t)$$

no es invertible.

Ahora, supóngase que el sistema anterior no es invertible. Entonces, existen unas salidas $(\eta_1(t) \quad \cdots \quad \eta_k(t))^T \neq 0$ tales que la salida $\eta(t)$ correspondiente es nula. Esto es, existe al menos un $\tilde{\eta}_i(t) \neq 0$ de tal forma que

$$-\tilde{\eta}_i(t) = \tilde{\eta}_1(t) + \cdots + \tilde{\eta}_{i-1}(t) + \tilde{\eta}_{i+1}(t) + \cdots + \tilde{\eta}_k(t).$$

Considérese las funciones de fallas $\nu_1(t), \ldots \nu_k(t)$, tales que

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) + (L_j - DM_j)\nu_j(t) \\ & \qquad j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k \\ \tilde{\eta}_j(t) &= Ce(t) + M_j\nu_j(t) \end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

y

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) - (L_i - DM_i)\nu_i(t) \\ \tilde{\eta}_i(t) &= Ce(t) - M_i\nu_i(t). \end{aligned}$$

Entonces, la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} -\tilde{\eta}_i(t) &= \tilde{\eta}_1(t) + \cdots + \tilde{\eta}_{i-1}(t) + \tilde{\eta}_{i+1}(t) + \cdots + \tilde{\eta}_k(t) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

se satisface. Sin embargo,

$$\tilde{\eta}_i(t) \in \text{Im } (M_i) + C\mathfrak{W}_i$$

y

$$\tilde{\eta}_1(t) + \cdots + \tilde{\eta}_{i-1}(t) + \tilde{\eta}_{i+1}(t) + \cdots + \tilde{\eta}_k(t) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\text{Im } (M_j) + C\mathfrak{W}_j)\,.$$

C.C.Reconocimiento

Si al instante $t > 0$, $\tilde{\eta}_i(t) \neq 0$, entonces

$$0 \neq \tilde{\eta}_i(t) \in (\text{Im } (M_i) + C\mathfrak{W}_i) \bigcap \left(\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{k} (\text{Im } (M_j) + C\mathfrak{W}_j) \right)$$

lo que significa que D no separa las fallas. ■

A partir de esos resultados, se puede notar que $\eta(t) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i(t) = 0$ implica un criterio de dependencia lineal.

Teorema 2.7 *Sea el sistema dado en (2.5). Considérese que existe un observador con ganancia D, asintóticamente estable. Dicho observador permite detectar y separar todas les fallas si y solamente si el sistema de error dado en (2.15) y (2.16) es invertible.*

Prueba La prueba se apoya sobre argumentos similares dados en la prueba anterior.

Solamente es necesario notar que la detectabilidad de cada uno de los sistemas de error, dados en (2.15), es equivalente a la invertibilidad por la izquierda en $\nu_i(t) \longrightarrow \eta_i(t)$, mientras que la separabilidad es equivalente a la invertibilidad por la izquierda en $(\eta_1(t) \quad \cdots \quad \eta_k(t))^T \longrightarrow \eta(t)$.

www.bdigital.ula.ve

Así, la detectabilidad y la separabilidad de las fallas son equivalentes a la invertibilidad del sistema de error $\nu(t) \longrightarrow \eta(t)$. ■

Lema 2.2 *Sea el sistema de diagnóstico dado en (2.5), donde el par (C, A) es détectable. Supóngase que, con respecto a $\nu(t)$, el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + L\nu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + M\nu(t) \end{aligned}$$

es invertible. Entonces existe un observador que produce una dinámica asintóticamente estable para el error, lo cual permite detectar y separar las fallas.

2.4.2. Detección de fallas en el caso de los sistemas LTV

Ahora, se buscan las condiciones para la DDF en los sistemas LTV. Sea el sistema LTV descrito por (1.1) que se retoma :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + \sum_{i=1}^{k} M_i\nu_i(t). \end{aligned} \tag{2.17}$$

C.C.Reconocimiento

A fin de facilitar los cálculos, en este caso se considera que los sensores son representables por unas funciones invariantes en el tiempo y no sometidas a fallas.

Supóngase que ese sistema es observable (détectable). Entonces, existe un observador de tipo Luenberger, tal que la dinámica del error d estimación, $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, es dado por :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A(t) - D(t)C)\, e(t) + \sum_{i=1}^{k} (L_i - D(t)M_i)\nu_i(t) \\ \eta(t) &= Ce(t) + \sum_{i=1}^{k} M_i\nu_i(t). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Siguiendo las notaciones para los sistemas LTV presentadas en la Sección 1.1.1, sea $D(t) = \sum_{i=1}^{\hat{p}} d_i(t)D_i$. Sea $\mathcal{A}(t)$ la matriz dinámica del error de estimación, es decir,

$$\mathcal{A}(t) = A(t) - D(t)C = \sum_{i=1}^{\hat{p}} (a_i(t)A_i - d_i(t)D_iC) = \sum_{i=1}^{\hat{p}} \tilde{a}_i(t)\mathcal{A}_i;$$

donde $\tilde{a}_i(t)$ es una función de $a_i(t)$ y $d_i(t)$. $\mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots, p$, representa la base del álgebra de Lie para $\mathcal{A}(t)$. Luego, la dinámica del error se expresa por :

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \mathcal{A}(t)e(t) + \sum_{i=1}^{k} (L_i - D(t)M_i)\nu_i(t) \\ \eta(t) &= Ce(t) + \sum_{i=1}^{k} M_i\nu_i(t). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Par consiguiente, si $M_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, el sub-espacio de accesibilidad de la i-ésima falla está dado por :

$$\mathfrak{W}_i = \sum_{n_1=0}^{n-1} \sum_{n_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_p=0}^{n-1} \text{Im } \left(\mathcal{A}_1^{n_1}\mathcal{A}_2^{n_2}\cdots\mathcal{A}_p^{n_p}L_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

A partir de un análisis similar, el sub-espacio inobservable para el sistema (2.19) se expresa por :

$$\mathfrak{U}_o = \bigcap_{n_1=0}^{n-1} \bigcap_{n_2=0}^{n-1} \cdots \bigcap_{n_p=0}^{n-1} \ker \left(C\mathcal{A}_1^{n_1}\mathcal{A}_2^{n_2}\cdots\mathcal{A}_p^{n_p}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Para que la i-ésima falla aparezca en los residuos $\eta(t)$, es necesario que

$$\mathfrak{W}_i \bigcap \mathfrak{U}_o = \{0\} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

C.C.Reconocimiento

Esto significa que el sub-espacio de accesibilidad de la falla debe estar contenido en el sub-espacio complementario del sub-espacio inobservable. Se puede notar que esta condición depende de la construcción de una matriz de ganancia $D(t)$, la cual existe bajo unas condiciones sobre el sistema (2.17). En efecto, dado que el sistema es observable, entonces se puede construir un observador de estados. Por el contrario, el observador debe permitir la detección de las fallas, lo cual es posible si las direcciones de las fallas generan un sub-espacio imagen que no esta contenido el sub-espacio inobservable del sistema (2.17).

Se sabe que el sub-espacio inobservable para el sistema (2.17) está dado por

$$\mathfrak{U} = \bigcap_{n_1=0}^{n-1} \bigcap_{n_2=0}^{n-1} \cdots \bigcap_{n_p=0}^{n-1} \ker\left(CA_1^{n_1}A_2^{n_2}\cdots A_p^{n_p}\right).$$

Sea $\mathfrak{W}_{L_i} \triangleq \text{Im}\ (L_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Se tiene el siguiente resultado :

Teorema 2.8 ***La condición de detectabilidad.***
Sea el sistema descrito por (2.17). Supóngase que el par $(C, A(t))$ es observable (detectable). Entonces la i-ésima falla es detectable si se satisface la siguiente condición :

$$\mathfrak{W}_{L_i} \bigcap \mathfrak{U} = \{0\} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

www.bdigital.ula.ve

Prueba Puesto que el sistema es observable (detectable), se puede construir un observador de tipo Luenberger, a través de la selección de una matriz de ganancia $D(t)$, sobre el sub-espacio de observabilidad. La condición establece que si $\mathfrak{W}_{L_i}$ es un sub-espacio del espacio de observabilidad, entonces los estados observables son susceptibles de ser afectados por las fallas. Par consecuencia, la presencia de una falla generará unos residuos por medio del observador. Así, la falla es detectada. ■

Aplicando un análisis similar al caso de los sistemas LTI, se puede hacer una extensión del Teorema 2.2 para los sistemas LTV :

Teorema 2.9 *Sea el sistema de diagnóstico (2.17). El error de ese sistema es detectable si y solamente si, existe un observador de tipo Luenberger con ganancia $D(t)$ y asintóticamente estable de tal manera que el sistema dinámico del error dado por :*

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A(t) - D(t)C)e(t) + (L_i - D(t)M_i)\nu_i(t), \\ \eta(t) &= Ce(t) + M_i\nu_i(t); \end{aligned} \tag{2.20}$$

para $i = 1, 2, \ldots k$, es invertible por la izquierda, para $t \geq t_0$.

C.C.Reconocimiento

Prueba Dado que el sistema inverso de (2.20) permite reconstruir las fallas, entonces se producen unos residuos a fin de detectar las fallas. Los sistemas inversos se pueden obtener a partir del procedimiento presentado en la Sección 1.3.1. ■

En base a la detección de las fallas, la etapa siguiente es de poder discernir, por medio de los residuos, la fuente de la falla. En principio, se debe suponer que las fallas son detectables.

Sea

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{O}_i} \triangleq \mathfrak{W}_{L_i} \bigcap \mathfrak{O}, \quad i = 1, 2, \ldots, k;$$

donde

$$\mathfrak{O} = \sum_{n_1=0}^{n-1} \sum_{n_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{n_p=0}^{n-1} \text{Im} \left({A_1^{n_1}}^T {A_2^{n_2}}^T \cdots {A_p^{n_p}}^T C^T \right)$$

es el sub-espacio de observabilidad.

$\mathfrak{W}_{\mathfrak{O}_i}$ es el sub-espacio imagen de la i-ésima falla que está contenida en el sub-espacio de observabilidad.

Teorema 2.10 ***Condición de separabilidad*** *Sea el sistema descrito por (2.17). Supóngase que las fallas son detectables. Si la siguiente condición se satisface*

www.bdigital.ula.ve

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{O}_i} \bigcap_{j \neq i}^{k} \mathfrak{W}_{\mathfrak{O}_j} = \{0\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k$$

entonces las fallas son susceptibles de ser separadas en el espacio de la salida, por medio de un observador de estados.

Prueba Puesto que las fallas son detectables sus espacios imagenes corresponden a unops sub-espacios del espacio de observabilidad del sistema. Por otro lado, la condición de separabilidad establece que esos mismos espacios imagenes son discernibles en el espacio de las salidas. Así, las fallas pueden ser asignadas a unas direcciones particulares sobre las salidas. ■

De forma similar, desde el punto de vista de la inversión de sistemas, se pueden presentar resultados mas globales :

Lema 2.3 *Sea el sistema de diagnóstico dado en (2.17), donde el par $(C, A(t))$ es detectable. Supóngase que, con respecto a $\nu(t)$, el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + L\nu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + M\nu(t) \end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

es invertible para $t \geq t_0$. Entonces existe un observador que produce una dinámica asintóticamente estable para el error, el cual permite detectar y de separar las fallas.

2.4.3. Detección de fallas en el caso de sistemas no lineales

Contrariamente al caso de los sistemas lineales, existe poco de resultados en la literatura sobre la detección de fallas para los sistemas no lineales, al igual que sobre la síntesis de observadores, [18, 36, 112, 109, 129, 132].

Sea el sistema no lineal sometido a unas entradas aditivas que modelan las fallas, dado por :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u(t) + \sum_{j=1}^{k} L_j\nu_j(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= h(x) + \sum_{j=1}^{k} M_j\nu_j(t). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Las fallas pueden ser, igualmente, la consecuencia de cambios en los parámetros del sistema.

En este contexto, la detectabilidad se puede definir como sigue :

www.bdigital.ula.ve

Definición 2.8 *Una falla ν_i, $i = 1, \ldots, k$, se dice no detectable si para $\nu_i \neq 0$ la relación*

$$y(x_0, x, u, 0) = y(x_0, x, u, \nu_i)$$

es satisfecha, por el contrario, la falla ν_i se dice detectable.

Así, si la falla ν_i es detectable, los residuos pueden ser obtenidos por la diferencia entre la salida $y(x_0, x, u, \nu_i)$ y la salida $y(x_0, x, u, 0)$, mismo que corresponde a :

$$\eta(t) = y(x_0, x, u, \nu_i) - y(x_0, x, u, 0).$$

Por consiguiente, un residuo cualquiera $\eta(t)$ es una función temporal que es idealmente nula para el caso sin falla y diferente de cero para los otros casos.

A diferencia de los sistemas lineales, la detectabilidad de una falla en los sistemas no lineales es función tanto de la estructura del sistema como de la entrada de control.

Así, tal como se presentó en el caso de los sistemas lineales, se mostrarán las dificultades para la generación de los residuos para los sistemas no-lineales a partir de la construcción de observadores de estados. Será considerada la síntesis de observadores presentada en la Sección 1.2.2.2. Así, se tiene la siguiente formulación :

C.C.Reconocimiento

Definición 2.9 *Sea el sistema de diagnóstico no lineal dado en (2.21). Se dice que las fallas son detectables si existe un observador descrito por*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u(t) + D\left(x(t) - \hat{x}(t)\right) \\ \hat{y}(t) &= h(x) - F\left(x(t) - \hat{x}(t)\right), \end{aligned} \tag{2.22}$$

el cual se obtiene por eliminación de estados, y donde D y F son las ganancias del observador; de tal manera que la dinámica del error representada por

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= -De(t) + \sum_{j=1}^{k} L_j \nu_j(t), \\ \eta(t) &= Fe(t) + \sum_{j=1}^{k} M_j \nu_j(t) \end{aligned} \tag{2.23}$$

es asintóticamente estable.

Se puede notar, de acuerdo a la síntesis de observadores presentada en la Sección 1.2.2.2, en la dinámica del observador $f(x)$, $g_i(x)$ y $h(x)$ son reemplazadas por funciones de las salidas, los controles y sus derivadas. Ello impone las siguientes restricciones :

www.bdigital.ula.ve

1. La eliminación de estado es obtenida en una sola etapa, es decir, el estado se puede expresar par $x(t) = \hat{h}(y)$, lo que significa que el número de salidas es igual a la dimensión del espacio de estado, [132].

2. El sistema no-lineal definido entre las fallas y la salida es de salida plana, [32, 65]. Bien que esta condición es menos exigente que la condición precedente, no existe en la actualidad un algoritmo para encontrar la salida plana.

3. El estado se obtiene a partir de un procedimiento análogo al algoritmo de inversión para los sistemas no-lineales presentado en la Sección 1.3.2. En ese caso, las fallas son eliminadas por proyección y la salida y sus derivadas son funciones solamente del control, de las derivadas del control y del estado. Esta condición es menos exigente que las anteriores.

Si una de las condiciones precedentes es satisfecha, entonces son posibles la construcción del observador y la detección de las fallas.

C.C.Reconocimiento

La separación de las fallas en el caso de los sistemas no-lineales es un problema bien dificil, [2, 36, 88]. Por el contrario, si existe un observador de acuerdo con la Definición 2.9, la ecuación del error es lineal y se puede establecer la siguiente formulación :

Lema 2.4 *Sea el sistema de diagnóstico no lineal descrito por (2.21). Supóngase que las fallas son detectables en el sentido de la Definición 2.22. Entonces las fallas son separables si el sistema dinámico*

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= -De(t) + L\nu(t), \\ \eta(t) &= Fe(t) + M\nu(t) \end{aligned} \tag{2.24}$$

es invertible por la izquierda; donde

$$L = (L_1 \;\; L_2 \;\; \cdots \;\; L_k) \qquad \nu(t) = (\nu_1(t) \;\; \nu_2(t) \;\; \cdots \;\; \nu_k(t))^T .$$

Un procedimiento de síntesis de filtros DDF para una clase general de sistemas no-lineales se estudia en las Secciones **??** y **??**.

2.4.4. Síntesis de filtros de DDF basados en observador

En primer lugar, se considera el caso de la concepción de un filtro simple basado en el observador clásico de Luenberger :

www.bdigital.ula.ve

En el caso de los sistemas LTI, la construcción del filtr de DDF en base a un observador permite seleccionar una ganancia estática D. El problema es, desde luego, la *ubicación de los autovalores* de la ecuación del error de estimación, [125]. Ello significa que los valores propios del lazo cerrado $(A - DC)$ deben encontrarse en el semi-plano izquierdo, bajo las restricciones respectivas a las condiciones de detectabilidad y separabilidad de las fallas.

Recuérdese que los valores propios del lazo cerrado λ_j y sus autovectores asociados v_j, para la dinámica del error de estimación (2.6), son determinados por

$$(\lambda_j I - (A - DC))\, v_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

donde, en razón de la observabilidad, $Cv_j \neq 0$.

Así, asociadas a las direcciones de fallas particulares L_i, se exige que las direcciones de las salidas CL_i mantengan una dirección de salida fija Cv_j^i dans léspacio des salidas, es decir, las direcciones de los residuos de $\eta_i(t)$ sean unidireccionales con los autovectores v_j para todo $i = 1, \ldots, k$. v_j^i definido los autovectores asociados a la dirección de falla

C.C.Reconocimiento

L_i. Es posible de notar, inmediatamente, que el número máximo de las fallas k que se pueden detectar y separar con un único filtro es siempre mas pequeño o igual al número de vectores propios, es decir, igual o inferior a la dimensión del espacio de estado del error de estimación.

En el caso unidimensional de las direcciones de las fallas, las restricciones principales para la concepción de D corresponde a :

- (C, A) es observable.
- Si se define $\mathcal{L} \triangleq (L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_k)$, entonces

$$C\mathcal{L} \triangleq (CL_1 \quad CL_2 \quad \dots \quad CL_k)$$

  es de rango k.

- $k \leq q$.
- Los autovalores en lazo cerrado $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ de $(A - DC)$ son estables y distintos.

www.bdigital.ula.ve

Las consecuencias de esas restricciones son, desde luego, totalmente evidentes : la evaluación de los estados, la separabilidad des fallas y la capacidad para identificar el mayor número de fallas con un filtre simple.

En efecto, como los vectores propios son independientes y corresponden a una base completa del espacio de estado, las direcciones de las fallas se pueden expresar como combinaciones lineales, de donde :

$$L_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i v_j^i, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad n_i \leq n.$$

y CL_i y Cv_j^i deben ser colineales, [125], es decir

$$CL_i = Cv_j^i, \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, n_i.$$

Así, se debe aplicar el algoritmo de diseño de la ganancia sobre los sub-espacios (C, A)-invariantes presentado en [128].

C.C.Reconocimiento

Puesto que la síntesis basado sobre los sub-espacios invariantes puede ser muy complicada, se propone un método que considera la ubicación de los autovalores a través de la selección de varias ganancias.

Se trata de dar, para el caso de los sistemas LTI, un procedimiento de diseño de filtros de DDF fundamentado sobre el observador generalizado de Luenberger, el cual ha sido presentado en la Sección 1.1.2.5.

La mayor dificultad en el diseño de los filtros de DDF basados en observadores reside en la posibilidad de asegurar la estabilidad asintótica del error de estimación a objeto de producir unos residuos direccionales con la meta de desacoplar las fallas. En base a las condiciones de detectabilidad y de separabilidad, enseguida se presenta una extensión del observador clásico de Luenberger, considerando, en la síntesis del estimador de estado, además de la salida del sistema, sus derivadas sucesivas. Esta extensión permite, además de la ubicación de los autovalores, la asignación de una estructura particular a la matriz dinámica del error de estimación.

2.4.4.1. El observador de Luenberger generalizado

www.bdigital.ula.ve

Si se considera el sistema descrito por (2.5), es posible construir un filtro DDF en base al diseño de un estimador de estado. En la dinámica del observador se incluye, multiplicada por una ganancia D, la inovación de la salida, es decir la diferencia entre la salida medida y su valor estimado. La extensión del observador, consiste en incorporar, además del error de salida, las diferencias entre sus derivadas sucesivas y las derivadas estimadas, las cuales serán, igualmente, afectadas por sus ganancias respectivas.

Considérese el sistema LTI descrito por (2.1). La k-ésima derivada de la salida está dada por :

$$y^{(k)} = P_k(A, C)x + \sum_{i=0}^{k-2} Q_k^i(A, B, C)u^{(i)} + Q_k^{k-1}(B, C)u^{(k-1)}; \tag{2.25}$$

donde $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$ son polinomios que se pueden denotar, a partir de las indeterminadas α, β y γ, por :

$$P_k(\alpha, \gamma); \quad Q_k^i(\alpha, \beta, \gamma); \quad Q_k^{(k-1)}(\beta, \gamma); \quad k = 0, 1, \ldots \quad i = 0, 1, \ldots, k-2$$

Esos polinomios obedecen a las siguientes recursiones :

C.C.Reconocimiento

$$
\begin{aligned}
P_{k+1}(\alpha,\gamma) &= P_k(\alpha,\gamma)\alpha. && (2.26)\\
Q^0_{k+1}(\alpha,\beta,\gamma) &= P_k(\alpha,\gamma)\beta. && (2.27)\\
Q^i_{k+1}(\alpha,\beta,\gamma) &= Q^{i-1}_k(\alpha,\beta,\gamma), \quad 0<i<k-1. && (2.28)\\
Q^k_{k+1}(\beta,\gamma) &= Q^{k-1}_k(\beta,\gamma). && (2.29)
\end{aligned}
$$

De la derivación sucesiva de la salida del sistema (2.1) y en base a la ecuación de la dinámica del observador (2.2), se considera una *generalización de orden k* para el observador de Luenberger, [91, 119], es decir,

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= A\hat{x}+Bu+D_0(y-C\hat{x})+\\
&\quad +D_1\left(\dot{y}-P_1(A,C)\hat{x}-Q^0_1(B,C)u\right)+\cdots+\\
&\quad +D_k\left(y^{(k)}-P_k(A,C)\hat{x}-\sum_{i=0}^{k-2}Q^i_k(A,B,C)u^{(i)}-Q^{k-1}_k(B,C)u^{(k-1)}\right). \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

www.bdigital.ula.ve

Además, se puede escribir de la siguiente forma :

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= \left(A-D_0C-D_1CA-\cdots-D_kCA^k\right)\hat{x}+\left(B-D_1CB-\cdots-D_kCA^{k-1}B\right)u-\\
&\quad -\left(D_2CB+D_3CAB+\cdots+D_kCA^{k-2}B\right)\dot{u}-\cdots-D_kCBu^{(k-1)}+\\
&\quad +D_0y+D_1\dot{y}+\cdots+D_ky^{(k)}. \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

Así, las matrices $D_0, D_1, \ldots, D_k \in \mathbb{R}^{n\times q}$, son las ganancias del observador generalizado. La Figura 2.9 muestra, esquemáticamente, esta generalización del observador de Luenberger.

Siguiendo el diseño de observadores clásicos, considérese ahora el error de estimación definido por

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t). \qquad (2.32)$$

De esta manera, la dinámica del error de estimación estará dada por :

C.C.Reconocimiento

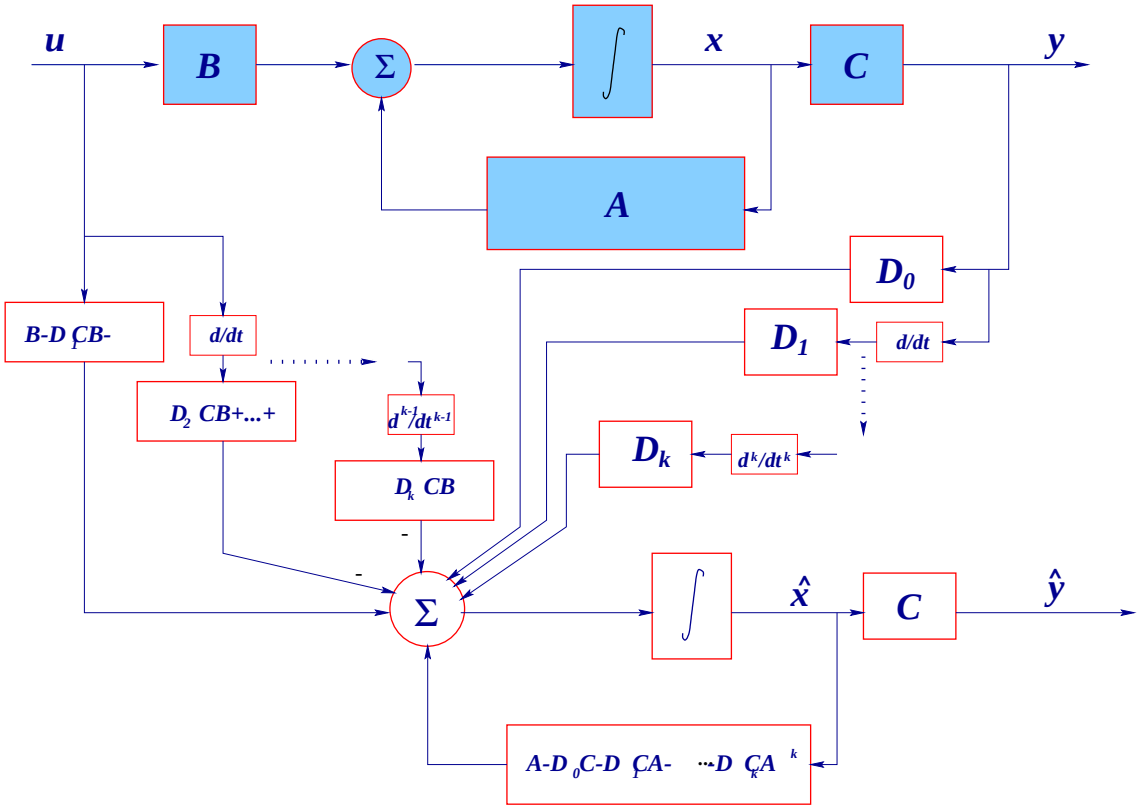


Figura 2.9: Diagrama esquemático del observador de Luenberger generalizado

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - D_0C - D_1P_1(A,C) - \cdots - D_kP_k(A,C))\, e(t), \\ \eta(t) &= Ce(t) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Se sabe que si el par (C, A) es observable, la dinámica del error de estimación se puede seleccionar asintóticamente estable por medio de una escogencia apropiada de las ganancias del observador. Ello significa que se tiene libertad completa para la asignación de los autovalores de la matriz dinámica del error de estimación. Dado que en el problema de estimación de estado, la asignabilidad de los valores propios es suficiente, (lo cual se puede garantizar con la selección de D_0), en el caso de la construcción de los filtros DDF basados en un observador, el problema es mas complejo ya que se busca, igualmente, la separabilidad de las fallas fijando la estructura de la matriz dinámica del error de estimación. Se debe asignar, para los residuos, unas direcciones particulares en el espacio de las salidas, correspondientes a las direcciones de las fallas, [115, 119].

C.C.Reconocimiento

2.4.4.2. Diseño de la ganancia del filtro de DDF

En la formulación geométrica para la construcción del filtro DDF fundamentada sobre el observador, [66], el principal obstáculo es que los sub-espacios (C, A)-invariantes engendrados por las direcciones de las fallas deben ser linealmente independientes en el espacio de la salida, lo cual depende de la matriz C. Existen ejemplos en los cuales el espacio (C, A)-invariante mínimo generado por un simple vector, puede corresponder al espacio de estado completo. Así, la separación de las fallas será imposible, [102, 118]. Además, en algunos casos hay incompatibilidad entre la estabilidad asintótica del filtro y la separabilidad de las fallas, (ver el ejemplo 2 en la Sección **??**). Todo ello justifica la utilización del observador generalizado para la DDF.

Sea el sistema descrito por (2.5) y supóngase que el número de fallas es I, lo cual significa que las fallas son representadas por

$$F = \sum_{i=1}^{I} L_i \nu_i.$$

www.bdigital.ula.ve

Supóngase que las condiciones para la detectabilidad, (Teorema 2.1), y para la separabilidad de las fallas, (Teorema 2.5), son satisfechas. El problema del diseño de los filtros de detección se puede resolver utilizando un observador de Luenberger generalizado.

La ecuación del error del observador generalizado de Luenberger en presencia de fallas se escribe :

$$\begin{aligned} \dot{e}\,(t) &= A_o e\,(t) + \sum_{i=1}^{I} L_i \nu_i\,(t) \\ \eta\,(t) &= Ce(t). \end{aligned}$$

con :

$$A_o = \left(A - D_0 C - D_1 P_1(A, C) - \cdots - D_k P_k(A, C)\right).$$

Por lo tanto se tiene el siguiente resultado, [102, 115, 120] :

Lema 2.5 *Si el sistema (2.5) es observable, entonces existe un observador de Luenberger generalizado que resuelve el problema de separabilidad de las fallas toda vez que se cumpla la condición para la separabilidad.*

C.C.Reconocimiento

Prueba Ver [115, 120]. ■

Las ganancias del observador deben ser tales que la matriz A_0 sea lo mas cercano a una matriz diagonal (para el desacoplamiento), con los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ella será estable si $\mathbb{R}\mathrm{e}[\lambda_i] < 0$. Si A_0 es une matriz diagonal entonces las fallas están desacopladas y se alcanza la separabilidad.

Para que el filtro de DDF basado en la utilización del observador de Luenberger generalizado pueda ser puesto en práctica, se debe considerar, en la fase de construcción, un modelo del sistema con poco o sin incertidumbres (retardos de tiempo, ruidos), [120].

Considérense las recurrencias (2.26), (2.27), (2.28) y (2.29). Sea $R(\cdot)$ un polinomio que satisface las siguientes recurrencias :

$$\begin{array}{lcl} R^i_{k+1}(\alpha,\gamma) & = & R^{i-1}_k(\alpha,\gamma), \quad 0 < i < k-1. \\ R^k_{k+1}(\gamma) & = & R^{k-1}_k(\gamma); \end{array}$$

se puede definir una salida única compuesta de las señales obtenidas por derivación sucesiva, esto es

www.bdigital.ula.ve

$$\mathcal{Y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(k)}(t) \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Por consecuencia, se puede escribir entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(t) \;=\; & \begin{pmatrix} P_0(A,C) \\ P_1(A,C) \\ P_2(A,C) \\ \vdots \\ P_k(A,C) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ Q^0_1(B,C) \\ Q^0_2(A,B,C) \\ \vdots \\ Q^0_k(A,B,C) \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q^1_2(B,C) \\ \vdots \\ Q^1_k(A,B,C) \end{pmatrix} \dot{u}(t) + \cdots + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Q^{k-1}_k(B,C) \end{pmatrix} u^{(k-1)}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ R^0_1(A,C) \\ R^0_2(A,C) \\ \vdots \\ R^0_k(A,C) \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{I} L_i \nu_i(t) + \cdots + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ R^{k-1}_k(C) \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{I} L_i \nu_i^{(k-1)}(t). \end{aligned} \tag{2.35}$$

C.C.Reconocimiento

Con esta nueva salida, la ecuación del filtro está dada por :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + \mathcal{D}\left(\mathcal{Y}(t) - \hat{\mathcal{Y}}(t)\right); \tag{2.36}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Y}}(t) &= \begin{pmatrix} P_0(A,C) \\ P_1(A,C) \\ P_2(A,C) \\ \vdots \\ P_k(A,C) \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1^0(B,C) \\ Q_2^0(A,B,C) \\ \vdots \\ Q_k^0(A,B,C) \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_2^1(B,C) \\ \vdots \\ Q_k^1(A,B,C) \end{pmatrix} \dot{u}(t) + \cdots + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Q_k^{k-1}(B,C) \end{pmatrix} u^{(k-1)}(t). \end{aligned} \tag{2.37}$$

De esta forma, la dinámica del error será :

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \left[A - D\begin{pmatrix} P_0(A,C) \\ P_1(A,C) \\ P_2(A,C) \\ \vdots \\ P_k(A,C) \end{pmatrix}\right] e(t) + D\begin{pmatrix} 0 \\ R_1^0(A,C) \\ R_2^0(A,C) \\ \vdots \\ R_k^0(A,C) \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{I} L_i\nu_i(t) + \cdots + \\ &+ D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ R_k^{k-1}(C) \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{I} L_i\nu_i^{(k-1)}(t) + \sum_{i=1}^{I} L_i\nu_i(t). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Se puede seleccionar la matriz de ganancia de tal forma que se satisfacen los criterios de separabilidad de las fallas. La matriz dinámica debe ser una matriz estable.

Es importante remarcar que solo las señales disponibles están implicadas en la estructura del filtro.

C.C.Reconocimiento

2.4.4.3. Ejemplo

Sea el sistema LTI dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u + \tag{2.39}$$
$$+ \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \nu_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \nu_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Examinando la condición de detectabilidad de las fallas, para ese sistema la matriz de observabilidad está dada por :

$$\mathfrak{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 16 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

www.bdigital.ula.ve

Esta matriz es de rango completo, entonces el sistema es observable. Aplicando el Teorema 2.3, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}L_1 &= [l_1 \;\; 0 \;\; -4l_1 \;\; 0 \;\; 16l_1 \;\; 0]^T; \\ \mathfrak{O}L_2 &= [0 \;\; l_2 \;\; -l_2 \;\; -l_2 \;\; 5l_2 \;\; l_2]^T; \end{aligned}$$

por ende, las dos fallas son detectables.

Puesto que $\mathfrak{O}L_1$ y $\mathfrak{O}L_2$ son linealmente independientes entonces, de acuerdo al Teorema 2.5, dichas fallas son separables.

Para el observador generalizado, la salida única, por extensión, será

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \nu_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} \nu_2;$$

C.C.Reconocimiento

para lo cual la salida estimada es :

$$\hat{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \dot{\hat{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Por consecuencia,

$$\mathcal{Y} - \hat{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \\ x_3 - \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \nu_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} \nu_2;$$

Así, si la matriz de ganancia del observador está dada por :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ d_5 & d_6 & d_7 & d_8 \\ d_9 & d_{10} & d_{11} & d_{12} \end{bmatrix};$$

entonces,

$$DL_1 = \begin{bmatrix} d_3 l_1 \\ d_7 l_1 \\ d_{11} l_1 \end{bmatrix} \quad DL_2 = \begin{bmatrix} d_4 l_2 \\ d_8 l_2 \\ d_{12} l_2 \end{bmatrix};$$

www.bdigital.ula.ve

y abordando la separabilidad, se puede seleccionar $d_4 = d_7 = 0$ a fin de mantener unas directiones de fallas independientes en el espacio de salida.

Finalmente, a partir del criterio de estabilidad asintótica y de la separabilidad de las fallas, se pueden escoger los siguientes valores :

$$\begin{array}{lll} d_1 = 5 & d_5 = 0 & d_9 = 0 \\ d_2 = 1 & d_6 = 2 & d_{10} = 0 \\ d_3 = 2 & d_7 = 0 & d_{11} = 0 \\ d_4 = 0 & d_8 = 2 & d_{12} = 0 \end{array}$$

Por consecuencia, la dinámica del error es descrita por :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \nu_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \nu_2;$$

y los residuos están dados por :

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

C.C.Reconocimiento

Mediante la examinación de los residuos, fácilmente se pueden distinguir las fallas.

Las figuras 2.10, 2.11, 2.12 y 2.13 presentan los resultados de las simulaciones. Las fallas han sido generadas luego que el sistema alcanza un régimen estacionario ante un escalón unitario como señal de entrada.

Las figures 2.10 y 2.11 muestran la salida de sistema y del error, respectivamente, cuando la falla aparece en l_1 en $t = 12s$. Es posible observar que el diagnóstico y la detección de la falla toman lugar, a partir del diseño filtro ya que solamente un residuo, $\eta_1(t) = e_1(t)$, es diferente de cero.

