Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2

Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Vicerrectorado de Investigación y Postgrado
Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara"
Subdirección de Investigación y Postgrado

ANÁLISIS CONCEPTUAL PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Autor: Carlos Miguel Jiménez Juliac
carlosmjj@gmail.com
Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL)
Maracay – Venezuela

PP. 18-48

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA Dialógica

Análisis Conceptual para la Enseñanza de los Números Complejos

Autor: Carlos Miguel Jiménez Juliac
carlosmjj@gmail.com
Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL)
Maracay – Venezuela

Recibido: Agosto 2019 **Aceptado:** Septiembre 2019

Resumen

El artículo que aquí se presenta, constituye el Análisis Conceptual en el proceso de Análisis Didáctico propuesto por Rico (2013), el cual conformó una investigación desarrollada en educación media general con estudiantes de cuarto año de la UEP "Roraima" durante el periodo 2015-2016 con la finalidad de hacer una reconstrucción histórica de los conjuntos numéricos, hasta la aparición de los números complejos. Este análisis constituyó una experiencia didáctica para mostrar a los estudiantes de la mencionada institución un contenido matemático empleando para ello la historia, esto se logró a través de la interacción entre el docente y los estudiantes y la comunicación entre estos mismos durante las clases de Matemática, obteniendo como resultados que es muy provechoso involucrar a los estudiantes en el desarrollo histórico un contenido matemático.
Palabras Clave: Análisis Conceptual, Números Complejos, Análisis Didáctico.

Conceptual Analysis for the Teaching of Complex Numbers

Abstract

The article presented here constitutes the Conceptual Analysis in the Didactic Analysis process proposed by Rico (2013), which formed an investigation carried out in general secondary education with fourth-year students from the UEP "Roraima" during the period 2015- 2016 in order to make a historical reconstruction of the numerical sets, until the appearance of the complex numbers. This analysis constituted a didactic experience to show the students of the aforementioned institution a mathematical content using history for this, this was achieved through the interaction between the teacher and the students and the communication between them during the Mathematics classes, obtaining as results that it is very beneficial to involve students in the historical development of a mathematical content.
Key Words: Conceptual Analysis, Complex Numbers, Didactic Analysis.

Introducción

El estudio de los conjuntos numéricos, es uno de los principales temas abordados durante el periodo de educación primaria y media general, lo cual lleva a muchos docentes a investigar temas relacionados con su enseñanza y aprendizaje, puesto que, en muchas ocasiones, hay estudiantes que confrontan dificultades al trabajar operaciones aritméticas con estos conjuntos; esto lo afirman Chaparro, Póveda y Fernández (s/f) quienes dicen que comenzar a trabajar con las operaciones en el conjunto de los números enteros (Z) lleva a los estudiantes por lo general a actuar de manera mecánica, memorizando reglas para esto, lo que en muchos casos termina por generar muchas más confusiones que las que tenían al comenzar a trabajar con el conjunto de los números enteros y, además, muchas veces se comienza a trabajar con el conjunto de los números racionales (Q) aun teniendo estos errores al trabajar con los números enteros.

Uno de los aspectos a primordiales para la enseñanza de este tema es el dominio de conocimientos previos puesto que estos suelen ser la base para aprender nuevos temas y así construir nuevos conocimientos; al respecto, López (2009) afirma que

> Cuando el alumno se enfrenta a un nuevo contenido a aprender, lo hace siempre armado con una serie de conceptos, concepciones, representaciones y conocimientos, adquiridos en el transcurso de sus experiencias previas, que utiliza como instrumentos de lectura e interpretación y que determinan en buena parte qué informaciones seleccionará, cómo las organizará y qué tipos de relaciones establecerá entre ellas. (p. 5).

De aquí la importancia que tienen los conocimientos y experiencias previas para el aprendizaje de nuevos contenidos. Otro de los aspectos a considerar es la historia de la matemática, pues en muchas ocasiones existen situaciones históricas que suelen ser interesantes al momento de enseñar un tema, tomando como caso particular el estudio de los números complejos, esto lo afirma Maza (1994) diciendo que "si el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas está centrado en el alumno… la historia de la matemática puede tomar la forma de problemas históricos que generan discusiones" (p. 23).

Con lo afirmado, se pretende, en el presente artículo, presentar una reconstrucción histórica sobre el estudio de los números complejos; para ello, inicialmente, se hablará

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA Dialógica

sobre el desarrollo de los conjuntos numéricos, donde se presentarán algunas situaciones de la historia de la Matemática en las cuales hubo presencia de este conjunto numérico, se tratará de resolver algunas de estas situaciones utilizando notaciones actuales, lo cual podrá servir para la introducción de este tema en el aula.

El desarrollo de lo antes planteado se considerará haciendo un recorrido por las civilizaciones que hicieron posible el estudio de los conjuntos numéricos como actualmente se conocen y, además, se tratará de hacer una cronología de los mismos partiendo de los registros de las primeras civilizaciones hasta los períodos donde la Matemática tuvo su mayor apogeo en la historia de los conjuntos numéricos llegando a la construcción de los números complejos.

Todo esto, forma parte del Análisis Conceptual de un tema matemático, el cual es uno de los componentes del Análisis Didáctico de un proceso de estudio, empleado en estudiantes de cuarto año de Educación Media General de la UEP “Roraima” ubicado en la Cooperativa, Maracay Estado Aragua en el año Escolar 2015-2016.

Bases Teóricas

Análisis Didáctico

El análisis didáctico consiste en un método de investigación en la didáctica de las matemáticas que se centra en el conocimiento matemático y se sustenta de él a través de la historia, la finalidad de un análisis didáctico es sistematizar, organizar y planificar la ejecución de los procesos de enseñanza de la Matemática a través de una reflexión sobre los contenidos matemáticos presentes en los textos escolares, considerando de forma muy particular la manera como se abordan u organizan estos contenidos en el currículo escolar.

Para la aplicación de un Análisis Didáctico, se desarrollan cinco análisis que a saber son: (a) el análisis conceptual, que consta de una revisión histórica y epistemológica del tema a matemático a estudiar; (b) análisis de contenido donde se hace un estudio del contenido matemático tomando en cuenta el contexto donde se desarrolla la investigación y los fenómenos que allí ocurren; (c) análisis cognitivo que permite inferir acerca de las limitaciones, dificultades y errores y expectativas de aprendizaje, tomando en cuenta las acciones a considerar para superar estas limitaciones, (d) análisis de instrucción donde se desarrolla una propuesta sobre la enseñanza del tema matemático tomando en cuenta los análisis anteriores; y, considerando los aspectos apreciados en el análisis anterior, (e) análisis de evaluación donde se aplica la propuesta y se evalúan los logros alcanzados por los estudiantes, lo que permite la reflexión sobre la enseñanza del tema matemático para luego volver al análisis conceptual y superar las limitaciones presentes (de haberlas) y así consolidar el aprendizaje del tema, todo esto se muestra en el siente gráfico.

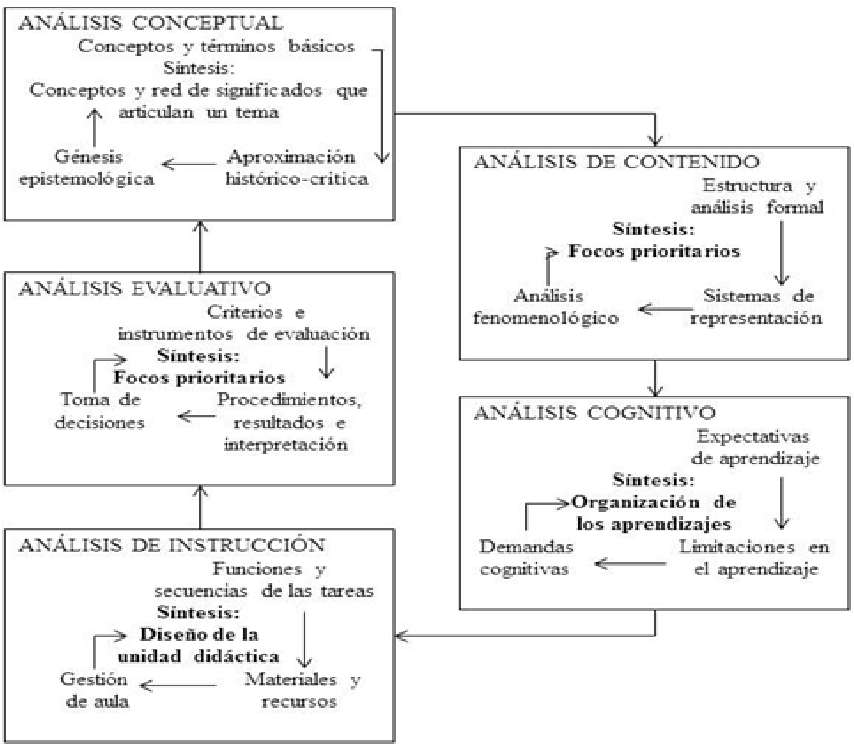


***Gráfico 1*: Estructura y Ciclo del Análisis Didáctico.** Tomado de «El método del Análisis Didáctico» por Rico L. 2013, Revista UNIÓN 33, 22.

