



Universidad de los Andes
Centro de Física Fundamental
Área de Caos y Sistemas Complejos

**Caracterización de la Interfaz en Sistemas
Multiestables Forzados.**

www.bdigital.ula.ve

Trabajo de grado presentado ante la ilustre
Universidad de Los Andes
como requisito parcial para optar al Título de:
Licenciado en Física

Presentado por:
Br. Dianela A. Osorio B.

Tutor:
Dr. Kay Tucci.

Mérida, Mayo del 2019

Resumen

Se propone un modelo para estudiar la interfaz en un sistema multiestable, para ello se modifica el modelo de Miller Huse, introduciendo dos tipos de elementos forzadores, ubicados en los extremos de una malla 2D con condiciones de Von Neumann. Se estudia el efecto de los parámetros del modelo con la longitud de la interfaz y la afinidad, lo que nos permitió caracterizar la interfaz y sus distintos comportamientos, también se encontró que solo para ciertos valores de los parámetros, la interfaz se adapta a una forma conocida.

www.bdigital.ula.ve

Índice general

Resumen	I
Introducción	1
1. Marco Teórico	3
1.1. Sistemas complejos	3
1.2. Multiestabilidad	5
1.3. Fase, interface y transición de fase	7
1.4. Mapas caóticos acoplados	9
1.5. Modelo de Miller Huse	11
2. Nuestro estudio	16
Conclusión	26
Bibliografía	27

-¿La ciencia es buena o mala? ...

-Depende del alma que la utilice.

Introducción

Cuando la física comienza a adentrarse en el estudio de fenómenos en todas las escalas de longitud, inicia la conjunción de la teoría del caos, la física estadística y las técnicas computacionales, dando paso al paradigmático campo de los sistemas complejos. Desde entonces ha sido objeto de mucha atención en la literatura científica actual, incorporándose cada vez más en colaboraciones multidisciplinares.

Un importante papel de estos desarrollos y sus correspondientes aplicaciones se nota importando ideas de mecánica estadística, un sencillo análogo, donde el tema central y en cierto sentido estas medidas contienen toda la información relevante del sistema, permitiendo así, la interpretación a una variedad de fenómenos naturales y artificiales que poseen características universales independientemente de su contexto (social, biológico, físico, climatológicos, etc.).

Cuando un sistema está fuera del equilibrio, exhibe comportamientos ricos e interesantes de comprender, es usual que éstos sistemas presenten multiestabilidad, es decir, la coexistencia de más de un estado de equilibrio en la misma región de parámetros, esto implica que un sistema puede formar dominios, donde además, los elementos semejantes entre sí se agrupan, creando zonas diferenciadas unas de otras, con fronteras entre ellas llamadas interfaces. La interfaz ofrece mucha información y tiene una enorme importancia en el estudio de una gran cantidad de procesos naturales y artificiales, ya que en ella ambas fases pierden sus propiedades características, el sistema sobrelleva procesos de ajuste a fin de adaptarse microscópicamente a esta nueva situación, dando lugar a nuevas fuerzas y cambios en la topología de la dinámica que son muy diferentes a las existentes en los medios por separado.

De aquí parte nuestra motivación e interés en este trabajo, cuyo objetivo radica en *caracterizar las propiedades de la interfaz que se presentan entre los dominios de las fases en sistemas multiestables*, la descripción estadística de estos sistemas dinámicos es posible, y una de las maneras más comunes de entender su comportamiento es por medio de modelos, por ello hemos decidido fijar nuestra atención en el modelo de Miller Huse, un modelo biestable que crea dominios con interfaces dinámicas, es un análogo determinista y caótico del modelo de Ising 2D.

Básicamente este modelo consiste en una red de mapas caóticos acoplados (con simetría impar de modo que surjan dominios de giro o signos opuestos) de manera difusa a sus vecinos más próximos, *modificaremos* dicho modelo *agregando elementos forzadores* que induzcan un cambio en el sistema, ellos afectarán a los mapas vecinos, pero no se verán afectados por ninguno de ellos.

Antes de comenzar la discusión del modelo a emplear y facilitar la interpretación de resultados, se ha propuesto todo un capítulo a una revisión de conceptos básicos y que consideramos más importantes, como : Introducción a conceptos en sistemas complejos, breve explicación a las transiciones de fase, fase, interfaz y el fenómeno de la multiestabilidad, abordándolos desde muy diversas perspectivas y disciplinas; seguidamente, hablaremos un poco de mapas caóticos acoplados para finalmente sin detenernos demasiado, revisar el modelo original de Miller Huse. Luego de dar unas pinceladas en estos temas esperamos haber convencido al lector de nuestra motivación para el presente trabajo de grado.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 2 se expone nuestro estudio, aquí mismo se presentan y analizan los gráficos y resultados obtenidos, para así dar en otro apartado las conclusiones, posibles extensiones y aplicaciones. Finalmente se presenta una lista con las referencias dadas en el desarrollo del texto para aquellos que quieran profundizar más en éstos temas.

www.bdigital.ula.ve

“ Poco a poco la verdad nos es revelada, a medida que aprendemos vamos viendo la luz”

Dr. Mario Cosenza.

Capítulo 1

Marco Teórico

Es imposible resumir en un corto espacio todo el trabajo que se ha realizado en los últimos años que sustenta nuestra investigación, por eso en este capítulo se explican sucintamente las bases en las que se desarrolla y enfoca nuestro trabajo de grado. Presentaremos lo necesario para enmarcar al lector en el contexto y familiarizarlo con la jerga empleada, de igual modo se le invita a que revise la bibliografía en caso de que quiera profundizar en estos temas, y aportar a la construcción de nuevo conocimiento para futuras investigaciones.

1.1. Sistemas complejos

Un *sistema* es un conjunto de elementos o partes que interaccionan entre sí a fin de alcanzar un objetivo concreto, de aquí se desprenden dos implicaciones fundamentales: 1) Existe una influencia mutua entre sus elementos componentes, y 2) Una serie de elementos reunidos que no persigue un propósito común, de ninguna manera constituye un sistema. Los sistemas pueden dividirse en *dinámicos* [1] y *estáticos*, según modifiquen o no su estado interno a medida que transcurre el tiempo.

Para que el comportamiento de un sistema esté adecuadamente descrito, es necesario conocer además de sus elementos, las interacciones o relaciones entre ellos y sus estados; generalmente se define un espacio apropiado, denominado *espacio de fase*, espacio teórico donde cada estado del sistema está asignado a una ubicación espacial única y describe la trayectoria evolutiva del sistema. En algunos casos, las magnitudes en cuestión son mensurables en un sentido estricto, en otros casos, dichas magnitudes solo pueden deducirse u observarse sobre la base de varios tipos de consideraciones, como lo que sucede cuando no solo magnitudes cuantitativas entran en juego.

Cuando un sistema se considera como un todo, como algo global y colectivo, emergen propiedades nuevas que no pueden atribuirse a ninguno de sus elementos, y, por otra parte, se reprimen o inhiben algunas de sus propiedades intrínsecas.

Un sistema se dice *lineal* si las funciones de las ecuaciones que describen su dinámica son lineales, es decir, todas las variables solo aparecen elevadas a la primera potencia, por el contrario, un sistema es *no lineal* si aparecen productos, otras potencias o funciones de la variable en cuestión, la ausencia en estas ecuaciones de dependencia lineal, esto es, falta de proporcionalidad entre causas y efectos, hace difícil obtener una solución analítica. Todo sistema lineal es precisamente igual a la suma de sus partes, pero esta propiedad es rara en la naturaleza, donde las partes interfieren, cooperan o compiten produciendo efectos no lineales y dejando de lado el *principio de superposición*.

Según su grado de predictibilidad, un sistema se dice *determinístico* cuando su comportamiento es bastante predecible y parece seguir unas ciertas reglas, y *estocástico* cuando no hay certeza de su estado futuro, sólo una probabilidad, aparece un orden estadístico, un orden promedio. No obstante, muchos sistemas dinámicos no lineales se comportan en ciertas condiciones de forma tan compleja que parecen probabilísticos, aunque en realidad son determinísticos, a pesar de que las reglas a nivel local son muy simples, el sistema a nivel global puede tener un comportamiento inesperado, se trata de *sistemas caóticos* [2,3], sistemas irregulares, altamente impredecibles y muy sensibles a las condiciones iniciales, aunque parecen evolucionar de forma aleatoria y errática, estos sistemas tienen en realidad un cierto orden interno subyacente [4].

Otra característica de estos sistemas es que en ellos pueden producirse *bifurcaciones* [5,6] en sus estados accesibles, las bifurcaciones vienen a explicar cómo se modifica el comportamiento en determinadas circunstancias, de forma tal que en vez de seguir una trayectoria temporal hacia un determinado atractor, éste es sustituido por otro de forma brusca.

Por el momento, no existe una definición precisa y absolutamente aceptada de lo que es un *sistema complejo* [7], son sistemas en los que se presentan algunas peculiaridades comunes: 1) Están compuestos por una gran cantidad de elementos relativamente idénticos, 2) La interacción entre sus elementos es local y origina un comportamiento emergente que no puede explicarse a partir de dichos elementos tomados aisladamente; 3) Es muy difícil predecir su evolución dinámica futura, o sea, es prácticamente imposible vaticinar lo que ocurrirá más allá de un cierto horizonte temporal [8,9].

Esta clase de sistemas no constituyen un caso raro ni excepcional, sino que se manifiestan en la inmensa mayoría de los fenómenos que se observan a diario. Ejemplos de sistemas complejos lo constituyen los fluidos en régimen turbulento, la dinámica de la atmósfera, las reacciones químicas, la propagación de enfermedades infecciosas, los procesos metabólicos de las células; el mercado financiero mundial, los movimientos de grupos de animales, la aparición aperiódica de epidemias, la arritmia del corazón, la dinámica social, la red neuronal del cerebro, etc.

A veces, la evolución de los sistemas presentan características que los hacen fácilmente comprensibles sobre la base de sus aspectos fenomenológicos, y también, al menos en parte, predecible; por ello, la descripción de la dinámica de un sistema es particularmente interesante, dado que se puede intentar hacer predicciones sobre su comportamiento futuro. Éste interés ha sido impulsado considerablemente por técnicas como la *simulación y modelado de sistemas*, aunque algo controvertido, se logró la transferencia de conceptos y analogías de un campo a otro, considerando isomorfismos estructurales en las interacciones entre los elementos que componen un tipo de sistema, los modelos se convirtieron así en un instrumento útil [10] para dar a los datos un salto cualitativo mediante su análisis e interpretación. Un modelo es una abstracción, donde se pasan por alto varios aspectos que se consideran secundarios y se centran en una sola parte de una mayor imagen, en un conjunto específico de características del sistema que se quiere describir.