Las figuras 2.12 y 2.13, representan las respuestas, como en el caso precedente, ante la presencia de la falla l_2 que aparece en $t = 15s$. Por la generación de los residuos, la existencia de la falla es detectada y su origen se deduce. Solo el residuo $\eta_2(t) = e_2(t)$ es no nulo.

Comentario 2.4

- *La construcción de filtros DDF para los sistemas LTV sigue un procedimiento similar. Se pueden producir los residuos por medio de un observador generalizado. En ese caso las ganancias del filtro son funciones variantes en el tiempo. Igualmente, es posible obtener una dinámica invariante en el tiempo para el error de estimación, [115, 119].*

www.bdigital.ula.ve

- *Este procedimiento de síntesis del filtro permite una* detección robusta de falla*, en el caso de los sistemas con entradas desconocidas (perturbaciones), con la condición de que las direcciones de las fallas sean independientes de las direcciones de las perturbaciones, [96, 101, 95]. Este tema será abordado posteriormente.*

- *Si la condición de separabilidad no se satisface, mismo si las fallas son detectables, se deben utilizar otros métodos de síntesis, por ejemplo, los métodos basados sobre la reconstrucción de las entradas, los métodos basados en modelos de conocimiento, etc.*

2.5. Conclusiones

Se han presentado los conceptos de base en el estudio de los métodos y técnicas para la síntesis de filtros de DDF.

Comenzando por una descripción de las posibles fuentes de las fallas, y adoptando una representación matemática, se han establecido las condiciones fundamentales para su separación. Así, utilizando los criterios geométricos del análisis de los sistemas lineales, se han caracterizado las condiciones de detectabilidad y de separabilidad de las fallas. Esas

C.C.Reconocimiento

condiciones son, en cualquier forma, las condiciones estructurales de base necesarias para el diseño de un filtro de detección de falla.

Igualmente, se han presentado las condiciones de detectabilidad y de separabilidad sobre la base de la inversión de los sistemas.

Por medio de la extensión del observador de Luenberger, se ha propuesto un procedimiento para el diseño de filtros de detección y aislamiento de fallas en los sistemas dinámicos, el cual utiliza la salida del sistema y sus derivadas. Si la condición de separabilidad es satisfecha, entonces se puede seleccionar la ganancia del filtro generalizado de tal manera que las fallas afectan unas direcciones particulares del espacio de la salida.

Si bien que la generalización de los resultados no es siempre posible, siendo dada la naturaleza de las fallas, la eficaz del filtro de detección depende del conocimiento de los modelos de las fallas y del sistema que se desea diagnosticar.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

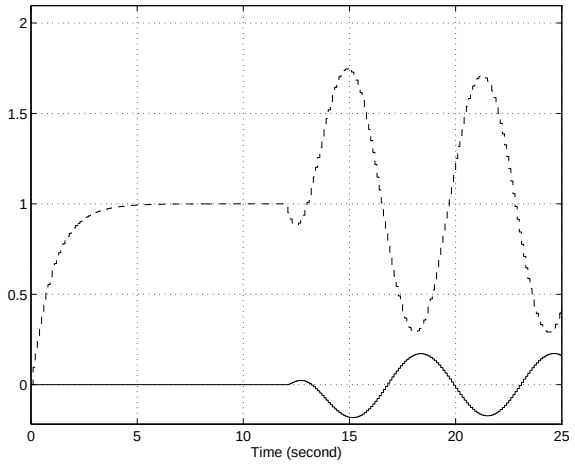


Figura 2.10: Salidas del sistema con falla l_1 : $(- - -)$ $y_1(t)$, $(\ \text{—}\ )$ $y_2(t)$.

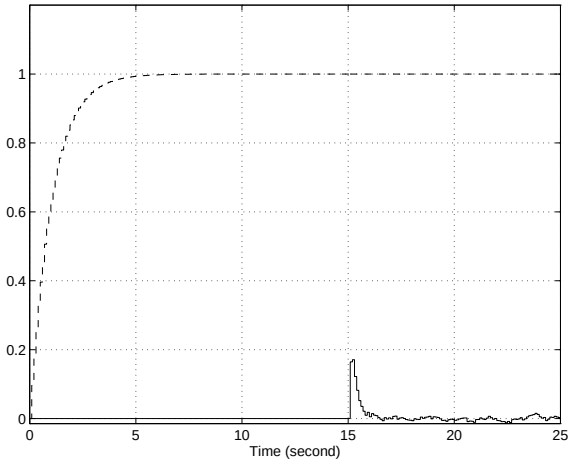


Figura 2.12: Salidas del sistema con falla l_2 : $(- - -)$ $y_1(t)$, $(\ \text{—}\ )$ $y_2(t)$.

www.bdigital.ula.ve

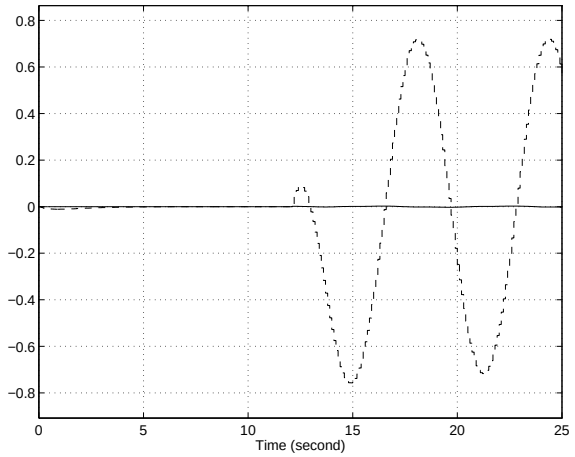


Figura 2.11: Los residuos para la falla l_1 : $(- - -)$ $e_1(t)$, $(\ \text{—}\ )$ $e_2(t)$.

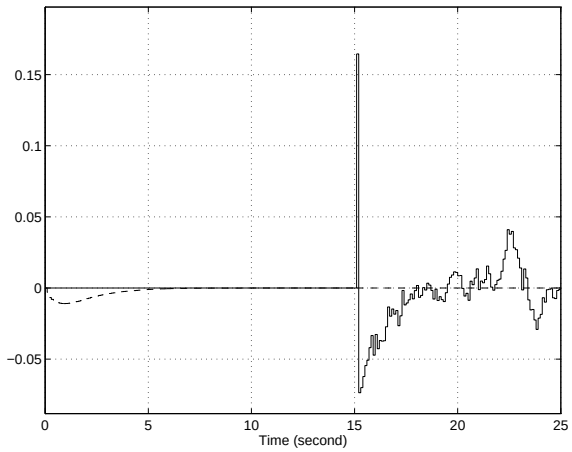


Figura 2.13: Los residuos para la falla l_2 : $(- - -)$ $e_1(t)$, $(\ \text{—}\ )$ $e_2(t)$.

C.C.Reconocimiento

Capítulo 3

Filtros Robustos de DDF

En esta parte, se presenta un estudio de algunas técnicas para la construcción de filtros de DDF cuando el modelo de diagnóstico exhibe incertidumbres e incluye señales exógenas de perturbación. Del análisis, se muestra que las posibilidades de separabilidad de las fallas depende de la correlación de éstas con respecto a las incertidumbres y perturbaciones y sus incidencias en el espacio de estado de la planta. La detección robusta emerge como el problema básico y de allí se promueven algunos métodos. También se presentan algunas técnicas para la detectabilidad completa de las fallas. Finalmente, en el marco de la estimación y el control óptimo en $\mathcal{H}_\infty$, se sugieren metodologías para la concepción de los filtros de DDF.

www.bdigital.ula.ve

3.1. Introducción

En la metodología analítica para la síntesis de filtros de DDF se ha asumido la disponibilidad de un modelo matemático perfecto del proceso sometido a supervisión. Esto, desde el punto de vista práctico, no es más de una suposición idealista del mundo real de un proceso de producción industrial.

Dentro de ese marco de las técnicas análiticas, los métodos basados en observadores, que hemos estudiado en los Capítulos precedentes, infieren de la disponibilidad de un *modelo exacto* del proceso dinámico. Esta exigencia es imposible de satisfacer porque los procesos reales son, en su gran mayoría: altamente complejos, no-lineales, variantes en el tiempo, de parámetros inciertos, sometidos a perturbaciones externas y ruidos, etc. De modo que

C.C.Reconocimiento

en la práctica solo se dispondrá de un modelo referencial, que recoge en buena medida, las características mas resaltantes del comportamiento dinámico del proceso, a partir del cual se deben incorporar, de alguna forma, las dinámicas no modeladas, las inexactitudes, las incertidumbres, las perturbaciones y ruido. En fin, debemos prescindir de la existencia de un modelo perfecto y operar en base a modelos con incertidumbres y con perturbaciones externas, que, de esa forma, recopilan las diferencias entre el comportamiento verdadero y el modelo referencial, [12, 24, 35, 64, 108].

La presencia de incertidumbres y de perturbaciones producen serias dificultades para el diseño de filtros DDF, ya que no se cuenta, como lo impone la práctica, de una sensibilidad ilimitada para la detección de anomalías funcionales. Eso significa que, como consecuencia de las incertidumbres y perturbaciones, los valores estimados a través del modelo, no se corresponden exactamente con los valores medidos del proceso, y por lo tanto los residuos serán distintos de cero aún en ausencia de fallas. Esas dificultades, valen decir, la producción de residuos parásitos, se pueden manifestar en la generación de *falsas alarmas* durante la supervisión y monitoreo del proceso, lo cual trae como consecuencia la degradación del desempeño del sistema de MDD. Las falsas alarmas en un sistema de MDD corresponden a la activiación de los dispositivos de contingencia asociados a funcionamientos anormales del proceso, y que, eventualmente, pudiesen dejar fuera de funcionamiento las unidades de producción. De alguna manera, por el impacto que pudiese tener en la productividad , hay que evitar la generación de falsas alarmas mediante mecanismos de robustez aplicados en el diseño e implementación de los filtros de DDF.

www.bdigital.ula.ve

Varias técnicas de detección robusta han sido desarrolladas, dependiendo del tipo de incertidumbre. Por ejemplo, el filtro de detección clásico, [4, 50] es robusto a incertidumbres en el modo de la falla pero requiere de un perfecto conocimiento de la dinámica de la planta y de las características del ruido. Mientras que la técnica de relación de verosimilitud máxima, [127], demanda un conocimiento preciso del modo de la falla, la estadísticas del ruido y de la dinámica de la planta.

En cuanto a robustez ante incertidumbres del modelo, en [121] se estima una cota

C.C.Reconocimiento

con respecto al efecto de las incertidumbres en los residuos, dicha cota se utiliza para seleccionar un nivel de umbral adecuadamente. En [13, 83, 84] se utiliza un observador de entradas desconocidas en un intento por ocultar el ruido de ciertos canales de entradas y las incertidumbres del modelo en los residuos de salida. Dentro de ese mismo contexto, en [82] se emplea la técnica de asignación de la estructura propia, para el diseño del observador, de modo que la señal residual esté desacoplada de las incertidumbres y perturbaciones, las cuales se asumen como entradas desconocidas. En ese método se utiliza la asignación de los autovectores por la derecha del filtro lograr mayor libertad en el desacoplamiento.

Desde el punto de vista de generación de residuos, las fallas son detectables si sus características espectrales son distinguibles de las correspondientes a las incertidumbres. Esto es equivalente a que las fallas entren al sistema en direcciones diferentes del espacio de estado con respecto a las direcciones de las incertidumbres. Las fallas que tienen características frecuenciales o pertenecen al mismo sub espacio del espacio de estado en relación a las incertidumbres, no pueden ser detectables siempre.

Los resultados que hemos presentado nos indican que si los efectos de las fallas y las incertidumbres copan sub espacios independientes del espacio de estado, entonces los métodos geométricos se pueden utilizar para desacoplar sus efectos en el espacio de los residuos, ampliándose la robustez en el proceso de detección, [28, 66, 125].

www.bdigital.ula.ve

En muchos procesos industriales, desafortunadamente, los efectos de las fallas y las incertidumbres del modelo no se pueden separar uno del otro. En estos casos se busca ampliar la capacidad o el desempeño de la detección al hacer que los residuos sean menos sensibles a las incertidumbres con respecto a una dirección de falla en particular mediante el uso de técnicas de estimación de estado óptimas, [27, 41, 55, 63]. Fundamentalmente, estos son métodos de estimación robusta en $\mathcal{H}_\infty$ con el objetivo primordial de la supresión de la perturbación efectiva, manteniendo una sensibilidad adecuada con respecto a las fallas.

C.C.Reconocimiento

3.2. Generación robusta de residuos

Hemos establecido que la primera fase en un proceso de DDF es la generación de residuos, los cuales, posteriormente, se utilizan, mediante mecanismos de evaluación, para las toma de decisiones orientadas a minimizar los efectos de esos comportamientos anormales en el desempeño integral del sistema.

Desde el punto de vista de robustez, significa que la producción de los residuos debe considerar todas aquellas divergencias entre el modelo de diagnóstico y el proceso real. Por lo tanto, se debe contar con una descripción realística de las incertidumbres y de las perturbaciones que están presentes en el sistema a supervisar. Dado que estas divergencias son proclives a la generación de residuos en ausencia de una falla verdadera, también se debe considerar, en el marco de las decisiones lógicas, un nivel de aseguramiento de la presencia de una falla, es decir, bajo la presencia de incertidumbres y de perturbaciones externas, a partir de los residuos debe existir un nivel de disparo (umbral) que garantice la presencia de una falla. Eso significa que a partir de los residuos, debemos disponer de un mecanismo o generador de función de decisión que nos permita distinguir, a partir de un umbral, cuando está presente un comportamiento anormal.

www.bdigital.ula.ve

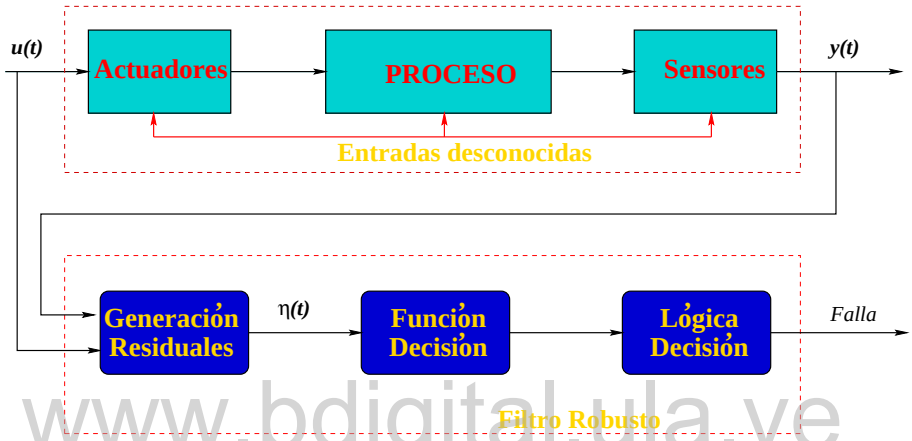
Así, el modelo de diagnóstico para la generación robusta de residuos que considera la presencia de incertidumbres y de perturbaciones externas lo describiremos por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A+\Delta A)x(t) + B_1\omega(t) + (B+\Delta B)u(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i \\ y(t) &= (C+\Delta C)x(t) + D_2\omega(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Allí, A, B, C representan las matrices del modelo de diagnóstico nominal, tal como en (2.5), mientras que ΔA, ΔB y ΔC representan las incertidumbres en la descripción del proceso, actuadores y sensores, respectivamente. Ellas son matrices de dimensiones apropiadas y probablemente variantes en el tiempo. $\omega(t) \in \mathfrak{W}$ representa las señales cuadráticamente integrables que describen todas las perturbaciones externas: ruido del proceso, ruido de los sensores, etc. $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times v}$ y $D_2 \in \mathbb{R}^{q\times v}$. En principio, asumiremos que el par (A, B_1) es estabilizable.

C.C.Reconocimiento

Una evaluación simple, los modelos de incertidumbres y las perturbaciones externas en el modelo (3.1), al igual que las descripción para las fallas, representan entradas adicionales en la dinámica del proceso; en este caso, entradas desconocidas. El problema, entonces, es la generación de residuos orientados al DDF bajo la presencia de entradas desconocidas en los modelos del proceso, sensores y actuadores. Los residuos son, posteriormente, procesados mediante una función de decisión, la cual permite garantizar la presencia de una falla y evitar, en lo posible, falsas alarmas. Finalmente, los residuos son evaluados por un bloque de decisión lógica a los fines de distinguir el origen de la falla, ver la Figura 3.1.



www.bdigital.ula.ve

Figura 3.1: Esquema para la detección robusta de fallas.

Si los residuos se representan por $\eta(t)$, el error de la salida en el caso de la generación de residuos mediante observadores; en términos de alguna función de decisión $\mathcal{J}(\eta)$ y un nivel de umbral $\mathcal{J}_U$, el problema de DDF se puede describir por:

1. Detección de fallas: se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\eta) &< \mathcal{J}_U \qquad \text{para todo} \qquad \nu_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \\ \mathcal{J}(\eta) &> \mathcal{J}_U \qquad \text{para algún} \qquad \nu_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

2. Diagnóstico de fallas: se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\eta) &< \mathcal{J}_{U_i} \qquad \text{para todo} \qquad \nu_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \\ & \quad i \neq j \\ \mathcal{J}(\eta) &> \mathcal{J}_{U_j} \qquad \text{para todo} \qquad \nu_j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

El caso ideal, el cual ha sido el tratado en los Capítulos anteriores, corresponde a los niveles de umbral $\mathcal{J}_U = \mathcal{J}_{U_i} = 0$, lo cual es, físicamente, imposible de alcanzar debido a esos errores de modelaje y de las señales espúreas externas.

Lo significante del problema de DDF robusta es que:

1. Para la detección, el efecto de una falla debe ser distinguible del efecto de las entradas desconocidas. Esta capacidad de indicar que una falla ha ocurrido en presencia de las entradas desconocidas la denominaremos como *detectabilidad robusta*.

2. Para la separación, el efecto de una falla debe ser distinguible del efecto de las entradas desconocidas y del efecto de las otras fallas. Esta capacidad de *separación robusta* está vinculada a dos aspectos importantes, [90]:

   - La cantidad de fallas que se pueden identificar.
   - La cantidad de falsas alarmas que se pueden tolerar con una identificación o separación incorrecta.

www.bdigital.ula.ve

Si hemos establecido que la presencia de una falla se distingue por comparación de los residuos con un nivel umbral, un primer objetivo del diseño de un filtro de detección, bajo la presencia de incertidumbres y de perturbaciones externas, es la de reducir el efecto, en los residuos, de las entradas externas sin, al mismo tiempo, degradar el efecto de las fallas. En lo posible, maximizar el efecto de las fallas.

3.2.1. DDF robusta con observadores

Consideremos el modelo de diagnóstico dado en (3.1). Si planteamos el diseño de un filtro de generación de residuos basado en el observador dado en (2.2), la dinámica del error corresponde a:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) + \underbrace{(\Delta A - D\Delta C)x(t) + \Delta B u(t)(B_1 - DD_2)\omega(t)} + \sum_{i=1}^{k} L_i \nu_I(t), \\ \eta(t) &= Ce(t) + \underbrace{\Delta C x(t) + D_2\omega(t)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Evidentemente, sin considerar un estudio profundo de la estabilidad y en base a representar las incertidumbres y perturbaciones como entradas desconocidas, entonces la

C.C.Reconocimiento

dinámica anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) + \underbrace{E_1 d(t)} + \sum_{i=1}^{k} L_i \nu_i(t), \\ \eta(t) &= Ce(t) + \underbrace{E_2 d(t)}; \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde E_1 y E_2 son matrices de dimensiones apropiadas y $d(t)$ representa todas las origines de las entradas desconocidas. Como se puede notar, la salida del error de estimación η, luego de un decaimiento transitorio debido al desacoplamiento de las condiciones iniciales, se ve afectada tanto por las entradas desconocidas d, como por las fallas. Es decir, no tenemos residuos cero en ausencia de falla. Si esos residuos son procesados por una función de decisión $\mathcal{J}(\eta)$, entonces se debe asegurar que el efecto de d sea disminuido o eliminado completamente. Dentro del contexto bajo estudio, eso significa que debemos diseñar un observador con ganancia D de modo que:

- El efecto de las fallas deben ser desacoplado del efecto de las entradas desconocidas.
- Para la separación, el efecto de una falla debe ser aislado del efecto de las entradas desconocidas y del efecto de las otras fallas.

www.bdigital.ula.ve

Sobre la base de considerar que las perturbaciones y las incertidumbres se pueden, a *grosso modo*, representar como entradas desconocidas en la dinámica del modelo de diagnóstico, tal como en la descripción de las fallas, y que, además, sus matrices de entrada son conocidas, podemos establecer una correspondencia entre los sub-epsacios de las direcciones de las fallas y el sub-espacio de entrada de las señales desconocidas para poder aplicar los Teoremas 2.1 y 2.5 para el diseño del filtro robusto basado en observadores. Indudablemente que ello implica una condición geométrica muy fuerte para el problema de separabilidad de las fallas. En este caso, las entradas desconocidas serían tratadas como fallas, [82].

Con esas premisas y manteniendo una consistencia en las notaciones, consideremos que nuestro sistema con incertidumbres y perturbaciones, (3.1), puede ser descritas como un sistema de entradas desconocidas, representado por:

C.C.Reconocimiento

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + E_1 d(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i \nu_i(t), \\ y(t) &= Cx(t) + E_2 d(t); \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $d \in \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^d$. $E_1 \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $E_2 \in \mathbb{R}^{q\times d}$, son matrices conocidas. Así, podemos establecer la siguiente definición:

Definición 3.1 *Detección Robusta. Las fallas en el modelo de diagnóstico (3.4) se dicen que son robustamente detectables por un filtro basado en observadores de la forma (2.2), si la evaluación de los residuos, generados por la dinámica:*

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC)e(t) + (E_1 - DE_2)d(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i \nu_i(t), \\ \eta(t) &= Ce(t) + E_2 d(t); \end{aligned} \tag{3.5}$$

son tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\eta) &< \mathcal{J}_U \quad si \quad \nu_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \\ \mathcal{J}(\eta) &> \mathcal{J}_U \quad si \quad \nu_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

Donde $\mathcal{J}_U$ es el umbral de disparo y $\mathcal{J}(\eta)$ es una función de decisión.

Es evidente que la selección de la matriz de ganancia del filtro de detección D, además de garantizar la estabilidad, debe ser tal que produzca los residuos con características particulares a objeto de permitir la minimización del efecto de las entradas desconocidas. Dentro de las condiciones que se imponen en la concepción del filtro de detección, resalta el hecho de que, desde el punto de vista geométrico, una excelente disposición para la síntesis requiere que

$$\text{Im } E_1 \bigcap \text{Im } L_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Casos particulares en el diseño del filtro se presentan en [22, 79, 105].

La separabilidad de las fallas, en este contexto de los filtros basados en observadores, es un problema más fuerte, lo cual, para su solución, exige de técnicas muy bien elaboradas, aunque, con ciertas restricciones, se puede abordar también dentro de este marco.

Definición 3.2 *Separación Robusta. Las fallas en el modelo de diagnóstico (3.4) se dicen que son robustamente separables por un filtro basado en observadores de la forma (2.2),*

C.C.Reconocimiento

si la evaluación de los residuos, generados por la dinámica del error de estimación (3.5), son tales que

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{J}(\eta) & < & \mathcal{J}_{U_i} \quad si \quad \nu_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \\ & & i \neq j \\ \mathcal{J}(\eta) & > & \mathcal{J}_{U_j} \quad si \quad \nu_j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, k. \end{array}$$

Donde $\mathcal{J}_U$ es el umbral de disparo y $\mathcal{J}(\eta)$ es una función de decisión.

Bajo restricciones geométricas, los resultados para el diseño de la matriz de ganancia del filtro muestran que los mismos deben obtenerse por multi filtraje, es decir, el diseño de múltiples filtros de acuerdo al número de fallas que se pueden desacoplar, [17, 26, 34, 72].

3.2.2. Filtros DDF y observadores de entrada desconocida

En la sección anterior hemos considerado la síntesis de un filtro robusto de DDF basado en observadores de estados. Resolver el problema bajo este criterio es bastante exigente. La idea es plantear la solución con filtros más generales que permitan el desacoplamiento de las entradas desconocidas en la generación de los residuos. Este el principio de los observadores de entrada desconocidas.

www.bdigital.ula.ve

Definición 3.3 *Para el modelo de diagnóstico (3.4), con $\nu_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k$, un observador se define como observador de entrada desconocida, (OED), si el vector de error de estimación $e(t)$ se aproxima al cero asintóticamente a pesar de la presencia de las entradas desconocidas $d(t)$.*

Se puede notar, entonces, que el diseño de filtros robustos mediante observadores clásicos, es un caso particular de observadores de entrada desconocida.

La estructura de un OED de orden completo se describe como, [14, 34]:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + Ju(t) + Gy(t) \\ \eta(t) &= K_1 z(t) + K_2 y(t); \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $z \in \mathbb{R}^n$ es el estado del observador. F, J, G, K_1 y K_2 son matrices de dimensiones apropiadas, las cuales deben ser seleccionadas de modo que se logre el desacoplamiento o rechazo de las entradas desconocidas en la dinámica del error de estimación.

Si definimos el error de estimación por

$$e(t) = z(t) - Tx(t),$$

C.C.Reconocimiento

siendo T una transformación lineal de diseño. En este caso, el error de estimación y los residuos están regidos por la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Fe(t) + (FT + GC - TA)x(t) + (J - TB)u(t) + (GE_2 - TE_1)d(t) - T\sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i, \\ \eta(t) &= K_1e(t) + (K_1T + K_2C)x(t) + K_2E_2d(t). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como nuestro requerimiento es la detección de las fallas, entonces, se debe cumplir que

$$\text{si} \quad \nu_i(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, k \quad \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0;$$

lo cual significa que el nivel de umbral o de disparo es aproximadamente el cero. Además,

$$\text{si} \quad \nu_i(t) \neq= 0, \quad i = 1, \ldots, k \quad \Longrightarrow \eta(t) \neq 0.$$

Evidentemente que esas premisas imponen las condiciones para la selección de las matrices de diseño:

www.bdigital.ula.ve

1. F estable.
2. $FT + GC = TA$.
3. $J = TB$.
4. $GE_2 = TE_1$.
5. $K_2E_2 = 0$.
6. $K_1T + K_2C = 0$.

Si esas condiciones son satisfechas, entonces, la dinámica para el error de estimación corresponde a:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Fe(t) - T\sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i(t), \\ \eta(t) &= K_1e(t). \end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

Como ninguna falla debe quedar oculta por la selección de T, debemos garantizar que no existan cancelaciones de algún componente de falla, para ello se debe cumplir que:

$$\texttt{rango}\ (TL) = \texttt{rango}\ (L);$$

donde

$$L = (L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_k)\,.$$

De esta manera, se rechazan las entradas desconocidas y cualquier falla se refleja en los residuos.

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones de este tipo de filtro de detección son presentadas en [13, 108]. Para propósitos de separación de las fallas, la alternativa que se tiene es el de multi filtraje, esto es, el diseño de un banco de OED. Cada observador se diseña de modo que sea sensible a una falla en particular y robusto con respecto al resto.

3.3. Filtros basados en OED generalizados

www.bdigital.ula.ve

En esta sección se presenta una estrategia de diseño de filtros robustos de entrada desconocida que hacen uso de la derivada de la salida medida. En este caso se busca una combinación de los filtros de detección robusta basados en los OED con los observadores generalizados. Para ello se establecen las condiciones para la construcción del filtro y la metodología de la construcción.

Considérese el modelo de dianóstico definido por :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) + \mathfrak{F} \\ z(t) &= C_1x(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_2\omega(t), \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $\omega(t)$ son las señales externas de perturbación o ruido, $u(t)$ la señal de control, $z(t)$ y $y(t)$ son salidas medidas. El par (A, C_1) se supone detectable. $\mathfrak{F}$ son las fallas, mismas que se modelan como

$$\mathfrak{F} = \sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i(t). \tag{3.9}$$

C.C.Reconocimiento

Como se ha señalado anteriormente, en el problema de detección robusta de fallas se busca generar los residuos a partir de la diferencia entre la señal medida $z(t)$ y su mejor estimado $\hat{z}$ con efecto mínimo de las perturbaciones externas.

Así, para lograr el objetivo de la detectabilidad, se debe construir un filtro que garantice:

1. En ausencia de fallas y en presencia de incertidumbres y de señales externas

$$\lim_{t\to\infty}(z(t)-\hat{z}(t))=0.$$

   Eso significa que la dinámica del dispositivo de generación de residuos, o la dinámica del error de estimación, debe ser asintóticamente estable y al mismo tiempo, se debe garantizar un rechazo a las perturbaciones e incertidumbres.

2. Bajo la presencia de alguna falla

$$z(t)-\hat{z}(t)\neq 0.$$

www.bdigital.ula.ve

   Esto último significa que ninguna falla debe quedar oculta en el sub-espacio inobservable del par (A, C_1).

En definitiva, para la concepción de los filtros robustos se deben cumplir ciertas condiciones que garanticen:

1. La estabilidad asintótica del error de estimación.

2. El rechazo de las perturbaciones.

3. La detectabilidad de las fallas.

En este sentido, el filtro de detección que se propone se basa en la generalización del observador de Luenberger, el cual se describe en la siguiente ecuación:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\hat{x}}(t) & = & A_f\hat{x}(t)+B_f y(t)+B_u u(t)+\mathcal{D}_0 z(t)+\mathcal{D}_1\dot{z}\\ \hat{z}(t) & = & C_f\hat{x}(t)\end{array}\right. \tag{3.10}$$

donde A_f, B_f, B_u, C_f, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_1$ son matrices de diseño. En este generalización podemos observar la presencia de la derivada de la señal de salida medida $z(t)$, la cual, al no

C.C.Reconocimiento

estar afectada en forma directa por las señales de perturbación, nos permitirá establecer condiciones para el rechazo del ruido en la generación de los residuos. Ver esquema en la Figura 3.2.

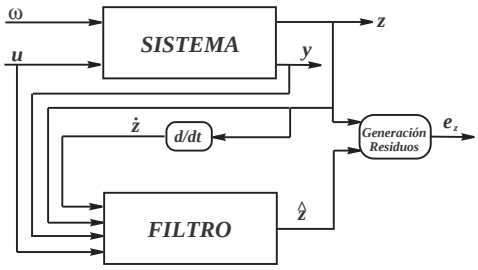


Figura 3.2: Esquema para la generación de residuos con un filtro generalizado.

La existencia de un filtro de detección para los sistemas bajo estudio está soportada por el siguiente teorema:

Teorema 3.1 *Sea el sistema dado en (3.8), con $\mathcal{O}$ la matriz de observabilidad del par (A, C_1). Si*

a) Estabilidad: el par (A, C_1) es detectable.

www.bdigital.ula.ve

b) Rechazo a perturbaciones:

$$Rango\,[(C_1B_1)^T \quad D_2^T \quad B_1^T] = Rango\,[(C_1B_1)^T \quad D_2^T]$$

c) Detección de fallas: En relación a las fallas y perturbaciones;

$$\mathcal{W}_i \bigcap \mathcal{W}_\omega = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, f.$$

Entonces, existe en filtro robusto de detección de fallas, dado en la forma del sistema dinámico representado por (3.10), donde las matrices de diseño se obtienen de las siguientes relaciones:

1. $A_f + B_f C_2 + \mathcal{D}_0 C_1 = (I - \mathcal{D}_1 C_1)A.$
2. $B_f D_2 = (I - \mathcal{D}_1 C_1)B_1.$
3. $B_u = (I - \mathcal{D}_1 C_1)B_2.$
4. $C_f = C_1.$

Prueba

C.C.Reconocimiento

De la interconexión sistema-filtro se obtiene

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B_f C_2 + \mathcal{D}_0 C_1 + \mathcal{D}_1 C_1 A & A_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_f D_2 + \mathcal{D}_1 C_1 B_1 \end{pmatrix} \omega + + \begin{pmatrix} B_2 \\ B_u + \mathcal{D}_1 C_1 B_2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} I \\ \mathcal{D}_1 C_1 \end{pmatrix} \mathfrak{F} \tag{3.11}$$

$$e_z = (C_1 \quad -C_f) \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Donde e_z se define como el error de estimación, $e_z = z - \hat{z}$.

De la interconexión podemos observar que

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B_f C_2 + \mathcal{D}_0 C_1 + \mathcal{D}_1 C_1 A & A_f \end{pmatrix}.$$

A partir de allí, debemos garantizar que, en el límite y en ausencia de señales externas, $e_z \to 0$.

Consideremos el error de estimación de estados, el cual se define por:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

Así,

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= (A - B_f C_2 - \mathcal{D}_0 C_1 - \mathcal{D}_1 C_1 A)\, x - A_f \hat{x} + (B_1 - B_f D_2 - \mathcal{D}_1 C_1 B_1)\, \omega + \\ &\quad + (B_2 - B_u - \mathcal{D}_1 C_1 B_2)\, u + (I - \mathcal{D}_1 C_1)\mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Seleccionando A_f como

$$\begin{aligned} A_f &= A - B_f C_2 - \mathcal{D}_0 C_1 - \mathcal{D}_1 C_1 A, \\ &= A_1 - \mathcal{D}_0 C_1 - \mathcal{D}_1 C_1 A. \end{aligned}$$

La estabilidad del error de estimación se logra por una adecuada selección de las matrices $\mathcal{D}_0$ y $\mathcal{D}_1$, como veremos a continuación; ya que, respecto a la condición a), el par (A, C_1) es detectable, lo cual corresponde, a su vez, a que el par $(A, \tilde{C})$ sea detectable, donde $\tilde{C} = [C_1^T \quad A_1^T C_1^T]^T$, [13].

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= A_f e_x + (B_1 - B_f D_2 - \mathcal{D}_1 C_1 B_1)\, \omega + \\ &\quad + (B_2 - B_u - \mathcal{D}_1 C_1 B_2)\, u + (I - \mathcal{D}_1 C_1)\mathfrak{F}; \end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

donde A_f será, entonces, una matriz estable. De esta última ecuación se puede derivar que, para el rechazo de las perturbaciones, entonces

$$B_1 - B_f D_2 - \mathcal{D}_1 C_1 B_1 = 0.$$

Eso corresponde a una ecuación matricial lineal de la forma

$$MX + NY = L$$

donde X, Y son las matrices de diseño. Así,

$$\begin{aligned} B_f D_2 + \mathcal{D}_1 C_1 B_1 &= B_1 \\ D_2^T B_f^T + (C_1 B_1)^T \mathcal{D}_1^T &= B_1^T; \end{aligned}$$

de modo que esa ecuación matricial lineal admite solución si la condición b) se satisface, [78].

Sin pérdida de generalidad, si la ecuación matricial lineal anterior admite soluciones, en particular se puede seleccionar $\mathcal{D}_1$ de tal manera que

www.bdigital.ula.ve

$$(I - \mathcal{D}_1 C_1) \in \ker B_1;$$

por lo que B_f tendrá una solución trivial, $B_f = 0$. Así, la estabilidad del error de estimación, como se puede notar, dependerá únicamente de la condición a).