Como se mostró en el gráfico anterior, y al centrarse en el análisis conceptual, se procederá a hacer un breve recorrido histórico y epistemológico de los conjuntos numéricos hasta llegar a los números complejos números complejos, conformando así los conceptos y términos básicos empleados, la aproximación histórica-crítica y la génesis epistemológica del objeto de estudio, para finalizar con la red de significados relacionados con el tema de estudio. Luego de esto, se presentarán algunas actividades que se propusieron a los estudiantes relacionados con el recorrido de los números complejos.

Análisis Conceptual sobre los Números Complejos

El análisis conceptual, es el primer paso para la construcción del análisis didáctico, este ofrecerá, como ya se mencionó una visión histórica y epistemológica de los conjuntos numéricos hasta llegar a desarrollar el conjunto de los números complejos y sus operaciones; en algunas partes de este análisis, se muestran situaciones que, dentro de un contexto didáctico se pueden trabajar en un aula, utilizando así la historia para estudiar un tema matemático.

Desde la antigüedad, los números han tenido un uso significativo para la humanidad y su proceso de formalización (Desarrollando los sistemas de numeración presentes en la actualidad) ha sido progresivamente lento.

La idea de número se utiliza desde el principio de la humanidad a través de la intuición; los números se utilizaban para contar, empleando para ello las herramientas humanas básicas como los dedos de las manos y los pies para cantidades pequeñas u objetos como piedras para contar cantidades más grandes tal como afirma Macías (s/f).

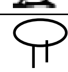
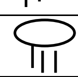
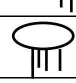
> En un principio, el hombre utilizó para "contar" objetos de la propia naturaleza, mediante reiteración. Los dedos de la mano pueden utilizarse fácilmente para representar conjuntos de hasta 5 ó 10 elementos… y hasta 20 añadiendo los dedos de los pies. Cuando los dedos eran insuficientes, se recurrían a otros métodos, como era usar montones de piedras, de conchas o de cualquier otro elemento (p. 29).

En función de esto, y con el crecimiento de distintas civilizaciones existió la necesidad de formalizar el concepto de número que se tiene así, como las formas de representarlos. A continuación, se describirán algunos aportes de las civilizaciones que a lo largo de la historia desarrollaron el concepto de número y operaciones con estos hasta llegar al estudio de los números complejos que es la finalidad de este análisis.

Los Egipcios

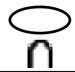
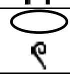
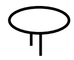
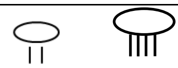
Esta civilización estableció un sistema de numeración decimal-jeroglífico aproximadamente hace 3000 años A.C., fue un sistema autóctono que se aplicaba utilizando objetos como conchas, piedras o palos; los números desarrollados por los egipcios incluían hasta las primeras seis potencias de diez, se consideraba como un sistema aditivo, además, no empleaban números negativos y tampoco el cero, utilizaban las fracciones, pero sólo aquellas cuyo numerador es uno, representándolas dibujando un óvalo que significaba el numerador uno y debajo el número que representaría el denominador y algunas fracciones especiales como $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. A continuación, se muestra el Cuadro 1 que indica las formas de representación de algunos de los números empleados por esta civilización.

Cuadro 1
Números Egipcios

Valor	Jeroglífico	Descripción
1	∣	Trazo Vertical (Bastoncito).
10	∩	Asa o herradura invertida.
100		Cuerda enrollada (Espiral).
1.000		Flor de loto con tallo.
10.000		Dedo.
100.000	 o 	Pájaro o Rana.
1.000.000 o infinito		Hombre arrodillado con las manos levantadas.
$\frac{1}{2}$		Óvalo con dos trazos verticales.
$\frac{1}{3}$		Óvalo con tres trazos verticales.
$\frac{1}{5}$		Óvalo con cinco trazos verticales.

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA Dialógica

Cuadro 1 (cont.)

Valor	Jeroglífico	Descripción
$\frac{1}{10}$		Óvalo con herradura invertida.
$\frac{1}{100}$		Óvalo con cuerda enrollada.
$\frac{2}{3}$		Óvalo con dos trazos verticales siendo uno más largo que el otro.
$\frac{3}{4}$		Óvalo con dos trazos verticales más óvalo con cuatro trazos verticales.

Nota. Elaborado con datos tomados de «Números enteros: Origen e Historia» por Torres C. (s/f. p. 4) y «Evolución histórica del concepto de número» por Macías, R. (s/f), Revista de la Educación de Extremadura Auto Didáctica, 33.

Las figuras mostradas en el Cuadro 1, eran empleadas por esta civilización para realizar operaciones matemáticas en la resolución de problemas, la mayoría de estos se encuentran registrados en dos papiros fundamentales que eran el papiro Rhind y el papiro de Moscú donde se muestran ciento nueve problemas, que incluían el uso de operaciones aritméticas entre los números enteros y racionales positivos como se muestra:

> Se formaron también determinados métodos de operaciones matemáticas con números enteros y fracciones… En la multiplicación, por ejemplo, preferiblemente se utilizaba el método de duplicación paso a paso de uno de sus factores y de la suma de los productos parciales convenientes… En la división se aplicaba el procedimiento de duplicación y división sucesiva por la mitad… En la suma de fracciones que tienen diferente denominador los egipcios utilizaban la multiplicación de estas por números auxiliares. El método de selección de estos números no da, sin embargo, el derecho a juzgar sobre este método como un proceso uniforme, una manera adecuada de reducir estas fracciones a un denominador común (Ríbnikov, 1987, p. 25).

Como puede observarse, los egipcios realizaban las operaciones aritméticas básicas con números enteros y con fracciones, utilizando para ello principalmente la adición en el caso de la división, poseían una gran variedad de métodos por lo que para ellos era la operación más difícil.

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2
REVISTA MULTIDISCIPLINARIA Dialógica

Los Sumerios o Babilonios

De esta civilización se tienen registros de escritura numérica aproximadamente desde hace 2600 años A.C.; estos se hallaban en tablas de arcilla, habiendo encontrado aproximadamente entre doscientas y doscientas cincuenta tablillas con contenido matemático. Su desarrollo en la matemática se emplea básicamente para operaciones comerciales, para hacer anotaciones sobre mercancías, entre otras cosas; el sistema de numeración empleado por los sumerios tiene base sesenta y para representar los números utilizaban dos símbolos que eran la cuña que representaba el número uno y en ocasiones números de la forma 60^{k} siendo k un número natural y el gancho que representaba el número diez, sólo con estos dos símbolo haciendo sumas sucesivas lograban escribir números desde el uno hasta el cincuenta y nueve. Según Macías (s/f, p. 29), "Los nueve primeros números naturales se representan repitiendo el signo de la unidad tantas veces como sea preciso; los números 20, 30, 40 y 50 repitiendo el de las decenas; los números 120, 180 repitiendo el signo de la sesentena".

El desarrollo de este sistema de numeración estuvo aproximadamente entre los siglos XXVII y IV A.C. y a pesar de esto, esta civilización no conocía los números negativos ni el cero. A continuación, se mostrarán algunos de los números empleados por los Babilonios.

