



República Bolivariana de Venezuela  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física  
Centro de Física Fundamental

# Solitones Topológicos Cuánticos 2D

Br Beatriz E. Vargas C.

Tutor: Dr. Nelson Pantoja

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar  
al grado académico de Licenciado en Física

Octubre 2019

## Resumen

Se considera la cuantización de solitones 2D *via* estados coherentes siguiendo el acercamiento propuesto por Dvali, Gomez, Gruending y Rug, 2015. Después de revisar la cuantización *via* la imagen de estados coherentes del solitón  $\varphi^4$  desarrollada por dichos autores, estudiamos la cuantización del solitón sine-Gordon, con especial énfasis en el origen cuántico de la carga topológica, con el fin de determinar similitudes con el solitón  $\varphi^4$  y particularidades propias del solitón sine-Gordon.

# Índice general

<b>1. Solitones topológicos</b>	<b>6</b>
1.1. Estudio de la estabilidad mediante perturbaciones . . . . .	10
1.2. Solitón $\varphi^4$ . . . . .	12
1.2.1. Estabilidad topológica del solitón $\varphi^4$ . . . . .	13
1.3. Cuantización semiclásica del solitón $\varphi^4$ . . . . .	14
<b>2. Imagen estado coherente del solitón <math>\varphi^4</math></b>	<b>18</b>
<b>3. Solitón Sine-Gordon <math>\phi</math></b>	<b>25</b>
3.1. El solitón sine-Gordon clásico . . . . .	25
3.2. Estabilidad topológica del solitón sine-Gordon . . . . .	27
3.3. Imagen Estado Coherente del solitón sine-Gordon . . . . .	28
<b>A. Estados coherentes</b>	<b>36</b>
<b>B. Distribuciones atemperadas y producto de convolución</b>	<b>39</b>
<b>C. Transformada de Fourier</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>42</b>

# Introducción

Los solitones son soluciones a ecuaciones de onda no lineales que han sido muy estudiados clásicamente y tienen una variedad de aplicaciones en diversas áreas. Por otro lado, los solitones son buenos candidatos para describir sistemas extendidos a nivel cuántico. Una forma tradicional de cuantizar es a través del tratamiento perturbativo, en donde el modo cero se interpreta como un estado en reposo y los modos superiores a este corresponden con los estados de dispersión de los mesones alrededor del solitón, cuya referencia estándar es el libro de R. Rajaraman [1].

Otra forma de cuantizar solitones consiste en apelar a la cuantización canónica de los mismos y representar al solitón en la imagen de estados coherentes. En el caso de un oscilador armónico, un estado coherente es un paquete de onda localizado a partir del cual se obtienen valores medios que replican casi exactamente los valores clásicos [2]. Anteriormente se ha cuantizado campos en la imagen de estados coherentes, un ejemplo de esto es el caso 1-dimensional del gas de Bose [3]. Nuestro interés en el presente trabajo es cuantizar solitones de forma directa en la imagen de estados coherentes, idea adelantada y explorada para el solitón de la teoría  $\varphi^4$  por Dvali, Gomez, Gruending y Rug [4]. En particular, dicho acercamiento provee el significado cuántico de la carga topológica que comúnmente se introduce solo en términos clásicos.

En el primer capítulo, mostraremos cómo encontrar las soluciones solitónicas a las ecuaciones de campo mediante el formalismo a primer orden, qué se debe cumplir para que un solitón sea estable y en particular topológicamente estable. Como un primer ejemplo, se estudiará el solitón  $\varphi^4$ . Luego revisaremos muy brevemente en qué consiste la cuantización semiclásica convencional en la aproximación de acoplamiento débil [1].

En el segundo capítulo se revisó la idea de cuantizar de manera directa el solitón  $\varphi^4$  propuesta por Dvali, Gomez, Gruending y Rug [4]. Se comienza

con una expansión de Fourier del solitón, y se identifican los coeficientes de la expansión con los operadores de creación y aniquilación de los cuantos constituyentes del solitón, representando al solitón como un estado coherente. El origen cuántico de la carga topológica se hace notable en la divergencia en el número de ocupación para los cuantos de momentum  $k \rightarrow 0$ .

Además, siguiendo con la revisión veremos que es posible escribir el solitón  $\varphi^4$  como una convolución de una componente topológica y una componente energética. Esto permite escribir el estado coherente que representa al solitón como un producto tensorial de dos estados,  $|sol\rangle = |t\rangle \otimes |E\rangle$ , donde  $|t\rangle$  contiene información de la parte topológica y  $|E\rangle$  contiene información de la parte energética.

En el tercer capítulo queremos estudiar la viabilidad de la idea propuesta por Dvali, Gomez, Gruending y Rug [4]. Para ello, cuantizaremos el solitón sine-Gordon de manera directa en la representación de estado coherente, siguiendo esencialmente el mismo procedimiento empleado en la cuantización del soliton  $\varphi^4$ . Primero obtendremos la solución a la ecuación de campo que describe al solitón sine-Gordon mediante el formalismo a primer orden y se estudiará su estabilidad. Luego, al igual que para el caso del solitón  $\varphi^4$ , construiremos los estados coherentes comenzando por una expansión de Fourier del solitón sine-Gordon clásico e identificando los coeficientes de esta expansión con los operadores de creación y aniquilación. Mostraremos que existe una divergencia en el número de ocupación total para  $k \rightarrow 0$ , el cual corresponde con el origen de la carga topológica para este solitón. Veremos que el solitón sine-Gordon también puede ser escrito como una convolución de una componente topológica con una componente energética.

En el cuarto y último capítulo se dan las conclusiones obtenidas del presente trabajo así como algunas extensiones posibles del mismo.

# Capítulo 1

## Solitones topológicos

A continuación, se mostrará como encontrar las soluciones solitónicas a las ecuaciones de campo mediante el formalismo a primer orden y el estudio de la estabilidad para un solitón. Teniendo como un primer ejemplo el solitón  $\varphi^4$ . Finalmente, se mostrará en qué consiste la cuantización semiclásica de acuerdo con R. Rajaraman [1].

Los solitones son soluciones a ecuaciones de ondas no lineales localizadas y de energía finita, que viajan uniformemente a una velocidad constante, sin distorsión. A pesar de que son soluciones a ecuaciones de onda, estos se comportan más como partículas que como ondas.

Considérese solitones en  $(1 + 1)$  dimensiones que se obtienen a partir de la acción

$$\mathcal{S} = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi)^2 - V(\varphi) \right] \quad (1.1)$$

donde el potencial  $V(\varphi)$  es una función suave positiva de  $\varphi$  y  $\partial_\mu \partial_\mu = \partial_t \partial_t - \partial_x \partial_x$ . Interesados en las soluciones estáticas y de energía finita se sigue que la ecuación de campo viene dada por

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}. \quad (1.2)$$

Suponiendo a continuación que el potencial puede ser escrito de la forma

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{d\varphi} \right)^2, \quad (1.3)$$

donde *el superpotencial*  $W(\varphi)$  admite al menos un punto crítico. La ecuación (1.3) permite que la ecuación (1.2) pueda ser escrita como la ecuación de Bogomol'nyi

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm \frac{dW}{d\varphi}. \quad (1.4)$$

Para encontrar la solución a la ecuación (1.2) por medio de la ecuación de Bogomol'nyi, se debe cumplir que las siguientes ecuaciones sean equivalentes

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dW}{d\varphi} \longrightarrow \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \quad (1.5)$$

derivando  $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{dW}{d\varphi}$  con respecto a  $x$ , se tiene que

$$2 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2W}{dx^2}, \quad (1.6)$$

de aquí se desprende que

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2W}{dx^2} \frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dW}{dx} \right) \quad (1.7)$$

donde

$$\frac{dW}{dx} = \left( \frac{dW}{d\varphi} \right)^2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dW}{d\varphi} \right)^2 = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}. \quad (1.8)$$

De esta última ecuación se ve que efectivamente ambas ecuaciones son equivalentes. Así, a partir de la ecuación

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dW}{d\varphi} \quad (1.9)$$

se tiene la solución estática a la ecuación de campo.