Si se selecciona a B_u de modo que

$$B_u = (I - \mathcal{D}_1 C_1) B_2,$$

entonces

$$\dot{e}_x = A_f e_x + (I - \mathcal{D}_1 C_1)\mathfrak{F} \tag{3.13}$$

$$e_z = C_1 e_x. \tag{3.14}$$

Para que las fallas sean detectables sus espacios de alcanzabilidad deben pertenecer al sub-espacio observable del par (A, C_1), es decir; si el espacio de alcanzabilidad del par $(A, \mathcal{W}_i)$ se define por

$$\mathfrak{C}_i = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \mathcal{W}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, f$$

C.C.Reconocimiento

entonces

$$\mathfrak{C}_i \subseteq \mathcal{O}_b;$$

donde $\mathcal{O}_b$ es el sub-espacio de observabilidad del sistema, en relación a la salida $z(t)$. Esa condición es equivalente a que

$$\ker\left(\mathcal{O}\mathcal{W}_i\right) = 0.$$

Nuevamente, si $(I - \mathcal{D}_1 C_1) \in \ker B_1$, entonces, por la condición c),

$$(I - \mathcal{D}_1 C_1) L_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, f;$$

entonces, en la salida aparecen los residuos debido a las fallas. De esta manera se completa la prueba. ■

Comentario 3.1

- *El caso de $D_2 = 0$ corresponde a la aplicación del OED clásico en la detección robusta de fallas.*

www.bdigital.ula.ve

- *En algunos casos, por ejemplo, cuando D_2 es de rango máximo, la condición c) se puede debilitar exigiéndose que $(I - \mathcal{D}_1 C_1) L_i \neq 0$ solamente.*

- *Para la separación de las fallas, se puede considerar la construcción de múltiples filtros siguiendo el mismo procedimiento, considerando el rechazo de todas aquellas fallas a aislar de una en particular. Aunque, existen casos particulares donde la separación de la falla se puede obtener con un único filtro, mediante la posible diagonalización de la matriz A_f. Eso trae como consecuencia que la condición de separabilidad*

$$\mathcal{O}\mathcal{W}_i \bigcap \sum_{j=1}^{f} \mathcal{O}\mathcal{W}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \ldots, f \tag{3.15}$$

  debe ser satisfecha.

- *El diseño del filtro para el sistema en (3.8) también involucra el caso de observadores proporcional-integral, ya que si $C_1 = 0$ se puede hacer una extensión del sistema considerando un nuevo estado definido por $\dot{x}_1 = y(t)$, y la salida $z(t)$ será precisamente $x_1(t)$, es decir, la integral de la salida $y(t)$.*

3.3.1. Ejemplos

C.C.Reconocimiento

3.3.1.1. Ejemplo 1

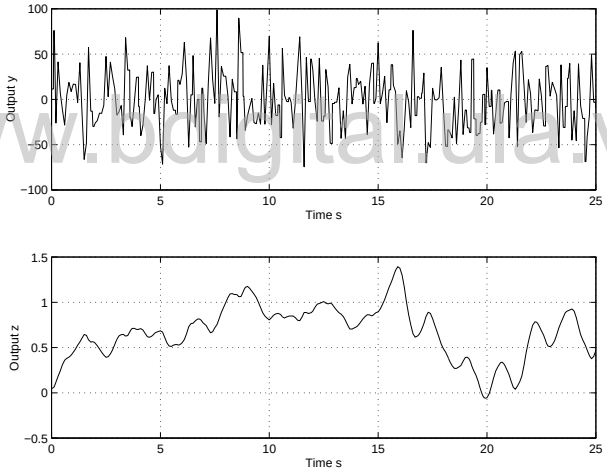
Considerése un caso sencillo representado por la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \nu_1 \\ y &= (1 \quad 1)x + 10\omega \\ z &= (1 \quad 0)x \end{aligned}$$

Para el filtro se obtiene

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -2{,}1 & -5{,}1 \end{pmatrix}, \quad B_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_f(1 \quad 0).$$

Las siguientes figuras muestran los comportamientos temporales, en base a simulaciones, del sistema y del filtro de detección. En ellas se evidencian el rechazo a la perturbación y la detección de la falla que se produce a los $15s$. Es evidente la generación de residuos debido a la falla.



www.bdigital.ula.ve

Figura 3.3: Salidas del sistema.

3.3.1.2. Ejemplo 2

Considerése el sistema con la siguiente representación:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nu_1 \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x + + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \eta \\ z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

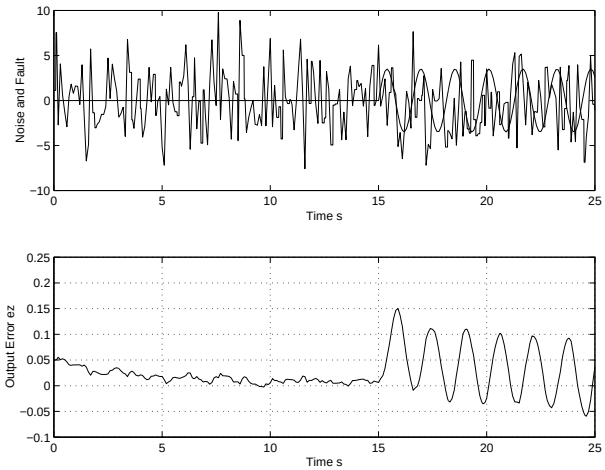


Figura 3.4: Las señales de perturbación y falla, y el error de salida.

donde η es un ruido de la medición.

En este caso, si se seleccionan

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{D}_0 = \begin{pmatrix} -2/5 & 1 \\ 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_u = 0;$$

entonces la dinámica del error de estimación corresponde a

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} e_x + \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \nu_1 \\ e_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} e_x. \end{aligned}$$

Nótese que la falla queda asignada a una única salida, de manera que su presencia quedará demostrada cuando dicha salida exhibe residuos.

Los resultados a través de simulaciones se muestran a continuación. Bajo condiciones

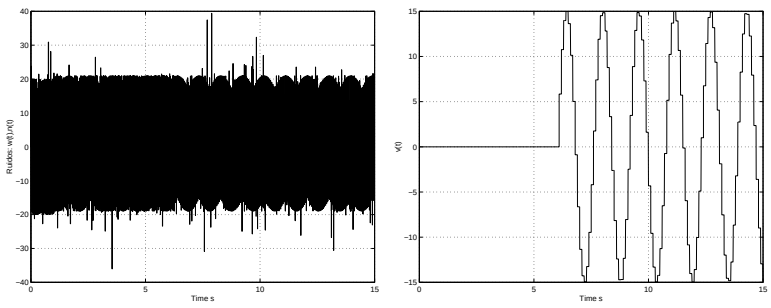


Figura 3.5: Señales de perturbación y de falla.

de entradas externas adversas, se presenta una falla alrededor de los $6s$, ver la Figura

C.C.Reconocimiento

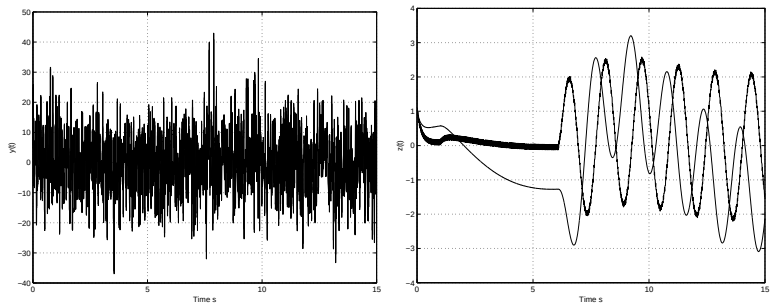


Figura 3.6: Señales de salida.

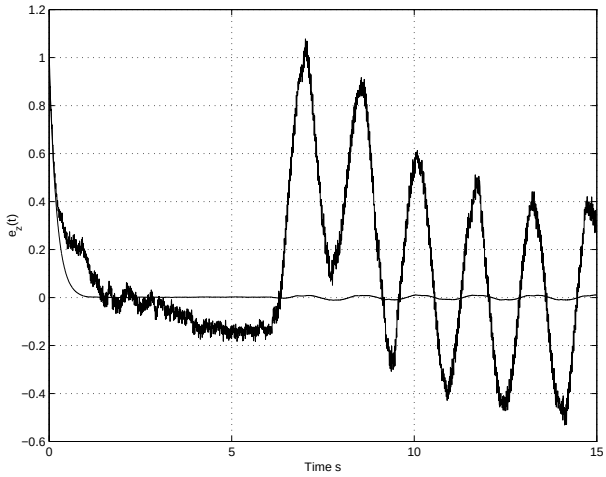


Figura 3.7: El error de la salida.

www.bdigital.ula.ve

3.5. En la Figura 3.7 se muestra que, efectivamente, en una de las salidas del error de estimación se nota la presencia de dicha falla, por lo que la detección robusta se ha podido lograr.

Estos resultados permiten establecer las siguientes conclusiones :

- Se ha presentado un método de diseño de filtros robustos de FDI para sistemas lineales sometidos a perturbaciones externas.
- El filtro considera una extensión general del observador de Luenberger, donde, además, se utiliza la derivada de las salidas sin ruido.
- Se establecen condiciones algebraicas para la construcción del filtro, las cuales dependen de elementos de diseño.
- Las condiciones para la sintésis del filtro son completamente factibles de cumplir, a diferencia de otras técnicas que exigen condiciones fuertes.

C.C.Reconocimiento

- Para la separación de las fallas se pueden diseñar múltiples filtros.

3.4. Filtraje robusto y filtros DDF

La estimación de estados en sistemas con incertidumbres y perturbaciones externas ha sido un problema muy bien estudiado, [37, 54, 70]. El problema trata del diseño de un sistema dinámico (filtro), bajo condiciones de estabilidad asintótica y manejo de incertidumbres y perturbaciones, que genere el mejor estimado del vector de estado del proceso. Los métodos de diseño que han resultado ser muy eficaces se basan en la solución de problemas de optimización $\mathcal{H}_2$-$\mathcal{H}_\infty$, incluyendo criterios de multiobjetivos, [39, 70].

El problema de estimación robusta tiene una relación directa con el problema de detección robusta de fallas. En ambos problemas se impone la concepción de un filtro que produzca, en el primero, el mejor estimado del vector de estado, y en el segundo, los residuos. En ambos casos, el efecto de las incertidumbres y las perturbaciones externas deben ser minimizados. Esa correspondencia ha sido presentada en [11, 16, 27, 64]. La idea que persiste, en todos esos resultados, es la del diseño de un filtro de detección, mediante técnicas de estimación robusta de los estados, que minimice el efecto de las perturbaciones e incertidumbres en la generación de los residuos, sin degradar el efecto de las fallas.

www.bdigital.ula.ve

Consideremos una variante del sistema (3.1), la cual se define por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_2\omega(t); \end{aligned} \tag{3.16}$$

con (A, B_1) estabilizable y (A, C_2) detectable. Además, la incertidumbre en la dinámica del proceso la caracterizaremos por

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)A_i.$$

Asumiendo que A es estable, las A_i son matrices constantes, no-desestabilizantes, conocidas; y $a_i(t) \in \mathcal{L}_2$ son funciones arbitrarias de energía acotada.Además, ΔA también puede tener una representación diádica:

$$\Delta A = H(t)F(t)E(t),$$

C.C.Reconocimiento

donde $H(t)$ y $E(t)$ son funciones matriciales conocidas real acotadas y de dimensiones apropiadas; mientras que $F(t)$ es una función matricial desconocida pero perteneciente al espacio de Lebesgue, [133].

El objetivo se traza en la síntesis de un filtro de detección de fallas $\nu_i(t)$ con la mejor sensibilidad posible. La solución se busca en el marco de la estimación robusta en $\mathcal{H}_\infty$. En este contexto se fijan dos premisas:

1. Se debe garantizar que la magnitud de la función de transferencia de todas las entradas desconocidas al error de salida del filtro sea menor que un nivel pre-establecido γ. Eso significa la fijación de un nivel de umbral definido por γ.

2. Se debe conservar la sensibilidad a los modos de las fallas.

En concordancia con la dualidad entre los problemas de control en $\mathcal{H}_\infty$ y el filtraje en $\mathcal{H}_\infty$, en [19, 63] se muestran unos métodos que requieren de la solución de dos ecuaciones de Riccati. Mientras que en [27] solo se requiere la solución de una ecuación de Riccati.

www.bdigital.ula.ve

En $\mathcal{H}_\infty$, el objetivo del filtraje es generar el mejor estimado $\hat{z}(t)$ de un vector de estado de la forma

$$z(t) = C_1 x(t), \tag{3.17}$$

mediante un observador de estado. C_1 es una matriz de peso. En el caso de la detección de fallas, el estimado $\hat{z}(t)$ se utiliza para la generación de los residuos. Asumiendo que en el sistema (3.16) el par (A, C_2) es observable, la dinámica del filtro corresponde a

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B_2 u(t) + D(y(t) - C_2\hat{x}(t)), \\ \hat{z}(t) &= C_1\hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) &= C_2\hat{x}(t). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Evidentemente que la dinámica del error se rige por

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - DC_2)e(t) + \Delta A x(t) + (B_1 - DD_2)\omega(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i \nu_i(t), \\ \eta_z(t) &= C_1 e(t). \end{aligned} \tag{3.19}$$

C.C.Reconocimiento

Asumiendo que $\nu_i(t) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, se debe obtener un estimado $\hat{z}(t)$ de $z(t)$ con un error de estimación $\eta_z(t)$ "pequeño.ªnte todas las incertidumbres admisibles. Considerando, en principio, que $\Delta A = 0$; el problema se plantea en el marco de un problema optimización cuadrática con una funcional de costo:

$$\mathtt{J}(\omega, \hat{z}) = \frac{1}{2}\left(||z - \hat{z}||_2^2 - \gamma^2||\omega||_2^2\right), \quad \gamma \in \mathbb{R},\ \gamma > 0. \tag{3.20}$$

Si se define $H_{\eta_z\omega}(s)$ como la matriz de transferencia del residual $\eta_z(t)$ a las entradas de perturbación $\omega(t)$, entonces, en relación a (3.20), el filtro a diseñar debe ser tal que

$$||H_{\eta_z\omega}(s)||_\infty = \sup_{0\neq\omega\in\mathcal{L}_2} \frac{||\eta_z||_2^2}{||\omega||_2^2} < \gamma.$$

Es bien conocido, [54, 134], que $||H_{\eta_z\omega}||_\infty < \gamma$ si y solo si la ecuación algebraica de Riccati

$$(A - DC_2)^T\mathcal{X} + \mathcal{X}(A - DC_2) + \frac{1}{\gamma^2}\mathcal{X}(B_1 - DD_2)(B_1 - DD_2)^T\mathcal{X} + C_1^TC_1 = 0$$

admite una solución simétrica $\mathcal{X} \geq 0$ tal que

www.bdigital.ula.ve

$$(A - DC_2) + \frac{1}{\gamma^2}(B_1 - DD_2)(B_1 - DD_2)^T$$

es asintóticamente estable.

Se puede observar, de la dinámica del error (3.19), que una solución óptima al problema, viene en encontrar una ganancia del filtro D tal que $(A - DC_2)$ sea asintóticamente estable y $B_1 = DD_2$. En ese caso se obtiene una detectabilidad absoluta de las fallas.

La solución la podemos resumir en el siguiente teorema:

Teorema 3.2 *Para el sistema (3.16), con*

- $\Delta A = 0$.
- $D_2D_2^T = \mathbb{I}$.
- $D_2B_1^T = 0$.

Existe un filtro de detección de fallas de la forma (3.18), tal que

- *si* $\omega(t) = 0,\ \nu_i(t) = 0$ *entonces* $\lim_{t\to\infty}\eta_z(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, k$.
- $||H_{\eta_z\omega}(s)||_\infty < \gamma$;

C.C.Reconocimiento

si y solamente si, existe una matriz simétrica $\mathcal{X} > 0$*, solución de la ecuación algebraica de Riccati*

$$A\mathcal{X} + \mathcal{X}A^T - \mathcal{X}\left(C_2^T C_2 - \frac{1}{\gamma^2}C_1^T C_1\right)\mathcal{X} + B_1 B_1^T = 0 \tag{3.21}$$

y la ganancia del filtro corresponde a

$$D = \mathcal{X}C_2^T. \tag{3.22}$$

Prueba

La prueba se basa en los resultados del filtrado óptimo en $\mathcal{H}_\infty$, con el mismo procedimiento, [70, 107].

Para este caso, la matriz de transferencia $H_{\eta_z\omega}(s)$ resultante corresponde a

$$H_{\eta_z\omega}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - DC_2 & B_1 - DD_2 \\ \hline C_1 & 0 \end{array}\right] = C_1\left(s\mathbb{I} - A + DC_2\right)^{-1}(B_1 - DD_2).$$

Lo que está garantizado, con esta solución, es que el efecto de la perturbación, con respecto a los residuos, se ha minimizado a un nivel γ. Como las fallas no se han considerado en el problema, se conserva su incidencia en los residuos. La activación de la presencia de una falla se puede monitorear por comparación de la norma-∞ de la función de transferencia de cada una de las fallas a los residuos.

www.bdigital.ula.ve

■

Considérese, nuevamente, el modelo del sistema dado en (3.16). Con los resultados mostrados en el teorema anterior, la idea es convertir las incertidumbres paramétricas del sistema como fuentes ficticias de ruido para ser tratadas como perturbaciones desconocidas. Es decir, representar como una sola señal todas las entradas exógenas y los errores del modelaje. Sea $v(t)$ tal señal; el objetivo es diseñar un filtro con ganancia D tal que el efecto de $v(t)$ en los residuos $\eta_z(t)$ sea mínimo de acuerdo al funcional de costo (3.20).

Técnicamente, lo que se sugiere es la transformación del sistema original (3.16) en un sistema auxiliar, el cual no exhibe errores de modelaje pero es afectado por entradas adicionales que serán tratadas como perturbaciones del caso más desfavorable en la solución del problema de optimización.

C.C.Reconocimiento

Consideremos, entonces, el modelo auxiliar sin incertidumbres:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= Ax_a(t) + B_v v(t) + B_2 u(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i \nu_i(t) \\ y_a(t) &= C_2 x_a(t) + D_2 \omega(t). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Además, la salida a estimar corresponde a

$$z_a(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ \epsilon E \end{pmatrix} x_a(t), \tag{3.24}$$

donde ϵ son parámetros escalares que se deben seleccionar adecuadamente. La nueva entrada de perturbación $v(t)$ que afecta el sistema en la dirección del espacio de estado B_v es, por lo tanto

$$v(t) = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ \epsilon\gamma^{-1} F E x(t) \end{pmatrix}, \qquad B_v = \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{\gamma}{\epsilon} H \end{pmatrix}.$$

Definiendo el estimado $\hat{z}_a(t)$ de $z_a(t)$ por

www.bdigital.ula.ve

$$\hat{z}_a(t) = \begin{pmatrix} \hat{z}(t) \\ 0 \end{pmatrix} x_a(t), \tag{3.25}$$

donde $\hat{z}(t)$ es un estimado de $C_1 x_a(t)$, entonces, el nuevo índice desempeño estará regido por

$$\mathtt{J}_a(v, \omega, \hat{z}, \epsilon) = \frac{1}{2} \left(||z_a - \hat{z}_a||_2^2 - \gamma^2 (||v||_2^2 + ||\omega||_2^2) \right). \tag{3.26}$$

Mediante sustituciones respectivas, el funcional de costo se puede expresar como

$$\mathtt{J}_a(v, \omega, \hat{z}, \epsilon) = \frac{1}{2} \left(||C_1 x_a - \hat{z}||_2^2 + ||\epsilon E x_a||_2^2 - \gamma^2 (||v||_2^2 + ||\omega||_2^2) \right). \tag{3.27}$$

Así, considerando que la nueva entrada $v(t)$ se puede tratar como la entrada del peor caso, entonces, se plantea el siguiente lema:

Lema 3.1 *Consideremos el sistema (3.16) y el sistema auxiliar (3.23) con los correspondientes índices de desempeño* $\mathtt{J}$ *y* $\mathtt{J}_a$ *dados por (3.20) y (3.27), respectivamente. Entonces*

$$\sup_{\omega, F(t)} \mathtt{J}(\omega, \hat{z}) \leq \sup_{v, \omega} \mathtt{J}_a(v, \omega, \hat{z}, \epsilon);$$

para cualquier $\epsilon > 0$.

C.C.Reconocimiento

Prueba La prueba está construida en [19].

■

Es notorio, a partir del Lema 3.1, que el problema de minimizar el efecto de las incertidumbres y perturbaciones en los residuos, para el caso de detección de fallas, es equivalente a la minimización del efecto de la entrada en el peor caso en el contexto del sistema auxiliar. Eso significa que si

$$||H_{\eta_z v}(s)||_\infty = \sup_{0 \neq v \in \mathcal{L}_2} \frac{||\eta_z||_2^2}{||v||_2^2} < \gamma;$$

donde $H_{\eta_z v}(s)$ es la matriz de transferencia de los residuos $\eta_z(t)$ a la nueva entrada $v(t)$, entonces el efecto de las incertidumbres y entradas exógenas en el sistema original, no superan ese nivel de adversidad.

En base al Teorema 3.2, el sistema auxiliar admite un filtro con ganancia

$$D = \mathcal{Y} C_2^T;$$

www.bdigital.ula.ve

donde $\mathcal{Y}$ es la solución de la ecuación algebraica de Riccati

$$A\mathcal{Y} + \mathcal{Y}A^T - \mathcal{Y}\left(C_2^T C_2 - \frac{1}{\gamma^2} C_z^T C_z\right)\mathcal{X} + B_v B_v^T = 0 \tag{3.28}$$

con

$$C_z = \begin{pmatrix} C_1 \\ \epsilon E \end{pmatrix}.$$

Debido a que la construcción del filtro óptimo se debe realizar en base al sistema original, entonces su dinámica estará dada por, [19]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \left(\bar{A} - \bar{B}_v \bar{B}_v^T \mathcal{X}\right)\hat{x} + D(y - C_2\hat{x}) + B_2 u + \sum_{i=1}^{k} L_i \nu_i, \\ \hat{z} &= \left(C_1 + \bar{B}_v^T \mathcal{X}\right)\hat{x}; \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + \epsilon^2 \gamma^{-2} \mathcal{Y} E^T E \\ \bar{B}_v &= \gamma^{-2} \mathcal{Y} C_1^T \end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

y $\mathcal{X}$ es solución de la ecuación algebraica de Riccati

$$\bar{A}^T\mathcal{X} + \mathcal{X}\bar{A} - \mathcal{X}\left(\bar{B}_v\bar{B}_v^T - \frac{1}{\gamma^2}DD^T\right)\mathcal{X} - \epsilon^2 E^T E = 0. \tag{3.30}$$

Como vemos, en la solución del problema están involucradas dos ecuaciones de Riccati, la primera, (3.28), corresponde al dual de la ecuación de Riccati de control con información completa en $\mathcal{H}_\infty$; mientras que la segunda, (3.30), es la dual a la ecuación Riccati en el problema de estimación de la salida en $\mathcal{H}_\infty$.

3.4.1. Solución en base a los sub-espacios (C_2, A)-invariantes

Nuevamente, la idea es construir una representación del sistema con incertidumbre como un proceso que no contenga errores de modelaje pero que es afectado por una entrada adicional. En ambas descripciones, los sistemas deben tener sub-espacios (C_2, A)-invariantes equivalentes, esto con el fin de aplicar los resultados del enfoque geométrico en la concepción de los filtros, [28].

Sea el sistema (3.16). Supongamos que $D_2 = 0$. Una representación equivalente, sin incertidumbres, está dada por:

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_v v(t) + B_2 u(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i \nu_i(t), \\ y(t) &= C_2 x(t). \end{aligned} \tag{3.31}$$

La entrada de perturbación en el caso más desfavorable, $v(t)$, tiene una dirección de entrada correspondiente a:

$$B_v = \begin{pmatrix} B_1 & B_\Delta \end{pmatrix},$$

donde B_Δ corresponde a los vectores unitarios de la columna de la matriz nominal A del sistema, cúyas entradas son afectadas por las incertidumbres paramétricas.

Para el sistema (3.31) es posible diseñar un filtro de DDF, en el contexto geométrico, el cual permite asignar direcciones particulares en el espacio de la salida, o residuos, tanto a las fallas $\nu_i(t)$, como a las perturbaciones del peor caso $v(t)$. Esto es, el desacoplamiento, en el espacio de las salidas, de las fallas con respecto a las perturbaciones. Ello impone una exigencia adicional. Si

$$\text{Im } L_i \subseteq \mathcal{W}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

C.C.Reconocimiento

y

$$\text{Im } B_v \subseteq \mathcal{W}_v,$$

entonces

$$C_2\mathcal{W}_i \bigcap C_2\mathcal{W}_v = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.32}$$

Si esa condición (3.32) no es posible de satisfacer, entonces, para el sistema (3.31), no es adecuada la síntesis del filtro desde el punto de vista goemétrico ya que algunas fallas quedan ocultas por la perturbación resultando imposible su distinguibilidad. Si este es el caso, podemos recurrir, nuevamente, al Teorema 3.2 a objeto de construir un filtro de detección con un nivel γ de umbral para la evaluación de los residuos.

3.5. Rechazo absoluto y filtros DDF

Cuando en los residuos no existe el efecto de las perturbaciones exógenas, hemos dicho que se tiene una detección completa de las fallas. Este es el caso de los filtros basados en observadores de entrada desconocida. Bajo ciertas condiciones es posible generar los residuos excentos de los efectos de las entradas de perturbación. En ese caso de los OED, hemos podemos obtener la detectabilidad completa de las fallas, no así la separación de las fallas.

www.bdigital.ula.ve

El interés que procede es la detectabilidad completa con la posibilidad de la sepración de las fallas. Evidentemente que ello es posible si ciertas condiciones se cumplen, particularmente en relación a las direcciones de las fallas y las entradas desconocidas en el espacio de estado del sistema.

Consideremos el sistema (3.16), con las mismas características y la posibilidad de obtener una representación equivalente como en (3.31). Supongamos que las condiciones de detectabilidad y separabilidad de las fallas, para el sistema equivalente (3.31) son satisfechas. Además, como se pretende la separación de las fallas con una ausencia absoluta del las entradas en el peor caso en los residuos, debemos suponer que la condición expresa en (3.32) se cumple. Una condición adicional, que se refiere a la detectabilidad de la entrada de perturbación es que

$$\ker(C_2B_v) = 0.$$

C.C.Reconocimiento

Vamos a considerar la construcción de un filtro de DDF basado en el observador generalizado de Luenberger, Sección 2.4.4.2. Para ello, tomemos en cuenta una sola derivada de la salida, es decir

$$\dot{y}(t) = C_2Ax(t) + C_2B_v v(t) + C_2B_2u(t) + C_2\sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i(t).$$

Entonces, la salida extendida es:

$$\begin{aligned} y_E(t) &= \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2A \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ C_2B_v \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ C_2B_2 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} L_iV_i(t). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Con esta nueva salida se procede al diseño del filtro a través de la ecuación:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_2u(t) + D\left(y_E(t) - \hat{y_E}(t)\right); \tag{3.34}$$

donde

$$\hat{y_E}(t) = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2A \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ C_2B_v \end{pmatrix} u(t). \tag{3.35}$$

www.bdigital.ula.ve

Así, la dinámica del error de estimación corresponde a:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \left[A - D\begin{pmatrix} C_2 \\ C_2A \end{pmatrix}\right] e(t) + \left[B_v - D\begin{pmatrix} 0 \\ C_2B_v \end{pmatrix}\right] v(t) + \\ &\quad + \left[\mathbb{I} - D\begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix}\right] \sum_{i=1}^{k} L_iV_i(t) \\ \eta(t) &= C_2e(t). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Obsérvese que si

$$\ker(C_2B_v) = 0,$$

se puede establecer lo siguiente:

Proposición 3.1 *Dado el sistema (3.31) con (A, C_2) observable (detectable), y las condiciones de detectabilidad y separabilidad de las fallas. Además, si $\ker(C_2B_v) = 0$ y si la condición en (3.32) se satisface, entonces, existe una ganancia D del filtro dado en (3.34), tal que:*

1. *La matriz*

$$\left[B_v - D\begin{pmatrix} 0 \\ C_2B_v \end{pmatrix}\right] = 0.$$

C.C.Reconocimiento

2. Todos los autovalores de la matriz

$$\left[A - D\begin{pmatrix} C_2 \\ C_2A \end{pmatrix}\right]$$

sean estables.

3. Las salidas del error permitan la distinciones entre fallas presentes.

Prueba

A partir de [96] :

Sea

$$D = [D_1 \quad D_2],$$

entonces,

$$\left[B_v - D\begin{pmatrix} 0 \\ C_2B_v \end{pmatrix}\right] = (\mathbb{I} - D_2C_2)\,B_v;$$

de manera que se debe seleccionar D_2 tal que

$$B_v \in \ker(\mathbb{I} - D_2C_2).$$

www.bdigital.ula.ve

Por otro lado,

$$\left[A - D\begin{pmatrix} C_2 \\ C_2A \end{pmatrix}\right] = A - D_1C_2 - D_2C_2A;$$

como el par (A, C_2) es observable, entonces existen D_1 y D_2, de la ecuación anterior, que generan una dinámica asintóticamente estable en el error. Además, al hacer $B_v \in \ker(\mathbb{I} - D_2C_2)$ y puesto que (3.32) se cumple, la asignabilidad de $A - D_1C_2 - D_2C_2A$ no se ve afectada en cuanto a la separabilidad de las fallas.

■

El resultado anterior indica la posibilidad de diseñar un filtro que exhibe residuos solo bajo la presencia de fallas y que además, si las fallas son separables, permite el diagnóstico entre distintas fallas que, simultáneamente, pueden estar presentes.

Para el diagnóstico de las fallas se sigue el procedimiento de diseño que consiste, en primer lugar, asegurar el desacoplamiento de las fallas, y en el caso particular que estamos tratando, el rechazo total de las perturbaciones. Vale decir, que en principio se selecciona D_2 basada en las condiciones anteriores. A continuación, se busca la estabilidad asintótica

C.C.Reconocimiento

de filtro a través de D_1, procurando, en la medida de lo posible, que la dinámica del error resulte en un sistema desacoplado. Un resultado similar, para el caso de los sistemas a tiempo discreto, se presenta en [101].

3.5.1. Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema con perturbación y posible falla

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}v + \\ &\quad + \begin{bmatrix}l_1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}v_1 + \begin{bmatrix}0\\ l_2\\ 0\end{bmatrix}v_2 \\ y &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}x. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Se tienen dos posibles fallas y una señal de perturbación.

www.bdigital.ula.ve

Siguiendo el procedimiento de diseño del observador generalizado, sea

$$D = [D_1 \quad D_2];$$

$$D_1 = \begin{bmatrix}d_1 & d_2 & d_3\\ d_7 & d_8 & d_9\\ d_{13} & d_{14} & d_{15}\end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix}d_4 & d_5 & d_6\\ d_{10} & d_{11} & d_{12}\\ d_{16} & d_{17} & d_{18}\end{bmatrix}.$$

Para que $B_v \in \ker(\mathbb{I} - D_2C_2)$, entonces

$$d_6 = d_{12} = 0, \quad d_{18} = 1$$

El conjunto restante de los valores de la matriz de ganancia se seleccionan a fin de cumplir con la estabilidad asintótica y la separabilidad entre las fallas. Así, la matriz de ganancia del observador resulta ser, por ejemplo:

$$D = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

C.C.Reconocimiento

Consecuentemente, entonces, la dinámica del error corresponderá a:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ -2l_2 \end{bmatrix} v_2;$$

cúya salida está definida por

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 + e_2 \\ e_1 + e_2 + e_3 \end{bmatrix}.$$

Como se puede observar, el sistema dinámico anterior nos permite distinguir la presencia de alguna falla al presentarse un residual, independientemente de la perturbación. Por otro lado, la presencia de la falla v_1, se detecta a través de e_1, mientras que v_2, es posible distinguirla en e_2 o e_3. Desde el punto de vista práctico, el diagnóstico entre fallas se logra proyectando las salidas del error a través de un operador de desacoplamiento. En este ejemplo utilizaremos el operador $\mathcal{P} : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$, dado por:

www.bdigital.ula.ve

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta proyección, las salidas del error resultan ser precisamente e_1, e_2 y e_3.

3.5.1.1. Simulaciones y discusión de resultados

Para realizar las simulaciones y posteriormente analizar los resultados, hacemos uso del *MATLAB-SIMULINK*, de acuerdo al diagrama que se muestra en la Figura 3.8.

Se ha generado un patrón de falla (ver Figura 3.12) y una señal de perturbación (Figura 3.11). Luego de que el sistema alcanza el régimen estacionario ante una entrada escalón unitaria, bajo la presencia de la perturbación, (ver Figura 3.9), se presenta la falla. Es de notarse que durante este lapso de tiempo, la señal de error (ambas), se mantiene en cero, (ver Figura 3.10, aún estando presente la perturbación. Al momento de la falla, una de las señales de error deja de ser cero para indicar su presencia, al desaparecer ésta, el error vuelve a cero. Existe un rechazo pleno a la perturbación de acuerdo a la dinámica del error.

C.C.Reconocimiento

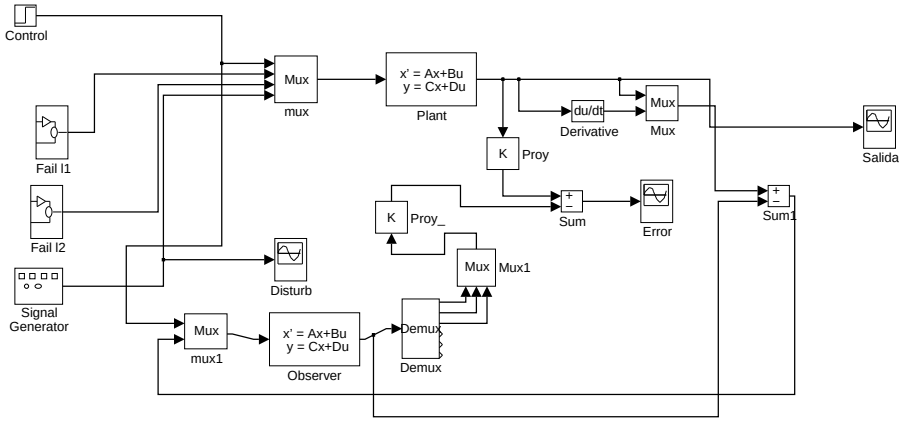
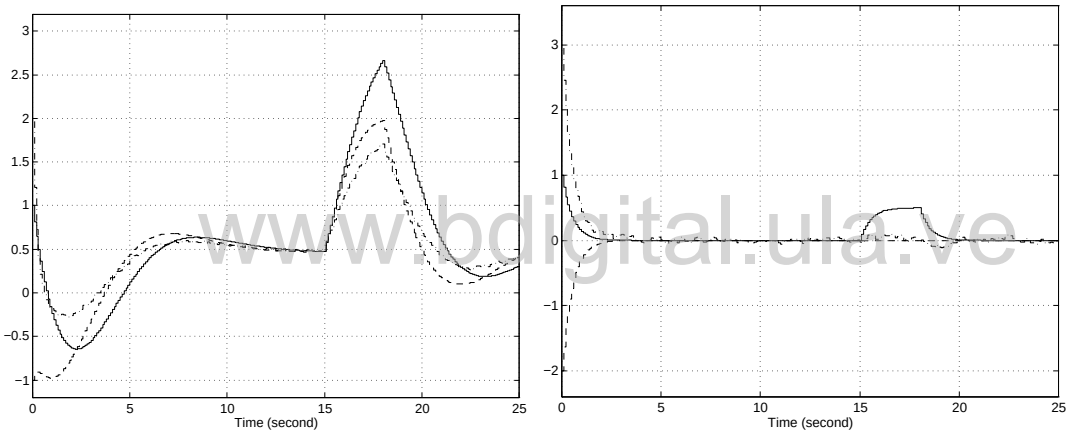


Figura 3.8: Diagrama de bloques para la simulación.



www.bdigital.ula.ve

Figura 3.9: Salida y Error del sistema bajo perturbación y falla v_1.