Cuadro 2
Sistema de Numeración Sumerio

Número	Símbolo	Número	Símbolo	Número	Símbolo
1	𒁹	2	𒈫	3	𒐈
4	𒐉	5	𒐊	6	𒐋
7	𒑂	8	𒑄	9	𒑆
10	𒌋	20	𒎙	30	𒌍
40	𒐏	50	𒐐	60	𒁹
$\frac{1}{2}$	𒈦	$\frac{1}{3}$	𒑚	$\frac{2}{3}$	𒑛

Nota. Elaborado con datos tomados de «Evolución histórica del concepto de número» por Macías, (s/f), Revista de la Educación de Extremadura Auto Didáctica, 31.

Como pudo observarse, para la representación de números fraccionarios utilizaban también la cuña con un símbolo a parte que indicaba que se trataba de una fracción "Sobre la base de este sistema fueron creadas muchas reglas uniformes para las operaciones aritméticas con números enteros y fracciones… existían tablas de multiplicar (desde 1.1 hasta 60.60)… la división se realizaba con ayuda de tablas de valores inversos". (Ríbnikov, 1987, p. 29). Como puede observarse, con su sistema de numeración, los babilonios realizaban operaciones de adición, sustracción, multiplicación e incluso división no sólo de números enteros, sino también de números fraccionarios utilizando tablas que le ayudaban a efectuar tales operaciones.

Los Griegos

En la civilización griega, el estudio de los números se vio limitado drásticamente, esto se debe a que sólo empleaban los números para representar cantidades o medidas de área o volumen, en este sentido debemos precisar que antiguamente el área de la matemática que predominaba era la geometría y el uso de los números naturales y fracciones positivas eran para aspectos ya mencionados, haciendo omisión de los números negativos y de los números reales, en particular; para los griegos, números irracionales como $\sqrt{2}$ (el cual se les presentó al trazar la diagonal de un cuadrado de lado uno) se consideraban como inconmensurables. Esto lo afirma Rivero, (2001):

> Los griegos rechazaron el uso de los números negativos, por la falta de un equivalente dentro de la geometría. Para ellos, todo número representaba la longitud de un segmento o el área de una figura plana. La geometría era considerada entonces como el corazón de toda la matemática… (p.4).

Los griegos tuvieron dos sistemas de numeración los cuales eran decimales; el primero fue el sistema de numeración ático desarrollado aproximadamente en los años 600 A.C. donde se empleaban barras verticales para representar los números del uno al cuatro y los números cinco y los siguientes múltiplos de diez se representaban escribiendo la primera letra de cada número.

Posteriormente desarrollaron el sistema jónico en el cual cada número iba a representar una de las veintisiete letras de su alfabeto en minúsculas, este sistema de numeración era muy poco práctico para hacer operaciones aritméticas.

Los griegos a pesar de que se dedicaron mayormente a la geometría, conocían para realizar cálculos geométricos las cuatro operaciones aritméticas básicas. Una de sus mayores obras a la matemática son "Los Elementos" de Euclides (300 A.C.) quien se dedica a recopilar en trece libros todo el conocimiento geométrico de la época, planteando problemas matemáticos cuya solución generalmente se vinculaba con la geometría.

Como ya se dijo, uno de los problemas más significativos era calcular la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden la unidad, el resultado para este problema es un número irracional, pero en la época los llamaban como ya se mencionó números inconmensurables.

Algunos de los matemáticos más notables de la época son Pitágoras, Aristóteles, Thales de Mileto, Arquímedes, Apolonio de Perga, Herón de Alejandría, Diophantus entre otros; los dos últimos mencionados tuvieron un aporte muy importante con respecto al desarrollo de los números. Herón, por una parte, se especializaba en el cálculo de áreas y volúmenes de figuras y el cálculo de raíces cuadradas, entre los cuales se encontró con raíces de números negativos; números que para la época no se conocían. Por otro lado, Diophantus se especializó en la resolución de ecuaciones con números enteros, éste, en uno de sus problemas planteados quiso hallar las medidas de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es doce y su área es siete. Una parte de este análisis, es dar a conocer aspectos importantes de la matemática a través de problemas de la historia, así que convendría tratar de resolver esta situación con los estudiantes en clase empleando para ello notaciones de la actualidad como se verá:

Supongamos que un triángulo cuyos lados se desconocen tiene medidas a, b y c, como se trata de un triángulo rectángulo, supongamos que sus catetos son a y b y su hipotenusa es c como se observa en el Gráfico 2:

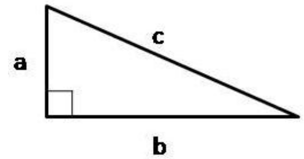


***Gráfico 2*. Triángulo Rectángulo.**

Ahora bien, en función de los datos dados se tiene que $a + b + c = 12$ (1) y $\frac{a \cdot b}{2} = 7$ (2). De la relación (1) despejemos $a + b$, (esto se hace ya que el área del triángulo se consideró en función de a y b) y elevemos al cuadrado la ecuación resultante, así:

$$a + b = 12 - c \Rightarrow (a + b)^2 = (12 - c)^2,$$

Al desarrollar el producto notable en ambos miembros de la igualdad queda: $a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 144 - 24c + c^2$(3), según la relación (2) se tiene que $\frac{a \cdot b}{2} = 7 \Rightarrow a \cdot b = 14$, al sustituir esta última igualdad en la expresión (3), queda: $a^2 + b^2 + 2 \cdot 14 = 144 - 24c + c^2$. Ahora bien, como c es la hipotenusa y, a y b son los catetos, por el teorema de Pitágoras se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$(4), esta última igualdad se puede sustituir en el lado izquierdo de la expresión anterior teniendo que: $c^2 + 2 \cdot 14 = 144 - 24c + c^2$, sumando $-c^2$ queda: $28 = 144 - 24c$, al despejar c, se tiene que : $c = \frac{116}{24} = \frac{29}{6}$, ahora bien, el valor de c se puede sustituir en $a + b = 12 - c \Rightarrow a + b = 12 - \frac{29}{6} \Rightarrow a + b = \frac{43}{6}$.

Recapitulando, se quieren hallar los valores de a, b y c de los cuales ya se conoce que $c = \frac{29}{6}$, también se tiene que$a + b = \frac{43}{6}$y $a \cdot b = 14$, si de esta última expresión se despeja alguna de las variables, digamos *a* y se sustituye en la otra ecuación se tendría que $\frac{14}{b} + b = \frac{43}{6}$, al multiplicar esta expresión por 6b se tiene que: $84 + 6b^2 = 43b$ la cual es una ecuación de segundo grado. En la actualidad, existen varios métodos para resolver este tipo de ecuaciones, entre ellos están la factorización, la completación de cuadrados o la aplicación de la fórmula resolvente, el último de los métodos ya mencionados es el que se empleará en este caso, veamos:

$$84 + 6b^2 = 43b \Rightarrow 6b^2 - 43b + 84 = 0$$

Recordemos que para aplicar la fórmula de la resolvente en una ecuación de segundo grado, la misma debe tener la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales, y a es no nulo (pues en otro caso sería un ecuación de primer grado), y cuyas soluciones son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, una vez que la ecuación planteada tiene la forma deseada, se encuentran las soluciones: $b = \frac{-(-43) \pm \sqrt{(-43)^2 - 4.6.84}}{2.6}$

$$= \frac{43 \pm \sqrt{1849 - 2016}}{12} = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Como se observa, el discriminante de esta ecuación es negativo, por lo que no tiene soluciones reales; he aquí uno de los primeros planteamientos en la historia que sugieren la presencia de un nuevo conjunto numérico, aunque que para la época simplemente no tenía solución. Tal como afirma Valdez (2008).

> Los números complejos resultan de las raíces cuadradas de números negativos. Si bien los griegos resultan el primer referente como Herón de Alejandría (siglo I A.C.) al obtenerse como resultado una sección cónica, en el año 275 Diophantus que intento calcular los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 y área 7. (p. 31).

Además de este tipo de ecuaciones, como las que plantea el problema que se acaba de mencionar, también es conveniente ver que hay ecuaciones de segundo grado que sí poseen soluciones reales y que, si se emplea por ejemplo el método ya utilizado, la naturaleza de las soluciones y el número de estas dependerán del discriminante.

Los Chinos

Los chinos emplearon también un sistema de numeración decimal basado en ciertos símbolos de su lenguaje que combinaban entre sí para obtener las cantidades deseadas; el sistema de numeración chino tardó en desarrollarse desde 1500 A.C. hasta aproximadamente el siglo VIII D.C. Esta civilización empleaba las unidades, decenas, centenas, unidades de mil, de millón y de billón.

Esta civilización tuvo gran relevancia en la evolución de los números, debido a que los chinos utilizaban fracciones y números negativos en situaciones comerciales, empleando para ello varillas de colores, utilizando el color rojo para representar cantidades positivas y el color negro para cantidades negativas. Ellos emplearon además objetos como el ábaco para realizar operaciones con este tipo de números, además conocían el número cero. La principal fuente de información que se tiene del desarrollo de la matemática china es una recopilación de textos llamada “la matemática de los nueve libros” que comprende problemas de una gran diversidad de temas de las distintas áreas de la matemática; conocían el número π y lo utilizaban para resolver problemas geométricos teniendo para este número varias aproximaciones cada vez más acertadas.

Para las operaciones aritméticas utilizaban las reglas habitualmente conocidas tanto para números enteros como fraccionarios, excepto en la división de fracciones donde se exigía reducir las fracciones hasta tener un denominador común.

Los Hindúes

Los Hindúes comenzaron a construir su sistema de numeración aproximadamente en el siglo III A.C. Ellos crearon un sistema de numeración decimal (el cual es posicional) que conforma la base del sistema hindoarábigo actualmente utilizado y el sistema de numeración posicional, además, emplearon por primera vez el número cero en el siglo V D.C. En el siglo VI aproximadamente, los Hindúes emplearon operaciones algebraicas con los números y algunas propiedades al respecto, además utilizaban los números negativos.

Las matemáticas en la India se desarrollaron mayormente debido a sus creencias religiosas, ya que utilizaban la geometría para construir templos y altares para la adoración de sus dioses e incluso existían leyendas que relacionaban la matemática y los dioses en que ellos creían. El desarrollo matemático de esta civilización se ve enriquecido durante los siglos V D.C. y XII D.C.

Con matemáticos célebres como Aryabhata (476-550), Brahmagupta (598-668), Mahavira (siglo IX D.C.) y BhaskaraAkaria (1114-1185), quienes se dedicaron a desarrollar esta ciencia en áreas como análisis, álgebra y geometría, desarrollaron las operaciones aritméticas y, particularmente, Brahmagupta y Bhaskara establecieron las reglas con las que actualmente se opera con números reales, incluyendo además el cálculo de potencias y de raíces indicando que no era posible el cálculo de raíces de números negativos, tal como se aprecia:

> Las reglas de operaciones con los números entonces son las siguientes: la suma de dos pertenencias es una pertenencia, de dos deudas es una deuda, de una pertenencia y una deuda, su diferencia, y si son iguales es cero. La suma de cero y una deuda es una deuda, de una pertenencia y el cero, una pertenencia. El producto de dos pertenencias o dos deudas es una

> pertenencia, el resultado del producto de una pertenencia y una deuda es una pérdida. Esta misma regla es válida para la división. El cuadrado de una pertenencia o una deuda es una pertenencia; la pertenencia tiene dos raíces: una constituye una ganancia y la otra una pérdida. La raíz de una pérdida no existe ya que tal no puede ser un cuadrado. Ríbnikov (1987, p. 46).

Como se observa, en términos utilizados por esta civilización, las palabras relacionadas con pertenencias o ganancias se relacionan con la operación adición, mientras que la sustracción la denominaban como pérdidas, además, estos apreciaron lo que hoy se conocen como las reglas de los signos que generalmente se aprenden entre los últimos años de primaria y los primeros de educación media general.

Los Mayas

En paralelo con el desarrollo de las matemáticas hindúes, en América los mayas también establecieron su propio sistema de numeración; las matemáticas mayas surgen aproximadamente entre los años 400 A.C. y 300 A.C., hasta el siglo VIII D.C., estos aportes le permitieron construir un calendario y desarrollarse en la astrología, aspecto que utilizaban religiosamente para la adoración a sus dioses.

La numeración maya es de base veinte, se supone que esto se deriva de que ellos utilizaban los dedos de las manos y los pies, a pesar de que no conocían los números negativos sus aportes en el desarrollo de un sistema de numeración eran muy avanzados en el continente americano, para representar sus números utilizaban tres signos que eran el punto que representa el uno, la raya que representa el número cinco y la concha o caracol que representaba el número cero, con estos tres símbolos podían escribir los números desde el cero hasta el diecinueve, para representar el veinte y números mayores de veinte, utilizaban un segundo nivel donde cada número se multiplicaba por veinte, a continuación se muestran algunos de los números de esta civilización (ver Cuadro 3).

Cuadro 3
Numeración Maya

	Número	Símbolo	Número	Símbolo	Número	Símbolo	Número	Símbolo
Primer Nivel (se multiplica por 1 cada)	0		1		2		3	
	4		5		6		7	
	8		9		10		11	
	12		13		14		15	
	16		17		18		19	
Segundo nivel (se multiplica por 20 el número de arriba y se suma con el de abajo)	20=20+0		30=20+10		40=2.20+0		50=40+10	
	60=3.20+0		70=60+10		80=4.20+0		90=80.10 +0	
	100=5.20 +0		200=10.20 +0		300=15.20 +0			

Nota: Elaborado con datos tomados de «Mayan mathematics» por *O'Connor*, J. y Robertson*, E* (2004).

Los Árabes

Los árabes recopilaron información sobre los sistemas de numeración de los hindúes, griegos y romanos y a partir de allí crearon su propio sistema de numeración; uno de sus principales representantes fue Al-Khwarizmi, quien aproximadamente entre los siglos VIII y IX, además de dedicarse al álgebra y al desarrollo de ecuaciones de primer y segundo grado, fue uno de los que introdujo en el sistema hindoarábigo y el número cero, además de trabajar con números negativos.

Ya para los años 1500 D.C., los árabes junto con su sistema de numeración establecieron una aritmética bien definida aplicándola a la resolución de ecuaciones; el desarrollo de la matemática árabe tuvo grades aportes a la geometría trabajando con el cálculo de áreas y volúmenes.

Los árabes se valían de muchos métodos para resolver ecuaciones, aplicaban soluciones a través de la geometría, pero también desarrollaron formas de resolverlas numéricamente, aunque existían algunas ecuaciones que para ellos no podían ser resueltas pues aparecían raíces cuadradas con números negativos.

Europa

En Europa hubo un gran desarrollo de la matemática; dentro del sistema de numeración, empleaban un sistema decimal utilizando la numeración hindoarábiga actualmente conocida. Fue en este continente donde principalmente se establecieron las simbologías matemáticas que se utilizan en la actualidad como el símbolo de más (+), menos (-) o el uso de los paréntesis como signos de agrupación entre otros aspectos.

En relación con el desarrollo de los conjuntos numéricos, este continente se vio muy involucrado, formalizando a través del tiempo una construcción matemática de cada uno de los conjuntos numéricos que actualmente se emplean; además, en Italia, se originan ciertos números que dan respuestas a problemas de civilizaciones anteriores relacionados con la extracción de raíces cuadradas cuya cantidad subradical es un número negativo. Este conjunto es el de los números complejos.

El desarrollo de este nuevo conjunto de números se dio aproximadamente entre los años 1500 y 1800; siendo un duro proceso puesto que, tras varios siglos, no eran aceptados dentro de la comunidad matemática. Entre los matemáticos que se encargaron del surgimiento y formalización del conjunto de los números complejos están Scipione Del Ferro (1565-1526), Gerolamo Cardano (1501-1576), Nicoló Tartaglia (1499-1557), Rafael Bombelli (1526-1572) entre otros.

La persona que concibió a los números complejos fue Scipione Del Ferro utilizándolos para resolver algunas ecuaciones de tercer grado; él fue profesor de matemática de la universidad de Bolonia en Italia, se dice que era una persona muy reservada. En 1505, Del Ferro descubre que una ecuación cúbica de la forma $x^3 + px = q$ siendo p y q números reales se podía resolver mediante la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Para asegurar la sucesión de su cátedra, Del Ferro (poco antes de morir) reveló su secreto a su yerno y discípulo Antonio María Fiore, quien no era un matemático con mucha reputación. En 1535, Fiore se enfrenta en Venecia a Tartaglia, célebre matemático italiano cuya fama se le otorga por resolver ecuaciones con algunos métodos que sólo él conocía, además de ser un experto en el estudio de las trayectorias y de ser el primero en traducir los elementos de Euclides al italiano O´Connor y Robertson (2005).

El enfrentamiento consistió en resolver treinta problemas que cada uno le proponía al otro. Fiore, le coloca a Tartaglia en su mayoría problemas donde se debían resolver ecuaciones de tercer grado y pierde el encuentro; pero, durante la disputa, Tartaglia pudo ser capaz de redescubrir la fórmula de Del Ferro.

Gerolamo Cardano (matemático, medico, filosofo, astrólogo y teólogo italiano) quien, desde hace mucho intentaba resolver ecuaciones de tercer grado sin lograr ningún éxito, en 1539 conoce a Tartaglia y lo convence de revelarle su secreto para resolverlas. Tartaglia accedió con la condición de que no la contara a nadie más; haciendo caso omiso a la condición, Cardano, en 1545, publica una obra conocida como Ars Magna donde muestra varias formas de eliminar la variable elevada al cuadrado de una ecuación cúbica lo que se conoce como el método de Cardano, además de varios métodos para resolver ecuaciones cúbicas y de cuarto grado.

A continuación, se utilizarán, notaciones actuales para desarrollar el método de Cardano para eliminar el término cuadrático de una ecuación de tercer grado. Este método se puede utilizar en un aula puesto que, además de reconstruir un hecho histórico que contribuyó al surgimiento de un conjunto numérico, permite a los estudiantes practicar aspectos como el desarrollo de productos notables.

Sea $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ con a, b, c, d son números reales y a diferente de cero (puesto que de lo contrario la ecuación sería de segundo grado) una ecuación de tercer grado. Como a es diferente de cero se puede dividir toda la ecuación entre a y queda: $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$. Seguidamente, se procederá a hacer ciertos cambios, ya que, como $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, y \frac{d}{a}$ son números reales cualesquiera, entonces se puede hacer $\frac{b}{a} = e$, $\frac{c}{a} = f$ y $\frac{d}{a} = g$; así la ecuación queda de la siguiente forma: $x^3 + ex^2 + fx + g = 0$. Luego, se hará un cambio de variable haciendo $x = y - \frac{e}{3}$, esto con la finalidad de eliminar la variable elevada al cuadrado; así la ecuación queda expresada de la siguiente manera: $\left(y - \frac{e}{3}\right)^3 + e\left(y - \frac{e}{3}\right)^2 + f\left(y - \frac{e}{3}\right) + g = 0$. Desarrollando los productos notables, se tiene que:

$$y^3 - 3y^2.\frac{e}{3} + 3y.\left(\frac{e}{3}\right)^2 - \left(\frac{e}{3}\right)^3 + ey^2 - \frac{2ye^2}{3} + e\left(\frac{e}{3}\right)^2 + fy - \frac{fe}{3} + g = 0$$
$$\Rightarrow y^3 - ey^2 + \frac{ye^2}{3} - \frac{e^3}{27} + ey^2 - \frac{2ye^2}{3} + \frac{e^3}{9} + fy - \frac{fe}{3} + g = 0$$
$$\Rightarrow y^3 - \frac{ye^2}{3} + \frac{2e^3}{27} + fy - \frac{fe}{3} + g = 0 \Rightarrow y^3 - \left(\frac{e^2}{3} - f\right)y - \left(-\frac{2e^3}{27} + \frac{fe}{3} - g\right) = 0$$

Ahora bien si se hace $p = \frac{e^2}{3} - f$ y $q = -\frac{2e^3}{27} + \frac{fe}{3} - g$, la ecuación finalmente queda:

$$y^3 - py - q = 0 \Rightarrow y^3 = py + q.$$

Una vez hecho esto, pueden resolverse ecuaciones de tercer grado aplicando el método ya conocido. Por ejemplo, la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x + 14 = 0$, es una ecuación de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, donde a=1, b=6, c=15 y d=14; para resolverla, se hará un cambio de variable, en este caso $x = y - \frac{b}{3} = y - \frac{6}{3} = y - 2$; quedando lo siguiente:

$$(y - 2)^3 + 6(y - 2)^2 + 15(y - 2) + 14 = 0$$
$$\Rightarrow y^3 - 3.2.y^2 + 3.2^2.y - 2^3 + 6(y^2 - 2.2.y + 2^2) + 15y - 30 + 14 = 0$$
$$\Rightarrow y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 6(y^2 - 4y + 4) + 15y - 30 + 14 = 0$$
$$\Rightarrow y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 6y^2 - 24y + 24 + 15y - 30 + 14 = 0$$
$$\Rightarrow y^3 + 3y = 0 \Rightarrow y(y^2 + 3) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y^2 + 3 = 0$$
$$\Rightarrow y = 0 \vee y^2 = -3 \Rightarrow y = 0 \vee y = \sqrt{-3} \vee y = -\sqrt{-3}$$

Ahora bien, al inicio del ejercicio se dijo que $x = y - 2 \Longrightarrow y = x + 2$ al devolver el cambio se tiene:

$$x + 2 = 0 \vee x + 2 = \sqrt{-3} \vee x + 2 = -\sqrt{-3}$$
$$\Longrightarrow x = -2 \vee x = -2 + \sqrt{-3} \vee x = -2 - \sqrt{-3}$$

Tartaglia al saber esto acusa a Cardano de haberle robado su fórmula, pero este último junto con su alumno Ludovico Ferrari (1522-1565) probaron que la fórmula propuesta en Ars Magna es una generalización de la fórmula descubierta por Del Ferro. Así que, en honor a estos tres matemáticos, esta fórmula se conoce como la Fórmula de Scipione Del Ferro-Tartaglia-Cardano y consiste en que si se tiene una ecuación de la forma $x^3 = px + q$ donde p y q son números reales, su solución viene dada por:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Nótese que la expresión $q^2 - p^3$ puede ser un número positivo, negativo o cero; por lo tanto, Cardano afirma que existen ecuaciones que tienen en sus soluciones raíces cuadradas cuya cantidad subradical es negativa.

Otro de los aportes de Cardano en su obra fue que introdujo la realización de operaciones con raíces cuadradas negativas, mostrando situaciones como la siguiente:

$$\left(2 + \sqrt{-3}\right)\left(2 - \sqrt{-3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{-3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$$

Rafael Bombelli fue un matemático que, aun cuando no recibió una educación formal, pudo lograr grandes aportes para el estudio de los números complejos. Bombelli se preguntó: si al tener la ecuación $x^3 = 12x - 9$ que, según Cardano, tiene como solución $x = \sqrt[3]{-9 + \sqrt{-1647}} + \sqrt[3]{-9 - \sqrt{-1647}}$ ¿Por qué esta ecuación también tiene como solución a 3? Para dar respuesta a esta interrogante, Bombelli quiso realizar en 1557 una obra de cinco volúmenes llamada L´Algebra donde publicaría aspectos sobre la resolución de ecuaciones, temas aritméticos, problemas de aplicación y números complejos; lamentablemente, en 1572 muere, habiendo publicado solamente tres volúmenes de su obra.

A pesar de que Bombelli no culmina su trabajó, hizo grandes aportes al estudio de los números complejos puesto que él afirmó que todo número complejo puede tener la forma $a + b\sqrt{-1}$ siendo a y b números reales, notando que si se aplica a esta expresión la raíz cúbica queda la expresión $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$ que se asemeja a los términos empleados por Cardano, adoptó de esta manera a $\sqrt{-1}$ como un número; además, Bombelli estableció ciertas reglas como que si t es un número positivo, entonces: $\sqrt{-t}.\sqrt{-t} = -t$ y $\sqrt{-t}.\left(-\sqrt{-t}\right) = t$

Bombelli en su obra también estableció las reglas que se utilizan hoy día para realizar operaciones con números complejos, pero tras su muerte, su obra fue ignorada, y estos números fueron renegados por un tiempo.

Más tarde, en el siglo XVII reciben el nombre de números imaginarios por el matemático francés René Descartes, porque él afirmaba que estos números solo podían existir en la imaginación. Otras formas como los llamaban eran “sofisticados” (Cardano), “sin sentido” (Napier), “inexplicables” (Girard), “incomprensibles” (Huygens) entre otros; gracias a Descartes es que se le debe el nombre que actualmente tiene “i” como unidad imaginaria. En ese mismo siglo, Albert Girar sugiere que una ecuación polinómica de grado n debe tener tantas raíces como lo indica su grado contando su multiplicidad, pero para la época ningún matemático había podido demostrar este hecho.

A pesar del desarrollo de los números complejos y su contribución para la resolución de ecuaciones en la extracción de raíces cuadradas cuya cantidad subradical es negativa, este conjunto numérico sigue siendo renegado ante la comunidad matemática; aunque de igual manera hubo matemáticos que, sin importarle esto, siguieron trabajando con este conjunto numérico, por ejemplo, J. Wallis, en 1653, se preocupó por cómo representar un número complejo gráficamente, y dijo que si se tiene una ecuación cuadrática de la forma: $x^2 + 2bx + c^2 = 0$ cuyas soluciones son: $x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$.

Entonces, puede ocurrir lo siguiente:

Si $b \geq c$, las soluciones serán obviamente números reales cuya gráfica estará sobre la recta real y será como sigue:

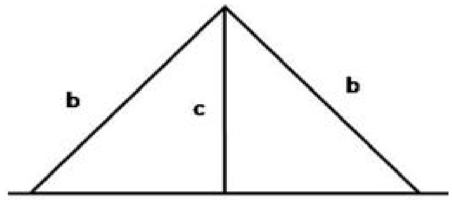


***Gráfico 3*: Representación gráfica de las soluciones de una ecuación cuadrática con soluciones reales.** Tomado de «Una Introducción a los Números Complejos» por Rivero, F. (2001), 9.

Un ejemplo del caso anterior se puede observar al intentar resolver la ecuación $\mathrm{x}^2 + 16\mathrm{x} + 28 = 0$, en este caso es claro que$\mathrm{b} \geq \mathrm{c}$ puesto que $\mathrm{b} = 8$ y $\mathrm{c} = \sqrt{28} \approx 5{,}29$, las soluciones de esta ecuación son $\mathrm{x} = -14$ y $\mathrm{x} = -2$, entonces según Wallis, su gráfica estaría en la recta real como sigue:

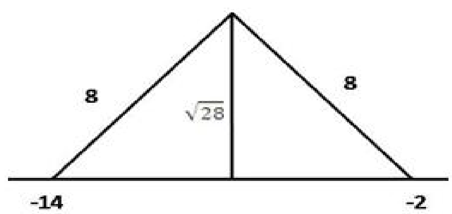


***Gráfico 4*: Representación gráfica de las soluciones de la ecuación** $x^2 + 16x + 28 = 0$. Donde -14 y -2 son las soluciones de la ecuación, los lados congruentes del triángulo isósceles miden 8 y la altura tomada desde el lado no congruente mide $\sqrt{28}$.

2) Si $\mathrm{b} < \mathrm{c}$, las soluciones no serán números reales con lo que no podrán graficarse en la recta sino sobre ella como sigue:

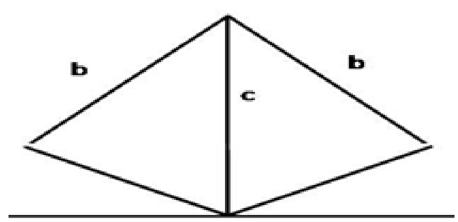


***Gráfico 5*: Representación gráfica de las soluciones de una ecuación cuadrática cuyas soluciones no son reales.** Tomado de «Una Introducción a los Números Complejos» por Rivero, F. (2001), 9.

Publicación en Línea (Semestral) UPEL-Maracay (Venezuela)
DL: PPL201102AR3941
ISSN: 2244-7662
Julio-Diciembre 2019. Vol. 16, N° 2

Un ejemplo de este caso podría ser intentar resolver la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$, en este caso $b = 2$ y $c = \sqrt{5} \approx 2{,}23$, sus soluciones son $x = -2 + i$ y $x = -2 - i$, según Wallis, la gráfica de estos números no puede estar en la recta real, así que para realizar su gráfica sería:

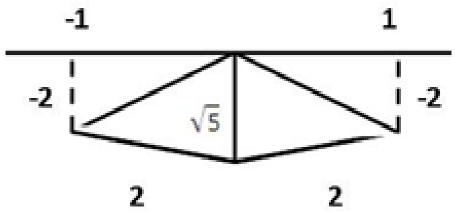


***Gráfico 6*: Representación gráfica de las soluciones de la ecuación** $x^2 + 4x + 5 = 0$.

En este caso, las soluciones están vinculadas no solo con la longitud en la recta entre -1 y 1 sino también la altura representada por -2 (como la altura es negativa, la gráfica se realiza hacia abajo).

Luego, en 1806 Wessel y Argand establecieron una representación gráfica de los números complejos que es la que se utiliza hoy día y que se conoció como el diagrama de Argand que se muestra a continuación:

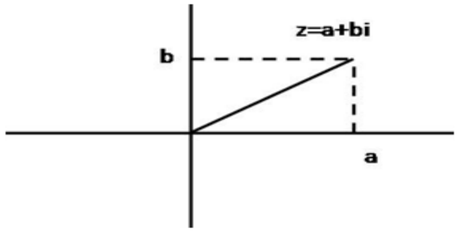


***Gráfico7*: Representación gráfica de un número complejo.**

Luego de varios siglos desarrollando formalmente el estudio de los números complejos, fueron Leonard Euler y Carl Gauss quienes le dieron a este conjunto numérico un lugar reconocido en la matemática.

En el año 1777 Leonard Euler adopta el término $i = \sqrt{-1}$; esto permitió trabajar con logaritmos complejos, Leibniz y Johan Bernoulli tuvieron una disputa al calcular el logaritmo de i: Leibniz determinó que $\log i = 0$ justificándose por lo siguiente: si

$2\log(-1) = \log(-1)^2 = \log(1) = 0$, de lo anterior $2\log(-1) = 0$, ahora bien, al multiplicar la igualdad anterior por un cuarto se tiene: $\frac{1}{2}\log(-1) = 0$, aplicando propiedades de los logaritmos $\log(-1)^{1/2} = 0$, es decir que $\log\sqrt{-1} = 0$, pero como ya se mencionó $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$; entonces $\log(\mathrm{i}) = 0$. Por otra parte, Johan afirmaba que $\log(\mathrm{i}) = \frac{\pi \mathrm{i}}{2}$.

Posteriormente, Euler, demuestra, mediante cálculos, una forma de relacionar los logaritmos complejos con la fórmula $e^{i\pi} = -1$y, además, con el desarrollo de la trigonometría y, luego, haciendo uso de series estableció que $e^{i\pi} = \cos\pi + i\mathrm{sen}\pi$. Esta es la conocida fórmula de Euler y resolvió la disputa sobre el logaritmo de i como se verá:

Se tiene que $e^{i\pi} = -1$, ahora bien al aplicar logaritmos con base e se tiene que $\pi i = \log(-1)$, al multiplicar esta igualdad por un medio se obtiene $\frac{\pi i}{2} = \frac{1}{2}\log(-1)$ y al aplicar las propiedades de los logaritmos que $\frac{\pi i}{2} = \log(-1)^{1/2} = \log\sqrt{-1} = \log(\mathrm{i})$ dándole la razón a Bernoulli.

En 1831 el matemático reconocido Carl Gauss publica un trabajo donde expone varias de las propiedades que se cumplen sobre los números complejos, sus operaciones y su representación gráfica, incluyendo en este trabajo el teorema fundamental del álgebra, tal como indica Canal (2012):

> Carl Friedrich Gauss obtuvo la primera demostración correcta del teorema fundamental del álgebra en su tesis doctoral de 1797. Posteriormente en 1831 publica un trabajo donde expone con toda claridad las propiedades de los números de la forma a+bi, llamó a estos números "números complejos" y los represento gráficamente como puntos en el plano. La construcción de los números complejos como pares de números reales (a, b) se debe a William Hamilton en 1833 (p. 13).

Con el trabajo publicado por Gauss se comienza a trabajar más con este conjunto numérico dando así paso al estudio de las funciones complejas y al cálculo infinitesimal con funciones de variables complejas.

Luego del recorrido histórico hecho, se procede a mostrar a continuación línea de tiempo como parte final del análisis conceptual.

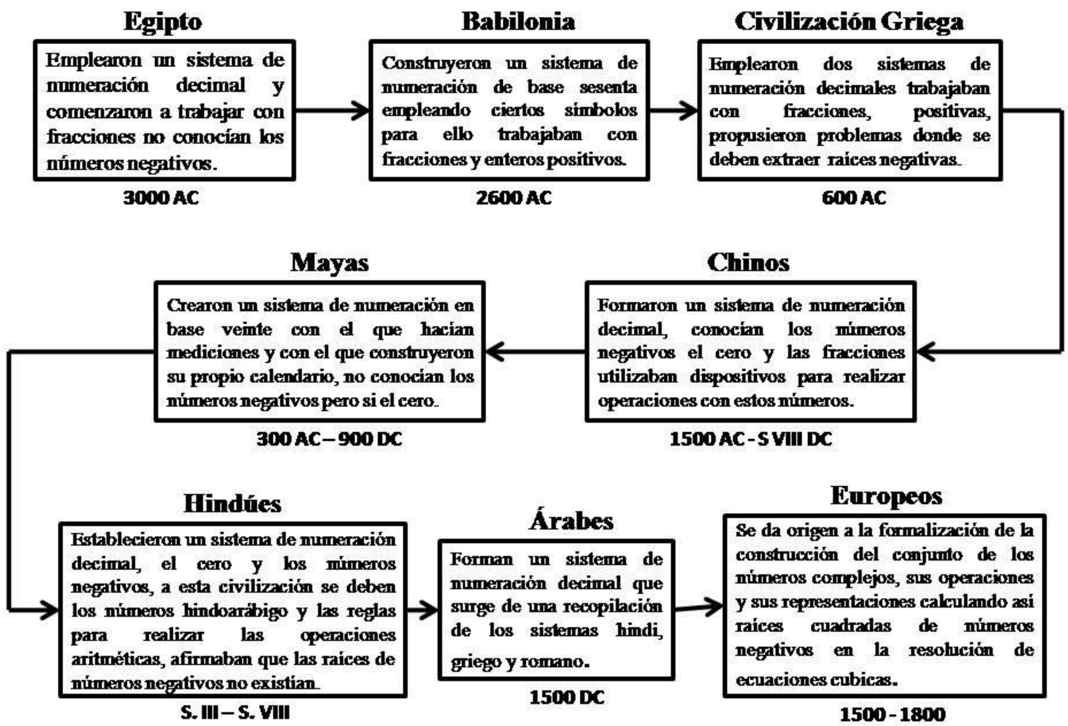


***Gráfico 7*: Línea de tiempo sobre la aparición de los números complejos.**

Metodología

Tomando en cuenta que el apartado anterior conforma el análisis conceptual de los números complejos, el cual forma parte del proceso de análisis didáctico sobre el aprendizaje de este conjunto numérico, se considera el presente como una experiencia didáctica que llevó a originar este conjunto numérico. Durante el proceso de Análisis Didáctico, el desarrollo de este apartado se empleó para dar a conocer a los estudiantes este tema, tomando de la reconstrucción histórica del mismo ciertas actividades que sirvieron no solo para presentar el conjunto de los números complejos sino también para repasar contenidos vistos en años anteriores.

El uso de la historia dentro de estas clases fue un punto clave puesto que propició la discusión entre los estudiantes generando en ellos el aprendizaje sobre como surgieron los números complejos, involucrando además al docente al docente como mediador dentro de la discusión, también se consideraron ciertos aspectos de la historia que llevaron a proponer actividades que dieron origen a los números complejos. Para analizar esta información, se contó con la participación de ocho estudiantes de cuarto año de la UEP "Roraima" durante el año escolar 2015-2016.

Los criterios empleados para la selección de estos estudiantes fueron en primer lugar el nivel académico en que se encontraban, ya que el mismo debe proporcionar ciertos conocimientos previos que son importantes para el desarrollo del contenido, además estos debían ser estudiantes que cumplan con todas sus responsabilidades académicas.

Actividades

El análisis Conceptual que se acaba de mostrar sirvió para el diseño de algunas actividades con la finalidad de presentar a los estudiantes el conjunto de los números complejos, estas son consideradas posteriormente en el Análisis de Instrucción del Análisis Didáctico. A pesar de que las mismas no forman parte del Análisis del presente artículo, se colocarán algunas con las respectivas respuestas de algunos estudiantes.

Actividad:

1.- Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado y di: ¿Qué observas? ¿Puedes concluir algo? ¿Qué concluyes?

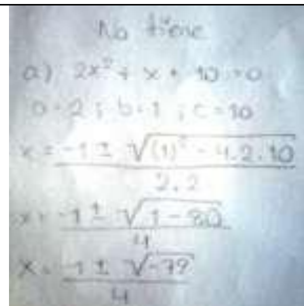
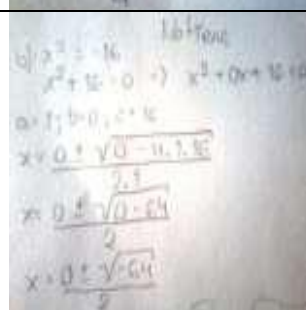
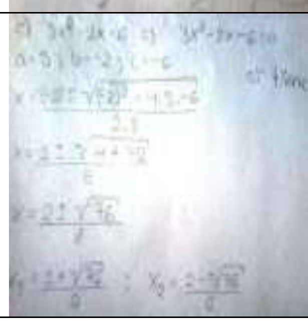
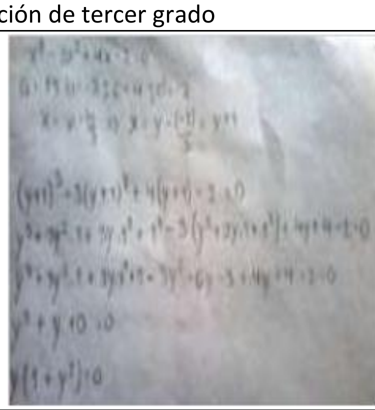
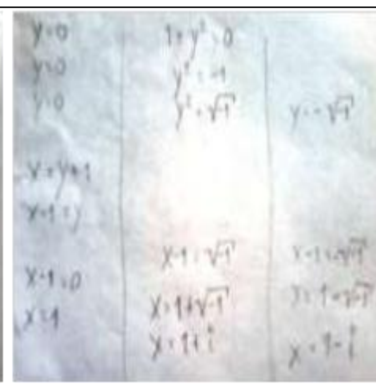
a.- $2x^2 + x + 10 = 0$; b.- $x^2 + 16 = 0$; c.- $3x^2 - 2x = 6$

2.- Resuelve la siguiente ecuación de tercer grado: $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$

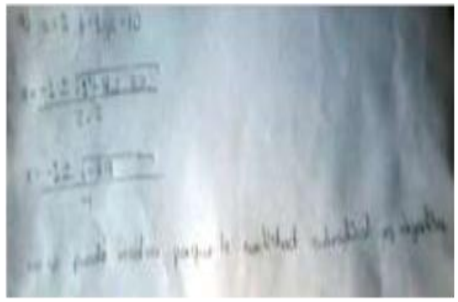
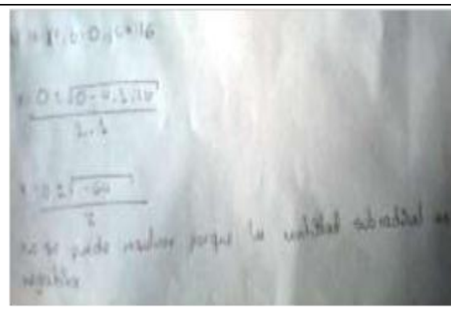
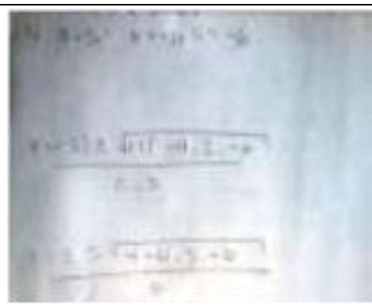
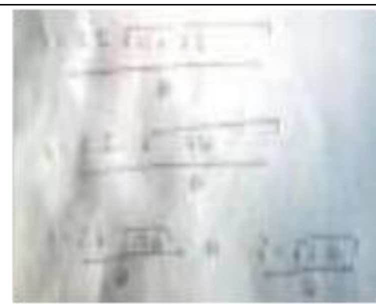
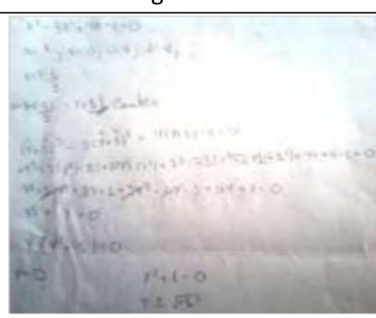
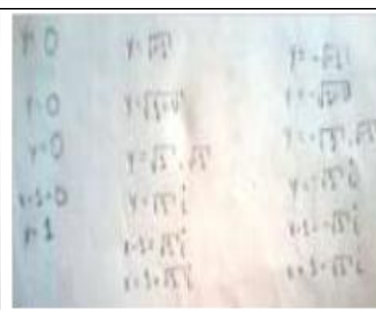
Sugerencia: Has el cambio de variable $y = -\frac{b}{3}$ al considerar una ecuación de tercer grado de la forma: $x^3 - bx^2 + cx + d = 0$

A continuación, se colocarán las respuestas de dos de los estudiantes a los planteamientos anteriores (Ver Cuadro 4 y 5).

Cuadro 4
Respuesta del Estudiante 1 a la Actividad 1

1.- Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado y di: ¿Qué observas? ¿Puedes concluir algo? ¿Qué concluyes?	
$2x^2 + x + 10 = 0$	
$x^2 + 16 = 0$	
$3x^2 - 2x = 6$	
2.- Resuelve la siguiente ecuación de tercer grado	
$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$	 

Cuadro 5
Respuestas del Estudiante 2 a la Actividad 1

1.- Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado y di: ¿Qué observas? ¿Puedes concluir algo? ¿Qué concluyes?	
$2x^2 + x + 10 = 0$	
$x^2 + 16 = 0$	
$3x^2 - 2x = 6$	 
2.- Resuelve la siguiente ecuación de tercer grado	
$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$	 

Resultados del Análisis

Como se pudo observar, las actividades relacionadas con el Análisis Conceptual consistieron en la resolución de ecuaciones de segundo y tercer grado, en el caso de las ecuaciones de segundo grado, los estudiantes prefirieron aplicar la fórmula de la resolvente, sin embargo durante las clases se aplicaron otros métodos como la factorización o la completación de cuadrados con la finalidad de recordar varios conocimientos previos estudiados en años anteriores, en su totalidad los estudiantes resolvieron estas ecuaciones e indicaron cuáles de estas ecuaciones tenían soluciones reales y cuáles no, la ecuación deducida del problema planteado por Diophantus se resolvió durante la clase previa a la actividad.

Por otro lado, se propuso resolver ecuaciones de tercer grado, la metodología a seguir fue la empleada por Cardano, se utilizó su método para eliminar el término cuadrático de la misma facilitando así su resolución, de esta manera, en ambos casos, los estudiantes aplicaron correctamente el procedimiento estudiado para resolver la ecuación propuesta. Luego de este ejercicio, se definió la unidad imaginaria, lo que dio pie a establecer el concepto de número complejo, esta situación permitió a los estudiantes enfrentarse a aspectos como el cambio de variables, cosa que según manifestaron nunca habían utilizado, además de emplear productos notables recordando así conocimientos previos y al mismo tiempo obteniendo nuevos conocimientos, esto despertó en ellos su interés por el tema, resaltando además que el repertorio histórico sobre el contenido captó su atención y los motivó a trabajar con el tema nuevo puesto que sentían que estaban resolviendo cosas en poco tiempo que a muchos le costó años poder desarrollar completamente.

Consideraciones Finales

El desarrollo de esta parte de la investigación muestra la importancia de la incorporación de la historia en las clases de matemática, y que de cierta forma es posible lograr un aprendizaje significativo y e interesante de los contenidos matemáticos, por tanto, es también de mucha importancia que el docente se interese en el surgimiento de los tópicos matemáticos, los contextos donde estos conocimientos se desarrollaron y las situaciones sociales que llevaron al desarrollo de estos contenidos.

Es claro también que usar la historia, no es solo poner a los estudiantes a leer sobre cómo ocurrieron las cosas sino también tomar en cuenta los aspectos epistemológicos de estos hechos, en este caso, se hizo un trabajo de forma interactiva a través de la discusión y a medida que surgían las oportunidades se aplicaban estrategias para resolver problemas de la historia esto logró en este grupo de estudiantes un nivel más alto de interés pues estos, se sintieron parte de la historia al reconstruir hechos que ocurrieron años atrás y que llevan a construir el conocimiento formal que existe hoy día, este tipo de actividades podría motivarlos no solo a interesarse en la matemática sino también a integrarse en la historia.

Referencias

Canal, I. (2012). *La Enseñanza de los Números Complejos en Bachillerato* [Documento en Línea]. Trabajo de Maestría no publicado, Facultad de Educación de la Universidad de Cantabria, España. Disponible: https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2014/02/ivc3a1n-canal-martc3adnez.pdf [Consulta, 2015, abril 19].

Chaparro, O., Póveda, D., y Fernández, R. (s/f). *Jugando con los Números Enteros.* [Documento en Línea] Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Colombia. Disponible: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-110453_archivo.pdf. [Consulta: 2014, marzo 03].

López, J. (2009*).* La importancia de los conocimientos previos para la adquisición de nuevos contenidos. *Revista Digital: Innovación y Experiencias Educativas*. [Revista en Línea] *16* Disponible: http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_16/JOSE%20ANTONIO_LOPEZ_1.pdf. [Consulta: 2014, marzo 03].

Macías, R. (s/f). Evolución Histórica del Concepto de Número. *Revista de la Educación de Extremadura: Autodidáctica.* [Revista en Línea]. Disponible: http://www.anpebadajoz.es/autodidacta/autodidacta_archivos/numero_1_archivos/r_m_hernandez_feb10.pdf . España. [Consulta: 2015, enero 25].

Martínez, M. (2006). *La Investigación Cualitativa (Síntesis Conceptual).* [Documento en Línea]. Disponible: http://sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/investigacion_psicologia/v09_n1/pdf/a09v9n1.pdf [Consulta: 2015, febrero 11].

Maza, C. (1994). Historia de las Matemáticas y su enseñanza: Un Análisis. *Revista SUMA* [Revista en Línea] *17*, 17-26. Universidad de Sevilla, España. [Consulta: 2017, agosto 15].

O'Connor, J. y Robertson, E. (2004). *Mayan mathematics.* [Documento en Línea]. Universidad de St. Andrew Disponible: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Trataglia.html [Consulta: 2015, junio 7].

O'Connor, J y Robertson, E. (2005). *Nicolo Tataglia*. [Documento en Línea]. Universidad de St. Andrew Disponible: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Mayan_mathematics.html [Consulta: 2015, junio 7].

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Editorial Mir Moscú. [Libro en Línea].Disponible: cdigital.dgb.uanl.mx/la/1020150847/1020150847.PDF [Consulta: 2015, abril 16].

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* [Revista en Línea], *33*. 11-27. Disponible: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO6.pdf. [Consulta: 2014, agosto 08].

Rivero, F. (2001). *Una Introducción a los Números Complejos*. [Documento en Línea] Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida Venezuela. Disponible: webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Libros/complejos.pdf [Consulta, 2015, enero 28].

Torres, C. (s/f). *Números Enteros: Origen e Historia.* [Documento en Línea]. Disponible: http://edumate.files.wordpress.com/2007/01/numeros-enteros-origen-e-historia.pdf [Consulta: 2015, enero 25].

Valdez, V. (2008). *Los Conjuntos Numéricos a través de la historia.* [Resumen en Línea]. Trabajo de grado no publicado para optar al título de profesor de Matemática. Instituto Superior de Formación Docente, Buenos Aires Argentina. Disponible: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2779665.pdf [Consulta, 2015, abril 19].

Síntesis Curricular

Carlos Miguel Jiménez Juliac

Profesor de Matemática egresado de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (2012). Magíster en Educación Mención Enseñanza de la Matemática (2017). Estudiante de Ingeniería de Sistemas en la Universidad Nacional Abierta Centro Local Aragua. Doctorando en Educación Matemática, en el Pedagógico de Maracay. Se ha desempeñado como profesor de Matemática, Física y Dibujo Técnico en diversas instituciones de educación media; y, como Docente universitario especialista en Matemática, en el Instituto Universitario Carlos Soublette y en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (IPMAR).