1.2. Multiestabilidad

En sistemas dinámicos, multiestabilidad significa la coexistencia de diferentes estados estables finales posibles para un conjunto de parámetros dados, el estado final al cual el sistema convergerá, depende de las condiciones iniciales del sistema, es decir, la dinámica del sistema correspondiente a uno de los atractores es definida por la condición inicial [11, 12].

En sistemas no lineales ocurre con frecuencia el fenómeno de la multiestabilidad, los sistemas dinámicos multiestables son muy complejos debido a la interacción entre atractores, esto introduce nuevas características a las ya conocidas en sistemas caóticos tradicionales; adicionalmente a una alta sensibilidad a las condiciones iniciales, las zonas de atracción en el espacio de fase de los sistemas multiestables pueden mezclarse de formas muy complejas, también el pequeño cambio de un parámetro puede producir un cambio en el número de atractores coexistentes, ellos pueden aparecer y desaparecer.

La multiestabilidad aparece en una amplia variedad de sistemas, puede presentarse de forma habitual en la naturaleza o puede ser creada de manera convencional por la ciencia:

- A nivel filosófico, el ser humano ha sido definido como un sistema de tipo multiestable, un sistema en el que las distintas formas de organización del sujeto están interactuando de continuo, pero tienen una relativa autonomía [13].
- En percepción, la multiestabilidad ocurre cuando un solo estímulo físico produce alternancias entre diferentes percepciones subjetivas [14, 15]. Hoy día se estudia la percepción de los individuos con fines educativos, psicológicos, y de mercadotecnia.
- En química, para el estudio de reacciones y sistemas químicos [16, 17]

- En el contexto de la biología, permite comprender el desarrollo humano y las distintas formas de enfermedades por medio de la diferenciación y el ciclo celular, la especiación simpátrica, la generación de respuestas bioquímicas similares a los interruptores, el comportamiento de fenotipos, etc. [18, 19].
- En la dinámica del clima, ha permitido estudiar la variabilidad atmosférica, la dinámica de la capa de hielo, la desertificación del Sahara, y su comportamiento al verse afectado por cambios en las condiciones iniciales como fluctuaciones aleatorias en la dirección del viento, la presión atmosférica o la temperatura [20–24].
- En sistemas sociales y económicos, la multiestabilidad se ha introducido en modelos de redes, en donde los agentes representados por nodos tienen diversas características que son actualizadas por la dinámica en cuestión, de esta forma la red evoluciona a uno o a varios estados dependiendo de diversos factores [25–28]
- En la música, se habla de multiestabilidad en referencia al modo en el que el contexto transforma el uso de los instrumentos musicales electrónicos y digitales, una triangulación entre el instrumentista, el instrumento y un resultado audible [29].
- En psicología, estudios proporcionan una explicación no reductiva de los estados mentales y su alta sensibilidad al ruido y a las condiciones iniciales [30].
- En medicina, la multiestabilidad es un atributo fundamental de la dinámica del sistema neuronal y cardíaco en condiciones normales y patológicas [31–33].
- En ingeniería, es un fenómeno altamente empleado en el estudio de sistemas láseres y circuitos electrónicos, en la práctica de la comunicación, en el análisis de ondas gigantes para oceanografía, en tecnología especializada como el diseño de marcapasos que permitan estabilizar el ritmo a una frecuencia deseada, entre otros [34, 35].
- En modelos y sistemas caóticos como en el mapa de Hénon [36, 37], en osciladores de Duffing y de van der Pol [38–42], en quimeras [43, 44], en el modelo de Kicked rotor [45], el modelo Bridge [46]; las ecuaciones de Lorenz [47], el modelo de Ising [48–50], el modelo de Axelrod [51, 52], el modelo de Deffuant [53], el modelo de Miller Huse [54], el modelo de Kuramoto [55, 56], entre un largo etcétera.

Como se ha podido observar, el fenómeno de la multiestabilidad es prácticamente universal, de ahí radica su importancia y el afán de la ciencia por estudiarlos, generarlos [57, 58], y controlarlos [59, 60].

1.3. Fase, interface y transición de fase

La delgada franja en donde se ubican los fenómenos que edifican la vida y las sociedades se mantiene dentro del estrecho dominio que oscila entre el orden inmutable y el desorden total, esto es lo que se conoce como el borde dinámico del caos, y tiene una estrecha similitud y/o relación con el fenómeno conocido como transición de fase [61]. .

De forma muy general (para un tratamiento más riguroso, véase [62,63]), podemos pensar en una *transición de fase* como el paso de una configuración a otra, en el que se distinguen dos fases claramente separadas por una interfaz, a través de la cual existen cambios bruscos de propiedades, dichas transiciones pueden ser continuas o discontinuas dependiendo de las propiedades dinámicas de cada elemento y de su estructura relacional; independientemente del tipo de transición, éstos fenómenos exhiben similitudes profundas, tanto cualitativas como cuantitativas en una cierta región del espacio de parámetros llamada *región crítica*, punto donde surgen fluctuaciones importantes que evidencian la aparición de un nuevo parámetro de orden (magnitud física que toma ciertos valores en y por debajo de la transición) y consecuente paso de un estado a otro.

Una *fase* [64], es una parte homogénea de un sistema, limitada por superficies a través de las cuales las propiedades cambian, cada fase puede contener varios componentes (por ejemplo, una fase gaseosa puede consistir de una mezcla de gases, y una fase líquida puede ser una solución), podemos ver las fases como subsistemas o estados diferentes que pueden existir o coexistir para los mismos valores de un cierto conjunto de parámetros.

Los cambios de fase aparecen cuando el sistema pierde la condición de *estabilidad o equilibrio* [65], un sistema se encuentra en equilibrio si es incapaz de experimentar espontáneamente algún cambio de estado o transformación, lo que requiere que la entropía (grado de desorden) del sistema sea máxima para un sistema aislado, o la energía libre (energía interna) sea mínima para un sistema en contacto con una atmósfera.

Aunque es lo más visto en la literatura, es importante tener en cuenta que las transiciones de fase pueden ocurrir y se definen para sistemas no termodinámicos, donde la temperatura no es un parámetro, tal es el caso de transiciones de fase cuántica, transiciones de fase dinámicas y transiciones de fase topológicas, en estos tipos de sistemas otros parámetros toman el lugar de la temperatura, por ejemplo, la probabilidad de conexión reemplaza la temperatura en las redes de filtración.

La transformación de una fase en otra es producida por mecanismos de *difusión*, el cambio se produce mediante la formación de pequeñas partículas de la nueva fase que posteriormente crecen hasta que se produce la transformación completa, éste proceso se denomina *nucleación y crecimiento*, proceso que puede llegar a consumir una gran cantidad de tiempo implicando por tanto pequeñas velocidades de transformación, por ejemplo, la transformación de líquido a sólido

ocurre en dos etapas: La nucleación de la fase sólida en la fase líquida, donde se genera una superficie sólido-líquido, y el crecimiento de estos núcleos a medida que desciende la temperatura, por lo tanto, durante la solidificación coexisten ambas fases, sólida y líquida.

Estos fenómenos de transición hacen su aparición en diversos contextos sin relación aparente: Transición sólido-líquido-vapor, transformaciones alotrópicas en estado sólido, el paso del paramagnetismo a ferromagnetismo, paso del Helio 4 a superfluido, transiciones de simetría en sólidos, transiciones vítreas, el fraccionamiento de isótopos; cambios en la estructura cristalográfica, condensación cuántica de fluidos bosónicos, transiciones de orden-desorden (como los aluminuros de alfa-titanio, depósito de partículas, crecimiento de colonias de bacterias, avance de un fluido en un medio poroso, dinámica social) entre un largo etcetera.

Todos estos fenómenos tienen una explicación lógica e interesante, la respuesta de todo lo que pasa cuando están en contacto dos fases distintas, viene dada por los *fenómenos interfaciales* [66], un fenómeno interfacial es por definición un fenómeno que se produce en una interface o cuya existencia está ligada a la presencia de una interface. Una *interface* es el límite entre dos fases inmiscibles, podemos verla como una zona de transición, de separación o frontera, en ella ambas fases pierden sus propiedades características y aparecen nuevas fuerzas que son muy diferentes a las existentes en los medios por separado, lo que da lugar a nuevas estructuras y ordenaciones de compromiso entre las que demandan ambos medios. Por ejemplo, si tenemos agua en contacto con su vapor, la propiedad concentración cambiará desde un valor alto en la fase líquida hasta un valor muy bajo en el vapor, en la interfaz, la densidad que rodea a las moléculas no sería ni tan alta como en el interior de la fase líquida, ni tan baja como en la fase gaseosa.

Los fenómenos interfaciales se dividen en:

- **Cohesión:** Se refiere a la atracción que tienen las moléculas por otras de su mismo tipo.
- **Tensión interfacial (o superficial si los medios de compromiso son sólidos):** Es la razón por la que dos fluidos inmiscibles no se mezclen y se separan por una interface (debido a la afinidad que tienen las moléculas con las de su propia clase), cerca de la superficie las moléculas se atraen con mayor intensidad produciendo una fuerza mecánica que se conoce como tensión interfacial.
- **Adhesión:** Es la atracción de moléculas de un tipo por moléculas de otro tipo.
- **Adsorción:** Es la tendencia de un componente del sistema a concentrarse en la interface.

Atendiendo a la geometría de la configuración, los sistemas interfaciales se pueden clasificar en: Interfaces libres, microburbújas o microgotas, películas líquidas y coloides. Otra clasificación fundamental de las interfaces es según su movilidad: Interfaces fluidas e interfaces sólidas.

La propiedad más relevante de la interfaz es su área, los efectos de la interface serán notables en sistemas con mucha superficie, como coloides, sólidos porosos (como las zeolitas), etc; y serán decisivas en aquellos procesos que tienen lugar únicamente sobre superficies, como la corrosión, las reacciones sobre electrodos, las membranas celulares, etc.