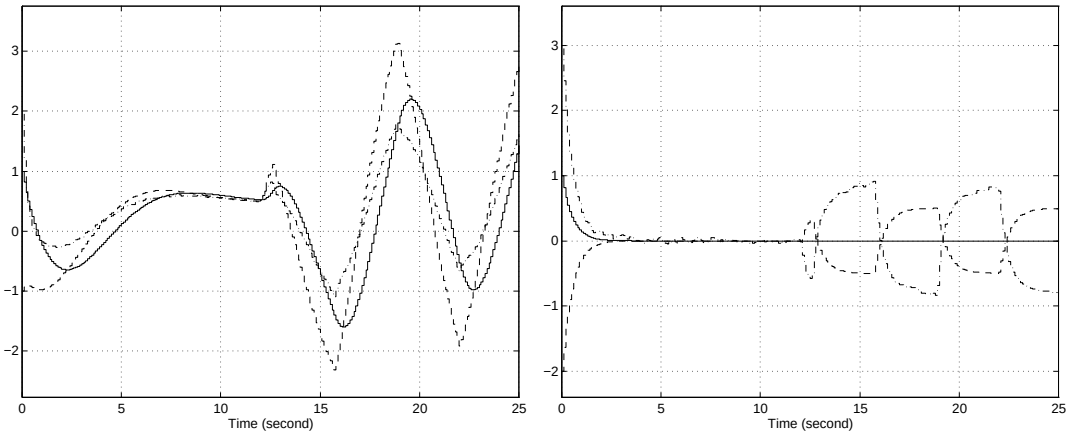


Figura 3.10: Salida y Error del sistema bajo perturbación y falla v_2.

C.C.Reconocimiento

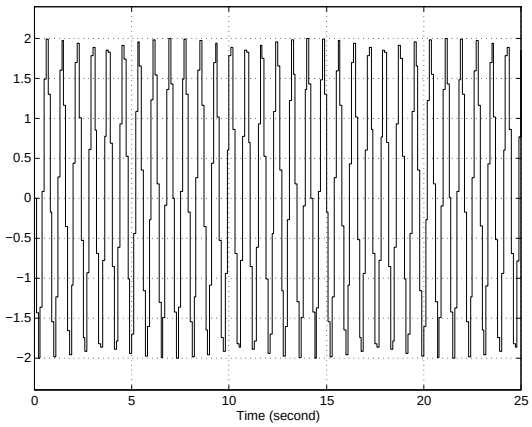


Figura 3.11: Señal de perturbación.

www.bdigital.ula.ve

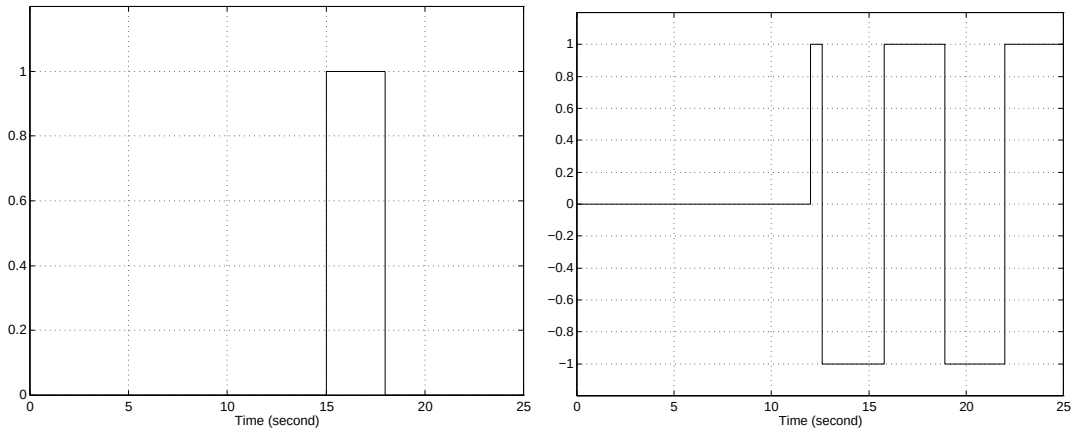


Figura 3.12: Señales de falla $v_1(t)$ y $v_2(t)$.

C.C.Reconocimiento

En definitiva, el método propuesto es un procedimiento de diseño de filtros de DDF en sistemas dinámicos lineales sujetos a perturbaciones externas, mediante la extensión de la salida por derivación sucesiva de la salida disponible. En base a los criterios de separabilidad de fallas, es posible diseñar la ganancia del filtro de tal forma que exista rechazo absoluto a las perturbaciones externas, en la dinámica del error.

En virtud de que se requiere un procedimiento de derivación, el uso de las derivadas analíticas como dificultad práctica, puede ser resuelto mediante el uso de cocientes de diferencias de la señal de salida. evitándose así los problemas inherentes a la diferenciación analítica de señales no suaves.

3.6. Filtros robustos basados en el control óptimo $\mathcal{H}_\infty$

Tal como ha sido planteada en la Sección 3.4, la estimación o filtraje robusto en $\mathcal{H}_\infty$ y los filtros de detección de fallas tienen en común muchas relaciones: en ambos problemas se busca el diseño de un sistema dinámico (filtro) bajo condiciones de estabilidad asintótica y manejo de perturbaciones.

www.bdigital.ula.ve

En el caso de la estimación robusta en $\mathcal{H}_\infty$ se busca generar un estimado óptimo del vector de estado del sistema, o una combinación lineal de ellos, a pesar de la presencia de señales de perturbación de energía acotadas e incertidumbres del modelo. La medida del desempeño del filtrado en $\mathcal{H}_\infty$ se analiza en base de que se debe asegurar que la magnitud de la salida del error de estimación, por efecto de las perturbaciones, se mantenga por debajo de un cierto valor pre-establecido.

En el problema de síntesis de filtros robustos de DDF la meta final es generar los residuos solamente bajo situaciones de fallas a pesar de la presencia de incertidumbres en el modelo y de señales de perturbación. Como objetivo posible, por el contrario, se busca la detección de fallas en presencia de perturbaciones, con la mejor sensibilidad posible, cuando las condiciones de separabilidad de fallas no se cumplen. Si es posible la separabilidad de las fallas, todas las técnicas de filtraje robusto que se han presentado, recurren al multi-filtrado para el diagnóstico de las fallas; a excepción de la mostrada en [96], pero la cual puede tener el inconveniente de la derivación de la salida.

C.C.Reconocimiento

Para la evaluación de la robustez, la medida de sensibilidad de un filtro de DDF la podemos caracterizar como la relación del nivel de atenuación de la salida del filtro con respecto a las fallas al nivel de atenuación del filtro respecto a la perturbación de peor caso, esto es,

$$\mathcal{S}_i = \frac{||H_{\eta_z \nu_i}||_\infty}{||H_{\eta_z v}||_\infty}.$$

Bajo esta concepción, las técnicas buscan el mejoramiento de la sensibilidad al atenuar la perturbación tanto como sea posible y procurando dejar incólume la respuesta ante las fallas: [72, 64, 83].

En ese contexto se ha pretendido aplicar los resultados de la síntesis de controladores óptimos en $\mathcal{H}_\infty$ para la concepción de filtros robustos de DDF. Por ejemplo, en [71] se presenta una formulación de técnicas multi-objetivos para la construcción del filtro, con el inconveniente, nuevamente, de que para la separación de las fallas es necesario el diseño de múltiples filtros, cada uno asociado a una falla en particular. Además, no se muestra una metodología sistemática para la construcción de los filtros.

www.bdigital.ula.ve

En el marco de estas ideas, en esta sección se propone la estrategia de la construcción de un post-filtro en el diseño del filtro robusto de DDF. Dicho post-filtro se construye mediante la síntesis de controladores óptimos en $\mathcal{H}_\infty$ por realimentación dinámica de la salida medida, y el mismo permite atacar el problema de detección y diagnóstico simultáneamente, evitándose el filtraje múltiple, [95].

El problema de diseño de controladores óptimo-robustos en $\mathcal{H}_\infty$, (Sección 1.4), como paradigma, tiene un vasto estudio dentro de la comunidad de control, que pudiésemos resumir a partir del trabajo en [23], hasta los resultados en base a LMI; ver, por ejemplo: [15, 38, 49, 56, 67, 106].

3.6.1. Diseño de un Post-Filtro

La idea de la utilización de un post-filtro para la detección robusta de fallas se fundamenta en la transformación del problema de diseño de filtros de DDF a un problema de control óptimo en $\mathcal{H}_\infty$.

Consideremos el sistema dado en (3.16). De igual manera, supongamos que el sistema

C.C.Reconocimiento

equivalente sin incertidumbre se representa por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_v v(t) + B_2 u(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i \nu_i(t), \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_v v(t). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Supongamos, también, que la salida para estimación es como en (3.17).

Mantengamos las condiciones de que el par (A, C_2) es detectable y que, para el modelo de diagnóstico equivalente, el (A, B_v) es estabilizable.

De Teorema 3.2 sabemos que es posible obtener un filtro tal que, en ausencia de fallas:

- Si $v(t) = 0$, entonces
$$\lim_{t\to\infty} e_z(t) = 0.$$

- Para $H_{\eta_z v}$, la función de transferencia del error de estimación a la perturbación, todos sus valores singulares máximos son menores que un cierto nivel de atenuación $\gamma > 0$, es decir,
$$||H_{\eta_z v}||_\infty < \gamma.$$

www.bdigital.ula.ve

Si la condición dada en (3.32) se satisface se puede recurrir a las técnicas de OED, pero para la separación de las fallas es necesario un filtraje múltiple. En cuanto a la aplicación del enfoque geométrico, además del inconveniente, en algunos casos, de estabilidad asintótica y el aislamiento de las fallas, vemos que en el modelo de diagnóstico equivalente persiste la perturbación en la salida medida, lo cual dificulta, aun más, la asignación direccional para las perturbaciones.

La formulación del problema de filtraje en $\mathcal{H}_\infty$ y su solución, también puede plantearse en el marco de un post-filtro, el cual es un sistema dinámico a diseñar y que denotaremos por $\mathcal{F}_p$, cúya excitación es una señal de innovación compuesta por la diferencia entre salida medida y su estimado, y genera, como salida, una señal a utilizarse en la dinámica del filtro primario, [94].

Reconsidérese dinámicamente un filtro, como en (3.18), para el modelo de diagnóstico

C.C.Reconocimiento

(3.38), al incorporar una señal de "control.en pre-adelanto, esto es,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B_2u(t) + D(y(t) - C_2\hat{x}(t)) - B_eu_e(t)\\ \hat{z}(t) &= C_1\hat{x}(t);\end{aligned} \tag{3.39}$$

donde $u_e(t)$, como ya se dijo, representa un "control.en pre-adelanto del filtro, y B_e una matriz de dirección para esa señal y de dimensión apropiada. Esta señal de control se obtendrá a partir del post-filtro.

Como consecuencia, la dinámica del error de estimación $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ corresponde a

$$\begin{aligned}\dot{e}_x(t) &= (A - DC_2)e_x(t) + (B_1 - DD_v)v(t) + B_eu_e(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i(t)\\ \eta_z(t) &= C_1e_x(t).\end{aligned} \tag{3.40}$$

Podemos notar que si $B_e = -(B_1 - DD_v)$ y $u_e = v$, se logra desacoplar (rechazar) completamente la perturbación. La reconstrucción de v se puede obtener a partir de (3.38), si, por ejemplo, consideramos el problema de estimación óptima con $u(t) = 0$ y en ausencia de fallas, de modo que si $V = D_v^TD_v$ es no singular, entonces, por la dinámica inversa, esto es,

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= (A + B_1V^{-1}D_v^TC_2)\zeta(t) - B_1V^{-1}D_v^Ty(t)\\ u_e(t) &= V^{-1}D_v^TC_2\zeta(t) - V^{-1}D_v^Ty(t);\end{aligned}$$

donde $u_e(t)$ representa, de este modo, un estimado de $v(t)$. Así, es posible alcanzar un excelente rechazo de perturbación y es la idea que se persigue con la implementación del post-filtro. Indudablemente que debemos abordar el problema completo en presencia de la señal de control y las posibles fallas.

Sea la innovación de la salida medida $y(t)$ defina por

$$\begin{aligned}e_y(t) &= y(t) - C_2\hat{x}(t)\\ &= C_2e_x(t) + D_vv(t);\end{aligned}$$

y consideremos, ahora, la dinámica del post-filtro como

$$\mathcal{F}_p\begin{cases}\dot{\zeta}(t) = F\zeta(t) + Ge_y(t)\\ u_e(t) = H\zeta(t) + Je_y(t),\end{cases} \tag{3.41}$$

C.C.Reconocimiento

donde F, G, H y J son matrices de dimensiones apropiadas a ser diseñadas.

En lazo cerrado

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{e}_x(t) & = & (A - DC_2 + B_eJC_2)e_x(t) + B_eH\zeta(t) + (B_1 - DD_v + B_eJD_v)v(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i(t) \\ \dot{\zeta}(t) & = & GC_2e_x(t) + F\zeta(t) + GD_vv(t) \\ \eta_z(t) & = & C_1e_x(t). \end{array}\right.$$

Como vemos, esto permite una solución más general en el entendido de que podemos seleccionar B_e y D, ya que está permitido, y seguidamente calcular F, G, H y J de tal manera que

$$\left(\begin{array}{cc} A - DC_2 + B_eJC_2 & B_eH \\ GC_2 & F \end{array}\right)$$

sea asintóticamente estable y que $||H_{\eta_z v}||_\infty < \gamma$. Con $B_e = 0$ se llega al caso particular presentado anteriormente. Obviamente que $D = 0$, también puede admitir soluciones.

En definitiva, el problema planteado en este momento es el diseño del filtro $\mathcal{F}_p$, el cual genera a u_e. A partir de la innovación de la salida medida y de (3.40) se obtiene el siguiente sistema dinámico:

www.bdigital.ula.ve

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{e}_x(t) & = & (A - DC_2)e_x(t) + (B_1 - DD_v)v(t) + B_eu_e(t) + \sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i(t) \\ \eta_z(t) & = & C_1e_x(t) \\ e_y(t) & = & C_2e_x(t) + D_vv(t); \end{array}\right. \tag{3.42}$$

para el cual debemos diseñar un control u_e, vía la salida medida e_y, de tal manera que el efecto de la perturbación a la salida controlada e_z, sea mínimo. Este es un problema típico de control óptimo en $\mathcal{H}_\infty$, ver la Sección 1.4.2. La solución del problema viene a través de la realimentación dinámica de la salida medida, y cúyo "controladorresultante, un controlador dinámico, es precisamente el post-filtro requerido. Así, el problema de filtraje óptimo en $\mathcal{H}_\infty$ se transforma en un problema de control óptimo en $\mathcal{H}_\infty$.

Con esta formulación, la función de transferencia $H_{\eta_z v}(s)$, resulta ser

$$H_{\eta_z v}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} A - DC_2 + B_eJC_2 & B_eH \\ GC_2 & F \end{array}\right) & \left(\begin{array}{c} B_1 - DD_v + B_eJD_v \\ GD_v \end{array}\right) \\ \hline (C_1 \quad 0) & 0 \end{array}\right].$$

El procedimiento general para llegar hasta $\mathcal{F}_p$ es como sigue:

- Diseñar o seleccionar D.

C.C.Reconocimiento

- Luego se diseña $\mathcal{F}_p$, considerando un B_e de forma que la solución al problema de control sea factible. $\mathcal{F}_p$ se obtiene como solución de un control óptimo en $\mathcal{H}_\infty$ para el sistema dado en (3.42).

La Figura 3.13 muestra esquemáticamente la combinación resultante.

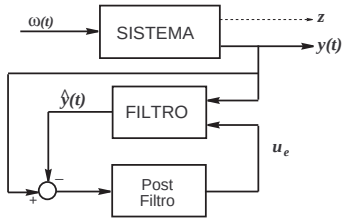


Figura 3.13: Esquema de post-filtraje.

Como en la fase de diseño no han intervenido las fallas, entonces, $||H_{\eta_z \nu_i}||_\infty, \quad i = 1, \ldots, f$, las funciones de transferencia del error de estimación respecto de las fallas, se preserva.

En el caso particular que nos compete, donde se requiere la detección y la separación de las fallas, el procedimiento es el siguiente:

www.bdigital.ula.ve

1. Seleccionar D de manera de asignar las fallas a direcciones particulares asociadas a la salida de la dinámica del error. Esto se logra mediante la posible diagonalización de la matriz dinámica del error $A - DC_2$, por lo que puede resultar en una matriz no estable.

2. Seleccionar la matriz B_e. En primer lugar, ella debe permitir la factibilidad del problema. De manera que, en principio, se debe corresponder a la dirección resultante de las perturbaciones y de las direcciones de fallas que estén en el sub-espacio imagen de dicha dirección de las perturbaciones.

3. Resolver el problema de control óptimo en $\mathcal{H}_\infty$ para el sistema (3.42).

Comentario 3.2

- *Para el caso $D_v = 0$, como es de esperarse, el diseño convencional (Teorema 3.2), y el planteamiento propuesto generan resultados similares, pero para esta situación, se recomienda aplicar los resultados de [96] donde se tiene pleno rechazo de las perturbaciones.*

- *El mejor de los casos se dá cuando las direcciones de las perturbaciones y de las fallas son linealmente independientes.*

C.C.Reconocimiento

La solución del problema de "control"se puede obtener por distintas vías, incluyendo las que se obtienen a través de las LMI's, ver la Sección 1.4.2.3.

3.6.2. Ejemplo Numérico

Sea el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & -102 & 0 \\ 181 & -171 & 0 \\ 0 & -1{,}12 \times 10^{-2} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}44 \\ 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 102 \\ 163 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 181 \\ 0 \end{pmatrix} \nu_1 \\
y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}978 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}978 \end{pmatrix} \nu_2;
\end{aligned}$$

el cual representa el modelo lineal de un actuador de turbina diesel, [7]. Dos posibles fallas son consideradas: falla en el actuador y falla en sensor.

En este caso se asume que:

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}978 \end{pmatrix} x.$$

De la primera fase del diseño se obtiene D, el cual resulta ser:

www.bdigital.ula.ve

$$D = \begin{pmatrix} -102 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1{,}12 \times 10^{-2} & 10 \end{pmatrix};$$

a objeto de que el sistema dinámico para el error sea

$$\begin{aligned}
\dot{e}_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 181 & -171 & 0 \\ 0 & 0 & -9{,}78 \end{pmatrix} e_x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}44 \\ 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 181 \\ 0 \end{pmatrix} \nu_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}978 \end{pmatrix} \nu_2 + B_e u_e \\
e_z &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}978 \end{pmatrix} e_x \\
e_y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}978 \end{pmatrix} e_x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}978 \end{pmatrix} \nu_2
\end{aligned}$$

Se puede observar que a cada salida se le ha asociado una falla de manera de procurar la separabilidad. Para el resolver el problema de "control"se asume $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Seleccionando B_e como

$$B_e = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

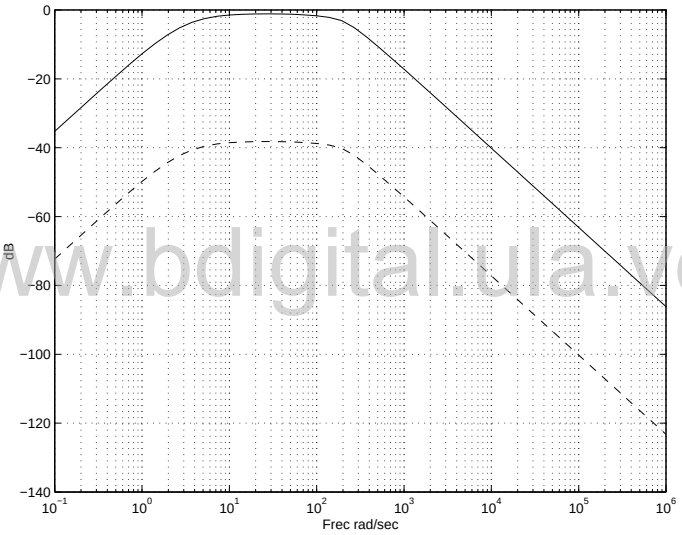
C.C.Reconocimiento

mediante el control robusto basado en LMI, (ver la Sección 1.4.2.3), se obtiene:

$$F = \begin{pmatrix} -160{,}03 & 256{,}28 & 0 \\ -92{,}72 & -90{,}59 & 0 \\ 0 & 0 & -175{,}07 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 54{,}44 & 0 \\ 165{,}66 & 0 \\ 0 & 134{,}82 \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} -21{,}21 & -13{,}70 & 0 \end{pmatrix} \quad J = 0.$$

La Figura 3.14 muestra la respuesta frecuencial de la función de transferencia del error de la salida respecto a la falla en el actuador y a la señal de perturbación. Si bien no se hizo consideración en un cierto rango de frecuencia de interés en la solución del problema, tal objetivo se puede incorporar fácilmente. Se puede apreciar la sensibilidad del filtrado ante la falla en relación a la perturbación.



www.bdigital.ula.ve

Figura 3.14: Diagrama de Valores Singulares: $H_{e_z\nu_1}$ (solid line), $H_{\eta_z v}$ (dotted line).

En la Figura 3.15 se muestran los errores de la salida conjuntamente con la señal de perturbación y la presencia de las fallas. En la Figura 3.15 (a) se muestra la señal de perturbación y la falla en el actuador, la cual tiene una presencia a partir de $t = 9s$. Es evidente la fuerte presencia de la señal de ruido.

La falla en el sensor toma presencia partir de $t = 16s$. Notablemente, en la Figura 3.15 (b), se aprecia que cada salida del error está asociada a cada falla de manera que se logra la separabilidad para el diagnóstico de los elementos que fallan, de igual manera, el efecto de la presencia de la perturbación es minimizado, como se puede observar en la salida del error antes de que ocurra la falla en el actuador.

C.C.Reconocimiento

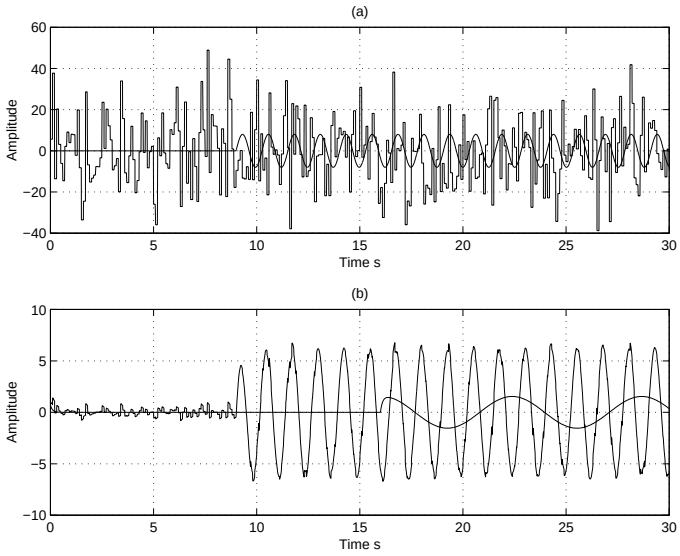


Figura 3.15: Respuestas del filtro a las señales de perturbación y fallas.

Así, se puede concluir que esta estrategia de diseño de filtros robustos de detección de fallas basados en el control en $\mathcal{H}_\infty$ satisface los requerimientos para distinguir la presencia de fallas en condiciones adversas de entradas ruidosas. El método se establece en dos etapas: la primera es la construcción de un observador de estados cúya ganancia se diseña en procura de separar las fallas y se incorpora una señal "control.en pre-adelanto. En la segunda etapa se diseña un post-filtro mediante la solución de un problema de control robusto en $\mathcal{H}_\infty$, el cual genera la señal de "control". Con la solución del problema de control se alcanza la estabilidad asintótica de la dinámica del error y se minimiza el efecto de las señales de perturbación externa. Cualquier método de síntesis de controladores puede ser aplicado, incluyendo las LMI's, (ver la Sección 1.4.2.3).

www.bdigital.ula.ve

3.7. Conclusiones

La detección robusta de fallas se refiere a la generación de residuos para procesos con modelos inciertos y sometidos a perturbaciones externas. Los residuos son susceptibles a la presencia de fallas, minimizándose los efectos de las señales de perturbación e incertidumbres. En tal sentido se han presentado condiciones para la detección robusta de fallas.

Sobre la base de observadores de estados la detección y separación robusta de fallas se obtiene por el desacoplamiento de las perturbaciones en el error de estimación, lo cual

C.C.Reconocimiento

establece condiciones geométricas particulares.

Las condiciones anteriores conllevan a la construcción de filtros de DDF basados en observadores de entrada desconocida. Así, se ha presentado una técnica de diseño de filtros basados en dichos observadores. La extensión de los observadores de entrada desconocida ha permitido desarrollar una método de desacoplamiento de utilizando derivadas de salidas referenciales. Las condiciones en este caso son más débiles.

Una visión más general del problema de detección robusta de fallas se ha establecido mediante su relación con el filtraje robusto. Se busca caracterizar los filtros que permiten una alta sensibilidad a las fallas y al mismo tiempo minimizar el efecto de las señales de perturbación.

Así, se ha presentado una técnica para el rechazo absoluto de las perturbaciones, bajo ciertas condiciones geométricas, y permitiendo la detección robusta de fallas. El método se base en los observadores generalizados de Luenberger.

Igualmente, en los casos donde las condiciones no permiten el rechazo de las perturbaciones, se ha presentado un método de diseño de filtros de DDF basado en el control óptimo $\mathcal{H}_\infty$. La ley de "control" se obtiene mediante la solución de un problema de control en $\mathcal{H}_\infty$. Ella permite la detección de las fallas al minimizarse el efecto de las perturbaciones sobre los residuos.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Parte III

Detección y Diagnóstico de Fallas: Método basado en Modelos de Conocimientos

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Capítulo 4

Detección y Diagnóstico de Fallas y Redes Neuronales

En este capítulo se presenta el problema de detección y separación de fallas desde el punto de vista de modelos de conocimiento. En particular, se estudian las técnicas para la síntesis de filtros de detección y diagnóstico de fallas en los sistemas dinámicos a través de redes neuronales.

www.bdigital.ula.ve

4.1. Introducción

Una de las metodologías para la generacin de residuos en el problema de detección de fallas consiste en utilizar *modelos cualitativos*, esto es, modelos basados en conocimientos (redes neuronales, lógica difusa, algoritmos genéticos, etc.). Estos métodos se caracterizan en que los modelos de los procesos representan un mapa de los comportamientos de entrada-salida.

Para el diagnóstico de las fallas los residuos son procesados mediante el razonamiento heurístico, mismo que se puede implementar con las mismas técnicas señales anteriormente.

En el caso particular de las *Redes Neuronales* (RN), esta técnica ha sido ampliamente utilizada en diversos problemas del ambiente industrial, [1]. Desde el punto de vista de los sistemas de control, las RN se pueden utilizar para la identificación de procesos, obtención de modelos inversos, síntesis de controladores, entre otras aplicaciones, [104].

C.C.Reconocimiento

La naturaleza del problema de DDF permite enfocar métodos y técnicas para la construcción de filtros basados en RN. Esto será abordado en lo que continua.

4.2. Redes Neuronales Artificiales

Las redes neuronales artificiales constituyen una rama de la Inteligencia Artificial. Con esta técnica se busca emular el funcionamiento de las Redes Neuronales Biológicas en lo relativo al aprendizaje y procesamiento de información. Su desarrollo ha tenido un impacto importante tanto para el área de la computación y sus aplicaciones tecnológicas, como para otras áreas como la fisiología y neurología. Ello ha permitido crear una interrelación muy provechosa en el uso de modelos del funcionamiento cerebral y en la interpretación de procesos asociados con las capacidades de aprendizaje.

Actualmente, el campo de aplicación de las redes neuronales se ha visto ampliamente acrecentado, siendo utilizadas en tareas como: modelado e identificación de sistemas, simulación, control de procesos, predicción, manejo de fallas, reconocimiento de patrones, diagnóstico médico, diseño de sensores virtuales, etc., [1].

www.bdigital.ula.ve

4.2.1. Redes Neuronales Biológicas

Las Redes Neuronales Biológicas son células nerviosas que constituyen los elementos primordiales del sistema nervioso central. El cerebro humano se distingue por poseer billones de tales células nerviosas (alrededor de 10^{11}) y un mayor número de interconexiones (aproximadamente 10^4 conexiones por cada neurona). El proceso de transmisión de información entre las neuronas es de carácter bioquímico y consiste en la manipulación de niveles de sodio o potasio. En general, las neuronas son capaces de recibir y procesar señales provenientes de otras neuronas, generar y conducir pulsos nerviosos y posteriormente retransmitirlos a otras neuronas. Morfológicamente hablando, las neuronas son células que poseen un cuerpo en forma piramidal, esférica o variable de acuerdo a las necesidades fisico-químicas y constan de las siguientes partes:

- **Dendritas:** Son extensiones tubulares de fibras nerviosas que sirven como receptores de los estímulos externos o de la señales emitidas por otras neuronas.

C.C.Reconocimiento

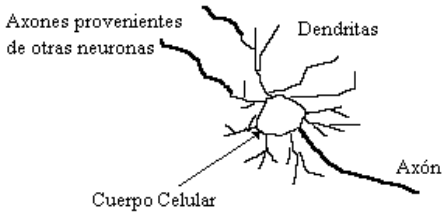


Figura 4.1: Ilustración de una neurona biológica

- **Cuerpo Celular:** También llamado "Soma", es donde se almacena todo el contenido recibido por las dendritas. Si el nivel alcanzado por las señales de entrada combinadas es suficientemente grande, entonces la neurona se activará generando una señal de salida (niveles de Sodio o Potasio), la cual será suministrada a las otras neuronas por medio de axón.

- **Axón:** Son estructuras cilíndricas recubiertas por mielina, que contienen en su interior partes de fibras terminales de respuesta de alta intensidad. Su forma es parecida a la de las dendritas, aunque de mayor grosor y su función es la de suministrar a las demás neuronas los niveles de fluido neuro-transmisor en los momentos en que la neurona se encuentra en estado de excitación.

www.bdigital.ula.ve

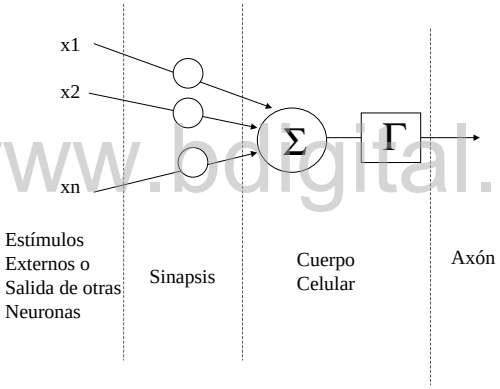
La figura 4.1 ilustra la morfología de una neurona biológica.

A nivel de conocimiento, es importante destacar que las neuronas como elementos de procesamiento no guardan información. La intensidad de las interconexiones entre las neuronas determina las acciones y asociaciones realizadas por la red neuronal. Estas interconexiones entre las salidas de unas neuronas (Axones) y las entradas de otras neuronas (Dendritas) son llamadas *Sinapsis*. Entonces, el proceso de aprendizaje puede ser visto como el ajuste apropiado de las interconexiones sinápticas para guardar el conocimiento y/o asociaciones deseadas a través de la experiencia. Esto explica la relación inversa que existe entre el número de neuronas y el conocimiento que poseen los seres humanos cuando nacen.

C.C.Reconocimiento

4.2.2. Redes Neuronales Artificiales

Las redes neuronales artificiales tratan de emular el comportamiento funcional de las redes biológicas. Para ello, se emplean modelos sencillos del comportamiento neuronal. La figura 4.2 presenta un esquema que contempla la artificialización de las partes fundamentales de la neurona biológica. En este modelo se puede ver un conjunto de entradas que provienen de otras neuronas o de algún estímulo externo, un conjuntos de pesos que indican las fuerzas de las conexiones sinápticas entre las entradas y las dendritas de la neurona; el cuerpo celular de la neurona cuya función es acumular todas las señales ponderadas recibidas; una función "Γ", llamada función de activación, que determina el cambio de estado inhibitorio a excitatorio de la neurona; y por último, el axón encargado de transmitir las salidas de la neurona activada a otras neuronas.



www.bdigital.ula.ve

Figura 4.2: Modelo de Neurona Artificial a partir de neurona biológica

Una función de activación sencilla, que permite asociar un estado inhibitorio o excitatorio de la neurona, es la función signo, descrita como:

$$Sign(x) = \begin{cases} 1 & Si\ x \geq 0 \\ -1 & Si\ x < 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

En general, la función de activación es una función no lineal de su argumento.

La figura 4.3 ilustra un modelo operacional de una neurona artificial. De allí se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$N = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + w_{n+1} b \tag{4.2}$$

$$S = \Gamma(N) \tag{4.3}$$

C.C.Reconocimiento

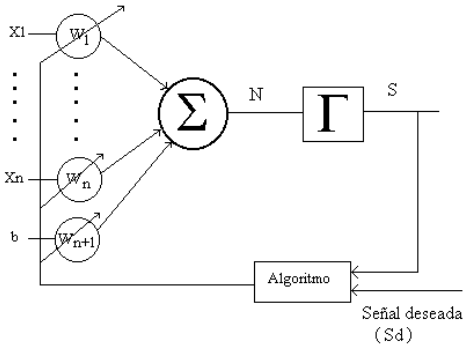


Figura 4.3: Neurona Artificial considerando predisposición a la inhibición

Nótese que en el modelo artificial ha sido incorporado, por medio del término $w_{n+1}b$, el fenómeno de la predisposición a la inhibición, presente en las neuronas biológicas. Para efectos de aplicación práctica de las Redes Neuronales Artificiales, la predisposición antes mencionada no es un valor conocido de antemano y por ende se deja como un término adicional de ajuste de la red neuronal llamado sesgo, desviación o umbral.

Usando notación vectorial para simplificar las expresiones que describen el modelo matemático neuronal, se puede definir un vector X de entradas ampliadas, -(incluye las entradas y un valor constante que define el sesgo o desviación (b) incorporado para modelar la predisposición a la inhibición de la neurona)-, como:

www.bdigital.ula.ve

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ b \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

y un vector de pesos ampliados W, que contiene las intensidades de las interconexiones sinápticas ante todas las entradas incluyendo la asociada al valor de sesgo o desviación.

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ w_{n+1} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

De ese modo, el modelo matemático resultante es el siguiente:

$$N = W^T X \tag{4.6}$$

$$S = \Gamma(N) \tag{4.7}$$

C.C.Reconocimiento

4.2.2.1. Funciones de activación

En la etapa inicial del desarrollo de las redes neuronales artificiales, se utilizó funciones de activación como las funciones de umbral lógico que permitían un funcionamiento neuronal caracterizado por dos estados: inhibitorio y excitatorio.

Con el paso del tiempo se fue introduciendo otros tipos de funciones de activación que facilitaron la redefinición de los valores del estado de operación neuronal y permitieron, en algunos casos, el uso de técnicas matemáticas basadas en derivadas para la corrección del error de aprendizaje. Entre estas funciones de activación se encuentran las funciones Sigmoide Unipolar, Sigmoide Bipolar, Tangente Hiperbólica y Lineal. A continuación se describen gráficamente cada una de estas funciones.

- Función Sigmoide Unipolar:

  La expresión matemática de una Sigmoide Unipolar es la siguiente:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}} \tag{4.8}$$

  donde λ es un parámetro que permite moldear la forma de la curva ilustrada en la figura 4.4. Se ve que para valores negativos del argumento x la función tiende al cero, mientras que para valores positivos tiende al uno, emulando los dos estados de las neuronas.

www.bdigital.ula.ve

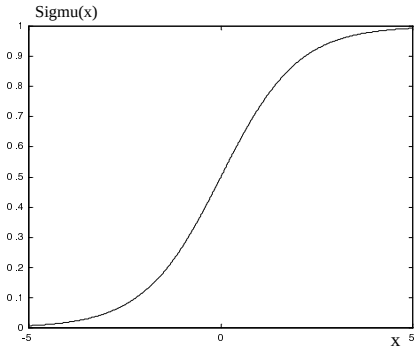


Figura 4.4: Función Sigmoide Unipolar

- Función Sigmoide Bipolar:

  Esta función tiene por expresión matemática la siguiente:

$$\Gamma(x) = \frac{2}{1 + e^{-\lambda x}} - 1 \tag{4.9}$$

C.C.Reconocimiento

donde λ cumple el mismo rol descrito para la función anterior.