El funcional de energía viene dado por

$$E[\varphi] = \int dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)^2 + V(\varphi) \right]. \quad (1.10)$$

Sustituyendo la ecuación (1.3) en la ecuación (1.9) se tiene que

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{2V(\varphi)}. \quad (1.11)$$

Además, de la ecuación (1.3) y la ecuación (1.9), se obtiene la siguiente ecuación

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2$$

al sustituir en la ecuación (1.10), se tiene que

$$E[\varphi] = \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(+\infty)} d\varphi \frac{d\varphi}{dx}, \quad (1.12)$$

sustituyendo la ecuación (1.11) en la ecuación (1.12) se sigue que el funcional de energía viene dado por

$$E[\varphi] = \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(+\infty)} d\varphi \sqrt{2V(\varphi)}. \quad (1.13)$$

Por ende,  $E[\varphi] \geq 0$ .

Sea  $\mathcal{M}_{vac}$  el conjunto de configuraciones clásicas del campo que son mínimos globales del funcional energía o de los estados de vacío clásicos y dado que  $V(\varphi) \geq 0$ , se sigue que los estados de vacío son los ceros de  $V(\varphi)$  y  $\mathcal{M}_{vac} = V^{-1}(0)$ . Además si  $E[\varphi] < \infty$  se tiene que

$$\frac{d\varphi}{dx} \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \pm\infty, \quad (1.14)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \rightarrow V^{-1}(0) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \rightarrow V^{-1}(0). \quad (1.15)$$

Las configuraciones de campo que son solución a la ecuación (1.9) saturan la ecuación (1.13) y el mínimo viene dado por

$$E[\varphi] = \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(+\infty)} dW(\varphi) = W(\varphi(+\infty)) - W(\varphi(-\infty)). \quad (1.16)$$

Un solitón es una solución clásica estática de la ecuación (1.2) cuya energía no es un mínimo global. En muchos casos, el espacio de las soluciones estáticas de energía finita no es conexo. Un solitón topológico es entonces una configuración estática de mínima energía en una componente del espacio de soluciones anterior donde el mínimo global de la energía no se logra. La solución, si existe, es topológicamente estable.

Para ver esto claramente, consideremos  $\mathcal{FE}$  el espacio de campos estáticos de energía finita y sea  $\mathcal{M} \subset \mathcal{FE}$  el espacio de soluciones clásicas estáticas de (1.2) de energía finita. Supongamos que el comportamiento en el límite para la solución clásica de la ecuación (1.9), donde  $\varphi_k \in \mathcal{M}$ , es dado por la unión de dos componentes desconectadas  $\mathcal{M}$ , tal que

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{++} \cup \mathcal{M}_{+-},$$

donde  $\mathcal{M}_{+-}$  son las configuraciones de campo  $\varphi(x) \in \mathcal{M}$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = A \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi = B$$

y  $\mathcal{M}_{++}$  son las configuraciones  $\varphi(x) \in \mathcal{M}$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = C \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi = C.$$

Estos subespacios están topológicamente desconectados: no es posible cambiar continuamente una solución en un subconjunto a una solución en otro subconjunto. El campo de configuraciones  $\varphi \in \mathcal{M}_{+-}$  son topológicamente estables. La solución  $\varphi_k \in \mathcal{M}_{+-}$  de mínima energía es el solitón. Por otra parte, la configuración de campo no topológica  $\varphi \in \mathcal{M}_{++}$  es poco probable de que exista debido a que puede deformarse suavemente en la configuración de vacío con  $\varphi$  constante.

En relación a lo anterior, clásicamente, la carga topológica de un solitón

viene dado por el comportamiento en el límite del campo que tiende a diferentes valores constantes para  $x = \pm\infty$ , por lo tanto

$$Q = \varphi(x \rightarrow +\infty) - \varphi(x \rightarrow -\infty) \neq 0. \quad (1.17)$$

## 1.1. Estudio de la estabilidad mediante perturbaciones

Considérese la estabilidad de una solución de la ecuación de campo bajo pequeñas perturbaciones [6]. Sea  $\varphi(x)$  una solución estática centrada en  $x = 0$ . Se tiene que el solitón con perturbación viene dado por

$$\varphi(x, t) = \varphi_k(x) + \eta(x, t), \quad (1.18)$$

donde  $\eta(x, t)$  es el campo perturbativo. La ec.(1.18) satisface la ecuación clásica de campo

$$\partial_\mu \partial_\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.19)$$

Al sustituir  $\varphi(x, t)$  se tiene que

$$\partial_\mu \partial_\mu (\varphi_k + \eta) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} (\varphi_k) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} (\varphi_k) \eta + \dots = 0. \quad (1.20)$$

El campo  $\varphi_k(x)$  satisface la ecuación (1.19), lo que conlleva a

$$\partial_\mu \partial_\mu \eta(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} (\varphi_k(x)) \eta(x, t) = 0 \quad (1.21)$$

Debido a que  $\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$  depende solo de  $x$ , la ecuación (1.21) puede ser separable y la solución es de la forma

$$\eta(x, t) = \sum_n e^{i\omega_n t} \phi_n(x) \quad (1.22)$$

donde  $\phi_n(x)$  satisface la siguiente ecuación

$$-\frac{d^2}{dx^2} \phi_n(x) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} (\varphi_k) \phi_n(x) = \omega_n^2 \phi_n(x), \quad (1.23)$$

y  $\omega_n^2$  son los autovalores del operador

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi_k). \quad (1.24)$$

La ecuación (1.23) tiene la forma de la ecuación de Schrödinger para una partícula en movimiento en un potencial  $U(x) = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi_k)$ . Pequeñas fluctuaciones alrededor  $\varphi_k$  son estables si  $\eta$  permanece siempre pequeña, es decir si  $\omega_n^2 \geq 0$ .

Se pide que los  $\phi_n(x)$  sean suaves y que no aumenten cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, el problema de la estabilidad del solitón se reduce a que si existen o no autovalores negativos del operador (1.24).

El operador (1.24) siempre tiene un autovalor cero, donde el autoestado en el modo cero,  $\phi_0(x)$ , es

$$\phi_0(x) = \frac{d\varphi_k(x)}{dx}. \quad (1.25)$$

Al sustituir en la ecuación de autovalores, se tiene que

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi_k)\right)\phi_0(x) = 0. \quad (1.26)$$

Efectivamente la ecuación (1.25) satisface la ecuación (1.23) con  $\omega_0^2 = 0$ . Al sustituir la ecuación (1.25) en la ecuación (1.26), se tiene que

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\varphi_k}{dx}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi_k) \frac{d\varphi_k}{dx} = 0, \quad (1.27)$$

donde  $\varphi_k(x)$  tiende a una constante cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , es decir, que  $\phi_0(x)$  nunca desaparece, no tiene nodos. Se sabe que una función que no tiene nodos es un estado base. En consecuencia,  $\omega_n^2 \geq 0$ , el cual provee la estabilidad del solitón estático.