Las transiciones de fase comúnmente ocurren en la naturaleza y se usan hoy día en muchas tecnologías, su estudio juega un papel importante en muchas disciplinas e investigaciones. Veamos:

- En biología, fisiología y farmacia, podemos mencionar su aporte en el estudio del transporte de iones a través de membranas biológicas o celulares, el transporte de los mensajes desde el cerebro a los músculos, la transferencia de diferentes fármacos y cómo los mismos son asimilados [67], la formación de la bicapa lipídica, la transición del glóbulo-espina en el proceso de plegamiento de la proteína y la fusión del ADN [68].
- En cosmología, se ha utilizado en el campo de la Bariogénesis para comprender la asimetría entre la cantidad de materia y antimateria en el Universo actual [69].
- En física, química e ingeniería, en el estudio y comprensión de procesos, productos, materiales, y sensores, para aplicaciones en la industria de limpieza, de pinturas, agroalimentarias, petroquímicas, textil, electrónica, de construcción y tecnología (véase algunos estudios al respecto en [70–75]).
- En el área de la matemática discreta, y en particular en teoría de grafos o en optimización combinatoria.
- En sociología, para la caracterización del comportamiento social colectivo de los individuos, como la difusión de la cultura o de las convenciones lingüísticas, la dinámica de la formación de opinión, etc; donde la dinámica puede llegar a transiciones de fase no equilibradas, desde un estado ordenado llamado consenso a configuraciones desordenadas llamadas desacuerdo [52, 75–82].
- En sinérgica, cuyos procesos están descritos por un pequeño conjunto de parámetros de orden, similares a aquellos en la teoría de transición de fase de Landau de sistemas físicos en equilibrio térmico [83].

1.4. Mapas caóticos acoplados

Entre 1983-1984 Kaneko, Kapral y Kuznetsov [84–86] definen de forma simultánea e independiente las *redes de mapas acoplados*, siendo desde entonces extensivamente estudiadas en la literatura [87–90]. Desde un punto de vista matemático se entienden como sistemas dinámicos no

lineales de alta dimensión, con espacio discreto, tiempo discreto y variables de estado continuas, cuya dinámica es generada por mapas locales $f : I \rightarrow I$ situados en una red (matriz de tamaño L), los cuales pueden tener varios tipos de acoplamientos (difusivo, global, etc). El estado i del sistema, $i \in (0, 1, \dots, L - 1)$ viene determinado por un vector L dimensional $X = (X(0), \dots, X(L - 1))$, y el valor a el tiempo $t + 1$ se determina a partir del estado en el tiempo $t \in N$ a través de la acción del mapa f y un acoplamiento entre sitios vecinos:

$$X^{t+1}(i) = (1 - \varepsilon)f(X^t)(i) + (\varepsilon/N)[f(X^t(i - 1) + f(X^t(i + 1)) \quad (1.1)$$

El primer término en el lado derecho de la ec. (1.1) representa la dinámica de la unidad i en el momento t , $i \in (1, 2, \dots, L)$, dada por una función del mapa no lineal correctamente seleccionada, mientras que el segundo término $(X^t(i - 1) + f(X^t(i + 1))$ representa la interacción causada principalmente por otros elementos en la red a través del parámetro de acoplamiento $\varepsilon \in [0, 1]$. El factor $(1 - \varepsilon)$ garantiza que la dinámica de la red del mapa acoplado se limite a la fase espacial IL .

Las redes de mapas acoplados pueden considerarse como la composición de dos acciones, la acción del mapa del sitio único f en cada sitio de la red, y una función de acoplamiento $\varepsilon : IL \rightarrow I$ que media la interacción.

Una ventaja que ofrecen éstas redes, es que se pueden controlar fácilmente las propiedades microscópicas del sistema, al elegir los mapas y acoplamientos apropiados para determinar los parámetros de orden que serán relevantes a grandes escalas, además, a diferencia de las ecuaciones diferenciales parciales u osciladores acoplados, el estudio de la dinámica no lineal en una red de mapas acoplados consume menos tiempo desde un punto de vista computacional, por lo tanto, se han convertido en los modelos más simples para el estudio del caos espaciotemporal, siendo fructíferos y eficientes en el análisis de una variedad de dinámicas.

Los sistemas de mapas caóticos acoplados ofrecen una mayor comprensión de los sistemas disipativos, aunque su comportamiento microscópico está lejos del equilibrio, su comportamiento macroscópico puede ser entendido en términos de la mecánica estadística, específicamente porque experimentan bifurcaciones que son cuantitativamente similares al equilibrio de transiciones de fase, lo que permite una descripción de fenómenos análogos a estos. Justamente este es el interés principal en tales modelos, la aparición de bifurcaciones y ver cómo los rasgos característicos de tal sistema compuesto cambian cuando se varía la fuerza de interacción.

Aunque inicialmente sus estudios fueron principalmente cualitativos y trataban de describir un diagrama de fase general, despertó gran interés al observarse que el espectro de posibilidades de estructuras espacio temporales que pueden ser generados por mapas acoplados es extremadamente rico, permiten abordar problemas cuantitativos y el estudio de diferentes aspectos del caos, siendo objeto de muchos trabajos, como el estudio de dinámicas en redes no uniformes o complejas, fenómenos tales como la formación de patrones, la intermitencia espaciotemporal, el comportamiento

colectivo no trivial; el comportamiento cooperativo, la sincronización, la simulación de fenómenos físicos, socioeconómicos, químicos, biológicos, etc. [91–101].

1.5. Modelo de Miller Huse

El modelo de Miller Huse [54] es un análogo determinista y caótico del modelo de Ising bidimensional [50], consiste en un red cuadrada 2D, de mapas escalares caóticos acoplados de manera difusa a sus vecinos más próximos, el mapa $\phi(y)$ (ver figura 1.1) presenta dos propiedades esenciales: 1) Caos, es decir, un solo mapa no acoplado tiene un exponente de Lyapunov positivo y 2) Simetría impar de una variable real $\phi(-y) = -\phi(y)$.

$$\phi(y) = \begin{cases} -2 - 3y & \text{si } -1 \leq y \leq -1/3 \\ 3y & \text{si } -1/3 \leq y \leq 1/3 \\ 2 - 3y & \text{si } 1/3 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

La dinámica de tiempo discreto del sistema viene dado por:

$$y_i^{t+1} = \phi(y_i^t) + g \sum_j^i \{\phi_j^t - \phi_i^t\}, \quad (1.3)$$

donde el superíndice indica el tiempo, el subíndice la coordenada espacial y g es la constante de acoplamiento restringida al rango $0 \leq g \leq \frac{1}{4}$; la suma es sobre los cuatro vecinos más cercanos j del sitio i , y y_i toma solo valores en el intervalo $[-1, 1]$.

Se puede ver en la figura 1.1 que el subintervalo $[0, 1]$ corresponde a un mapa ampliamente estudiado en la teoría del caos y dinámica no lineal, el mapa tienda, y en el subintervalo $[-1, 0]$ se encuentra la continuación antisimétrica de éste.

Si graficamos su evolución y diagrama de bifurcación, podemos observar de la figura 1.2 que éste mapa tiene dos atractores coexistentes en común, desarrolla saltos aleatorios entre dos estados, haciendo la analogía con Ising, se pueden interpretar como los estados del espín (+ o -).

Por otro lado, de la figura 1.3, es fácil observar que dependiendo del valor de μ , el mapa muestra un rango de comportamiento dinámico que varía de predecible a caótico, a saber: Si μ es menor que 1, el punto $y = 0$ es un punto fijo atractivo del sistema para todos los valores iniciales de y , es decir, el sistema convergerá hacia $y = 0$ desde cualquier valor inicial de y . Si μ es mayor que 1, el sistema tiene cuatro puntos fijos inestables, un valor de y cerca de cualquiera de los puntos fijos se alejará de él, en lugar de acercarse a él. Si μ está entre 1 y 2, se distinguen las dos regiones mapeándose intervalos entre ellas mismas, contiene puntos periódicos y no periódicos, aunque todas las órbitas son inestables; si μ es mayor que 2, estas regiones se fusionan. Finalmente, si μ es igual a 3, el sistema mapea el intervalo $[0, 1]$ sobre sí mismo, ahora hay puntos periódicos con cada longitud de

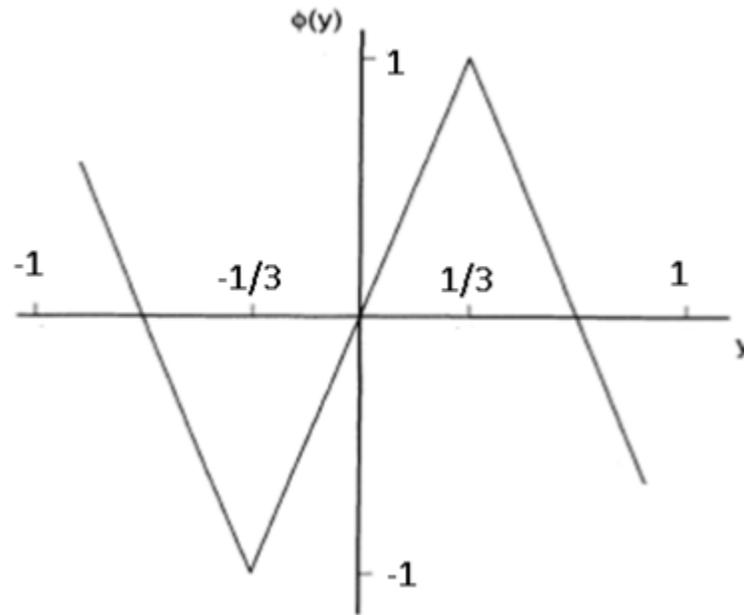


Figura 1.1: Mapa de Miller Huse [54]

www.bdigital.ula.ve

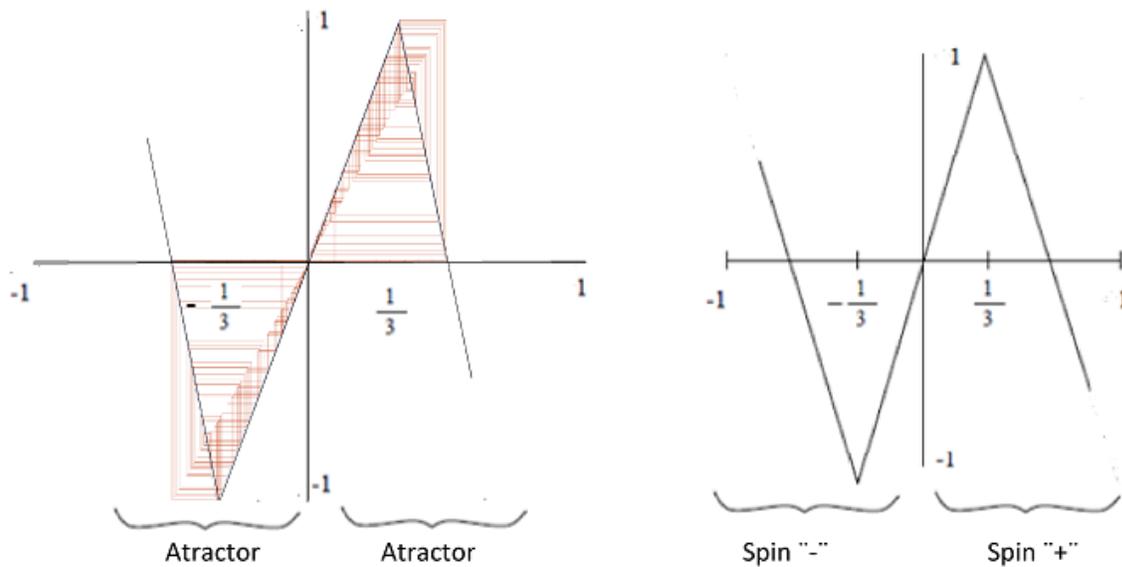


Figura 1.2: Atractores del Mapa de Miller Huse

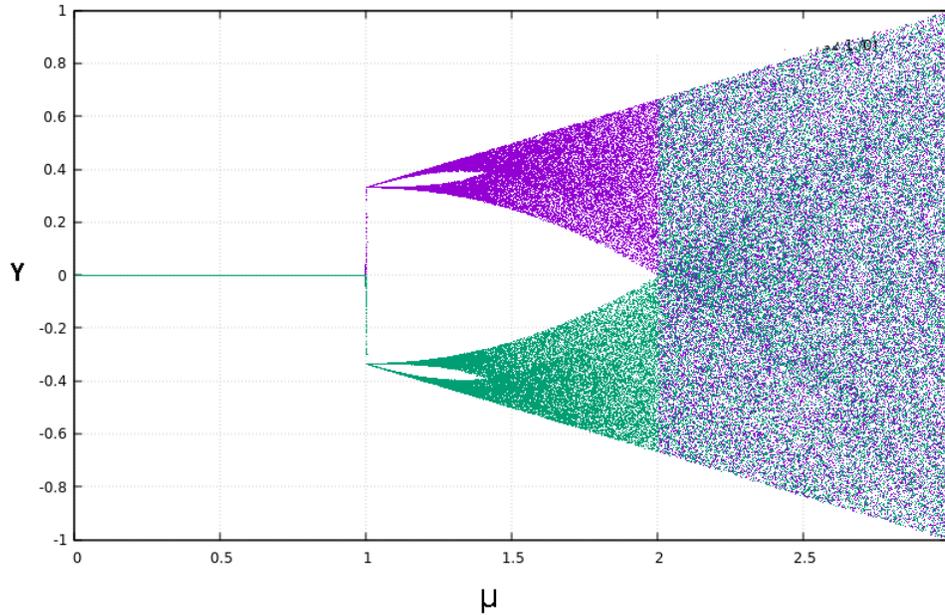


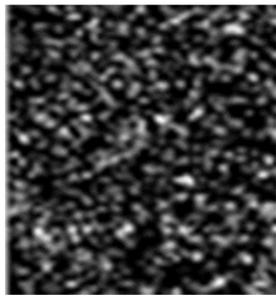
Figura 1.3: Mapa de bifurcación del modelo de Miller Huse

órbita dentro de este intervalo, así como puntos no periódicos, los puntos periódicos son densos en $[0, 1]$ por lo que el mapa se ha vuelto caótico.

De la figura 1.4 podemos ver que el sistema presenta diferentes comportamientos en función del parámetro de acoplamiento:

- Para $g = 0$, el conjunto de mapas es caótico y ergódico en el espacio de configuración completo $[-1, 1]^N$, donde N es el número de sitios.
- Para g arbitraria, si todos los sitios tienen exactamente el mismo valor de y_i seguirán siendo los mismos; sin embargo, estos estados uniformes son inestables y no tienen ninguna medida en el espacio de configuración completo.
- Para $g > 0$, el acoplamiento induce correlaciones en el estado estable que se pueden estudiar numéricamente, en particular, el sistema tiene un estado de orden ferromagnético para $0, 2054 \leq g \leq 0, 24$.
- En la fase ferromagnética, para matrices grandes, el atractor se divide en dos atractores equivalentes, uno con magnetización positiva (color blanco) y otro con magnetización negativa (color negro), tal y como se vio en la figura 1.2). La frecuencia de las transiciones entre estos dos atractores parece desaparecer exponencialmente al aumentar el tamaño de la matriz.

El hecho de este modelo contener los mecanismos y resultados básicos de fenómenos de interacción entre muchos elementos binarios, lo hace mapeable a otros modelos aparte del ferromagnetis-



a) $g=0$, $t=1000$



b) $g=0.15$, $t=1000$



c) $g=0.15$, $t=2000$



d) $g=0.2$, $t=100$



e) $g=0.2$, $t=1000$

Figura 1.4: Simulación del modelo de Miller Huse para varios valores de g

mo, por otro lado, el estudio de modelos como estos que reducen fenómenos macroscópicos a procesos microscópicos perfectamente definidos son de un interés metodológico fundamental [101–106], comunmente son simulados como autómatas celulares [107], éstas son capaces de actualizar millones de celdas en un tiempo extremadamente corto, además de su capacidad para dotar al conjunto de elementos del sistema, visto como un todo, con una serie de propiedades emergentes inducidas por su propia dinámica.

www.bdigital.ula.ve

“ El primer trago de la copa de las ciencias naturales te volverá ateo, pero en el fondo de esa copa te espera Dios ”

Werner Karl Heisenberg.

Capítulo 2

Nuestro estudio

En este trabajo caracterizaremos la interfaz que se presenta entre los dominios de las fases de un sistema multiestable, para ello trabajaremos con el Modelo de Miller Huse [[54]], ya que éste presenta la forma más simple de multiestabilidad, la biestabilidad; crea dominios con interfaces dinámicas, y ofrece una eficiencia computacional alta.

Se parte del modelo original, generalizando el mapa presentado en (1.2) de la forma:

$$\phi(y) = \begin{cases} -\mu(2/3 + y) & \text{si } -1 \leq y \leq -1/3 \\ \mu & \text{si } -1/3 \leq y \leq 1/3 \\ \mu(2/3 - y) & \text{si } 1/3 \leq y \leq 1 \end{cases}, \quad (2.1)$$

donde μ es una constante real positiva. Para objeto de nuestro estudio $1 \leq \mu \leq 2$, ya que como vimos anteriormente en el mapa de bifuración (figura 1.3) los valores donde se presenta la separación entre los dominios, corresponden a éste intervalo.

La dinámica de tiempo discreto dada en (1.3) toma la forma:

$$y_i^{t+1} = \phi(y_i^t)(1 - \varepsilon) + (\varepsilon/N)\sum_j^i \{\phi_j^t - \phi_i^t\}, \quad (2.2)$$

donde el parámetro de acoplamiento viene representado por $g = \varepsilon/N$, con $[0, 1]$. Similar a la ecuación (1.1).

El modelo es representado como un autómata celular, sobre una superficie plana (red con el mismo ancho y alto) formada por un número finito de celdas (mapas), con vecindad de Von Neumann, cada celda tiene 4 celdas vecinas (N, S, E, O), y en los límites de la red se establecen condiciones de bordes periódicos, es decir, celdas opuestas se consideran vecinas, de forma que en una red plana la superficie se convierte en un torus (ver figura 2.1).

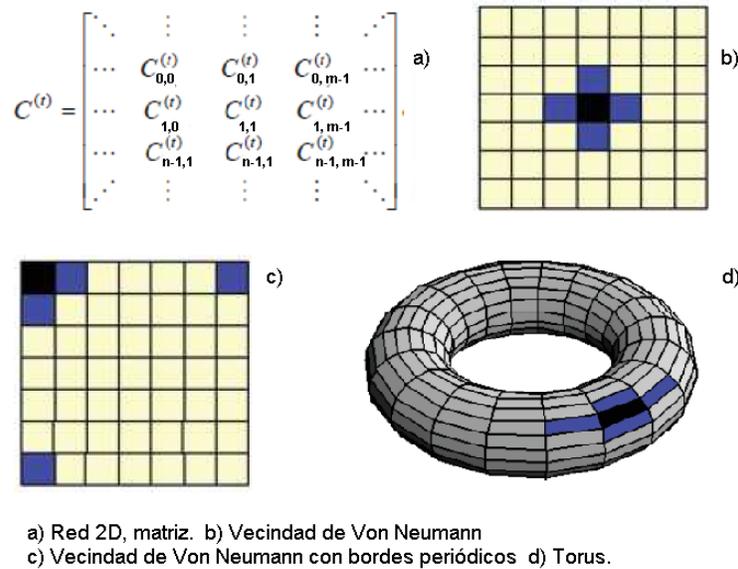


Figura 2.1: Representación del modelo original.

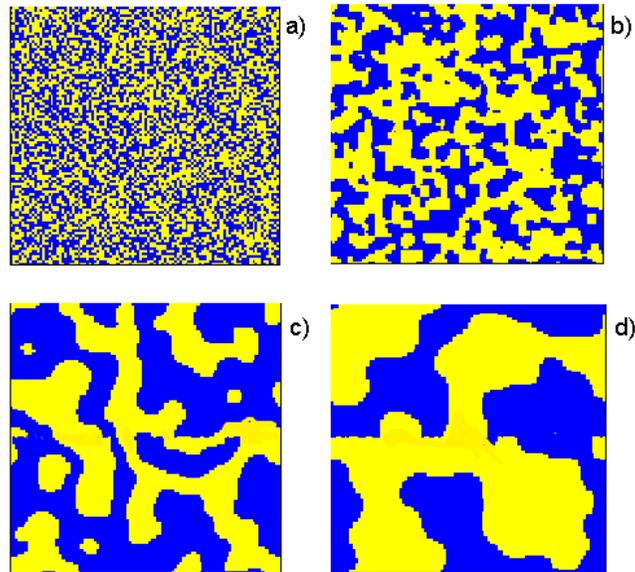
Siguiendo la dinámica de la ecuación (1.4), y partiendo de condiciones iniciales aleatorias, en cada instante de tiempo cada celda cambia de estado debido a su interacción con otras, estando en uno de los dos estados posibles (para motivos de la simulación viene representado por el color amarillo y azul respectivamente), con el tiempo alcanzan dominios estables, pero con interacciones internas en ellos (ver figura 2.2).

Para nuestro objetivo, haremos unas modificaciones a lo antes expuesto: 1) Fijamos una red de 50 de alto y 200 de ancho, 2) Introducimos dos tipos de elementos forzadores (elementos no activos, no susceptibles a ser modificados por su entorno pero si pueden modificarlo a él), F_1 (color azul) y F (color amarillo), ubicándolos en los extremos superior e inferior de la red, y 3) Las condiciones de borde periódicas se imponen solo en el eje y (Ver figura 2.3 a modo de ilustración).

Se procede a determinar la evolución temporal de la longitud de la interfaz (representada por la suma de todos los elementos vecinos en fase contraria, dividida entre el ancho del sistema), para diferentes valores de ε y μ , manteniendo uno de ellos fijo.

Notese de las figuras 2.4 y 2.5, que para valores bajos del parámetro de acoplamiento, la longitud de la interfaz es constante, no hay una pendiente, lo que tiene sentido, ya que los elementos parecidos no se aglutinan entre si formando dominios más grande, el sistema permanece igual, sin interacción. A medida que aumenta ε , la longitud de la interfaz disminuye, caso contrario a lo que sucede con μ . En cualquier caso, llega un momento en el que la longitud permanece constante en el tiempo.

Para una mejor interpretación tenemos el gráfico 2.6, donde es fácil ver que L aumenta como función de μ y disminuye como función de ε . Otra característica resaltante aquí, es que existe



Red 100x100, $\mu= 1.5$ y $\varepsilon= 0.5$
 a) $t=0$ b) $t=10$ c) $t=100$ d) $t=1000$

www.bdigital.ula.ve

Figura 2.2: Simulación del modelo original.

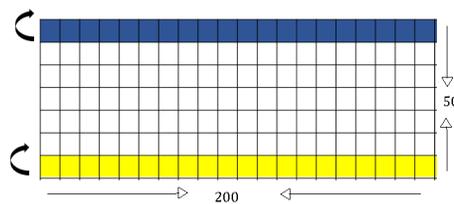


Figura 2.3: Esquema de la Distribución espacial del sistema con dos tipos de forzadores

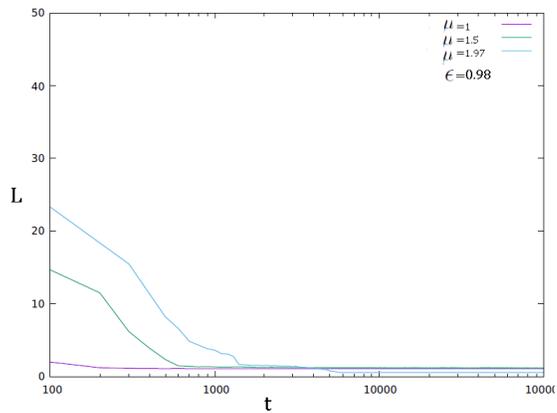
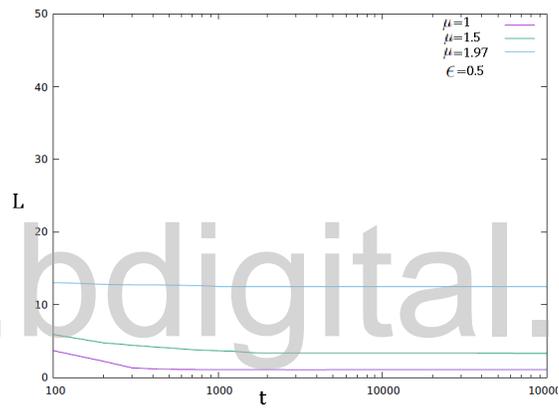
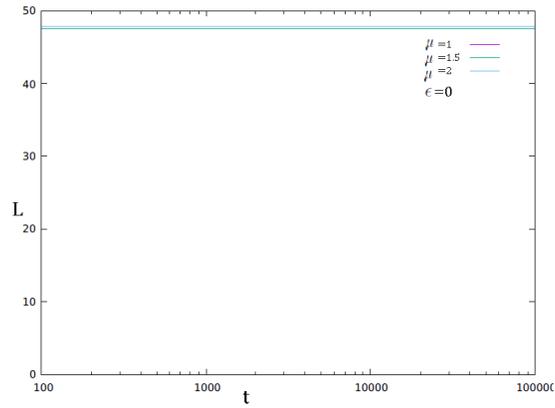


Figura 2.4: Evolución temporal de la longitud de la interfaz, para 3 valores fijos de ϵ .

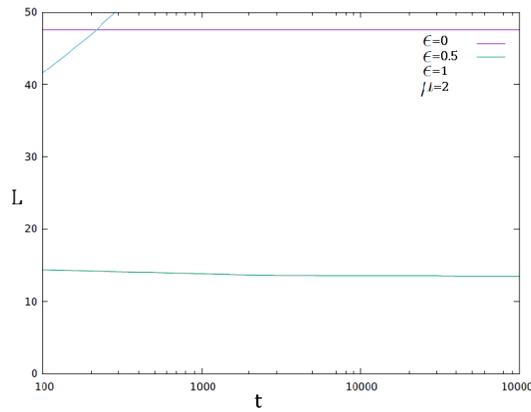
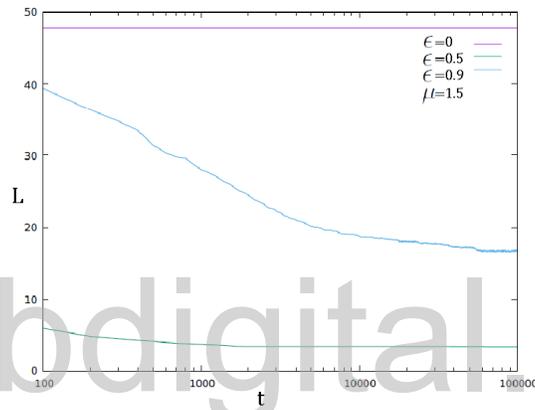
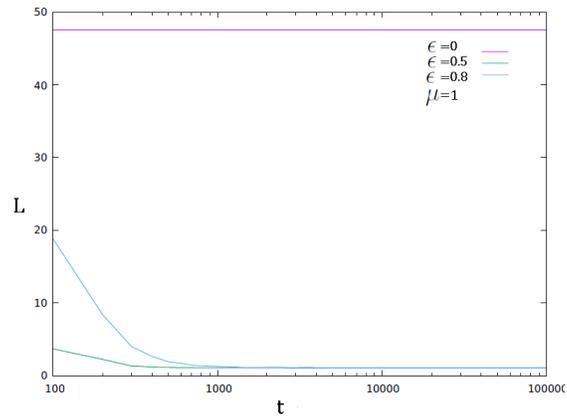


Figura 2.5: Evolución temporal de la longitud de la interfaz, para 3 valores fijos de μ .

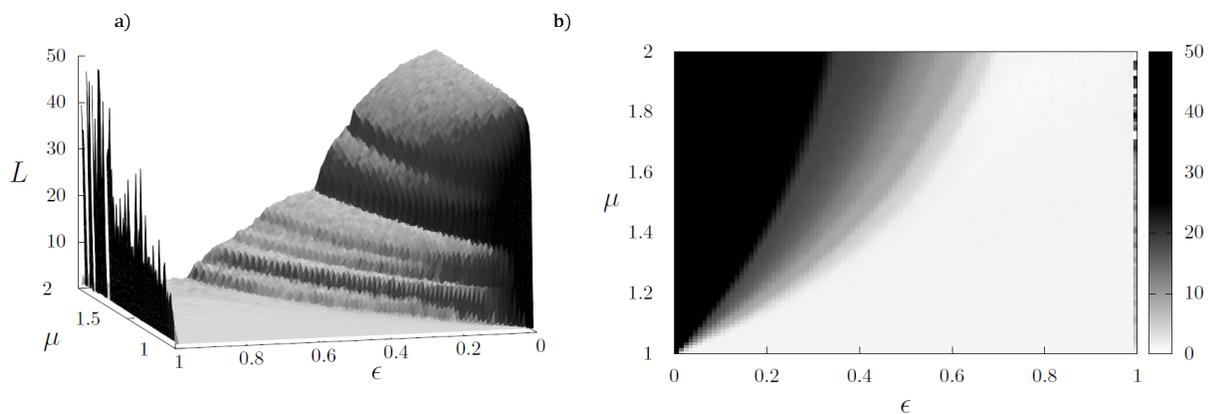


Figura 2.6: Evolución temporal de la longitud de la interfaz en el espacio de parámetros ϵ, μ . a) En 3D b) En 2D

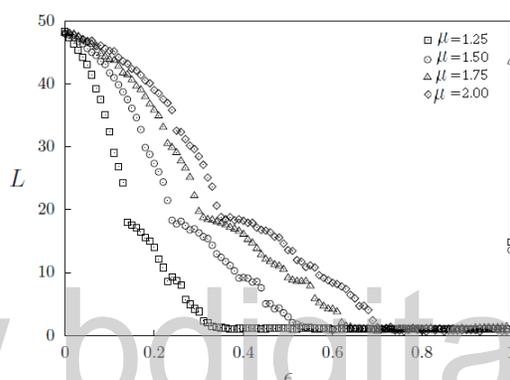


Figura 2.7: Evolución temporal de la longitud de la interfaz en función de ϵ , para 4 valores fijos de μ .

valores a partir de los cuales la longitud como función de ϵ cambia su pendiente, para valores de ϵ mayores a 0.2 hay cambios importantes.

Para estudiar mejor el comportamiento observado, se realizan 4 cortes barriendo todo el rango de L y μ , para intervalos de 0.25 en μ . De aquí, es claro ver cinco regiones denotadas por curvas en forma de valles.

Para cuantificar éste efecto, se define la afinidad media del elemento i con los forzafores F_n , donde $n = 1, 2$ y 200 es el ancho de la red, así:

$$A = 1/200 \left(\sum \delta_{F_1 F_2} \right); , \quad (2.3)$$

la sumatoria se realiza sobre los 200 elementos que pertenecen a la fila y .

Se puede observar que en las regiones IV y V, la gráfica arroja un comportamiento similar a las conocidas transiciones de fase de Landau-Lifshitz, lo que no es de sorprender, ya que el Modelo de Miller Huse es un análogo al Modelo de Ising, cuya transición es de segundo orden y la forma de

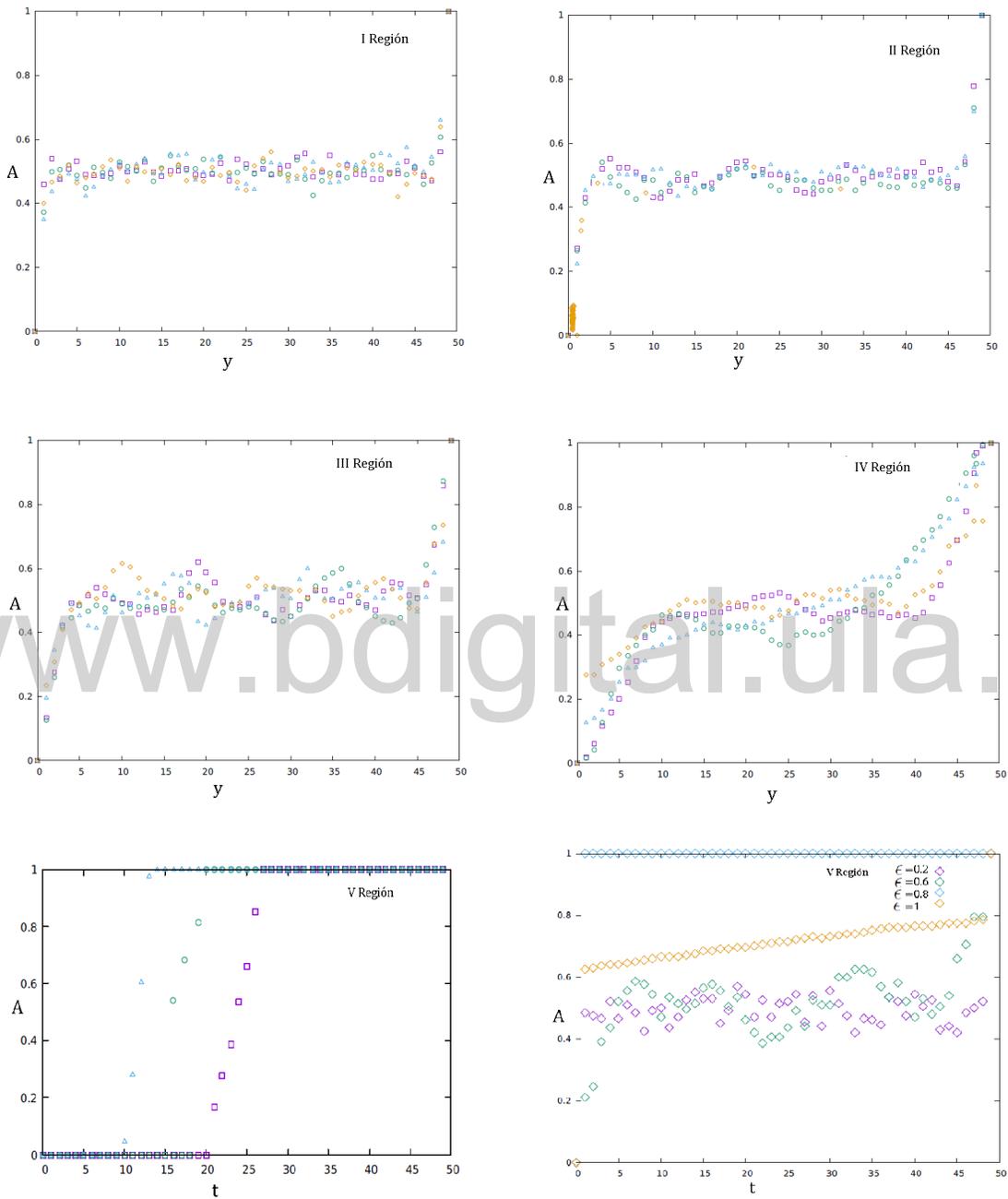


Figura 2.8: Afinidad en función del alto de la malla, para las 5 regiones detectadas.

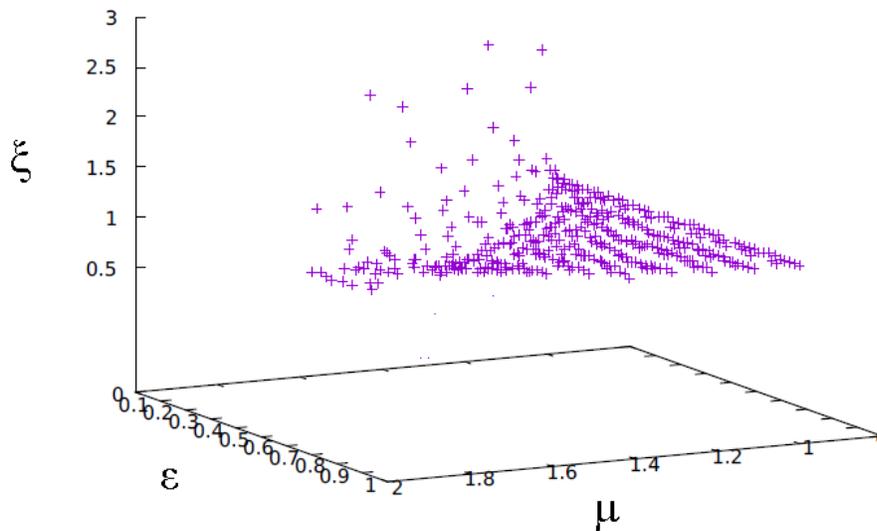


Figura 2.9: Dependencia del parámetro ξ con ε y μ .

ajustar los parámetros de la colectivización de spines es justamente una \tanh , la ecuación general [[66] viene dada por:

$$A = \tanh(x/\xi); \quad (2.4)$$

donde ξ es el parámetro que nos indica que tan abrupta es la interfaz. En la figura 2.12 se muestra la relación que existe entre el parámetro ξ (obtenido mediante el ajuste de puntos usando la ecuación anterior), y los parámetros de la dinámica ε y μ . Observándose una caída en ξ con ligeros valles a medida que ε aumenta y μ disminuye.

Para comprender mejor la dinámica en cada una de las regiones, se presentan imágenes de las simulaciones, se puede ver en la figura 2.10, que para un valor fijo de μ , a medida que aumenta ε los elementos se van aglutinando, formando gotas y atrayenda más a su lado, al punto que las dos fases estan bien diferenciadas. Si vemos el comportamiento de la dinámica para el límite superior de μ , en la figura 2.11, se confirma que esta región es inestable, y difícil de predecir. Importante también es ver lo que sucede en la figura 2.12, donde para $\mu = 0$ nunca se formará una interfaz sin importar el parámetro de convergencia, mientras que cuando ε toma su mayor valor, comienza a observarse una fase estilo tablero de ajedrez, aquí, como vimos en la ecuación (1.4) al hacerse cero el primer miembro del lado derecha, la interacción dependerá de otros elementos.

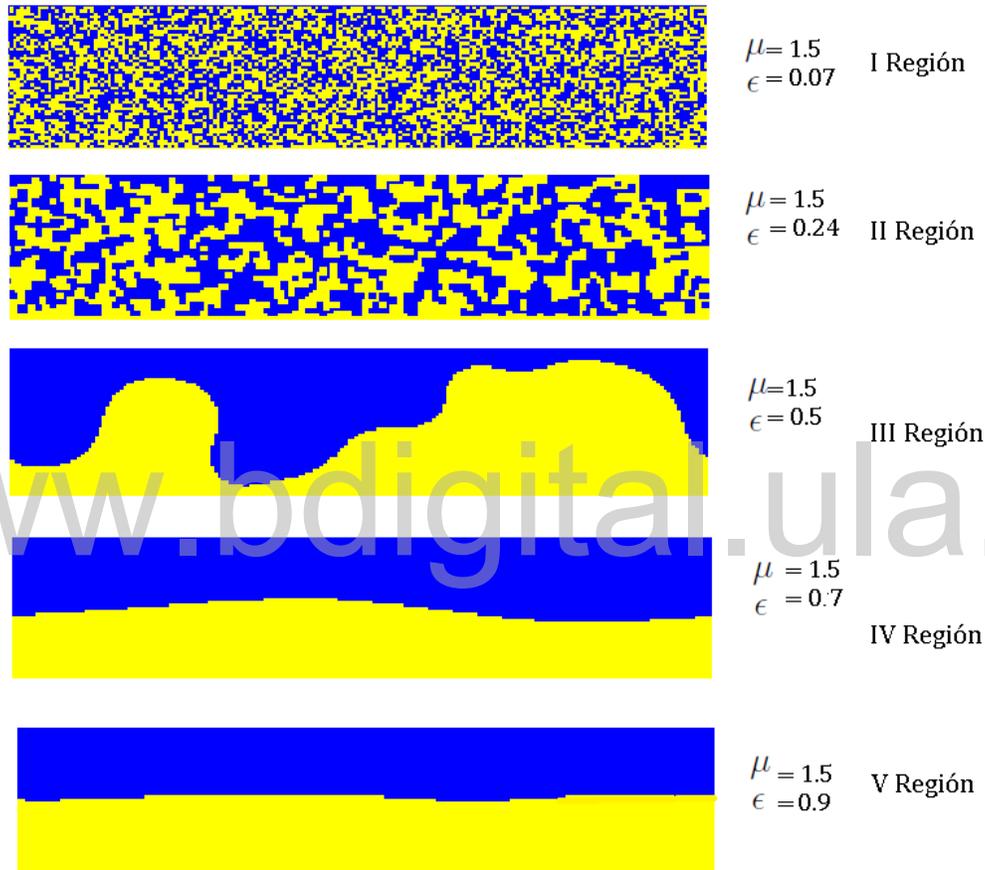


Figura 2.10: Evolución de la dinámica para las V regiones detectadas

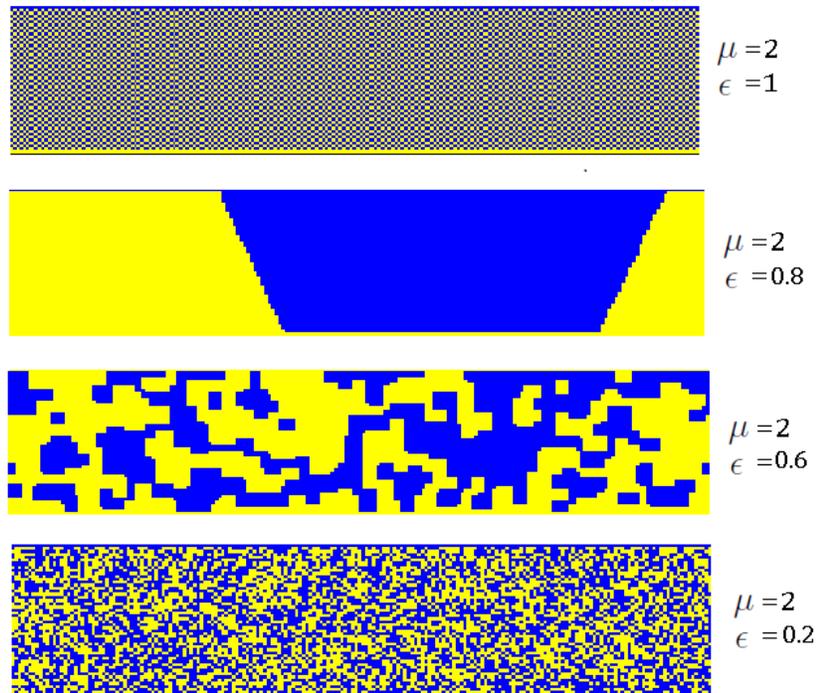


Figura 2.11: Evolución de la dinámica en el límite superior de μ

www.bdigital.ula.ve

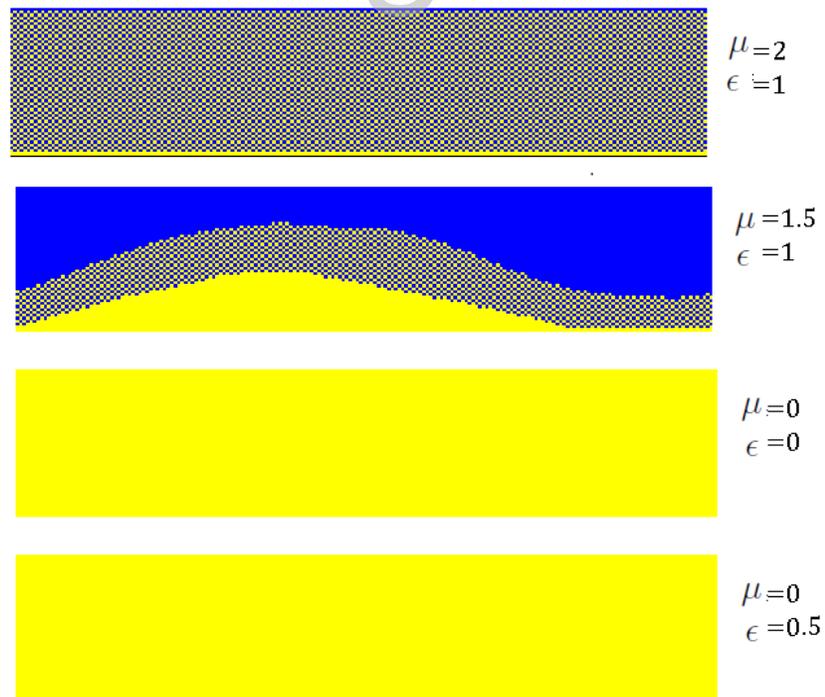


Figura 2.12: Evolución de la dinámica para valores límite de μ y ϵ .

“La única manera de descubrir los límites de lo posible, es aventurarse un poco más allá de ellos en lo imposible”

Arthur C. Clarke

Conclusiones

En el presente trabajo se caracterizó la interfaz en un sistema biestable, adaptando el Modelo de Miller Huse a nuevas condiciones de cambio ante la presencia de elementos forzadores. Se estudió la intensidad de los mismos para lograr separar las fases, y así caracterizar la interfaz que se presenta entre éstas. Calculando la longitud de la interfaz y la afinidad entre los elementos, se logró identificar V regiones, de las cuales solo dos de ellas son posibles caracterizar con las teorías conocidas en física estadística. Del mismo modo se observó que la longitud de la interfaz depende directamente de μ e inversamente de ε . Se propone como posible extensión a éste trabajo se evalúen distintas condiciones iniciales, ya que como se comentó en el capítulo I, los sistemas multiestables son sensibles a las condiciones iniciales. Otro punto importante que se pudiese estudiar, es ver cómo afecta la densidad de los forzadores a la dinámica del mismo, también se podría explorar la correlación entre los elementos, a ver si es posible mediante ésta predecir si la fase se formará de forma vertical u horizontal (comportamiento observado para μ cercanos a 2).

Bibliografía

- [1] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] Tamás Tél and Márton Gruiz. *Chaotic dynamics: an introduction based on classical mechanics*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] James Gleick. *Chaos: Making a new science*. Open Road Media, 2011.
- [4] Ricard V Solé and Susanna C Manrubia. *Orden y caos en sistemas complejos*, volume 2. Univ. Politèc. de Catalunya, 2001.
- [5] Jian-Qiao Sun and Albert CJ Luo. *Bifurcation and chaos in complex systems*, volume 1. Elsevier, 2006.
- [6] Grégory Faye. An introduction to bifurcation theory. *NeuroMathComp Laboratory, INRIA, Sophia Antipolis, CNRS, ENS Paris, France*, 2011.
- [7] M GellMann. What is complexity? remarks on simplicity and complexity by the nobel prize-winning author of the quark and the jaguar. *Complexity*, 1, 1995.
- [8] Stefan Thurner, Rudolf Hanel, and Peter Klimek. *Introduction to the theory of complex systems*. Oxford University Press, 2018.
- [9] Stefano Boccaletti, Vito Latora, Yamir Moreno, Martin Chavez, and D-U Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*, 424(4-5):175–308, 2006.
- [10] Cristoforo Sergio Bertuglia and Franco Vaio. *Nonlinearity, chaos, and complexity: the dynamics of natural and social systems*. Oxford University Press on Demand, 2005.
- [11] HE Gilardi-Velázquez, LJ Ontañón-García, DG Hurtado-Rodríguez, and Eric Campos-Cantón. Multistability in piecewise linear systems versus eigenspectra variation and round function. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(09):1730031, 2017.

- [12] A Anzo-Hernández, HE Gilardi-Velázquez, and E Campos-Cantón. On multistability behavior of unstable dissipative systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28(3):033613, 2018.
- [13] Jose A Itzigsohn. Naturaleza de la actividad psíquica. *Revista de Psicología*, 14:51–67, 2007.
- [14] Jordi Alberich, David Gómez, and Alba Ferrer. Percepción visual, 2011.
- [15] Fred Attneave. Multistability in perception. *Scientific American*, 225(6):62–71, 1971.
- [16] Calistus N Ngonghala, Ulrike Feudel, and Kenneth Showalter. Extreme multistability in a chemical model system. *Physical Review E*, 83(5):056206, 2011.
- [17] LJ Aarons and BF Gray. Multistability in open chemical reaction systems. *Chemical Society Reviews*, 5:359–375, 1976.
- [18] David Angeli, James E Ferrell, and Eduardo D Sontag. Detection of multistability, bifurcations, and hysteresis in a large class of biological positive-feedback systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(7):1822–1827, 2004.
- [19] Michel Laurent and Nicolas Kellershohn. Multistability: a major means of differentiation and evolution in biological systems. *Trends in biochemical sciences*, 24(11):418–422, 1999.
- [20] Didier Paillard. The timing of pleistocene glaciations from a simple multiple-state climate model. *Nature*, 391(6665):378, 1998.
- [21] S Bartsev, P Belolipetskii, and A Degermendzhi. Multistable states in the biosphere-climate system: towards conceptual models. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, volume 173, page 012005. IOP Publishing, 2017.
- [22] HA Dijkstra and CA Katsman. Temporal variability of the wind-driven quasigeostrophic double gyre ocean circulation: basic bifurcation diagrams. *Oceanographic Literature Review*, 3(45):440, 1998.
- [23] Joana G Freire, Cristian Bonatto, Carlos C DaCamara, and Jason AC Gallas. Multistability, phase diagrams, and intransitivity in the lorenz-84 low-order atmospheric circulation model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18(3):033121, 2008.
- [24] Clara Deser, Michael A Alexander, Shang-Ping Xie, and Adam S Phillips. Sea surface temperature variability: Patterns and mechanisms. *Annual review of marine science*, 2:115–143, 2010.

- [25] George CMA Ehrhardt, Matteo Marsili, and Fernando Vega-Redondo. Phenomenological models of socioeconomic network dynamics. *Physical Review E*, 74(3):036106, 2006.
- [26] Kolbjørn Tunstrøm, Yael Katz, Christos C Ioannou, Cristián Huepe, Matthew J Lutz, and Iain D Couzin. Collective states, multistability and transitional behavior in schooling fish. *PLoS computational biology*, 9(2):e1002915, 2013.
- [27] Mingshu Peng, Zhonghao Jiang, Xiaoxia Jiang, Jiping Hu, and Youli Qu. Multistability and complex dynamics in a simple discrete economic model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(2):671–687, 2009.
- [28] Roberto Dieci, Gian Italo Bischi, and Laura Gardini. Multistability and role of noninvertibility in a discrete-time business cycle model. *Central European Journal of Operation Research*, 9:71–96, 2001.
- [29] Don Ihde. Technologies–musics–embodiments. *Janus Head*, 10(1):7–24, 2007.
- [30] Vicente Aboites. Caos, emergentismo y estados mentales: Un análisis de la frontera entre la física y la mente. *Acta Universitaria*, 19(2), 2009.
- [31] Tatiana Malashchenko. Mechanisms of multistability in neuronal models. 2011.
- [32] Alejandro de la Torre-Luque, Aina Fiol-Veny, Maria Balle, and Xavier Bornas. Heartbeat scaling in early adolescents: Its association with anxiety symptoms and sensitivity to punishment. *International Journal of Clinical and Health Psychology*, 16(3):287–294, 2016.
- [33] Yi-An Chen and Tsung-Ren Huang. Multistability of the brain network for self-other processing. *Scientific reports*, 7:43313, 2017.
- [34] FT Arecchi, R Meucci, G Puccioni, and J Tredicce. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a q-switched gas laser. *Physical Review Letters*, 49(17):1217, 1982.
- [35] AN Pisarchik, Yu O Barmenkov, and AV Kir’yanov. Experimental demonstration of attractor annihilation in a multistable fiber laser. *Physical Review E*, 68(6):066211, 2003.
- [36] V Astakhov, A Shabunin, W Uhm, and S Kim. Multistability formation and synchronization loss in coupled hénon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism. *Physical Review E*, 63(5):056212, 2001.
- [37] Antônio Endler and Jason AC Gallas. Period four stability and multistability domains for the hénon map. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 295(1-2):285–290, 2001.

- [38] K Czołczyński, A Stefański, P Perlikowski, and T Kapitaniak. Multistability and chaotic beating of duffing oscillators suspended on an elastic structure. *Journal of Sound and Vibration*, 322(3):513–523, 2009.
- [39] FT Arcelli, R Badii, and A Politi. Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system. *Physical Review A*, 32(1):402, 1985.
- [40] Vinícius Wiggers and Paulo C Rech. Multistability and organization of periodicity in a van der pol–duffing oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 103:632–637, 2017.
- [41] Dawid Dudkowski, Patrycja Kuzma, and Tomasz Kapitaniak. Lag synchronization in coupled multistable van der pol-duffing oscillators. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2014, 2014.
- [42] J Kengne, JC Chedjou, M Kom, K Kyamakya, and V Kamdoun Tamba. Regular oscillations, chaos, and multistability in a system of two coupled van der pol oscillators: numerical and experimental studies. *Nonlinear Dynamics*, 76(2):1119–1132, 2014.
- [43] Laurent Larger, Bogdan Penkovsky, and Yuri Maistrenko. Las quimeras lĂĄser como paradigma para patrones multiestable en sistemas complejos. *Nature Communications*.
- [44] Soumen y Ghosh Dibakar y Perc Matja v z Bera, Bidesh K y Majhi. Estados quimĂŠricos: Efectos de diferentes topologĂAs de acoplamiento. *EPL (Europhysics Letters)*.
- [45] Luciano Camargo Martins and Jason Alfredo Carlson Gallas. Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: a map with many coexisting attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(06):1705–1717, 2008.
- [46] Mario ST De Freitas, Ricardo L Viana, and Celso Grebogi. Multistability, basin boundary structure, and chaotic behavior in a suspension bridge model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(03):927–950, 2004.
- [47] Chunbiao Li and Julien Clinton Sprott. Multistability in the lorenz system: a broken butterfly. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(10):1450131, 2014.
- [48] Rudolf Peierls. On ising’s model of ferromagnetism. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 32, pages 477–481. Cambridge University Press, 1936.
- [49] Frank Schmüser. *Analytische Beiträge zum Raum-Zeit-Chaos: von gekoppelten Abbildungen zum Isingmodell*. PhD thesis, Universität Wuppertal, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften âŚ, 1999.

- [50] Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift f ü r Physik A Hadrons and Nuclei*.
- [51] La difusi3n de la cultura: un modelo con convergencia local y polarizaci3n global.
- [52] Samuel Contreras and Kay Tucci. Efecto del forzamiento heterog3neo sobre sistemas multiestables. 2017.
- [53] David Deffuant, Guillaume y Neau, Frederic Amblard, and G3rard Weisbuch. Mezclando creencias entre agentes interactuantes. *Avances en sistemas complejos*.
- [54] Equilibrio macrosc3pico de la irreversibilidad microsc3pica en una red ca3tica de mapa acoplado. *Physical Review E*.
- [55] Taras Girnyk, Martin Hasler, and Yuriy Maistrenko. Multistability of twisted states in non-locally coupled kuramoto-type models. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(1):013114, 2012.
- [56] Robin Delabays, Tommaso Coletta, and Philippe Jacquod. Multistability of phase-locking in equal-frequency kuramoto models on planar graphs. *Journal of Mathematical Physics*, 58(3):032703, 2017.
- [57] Erika Elizabeth Col3n Hern3ndez. Estudio de una clase de sistemas con din3mica inestable para la generaci3n de multiestabilidad. Master's thesis, 2019.
- [58] Diana Graciela Hurtado Rodr3guez. Generaci3n de sistemas din3micos multiestables. Master's thesis, 2016.
- [59] C Yu Calder3n-Hermosillo and AN Pisarchik. Attractor annihilation in the noisy h3non map. *III Encuentro Participaci3n de la Mujer en la Ciencia*, pages 18–19, 2005.
- [60] Ricardo Sevilla-Escoboza, Alexander N Pisarchik, Rider Jaimes-Re3ategui, and Guillermo Huerta-Cuellar. Selective monostability in multi-stable systems. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 471(2180):20150005, 2015.
- [61] Vladimir G Ivancevic and Tijana T Ivancevic. *Complex nonlinearity: chaos, phase transitions, topology change and path integrals*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [62] Jos3 L Soria. Teor3a de fen3menos cr3ticos y transiciones de fase desde un punto de vista riguroso. *Revista Mexicana de F3sica*, 38(4):643–663, 1991.
- [63] Russel J Donnelly, Robert Herman, and Ilya Prigogine. Non-equilibrium thermodynamics; variational techniques and stability. In *Non-Equilibrium Thermodynamics, Variational Techniques, and Stability*, 1966.

- [64] Hidetoshi Nishimori and Gerardo Ortiz. *Elements of phase transitions and critical phenomena*. OUP Oxford, 2010.
- [65] Colin J Thompson. *Classical equilibrium statistical mechanics*. Oxford University Press, USA, 1988.
- [66] Samuel A Safran. Statistical thermodynamics of surfaces. *Interfaces, and Membranes*, 1994.
- [67] Francisco Bezanilla and Rodolfo LLINÁS. Biofísica y fisiología celular, 1996.
- [68] Dmitri Y Lando and Vladimir B Teif. Long-range interactions between ligands bound to a dna molecule give rise to adsorption with the character of phase transition of the first kind. *Journal of Biomolecular Structure and Dynamics*, 17(5):903–911, 2000.
- [69] EJ Chaisson. Cosmic evolution: The rise of complexity in nature. cambridge; london: Harvard university press. 2001.
- [70] Jean-Louis Salager. Interfacial phenomena in dispersed systems. *FIRP Booklet*, 120, 1994.
- [71] David García Sanoguera, David Juárez Varón, Rafael Antonio Balart Gimeno, and Santiago Ferrandiz Bou. Estudio de materiales con cambio de fase (pcm) y análisis sem de micro pcm. *3c Tecnología*, 1(3):4, 2012.
- [72] Shazim Ali Memon. Phase change materials integrated in building walls: A state of the art review. *Renewable and sustainable energy reviews*, 31:870–906, 2014.
- [73] Hernando Ariza Calderón. Fabricación y caracterización óptica de materiales semiconductores para aplicaciones en optoelectrónica. *Rev. Acad. Colomb*, 27(104):357–368, 2003.
- [74] Federico Gutiérrez-Solana Salcedo, José Antonio Casado del Prado, Juan Antonio Polanco Madrazo, Soraya Diego Cavia, et al. Uso de materiales de cambio de fase en polímeros termoplásticos. 2014.
- [75] C. Echeverria, K. Tucci, O. Alvarez-Llamoza, E. E. Orozco-Guillén, M. Morales, and M. G. Cosenza. Mesoscopic model for binary fluids. *Frontiers of Physics*, 12(5), 2017.
- [76] Claudio Castellano, Santo Fortunato, and Vittorio Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of modern physics*, 81(2):591, 2009.
- [77] Juan César Flores and Pascual Izquierdo-Egea. Una comparación entre transiciones de fase y conflictos sociales aplicada a las antiguas civilizaciones mesoamericanas. *Arqueología Iberoamericana*, 38:50–54, 2018.

- [78] Juan Carlos González-Avella, Mario G Cosenza, and Kay Tucci. Nonequilibrium transition induced by mass media in a model for social influence. *Physical Review E*, 72(6):065102, 2005.
- [79] Juan Carlos González-Avella, Víctor M Eguíluz, Mario G Cosenza, Konstantin Klemm, Jose L Herrera, and Maxi San Miguel. Local versus global interactions in nonequilibrium transitions: A model of social dynamics. *Physical Review E*, 73(4):046119, 2006.
- [80] Soumyajyoti Biswas, Arnab Chatterjee, and Parongama Sen. Disorder induced phase transition in kinetic models of opinion dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(11):3257–3265, 2012.
- [81] Jesus M. Encinas, Pedro E. Harunari, M. M. de Oliveira, and Carlos E. Fiore. Fundamental ingredients for discontinuous phase transitions in the inertial majority vote model. *Scientific Reports*, 8(1), 2018.
- [82] Juan Carlos González-Avella, Mario G Cosenza, Víctor M Eguíluz, and Maxi San Miguel. Spontaneous ordering against an external field in non-equilibrium systems. *New Journal of Physics*, 12(1):013010, 2010.
- [83] Gueorgui Guenadiievich Malinietski. *Fundamentos matemáticos de la sinérgica: caos, estructuras y simulación por ordenador*. URSS, 2005.
- [84] Kunihiko Kaneko. Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice: Towards a prelude of a field theory of chaos. *Progress of Theoretical Physics*, 72(3):480–486, 1984.
- [85] Irene Waller and Raymond Kapral. Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators. *Physical Review A*, 30(4):2047, 1984.
- [86] SP Kuznetsov. On model description of coupled dynamical systems near the transition point order-disorder. *Izv. VUZov-Fizika*, 27:87–96, 1984.
- [87] Kunihiko Kaneko. The coupled map lattice. *Theory and applications of coupled map lattice*, 1993.
- [88] Beck Christian. *Spatio-Temporal Chaos & Vacuum Fluctuations of Quantized Fields*, volume 21. World Scientific, 2002.
- [89] Jean-René Chazottes and Bastien Fernandez. *Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems*, volume 671. Springer Science & Business Media, 2005.

- [90] LA Bunimovich and Ya G Sinai. Spacetime chaos in coupled map lattices. *Nonlinearity*, 1(4):491, 1988.
- [91] Miaohua Jiang. Sinai-ruelle-bowen measures for lattice dynamical systems. *Journal of statistical physics*, 111(3-4):863–902, 2003.
- [92] SP Kuznetsov. On model description of coupled dynamical systems near the transition point order-disorder. *Izv. VUZov-Fizika*, 27:87–96, 1984.
- [93] MS Bourzutschky and MC Cross. Coupled map models for chaos in extended systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2(2):173–181, 1992.
- [94] Francisco Sastre and Gabriel Pérez. Phase transitions in lattices of coupled chaotic maps and their dependence on the local lyapunov exponent. *Physical Review E*, 57(5):5213, 1998.
- [95] Francisco Sastre and Gabriel Pérez. Stochastic analog to phase transitions in chaotic coupled map lattices. *Physical Review E*, 64(1):016207, 2001.
- [96] Stefano Lepri and Wolfram Just. Mean-field theory of critical coupled map lattices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(29):6175, 1998.
- [97] LZ Guo and SA Billings. A comparison of polynomial and wavelet expansions for the identification of chaotic coupled map lattices. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(09):2927–2938, 2005.
- [98] Hugues Chaté and Jerome Losson. Non-trivial collective behavior in coupled map lattices: A transfer operator perspective. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 103(1-4):51–72, 1997.
- [99] Philippe Marcq and Hugues Chaté. Early-time critical dynamics of lattices of coupled chaotic maps. *Physical Review E*, 57(2):1591, 1998.
- [100] Orlando Alvarez-Llamoza and MG Cosenza. Synchronization and phase ordering in globally coupled chaotic maps. In *Nonlinear Maps and Their Applications*, pages 227–239. Springer, 2015.
- [101] Anaël Lemaître and Hugues Chaté. Phase ordering and onset of collective behavior in chaotic coupled map lattices. *Physical review letters*, 82(6):1140, 1999.
- [102] C Echeverria, K Tucci, and MG Cosenza. Phase ordering induced by defects in chaotic bistable media. *The European Physical Journal Special Topics*, 143(1):249–251, 2007.
- [103] C Echeverria, K Tucci, and MG Cosenza. Phase growth in bistable systems with impurities. *Physical Review E*, 77(1):016204, 2008.

- [104] José Manuel Albornoz and Antonio Parravano. Modelado de una reacción enzimática simple con retardo y discretización. *Memorias de la ULA*, (2), 2009.
- [105] A Parravano and LM Reyes. Gaslike model of social motility. *Physical Review E*, 78(2):026120, 2008.
- [106] Achille Giacometti, Maurice Rossi, and Libero Battiston. Collective dynamics in coupled maps on a lattice with quenched disorder. *Physical Review E*, 73(3):036214, 2006.
- [107] Rafael Espericueta. Cellular automata dynamics. *Math Department, Bakersfield College*, page 1, 1997.

www.bdigital.ula.ve