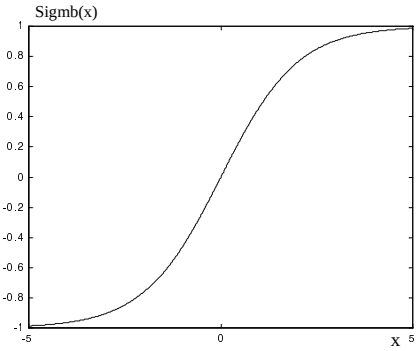


Figura 4.5: Función Sigmoide Bipolar

Su comportamiento puede verse en la figura 4.5. Esta función tiende a -1 para valores negativos del argumento x, mientras que para valores positivos tiende a 1.

- Función Tangente Hiperbólica:

  En este caso, la expresión matemática de la función está descrita por:

$$\Gamma(x) = Tanh(x) \tag{4.10}$$

www.bdigital.ula.ve

y su comportamiento puede apreciarse en la figura 4.6.

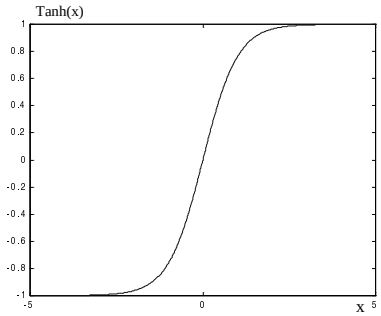


Figura 4.6: Función Tangente Hiperbólica

- Función Lineal:

  La función lineal generalmente utilizada es la descrita por la ecuación:

$$\Gamma(x) = x \tag{4.11}$$

cuyo comportamiento se ilustra en la figura 4.7. En varias configuraciones neuronales las funciones de activación lineales se emplean en las neuronas de la capa de salida.

C.C.Reconocimiento

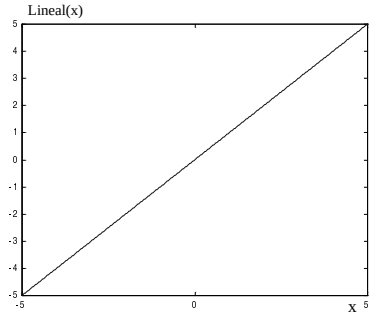


Figura 4.7: Función Lineal

4.3. Modelos Neuronales

A partir de la conceptualización de una red neuronal como un ensamblaje de elementos de procesamiento, llamados neuronas, entonces es posible formular una variedad de modelos neuronales atendiendo a características estructurales, como el arreglo y la naturaleza de las interconexiones entre neuronas y a características asociadas a los algoritmos de entrenamiento, como la forma de ponderar las interconexiones neuronales para lograr un objetivo predefinido. Así, en atención a las características estructurales, las redes neuronales pueden ser clasificadas en dos grandes grupos o modelos: *Modelos de redes en cascada* y *Modelos de redes retroalimentadas*. Por otro lado, dependiendo de la forma de ponderar las interconexiones neuronales, las redes neuronales pueden ser categorizadas en redes entrenadas con supervisión y redes entrenadas sin supervisión.

www.bdigital.ula.ve

4.3.1. Clasificación de las Redes Neuronales por su estructura

La estructura de una red neuronal la conforma su esqueleto o configuración topológica. El diseño de varias estructuras neuronales ha sido realizado emulando aquellas que se consiguen en el sistema nervioso alrededor de los centros receptores de los sentidos. Otras estructuras han sido diseñadas para explotar ciertas funcionalidades asociadas a las capacidades de aprendizaje deseables para el arreglo neuronal. En general, atendiendo a las configuraciones topológicas, los modelos neuronales pueden ser clasificados en modelos en cascada y modelos retroalimentados.

C.C.Reconocimiento

4.3.1.1. Modelos neuronales en cascada

En estas configuraciones las neuronas del arreglo son ordenadas formando capas, cuyas entradas provienen de las salidas de las neuronas de la capa precedente (exceptuando las entradas a las neuronas de la primera capa, que corresponden a los patrones o señales provenientes el fenómeno o proceso bajo consideración), y cuyas salidas van a las neuronas de la capa siguiente. En los modelos de redes en cascada no existen interconexiones entre neuronas pertenecientes a una misma capa ni interconexiones de retroalimentación.

En general, una red neuronal en cascada proporciona una transformación instantánea entre sus entradas y sus salidas; lo cual se traduce en la construcción de mapas estáticos entre un espacio de entrada y uno de salida.

Ejemplos importantes de modelos de redes neuronales en cascada son las redes perceptrónicas multicapas [**?**], las redes de funciones de base radial [**?**] y el modelo de control de articulación cerebelar de Albus [**?**], entre otros. Las Figuras 4.8 y 4.9 ilustran un modelo de red perceptrónica multicapa y un modelo de red de funciones de base radial, respectivamente.

www.bdigital.ula.ve

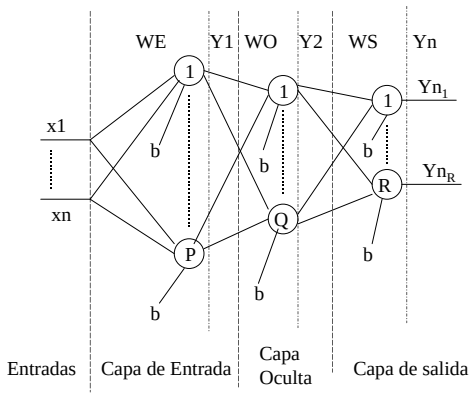


Figura 4.8: Modelo de red perceptrónica multicapas

En la Figura 4.8 las líneas que llegan y las que salen de cada neurona representan los pesos de las interconexiones sinápticas y son denotados por $W1_{ij}$, $W2_{ki}$ y $W3_{rk}$ para referirse a los pesos de las capas de entrada, de la capa oculta y de la capa de salida, respectivamente. Los subíndices identifican los puntos de llegada y de partida de cada peso (p.e. $W1_{ij}$ indica al peso que llega a la neurona i de la capa de entrada y que

C.C.Reconocimiento

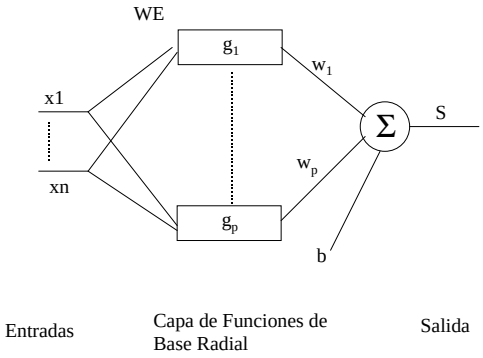


Figura 4.9: Modelo de red de funciones de base radial

proviene de la entrada x_j). Note que $W1$, $W2$ y $W3$ son matrices cuyas dimensiones son $P \times (n+1)$, $Q \times (P+1)$ y $R \times (Q+1)$ respectivamente, donde n es el número de entradas, P es el número de neuronas en la primera capa, Q es el número de neuronas en la capa oculta y R es el número de salidas de la red neuronal.

La línea que parte de b y llega a cada neurona corresponde al valor de umbral o desviación. Las entradas al modelo corresponden al vector $X = [x1, x2, \ldots, xn, b]^T$. Las salidas de la capa de entrada se denotarán con el vector $Y1 = [y1_1, y1_2, \ldots, y1_P]^T$, las salidas de la capa oculta se denotarán con el vector $Y2 = [y2_1, y2_2, \ldots, y2_Q]^T$ y las salidas de la capa de salida se identifican con el vector $S = [s_1, s_2, \ldots, s_R]^T$.

www.bdigital.ula.ve

Note que

$$S = \Gamma_3(W3\ \Gamma_2(W2\ \Gamma_1(W1\ X))) \tag{4.12}$$

donde Γ_1, Γ_2 y Γ_3 son las funciones de activación de la capa de entrada, oculta y de salida respectivamente.

Consideremos ahora la figura 4.9. Sea $X = [x1, x2, \ldots, xn]^T$ el patrón de entrada y sea $W = [w1, w2, \ldots, wp]^T$ el vector de pesos entre las p funciones de base radial y la neurona de salida. Se ha asumido que la función de activación de la neurona de salida es lineal. Note que

$$S(X) = \sum_{i=1}^{p} w_i g_i(X) + w_{p+1} b \tag{4.13}$$

En ésta formulación $\{\ g_i(X),\ \ i = 1, 2, \ldots, p\}$ representa un conjunto de funciones bases

C.C.Reconocimiento

que son linealmente independientes entre si. Por ejemplo

$$g_i(X) = G(\|x - c_i\|), \quad i = 1, 2, \ldots, p \tag{4.14}$$

donde el conjunto de centros $c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p$, deben ser seleccionados apropiadamente.

4.3.1.2. Modelo Neuronales Retroalimentados

En los modelos retroalimentados las salidas de las neuronas en una capa pueden estar interconectadas a las entradas de las neuronas de la misma capa o a entradas de neuronas en capas precedentes. Este hecho le proporciona al arreglo neuronal características de procesamiento dinámico en el sentido de que las salidas de la red dependen no solo de sus entradas en un instante dado, sino también de sus entradas y salidas en instantes anteriores. Así, las transformaciones de un espacio de entrada en otro de salida realizadas con modelos de redes retroalimentadas son de carácter dinámico. Dos ejemplos típicos de modelos de redes retroalimentadas son las redes de Hopfield [**?**] y las redes de Elman [**?**].

Las figuras 4.10 y 4.11 representan modelos neuronales de Hopfield y Elman respectivamente.

www.bdigital.ula.ve

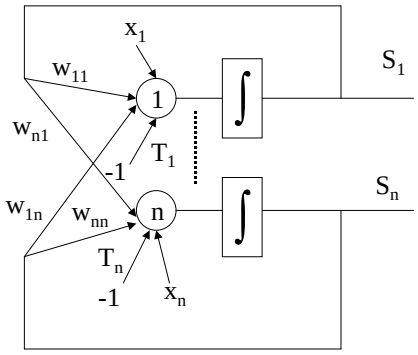


Figura 4.10: Modelo de red de Hopfield

De la figura 4.10 se puede obtener:

$$\frac{dZ}{dt} = \left[\frac{dz_1}{dt}, \frac{dz_2}{dt}, \ldots, \frac{dz_n}{dt}\right]^T \tag{4.15}$$

C.C.Reconocimiento

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_{ij} z_j + x_i - t_i \tag{4.16}$$

$$S_i = \Gamma(z_i); \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.17}$$

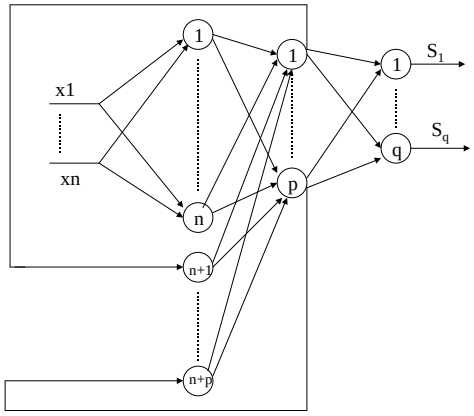


Figura 4.11: Modelo de red de Elman

En relación a la figura 4.11, las salidas $S_i(k),\ i = 1, \ldots, q$, de la red de Elman, son agrupadas en el vector $S(k) = [S_1(k), \ldots, S_q(K)]^T$. Las salidas de los nodos ocultos pueden ser representados por el vector $Y2(k) = [y2_1(k), \ldots, y2_p(k)]^T$. En forma análoga, las salidas de los nodos de la primera capa y de los nodos de contexto pueden ser representados por los vectores: $Y1(k) = [y1_1(k), \ldots, y1_n(k)]^T$ y $Y1^C(k) = [y1_1^C(k), \ldots, y1_p^C(k)]^T$, respectivamente.

Las matrices $W1,\ W2,\ W2^C$ y $W3$ representan los valores de interconexión entre los patrones de entrada y los nodos de la primera capa, las salidas de la primera capa y las entradas de la capa oculta, la salida de los nodos de contexto y las entradas de la capa oculta y las salidas de la capa oculta y las entradas de la capa de salida, respectivamente.

Nóte que:

$$S(k) = \Gamma(W3\ Y2(k)) \tag{4.18}$$

$$Y2(k) = \Gamma(W2\ Y1(k) + W2^C\ Y1^C(k)) \tag{4.19}$$

$$Y1(k) = \Gamma(W1\ X(k-1)) \tag{4.20}$$

$$Y1^C(k) = Y2(k-1) \tag{4.21}$$

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

4.3.1.3. Otros modelos neuronales

Cabe destacar que desde el punto de vista del arreglo neuronal existe una variedad de modelos que son el resultado de combinar en una sola estructura arquitecturas de redes en cascada con arquitecturas de redes retroalimentadas. Una característica distintiva de esos modelos neuronales la constituye sus algoritmos de entrenamiento, particularmente por el uso de un proceso de auto-organización que, aparte de los valores de entrada a la red, toma en cuenta parámetros estadísticos de las mismas. Este tipo de modelos se les denomina redes auto-organizables y ejemplos particulares de éstos son los mapas de Kohonen [**?**] y las redes de teoría de resonancia adaptativa de Carpenter - Grossberg (ART-1), [**?**]. Las figuras 4.12 y 4.13 representan un mapa de Kohonen y una red ART-1, respectivamente.

www.bdigital.ula.ve

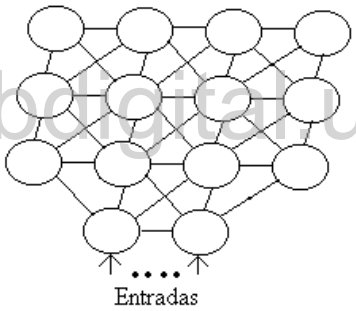


Figura 4.12: Modelo de red auto-organizable de Kohonen

4.3.2. Clasificación de las Redes Neuronales por su entrenamiento

Desde el punto de vista de los algoritmos de entrenamiento, las redes neuronales pueden ser categorizadas entre aquellas que son entrenadas con supervisión y las que no lo son. Esta categorización es válida irrespectivamente de que los patrones de entrenamiento sean señales contínuas o discretas.

Una categoría diferente de redes neuronales puede hacerse para referirse a aquellas que

C.C.Reconocimiento

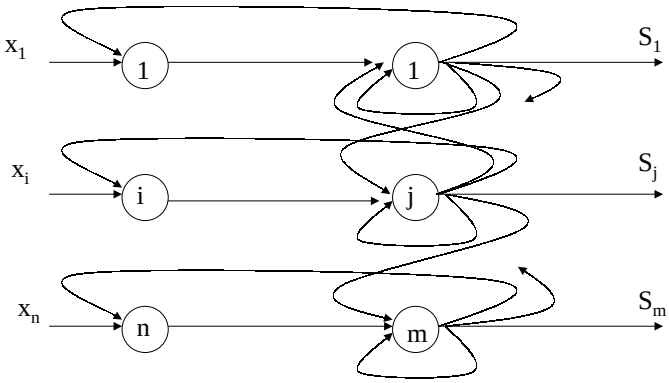


Figura 4.13: Modelo de red de Carpenter-Grossberg (ART-1)

son entrenadas usando reforzamiento [**?**]; donde en vez de un supervisor, se emplea un "crítico"para evaluar el aprendizaje de la red.

Las figuras 4.14 y 4.15 ilustran las categorías esenciales de redes entrenadas con y sin supervisión, respectivamente.

www.bdigital.ula.ve

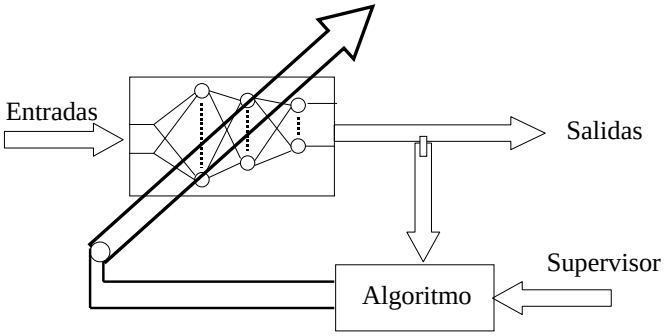


Figura 4.14: Red Neuronal entrenada con supervisión

Los algoritmos de entrenamiento pueden ser agrupados dependiendo de los fundamentos en los cuales basan su construcción a objeto de lograr el aprendizaje de la red neuronal. Por ejemplo, el aprendizaje inspirado en fundamentos neuro-biológicos puede ser logrado

C.C.Reconocimiento

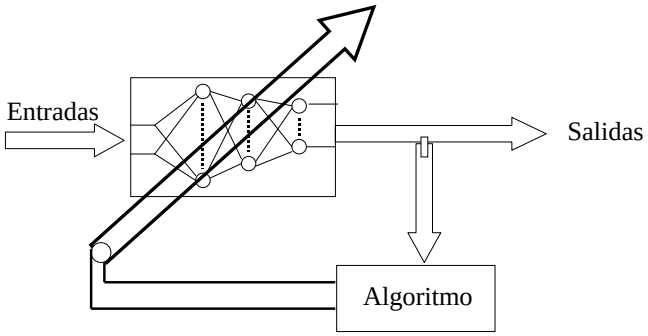


Figura 4.15: Red Neuronal entrenada sin supervisión

usando la regla de Hebb o la regla de aprendizaje competitivo [**?**]. Por otro lado, también es posible forzar el aprendizaje en una red neuronal fundamentándolo en consideraciones matemáticas sobre una función de error [**?**] o realizando analogías con ideas tomadas de la termodinámica y la teoría de la información, como en el aprendizaje de Boltzmann [**?**]. La figura 4.16 ilustra una clasificación de los algoritmos de entrenamiento dependiendo de su fundamentación conceptual.

www.bdigital.ula.ve

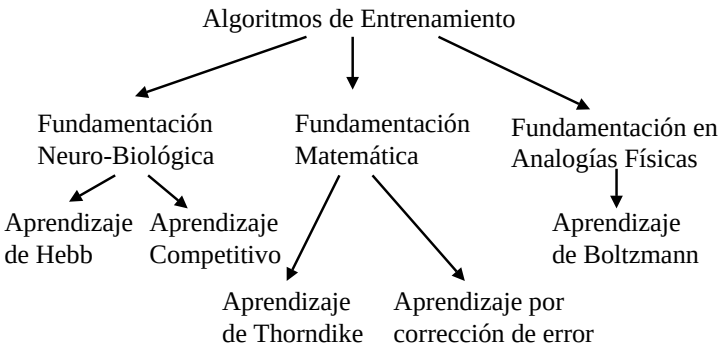
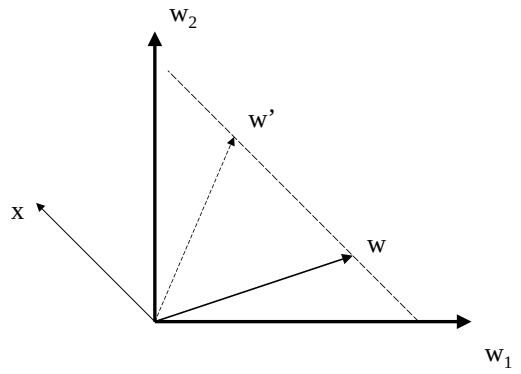


Figura 4.16: Clasificación de los Algoritmos de Entrenamiento basados en su fundamentación conceptual

C.C.Reconocimiento

Sin importar el ambiente de aprendizaje utilizado y de su fundamentación conceptual, la mayoría de los algoritmos de entrenamiento pueden ser geométricamente interpretados en términos de producir una adaptación de los pesos de interconexión de la red en la dirección del patrón de entrenamiento presentado a la entrada de la misma. La figura 4.17 ilustra geométricamente la idea de adaptación de los pesos de interconexión de la red.



www.bdigital.ula.ve

Figura 4.17: Ilustración geométrica de la idea de adaptación de pesos de interconexión

Esta idea de adaptación puede ser formulada en términos matemáticos en la forma siguiente [**?**], [**?**]: Sea $W_i = [W_{i1}, W_{i2}, \ldots, W_{in}]^T$ el vector de pesos que llegan a la i-ésima neurona y $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ el patrón de entrada, entonces el ajuste del vector W_i que debe ser realizado en el k-ésimo paso de entrenamiento puede ser formulado como:

$$\triangle W_i(k) = \alpha f_a(W_i(k), X(k), Sd_i(k))X(k) \tag{4.22}$$

donde $\triangle W_i(k) = W_i(k+1) - W_i(k)$ y α es un parámetro de diseño que determina la tasa de aprendizaje. Por otro lado, $f_a(W_i(k), X(k), Sd_i(k))$ representa una función de aprendizaje que depende de los valores presentes del vector de pesos W_i, del patrón de entrada X y, en caso de existir, de la i-ésima señal de supervisión Sd_i.

La versión en tiempo contínuo de la fórmula (4.22) es la siguiente:

C.C.Reconocimiento

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \alpha f_a(W_i(t), X(t), Sd_i(t))X(t) \tag{4.23}$$

4.3.3. Algunos algoritmos de entrenamiento

4.3.3.1. Algoritmo de Hebb y Hebb modificado

En relación a la estructura general para los algoritmos de entrenamiento representado por la ecuación (4.22), en el algoritmo de Hebb la función de aprendizaje está definido como:

$$f_a(W_i, X, Sd_i) = f_a(W_i, X) = S_i \tag{4.24}$$

donde S_i es la salida de la i-ésima neurona. De este modo, el incremento de los valores de interconexión de los pesos que llegan a la i-ésima neurona está dado por:

$$\triangle W_i(k) = \alpha S_i(k)X(k) \tag{4.25}$$

www.bdigital.ula.ve

Note que la j-ésima interconexión del vector $W_i(k)$ puede expresarse como:

$$\triangle w_{ij}(k) = \alpha S_i(k)x_j(k) \tag{4.26}$$

Una modificación del algoritmo de Hebb, propuesta por Grossberg [1], permite la normalización de los valores de interconexión en cada presentación de un patrón de entrenamiento, y es la siguiente:

$$\triangle W_i(k) = -\beta W_i(k) + \alpha S_i(k)X(k) \tag{4.27}$$

o bien, en forma particularizada

$$\triangle w_{ij}(k) = -\beta w_{ij}(k) + \alpha S_i(k)x_j(k) \tag{4.28}$$

donde β es un término de memoria cuyos valores están circunscritos al intervalo (0,1).

La versión a tiempo contínuo del algoritmo modificado de Hebb es la siguiente:

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = -\beta W_i(t) + \alpha S_i(t)X(t) \tag{4.29}$$

C.C.Reconocimiento

4.3.3.2. Algoritmo del Vencedor toma todo

Este algoritmo permite forzar el aprendizaje de características estadísticas de los patrones de entrada a la red. Constituye un tipo de aprendizaje competitivo que puede ser implantado en los términos siguientes:

La función de aprendizaje f_a es de la forma

$$f_a(W_i, X, Sd_i) = f(W_i, X) = 1 \tag{4.30}$$

El incremento de los valores de inteconexión que llegan a la i-ésima neurona está dado por:

$$\triangle W_i(k) = -\beta W_i(k) + \alpha X(k) \tag{4.31}$$

o bien en forma particularizada, la j-ésima interconexión está dada por:

$$\triangle w_{ij}(k) = -\beta w_{ij}(k) + \alpha x_j(k) \tag{4.32}$$

www.bdigital.ula.ve

La i-ésima neurona es considerada como "ganadora.entre el conjunto de p neuronas del arreglo toda vez que la siguiente condición es satisfecha:

$$W_i^T(k)X(k) = \max_{j=1,2,\ldots,p}(W_j^T(k)X(k)) \tag{4.33}$$

La figura 4.18 ilustra el proceso de competencia para la adaptación de los valores de interconexión de la neurona ganadora.

En otro orden de ideas, existe un número de algoritmos de entrenamiento neuronal donde la adaptación de los valores de interconexión de la red es realizada resolviendo un problema de optimización sobre una función o funcional de error entre la salida deseada (Sd) y la salida del arreglo neuronal (S). Vale decir que estos algoritmos de entrenamiento operan en un ambiente supervisado. Partiendo desde la regla del perceptrón de Rosenblatt [**?**] y pasando por el algoritmo de Widrow-Hoff [**?**] hasta llegar a la regla Delta Generalizada, todos estos algoritmos procuran disminuir el error de aprendizaje de la red por adaptación de los valores de interconexión en la presencia de patrones de entrenamiento. En la actualidad han sido reportados en la literatura un sin número de modificaciones y

C.C.Reconocimiento

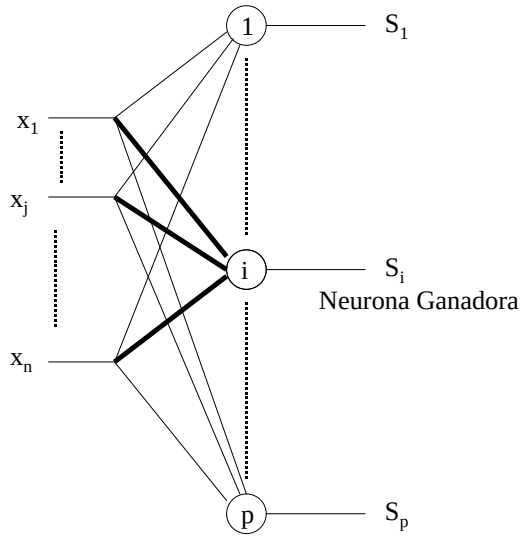


Figura 4.18: Ilustración del algoritmo el Vencedor toma todo

versiones variadas de implantar aprendizaje artificial recurriendo a la idea de retropropagar el error de salida de la red [?], [?],[?],[?].

Las siguientes subsecciones sumarizan los aspectos esenciales de la regla del perceptrón de Rosenblatt, la regla de Widrow-Hoff, la Regla Delta y la Regla Delta Generalizada o Algoritmo de Retropropagación del error.

www.bdigital.ula.ve

4.3.3.3. Perceptrón de Rosenblatt

En el algoritmo para el perceptrón diseñado por Rosenblatt las señales de entrada y de supervisión de la red son de naturaleza bipolar, es decir, sus valores son iguales a 1 o -1. La función de aprendizaje f_a es igual a:

$$f_a(W_i, X, Sd) = \frac{1}{2}(Sd - S) \tag{4.34}$$

y la adaptación de los valores de interconexión se realiza por medio de la ecuación:

$$\triangle W_i(k) = \frac{1}{2}\alpha(Sd(k) - S(k))X(k) \tag{4.35}$$

o correspondientemente:

$$\triangle w_{ij}(k) = \frac{1}{2}\alpha(Sd_i(k) - S_i(k))x_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, R \tag{4.36}$$

Es de hacer notar que por tratarse de señales bipolares binarias el valor de la función de aprendizaje será igual a ± 2, excepto cuando Sd_i coincide con S_i, cuyo valor será igual

C.C.Reconocimiento

a cero (por ende no será necesario realizar cambio en el valor de las interconexiones). Cuando la función de activación "Γ"de la figura 4.3 es igual a "$\Gamma(N) = Sign(N)$"se obtiene el modelo del perceptrón de Rosenblatt.

4.3.3.4. Algoritmo de Widrow-Hoff

En el algoritmo de entrenamiento de Widrow-Hoff, la adaptación de los valores de interconexión se realiza resolviendo el problema de minimizar un índice igual al cuadrado de las desviaciones entre la salida deseada "Sdz la suma lineal de las entradas ponderadas a la neurona. Así, la función de aprendizaje "f_a"queda definida como:

$$f_a(W_i, X, Sd) = Sd - W_i^T X \tag{4.37}$$

mientras que la adaptación de los valores de interconexión se realiza usando la ecuación

$$\bigtriangleup W_i(k) = \alpha(Sd_i - W_i^T(k)X(k))X(k) \tag{4.38}$$

En forma individual, cada peso es adaptado por medio de la fórmula

$$\bigtriangleup w_{ij}(k) = \alpha(Sd_i - W_i^T(k)X(k))x_j(k) \quad j = 1, 2, \ldots, R. \tag{4.39}$$

www.bdigital.ula.ve

El algoritmo de Widrow Hoff también es conocido como la regla de aprendizaje por mínimos cuadrados.

4.3.3.5. La Regla Delta

El aprendizaje neuronal usando la regla Delta constituye una generalización del algoritmo de Widrow-Hoff, en el sentido de que la adaptación de los valores de interconexión se realiza resolviendo el problema de minimizar las desviaciones cuadráticas de la salida deseada "Sd_iz la salida no lineal de la neurona (la salida de la función de activación). De este modo, el índice o funcional de costos a ser minimizado está dado por:

$$J(e(k)) = \frac{1}{2}[Sd_i - \Gamma(W_i^T(k)X(k)]^2 \tag{4.40}$$

La minimización de este índice puede realizarse en forma recursiva utilizando un descenso en la dirección contraria al gradiente de $J(e(k))$ con respecto al vector $W_i(k)$. Esto es:

$$\bigtriangleup W_i(k) = -\alpha(\nabla_W J(e(k)) \tag{4.41}$$

C.C.Reconocimiento

En estas circunstancias, la función de aprendizaje f_a resultante está dada por:

$$f_a(W_i, X, Sd_i) = -[Sd_i - \Gamma(W_i^T X)]\frac{\partial \Gamma(W_i^T X)}{\partial W_i} \tag{4.42}$$

En definitiva, la adaptación de los valores de interconexión se obtiene por medio de la ecuación

$$\triangle W_i(k) = \alpha[Sd_i - \Gamma(W_i^T X)]\frac{\partial \Gamma(W_i^T X)}{\partial W_i^T X}X(k) \tag{4.43}$$

En forma individualizada, cada peso es actualizado usando la fórmula

$$\triangle w_{ij}(k) = \alpha[Sd_i - \Gamma(W_i^T X)]\frac{\partial \Gamma(W_i^T X)}{\partial W_i^T X}x_j(k) \qquad j = 1, 2, \ldots, R \tag{4.44}$$

4.3.3.6. La Regla Delta Generalizada

La extensión de la Regla Delta para realizar el entrenamiento de modelos neuronales arreglados en capas, sin retroalimentación entre sus elementos constituyentes, es llamada la Regla Delta Generalizada o Algoritmo de Retropropagación del error. Su fundamentación matemática es la misma de la Regla Delta: Adaptar los valores de interconexión de la red realizando descenso por gradiente sobre un índice cuadrático del error de aprendizaje de la red. El enunciado anterior, significa que, dependiendo del número de capas neuronales, será necesario establecer reglas de adaptación para los valores de interconexión que llegan a cada una de las capas. Así, en un arreglo de dos capas como el ilustrado en la figura 4.19, los valores de interconexión etiquetados con las expresiones Wm_{ij} y Wn_{kl} deberán ser adaptados usando las siguientes ecuaciones:

$$\triangle Wn(k) = -\alpha_1 \frac{\partial J(e)}{\partial Wn(k)} \tag{4.45}$$

$$\triangle Wm(k) = -\alpha_2 \frac{\partial J(e)}{\partial Wm(k)} \tag{4.46}$$

donde

$$J(e) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{Q}(Sd_i - S_i)^2 \tag{4.47}$$

En la ecuación (4.47) S_i representa la i-ésima salida del arreglo neuronal, mientras que Sd_i corresponde a la i-ésima señal de supervisión.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

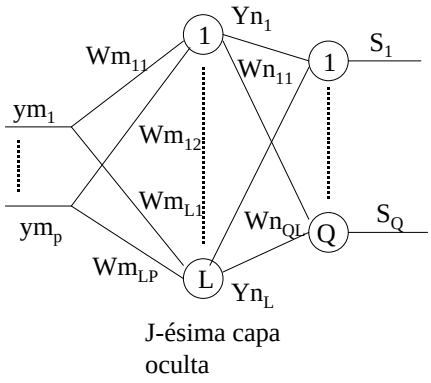


Figura 4.19: Arreglo de dos capas de Neuronas

Realizadas las operaciones de derivación sugeridas en las ecuaciones (4.45) y (4.46) y tomando en cuenta funciones de activación de tipo sigmoidal, es relativamente sencillo corroborar que las funciones de aprendizaje $f_a(Wn, Yn, Sd)$ y $f_a(Wm, Ym, Sd)$ son los siguientes:

www.bdigital.ula.ve

$$f_a(Wn, Yn, Sd) = \frac{1}{2}(Sd_k - S_k)(1 - S_k^2) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, Q \tag{4.48}$$

$$f_a(Wm, Ym, Sd) = \frac{1}{2}(1 - yn_j^2) \sum_{i=1}^{Q} f_a(Wn, Yn, Sd) Wn_{ij} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, L \tag{4.49}$$

En definitiva, las ecuaciones para la adaptación de los valores de interconexión resultantes son las siguientes:

$$\triangle Wn(k) = \alpha_1 f_a(Wn, Yn, Sd) Yn^T(k) \tag{4.50}$$

$$\triangle Wm(k) = \alpha_2 f_a(Wm, Ym, Sd) Ym^T(k) \tag{4.51}$$

Los valores de α_1 y α_2, que definen la tasa de aprendizaje, deben ser seleccionados pertenecientes al intervalo (0,1).

4.4. Algoritmo de Retropropagación

El Algoritmo de retropropagación es el más utilizado para el entrenamiento de las redes neuronales en cascada. Dicho algoritmo permite la generación de mapas entrada-salida

C.C.Reconocimiento

a partir de datos experimentales. En él los patrones de entrenamiento son presentados en forma secuencial. Si un patrón es presentado a la red y su clasificación o asociación resulta errónea, los pesos de la red serán ajustados de manera de reducir una funcional de costos generada a partir del error cuadrático medio existente entre la salida deseada y la salida neuronal. A este error se le llama "error de aprendizaje". Generalmente este ajuste de los pesos se llevará a cabo hasta que el error cuadrático medio de todos los patrones se encuentre por debajo de un nivel máximo fijado por el usuario, de acuerdo a los niveles de precisión requeridos según la aplicación a desarrollar.

Durante la fase de entrenamiento la red realiza dos tareas: Una tarea de presentación de los patrones en forma de cascada directa, con la cual se obtienen las salidas neuronales a partir de las entradas presentadas a la red neuronal. La otra tarea es la de actualización de los pesos, la cual se realiza desde atrás hacia adelante, ajustando primero los pesos de la capa de salida, pasando por las capas ocultas y por último los pesos de la capa de entrada. Este proceso se hace de esta manera debido a la dependencia que tienen los pesos de todas las capas sobre las salidas de la red neuronal. Ya que el algoritmo de ajuste de los pesos está basado en minimización de una funcional de costo que depende del error de aprendizaje, y para ello se utiliza técnicas basadas en derivadas; entonces al aplicar la regla de la cadena sucesivamente se puede obtener los gradientes de los pesos de cada capa sobre la funcional de costo.

www.bdigital.ula.ve

4.4.1. Regla Delta para un nivel de múltiples perceptrones contínuos

El caso más sencillo del algoritmo de entrenamiento de retropropagación lo constituye la llamada "'Regla Delta", la cual es la generalización del algoritmo para perceptrones contínuos arreglados en una capa.

En este caso se considerará una red perceptrónica de una capa que constará de "R"neuronas. Así, nuevamente se tendrá una matriz de pesos que será de dimensión $(n+1) \times R$ debido a las n entradas, la desviación y las R neuronas de salida.