## 1.2. Solitón $\varphi^4$

Considérese a continuación la teoría

$$\mathcal{S} = \int d^2x \left( (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} g^2 \left( \varphi^2 - \frac{m^2}{g^2} \right)^2 \right). \quad (1.28)$$

Cuyo potencial es

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} g^2 \left( \frac{m^2}{g^2} - \varphi^2 \right)^2. \quad (1.29)$$

Variando la acción  $\mathcal{S}$ , se obtiene que la ecuación de campo para este sistema es

$$\partial_\mu \partial_\mu \varphi + 2g^2 \varphi \left( \varphi^2 - \frac{m^2}{g^2} \right) = 0. \quad (1.30)$$

La solución estática a esta ecuación se puede obtener a partir de la ecuación (1.9). A partir del potencial (1.29), se obtiene el siguiente superpotencial

$$W(\varphi) = g\varphi \left( \frac{m^2}{g^2} - \frac{1}{3} \varphi^2 \right). \quad (1.31)$$

Entonces,

$$\frac{dW}{d\varphi} = g \left( \frac{m^2}{g^2} - \varphi^2 \right). \quad (1.32)$$

Al sustituir en la ecuación (1.9) se tiene que:

$$\frac{d\varphi}{dx} = g \left( \frac{m^2}{g^2} - \varphi^2 \right). \quad (1.33)$$

Así,

$$\int \frac{d\varphi}{\frac{m^2}{g^2} - \varphi^2} = - \int \frac{d\varphi}{\varphi^2 - \frac{m^2}{g^2}} = g \int dx \quad (1.34)$$

Integrando a ambos lados de la ecuación, se sigue que

$$\frac{g}{m} \arctan \left( \frac{g\varphi}{m} \right) = g(x - x_0).$$

Por lo tanto, el solitón  $\varphi^4$  viene dado por

$$\varphi(x) = \frac{m}{g} \tanh(m(x - x_0)). \quad (1.35)$$

### 1.2.1. Estabilidad topológica del solitón $\varphi^4$

El comportamiento de  $\varphi(x)$  en el infinito viene dado por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{m}{g} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(mx) = +\frac{m}{g}, \quad (1.36)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \frac{m}{g} \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(mx) = -\frac{m}{g}. \quad (1.37)$$

El funcional de energía del solitón o su masa clásica viene dada por

$$E[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2. \quad (1.38)$$

Al sustituir, se tiene que

$$\begin{aligned} E[\varphi] &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{m^4}{g^2} \frac{1}{\cosh^4(mx)} \\ &= \frac{m^3}{g^2} \left( -\frac{1}{3} \tanh^3(mx) + \tanh(mx) \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{4m^3}{3g^2}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

El mínimo global de la energía no se logra. Por otra parte, de acuerdo con el comportamiento asintótico para  $\varphi^4$  para  $x = \pm\infty$ , se observa que corresponde con la configuración de campo  $\varphi_k \in \mathcal{M}_{+-}$ , por consiguiente el solitón dado por la solución (1.35) es topológicamente estable.

La carga topológica del solitón  $\varphi^4$  viene dada por

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} j^0 dx = \frac{g}{2m} (\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)), \quad (1.40)$$

donde  $j^0$  es la componente espacial de la corriente topológica. Al sustituir (1.36) y (1.37) en (1.40) obtenemos

$$Q_T = \frac{g}{2m} \left( \frac{m}{g} + \frac{m}{g} \right) = +1. \quad (1.41)$$

### 1.3. Cuantización semiclásica del solitón $\varphi^4$

Otra forma de cuantizar kinks es de acuerdo con [1]. Para esto, la energía es expandida en una serie semiclásica, donde los términos principales de la serie están relacionados con la solución clásica correspondiente.

La ecuación (1.23) provee un punto de partida apropiado para una cuantización semiclásica de solitones. Por simplicidad, considérese el lagrangeano

$$L = \int dx \left( \frac{1}{2}(\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 - \frac{m^4}{4\lambda} \right), \quad (1.42)$$

donde el potencial es

$$V[\varphi] = \int dx \left( \frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 + \frac{\lambda}{4} \left( \varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \right), \quad (1.43)$$

con  $\lambda$  es un parámetro. Las soluciones a la ecuación de campo vienen dada por

$$\varphi_1(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \quad (1.44)$$

y

$$\varphi_K(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{m(x-a)}{\sqrt{2}}, \quad (1.45)$$

estas son las soluciones trivial y no trivial, respectivamente.

Veamos a continuación el vacío y sus excitaciones para la solución trivial. Expandiendo el potencial alrededor de la solución trivial  $\varphi_1$

$$V[\varphi] = \int dx \frac{\tilde{\varphi}}{2} \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2m^2 \right) \tilde{\varphi} + m\sqrt{\lambda} \int dx \tilde{\varphi}^3 + \frac{\lambda}{4} \int dx \tilde{\varphi}^4 \quad (1.46)$$

donde  $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x) - \varphi_1 = \varphi(x) - m/\sqrt{\lambda}$  y  $V[\varphi] = 0$ . Para  $\lambda$  lo suficientemente pequeño, se puede tratar los términos cúbicos y cuárticos de (1.46) por perturbación. En los términos cuadráticos de más bajo orden, se tiene que  $(-d^2/dx^2 + 2m^2)$  es el operador, cuyos autovalores son  $(k_n^2 + 2m^2)$  con autofunciones  $e^{ik_n x}$ . Los valores permitidos de  $k_n$  de acuerdo con una caja de normalización vienen dados por

$$k_n L = 2n\pi \quad (1.47)$$

donde  $L$  es la longitud de la caja. Por lo tanto, se puede construir una torre de estados de osciladores armónicos aproximados alrededor de  $\varphi_1$ , el estado más bajo tendrá una energía dada por

$$E_{vac} = 0 + \frac{1}{2}\hbar \sum_n (k_n^2 + 2m^2)^{1/2} + O(\lambda), \quad (1.48)$$

donde el cero representa la energía clásica  $V[\varphi_1]$ .

Para las excitaciones superiores se tiene que las energías vienen dadas por

$$E_{\{N_n\}} = \hbar \sum_n \left( N_n + \frac{1}{2} \right) (k_n^2 + 2m^2)^{1/2} + O(\lambda). \quad (1.49)$$

Estos corresponden a los cuantos de la teoría, donde los  $N_n$  tienen momentum  $\hbar k_n$ . Este procedimiento cuantiza el campo corrido  $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_1$  como en el método estándar de perturbación, donde

$$\langle 0 | \tilde{\varphi} | 0 \rangle = 0, \quad (1.50)$$

$|0\rangle$  es el estado de vacío. Entonces

$$\langle 0 | \varphi | 0 \rangle = \varphi_1 + O(\lambda). \quad (1.51)$$

Esta relación conecta el estado cuántico de vacío con la solución clásica  $\varphi_1$ .

Ahora, considérese la solución no trivial  $\varphi_K$  y sus excitaciones, para la cuantización semiclásica se realiza el mismo procedimiento anterior. El potencial es expandido alrededor de  $\varphi_K$

$$V[\varphi] = V[\varphi_K] + \int dx \frac{1}{2} \eta(x) \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 + 3\lambda \varphi_K^2 \right) \eta(x) + \lambda \int dx \left( \varphi_K \eta^3 + \frac{1}{4} \eta^4 \right), \quad (1.52)$$

donde  $\eta(x) \equiv \varphi(x) - \varphi_K(x)$ . Los autovalores de la segunda derivada de  $V[\varphi]$  con respecto a  $\varphi_K$  son dados por

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 + 3\lambda \varphi_K^2 \right) \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x). \quad (1.53)$$

Haciendo el cambio de variable  $z = mx/\sqrt{2}$  se llega a la ecuación tipo Schrödinger siguiente

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3 \tanh^2(z-1) \right) \tilde{\eta}_n(z) = \frac{\omega_n^2}{m^2} \tilde{\eta}_n(z), \quad (1.54)$$

donde  $\eta(x) \equiv \varphi(x) - \varphi_K(x)$  y  $z = \frac{mx}{\sqrt{2}}$ .

Se tiene 2 niveles discretos seguidos por un continuo de niveles  $q$ . Los niveles discretos y los niveles continuos  $q$  son

$$\omega_0^2 = 0, \quad (1.55)$$

$$\omega_1^2 = \frac{3}{2} m^2 \quad (1.56)$$

y

$$\omega_q^2 = m^2 \left( \frac{1}{2} q^2 + 2 \right). \quad (1.57)$$

Usando estos modos normales, se puede diagonalizar el potencial expandido y el Lagrangiano en la vecindad de  $\varphi_K(x)$ . Dado que  $\varphi_K \sim O(1/\sqrt{\lambda})$ , los términos cúbicos y cuárticos en la ecuación (1.52) serán del orden de  $\sqrt{\lambda}$  y orden  $\lambda$ , respectivamente. Por lo tanto, se puede construir un conjunto de estados de oscilador armónico aproximados alrededor de  $\varphi_K$  en el espacio de campo. Además, las energías de estos estados viene dada por

$$\tilde{E}_{N_n} = V[\varphi_K] + \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \left( N_n + \frac{1}{2} \right) \omega_n + O(\lambda), \quad (1.58)$$

válido para todos los modos  $n \geq 1$ .