Utilizando notación matricial se obtiene que la salida neuronal S puede ser expresada

C.C.Reconocimiento

como:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_R \end{bmatrix} = \Gamma[WY] \tag{4.52}$$

donde:

$$Y = [x1, x2, \ldots, xn, b]^T \tag{4.53}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1n+1} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{R1} & w_{R2} & \ldots & w_{Rn+1} \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

y el operador de funciones de activación $\Gamma[.]$ es la matriz diagonal

$$\Gamma[.] = \begin{bmatrix} f(.) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f(.) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & f(.) \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

www.bdigital.ula.ve

La salida deseada será el vector:

$$Sd = \begin{bmatrix} Sd_1 \\ Sd_2 \\ \vdots \\ Sd_R \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

La expresión para la funcional de costo será generalizada para incluir los errores cuadráticos de todas las salidas. Esto es, para un patrón específico se obtiene:

$$J(E_p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{R}(Sd_i - S_i)^2 = \frac{1}{2}\|Sd - S\|^2 \tag{4.57}$$

El algoritmo general para el ajuste de la matriz de pesos será:

$$w_{ij}(K+1) = w_{ij}(K) + \frac{1}{2}\alpha(Sd_i - S_i)f'(WY)x_j; \quad para\ i = 1, 2, \ldots, n+1; \quad j = 1, 2, \ldots, R \tag{4.58}$$

donde i es el número de la neurona a la cual está conectada el peso a ser ajustado y j es el número de la entrada conectada con el peso.

C.C.Reconocimiento

4.4.1.1. Resumen del Algoritmo de Entrenamiento para una capa de múltiples perceptrones

Dados "P"patrones de entrenamiento

$[X(1), Sd(1); X(2), Sd(2); \ldots; X(P), Sd(P)]$ donde $X(i) \in \Re^n$ y $Sd(i) \in \Re$; $i = 1, 2, \ldots, P$.

Tenemos que el vector de entrada aumentado está dado por:

$$Y(i) = \begin{bmatrix} X(i) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

Se denotará por "K.ªl paso de entrenamiento y por "p.ª un contador que lleva el número de patrones evaluados en cada ciclo.

1. Seleccionar el factor de aprendizaje $\alpha > 0$
2. Inicializar los pesos W con valores aleatorios pequeños. Recordar que $W \in \Re^{(n+1)\times R}$.
3. Inicializar los contadores, la variable de acumulación del error y el error cuadrático medio máximo permitido por ciclo de entrenamiento. $K \leftarrow 1$; $p \leftarrow 1$; $E \leftarrow 0$; $E_{max} > 0$
4. Ciclo de entrenamiento. Se presenta las entradas y se calcula la salida del perceptrón.
   - $Y \leftarrow Y(p)$
   - $Sd \leftarrow Sd(p)$
   - $S = f(W^T Y)$
5. Actualización de los pesos
   - $w_{ij} \leftarrow wij + \frac{1}{2}\alpha(Sd_i - S_i)f'(W^T Y)x_j$
6. Calcular el error del ciclo
   - $E \leftarrow E + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{R}(Sd_i - S_i)^2$
7. Si p=P entonces ir al paso 8, de lo contrario:
   - $p \leftarrow p + 1$

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

- Ir al paso 4.

8. Fin del ciclo de entrenamiento.

   Si $E < E_{max}$ entonces Fin de la sesión de entrenamiento. Se obtiene los valores de los pesos (W) y del número de ciclos (K), de lo contrario:

   - $E \leftarrow 0$
   - $p \leftarrow 1$
   - $K \leftarrow K + 1$
   - Ir al paso 4.

4.4.2. Regla Delta Generalizada

Este algoritmo de entrenamiento es la generalización para redes multicapas de la "Regla Deltaüsada para el entrenamiento de una capa de perceptrones contínuos. Está basado igualmente en un método iterativo que busca minimizar una funcional de costo formada por la suma instantánea de los errores cuadráticos y definida por:

www.bdigital.ula.ve

$$J(e) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{R} e_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{R}(Sd_j - S_j)^2 \tag{4.60}$$

Así, se deben actualizar los pesos de todas las capas para minimizar la funcional de costo. El ajuste de los pesos de las interconexiones sinápticas se hace para cada patrón de entrenamiento presentado a la red y utilizando una expresión en sentido opuesto al gradiente de la funcional en la dirección de cada uno de los pesos. Esta regla se expresa de la siguiente manera:

$$\triangle wi_{jk} = -\alpha \frac{\partial J(e)}{\partial wi_{jk}} \tag{4.61}$$

donde α es la tasa de aprendizaje, i indica la capa donde se van a actualizar los pesos, j y k representan el número de la neurona a la que llega el peso a modificar y la entrada de la cual proviene, respectivamente.

Se puede observar de la ecuación (4.61) que la corrección de los pesos es proporcional al gradiente. Usando la regla de la cadena consecutivamente, se obtiene la siguiente

C.C.Reconocimiento

expresión:

$$\frac{\partial J(e)}{\partial wi_{jk}} = \frac{\partial J(e)}{\partial e_j}\frac{\partial e_j}{\partial Y_j}\frac{\partial Y_j}{\partial (Wi^T Y_k)}\frac{\partial (Wi^T Y_k)}{\partial wi_{jk}} \tag{4.62}$$

donde Wi_{jk} es el peso que conecta la k-ésima señal de entrada con la j-ésima neurona de la i-ésima capa.

Derivando la ecuación (4.60) se obtiene:

$$\frac{\partial J(e)}{\partial e_j} = e_j \tag{4.63}$$

mientras que la derivada del error $e_j = Sd_j - S_j$ con respecto a la salida S_j es:

$$\frac{\partial e_j}{\partial S_j} = -1 \tag{4.64}$$

La derivada de la salida de la capa j con respecto a la suma ponderada de los pesos por las entradas a la misma capa es:

$$\frac{\partial Y_j}{\partial (Wi^T Y_k)} = f_j'(Wi^T Y_k) \tag{4.65}$$

y por último, la derivada de la suma ponderada con respecto a los pesos que se buscan ajustar es:

www.bdigital.ula.ve

$$\frac{\partial (Wi^T Y_k)}{\partial wi_{jk}} = Y_k \tag{4.66}$$

sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación (4.62) se obtiene:

$$\frac{\partial J(e)}{\partial wi_{jk}} = -e_j * f_j'(Wi^T Y_k) * Y_k \tag{4.67}$$

Con lo que se puede definir la *Regla Delta* de la siguiente forma:

$$\bigtriangleup Wi_{jk} = Wi(K+1) - Wi(K) = \alpha * \delta_j * Y_k \tag{4.68}$$

donde "δ_j"queda definida dependiendo de la ubicación de la capa a la cual se le va a actualizar los pesos.

- Si la j-ésima neurona pertenece a la capa de salida entonces:

$$\delta_j = e_j * f_j'(Wi^T Y_k) \tag{4.69}$$

C.C.Reconocimiento

- Si la j-ésima neurona está en las capas intermedias o de entrada, entonces:

$$\delta_j = f'_j(Wi^T Y_k) * \sum_L (\delta_L * wi_{Lj}) \tag{4.70}$$

donde L es el número de neuronas de la siguiente capa con las que está conectada la j-ésima neurona.

El proceso de entrenamiento utilizando la regla delta generalizada consiste en presentar un patrón a la red y calcular las salidas de las neuronas de la primera capa, posteriormente calcular las salidas de las neuronas de las capas escondidas hasta por último obtener las salidas de las neuronas de la capa de salida. En este momento se inicia la fase de actualización de los pesos. Para ello, se calculan las sensibilidades δ_j de cada neurona de la última capa, posteriormente las sensibilidades de la penúltima capa y así sucesivamente hasta obtener las sensibilidades de las neuronas de la capa de entrada. Una vez obtenidas todas las sensibilidades, se utiliza la ley de actualización para los pesos de cada capa.

www.bdigital.ula.ve

4.4.2.1. Resumen del Algoritmo de Entrenamiento usando la Regla Delta generalizada

Dados "P"patrones de entrenamiento

$[X(1), Sd(1); X(2), Sd(2); \ldots; X(P), Sd(P)]$ donde $X(i) \in \Re^n$ y $Sd(i) \in \Re$; $i = 1, 2, \ldots, P$.

Tenemos que el vector de entrada aumentado está dado por:

$$Y(i) = \begin{bmatrix} X(i) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

Se denotará por "K.ªl paso de entrenamiento y por "p.ª un contador que lleva el número de patrones evaluados en cada ciclo.

1. Seleccionar el factor de aprendizaje $\alpha > 0$

2. Inicializar los pesos $W1, W2, \ldots, WH$ con valores aleatorios pequeños. Recordar que Wi son matrices de pesos cuyas dimensiones dependen del número de entradas y salidas de cada capa.

C.C.Reconocimiento

3. Inicializar los contadores, la variable de acumulación del error y el error cuadrático medio máximo permitido por ciclo de entrenamiento. $K \leftarrow 1$; $p \leftarrow 1$; $E \leftarrow 0$; $E_{max} > 0$

4. Ciclo de entrenamiento. Se presenta las entradas y se calcula la salida del perceptrón.

   - $Y \leftarrow Y(p)$
   - $Sd \leftarrow Sd(p)$
   - $S = f(WH^T f(WH - 1...f(W1Y))...)$

5. Calcular las sensibilidades en cada capa. Iniciando con la capa de salida.

   - Si la j-ésima neurona pertenece a la capa de salida entonces:

$$\delta_j = e_j * f'_j(Wi^T Y_k) \tag{4.72}$$

www.bdigital.ula.ve

   - Si la j-ésima neurona está en las capas intermedias o de entrada, entonces:

$$\delta_j = f'_j(Wi^T Y_k) * \sum_L (\delta_L * wi_{Lj}) \tag{4.73}$$

     donde L es el número de neuronas de la siguiente capa con las que está conectada la j-ésima neurona.

6. Actualización de los pesos

   - $wi_{jk}(K+1) = wi_{jk}(K) + \alpha * \delta_j * Y_k$

7. Calcular el error del ciclo

   - $E \leftarrow E + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{R}(Sd_i - S_i)^2$

8. Si p=P entonces ir al paso 8, de lo contrario:

   - $p \leftarrow p + 1$
   - Ir al paso 4.

C.C.Reconocimiento

9. Fin del ciclo de entrenamiento.

   Si $E < E_{max}$ entonces Fin de la sesión de entrenamiento. Se obtiene los valores de los pesos $(W1, W2, \ldots, WH)$ y del número de ciclos (K), de lo contrario:

   - $E \leftarrow 0$
   - $p \leftarrow 1$
   - $K \leftarrow K + 1$
   - Ir al paso 4.

4.4.3. Retropropagación con factor de momento

Este método es una variación del algoritmo de retropropagación, el cual está basado en técnicas empíricas para mejor el ajuste de los pesos. Este algoritmo incorpora un término llamado el "Factor de Momentoçuya función es incorporar memoria al aprendizaje, considerando los ajuste previos que se hayan realizado a los pesos de la red neuronal. Este algoritmo acelera la convergencia de los pesos a sus valores ideales cuando la trayectoria de los parámetros se mueve en una dirección apropiada. Igualmente, evita el estancamiento en mínimos locales de la funcional de costo.

www.bdigital.ula.ve

La expresión para la actualización de los pesos es la siguiente:

$$\bigtriangleup wi_{jk}(K+1) = \gamma \bigtriangleup wi_{jk}(K) + \alpha * \delta_j * Y_k \tag{4.74}$$

donde γ es el factor de momento y sus valores suelen oscilar entre 0 y 1 (generalmente se proponen valores entre 0.95-0.98).

4.4.4. Retropropagación con tasa de aprendizaje variable

El algoritmo de retropropagación con tasa de aprendizaje variable es otra de las llamadas variaciones empíricas de la regla delta generalizada. Su funcionamiento está basado en la búsqueda de la aceleración en la convergencia de los pesos a sus valores ideales tomando en cuenta la forma de la superficie espacial generada por la funcional de costo basada en el error de aprendizaje. La velocidad de convergencia será mayor si la tasa de aprendizaje es mas grande en las regiones planas lo cual lleva a actualizaciones mas rápidas, mientras

C.C.Reconocimiento

que en las regiones irregulares, la actualización de los pesos deben llevarse a cabo con una tasa de aprendizaje pequeña.

Para el uso de éste algoritmo de entrenamiento, se utiliza la siguiente funcional de costo:

$$J(e) = \sum_{j=1}^{P} \left[\sum_{k=1}^{R} e_k^2 \right] = \sum_{j=1}^{P} \left[\sum_{k=1}^{R} (Sd_k - S_k)^2 \right] \tag{4.75}$$

donde P es el número de patrones de entrenamiento y R es el número de salidas neuronales.

El ajuste de los pesos se realiza usando la regla delta generalizada. Después de obtenidos los nuevos pesos se verifica el valor de la funcional de error con los nuevos pesos. Si el nuevo valor de la funcional es mayor que un porcentaje pre-establecido (generalmente entre 1 % y 5 %), entonces se mantiene los pesos anteriores desechando los recién calculados, se decrementa el factor de aprendizaje multiplicándolo por un factor ρ entre 0 y 1 y se fija en cero el factor de momento (γ). En caso de que la evaluación de la funcional de costo genere un valor al usar los nuevos pesos menor que el anterior, entonces se restituye el valor original del factor de momento (en caso de que hubiese sido llevado a cero) y se incrementa la tasa de aprendizaje multiplicándola por un factor $\phi > 1$.

www.bdigital.ula.ve

Ya que este método solo va a modificar los pesos en caso de que mejoren la respuesta del sistema, entonces sus pesos convegerán mas rápidamente a sus valores ideales que con la regla delta generalizada o el algoritmo de retropropagación con factor de momento. Su contraparte está en la cantidad de parámetros que deben ser seleccionados por el usuario.

4.5. Metodología para el diseño de aplicaciones usando RN

Esta metodología surge de la integración de enfoques, técnicas y otras metodologías provenientes de diversas áreas vinculadas con los sistemas basados en conocimiento e Ingeniería de software y puede ser considerada en diferentes campos de desarrollo de aplicaciones computacionales.

La metodología presentada a continuación está dividida en etapas, fases y pasos para una mejor comprensión de las actividades a desarrollar

Etapa 1: Análisis y descripción del problema.

C.C.Reconocimiento

Determina las características del problema y evalúa la factibilidad de utilizar una red neuronal. En esta etapa se pretende determinar la naturaleza del problema y los objetivos precisos que indiquen exactamente cómo se espera que la red neuronal contribuya a la solución del problema. Estudia los diferentes recursos de información, datos e infraestructura con que se cuenta y verifica la posibilidad de su aprovechamiento en las fases de desarrollo e implantación.

- Fase 1.1.- Descripción General del Problema:
  - 1.1.1.- Familiarización con el proceso en el cual se desea utilizar una red neuronal.
  - 1.1.2.- Familiarización con los ambientes computacionales donde se encuentran los datos a ser utilizados.
  - 1.1.3.- Definición detallada del problema que motiva el diseño de una aplicación que utiliza una red neuronal.

www.bdigital.ula.ve

- Fase 1.2.- Análisis de Factibilidad para la utilización de una red neuronal: En esta fase se estudia si el sistema cumple con las condiciones para utilizar una red neuronal, tomando en cuenta aspectos como la cantidad y calidad de datos que se poseen
- Fase 1.3.- Análisis de datos: Verificación de la ubicación y forma de representación de los datos a ser utilizados por la red neuronal, considerando el tipo de base de datos y la plataforma computacional.

Etapa 2: Especificación de requerimientos.

En esta etapa se estudia los requerimientos globales del sistema a desarrollar, considerando hacia quién estará dirigido el sistema, restricciones de acceso, requerimientos funcionales, formatos deseados por los usuarios finales. Es importante discutir con los potenciales usuarios del sistema y tomar en cuenta sus aspiraciones y comentarios para garantizar que posteriormente estén dispuestos a utilizar el sistema desarrollado.

- Fase 2.1.- Estimación del perfil de los usuarios finales del sistema a desarrollar.

C.C.Reconocimiento

- Fase 2.2.- Verificación de los requerimientos con el usuario.
- Fase 2.3.- Determinación de los requerimientos de información: Se especifica la información que debe producir la red neuronal y sus atributos tales como el formato de presentación, la frecuencia de salida y su interconexión con otros programas.
- Fase 2.4.- Determinación de los requerimientos funcionales: Consiste en la definición de las funciones generales que debe satisfacer el sistema que utiliza la red neuronal.
- Fase 2.5.- Determinación de los requerimientos de entrada de datos:
  - 2.5.1.- Selección de las posibles fuentes de entrada a la red neuronal.
  - 2.5.2.- Identificación de las fuentes de datos.
  - 2.5.3.- Especificación de los procesos de adquisición de datos.
  - 2.5.4.- Especificación de los procesos de generación de parámetros.
  - 2.5.5.- Caracterización de la inter-operabilidad entre las bases de datos que se requieren en la implantación.

www.bdigital.ula.ve

- Fase 2.6.- Definición de los requerimientos de hardware y software para la implantación de la red neuronal:
  - 2.6.1.- Especificación de la plataforma de hardware que se utilizará para el entrenamiento y operación de la red neuronal.
  - 2.6.2.- Determinación, análisis y selección de las herramientas de software disponibles en el mercado para el desarrollo de aplicaciones con redes neuronales.

Etapa 3: Análisis de costos, tiempo y recursos.

En esta etapa se realiza un estimado de los costos del desarrollo del sistema que utiliza la red neuronal incluyendo equipos, programas y honorarios profesionales. Igualmente se realiza un cronograma de las actividades a ser desarrolladas. Generalmente en esta etapa terminaría el estudio de factibilidad de realizar el sistema computacional deseado.

- Fase 3.1.- Elaboración del plan de actividades de desarrollo e implantación.

C.C.Reconocimiento

- Fase 3.2.- Estimación del tiempo requerido para el diseño y entrenamiento de la red neuronal.
- Fase 3.3.- Estimación de los recursos computacionales (hardware-software) requeridos para el desarrollo del Sistema.
- Fase 3.4.- Estimación de los costos de desarrollo.

Etapa 4: Diseño de la red neuronal.

- Fase 4.1.- Análisis y procesamiento de datos: En esta fase se debe seleccionar el conjunto de datos que serán utilizados para entrenar la red neuronal y los datos que se usarán para probar su funcionamiento.
- Fase 4.2.- Selección de la topología de la red neuronal: La descripción de una red neuronal puede venir dada en término de los siguientes elementos:
  - Número de entradas a la red neuronal.
  - Número de salidas.
  - Número de capas intermedias u ocultas.
  - Número de neuronas en cada capa.
  - Funciones de activación utilizadas en cada capa.
  - Parámetros de entrenamiento (depende del algoritmo utilizado).
  - Algoritmo de entrenamiento.

  El número de entradas y salidas de la red neuronal se obtienen del problema a resolver, ya que dependiendo de las variables que se estén manejando y de la finalidad del uso de la red se puede definir el número de entradas y salidas.

  El número de capas intermedias y el número de neuronas en cada capa intermedia son parámetros de diseño que suelen ser escogidos por ensayo y error, aunque existe un teorema que demuestra que las redes neuronales con una sola capa intermedia puede ser utilizada como "aproximador universal"[**?**], ya que siempre logra reproducir cualquier función no lineal por compleja sea. Este concepto es de carácter

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

matemático y deja de ser útil a la hora de implementaciones reales, ya que el número de neuronas requeridas (en algunos casos) puede ser tan grande que haga al problema inmanejable computacionalmente. Para efectos prácticos se suele probar en primera instancia una red con un capa escondida y se aumenta paulatinamente el número de neuronas en dicha capa hasta verificar si se logra resultados satisfactorios. En caso de que se haya aumentado demasiado el número de neuronas y no se logre buenos resultados se procede a la incoporación de otra capa intermedia y así sucesivamente.

Las funciones de activación de la capa de salida se escogen de acuerdo a las salidas deseadas para la red neuronal. Generalmente para el caso de clasificación se suelen utilizar funciones como las sigmoides o tangentes hiperbólicas, mientras que para casos donde la salida de la red estime alguna variable física, por lo general se usan funciones lineales.

Etapa 5: Diseño preliminar del sistema computacional que utiliza la red neuronal.

www.bdigital.ula.ve

En esta etapa se realiza la ingeniería de detalle del Sistema, se diseña cuidadosamente cada una de las módulos que comprenderán la herramienta, se hace la selección final de los componentes a utilizar y se diseña los protocolos necesarios para las interrelaciones con otros programas y/o equipos requeridos.

- Fase 5.1.- Diseño preliminar de la arquitectura del Sistema computacional.
- Fase 5.2.- Selección de la herramienta computacional de acuerdo a los requerimientos surgidos en la etapa de diseño de la red neuronal.
- Fase 5.3.- Diseño preliminar de procesos de adquisición y almacenamiento de datos.
- Fase 5.4.- Diseño preliminar de procesos de interconexión:
  - 5.4.1.- Integración Interna.
  - 5.4.2.- Integración Externa.
  - 5.4.2.- Selección de software auxiliar.

C.C.Reconocimiento

- Fase 5.5.- Verificación del diseño preliminar de la red neuronal.

Etapa 6: Diseño e Implantación del sistema computacional que utiliza la red neuronal.

Esta es la etapa final del desarrollo del sistema computacional que utiliza una red neuronal, aquí, se construye, implanta, prueba y depura el sistema. Posterior a la finalización de la implantación comienza la fase de mantenimiento y actualización que durará durante la vida del sistema, ya que se busca mantenerlo operativo en las mejores condiciones e incorporando conocimiento y/o recursos nuevos al sistema según los requerimientos tecnológicos para su vigencia.

- Fase 6.1.- Construcción del prototipo.
- Fase 6.2.- Validación del prototipo.
- Fase 6.3.- Construcción del modelo operacional
- Fase 6.4.- Prueba y depuración
- Fase 6.5.- Mantenimiento y actualización.

www.bdigital.ula.ve

4.6. Filtros de DDF basados en Redes Neuronales

Una de las aplicaciones principales de las RN artificiales es el *reconocimiento y clasificación de patrones*. Un patrón es la descripción cuantitativa de un objeto, evento o fenómeno. La clasificación puede involucrar patrones espaciales o temporales.

El objetivo de la clasificación de patrones es el asignar el patrón presentado al sistema a una de las clases o categorías pre-especificadas.

En el problema de DDF se ha mostrado la potencialidad de las RN para la generación de residuos a través del reconocimiento y clasificación de patrones, [10]. La solución que se alcanza consiste en determinar patrones de condiciones de operación normal de los procesos a través del entrenamiento de RN. En condiciones de operación anormal, es decir, bajo fallas, se determinan diferencias (residuos) entre el modelo de comportamiento

C.C.Reconocimiento

obtenido por medio de RN y el funcionamiento real del proceso. De esta forma se determina la presencia de fallas.

Cuando múltiples fallas son susceptibles de aparecer, nuevamente se recurre a las RN como dispositivos para el reconocimiento y clasificación de patrones. Estas RN son entrenadas con los posibles modelos de fallas susceptibles de surgir. En este caso se obtiene el diagnóstico de fallas.

La debilidad de esta metodología es que la capacidad y cantidad de entrenamiento de la RN depende de la cantidad de modos (patrones) de fallas a reconocer. La complejidad y los requerimientos computacionales pudiesen ser extraordinarios.

Por otro lado, en la Sección **??** se han presentado unas metodologías para la síntesis de filtros de DDF basados en la reconstrucción de los patrones de fallas. Fundamentalmente los métodos se basan en el diseño de modelos inversos, los cuales no están garantizados en cuanto a estabilidad. Esta metodología se puede complementar mediante la aplicación de las redes neuronales para la construcción de los modelos inversos, a partir de lo cual se salva el problema de estabilidad, [97].

www.bdigital.ula.ve

De manera esquemática, la Figura 4.20 muestra los diferentes elementos a construir para obtener el sistema de DDF. Los residuos son generados con filtros observadores de acuerdo a la naturaleza del proceso. Esto tiene la ventaja de reconocer, inmediatamente, la presencia de fallas.

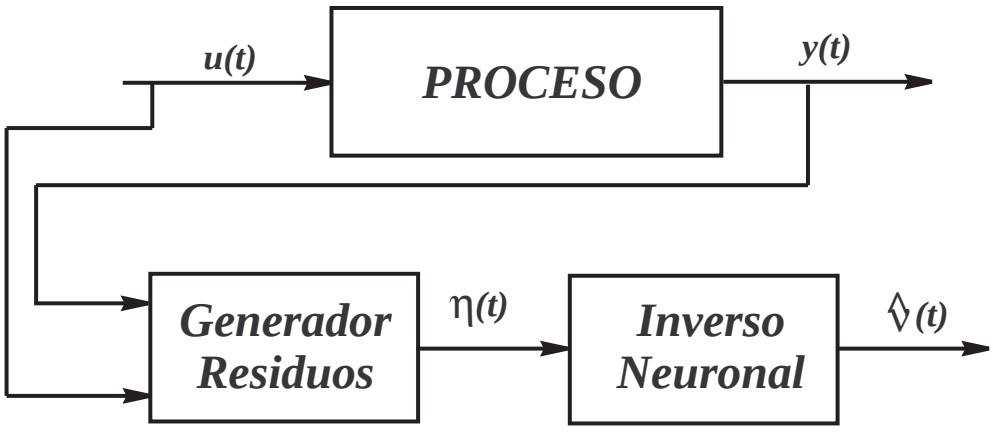


Figura 4.20: Filtro de DDF basado en modelo inverso neuronal.

Para lograr el diagnóstico de las fallas mediante la reconstrucción de los patrones de

C.C.Reconocimiento

fallas se utiliza un modelo inverso implementado a través de RN. A objeto de obtener los modelos inversos neuronales se aplica la metodología descrita en la Sección 4.5.

En ciertos casos, y principalmente para los sistemas no lineales, se torna complicado la generación de los residuos mediante observadores, siempre que las condiciones de detectabilidad no se satisfagan. Entonces es posible recurrir a las RN para reconstruir ciertos patrones de fallas a partir de las entradas y salidas del proceso, ver la Figura 4.21.

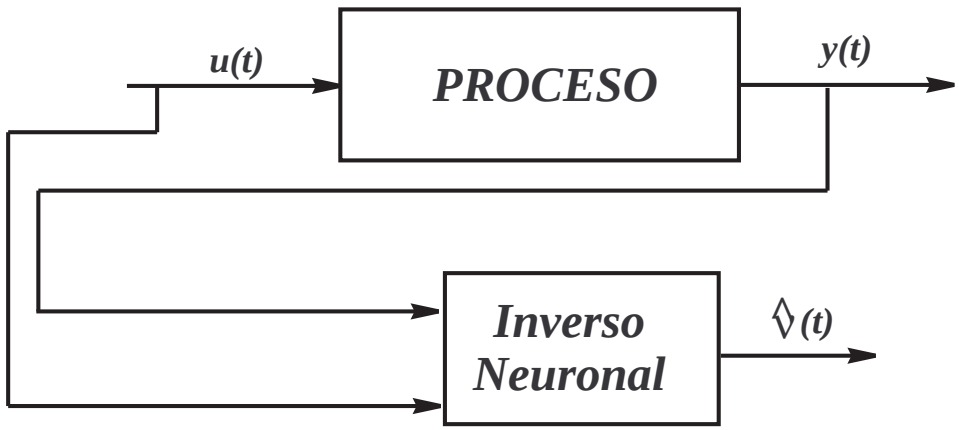


Figura 4.21: Filtro de DDF con Redes Neuronales

www.bdigital.ula.ve

La reconstrucción de los patrones de fallas se realiza mediante un modelo inverso neuronal, el cual utiliza directamente las entradas y salidas del proceso. No se generan residuos, por el contrario, se obtiene un estimado de los patrones de las fallas a partir de los cuales se obtiene el diagnóstico. Nuevamente se recurre a la metodología de la Sección 4.21 para la aplicación de las RN como filtro de DDF.

4.6.1. Ejemplo

Considérese el modelo de diagnóstico lineal descrito por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 - 2x_3 + \nu_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_1 + x_3 + u + \nu_1 \\
\dot{x}_3 &= 2x_1 + x_2 + \nu_2 \\
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= x_3
\end{aligned}$$

C.C.Reconocimiento

Para este sistema de diagnóstico, a pesar de que satisface las condiciones de detectabilidad y separabilidad para las fallas ν_1 y ν_2, no es posible diseñar un filtro de DDF basado en observadores que asegure, simultáneamente, la estabilidad asintótica del error de estimación (detección) y la separación de las fallas, [118].

Así, sobre la base de las condiciones de detectabilidad y separabilidad de fallas, se pueden reconstruir los modos de fallas aplicando modelos inversos. En efecto, mediante la eliminación de estado, [97], los modos de las fallas se describen por:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 0{,}5\,(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) - (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + (y_1 + y_2) - u \\ \nu_2 &= 0{,}5\,(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) - y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Desde el punto de vista de la implementación práctica, el mayor inconveniente de este método es la presencia de las derivadas de las salidas. Así, para la reconstrucción de los patrones de fallas mediante inversión se recurre a las RN.

En base a la Sección 4.21 se proyecto un modelo inverso neural con las siguientes características:

www.bdigital.ula.ve

- Dos entradas correspondientes a las salidas del sistema.
- Dos salidas correspondientes a los modos de fallas.
- Se seleccionan 15 nodos y una capa oculta para la estructura de la RN.

A partir del algoritmo de aprendizaje de retropropagación se entrena la RN, y se realizan las fases de validación y verificación de manera de garantizar el desempeño del modelo inverso neuronal.

Una vez entrenada la RN se realizaron simulaciones para comprobar la reconstrucción de los patrones de fallas. Los resultados se muestran en la Figura 4.22 donde se observa el comportamiento temporal de las salidas cuando se presenta la falla ν_1 en $t = 25\ s$. La Figura 4.23 muestra la evolución en el tiempo de la falla verdadera ν_1 y los modos de fallas estimados usando el modelo inverso neuronal $\hat{\nu}_1$, $\hat{\nu}_2$.

Se puede notar que la falla estimada $\hat{\nu}_1$ es aproximadamente igual a ν_1, mientras que $\hat{\nu}_2$ es aproximadamente nulo. Así, la falla $\hat{\nu}_1$ ha sido adecuadamente detectada y separada por el modelo inverso neuronal.

C.C.Reconocimiento

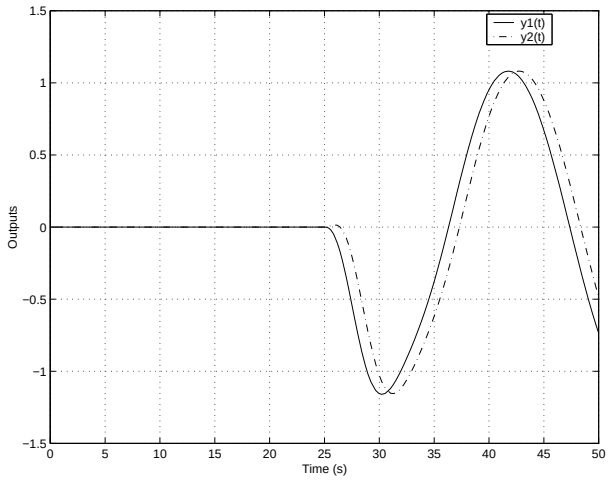
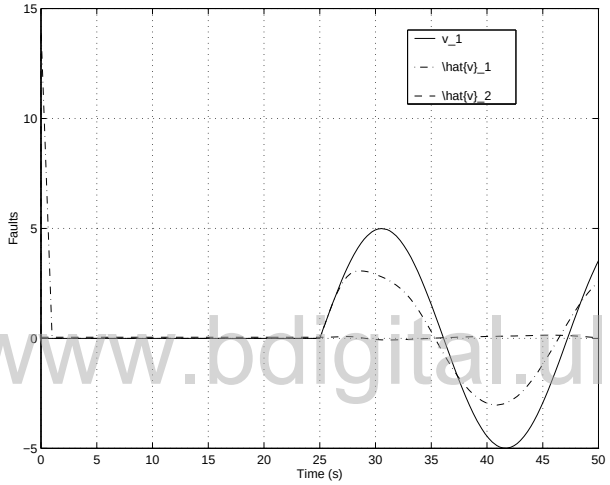


Figura 4.22: Salidas bajo la falla ν_1.



www.bdigital.ula.ve

Figura 4.23: ν_1 real y patrones estimados.

Otro resultado de las simulaciones bajo la presencia de la falla ν_2, se muestra en la are Figure 4.24, donde se ilustra el comportamiento temporal de las salidas. La falla ν_2 ocurre en $t = 35\ s$. La Figura 4.25 muestra la falla ν_2 y las fallas estimadas a partir del modelo inverso neuronal.

A partir de un análisis similar al caso anterior, se puede afirmar que la falla ν_2 se detecta y separa adecuadamente mediante la RN.

4.7. Conclusiones

En esta parte se ha presentado una técnica de diseño de filtros de DDF basada en modelos de conocimiento. El método se fundamenta en las redes neuronales.

A partir de un estudio somero de las redes neuronales, en el cual se han mostrado

C.C.Reconocimiento

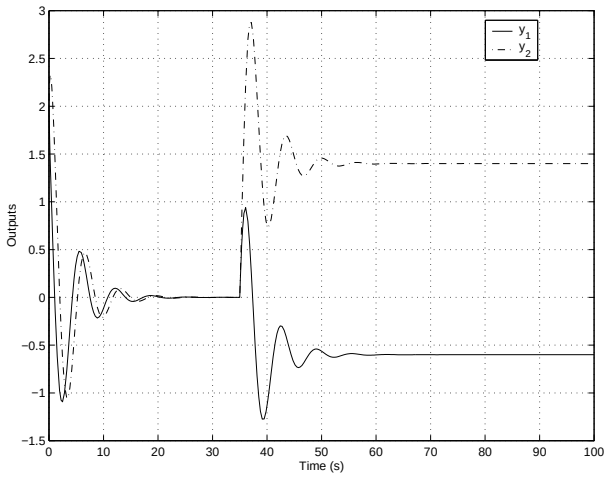
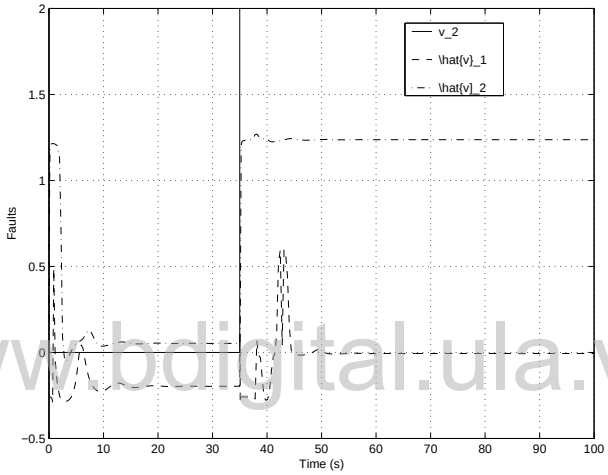


Figura 4.24: Salidas bajo la falla ν_2.



www.bdigital.ula.ve

Figura 4.25: ν_2 real y modos de fallas estimados.

tópicos relativos a su funcionamiento, estructura, entrenamiento y aplicaciones; se presentó una metodología para el diseño de aplicaciones centradas en las redes neuronales. La metodología representa un procedimiento sistemático en la construcciones de aplicaciones basadas en redes neuronales.

Una de esas aplicaciones ha sido el diseño de filtros de DDF. Así, se ha presentado una metodología de síntesis de sistemas de DDF basada en modelos inversos neuronales. Este método permite solventar el problema de estabilidad de los modelos inversos analíticos. Además, se evita el problema de utilizar las derivadas de las salidas, el cual limita la implementación práctica de filtros inversos de DDF.

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Capítulo 5

Conclusiones Generales

En estas memorias se ha presentado una contribución al estudio de métodos de diseño de filtros de detección y diagnóstico de fallas. Desde las perspectivas prácticas, los filtros deben tener la capacidad de producir unos residuos a objeto de detectar las fallas y, al mismo tiempo, utilizar esos residuos a fin de diagnosticar el origen de las anormalidades.

El problema de detección y diagnóstico de fallas se ha abordado, por un lado, a partir de los métodos basados en modelos analíticos, el método de *redundancia analítica*, donde, sobre la base de un modelo de diagnóstico, las fallas se consideran como entradas aditivas en la dinámica del sistema. Por otro lado, se ha considerado un método basado en modelos de conocimientos, el cual se ha particularizado al caso de aplicación de las *redes neuronales* como filtros de detección y diagnóstico de fallas.

www.bdigital.ula.ve

Respecto al método de redundancia analítica, las metodologías de diseño de filtros de detección y diagnóstico de fallas que han sido propuestas se apoyan sobre la construcción de observadores de estados y en el diseño de sistemas inversos.

Como soporte, en el primer capítulo se han estudiado las propiedades estructurales de los sistemas dinámicos. Sobre la base de la representación de la matriz fundamental como un producto de exponenciales, se han generalizado las condiciones de observabilidad y controlabilidad para los sistemas LTV. Esas condiciones son unas generalizaciones de las condiciones de Kalman para los sistemas LTI y constituyen una primera contribución de este trabajo.

En el mismo contexto, se ha presentado una generalización del observador de Luenberger, la cual consiste en utilizar la salida y sus derivadas para producir los estados

C.C.Reconocimiento

estimados. La ventaja del observador generalizado es que, además de la ubicación de los autovalores, es posible dotar a la matriz dinámica del error de estimación de una estructura particular, misma que constituye un elemento fundamental para el diagnóstico de fallas. De igual manera, a partir de una selección adecuada, la dinámica del error de estimación puede hacerse LTI.

Similarmente, se ha tratado el caso de una gran clase de sistemas no lineales. A manera de introducción, se ha estudiado la observabilidad a la luz de las herramientas de la geometría y del álgebra diferencial. En base a la eliminación de estados de Diop, se ha presentado un método para la síntesis de observadores no lineales. Los estados desconocidos se describen a partir del control, la salida y sus derivadas.

Enseguida se ha abordado el estudio de los sistemas inversos. Para ello, se han presentado una condiciones de rango para la invertibilidad por la izquierda. Esas condiciones se fundamentan sobre las propiedades particulares de las entradas y salidas del sistema original. Por el contrario, la condición de invertibilidad para los sistemas no lineales sigue algunas restricciones sobre los estados. Así, se han propuestos unos algoritmos de inversión.

www.bdigital.ula.ve

En el segundo capítulo se examina el problema de detección y diagnóstico de fallas. De esto modo se han presentado unos métodos y técnicas para la construcción de filtros. En ese sentido, se han desarrollado las condiciones fundamentales para la detectabilidad y separabilidad de las fallas. Desde un punto de vista geométrico, se han caracterizado las condiciones para los sistemas lineales. Ellas constituyen condiciones estructurales importantes y dirigen la construcción de los filtros de detección y diagnóstico de fallas.

En el contexto de síntesis de observadores de estados, la detectabilidad y la separabilidad de las fallas son posibles si el sistema dinámico definido a partir de las fallas y las salidas del error de estimación es invertible por la izquierda.

De manera similar, se ha propuesto una metodología para la construcción de filtros de detección y diagnóstico de fallas que se fundamenta sobre el observador generalizado. Dichos filtros permiten la asignabilidad de la estructura de la matriz dinámica del error de estimación. Las fallas se pueden desacoplar mediante una selección adecuada de esa

C.C.Reconocimiento

estructura.

En el tercer capítulo se ha abordado el problema de detección y diagnóstico de fallas en el marco de la reconstrucción de entradas. Es por ello que se han estudiado los conceptos de observabilidad y reconstrucción de entradas. Se ha mostrado la equivalencia entre esos conceptos y la invertibilidad por la izquierda de sistemas.

Dado que los modos de las fallas se describen como entradas del modelo de diagnóstico, la reconstrucción de esos modos permite que las fallas sean detectadas y diagnosticadas.

En este sentido, se ha desarrollado una metodología de diseño que se apoya sobre los observadores clásicos o generalizados de Luenberger y sobre la síntesis de un filtro de reconstrucción de entradas (un sistema inverso). En este método se ha mostrado, nuevamente, la equivalencia entre la invertibilidad y las condiciones de detectabilidad y separabilidad de fallas. Esta técnica de diseño de filtros de detección es menos restrictiva que la que se fundamenta sobre los sub-espacios (C, A)-invariantes y el procedimiento es más simple.

Siguiendo la misma filosofía del caso de los sistemas lineales, se ha propuesto, igualmente, un método para la síntesis de filtros de detección en el caso de los sistemas no lineales basado sobre la reconstrucción de los modos de fallas. La detección y el diagnóstico de las fallas se obtienen a través de un sistema inverso, el cual produce un estimado de los modos de fallas.

www.bdigital.ula.ve

En el cuarto capítulo se ha abordado el problema de detección robusta de fallas, en el cual se consideran modelos de diagnóstico con incertidumbres y sometidos a perturbaciones externas. En ese sentido, se han presentado condiciones geométricas para la detección robusta, las cuales conllevan al desacoplamiento de las perturbaciones respecto de las fallas en la dinámica del error de estimación.

Así, se ha presentado una técnica de diseño basada en observadores de entrada desconocidas. Con el objeto de procurar condiciones más débiles para la síntesis de los filtros, se ha propuesto un observador de entrada desconocida generalizado, el cual hace uso de la derivada de salidas particulares.

En el mismo contexto y en un marco general, se ha establecido la relación entre el

C.C.Reconocimiento

filtraje robusto y la detección robusta de fallas. Esta visión conlleva a minimizar los efectos de las perturbaciones sobre los residuos permitiendo una alta sensibilidad a las fallas. De allí, bajo condiciones muy particulares, se ha propuesto un filtro robusto basado en observadores generalizados de Luenberger, mismo que rechaza absolutamente las perturbaciones.

Dentro de esa misma perspectiva, se ha propuesto la construcción de filtros robustos a través de la transformación del problema de detección de fallas en un problema de control óptimo. El método permite minimizar los efectos de las perturbaciones en los residuos mediante la solución de problemas de control óptimo mediante las distintas técnicas existente al momento.

En el quinto y último capítulo se ha estudiado el problema de detección de fallas a la luz de los modelos de conocimientos. En particular se ha considerado la aplicación de las redes neuronales en el problema de detección de fallas.

De allí, se ha estudiado en forma resumida los aspectos relevantes de las redes neuronales: funcionalidad, modelos neuronales y mecanismos de entrenamiento. Igualmente, se presentó una metodología sistemática para el diseño de aplicaciones de redes neuronales.

www.bdigital.ula.ve

Con respecto al problema de detección de fallas, se ha presentado una técnica que se basa en la utilizacíon de modelos inversos neuronales. Este método permite resolver el problema de estabilidad de los modelos inversos analíticos, además, evita la utilización de las derivadas de las salida en la síntesis de los modelos inversos, mismo que es importante para aplicaciones prácticas.

La extensión de los resultados alcanzados en este trabajo son múltiples. Por un lado, solo se han considerado sistemas bien modelizados. Se sabe que, desde el punto de vista práctico, los modelos conllevan incertidumbres. Considerar las incertidumbres en los modelos de diagnóstico demandan condiciones para el problema de detección de fallas más exigentes, lo cual es un problema aún abierto.

Respecto a los filtros robustos de detección de fallas, un problema que surge es la reconstrucción de las fallas por medio de inversos robustos, lo cual promueve un área de investigación importante.

C.C.Reconocimiento

De igual manera, el problema de síntesis de filtros robustos de detección de fallas basados en redes neuronales es un campo que convendría explorar.

Finalmente, se deben establecer metodologías sistemáticas para la puesta en práctica los diversos métodos que han sido presentados a lo largo de estas memorias.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Apéndice A

Elementos del Algebra Diferencial

En esta parte se introducen algunas definiciones y resultados preliminares concernientes al álgebra diferencial. Estos resultados son utilizados en el desarrollo de este manuscrito.

A.1. Las Estructuras Algebraicas de Base

A.1.1. Espacio vectorial

www.bdigital.ula.ve

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Si $S \subset V$ es un sub-conjunto no vacío , entonces $V(S)$ es el sub-espacio engendrado par S. Es decir,

$$V(S) = \bigcap_{S \subset U \subset V} U = \left\{ \sum_i \lambda_i s_i : \quad \lambda_i \in \mathcal{K}, \quad s_i \in S \right\},$$

donde U es un sub-espacio vectorial y $V(S)$ es el sub-espacio minimal que contiene a S.

Una definición importante ligada a un espacio vectorial concierne a los sub-espacios invariantes, [128]:

Definición A.1 *Sea $A : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$. Entonces un sub-espacio $\mathfrak{W}$ es A-* ***invariante*** *si $A\mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}$.*

Definición A.2 *Se dice que un sub-espacio $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{X}$ es (A, B)-**invariante** si para $A : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ y $B : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{X}$, existe una transformación lineal $K : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{U}$, sea $\mathcal{K} = A + KB$, tal que $\mathfrak{W}$ es $\mathcal{K}$-**invariante**, es decir, $(A + KB)\mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}$.*

Definición A.3 *Sea $A : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ y $C : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$. Un sub-espacio $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{X}$ es (C, A)-**invariante** si existe una transformación lineal $D : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ tal que $\mathfrak{W}$ es $(A + DC)$-**invariante**, es decir, $(A + DC)\mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}$.*

En base a las definiciones anteriores, se pueden dar algunos ejemplos :

C.C.Reconocimiento

1. Los sub-espacios triviales $\{0\} \subset \mathfrak{X}$ y $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}$ son A-invariantes para toda aplicación lineal $A : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$.

2. El sub-espacio de accesibilidad

$$\text{Im } (B) + \text{Im } (AB) + \cdots + \text{Im } \left(A^{n-1}B\right) \subset \mathfrak{X}$$

es A-invariante.

3. El sub-espacio inobservable

$$\ker (C) \cap \ker (CA) \cap \cdots \cap \ker \left(CA^{n-1}\right) \subset \mathfrak{X}$$

es A-invariante.

4. Los sub-espacios triviales $\{0\} \subset \mathfrak{X}$ y $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}$ son (A, B) y (C, A)-invariantes para todas aplicaciones lineales $A : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$, $B : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{X}$, y $C : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$.

5. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ los polos de un sistema de orden n. El polinomio característico es

www.bdigital.ula.ve

$$\begin{aligned} p(s) &= s^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\, s^{n-1} + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n)\, s^{n-2} - \cdots \\ &\quad + (-1)^n \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

Entonces, la matriz dinámica para un sistema bajo su forma canónica observable y con polinomio característico $p(s)$, es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & (-1)^n \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & (-1)^n (\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} + \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2}\lambda_n + \cdots + \lambda_2 \cdots \lambda_n) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n) \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Los vectores propios (autovectores), correspondientes a los autovalores (valores propios) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, son respectivamente :

$$e_1 = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1}\lambda_2\lambda_3 \cdots \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n \\ -(\lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1}\lambda_1\lambda_3 \cdots \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n \\ -(\lambda_1 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n) \\ 1 \end{pmatrix},$$

C.C.Reconocimiento

$$\cdots, \quad e_n = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1} \\ \vdots \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1} \\ -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Supóngase que existe un vector $l = (l_1, \ldots, l_n)^T$, el cual genera un sub-espacio A-invariante propio y distinto de $\mathbb{R}^n$. Entonces, las ecuaciones

$$l_1 + l_2\lambda_i + l_3\lambda_i^2 + \cdots + l_n\lambda_i^{n-1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

se deben satisfacer, por lo cual, si el polinomio

$$l_1 + l_2 s + \cdots + l_n s^{n-1}$$

es anti-Hurwitz, esto es, si todas sus raíces tienen su parte real positiva, entonces, con las matrices

www.bdigital.ula.ve

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \quad 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1),$$

el sub-espacio (C, A)-invariante mínimo generado por el único vector $l = (l_1, \ldots, l_n)^T$ es el espacio $\mathbb{R}^n$ completo.

A.1.2. Algebras de Lie

Definición A.4 *Sea $\mathfrak{L}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$; es una álgebra de Lie si su multiplicación, la operación "corchete", denotada $[\![\cdot, \cdot]\!] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$, tiene las siguientes propiedades :*

1. *El corchete es bilineal,*

2. $[\![a, a]\!] = 0$, $\forall\ a \in \mathfrak{L}$;

   $[\![a, b]\!] + [\![b, a]\!] = 0$, $\forall\ a, b \in \mathfrak{L}$;

   $[\![a, [\![b, c]\!]]\!] + [\![b, [\![c, a]\!]]\!] + [\![c, [\![a, b]\!]]\!] = 0$, $\forall\ a, b, c \in \mathfrak{L}$ *(Identidad de Jacobi).*

Si $[\![a, b]\!] = 0$, $\forall\ a, b \in \mathfrak{L}$, se dice que $\mathfrak{L}$ es una álgebra de Lie Abeliana, [8, 122].

C.C.Reconocimiento

A.1.2.1. Ejemplos

1. $\mathcal{K}^{n\times n}$, las matrices de $n \times n$, con el corchete definido por

$$[\![A, B]\!] = AB - BA, \quad A, B \in \mathcal{K}^{n\times n}.$$

2. $\mathcal{K}^3$, el espacio vectorial de dimensión 3, equipado del producto vectorial de dos vectores $[x, y]$, definido por

$$[x, y] = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)^T .$$

3. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbb{C}^\infty(D)$ es el espacio vectorial de las aplicaciones $\mathbb{C}^\infty$ de D en $\mathbb{R}^n$.

   $\mathbb{C}^\infty(D)$ equipado de las operaciones siguientes $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $O(x) = 0$, $(-f)(x) = -f(x)$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

www.bdigital.ula.ve

   El corchete de Lie de dos campos vectoriales se define por

$$[\![f, g]\!](x) = \dot{f}(x)g(x) - \dot{g}(x)f(x).$$

   $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}$ es una sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{L}$, si $\mathfrak{L}_1$ es un sub-espacio vectorial cerrado con respecto al corchete de Lie, es decir, si $a, b \in \mathfrak{L}_1$, entonces $[\![a, b]\!] \in \mathfrak{L}_1$.

   Sea $S \subset \mathfrak{L}$ un conjunto arbitrario, no vacío. Entonces, $\mathfrak{L}(S)$ es sub-álgebra de Lie engendrada por S, es decir, la sub-álgebra de Lie mas pequeña que contiene a S:

$$\mathfrak{L}(S) = \bigcap_{S\subset\mathfrak{L}_1\subset\mathfrak{L}} \mathfrak{L}_1,$$

   donde $\mathfrak{L}_1$ son sub-álgebras de Lie.

   Definición A.5 *Un ideal $\mathfrak{h}$ en una álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es un sub-espacio vectorial tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathfrak{h}$. Un ideal $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{L}$ es* minimal *si $\{0\}$ es el único ideal de $\mathfrak{L}$ que está contenido en $\mathfrak{h}$.*

   $[\mathfrak{h}, \mathfrak{L}]$ representa el sub-espacio engendrado por el conjunto de todos los elementos que se escriben $[\![a, b]\!]$, con $a \in \mathfrak{h}$ y $b \in \mathfrak{L}$.

C.C.Reconocimiento

Definición A.6 *Una álgebra de Lie* $\mathfrak{L}$ *se dice* simple *si* $\mathfrak{L}$ *y* $\{0\}$ *son los únicos ideales de* $\mathfrak{L}$.

Definición A.7 *El ideal* $\mathfrak{D}\mathfrak{L} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ *de una álgebra de Lie* $\mathfrak{L}$ *es llamada la* álgebra derivada *de* $\mathfrak{L}$.

Se puede notar, inmediatamente, que la serie derivada de $\mathfrak{L}$ *es representada por*

$$\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{D}\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{D}^2\mathfrak{L} \cdots \supseteq \mathfrak{D}^l\mathfrak{L} \supseteq \cdots$$

donde $\mathfrak{D}^l\mathfrak{L} = \mathfrak{D}\left(\mathfrak{D}^{l-1}\mathfrak{L}\right)$. *Cada término en la serie es un ideal. Si* $\mathfrak{D}^k\mathfrak{L} = \{0\}$ *para un* $k > 0$, *se dice que* $\mathfrak{L}$ *es una álgebra de Lie* ***soluble***.

Sea $\mathfrak{L}$ es una álgebra de Lie, y sean

$$C^{(0)}\mathfrak{L} = \mathfrak{L}, \quad C^{(1)}\mathfrak{L} = [\mathfrak{L}, C^{(0)}\mathfrak{L}], \quad \ldots, \quad C^{(l+1)}\mathfrak{L} = [\mathfrak{L}, C^{(l)}\mathfrak{L}], \quad \ldots$$

Entonces $C^{(l)}\mathfrak{L}$ es un ideal de $\mathfrak{L}$ y se obtiene la serie central decreciente

$$C^{(0)}\mathfrak{L} \supseteq C^{(1)}\mathfrak{L} \supseteq \cdots \supseteq C^{(l)}\mathfrak{L} \supseteq \cdots .$$

Si $C^{(k)}\mathfrak{L} = 0$ para un $k > 0$, entonces $\mathfrak{L}$ se dice **nilpotente**. Dicho de otra forma, $\mathfrak{L}$ es una álgebra de Lie nilpotente si existe una secuencia finita y decreciente de ideales $\{\mathfrak{h}_i\}$, $i = 0, \ldots, p$, con $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{L}$ y $\mathfrak{h}_p = \{0\}$, tal que $[\mathfrak{L}, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$, para $i = 0, \ldots, p-1$.

www.bdigital.ula.ve

Se puede notar que para cada l, $\mathfrak{D}^l\mathfrak{L} \subseteq C^{(l)}\mathfrak{L}$; por consecuencia, si $\mathfrak{L}$ es nilpotente y por ende es soluble también. En efecto, $\mathfrak{L}$ es soluble si y solamente si $\mathfrak{D}\mathfrak{L}$ es nilpotente.

Un operador lineal muy importante que opera sobre una álgebra de Lie cualquiera $\mathfrak{L}$ es la aplicación adjunta denotada ad.

Para definirlo, supóngase que $\mathfrak{L}$ es una álgebra de Lie. Sea $A \in \mathfrak{L}$, se define ad A por

$$\text{ad } A : B \longmapsto [\![A, B]\!], \quad (B \in \mathfrak{L}).$$

ad A es una derivación de $\mathfrak{L}$ y $A \longmapsto$ ad A es una representación de $\mathfrak{L}$ en $\mathfrak{L}$, llamada la representación adjunta de $\mathfrak{L}$.

Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ una base del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$. Las aplicaciones lineales adA_i

$$X \longmapsto adA_i = [\![A_i, X]\!] \quad \text{de} \quad \mathfrak{L} \longmapsto \mathfrak{L},$$

C.C.Reconocimiento

tienen por representación las matrices Γ_i, es decir,

$$[\![A_i, A_j]\!] = \sum_{l=1}^{k} \Gamma_{ij}^{l} A_l.$$

Los $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ constituyen la tabla de multiplicación de $\mathfrak{L}$.

Sea $L \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, o $L \subset \mathbb{C}^{n\times n}$; ($\mathcal{K} = \mathbb{C},$ ou $\mathbb{R}$). Si $A, B \in L$, entonces

$$e^{A}Be^{-A} = B + \frac{[\![A,B]\!]}{1!} + \frac{[\![A,[\![A,B]\!]]\!]}{2!} + \cdots = e^{adA}B \in L.$$

(Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff), ver [8, 122].

A.2. Las Anillos Diferenciales

Sea R un anneau et $d : R \longrightarrow R$ un homomorfismo de grupo, tal que

$$d(r_1 \cdot r_2) = d(r_1)r_2 + r_1 d(r_2).$$

El homomorfismo de grupo se puede definir a partir de la identidad

$$d(r_1 + r_2) = d(r_1) + d(r_2).$$

www.bdigital.ula.ve

La estructura obtenida (R, d) es un *anillo diferencial*, d es la operación de *diferenciación*.

A.2.0.2. Ejemplos

a) Si R es un anillo y $d = 0$, entonces (R, d) es un anillo diferencial.

b) El anillo de los polinomios $R[s]$ en el anillo R (no diferencial), equipado de la operación de diferenciación

$$d(p(s)) = d\left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i a_i s^{i-1}$$

es un anillo diferencial.

c) Sea $Q_{\mathbb{C}}[t]$ el anillo de los cuasi-polinomios en $\mathbb{C}$. Los elementos de $Q_{\mathbb{C}}[t]$ se escriben

$$\sum_i e^{\lambda_i t} P_i(t), \quad P_i(t) \in \mathbb{C}[t], \quad \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Así, $Q_{\mathbb{C}}[t]$ equipado de la operación de diferenciación $d = \frac{d}{dt}$, $\left(Q_{\mathbb{C}}[t], \frac{d}{dt}\right)$, es un anillo diferencial.

C.C.Reconocimiento

d) Sea (R, d) un anillo diferencial. Considérese las indeterminadas: $x_0, x_1, x_2, \ldots$. El anillo de los polinomios de orden infinito donde las indeterminadas son $x_0, x_1, \ldots$ puede ser equipado de la derivación sobre $R\{x_0, x_1, \ldots\}$, tal que la derivación sea una extensión de d sobre R, y $dx_i = x_{i+1}$.

$$\begin{aligned} d\left(a_{n_0 n_1 \cdots n_k} x_0^{n_0} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}\right) &= d\left(a_{n_0 n_1 \cdots n_k}\right) x_0^{n_0} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} + \\ &+ a_{n_0 n_1 \cdots n_k} \left(\sum_{i=0}^{k-1} n_i x_0^{n_0} \cdots x_{i-1}^{n_{i-1}} x_i^{n_i - 1} x_{i+1}^{n_{i+1}+1} \cdots x_k^{n_k} + \right. \\ &+ \left. n_k x_0^{n_0} \cdots x_{k-1}^{n_{k-1}} x_k^{n_k - 1} x_{k+1} \right) \end{aligned}$$

A partir de la ecuación precedente resulta evidente que la extensión de la diferenciación para todos los polinomios, indica que la derivada de la suma será la suma de las derivadas.

Si se introduce, ahora, la indeterminada diferencial x, $x = x_0$, $dx = x_1$, $d^2x = x_2$, ... Entonces, los polinomios

$$\begin{aligned} \tilde{P}\left(x_0, x_1, \ldots\right) &= \sum a_{n_0 n_1 \cdots n_k} x_0^{n_0} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \sum a_{n_0 n_1 \cdots n_k} x^{n_0} (dx)^{n_1} \cdots (d^k x)^{n_k} = \tilde{P}(x, dx, \ldots) = P(x) \end{aligned}$$

www.bdigital.ula.ve

son los polinomios diferenciales de la indeterminada diferencial x. Con respecto a la diferenciación extendida, los polinomios diferenciales en R forman el anillo diferencial de los polinomios diferenciales. Por analogía, se denominan por $R\{x\}$.

En lugar de una indeterminada diferencial, se puede extender el concepto de anillo diferencial de los polinomios diferenciales sobre los indeterminados $x_1, x_2, \ldots, x_k$, mediante la recursión

$$R\left\{x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}\right\} = R\left\{x_1, \ldots, x_i\right\}\left\{x_{i+1}\right\}.$$

Por otro lado, sea $c \in R$. Si $d(c) = 0$ entonces se dice que c es una constante de R. El conjunto de todas las constantes de un anillo diferencial forma un anillo de constantes.

Definición A.8 *Un campo diferencial de extensión L/K es la extensión del campo L/K tal que la derivación de K es la restricción para K de la derivación de L.*

Es común denotar el campo diferencial engendrado por K y un sub-conjunto S de L por $K < S >$, [30].

C.C.Reconocimiento

Definición A.9 *Un elemento $l \in L$ se dice* ***algebraico diferencialmente*** *sobre K, o diferencialmente K-algebraico si y solamente si él satisface una ecuación diferencial algebraica sobre K.*

En este sentido, existe un polinomio no nulo $\tilde{P}$ sobre K a $k+1$ indeterminadas tal que :

$$\tilde{P}\left(l, \dot{l}, \ldots, l^{(k)}\right) = 0.$$

Definición A.10 *Un conjunto S se dice* ***diferencialmente K-algebraicamente dependiente*** *si y solamente si existe un polinomio diferencial $P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ sobre K en las indeterminadas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, para un sub-conjunto $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \mathcal{I}$, tal que*

$$P(l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}) = 0.$$

Par consecuencia, un sub-conjunto $S \subset L$ es diferencialmente K-algebraicamente dependiente si y solamente si existe un $l_{i_0} \neq 0$, $l_{i_0} \in S$, de tal manera que l_{i_0} es diferencialmente algebraicamente dependiente sobre $K < l_i \mid i \in \mathcal{I} >$, $i \neq i_0$. Por el contrario, S será un conjunto diferencialmente algebraicamente independiente.

Le *grado de transcendencia diferencial* de L/K es la cardinalidad de un conjunto diferencialmente K-algebraico independiente maximal. Así, un conjunto independiente maximal M es una *base de transcendencia diferencial* de L/K, [21, 30]. No importa cual elemento de L es $K < M >$-algebraico.

www.bdigital.ula.ve

Teorema A.1 *Para una extensión diferencial L/K engendrada de manera finita, las dos siguientes condiciones son equivalentes :*

1. *L/K es diferencialmente algebraico.*
2. *El grado de transcendencia no diferencial de L/K es finito.*

Prueba Ver [103]. ■

A.3. Los Cuerpos Diferenciales

Sea $\mathfrak{K}$ un cuerpo, equipado de una diferenciación d, de tal forma que $(\mathfrak{K}, d)$ es un anillo diferencial.

Sea R un anillo diferencial conmutativo. $r \in R$, $r \neq 0$, es un divisor de cero de R si existe un elemento $\rho \in R$, $\rho \neq 0$, tal que $r\rho = 0$.

C.C.Reconocimiento

Si R no tiene divisor de cero, entonces R es un anillo diferencial íntegro. Si R es un anillo diferencial íntegro, entonces $R\{x_1, \ldots, x_k\}$ también es anillo diferencial íntegro.

El cuerpo cociente de un anillo diferencial íntegro se define por la relación (fracción):

$$\frac{a}{b} \Longleftrightarrow (a, b), \quad b \neq 0, \quad a, b \in R.$$

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc; \qquad \frac{a}{b} = [a, b] = \{(c, d) : (c, d) = (a, b)\}.$$

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd) \Longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = [ad + bc, bd] = \frac{ad + bc}{bd}.$$

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = [a, b][c, d] = [ac, bd] = \frac{ac}{bd}$$

$$(a, b)^{-1} = (b, a), \quad \text{si} \quad a \neq 0, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)$$

$$(0, a) = (0, b) \quad \forall \quad a, b \neq 0.$$

Si $\mathtt{1} \in R$, entonces $\mathtt{1} = (a, a)$. Así, $a \longrightarrow (a, \mathtt{1})$ es la inmersión al cuerpo cociente de todas las fracciones.

Si $\mathtt{1} \ni R$, entonces (a, a) define la unidad de los cuerpos cociente Q/R. Sea d la diferenciación en R. Entonces, la extensión de d al cuerpo cociente Q/R es

www.bdigital.ula.ve

$$d\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{d(a)b - ad(b)}{b^2}$$

Se puede observar que si $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, entonces $d\left(\frac{a}{b}\right) = d\left(\frac{e}{f}\right)$, es decir, si

$$(a, b) = (e, f) \Longrightarrow \frac{d(a)b - ad(b)}{b^2} = \frac{d(e)f - ed(f)}{f^2} \Longleftrightarrow \left(d(a)b - ad(b), b^2\right) = \left(d(e)f - ed(f), f^2\right).$$

$(Q/R, d)$ es un cuerpo diferencial.

El cuerpo cociente diferencial del anillo diferencial de los polinomios diferenciales sobre un cuerpo diferencial $\mathfrak{K}$, denotado $\mathfrak{K} < x_1, \ldots, x_k >$, es el cuerpo diferencial de las fracciones diferenciales de las indeterminadas $x_1, \ldots, x_k$.

Sea R un anillo diferencial y K un espacio vectorial sobre el cuerpo diferencial $\mathfrak{K}$. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k \in R$. Entonces, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son K-diferencialmente algebraicamente independientes si, para todos los polinomios diferenciales

$$p(x_1, \ldots, x_k) = \sum a_{\underline{n}_0\underline{n}_1\cdots\underline{n}_l}\underline{x}^{\underline{n}_0}(d\underline{x})^{\underline{n}_1}\cdots(d^l\underline{x})^{\underline{n}_l},$$

C.C.Reconocimiento

se tiene:

$$a_{\underline{n}_0\underline{n}_1\cdots\underline{n}_l} \in \mathfrak{K},$$

donde

$$\underline{x}^{\underline{n}_0} = x_1^{n_{01}} \cdots x_k^{n_{0k}}, \quad \underline{n}_0 = (n_{01}, n_{02}, \ldots, n_{0k}), \quad n_{0i} \geq 0,$$

$$\begin{aligned}
(d\underline{x})^{\underline{n}_1} &= (dx_1)^{n_{11}}(dx_2)^{n_{12}} \cdots (dx_k)^{n_{1k}}, \quad \underline{n}_1 = (n_{11}, n_{12}, \ldots, n_{1k}), \quad n_{1i} \geq 0, \\
&\vdots \\
(d^l\underline{x})^{\underline{n}_l} &= (d^l x_1)^{n_{l1}} \cdots (d^l x_k)^{n_{lk}}, \quad \underline{n}_l = (n_{l1}, n_{l2}, \ldots, n_{lk}), \quad n_{li} \geq 0
\end{aligned}$$

entonces

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0.$$

A.4. Teorema de Wei-Norman

Teorema A.2 *Sea* $\mathfrak{L} = L(A(t)), \quad t \in [0, t_f]$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{L} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, *une base.*

$$A(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t)A_i, \quad a(t) = (a_1(t), \ldots, a_k(t)).$$

www.bdigital.ula.ve

La tabla de multiplicación de $\mathfrak{L}$ *es* $\Gamma_i, \quad i = 1, \ldots, k$. *Entonces, la solución fundamental de*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = I,$$

es el producto de exponenciales

$$\Psi(t) = e^{g_1(t)A_1} e^{g_2(t)A_2} \cdots e^{g_k(t)A_k},$$

donde

$$g(t) = (g_1(t), \ldots, g_k(t))$$

es la solución de la ecuación de Wei-Norman :

$$\sum_{i=1}^{k} e^{g_1(t)\Gamma_1} \cdots e^{g_{i-1}(t)\Gamma_{i-1}} E_i \dot{g}(t) = a(t), \quad g(0) = 0.$$

con E_i *una matriz de 0's y un único* 1 *en la* (i,i)*-iésima entrada, es decir:*

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow i$$

C.C.Reconocimiento

Prueba Ver [124]. ■

Puesto que

$$\sum_{i=1}^{k} e^{g_1(t)\Gamma_1} \cdots e^{g_{i-1}(t)\Gamma_{i-1}} E_i$$

es la identidad para $t = 0$, [124], esta matriz es regular en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}^k$, entonces

$$\dot{g}(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} e^{g_1(t)\Gamma_1} \cdots e^{g_{i-1}(t)\Gamma_{i-1}} E_i \right)^{-1} a(t), \quad g(0) = 0,$$

posee una solución local único.

Por analogía, $\Psi^{-1}(t)$ se expresa como producto de exponenciales

$$\Psi^{-1}(t) = e^{h_1(t)A_1} e^{h_2(t)A_2} \cdots e^{h_k(t)A_k},$$

la ecuación de Wei-Norman correspondiente es

$$\sum_{i=1}^{k} e^{h_1(t)\Gamma_1} \cdots e^{h_{i+1}(t)\Gamma_{i+1}} E_i \dot{h}(t) = -a(t), \quad h(0) = 0.$$

www.bdigital.ula.ve

A.5. Teorema de Eliminación de Estado de Diop

El proceso inverso a la *realización* se llama la *eliminación*, la cual consiste en la derivación de un modelo equivalente representativo de un sistema dinámico. Ese modelo se describe por las variables *externas*, es decir, un modelo donde no figuran, explicítamente, los estados.

En general, el proceso de *eliminación* conduce a unas ecuaciones diferenciales y unas inecuaciones diferenciales, [20].

Sea le sistema

$$M_i \left(\omega, \dot{\omega}, \ddot{\omega}, \ldots, \omega^{(\alpha)}, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(\beta)} \right) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots \tag{A.1}$$

donde

- ω = Variables Externas (Las entradas y salidas).
- x = Estados.

C.C.Reconocimiento

Un modelo de (A.1), en el cual las estados han sido eliminados, está dado por

$$\tilde{M}_i\left(\omega, \dot{\omega}, \ddot{\omega}, \ldots, \omega^{(\alpha)}\right) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots \tag{A.2}$$

entonces, la *eliminación* es la projección de (A.1) en el universo de los sistemas descritos por (A.2), mediante la aplicación del álgebra diferencial.

Se tiene el siguiente teorema :

Teorema A.3 *Sea el sistema de polinomios diferenciales de orden finito siguiente*

$$\begin{cases} P_i(\omega, \dot{\omega}, \ldots, x, \dot{x}, \ldots) & = & 0; \qquad i = 1, 2, \ldots \\ Q(\omega, \dot{\omega}, \ldots, x, \dot{x}, \ldots) & \neq & 0, \end{cases}$$

Existe una representación equivalente tal que

$$\begin{cases} \tilde{P}_i(\omega, \dot{\omega}, \ldots) & = & 0; \qquad i = 1, 2, \ldots \\ \tilde{Q}(\omega, \dot{\omega}, \ldots) & \neq & 0, \end{cases}$$

obtenida en un número finito de etapa utilizando las operaciones del álgebra diferencial.

Prueba Ver [20]. ■

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Apéndice B

Espacio de Señales y Normas

Uno de los aspectos que aborda el control de sistemas en mantener "pequeñasçiertas funciones de transferencia en una banda de frecuencia de interés. El significado de la pequeñez es el tema central de esta sección. Serán evaluados los "tamaños"de una señal y de un sistema. Se mostrarán, igualmente, las normas $\mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_\infty$.

B.1. Señales y Normas de Señales

www.bdigital.ula.ve

Muchas cantidades físicas, tales como voltajes, corrientes, temperaturas, presiones, etc., dependen del tiempo y se pueden interpretar como funciones del tiempo. Esas funciones cuantifican como la información evoluciona en el tiempo y son llamadas *señales*.

Definición B.1 *Una* señal *es una función* $\mathbb{s} : T \longrightarrow W$ *donde* $T \subseteq \mathbb{R}$ *es el conjunto de tiempo y* W *es un conjunto denominado* espacio de señal.

Si es del interés, una señal $\mathbb{s}$ se puede expresar en un instante $t \in T$ en un total $q > 0$ de cantidades reales. Entonces el espacio de señal W consiste de q copias del conjunto de números reales ($W = \mathbb{R}^q$). Una señal $\mathbb{s} : T \longrightarrow \mathbb{R}^q$ representa en cada instante de tiempo $t \in T$ un vector :

$$\mathbb{s}(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{s}_1(t) \\ \mathbb{s}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbb{s}_q(t) \end{pmatrix}.$$

El "tamaño"de una señal se mide por normas.

Definición B.2 *Sea* W *un espacio lineal sobre un campo* K, $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$. *Una* norma *sobre* W *es una función denotada por* $||\cdot||, ||\cdot|| : W \longrightarrow \mathbb{R}$, *la cual tiene las siguientes propiedades :*

C.C.Reconocimiento

1. $||\mathbb{s}|| \geq 0$.

2. $||\mathbb{s}|| \geq 0 = 0$ *si y solamente si* $\mathbb{s} = 0$.

3. $||\alpha\mathbb{s}|| = |\alpha|||\mathbb{s}||$.

4. $||\mathbb{s} + \mathbb{p}|| \leq ||\mathbb{s}|| + ||\mathbb{p}||$,

donde $\mathbb{s}, \mathbb{p} \in W$ *y* $\alpha \in K$.