Por lo tanto, el estado de más baja energía, que corresponde con  $N_n = 0$ , es interpretado como el estado de partícula cuántica del kink en reposo. El estado que corresponde con  $N_n = 1$  es interpretado como un estado discreto excitado de la partícula del kink. Para los modos  $N_n \geq 2$  son interpretados como estados de dispersión de los mesones (los cuantos) de esta teoría en presencia de la partícula de kink.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

## Capítulo 2

# Imagen estado coherente del solitón $\varphi^4$

En el siguiente capítulo mostraremos la revisión de la cuantización *via* la imagen de estados coherente de solitón  $\varphi^4$ , de acuerdo con [4].

El solitón clásico  $\varphi^4(x)$ , ecuación (1.35), puede ser escrito como

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int dk \left( [\varphi]_{\hat{k}} e^{ikx} + \overline{[\varphi]}_{\hat{k}} e^{-ikx} \right), \quad (2.1)$$

donde

$$[\varphi]_{\hat{k}} = \frac{i\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{\pi k}{2m} \right) \quad (2.2)$$

es la transformada de Fourier. Reescribiremos el solitón  $\varphi^4(x)$  como

$$\varphi(x) = \sqrt{R} \int dk \frac{1}{\sqrt{4\pi|k|}} \left( e^{ikx} a(k) + e^{-ikx} \overline{a}(k) \right), \quad (2.3)$$

con  $2\pi R$  el volumen regularizado del espacio y donde

$$a(k) = \sqrt{\frac{|k|}{4\pi R}} [\varphi]_{\hat{k}}. \quad (2.4)$$

Por lo tanto,

$$a(k) = \frac{i}{g} \sqrt{\frac{\pi|k|}{4R}} \operatorname{csch} \left( \frac{\pi k}{2m} \right). \quad (2.5)$$

Además,

$$a(k)\bar{a}(k) = \frac{\pi|k|}{4Rg} \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) \quad (2.6)$$

donde  $\bar{a}(k)$  es el conjugado de  $a(k)$ .

Se busca representar el solitón como un estado cuántico coherente,  $|sol\rangle$ . Para esto, se identifican los coeficientes de la expansión de Fourier del campo clásico,  $a_k$ , con los operadores  $\hat{a}(k)$  y  $\hat{a}^\dagger(k)$ , de forma tal que

$$\hat{a}(k)|sol\rangle = a(k)|sol\rangle, \quad (2.7)$$

$$\langle sol|\hat{a}^\dagger(k) = \bar{a}(k)\langle sol| \quad (2.8)$$

El conjunto  $\{\hat{a}^\dagger(k), \hat{a}(k)\}$  satisface el algebra de los operadores de creación y aniquilación.

$$[\hat{a}(k), \hat{a}(k')] = 0 \quad (2.9)$$

y

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = \frac{1}{R} \delta(k - k'). \quad (2.10)$$

De acuerdo con las propiedades generales de los estados coherentes, el estado  $|sol\rangle$  puede ser escrito como un producto tensorial de estados coherentes para diferentes  $k$ , así

$$|sol\rangle = \prod_{\otimes k} |a_k\rangle, \quad (2.11)$$

donde

$$|a_k\rangle = e^{-1/2|a_k|^2} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{a_k^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |n_k\rangle, \quad (2.12)$$

$|\alpha_k\rangle$  es un estado coherente

$$\hat{a}(k)a(k)\rangle = a(k)|a(k)\rangle, \quad |a(k)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|a(k)|^2 + a(k)\hat{a}^\dagger(k)}|0\rangle, \quad (2.13)$$

con  $|0\rangle$  el vacío de Minkowski.

Para el solitón  $\varphi^4$  los operadores  $\hat{a}(k)$  y  $\hat{a}^\dagger(k)$  serán interpretados como operadores de creación y aniquilación de los cuantos del estado del solitón. El operador de campo para el kink  $\varphi^4$  viene dado por

$$\hat{\varphi}(x) = \sqrt{R} \int dk \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega(k)}} \left( \hat{a}(k)e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(k)e^{ikx} \right) \quad (2.14)$$

donde  $\omega(k) = |k|$  es la relación de dispersión de los corpúsculos. Además, se define el estado coherente  $|sol\rangle$  tal que

$$\langle sol|\hat{\varphi}(x)|sol\rangle = \varphi(x) \quad (2.15)$$

con  $\hat{\varphi}(x)$  (2.14).

También se puede definir el operador momentum canónico en término de los operadores de creación y aniquilación, de acuerdo con la cuantización de campo en la imagen de Schrödinger

$$\hat{\pi}(x) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{R}{2\pi}} \int dk \sqrt{2\omega(k)} \left( -\hat{a}(k)e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(k)e^{ikx} \right) \quad (2.16)$$

y debe cumplirse la relación de conmutación canónica dada por

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\Pi}(\mathbf{y})] = i\delta(x - y). \quad (2.17)$$

Veamos,

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)] = \hat{\varphi}(x)\hat{\pi}(y) - \hat{\pi}(y)\hat{\varphi}(x).$$

Al sustituir las ecuaciones (2.14) y (2.16) se tiene que

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)] = \frac{iR}{4\pi} \int dk \left( \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)e^{-ikx}e^{iky} - \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)e^{ikx}e^{-iky} \right. \\ \left. + \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)e^{-iky}e^{ikx} - \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)e^{iky}e^{-ikx} \right), \quad (2.18) \end{aligned}$$

a partir de la ecuación (2.10), con  $k$  y  $k'$  iguales, se tiene que

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)] &= \frac{iR}{4\pi} \int dk \frac{1}{R} \left( e^{-ikx} e^{iky} + e^{ikx} e^{-iky} \right) \\ &= \frac{i}{2} \left( \delta(y-x) + \delta(x-y) \right) = i\delta(x-y). \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde se ha usado

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x-x')} = \delta(x-x').$$

Ahora, definiendo el operador de número de partícula en la forma estándar:  $\hat{N} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ , se sigue que

$$N_k \equiv \langle sol | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k | sol \rangle = \bar{a}(k) a(k) \quad (2.20)$$

es el número de ocupación medio de los cuantos de momento  $k$  en el estado coherente  $|\alpha(k)\rangle$ . El número de ocupación total viene dado por

$$N = R \int dk N(k). \quad (2.21)$$

Para evaluar el número de ocupación en el rango de las longitudes de ondas en el infrarrojo se considera  $k_0 \rightarrow 0$ . Evaluando la integral encontramos que

$$\begin{aligned} N &= \int_{k_0} dk N(k) = R \int_{k_0} dk \frac{\pi|k|}{4\pi Rg} \operatorname{csch}^2 \left( \frac{\pi k}{2m} \right) \\ N &= \left[ -\frac{2mk}{\pi} \coth \left( \frac{\pi k}{2m} \right) + \frac{4m^2}{\pi^2} \ln \sinh \left( \frac{\pi k}{2m} \right) \right] \Big|_{k_0}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $\coth(x)$  y  $\ln(x)$  para  $x \rightarrow 0$  diverge. Por lo tanto

$$N = \int_{k_0} dk N(k) \longrightarrow +\infty. \quad (2.23)$$

para  $k_0 \rightarrow 0$ . Esta singularidad exhibe la manifestación de la carga topológica de la mecánica cuántica debido a que las componentes de Fourier con longitudes de onda muy larga (longitud de onda en el infrarrojo) son las que aprecian las condiciones de contorno en  $\pm\infty$ . Dado que son esas condiciones de contorno (no triviales) son las que determinan la carga topológica, se sigue que la carga topológica está directamente relacionada a la existencia de esas componentes de longitud de onda muy grande.

El solitón  $\varphi^4$  puede ser escrito como un producto de convolución que separa la parte topológica de la parte energética. Esta descomposición se basa en el teorema fundamental de producto de convolución, donde la transformada de Fourier del producto de convolución de dos funciones es el producto de las transformadas de Fourier. Veamos esto en detalle, clásicamente es fácil ver que

$$\varphi(x) = \text{sgn}(mx) * \text{sech}^2(mx). \quad (2.24)$$

donde  $\text{sgn}(mx)$  es la función signo de  $x$ , definida como

$$\text{sgn } x = \begin{cases} +1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Ella define a la distribución atemperada cuya transformada de Fourier es

$$[\text{sgn } x]_{\hat{k}} = 2i \text{Pv} \frac{1}{k}, \quad (2.25)$$

con Pv el valor principal de  $\frac{1}{k}$ . Por otro lado,

$$[\text{sech}^2(mx)]_{\hat{k}} = \pi \frac{k}{m} \text{csch} \left( \frac{\pi k}{2m} \right). \quad (2.26)$$

Se sigue que

$$[\varphi_k(x)]_{\hat{k}} = 2i \text{Pv} \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{2} \frac{m^2}{g} \text{sech}^2 mx \right]_{\hat{k}} = i \left( \frac{\pi}{g} \right) \text{Pv} \frac{1}{k} \left( k \text{csch} \frac{\pi k}{2m} \right)$$

donde  $\text{csch } z$  es analítica en cualquier dominio donde  $\sinh z \neq 0$ , y

$$z \text{csch } z = 1 - \frac{1}{3!} z^2 - \left[ \frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2} \right] z^4 + \dots, \quad (|z| < \pi).$$

Estas últimas expresiones llevan información de la energía y de la composición topológica del solitón. Para  $k = 0$  hay una divergencia en la ecuación (2.25). De acuerdo con lo discutido anteriormente con el número de ocupación, se puede observar en la imagen del producto de convolución que esta divergencia se le atribuye claramente a una parte de la descomposición, que corresponde a  $\text{sgn}$ . Tal divergencia no aparece en la ecuación (2.26).

Veamos que de la ecuación (1.12), la energía solo depende de  $\varphi$ . Si  $\varphi$  puede ser escrito como:

$$\varphi = \text{sgn} * \phi.$$

Entonces al derivar con respecto a  $x$ , se tiene que

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\delta(x) * \phi = 2\phi, \quad (2.27)$$

donde

$$\frac{d}{dx}(\text{sgn}(x)) = 2\delta(x).$$

Al sustituir la ecuación (2.27) en la ecuación (1.12), se observa claramente que la energía solo depende de  $\phi$  y que la parte topológica del solitón está contenida en  $\text{sgn}$ .

Los resultados obtenidos clásicamente (2.25) y (2.26), pueden ser escritos en la imagen de estados coherentes. Para esto se definen los coeficientes  $t(k)$  y  $c(k)$  relacionándolos con las ecuaciones (2.25) y (2.26), de la siguiente forma

$$t(k) \equiv \frac{i}{\sqrt{k}} \quad (2.28)$$

y

$$c(k) \equiv \sqrt{\frac{\pi m k}{2 g}} \text{csch}\left(\frac{\pi k}{2m}\right), \quad (2.29)$$

respectivamente. Se construye los respectivos estados coherentes de los operadores  $\hat{t}(k)$ ,  $\hat{t}^\dagger(k)$  y  $\hat{c}(k)$ ,  $\hat{c}^\dagger(k)$  de la siguiente forma

$$\hat{c}(k)|c_k\rangle = c(k)|c_k\rangle \quad (2.30)$$

y

$$\hat{t}(k)|t_k\rangle = t(k)|t_k\rangle, \quad (2.31)$$

los cuales satisfacen el algebra estándar de los operadores de creación y aniquilación. Los operadores  $\hat{t}(k)$  y  $\hat{c}(k)$  actúan en espacios de Fock diferentes. Así, se puede escribir el estado coherente representando el solitón  $\varphi^4$  en la siguiente forma

$$|sol\rangle = |t\rangle \otimes |E\rangle \quad (2.32)$$

donde  $|t\rangle \equiv \prod_k |t_k\rangle$  y  $|E\rangle \equiv \prod_k |c_k\rangle$ . Los estados  $|t\rangle$  y  $|E\rangle$  son estados coherentes construidos a través de cuantos que transportan información de la parte topológica y energética, respectivamente.

En la imagen de estado coherente, la energía viene dada por

$$E = \int dk \langle E | \hat{c}^\dagger(k) \hat{c}(k) | E \rangle. \quad (2.33)$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (2.29) en (2.33) se sigue que

$$E = \frac{4}{3} \frac{m^3}{g^2}. \quad (2.34)$$

Vemos que en la imagen de estado coherente la energía también puede ser expuestas de manera muy precisa.

En conclusión, vemos entonces que en la imagen coherente del solitón  $\varphi^4$ , propuesta y explorada por Dvali, et al en [4], es posible establecer el origen cuántico de la carga topológica y relacionarla a las longitudes de onda en el infrarrojo del estado coherente que representa al solitón. Por otro lado, dicha imagen dá cuenta del hecho de que su energía es finita a pesar de que el número de ocupación es infinito.

# Capítulo 3

## Soliton Sine-Gordon $\phi$

En este capítulo estamos interesados en estudiar la viabilidad de la cuantización *via* la imagen de estados coherentes de acuerdo con [1], para el caso particular del solitón sine-Gordon y establecer las similitudes con el solitón  $\varphi^4$  y particularidades propias del solitón sine-Gordon.

### 3.1. El solitón sine-Gordon clásico

El solitón sine-Gordon clásico que corresponde con la teoría dada por el siguiente potencial

$$V(\phi) = \frac{\alpha^{1/2}}{\beta} \cos\left(\frac{\beta\phi}{2}\right), \quad (3.1)$$

puede ser encontrado siguiendo un procedimiento análogo al seguido para encontrar el solitón  $\varphi^4$ . En este caso, el *superpotencial*  $W(\phi)$  viene dado por

$$W(\phi) = \frac{4\alpha^{1/2}}{\beta^2} \sin\left(\frac{\beta\phi}{2}\right). \quad (3.2)$$

Por lo tanto, al sustituir en la ecuación (1.9) se tiene que

$$\frac{dW(\phi)}{d\phi} = \frac{2\alpha^{1/2}}{\beta} \cos\left(\frac{\beta\phi}{2}\right), \quad (3.3)$$

Integrando se sigue que

$$\int d\phi \frac{1}{\cos(\frac{\beta\phi}{2})} = \frac{2\alpha^{1/2}}{\beta} \int dx.$$

A partir de la función de Gudermannian  $\text{gd } x$ :

$$\text{gd } x = \int_0^x dt \operatorname{sech} t = 2 \arctan e^x - \frac{\pi}{2},$$

se tiene que el solitón Sine-Gordon  $\phi$  viene dado por

$$\phi(x) = \frac{2}{\beta} \left( 2 \arctan(\exp \alpha^{1/2} x) - \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.4)$$

o

$$\phi(x) = \frac{2}{\beta} \arctan(\sinh \alpha^{1/2} x). \quad (3.5)$$

como se sigue de la relación funcional  $\sinh x = \tan(\text{gd } x)$ .

El solitón sine-Gordon que ha sido utilizado para estudiar gran variedad de fenómenos, muy conocido por físicos y matemáticos es el que se muestra a continuación

$$\phi_s(x) = \frac{4}{\beta} \arctan(\exp \alpha^{1/2} x). \quad (3.6)$$

Nosotros lo llamaremos solitón sine-Gordon convencional. Nótese que el solitón sine-Gordon (3.4) es el solitón Sine-Gordon convencional pero corrido un ángulo  $\frac{\pi}{\beta}$  como se puede observar en la siguiente figura

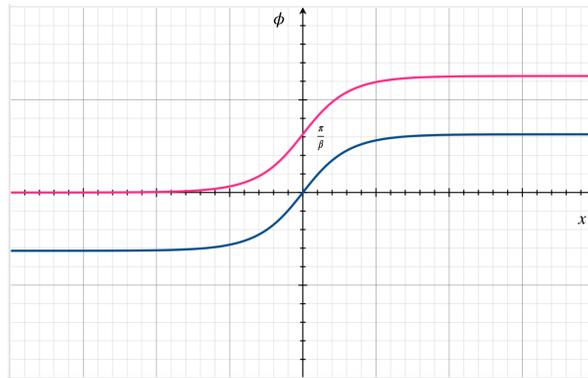


Figura 3.1: Representación gráfica,  $\phi$  vs  $x$ , del solitón sine-Gordon (en azul) y el solitón sine-Gordon convencional (en rosado).

Más adelante discutiremos por qué decidimos trabajar con el solitón sine-Gordon (3.4) y no con el solitón sine-Gordon convencional (3.6).

## 3.2. Estabilidad topológica del solitón sine-Gordon

Los valores asintóticos que toma el solitón sine-Gordon Ec.(3.4) vienen dados por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\beta} \arctan(\sinh \alpha^{1/2} x) = \frac{\pi}{\beta}, \quad (3.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\beta} \arctan(\sinh \alpha^{1/2} x) = -\frac{\pi}{\beta}. \quad (3.8)$$

A partir de la ecuación (1.16) se tiene que el funcional de energía viene dado por

$$E[\phi] = W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty)) = \frac{4\alpha^{1/2}}{\beta^2} \left( \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right).$$

Así,

$$E[\phi] = \frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2}. \quad (3.9)$$

Al ser distinto de cero, se tiene que la energía no es un mínimo global. Dado que dicho valor depende directamente de los valores asintóticos que toma el solitón en  $\pm\infty$ , no es posible deformar de manera continua hacia el vacío dicha configuración. Por lo tanto, el solitón Sine-Gordon es estable y es topológicamente estable debido a que pertenece a las configuraciones de campo  $\varphi_k \in \mathcal{M}_{+-}$ .

### 3.3. Imagen Estado Coherente del solitón sine-Gordon

El solitón clásico dado por la ecuación (3.4) puede ser escrito como

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int dk \left( [\phi]_{\hat{k}} e^{ikx} + [\overline{\phi}]_{\hat{k}} e^{-ikx} \right). \quad (3.10)$$

Siguiendo los pasos de [4], revisados en el capítulo 3, puede ser expandido como

$$\phi(x) = \sqrt{R} \int dk \frac{1}{\sqrt{4\pi|k|}} \left( b(k) e^{ikx} + \bar{b}(k) e^{-ikx} \right), \quad (3.11)$$

donde

$$b(k) = \sqrt{\frac{|k|}{4\pi R}} [\phi(x)]_{\hat{k}}. \quad (3.12)$$

La transformada de Fourier para  $\phi(x)$  viene dada por

$$[\phi(x)]_{\hat{k}} = \frac{i\pi}{k\beta} \operatorname{sech} \left( \frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}} \right) \quad (3.13)$$

y,

$$b(k)\bar{b}(k) = \frac{\pi^2}{|k|^2\beta^2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}} \right). \quad (3.14)$$

siendo  $\bar{b}(k)$  el complejo conjugado de  $b(k)$ .

Se quiere representar el solitón sine-Gordon como un estado cuántico coherente,  $|sol\rangle$ . Para esto, se asocia los coeficientes de la expansión de Fourier con los operadores  $\hat{b}(k)$  y  $\hat{b}^\dagger(k)$ , tal que

$$\hat{b}(k)|sol\rangle = b(k)|sol\rangle, \quad \langle sol|\hat{b}^\dagger(k) = \bar{b}(k)\langle sol| \quad (3.15)$$

El conjunto  $\{\hat{b}^\dagger(k), \hat{b}(k)\}$  satisface el algebra de los operadores de creación y aniquilación, dado por

$$[\hat{b}(k), \hat{b}(k')] = 0 \quad (3.16)$$

y

$$[\hat{b}(k), \hat{b}^\dagger(k')] = \frac{1}{R} \delta(k - k'). \quad (3.17)$$

Los operadores  $\hat{b}(k)$  y  $\hat{b}^\dagger(k)$  serán interpretados como los operadores de creación y aniquilación de los cuantos de los constituyentes del solitón, tal que

$$\langle sol | \hat{\phi}(x) | sol \rangle = \phi(x) \quad (3.18)$$

con el operador de campo del solitón Sine-Gordon  $\phi(x)$  dado por

$$\hat{\phi}(x) = \sqrt{R} \int dk \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega(k)}} \left( \hat{b}(k) e^{-ikx} + \hat{b}^\dagger(k) e^{ikx} \right) \quad (3.19)$$

donde  $\omega(k) = |k|$  es la relación de dispersión de los cuantos. El operador momento canónico, de acuerdo con la representación de Schrödinger, viene dado por

$$\hat{\pi}(x) = \frac{i\sqrt{R}}{2\sqrt{2\pi}} \int dk \sqrt{2\omega(k)} \left( -\hat{b}(k) e^{-ikx} + \hat{b}^\dagger(k) e^{ikx} \right). \quad (3.20)$$

Los operadores (3.19) y (3.20) deben cumplir con la siguiente relación de conmutación canónica

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(x - y). \quad (3.21)$$

Al sustituir se tiene que

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] &= \frac{iR}{4\pi} \int dk \left( \hat{b}(k) \hat{b}^\dagger(k) e^{-ikx} e^{iky} - \hat{b}^\dagger(k) \hat{b}(k) e^{ikx} e^{-iky} \right. \\ &\quad \left. + \hat{b}(k) \hat{b}^\dagger(k) e^{ikx} e^{-iky} - \hat{b}^\dagger(k) \hat{b}(k) e^{-ikx} e^{iky} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

De la ecuación (3.17) con  $k$  y  $k'$  iguales y siguiendo el orden de Wick, se tiene

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = \frac{i}{4\pi} \int dk \left( e^{-ikx} e^{iky} + e^{-iky} e^{ikx} \right) = \frac{i}{2} \left( \delta(y - x) + \delta(x - y) \right).$$

Por lo tanto

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(x - y). \quad (3.23)$$

De acuerdo con las propiedades de los estados coherentes, el estado  $|sol\rangle$  puede ser escrito como el siguiente producto tensorial

$$|sol\rangle = \prod_{\otimes k} |b_k\rangle \quad (3.24)$$

y

$$|b_k\rangle = e^{-1/2|b_k|^2} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{b_k^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |n_k\rangle. \quad (3.25)$$

donde  $|b(k)\rangle$  es el estado coherente para el modo de momento  $k$ .

Se define el operador de número  $N_k$ , al igual que con el solitón  $\varphi^4$ , de forma tal que el número de ocupación medio viene dado por

$$N(k) \equiv \langle sol | \hat{b}^\dagger(k) \hat{b}(k) | sol \rangle = \bar{b}(k) b(k) \quad (3.26)$$

y el número de ocupación total es

$$N = R \int dk N(k). \quad (3.27)$$

Se tiene que

$$N = R \int_{k_0} dk \frac{\pi^2}{|k|^2 \beta^2} \text{Sech}^2 \left( \frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}} \right)$$

Entonces,

$$N \longrightarrow +\infty \quad (3.28)$$

para  $k_0 \rightarrow 0$ . En el rango de las longitudes de ondas del infrarrojo, el número de ocupación exhibe el origen de la carga topológica al igual que en el caso del solitón  $\varphi^4$ .

Se puede escribir el solitón sine-Gordon como un producto de convolución

### 3.3. IMAGEN ESTADO COHERENTE DEL SOLITÓN SINE-GORDON 31

de la parte topológica y la parte energética.

$$\phi(x) = \text{sgn } x * \frac{\alpha^{1/2}}{\beta} \text{sech}(\alpha^{1/2}x). \quad (3.29)$$

Del teorema del producto de convolución, la transformada de Fourier de (3.29) puede ser escrito como el producto de (2.25) y

$$\frac{2}{\pi} \left[ \frac{\alpha^{1/2}}{\beta} \text{sech } \alpha^{1/2}x \right]_{\hat{k}} = \frac{1}{\beta} \text{sech} \left( \frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}} \right). \quad (3.30)$$

Tenemos que

$$[\phi(x)]_{\hat{k}} = 2i \text{Pv} \frac{1}{k} \left[ \frac{\alpha^{1/2}}{\beta} \text{sech } \alpha^{1/2}x \right]_{\hat{k}} = 2i \text{Pv} \frac{1}{k} \frac{\pi}{\beta} \text{sech} \left( \frac{\pi p}{2\alpha^{1/2}} \right),$$

donde  $\text{sech } z$  es analítica en cada dominio en el cual  $\cosh z \neq 0$ ,

$$\text{sech } z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 + \dots \quad (|z| < \frac{\pi}{2}).$$

De donde se observa que estas ecuaciones llevan información de la energía y de la composición topológica del solitón. Se tiene para  $k = 0$  una divergencia en (2.25), debido a esto, al igual que para el solitón  $\varphi^4$ , la parte topológica se le atribuye directamente a  $\text{sgn}$ . Al escribir el solitón sine-Gordon como  $\phi = \text{sgn} * \phi_s$ , al igual que el solitón  $\varphi^4$ , la energía del solitón sine-Gordon no depende de la componente topológica del solitón.

Los resultados obtenidos clásicamente (2.25) y (3.30), pueden ser escritos en la imagen de estados coherentes. Para esto se escriben las ecuaciones (2.25) y (3.30) como se muestra a continuación

$$t(k) \equiv \frac{i}{\sqrt{k}} \quad (3.31)$$

y

$$c(k) \equiv \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \text{sech} \left( \frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}} \right), \quad (3.32)$$

respectivamente. Se construye los respectivos estados coherentes de los operadores  $\hat{t}(k)$ ,  $\hat{t}^\dagger(k)$  y  $\hat{c}(k)$ ,  $\hat{c}^\dagger(k)$  de la siguiente forma

$$\hat{c}(k)|c_k\rangle = c(k)|c_k\rangle \quad (3.33)$$

y

$$\hat{t}(k)|t_k\rangle = t(k)|t_k\rangle, \quad (3.34)$$

los cuales satisfacen el algebra estándar de los operadores de creación y aniquilación. Los operadores  $\hat{t}(k)$  y  $\hat{c}(k)$  actúan en espacios de Fock diferentes. Así, se puede escribir el estado coherente representando el solitón sine-Gordon en la siguiente forma

$$|sol\rangle = |t\rangle \otimes |E\rangle \quad (3.35)$$

donde  $|t\rangle \equiv \prod_k |t_k\rangle$  y  $|E\rangle \equiv \prod_k |c_k\rangle$ . Los estados  $|t\rangle$  y  $|E\rangle$  son estados coherentes construidos a través de cuantos que transportan información de la parte topológica y energética, respectivamente.

En la imagen de estado coherente, la energía viene dada por

$$E = \int dk \langle E | \hat{c}^\dagger(k) \hat{c}(k) | E \rangle, \quad (3.36)$$

siguiendo la propuesta de Dvali y sus colaboradores [4]. Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (3.32) en (3.36) se sigue que

$$E = \frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2}. \quad (3.37)$$

Vemos que en la imagen de estado coherente la energía también puede ser expuestas de manera muy precisa.

Por último, es conveniente destacar una particularidad de la cuantización *via* imagen de estados coherentes de los solitones. En este trabajo, se escogió el solitón sine-Gordon (3.4) y no el sine-Gordon convencional (3.6) debido a que este último no puede ser escrito como un producto de convolución con la distribución sgn. El solitón sine-Gordon convencional se puede escribir como un producto de convolución con una distribución Heaviside  $\Theta$ , cuya transformada de Fourier contiene un término delta de Dirac, lo cual dá lugar a expresiones cuadráticas mal definidas ya que contendrían productos de  $\delta$ 's.

### 3.3. IMAGEN ESTADO COHERENTE DEL SOLITÓN SINE-GORDON<sup>33</sup>

Es claro que para escribir un solitón como la convolución de la parte topológica con la energética, siguiendo la propuesta de [4], debe ser posible escribir dicha convolución en términos de sgn.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Conclusiones

El creciente interés en las configuraciones clásicas de campo con energía finita, que son estables debido a su topología, se debe en parte a que se cree que dichos objetos son candidatos a describir objetos extensos al nivel cuántico. Estos solitones topológicos cuánticos y sus excitaciones se espera exhiban propiedades muy diferentes a las que se pueden derivar de una expansión perturbativa.

En este trabajo hemos centrado nuestra atención en dos teorías clásicas de campo muy sencillas en las cuales es posible encontrar soluciones topológicamente estables para un campo escalar en dos dimensiones a partir de un formalismo de primer orden. Estas soluciones son los bien conocidos kinks de la teoría  $\varphi^4$  y el solitón sine-Gordon.

Interesados en el comportamiento de los mencionados solitones a nivel cuántico, revisamos la idea de Dvali, Gomez, Gruending y Rug [4], en la cual se cuantiza el solitón  $\varphi^4$  empleando la imagen estado coherente.

Cuantizamos el solitón sine-Gordon *via* imagen de estados coherentes con el fin de establecer la viabilidad de esta cuantización propuesta por Dvali y sus colaboradores [4], así como también las similitudes y eventuales diferencias en el comportamiento de los cuantos constituyentes del solitón  $\varphi^4$  y el solitón sine-Gordon.

Encontramos que en la imagen de estado coherente del solitón sine-Gordon el origen de la carga topológica se exhibe en la singularidad para el número de ocupación de corpúsculos de longitud de onda en el infrarrojo, al igual que en la imagen de estado coherente del solitón  $\varphi^4$  de acuerdo con Dvali, Gomez, Gruending y Rug [4]. Demostramos que el solitón sine-Gordon se puede descomponer como un producto de convolución con  $\text{sgn}$  que separa la parte topológica de la energética, donde la topología del solitón está contenida en  $\text{sgn}$  en concordancia a la propuesta de [4] para el solitón  $\varphi^4$ . Podría

### 3.3. IMAGEN ESTADO COHERENTE DEL SOLITÓN SINE-GORDON<sup>35</sup>

ser cuantizado cualquier defecto topológico en  $(1 + 1)$  dimensiones en la imagen de estados coherentes pero la descomposición como una convolución de  $\text{sgn } x$  propuesta por Dvali, Gomez, Gruending y Rug no es posible aplicar en cualquier defecto topológico.

Así, una extensión para este trabajo es verificar la cuantización para otros solitones en la imagen de estados coherentes. Y considerar solitones en un volumen finito [7] y realizar su cuantización via imagen de estado coherente. Y, verificar la cuantización *via* la imagen de estados coherentes para otros defectos topológicos en  $(1 + 1)$  dimensiones.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Apéndice A

## Estados coherentes

Una forma de cuantizar solitones es a través de la imagen de estados coherentes, por esto veremos los puntos más importantes sobre los estados coherente para un número finito de libertad y luego para un número infinito de grados de libertad [8].

Para un número finito de grados de libertad, dado  $K$  operadores de aniquilación  $\hat{a}_k$ , con  $k = 1, 2, \dots, K$ , y sus autoadjuntos, se tiene que el algebra es de tal forma tal que

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l] = 0 \quad (\text{A.1})$$

y

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{k,l}. \quad (\text{A.2})$$

Cada  $\hat{a}_k^\dagger$  genera desde el vacío, definido por  $\hat{a}_k|0\rangle = 0$ , un conjunto de estados de Fock  $\{|n_k\rangle\}$  definido por

$$|n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}|0\rangle, \quad (\text{A.3})$$

proveen una base ortonormal completa de un espacio de Fock  $F_1$ .

Los productos directos de estos estados

$$|\{n_k\}\rangle \equiv \prod_{\otimes k=1}^K \equiv |n_1\rangle|n_2\rangle\dots|n_K\rangle \quad (\text{A.4})$$

proporciona una base ortonormal completa de un espacio de Fock  $F_K$ . Satisfacen la relación de cierre

$$\sum_{\{n_k\}} |\{n_k\}\rangle \langle \{n_k\}| = 1. \quad (\text{A.5})$$

Los autovectores de los operadores de aniquilación  $\hat{a}_k$  puede ser parametrizado y expresado en función de la base de  $F_1$ , como

$$|z_k\rangle = e^{-1/2|z_k|^2} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{z_k^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |n_k\rangle. \quad (\text{A.6})$$

El espacio de Hilbert expandido por  $\{|z_k\rangle\}$  es llamado espacio de estados coherentes  $C_K$ ,  $C_K$  es isomorfo a  $F_K$ .

El espacio de producto directo  $C_K$  expandido por  $\{|z_k\rangle\}$  puede ser expresado en función de los vectores base de  $F_K$

$$|\{z_k\}\rangle = \sum_{\{n_k\}} \prod_{l=1}^K e^{-1/2|z_l|^2} \frac{z_l^{n_l}}{\sqrt{n_l!}} |\{n_l\}\rangle. \quad (\text{A.7})$$

La relación de cierre viene dada por

$$\int d\mu(\{z_k\}) |\{z_k\}\rangle \langle \{z_k\}| = 1. \quad (\text{A.8})$$

donde

$$d\mu(\{z_k\}) = \prod_{k=1}^K \frac{dx_k dy_k}{\pi}, \quad z_k = x_k + iy_k. \quad (\text{A.9})$$

Los autovectores  $|z_k\rangle$  y los vectores  $|\{z_k\}\rangle$  pueden ser escritos de una forma equivalente como

$$|z_k\rangle = e^{-1/2|z_k|^2 + z_k \hat{a}_k^\dagger} |0\rangle. \quad (\text{A.10})$$

y

$$|\{z_k\}\rangle = U_K(\bar{z}, z)|0\rangle \quad (\text{A.11})$$

respectivamente. Donde  $U_K$  es unitario y viene dado por

$$U_K(\bar{z}, z) \equiv \exp \sum_{k=1}^K (z_k \hat{a}_k^\dagger - \bar{z}_k \hat{a}_k) \quad (\text{A.12})$$

Estos resultados pueden ser valido para grados de libertad infinito, donde  $K \rightarrow \infty$  si se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty. \quad (\text{A.13})$$

Esto significa que la representación espacial expandida por el conjunto de estados  $\left\{ \prod_{k=1}^{k \rightarrow \infty} |z_k\rangle \right\}$  es unitariamente equivalente al correspondiente espacio de Fock  $F_\infty$ .

Una de las propiedades más importante de la representación  $C_K$  del espacio de Hilbert es que los elementos de la diagonal de una función ordenada normal son dadas por

$$F =: F :, \quad \langle \{z_k\} | F(\{\hat{a}_k^\dagger\}, \{\hat{a}_k\}) | \{z_k\} \rangle = F(\{\bar{z}_k\}, \{z_k\}). \quad (\text{A.14})$$

En una expresión ordenada normal todos los operadores de creación están a la izquierda de todos los operadores de aniquilación. Esto es también llamado el orden de Wick y es denotado por el símbolo de doble punto:

$$: \frac{1}{2} (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger) : \equiv \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (\text{A.15})$$

## Apéndice B

# Distribuciones atemperadas y producto de convolución

A continuación se verá en qué consiste una distribución atemperada, el producto de convolución entre dos distribuciones y la transformada de Fourier para dos distribuciones [9].

### Distribuciones atemperadas

Sea  $\mathbf{S}$  el espacio de las funciones complejas  $\phi(x)$  definidas sobre  $\mathbb{R}$ , denotadas por  $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ , infinitamente derivables y que decrecen más rápido que cualquier potencia negativa de  $|x|$  para  $x \rightarrow \infty$ . Y, sea  $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$  el dual del espacio  $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ . Se define la distribución atemperada  $T_x$  como una distribución que se prolonga a un funcional lineal continuo sobre  $\mathbf{S}$ , donde  $T_x \in \mathbf{S}'(\mathbb{R})$ .  $T_x$  puede ser escrito como

$$\langle T_x, \phi(x) \rangle_x = \sum_{0 \leq k \leq s} \int_{-\infty}^{+\infty} dx F_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \phi(x), \quad (\text{B.1})$$

donde los  $F_k$  son funciones continuas limitadas de la siguiente manera

$$|F_k(x)| \leq C_k(1 + |x|^j)$$

para algunos  $C_k$  y  $j$  dependiendo de  $k$ .

## Producto de convolución

La convolución de dos elementos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  de  $\mathbf{S}(\mathbb{R})$  es definido por

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \phi_1(x-y)\phi_2. \quad (\text{B.2})$$

Se tiene

(a)  $\phi_1 * \phi_2 \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$ .

(b)  $\phi_1 * \phi_2 = \phi_2 * \phi_1$ .

(c) La operación  $*$  puede ser extendida para  $\phi * T \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$  y  $T \in \mathbf{S}'(\mathbb{R})$ , siendo el resultado infinitamente diferenciable. En este caso  $\phi * T$  es llamado regularización de  $T$  por  $\phi$ .

Por otra parte, si  $D$  es un operador diferencial con coeficientes constantes en  $\mathbb{R}^n$  y  $\delta_{(0)}$  la distribución de Dirac en  $\mathbb{R}^n$  con soporte en el origen, entonces

$$(D\delta_{(0)}) * T = DT,$$

con  $S$  y  $T$  dos distribuciones sobre  $\mathbb{R}^n$ , se tendrá

$$D(T * S) = D\delta_{(0)} * (T * S) = (D\delta_{(0)} * T) * S = DT * S$$

o

$$D(T * S) = DS * T.$$

Por ende,

$$D(T * S) = DT * S = T * DS.$$

# Apéndice C

## Transformada de Fourier

Sea  $[\phi(x)]_{\hat{k}}$  la transformada de Fourier de  $\phi(x) \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$  [9].

$$[\phi(x)]_{\hat{k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \phi(x).$$

La transformada de Fourier de  $T_x \in \mathbf{S}'(\mathbb{R})$  es definido por

$$\langle [T_x]_{\hat{k}}, \phi(k) \rangle_k = \langle T_x, [\phi(k)]_{\hat{x}} \rangle_x, \forall \phi \in \mathbf{S}.$$

(a) Para  $\phi_1, \phi_2 \in \mathbf{S}$ , se tiene

$$[\phi_1(x) * \phi_2(x)]_{\hat{k}} = [\phi_1(x)]_{\hat{k}} [\phi_2(x)]_{\hat{k}}.$$

(b) Para  $\phi \in \mathbf{S}$  y  $T_x \in \mathbf{S}'$ , se tiene

$$[\phi(x) * T_x]_{\hat{k}} = [\phi(x)]_{\hat{k}} [T_x]_{\hat{k}}.$$

Donde la normalización es elegida tal que  $[\delta(x)]_{\hat{k}} = 1$ , siendo 1 el elemento unidad multiplicativo en el campo complejo y  $\delta(x)$  el elemento unidad multiplicativo en el algebra de convolución.

# Bibliografía

- [1] R. Rajaraman. Solitons and Instantons. Editorial: North-Holland, Amsterdam, 1982. ISBN: 0 44487047 4.
- [2] C. Cohen Tannoudji, B. Diu y F Laloë. Quantum mechanics. Editorial:Wiley VCH, vol 1, 1973. ISBN 10: 3527345558.
- [3] Jun Sato y Tsukasa Yumibayashi. Quantum-classical correspondence via coherent state in integrable field theory. ( Tokyo, 2018).
- [4] G. Dvali, C. Gomez, L. Gruending y T. Rug. Towards a Quantum Theory of Solitons.Nucl.Phys. B901 (2015) 338-353 arXiv:1508.03074 [hep-th].
- [5] Timo Weigand. Quantum field theory. Universidad de Heidelberg, Heidelberg.
- [6] Valery Rubakov. Classical Theory of Gauge Fields. (Princeton, 1999). ISBN 0-691-05927-6.
- [7] G. Mussardo, V. Riva y G. Sotkov. Finite volume form-factors in semiclassical approximation.Nucl.Phys. B670 (2003) 464-478 hep-th/0307125 ISAS-63-2003-FM
- [8] F. Rohrlich y J. Jauch. Coherent State Representation and Quantum Field Theory, in Analytic Methods in Mathematical Physics. (R. P. Gilbert and R. G. Newton, eds.), Gordon and Breach, New York, 1970.
- [9] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, Paris, Part I, 1957, Part II, 1959.