Dado un espacio lineal W y una norma $||\cdot||$ sobre W, el par $(W, ||\cdot||)$ denota un *espacio normado.*

Así, por ejemplo;

1. Si W es $\mathbb{C}^n$ se define la longitud euclideana sobre ese espacio de dimensión finita :

$$||v||_p := (|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall v \in \mathbb{C}^n,$$

donde $p \geq 1$.

a) Si $p = \infty$ se define la norma-∞ :

www.bdigital.ula.ve

$$||v||_\infty := \overset{\max}{i} |v_i|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

2. Si W es el espacio de las matrices $\mathbb{C}^{n\times m}$, se define la norma de *Frobenius* :

$$||M||_F := (\text{traza}(M^*M))^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para} \quad M \in \mathbb{C}^{n\times m},$$

donde M^* es la matriz transpuesta conjugada de M.

Esta norma también se induce por el producto interno de matrices :

$$< M, M >:= \text{traza}(M^*M).$$

3. El valor singular máximo de las matrices de $\mathbb{C}^{n\times m}$ define una norma :

$$\bar{\sigma}(M) := (\text{max. autovalor de } M^*M)^{\frac{1}{2}}.$$

En el caso de señales :

C.C.Reconocimiento

1. Si $\mathbb{s} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ se define la norma-p :

$$||\mathbb{s}(t)||_p := \left(\int_\infty^\infty |\mathbb{s}(t)|_p^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Los casos particulares de interés son :

a) La norma-1 :

$$||\mathbb{s}(t)||_1 := \int_\infty^\infty |\mathbb{s}(t)| dt.$$

b) La norma-2, la energía de una señal :

$$||\mathbb{s}(t)||_2 := \left(\int_\infty^\infty |\mathbb{s}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Un ejemplo particular acá, se refiere a la señal $\mathbb{s}(t)$ la cual se describe por la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad \mathbb{s}(t) = Cx(t),$$

donde A y C son matrices de dimensiones apropiadas. Se sabe que $\mathbb{s}(t) = Ce^{At}x_0$, $x(0) = x_0$. Si A es Hurtwiz entonces

$$||\mathbb{s}(t)||_2^2 = \int_0^\infty \mathbb{s}(t)^T \mathbb{s}(t) dt = x_0^T e^{A^T t} C^T C e^{At} x_0 dt = x_0^T \mathfrak{O} x_0.$$

$\mathfrak{O}$ es el *grammiano de observabilidad* el cual satisface la ecuación :

$$A^T \mathfrak{O} + \mathfrak{O} A + C^T C = 0.$$

c) La norma-∞, la amplitud pico :

$$||\mathbb{s}(t)||_\infty := \overset{\max}{i} |\mathbb{s}_i(t)|.$$

B.2. Sistemas y Normas de Sistemas

Un *sistema* se refiere a cualquier conjunto $\mathcal{S}$ de señales. Desde el punto de vista ingenieril, los sistemas que se estudian se definen por una cierta estructura. Típicamente, esta estructura se caracteriza por dos conjuntos independientes de señales: un conjunto de *señales de entradas* y un conjunto de *señales de salidas*. Así, el sistema describe

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

las relaciones entre estos dos conjuntos de señales, mismas que pueden ser caracterizadas por funciones de transferencias, representaciones en espacio de estados, ecuaciones diferenciales, etc.

Matemáticamente, las relaciones se pueden caracterizar a través de una función o un operador G que transforma las entradas u, tomadas de un universo (espacio de entrada) $\mathcal{U}$, a las señales de salidas y que pertenecen al espacio de salida $\mathcal{Y}$, esto es

$$G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}.$$

En el caso de los sistemas a tiempo continuo, una señal de entrada $u \in \mathcal{U}$ se transforma a una señal de salida $y \in \mathcal{Y}$, con $y = G(u)$, a partir de la convolución :

$$y(t) = (Gu)(t) = (g * u)(t) = \int_{\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

donde g es la *respuesta impulsiva*.

Si se asume que tanto $\mathcal{U}$ y $\mathcal{Y}$ son espacios lineales normados, entonces se dice que G es acotada si existe una constante $\alpha \geq 0$ tal que

www.bdigital.ula.ve

$$||G(u)|| \leq \alpha ||u||.$$

Se puede notar que $||G(u)||$ es la norma definida en el espacio de las señales de salida $\mathcal{Y}$. El hecho de que G sea acotada significa que G es estable con respecto a la selección de la clase de entrada y las correspondientes normas.

Definición B.3 *Sea la aplicación lineal $G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$ acotada. Se define la norma inducida, $||G||$, como :*

$$||G|| := \sup_{u \in \mathcal{U}, u \neq 0} \frac{||Gu||}{||u||}, \quad u \in \mathcal{U}.$$

La $||G||$ se puede interpretar como la "ganancia"máxima de la aplicación $G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$. A partir de la definición lo importante es que la norma de un sistema entrada-salida definido por G depende de la clase de entradas $\mathcal{U}$ y de las normas para las señales $u \in \mathcal{U}$ y $y \in \mathcal{Y}$.

B.2.1. La Norma $\mathcal{H}_2$

La notación $\mathcal{H}_2$ generalmente se refiere a la clase de funciones de una variable compleja que son *analíticas* en el semi-plano complejo derecho. Sea $\mathbb{s}$ una de tales funciones, entonces

C.C.Reconocimiento

su norma $\mathcal{H}_2$

$$||\mathbb{s}||^2_{\mathcal{H}_2} := \sup_{\alpha>0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{s}^*(\alpha + j\omega)\mathbb{s}(\alpha + j\omega)d\omega$$

es finita.

Así, el espacio Hardy $\mathcal{H}_2$ se define por :

$$\mathcal{H}_2 = \{\mathbb{s} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad \mathbb{s} \quad \text{analítica en} \quad \Re(\mathbb{s}) > 0, \quad ||\mathbb{s}||_{\mathcal{H}_2} < \infty\}.$$

Se sabe que el supremo en esta definición de la norma $\mathcal{H}_2$ siempre ocurre en la frontera $\alpha = 0$, [133]. Entonces,

$$||\mathbb{s}||_{\mathcal{H}_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\mathbb{s}^*(\omega)\mathbb{s}(\omega)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En el caso de un sistema entrada-salida representado por la función de transferencia $G(s)$, el cuadrado de la norma $\mathcal{H}_2$ es igual a la energía de la respuesta impulsiva, [133].

Definición B.4 *Sea $G(s)$ la función de transferencia de un sistema SISO (una entrada, una salida). La norma $\mathcal{H}_2$, esto es $||G||_{\mathcal{H}_2}$, se define por :*

$$||G||_{\mathcal{H}_2} := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)G(-j\omega)d\omega\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{B.1}$$

www.bdigital.ula.ve

Para el caso multivariable se tiene :

Definición B.5 *Sea $G(s)$ la función de transferencia de un sistema multivariable de m entradas y p salidas. La norma $\mathcal{H}_2$ se define como*

$$||G(s)||_{\mathcal{H}_2} := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} traza\left[G^*(-j\omega)G(j\omega)\right]d\omega\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{B.2}$$

B.2.2. La Norma $\mathcal{H}_\infty$

Considérese una función de traansferencia G estable en el sentido de que entradas acotadas producen salidas acotadas. Esto es,

$$G : \mathcal{L}_\infty \to \mathcal{L}_\infty,$$

donde $\mathcal{L}_\infty$ representa el espacio de las señales con norma-∞ finita.

Definición B.6 *Sea G una función de transferencia estable. Se define la norma $\mathcal{L}_\infty$-inducida de G como :*

$$||G||_{(\infty,\infty)} := \sup_{u\in\mathcal{L}_\infty} \frac{||G(u)||_\infty}{u_\infty}.$$

C.C.Reconocimiento

En ese mismo sentido G puede definir una transformación de señales de energía a señales de eneergía, es decir, $G : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$, donde $\mathcal{L}_2$ es espacio de las señales con norma-2 finita. Entonces la norma-$\mathcal{L}_2$ inducida de G corresponde a

$$||G||_{(2,2)} := \sup_{u \in \mathcal{L}_2} \frac{||G(u)||_2}{||u||_2}.$$

Se puede demostrar que si G es una función de transferencia estable y del tipo SISO, la $||G||_{(2,2)}$ coincide con el valor máximo en amplitud de su respuesta frecuencial, [133]. Así, la norma-∞ de un sistema entrada-salida se puede definir a partir de la norma-$mathcal L_2$ inducida.

Definición B.7 *Sea G la función de transferencia de un sistema SISO estable y con respuesta frecuencial $\hat{g}(\omega)$. La norma $\mathcal{H}_\infty$ de G, denotada por $||G||_\infty$ se define por*

$$||G||_\infty := ||G||_{(2,2)} = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|.$$

La extensión al caso de sistemas multivariables se realiza a través de la *descomposición en valores singulares* de matrices, [133].

www.bdigital.ula.ve

Sea $H \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Si λ_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ representa los r autovalores no ceros de $H^T H$, entonces el valor singular σ_k es

$$\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Definición B.8 *Sea $G(s)$ la función de transferencia de un sistema multivariable estable. La norma $\mathcal{H}_\infty$ de $G(s)$ se define como*

$$||G(s)||_\infty \quad := \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)),$$

donde $\bar{\sigma}$ es el valor singular máximo.

C.C.Reconocimiento

Apéndice C

Desigualdades Matriciales Lineales, LMI

En esta sección se presenta, de manera introductoria, un estudio sobre las *Desigualdades Matriciales Lineales*, LMI, y su aplicación en la teoría de control.

C.1. Las LMI's

www.bdigital.ula.ve

Las LMI's se refieren a restricciones sobre vectores. Esto es,

Definición C.1 *Una LMI es una restricción sobre un vector $x \in \mathbb{R}^m$ de la forma*

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \geq 0,$$

donde las matrices simétricas $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son dadas y el símbolo $F \geq 0$ significa que F es simétrica y semi-definida positiva, es decir que, para todo v, $v^T F v \geq 0$.

Las LMI's han emergido como una poderosa herramienta en la solución de problemas debido a sus propiedades numéricas, [9]:

- La computación es rápida y confiable. Existen algoritmos muy eficientes de solución tales como los basados en el *método de puntos interiores*, [9].
- Se pueden encontrar todas las soluciones incluyendo las soluciones óptimas.
- Si no hay solución es muy fácil mostrarlo.

Como ejemplo de una LMI, considérese la desigualdad

$$\begin{pmatrix} x_1 - 2 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 \end{pmatrix} < 0,$$

C.C.Reconocimiento

la cual es una LMI en dos variables. En efecto, lo anterior se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} < 0.$$

Otro ejemplo simple se refiere a la desigualdad de Lyapunov

$$F(X) = A^T X + XA + Q > 0,$$

donde se asume que $A, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son dadas y $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es desconocida. Ello define una LMI solamente si Q es simétrica.

Definición C.2 *Sistema de LMI's. Un sistema de desigualdades matriciales lineales es un conjunto finito de LMI's*

$$F_1(x) > 0, \ldots, F_k(x) > 0.$$

Todo sistema de LMI's se puede re-escribir como una única LMI. Específicamente,

$$F(x) := \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_k(x) \end{pmatrix} > 0.$$

www.bdigital.ula.ve

La última desigualdad tiene sentido ya que $F(x)$ es simétrica para cualquier x. Además, puesto que el conjunto de autovalores de $F(x)$ es simplemente la unión de los autovalores de $F_1(x), \ldots, F_k(x)$, cualquier x que satisface $F(x) > 0$ también satisface el sistema $F_1(x) > 0, \ldots, F_k(x) > 0$ y viceversa.

La determinación de la existencia de soluciones para las LMI's se caracteriza por el *problema de factibilidad*.

Supóngase que $F, G, H : \mathbb{V} \to \mathbb{S}$ son funciones afines. La prueba de que exista o no soluciones $x \in \mathbb{V}$ de $F(x) > 0$ se llama el problema de factibilidad. La LMI se dice factible si tal x existe, por el contrario, la LMI $F(x) > 0$ se dice infactible.

Los conjuntos factibles establecen la *convexidad*, una propiedad importante en la solución de problemas de optimización.

El conjunto

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{V} \quad | \quad F(x) < 0\}$$

es *convexo*.

C.C.Reconocimiento

Por otro lado, es posible convertir desigualdades no lineales a desigualdades lineales por medio del *complemento de schur*.

Proposición C.1 *Complemento de Schur. Sea $F : \mathbb{V} \to \mathbb{S}$ una función afin particionada en la forma:*

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{pmatrix},$$

donde $F_{11}(x)$ es cuadrada. Entonces $F(x) > 0$ si y solamente si

$$\begin{cases} F_{11}(x) > 0 \\ F_{22}(x) - F_{12}(x)[F_{11}(x)]^{-1}F_{21}(x) > 0. \end{cases} \tag{C.1}$$

Se puede notar que la segunda desigualdad en (C.1) es una desigualdad matricial no lineal en x. A partir de este resultado, entonces, desigualdades matriciales no lineales de la forma en (C.1) se pueden convertir en LMI. En particular, las desigualdades matriciales no lineales de la forma en (C.1) definen una restricción convexa sobre la variable x en el sentido de que todo x que satisface (C.1) define un conjunto convexo.

Desde el punto de vista de las aplicaciones en control de las desigualdades matriciales lineales, éstas se pueden resumir, a *grosso modo*, en lo siguiente:

- Control óptimo.
- Selección de ganancia.
- Cálculo del margen de estabilidad.
- Síntesis de controladores robustos.

www.bdigital.ula.ve

En cuanto a los resultados que son de interés en este trabajo, las aplicaciones de las LMI's se fundamentan en un resultado muy importante, el *Lema Real Acotado*.

Lema C.1 *Sea un sistema dinámico lineal cúya función de transferencia está dada por:*

$$H_{M\omega u}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array}\right] = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}.$$

Se asume un $\rho_\infty > 0$. Entonces, $\mathcal{A}$ es ***estable*** *y $||H_{M\omega u}(s)||_\infty < \rho_\infty$ si y solo si existe una matriz simétrica $\mathcal{P}$ tal que*

$$\begin{gathered} \mathcal{P} > 0 \\ \begin{pmatrix} \mathcal{A}^T\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} & \mathcal{P}\mathcal{B} & \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T\mathcal{P} & -\rho_\infty \mathbb{I} & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & -\rho_\infty \mathbb{I} \end{pmatrix} < 0 \end{gathered}$$

El lema define el conjunto de LMI a partir del cual se puede dar solución al diseño de controladores óptimos robustos en $\mathcal{H}_\infty$.

C.C.Reconocimiento

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Bibliografía

[1] J. Aguilar and F. Rivas, *Introducción a las técnicas de computación inteligente*, Universidad de Los Andes, 2001.

[2] E. Alcorta-García and P.M. Frank, *Fault detection and isolation in nonlinear systems*, European Control Conference (Karlsruhe), 1999, p. F0246.

[3] Jim August, *Applied reliability-centered maintenance*, Pennwell Publishing, 2000.

[4] R.V. Beard, *Failure accommodation in linear systems throught self-reorganization*, Ph.D. thesis, Mass. Inst. Technol., Cambridge, 1971.

[5] G. Besançon, *A viewpoint on observability and observer design for nonlinear systems*, New Directions in Nonlinear Observer Design, vol. 244, Springer-Verlag, 1999, pp. 3–22.

[6] D. Bestle and M. Zeitz, *Canonical form observer design for non-linear time-variable systems*, Int. J. Control **38** (1983), no. 2, 419–431.

[7] M. Blanke, S.A. Bogh, R.B. Jorgensen, and R.J. Patton, *Fault detection for diesel engine actuator - a benchmark for fdi*, Control Eng. Practice **3** (1995), no. 12, 1731–1740.

[8] N. Bourbaki, *Lie groups and lie algebras*, Elements of Mathematics, vol. 1-3, Springer, 1989.

[9] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, 1994.

[10] K. Cabezas, *Sistema de detección y diagnóstico de fallas basado en un método híbrido*, Master's thesis, Universidad de Los Andes, Mérida, 1999.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

[11] J. Chen and R.J. Patton, *$\mathcal{H}_\infty$ formulation and solution for robust fault diagnosis*, 14th IFAC World Congress (Beijing), vol. P, IFAC, 1999, pp. 127–132.

[12] ———, *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*, Kluwer Academic Publisher, 1999.

[13] J. Chen, R.J. Patton, and H. Zhang, *Design of unknown input observers and robust fault detection filters*, Int. Journal of Control **63** (1996), no. 5, 85–105.

[14] J. Chen, R.J. Patton, and H.Y. Zhang, *Design of robust structured and directional residuals for fault isolation via unknown input observers*, 3rd European Control Conference (Roma), 1995, pp. 348–353.

[15] M. Chilali and P. Gahinet, *$\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An lmi approach*, IEEE Trans. Automatic Control **41** (1996), no. 3, 358–367.

[16] W.H. Chung and Jason L. Speyer, *A game theoretic filter for fault detection and isolation*, 13th IFAC World Congress (San Francisco), 1996, pp. 185–190.

www.bdigital.ula.ve

[17] C. Commault, *On the disturbed fault detection and isolation problem*, Systems & Control Letters **38** (1999), no. 5, 73–78.

[18] G. Comtet-Varga, J.Ph. Cassar, and M. Staroswiecki, *Analytic redundancy relations for state affine systems*, 4th European Control Conference (Brussels), 1997.

[19] C.E. de Souza, U. Shaked, and M. Fu, *Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering with parametric uncertainty and deterministic input signal*, 31st IEEE Conf. Decision and Control (Tucson), 1992, pp. 2305–2310.

[20] S. Diop, *Elimination in control theory*, Math. Control, Signals and Systems **4** (1991), no. 1, 17–32.

[21] S. Diop and M. Fliess, *Nonlinear observabilitty, identifiability, and persistent trajectories*, 30th IEEE Conf. on Decision and Control (Brighton), 1991, pp. 714–719.

[22] R.K. Douglas and J.L. Speyer, *Robust fault detection filter design*, AIAA J. of Guidance, Control and Dynamics **19** (1996), no. 1, 214–218.

C.C.Reconocimiento

[23] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis, *State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems*, IEEE Trans. Automatic Control **34** (1989), no. 8, 831–847.

[24] G.R. Duan, R.J. Patton, J. Chen, and Z. Chen, *A parametric approach for robust fault detection in linear systems with unknown disturbances*, IFAC SAFEPROCESS'97, 1997.

[25] G. E. Dullerud and F. Paganini, *A course in robust control theory: A convex approach*, Springer, 2000.

[26] A. Edelmayer, *Robust detection filter design in uncertain dynamical systems: Summary and new results*, Internal Report of the Systems and Control Laboratory - SZTAKI (Budapest), 1996.

[27] A. Edelmayer, J. Bokor, and L. Keviczky, *An $\mathcal{H}_\infty$ filtering approach to robust detection of failures in dynamical systems*, 33th IEEE Conference on Decision and Control (Lake Buena Vista), 1994, pp. 3037–3039.

[28] A. Edelmayer, J. Bokor, F. Szigeti, and L. Kevicsky, *Robust detection filter design in the presence of time-varying system perturbations*, Automatica **33** (1997), no. 3, 471–475.

[29] M. Fliess, *A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems*, Systems & Control Letters **8** (1986), 147–151.

[30] ———, *Automatique et corps differentiels*, Forum Mathématique **1** (1989).

[31] ———, *Controllability revisited*, Forum Mathématique, Springer-Verlag, 1992.

[32] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon, *Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples*, Int. J. Control **61** (1995), 1327–1361.

[33] P.M. Frank, *Robust model-based fault detection in dynamical systems*, IFAC On-line Fault Detection and Supervision in the Chemical Process Industries (Delaware), IFAC, 1992, pp. 1–13.

[34] ———, *Enhancement of robustness in observer-based fault detection*, Int. J. Control **59** (1994), no. 4, 955–981.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

[35] P.M. Frank and B. Koppen, *Review of optimal solutions to the robustness problem in observer-based fault detection*, Journal of Systems and Control Engineering **207** (1993), no. 12, 105–112.

[36] P.M. Frank, G. Schreier, and E. Alcorta-García, *Nonlinear observers for fault detection and isolation*, New Directions in Nonlinear Observer Design, vol. 244, Springer-Verlag, 1999, pp. 399–422.

[37] M. Fu, C.E. de Souza, and L. Xie, $\mathcal{H}_\infty$ *estimation for uncertain systems*, Int. J. of Robust and Nonlinear Control **2** (1992).

[38] P. Gahinet and P. Apkarian, *A linear matrix inequality approach to* $\mathcal{H}_\infty$ *control*, Int. J. of Robust and Nonlinear Control **4** (1994), no. 4, 421–448.

[39] J. C. Geromel and M. de Oliveira, $\mathcal{H}_2$ *and* $\mathcal{H}_\infty$ *robust filtering for convex bounded uncertain systems*, 37st Conf. on Decision and Control (Tampa), 1998, pp. 146–151.

[40] J.J. Gertler, *Residual generation in model-based fault diagnosis*, Control-Theory and Avanced Technology **9** (1993), 259–285.

www.bdigital.ula.ve

[41] ———, *Fault detection and diagnosis in engineering systems*, Marcel Dekker, 1998.

[42] R. Hermann and A.J. Krener, *Nonlinear controlability and observability*, IEEE Trans. Automatic Control **22** (1977), no. 5, 728–740.

[43] R.M. Hirschorn, *Invertibility of multivariable nonlinear control systems*, IEEE Trans. Automatic Control **24** (1979), no. 6, 855–865.

[44] M. Hou and C. Muller, *Fault detection and isolation observers*, Int. J. Control **60** (1994), no. 5, 827–846.

[45] M. Hou and R.J. Patton, *Input observability and input reconstruction*, Automatica **34** (1998), no. 6, 789–794.

[46] R. Iserman, *Process fault detection based on modeling and estimation methods - a survey*, Automatica **20** (1984), no. 4, 387–404.

[47] R. Iserman and P. Ballé, *Trends in the application of model based fault detection and diagnosos of technical processes*, Control Eng. Practice **5** (1997), no. 5, 709–719.

C.C.Reconocimiento

[48] A. Isidori, *Nonlinear control system*, Springer-Verlag, 1989.

[49] Faryar Jabbari, *Output feedback controllers for systems with structured uncertainty*, IEEE Trans. Automatic Control **42** (1997), no. 5, 715–719.

[50] H.L. Jones, *Failure detection in linear systems*, Ph.D. thesis, Mass. Inst. Technol., Cambridge, 1973.

[51] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice-Hall, 1980.

[52] R.E. Kalman, *On the general theory of control systems*, First IFAC World Congress, 1960.

[53] R.E. Kalman, P. Falb, and M. Arbib, *Topics in mathematical system theory*, Mc Graw-Hill, 1969.

[54] P.P. Khargonekar and M.A. Rotea, *Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering*, 31th IEEE Conf. on Decision and Control, 1992, pp. 2299–2304.

[55] P.P. Khargonekar and T.L. Ting, *Fault detection in the presence of modeling uncertainty*, 32nd IEEE Conf. on Decision and Control (San Antonio), 1993, pp. 1716–1721.

[56] H.W. Knoblock, A. Isidori, and D. Flockerzi, *Topics in control theory*, Birkhäuser Verlag, 1993.

[57] F. Kratz, W.Ñuninger, and J. Ragot, *Finite memory observer based method for failure detection in dynamic systems*, 11th IFAC Symp. on System Identification, SYSID'97 (Fukuoka - Japan), 1997, pp. 1189–11194.

[58] A.J. Krener and A. Isidori, *Linearization by output injection and nonlinear observers*, Systems & Control Letters **3** (1983), 47–55.

[59] A.J. Krener and W. Respondek, *Nonlinear observers with linearizable error dynamics*, SIAM J. Control & Optimization **23** (1985), 197–216.

[60] Joel Levitt, *The handbook of maintenance management*, Industrial Press, 1997.

[61] D.G. Luenberger, *Observers for multivariable systems*, IEEE Trans. Automatic Control **31** (1964), no. 9.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

[62] ———, *Observing the state of a linear system*, IEEE Trans. Mil. Electron **8** (1964).

[63] R.S. Mangoubi, *Robust estimation and failure detection*, Springer-Verlag, 1998.

[64] R.S. Mangoubi and A. Edelmayer, *Model based fault detection: The optimal past, the robust present and a few thoughts on the future*, 4th IFAC SAFEPROCESS (Budapest), vol. 1, IFAC, 2000, pp. 64–75.

[65] P. Martin, R.M. Murray, and P. Rouchon, *Flat systems*, European Control Conference (Bruxelles), ECC, 1997, pp. 211–261.

[66] M.A. Massoumnia, *A geometric approach to the synthesis of failure detection filters*, IEEE Trans. Automatic Control **31** (1986), no. 9, 839–846.

[67] I. Masubuchi, A. Ohara, and N. Suda, *Lmi-based output feedback controller design: Using a convex parametrization of full-order controllers*, American Control Conference (Seattle), ACC, 1995, pp. 3473–3477.

[68] C.D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, 2000.

www.bdigital.ula.ve

[69] John Moubray, *Reliability-centered maintenance*, Industrial Press, 2001.

[70] K.M. Nagpal and P.P. Khargonekar, *Filtering and smoothing in an $\mathcal{H}_\infty$ setting*, IEEE Trans. Automatic Control **36** (1991), no. 2, 152–166.

[71] H.Ñiemann and J. Stoustrup, *Multi objective design techniques applied to fault detection and isolation*, American Control Conference (Philadelphia), ACC, 1998, pp. 4496–4500.

[72] H.H. Niemann and J. Stoustrup, *Filter design for failure detection and isolation in the presence of modelling errors and disturbances*, Conference on Decision and Control (Kobe), CDC, 1996, pp. 1155–1160.

[73] H.C. Nieuwenhuis, *Efficient maintenance in the 90's : A challenge*, PACO, New York, 1990.

[74] H.Ñijmeijer and A.J. van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, 1990.

C.C.Reconocimiento

[75] W.Ñunninger, F. Kratz, and J. Ragot, *Finite memory generalised state observer for failure detection in dynamic systems*, 37th IEEE Conference on Decision and Control (Tampa - Florida), CDC, 1998, pp. 581–585.

[76] F. Olivier, *Some theoretical problems in effective differential algebra and their relation to control theory*, Proc. NOLCOS'92 (Barcelona), vol. 1, 1992, pp. 301–306.

[77] J. O'Reilly, *Observers for linear systems*, Academic Press, 1983.

[78] A. Bulent Ozguler, *Linear multichannel control: A system matrix approach*, Prentice Hall, 1994.

[79] Jaehong Park, Y. Halevi, and Giorgio Rizzoni, *A new interpretation of the fault detection filter: Part 2. the optimal detection filter*, Int. J. Control **60** (1994), 1339–1351.

[80] Jaehong Park and Giorgio Rizzoni, *A new interpretation of the fault detection filter: Part 1. closed-form algorithm*, Int. J. Control **60** (1994), 767–787.

[81] Jaehong Park, Giorgio Rizzoni, and William B. Ribbens, *On the representation of sensors faults in fault detection filters*, Automatica **30** (1994), 1793–1795.

[82] R.J. Patton and J. Chen, *Robust fault detection using eigenstructure assignment: A tutorial consideration and some new results*, 30th IEEE Conference on Decision and Control (Brighton), 1991, pp. 2242–2247.

[83] ———, *Observer-based fault detection and isolation: Robustness and applications*, Control Eng. Practice **5** (1997), 671–682.

[84] R.J. Patton, P.M. Frank, and R.N. Clark, *Issues of fault diagnosis for dynamical systems*, Springer-Verlag, 2000.

[85] R.J. Patton, P.M. Frank, and R.N. Clark (Editors), *Fault diagnosis in dynamic systems: Theory and application*, Control Engineering Series, Prentice Hall, New York, 1989.

[86] R.J. Patton, H.Y. Zhang, and J. Chen, *Modelling of uncertainties for robust fault diagnosis*, 31th IEEE Conference on Decision and Control (Tucson), 1992, pp. 921–926.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

[87] Ricardo Sánchez Peña, *Introducción a la teoría de control robusto*, AADECA, 1992.

[88] C. De Persis and A. Isidori, *On the problem of residual generation for fault detection in nonlinear systems and some related facts*, European Control Conference (Karlsruhe), 1999, p. F0828.

[89] A.R. Phelps, *On constructing nonlinear observers*, SIAM J. Control & Optimization **29** (1991), 516–534.

[90] Z. Qiu and J. Gertler, *Robust fdi systems and $\mathcal{H}_\infty$-optimization: Disturbances and tall fault case*, 32nd IEEE Conf. on Decision and Control (San Antonio), 1993, pp. 1710–1715.

[91] A. Ríos-Bolívar, *Généralisation des méthodes de synthése dóbservateurs de type luenberger*, Master's thesis, Université Paul Sabatier, 1998.

[92] ———, *Sur la synthèse de filtres de détection de défaillances*, Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001.

www.bdigital.ula.ve

[93] ———, *Detección y diagnóstico de fallas en procesos industriales*, II Simposio Internacional de Automatización y Nuevas Tecnologías TECNO-2002 (Mérida - Venezuela), 2002.

[94] A. Ríos-Bolívar and G. García, *Robust filters for faults detection and diagnosis: An $\mathcal{H}_\infty$ optimization approach*, LAAS Report No. 00359 (Toulouse - France), 2000.

[95] ———, *Robust filters for fault detection and diagnosis: An $\mathcal{H}_\infty$ optimization approach*, 6th European Control Conference (Porto - Portugal), 2001, pp. 132–137.

[96] A. Ríos-Bolívar, G. García, F. Szigeti, and J. Bernussou, *A fault detection and isolation filter for linear systems with perturbations*, 14th IFAC World Congress (Beijing), vol. O, 1999, pp. 563–568.

[97] A. Ríos-Bolívar, F. Rivas-Echeverría, and G. Mussalli, *Invertibility and neural networtks based fdi filter*, IASTED Conference on Intelligent Systems ISC'02 (Tsukuba - Japan), 2002.

C.C.Reconocimiento

[98] A. Ríos-Bolívar and F. Szigeti, *A fdi filter based-on inversion for nonlinear systems*, Advances in Systems Science: Measurements, Circuits and Control, vol. 1, ch. 3, pp. 35–40, WSES Press, 2001.

[99] ———, *A fdi filter based-on inversion for nonlinear systems*, Proc. 5th WSES/IEEE World Multiconference on Circuits, Systems, Communications and Computers (CSCC 2001) (Crete - Greece), vol. CD-ROM, 2001, pp. 3171–3176.

[100] A. Ríos-Bolívar, F. Szigeti, and G. Garcia, *On fdi filter and system invertibility*, 15th IFAC World Congress (Barcelona - Spain), 2002.

[101] A. Ríos-Bolívar, F. Szigeti, G. García, and J. Bernussou, *A fault detection and isolation filter for discrete-time linear systems with disturbances*, Dynamic and Control Conference Dycons'99 (Ottawa - Canada), 1999.

[102] A. Ríos-Bolívar, F. Szigeti, and R. Tarantino, *An approach for fault detection filter design*, Dynamic and Control Conference Dycons'99 (Ottawa - Canada), 1999.

[103] J.F. Ritt, *Algebra differential*, American Mathematical Society, 1950.

www.bdigital.ula.ve

[104] F. Rivas, A. Ríos-Bolívar, and J. Casale, *Neural network-based auto-tuning for pid controllers*, Neural Network World **11** (2001), no. 3, 277–284.

[105] M.A. Sadrnia, J. Chen, and R.J. Patton, *Robust $\mathcal{H}_\infty/\mu$ observer-based residual generation for fault diagnosis*, 3th IFAC SAFEPROCESS (Hull), 1997, pp. 155–162.

[106] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, *Multiobjective output-feedback control via lmi optimization*, IEEE Trans. Automatic Control **42** (1997), no. 7, 896–911.

[107] U. Shaked and Y. Theodor, *$\mathcal{H}_\infty$-optimal estimation: A tutorial*, 31st IEEE Conf. Decision and Control (Tucson), 1992, pp. 2278–2286.

[108] L-C Shen and P-L Hsu, *Robust design of fault isolation observers*, Automatica **34** (1998), no. 11, 1421–1428.

[109] A.Ye. Shumsky, *Nonlinear observer-based parameter estimation and fault diagnosis in dynamic systems*, European Control Conference (Karlsruhe), 1999, pp. F1053–4.

[110] L.M. Silverman, *Inversion of multivariable linear systems*, IEEE Trans. Automatic Control **14** (1969), no. 3, 270–276.

C.C.Reconocimiento

[111] Bjorn Sohlberg, *Supervision and control for industrial processes*, Springer Verlag, 1998.

[112] M. Staroswiecki and G. Comtet-Varga, *Fault detectability and isolability in algebraic dynamics systems*, European Control Conference (Karlsruhe), 1999, p. F0452.

[113] F. Szigeti, *Kalman's rank condition for infinite-dimensional time-dependent systems*, Proc. Differentil Eq. Conference: equadiff'91, 1991, pp. 927–931.

[114] ———, *A differential algebraic condition for controllability of time varying linear systems*, Proc. 31st IEEE Control on Decision Conference, 1992, pp. 3088–3090.

[115] F. Szigeti, J. Bokor, A. Edelmayer, and R. Tarantino, *Fault detection filter design for linear time varying systems: Algebraic-geometric approach*, 4th European Control Conference ECC'97, 1997, pp. 891–895.

[116] F. Szigeti and A. Ríos-Bolívar, *Iterative modelling in h_∞ framework*, Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Comp. **20** (2001), 221–235.

www.bdigital.ula.ve

[117] ———, *System inversion and fault detection: The failure affine nonlinear case*, 10th Mediterranean Conference on Control and Automation (Lisboa - Portugal), 2002.

[118] F. Szigeti, A. Ríos-Bolívar, and R. Tarantino, *Fault detection and isolation filter design by inversion: The case of linear systems*, 4th IFAC SAFEPROCESS Conference (Budapest - Hungary), 2000, pp. 379–384.

[119] F. Szigeti, C. E. Vera-Rojas, and A. Ríos-Bolívar, *Stabilization and detection of time varying linear systems*, 4th European Control Conference ECC'97, 1997, pp. 619–623.

[120] R. Tarantino, F. Szigeti, and E. Colina, *Generalized luenberger observer-based-fault detection filter design: An industrial application*, Control Engineering Practice **8** (2000), no. 6, 665–671.

[121] C.C. Tsui, *A general failure detection, isolation, and accomodation system with model uncertainty and measurement noise*, IEEE Trans. Aut. Control **39** (1994), no. 11, 2318–2321.

C.C.Reconocimiento

[122] V.S. Varadarajan, *Lie groups, lie algebras, and their representations*, Springer-Verlag, 1984.

[123] C.E. Vera, *Controllability and observability of time-dependent linear systems, having solvable associated lie algebra*, Proc. of Congress Latino Americano de Controle Automático, 1994, pp. 437–442.

[124] J. Wei and E.Ñorman, *On global representation of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964).

[125] J.E. White and J.L. Speyer, *Detection filter design: Spectral theory and algorithms*, IEEE Trans. Automatic Control **32** (1987), 593–603.

[126] A.S. Willsky, *A survey of design methods for failure detection in dynamical systems*, Automatica **12** (1976), no. 11, 601–611.

[127] ———, *Detection of abrupt changes in dynamics systems*, Lectures Notes in Control and Inf. Sciences, vol. 77, Springer-Verlag, 1986.

[128] W.M. Wonham, *Linear mulivariable control: A geometric approach*, Springer-Verlag, 1985.

[129] D. Yu and D.N. Shields, *A bilinear fault detection observer*, Automatica **32** (1996), 1597–1602.

[130] L.A. Zadeh and C.A. Desoer, *Linear system theory: The state space approach*, McGraw-Hill, 1963.

[131] G. Zames and B. A. Francis, *Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness*, IEEE Trans. on Autom. Control **AC-28** (1983), no. 5, 585–601.

[132] Q. Zhang, M. Basseville, and A. Benveniste, *Fault detection and isolation in non-linear dynamic systems: A combined input-output and local approach*, Automatica **34** (1998), no. 11, 1359–1373.

[133] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice-Hall, 1996.

[134] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall, 1996.

www.bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento