Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Existencia de Soluciones Periódicas Estables para un modelo Depredador-Presa Leslie-Gower Discreto Modificado

JESÚS GREGORIO CALDERÓN LARA

Trabajo de Tesis
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Tutor: Dr. COSME DUQUE.

Mérida - Venezuela
- 2023 -

Dedicado a:

Toda mi familia, especialmente a mis padres que me han dado mucho apoyo.

"Unas de las propiedades inherentes en matemáticas es que cualquier progreso real esta acompañado por el descubrimiento y desarrollo y simplificaciones de procedimientos previos. El carácter unificado de las matemáticas yace en su propia naturaleza; en efecto, matemática es la fundación de todas las ciencias naturales exactas".

(David Hilbert)

AGRADECIMIENTO

Quiero dedicar todo este proyecto a todas aquellas personas que contribuyeron en la realización del mismo.

Primeramente, quiero agradecer a **Dios** por darme salud y conocimiento para completar este gran logro.

A mi **Padre**, que aunque ya no este presente físicamente conmigo siento que esta en espíritu dándome ese amor y apoyo incondicional que siempre me dio. Esto es dedicado a ti.
A mi **Madre** por todo el amor que me da, brindándome su apoyo día tras día para convertirme en una persona de bien. Más que mio este logro es tuyo.
A mi tutor **Dr. Cosme Duque** por compartir todo ese conocimiento en tantos días de consulta para la realización de este trabajo, por su apoyo y animo. Gracias.
A mi **Abuela, Tíos y Primos** por ese apoyo al comienzo y durante la carrera. Los quiero mucho.
A mi mejor amigo **Edwar Vielma** por todo ese apoyo, animo compartido. Aguante hermano.
A mi novia **Dinaveli** por todo ese amor, apoyo incondicional y por siempre creer en mi. Te amo mucho.
Y agradecer a esta gran casa de estudios **Universidad de los Andes** por darme la oportunidad y brindarme todo ese conocimiento para convertirme en el profesional que comienzo a ser.

RESUMEN

Los modelos depredador-presa en el estudio de la dinámica de población tienen un papel fundamental ya que permiten describir la relación entre dos especies a medida que avanza el tiempo. Dicho comportamiento entre las especies se puede representar mediante ecuaciones diferenciales no lineales, estas simulan el crecimiento de las especies de acuerdo con la manera que se relacionan y destacando que la edad y el sexo no influyen en su comportamiento.

Es por ello que el objetivo principal de este trabajo es describir, analizar y discutir la dinámica de un modelo depredador-presa del tipo Leslie-Gower discreto con respuesta funcional del tipo Holling II, considerando que sus condiciones iniciales son no negativas.

Los resultados mas relevantes de este trabajo son: permanencia del sistema, existencia y de soluciones periódicas estables.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En ecología la dinámica de población se ocupa del estudio de los cambios que sufren las poblaciones en cuanto al tamaño, estructura de edad, entre otros parámetros que las definen, así como los factores que causan esos cambios y los mecanismos por los que se producen. Es por ello que el papel fundamental de esta teoría ecológica es entender cómo la interacción entre distintas especies, y su relación ambiental, determinan la distribución de las poblaciones y la estructura de las comunidades.

Leslie ([8],[9]) introduce en 1948 el siguiente modelo depredador-presa con el fin de estudiar el comportamiento entre las especies:

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2 - cxy, \\ y' = ey - \dfrac{hy^2}{x}, \end{cases} \tag{1}$$

donde x e y representan la densidad de población de presas y depredadores en un tiempo $t > 0$, respectivamente, a es la tasa de crecimiento específica de la presa en ausencia del depredador; si este es el caso, la población de presas crece logísticamente con una capacidad de carga a/b, c es el número máximo de población de presas que se puede comer por población de depredadores por unidad de tiempo, e representa la tasa de crecimiento del depredador y h describe la eficiencia del depredador para convertir presas consumidas en crías de depredadores. Lo que hay que notar en el modelo (1) es que la capacidad de carga del entorno del depredador es proporcional al número de presas; por otro lado, existen límites superiores a las tasas de crecimiento de ambas especies. Dichos límites permiten obtener condiciones favorables para el depredador

cuando el número de presas por depredador es alto,de igual modo para la presa cuando el número de depredadores es pequeño.
Holling ([5]) propuso formas para las respuestas funcionales, argumentando que el tiempo del depredador es dividido en dos períodos: búsqueda y manipulación de la presa, donde también supone que los depredadores no interactúan entre si. Para ello se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

- f es el número de presas consumidas,
- x es la densidad de las presas,
- T_s es el tiempo de búsqueda,
- g es una constante que representa el producto de la tasa de búsqueda y la probabilidad de encontrar una presa.

Obteniendo como resultado la formulación de la respuesta funcional de Holling Tipo II:

$$f = \frac{gT_t x}{(1 + gnx)},$$

donde es añadido un tiempo de manipulación n reduciendo el tiempo de búsqueda y reduciendo el número total de presas con la cantidad:

$$\frac{gT_t xy}{(1 + gnx)} = \frac{\dfrac{T_t}{n} xy}{\dfrac{1}{gn} + x}.$$

Al usar esta respuesta funcional el sistema (1) toma la forma:

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2 - \dfrac{cxy}{d + x}, \\ y' = ey - \dfrac{hy^2}{r + x}, \end{cases} \tag{2}$$

el cual es conocido como un modelo depredador-presa Leslie-Gower con respuesta funcional Holling Tipo II. En el sistema (2), esta respuesta representa el cambio en la tasa de consumo de la presa por parte del depredador e introduce los parámetros d que representa la tasa de saturación de la presa y r es una medida para la capacidad de carga del entorno ambiental para sustentar al depredador cuando la presa esta ausente.

El modelo (2) fue estudiado por [2] obteniendo relevantes resultados en términos de acotación de soluciones, existencia de un conjunto atrayente y estabilidad global del equilibrio interior coexistente.

Por otro lado, suponer que el ambiente donde se desenvuelven las especies es constante rara vez es cierto en la vida real, ya que en la mayoría de los casos los entornos naturales afectan directamente las tasas de natalidad y mortalidad. Cuando los cambios ambientales son tomados en cuenta se incorporan variaciones entre los parámetros del modelo para realizar estudios sobre las dinámicas globales obteniendo la versión no-autónoma de (2).

$$\begin{cases} x' = x\left[a(t) - b(t)x - \dfrac{c(t)y}{d(t)+x}\right], \\ y' = y\left[e(t) - \dfrac{h(t)y}{r(t)+x}\right], \end{cases} \tag{3}$$

En el sistema (3) las variables y parámetros tienen el mismo significado biológico dado para el sistema (2). Este sistema depredador-presa Leslie-Gower modificado no-autónomo fue estudiado en ([7]) añadiendo un efecto de retardo, donde se muestra la permanencia y la estabilidad global de (3).
Por otra parte, es posible transformar el sistema (3) en un sistema basado en ecuaciones en diferencias (ver por ejemplo, [3], [4], [6]), en este caso, los tiempos son discretos, que a su vez resalta ser más versátil a la hora de realizar simulaciones computacionales. Bajo este esquema, el sistema (3) es transformado en el siguiente sistema discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k)\exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \dfrac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right) \\ \\ y(k+1) = y(k)\exp\left(e(k) - \dfrac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right) \end{cases} \tag{4}$$

El presente trabajo esta dedicado al estudio de la dinámica del sistema (4), conocido como modelo depredador presa del tipo Leslie-Gower discreto y con respuesta funcional del tipo Holling II. Particularmente se estudian propiedades relevantes tales como permanencia y las existencia de soluciones periódicas estables.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan resultados y definiciones preliminares los cuales son de utilidad en el desarrollo del presente trabajo. Para ello nos apoyaremos principalmente por [1]

1.1. Ecuaciones en Diferencias

Las ecuaciones en diferencias en una variable $k \in \mathbb{N}$ y una incógnita $u(k)$ se definen como una ecuación funcional de la forma

$$f(k, u(k), u(k+1), ..., u(k+n)) = 0. \tag{1.1}$$

Se dice que (1.1) es lineal si tiene la forma

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(k) \cdot u(k+i) = b(k). \tag{1.2}$$

En esta ecuación, si $b(k)$ es diferente de cero, para al menos un $k \in \mathbb{N}$, entonces (1.2) se dice que es *no homogénea*, en caso contrario,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(k) \cdot u(k+i) = 0, \tag{1.3}$$

se dice que es *homogénea*.

Por otro lado, se pueden considerar los sistemas de ecuaciones en diferencias que tienen la forma

$$u(k+1) = f(k, u(k)), \qquad k \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

donde $u = (u_i)$ y $f = (f_i)$ son vectores $n \times 1$, para $1 \leq i \leq n$.
Añadiendo una representación matricial al sistema, este puede ser representado por la siguiente ecuación:

$$u(k+1) = \Lambda(k) \cdot u(k) + b(k), \qquad k \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$

donde $\Lambda(k) = [a_{ij}(k)]$, $b(k) = (b_i(k))$ y $u(k) = (u_i(k))$, para $1 \leq i, j \leq n$. Análogamente al sistema (1.2), si $b(k)$ es diferente de cero, para al menos un $k \in \mathbb{N}$, entonces (1.5) se dice que es *no homogénea*, si $b(k) = 0$,

$$u(k+1) = \Lambda(k) \cdot u(k), \qquad k \in \mathbb{N} \tag{1.6}$$

se dice que es *homogénea*.

1.2. Sistemas Lineales Periódicos

Una función $u(k)$ definida sobre $\mathbb{N}$ es llamada $p-$periódica si existe $p > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$u(k+p) = u(k)$$

Geométricamente esto significa que el gráfico de $u(k)$ se repite en sucesivos intervalos de longitud p (ver figura 1.1).

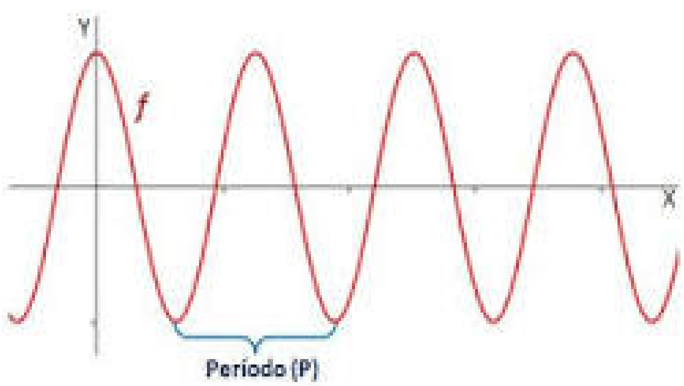

Figura 1.1: Función periódica

Se dice que el sistema (1.5) es $p-$periódico, si $\Lambda(k) = [a_{ij}(k)]$ y $b(k) = (b_i(k))$ son $p-$periódicos, $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.1. *Suponga el sistema en diferencia* (1.5) *es $p-$periódico sobre $\mathbb{N}$. Entonces, el sistema* (1.5) *tiene una solución $p-$periódica si, y solamente sí $u(0) = u(k)$.*

Demostración.
Suponga que $u(k)$ es una solución $p-$periódica del sistema (1.5), luego por definición $u(k+p) = u(k)$, tomando $k = 0$, se concluye

$$u(p) = u(0).$$

Recíprocamente, suponga que la solución $u(k)$ de (1.5), y satisface $u(0) = u(p)$. Tomando $v(k) = u(k+p)$ y usando el hecho de que los coeficientes de (1.5) son $p-$periódicos se obtiene

$$\begin{aligned} v(k+1) &= u(k+1+p) \\ &= \Lambda(k+p) \cdot u(k+p) + b(k+p) \\ &= \Lambda(k) \cdot v(k) + b(k). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $v(k)$ define una solución de (1.5). Cabe notar que,

$$v(0) = u(p) = u(0).$$

Así, de la unicidad de las soluciones se desprende

$$u(k) = v(k) = u(k+p).$$

En consecuencia, la solución $u(k)$ es $p-$periódica.

□

1.3. Conceptos de Estabilidad

En esta sección se presentan conceptos de estabilidad para las soluciones del sistema en diferencia (1.4). Sea $u(k) = u(k, a, u^0)$ solución de (1.4) que está definida para $k \in \mathbb{N}(a)$ y con su condición inicial $u(a) = u^0$.

Definición 1.3.1. *La solución $u(k)$ se dice que es:*

- ***Estable***: *si dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \delta(\varepsilon, a)$ *tal que si las condiciones iniciales satisfacen* $\|\overline{u}^0 - u^0\| < \delta$ *entonces* $\|\overline{u}(k) - u(k)\| < \varepsilon$ *para cualquier solución* $\overline{u}(k) = u(k, a, \overline{u}^0)$ *de* (1.4) *y todo* $k \in \mathbb{N}(a)$.

- ***Atractivo***: *si dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \delta(a)$ *independiente de* ε *tal que las condiciones iniciales satisfacen* $\|\overline{u}^0 - u^0\| < \delta$ *entonces* $\|\overline{u}(k) - u(k)\| \to 0$ *siempre que* $k \to \infty$, *para cualquier solución* $\overline{u}(k) = u(k, a, \overline{u}^0)$ *de* (1.4) *con condición inicial* $\overline{u}^0$.

- ***Uniformemente Estable***: *si dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *independiente de* a *tal que si* $k_1 \geq a$ *y* $\|\overline{u}(k_1) - u(k_1)\| < \delta$ *entonces* $\|\overline{u}(k) - u(k)\| < \varepsilon$ *para cualquier solución* $\overline{u}(k) = u(k, a, \overline{u}^0)$ *de* (1.4) *y todo* $k \in \mathbb{N}(k_1)$.

- ***Uniformemente Atractivo***: *si para cualquier solución* $\overline{u}(k) = u(k, a, \overline{u}^0)$ *de* (1.4) *es atractivo y* δ *es independiente de* a.

- ***Asintóticamente Estable***, *si para cualquier solución* $\overline{u}(k) = u(k, a, \overline{u}^0)$ *de* (1.4) *es estable y atractivo* a.

- ***Uniformemente Estable Asintóticamente***: *dada una solución* $\overline{u}(k) = u(k, a, \overline{u}^0)$ *de* (1.4) *esta cumple que es uniformemente estable y uniformemente atractivo.*

- ***Globalmente Atractivo***: *dada solución* $\overline{u}(k) = u(k, a, \overline{u}^0)$ *de* (1.4) *se cumple que es atractivo para toda condición inicial* $\overline{u}^0 \in \mathbb{R}^n$.

- ***Globalmente Estable Asintóticamente***: *dada cualquier solución* $\overline{u}(k) = u(k, a, \overline{u}^0)$ *de* (1.4) *esta es estable y globalmente atractivo.*

De estas definiciones se pueden observar las siguientes implicaciones,

$$\text{Estabilidad uniforme} \Rightarrow \text{estabilidad}$$

$$\text{y}$$

$$\text{Estabilidad uniforme asintótica} \Rightarrow \text{estabilidad asintótica.}$$

Definición 1.3.2 ([1])**.** *Una matriz* $\Phi(k, a) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *se dice que es* ***fundamental*** *si sus columnas son soluciones linealmente independientes del sistema* (1.6).

Definición 1.3.3 ([1])**.** *Una matriz* $\Psi(k, a) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *se dice que es* ***fundamental principal*** *del sistema* (1.6) *si ella es una matriz fundamental tal que para un valor* k_0 *cualquiera tiene la propiedad que* $\Psi(k, k_0) = I_n$.

Teorema 1.3.1 ([1]). *Las soluciones del sistema* (1.6) *son estables, si y solamente si, están acotadas sobre* $\mathbb{N}(a)$.

Demostración.
Suponga que todas las soluciones de (1.6) están acotadas, entonces existe una constante positiva c tal que

$$\|\Psi(k,a)\| \leq c, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}(a).$$

Sea $\varepsilon > 0$, si

$$\|\overline{u}_0 - u_0\| < \frac{\varepsilon}{c} = \delta > 0,$$

entonces,

$$\|u(k,a,\overline{u}_0) - u(k,a,u_0)\| = \|\Psi(k,a)(\overline{u}_0 - u_0)\| \leq c\|\overline{u}_0 - u_0\| < \varepsilon,$$

por lo que todas las soluciones de (1.6) son estables.

Recíprocamente, suponga que todas las soluciones de (1.6) son estables, entonces en particular la solución trivial es estable. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|u_0\| < \delta$, implica

$$\|u(k,a,u_0)\| < \varepsilon \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}(a).$$

Sin embargo, ya que $u(k,a,u_0) = \Psi(k,a)u_0$ se obtiene

$$\|u(k,a,u_0)\| = \|\Psi(k,a)u_0\| < \varepsilon$$

Tomando $u_0 = \frac{\delta}{2}e^j$, donde e^j es el vector canónico cuya coordenada j es igual a 1, y se tiene como resultado

$$\|\Psi(k,a)u_0\| = \|u^j(k)\|\frac{\delta}{2} < \varepsilon,$$

donde $u^j(k)$ es la $j-$ésima columna de $\Psi(k,a)$. Por lo tanto, de la norma del máximo se sigue que

$$\|\Psi(k,a)\| = \text{máx}\,\|u^j(k)\|\frac{2\varepsilon}{\delta} = c.$$

Así, para cualquier solución $u(k,a,u_0)$ del sistema en diferencia (1.6) se tiene que

$$\|u(k,a,u_0)\| = \|\Psi(k,a)u_0\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}\|u_0\|,$$

y en consecuencia, todas las soluciones están acotadas.

$\square$

1.4. Funciones de Liapunov

En esta sección se introducen algunos resultados para el análisis de estabilidad de sistemas no lineales basados en la teoría de Liapunov.

Definición 1.4.1 (Se dice que una función $\phi(w)$ pertenece a la clase $\Bbbk$ sí, y solamente sí, $\phi \in C[[0,\rho), \mathbb{R}_+)$. , $\phi(0) = 0$ *y* $\phi(w)$ *es estrictamente monótona creciente en* w.

Definición 1.4.2. *Una función a valores reales* $V(k,u)$ *definida sobre* $\mathbb{N}(a) \times S_\rho$ *se dice ser definida positiva, si y solamente si,* $V(k,0) = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}(a)$, *y existe una función* $\phi(w) \in \Bbbk$ *tal que* $\phi(w) \leq V(k,u), \|u\| = w$ *con* $(k,u) \in \mathbb{N}(a) \times S_\rho$, *donde* S_ρ *es el conjunto* $\{u \in \mathbb{R}^n : \|u(k)\| \leq \rho\}$ *y* $u(k) = u(k,a,u_0)$ *es cualquier solución del sistema.*

Conjuntamente a la definición anterior podemos añadir lo siguiente

Definición 1.4.3 ([1])**.** *Una función a valores reales* $V(k,u)$ *definida sobre* $\mathbb{N}(a) \times S_\rho$ *se dice ser decreciente, si y sólo si,* $V(k,0) = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}(a)$, *y existe una función* $\phi(w) \in \Bbbk$ *tal que* $V(k,u) \leq \phi(w), \|u\| = w$ *con* $(k,u) \in \mathbb{N}(a) \times S_\rho$.

A lo largo de la solución $u(k) = u(k,a,u_0)$ se puede considerar la variación de la función $V(u)$ como $\Delta V(u(k)) = V(u(k+1)) - V(u(k))$. La función auxiliar $V(u)$ es llamada la **función de Liapunov.**

1.4.1. Estabilidad por el método de Funciones de Liapunov

Teorema 1.4.1. *Si existe una función escalar definida positiva* $V(k,u) \in C[\mathbb{N}(a) \times S_\rho]$ *y decreciente tal que* $\Delta V(k, u(k,a,u_0)) \leq 0$, $(\Delta V(k,u(k,a,u_0)) \leq -\alpha(\|u(k,a,u_0)\|)$, *donde* $\alpha \in \kappa$, *para cualquier solución* $u(k) = u(k,a,u_0)$ *de* (1.4) *tal que* $\|u(k)\| \leq \rho$, *entonces la solución trivial* $u(k,a,0) \equiv 0$ *de dicho sistema es uniformemente estable* ***(uniformemente asintóticamente estable)****.*

Demostración.
Sea $V(k,u)$ una función definida positiva y decreciente, así existen funciones $\phi, \psi \in \kappa$ tal que

$$\phi(\|u\|) \leq V(k,u) \leq \psi(\|u\|), \quad \text{para todo } (k,u) \in \mathbb{N}(a) \times S_\rho.$$

Para cada ε, con $0 < \varepsilon < \rho$, tome $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\psi(\delta) < \phi(\varepsilon)$. Ahora, si la solución trivial es uniformemente estable, es decir, si $k_1 \geq a$ y $\|u(k_1)\| < \delta$ entonces $\|u(k)\| < \varepsilon$

para todo $k \geq k_1$. Esto se demuestra por reducción al absurdo. En efecto, si no fuese verdad, entonces existe algún $k_2 > k_1$ tal que $k_1 \geq a$ y $\|u(k_1)\| < \delta$, esto implica que $\varepsilon \leq \|u(k_2)\| \leq \rho$. Además, $\Delta V(k, u(k)) \leq 0$ implica que $V(k, u(k)) \leq V(k_1, u(k_1))$ para todo $k \in \mathbb{N}(k_1)$; por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi(\varepsilon) &\leq \phi(\|u(k_2)\|) \leq V(k_2, u(k_2)) \\ &\leq V(k_1, u(k_1)) \leq \psi(\|u(k_1)\|) \leq \psi(\delta) < \phi(\varepsilon),\end{aligned}$$

lo cual resulta una contradicción, por lo que la solución trivial es uniformemente estable. Por otro lado, la estabilidad uniforme asintótica de la solución trivial de (1.4) se puede mostrar por un razonamiento similar.

□

CAPÍTULO 2

DEDUCCIÓN DEL MODELO

Este capítulo esta dedicado a la construcción y formulación del modelo de Leslie-Gower con respuesta funcional del tipo Holling-II, así como también a la deducción de su versión discreta.

2.1. Historia del Modelo de Leslie

Los modelos matemáticos que representan el crecimiento poblacional y la interacción entre especies, toman en cuenta diversos factores. Una manera óptima de formular esta relación es a través de las ecuaciones diferenciales.
Una de las ecuaciones mas usadas es la ecuación logística:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \left(1 - \frac{x}{m}\right). \tag{2.1}$$

En la ecuación (2.1), r se conoce como la tasa intrínseca de crecimiento y m como la capacidad de carga, la cual hace referencia principalmente a la densidad de equilibrio alcanzada por una presa en ausencia de depredadores.

Leslie en 1948 propuso un modelo no muy diferente al de Lotka- Volterra, dado por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^{'} = ax - bx^2 - cxy, \\ y^{'} = ey - \dfrac{hy^2}{x}, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde la capacidad de carga del entorno del depredador es proporcional al número de presas. Además, añade el hecho que existen limites superiores en las tasas de crecimiento de ambas especies y así establece diferencias del modelo mencionado anteriormente.

2.2. Deducción de la Respuesta Funcional

El término respuesta funcional está asociado a los trabajos de Holling ([5]), el cual se introduce especialmente para describir el cambio en la tasa de consumo de las presas por parte del depredador, cuando la densidad de presas varía. La formulación de la respuesta funcional dada por Holling es construida de la siguiente manera:
Considerando que los depredadores no interactúan entre si, se define,

$$f = gT_s x, \tag{2.3}$$

donde f es el número de presas consumidas, x es la densidad de las presas, T_s es el tiempo de búsqueda y g es una constante que representa el producto de la tasa de búsqueda y la probabilidad de encontrar una presa. Si a esto se le agrega el hecho que cada depredador necesita un tiempo n de manipulación para cada presa que es consumida, entonces el tiempo de búsqueda se reduce y se tiene

$$T_s = T_t - nf,$$

donde T_t es un intervalo fijo de tiempo. Al sustituir esto en (2.3) se obtiene

$$f = gT_t x - gnxf,$$

despejando

$$f + gnxf = gT_t x.$$

Luego,

$$(1 + gnx)f = gT_t x,$$

por lo tanto,

$$f = \frac{gT_t x}{(1 + gnx)}. \tag{2.4}$$

La función f es conocida como respuesta funcional del **Tipo Holling II**. La expresión (2.4) puede escribirse como:

$$f = \frac{\dfrac{T_t}{n} x}{\dfrac{1}{g \cdot n} + x}$$

Haciendo $c = \dfrac{T_t}{n}$ y $d = \dfrac{1}{gn}$, se obtiene

$$f = \frac{cx}{d+x}$$

Si se sustituye x por f en la primera ecuación de (2.2) se obtiene el modelo depredador presa Leslie-Gower con respuesta funcional del tipo Holling II, el cual es dado por [2].

2.3. Formulación del modelo Discreto

En esta sección se formula un sistema discreto análogo a (2), ya que los modelos en tiempo discreto son usados debido a que son más apropiados por su eficiencia en las simulaciones computacionales para aproximar modelos continuos.
Suponiendo que las tasas promedio de crecimiento en (2) cambian en intervalos regulares se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(t)}\frac{dx(t)}{dt} &= a([t]) - b([t])x([t]) - \frac{c([t])y([t])}{d([t]) + x([t])} \\ \frac{1}{y(t)}\frac{dy(t)}{dt} &= e([t]) - \frac{h([t])y([t])}{r([t]) + x([t])} \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $[t]$ denota la parte entera de t (tiempo), $t \in (0, +\infty)$.
Las ecuaciones de la forma (2.5) son conocidas como ecuaciones diferenciales con argumentos constantes a trozos (ver [4]) y para una solución $w = (x, y)$ de (2.5), definida para $t \in [0, +\infty)$, estas poseen las siguientes propiedades:

1. w es continua sobre el intervalo $[0, +\infty)$
2. Las ecuaciones en (2.5) se satisfacen sobre cada intervalo de la forma $[k, k+1)$ con $k = 0, 1, 2, ...$
3. Las derivadas $\dfrac{dx(t)}{dt}$, $\dfrac{dy(t)}{dt}$ existen en cada punto $t \in [0, +\infty)$, exceptuando los puntos $t \in 0, 1, 2, 3, ...$, para los que las derivadas laterales izquierdas existen.

Así para cualquier intervalo de la forma $[k, k+1)$, se (2.5) y para $k \leq t < k+1$ con $k = 0, 1, 2, 3, ...$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_k^t \frac{1}{x([t])}dx(t) &= \int_k^t \left[a([t]) - b([t])x([t]) - \frac{c([t])y([t])}{d([t]) + x([t])}\right] dt, \\ \int_k^t \frac{1}{y([t])}dy(t) &= \int_k^t \left[e([t]) - \frac{h([t])y([t])}{r([t]) + x([t])}\right] dt. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_k^t \frac{1}{x(t)}dx(t) = \left[a([t]) - b([t])x([t]) - \frac{c([t])y([t])}{d([t]) + x([t])}\right]\int_k^t dt,$$
$$\int_k^t \frac{1}{y(t)}dy(t) = \left[e([t]) - \frac{h([t])y([t])}{r([t]) + x([t])}\right]\int_k^t dt.$$

Resolviendo se tiene,

$$ln(x(t)) \mid_k^t = \left[a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k) + x(k)}\right](t) \mid_k^t,$$
$$ln(y(t)) \mid_k^t = \left[e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k) + x(k)}\right].(t) \mid_k^t$$

En consecuencia evaluando,

$$ln(x(t)) - ln(x(k)) = \left[a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k) + x(k)}\right](t-k),$$
$$ln(y(t)) - ln(y(k)) = \left[e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k) + x(k)}\right](t-k).$$

$$ln\left(\frac{(x(t))}{(x(k))}\right) = a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k) + x(k)}(t-k),$$

$$ln\left(\frac{(y(t))}{(y(k))}\right) = e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k) + x(k)}(t-k).$$

$$\exp\left(ln\left(\frac{x(t)}{x(k)}\right)\right) = \exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k) + x(k)}(t-k)\right),$$

$$\exp\left(ln\left(\frac{y(t)}{y(k)}\right)\right) = \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k) + x(k)}(t-k)\right).$$

Simplificando

$$\frac{x(t)}{x(k)} = \exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k) + x(k)}(t-k)\right),$$

$$\frac{y(t)}{y(k)} = \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k) + x(k)}(t-k)\right).$$

Y así,

$$x(t) = x(k)\exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k) + x(k)}(t-k)\right),$$
$$y(t) = y(k)\exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k) + x(k)}(t-k)\right). \tag{2.6}$$

Luego, haciendo tender $t \to k+1$ tenemos,

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= x(k)\exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right),\\
y(k+1) &= y(k)\exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right),
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

para $k = 0, 1, 2, ...$, el cual es un sistema análogo en tiempo discreto del sistema (3).

CAPÍTULO 3

SOLUCIONES PERIÓDICAS Y ESTABILIDAD

En este capítulo se presenta el resultado principal de este trabajo, como es, la existencia y estabilidad de soluciones periódicas para el sistema

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k)\exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \dfrac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right) \\ \\ y(k+1) = y(k)\exp\left(e(k) - \dfrac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1. Permanencia

En esta sección se muestra la permanencia del sistema (3.1) con valores iniciales positivos, es decir, $x(0) > 0$ y $y(0) > 0$ y además suponga que los parámetros $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, $d(k), e(k), h(k)$ y $r(k)$ son sucesiones no negativas y acotadas. Para una sucesión $g(k)$ acotada, defina $g^l = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} g(k)$ y $g^m = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} g(k)$ para $k \in \mathbb{N}$.

Definición 3.1.1. *Se dice que el sistema* (3.1) *es* ***permanente****, si existen constantes positivas x_m, y_m, x^M, y^M tal que para $(x(k), y(k))$ solución de* (3.1) *se satisface*

$$x_m \leq \liminf_{k\to\infty}(x(k)) \leq \limsup_{k\to\infty}(x(k)) \leq x^M,$$
$$y_m \leq \liminf_{k\to\infty}(y(k)) \leq \limsup_{k\to\infty}(y(k)) \leq y^M.$$

Teorema 3.1.1. *Sean* $(x(k), y(k))$ *soluciones de* (3.1) *con* $x(0) > 0$ *y* $y(0) > 0$*. Entonces*

$$\limsup_{k\to\infty} x(k) \leq x^M, \quad \limsup_{k\to\infty} y(k) \leq y^M, \tag{3.2}$$

donde

$$x^M = \max\left\{\frac{1}{b^l}\exp\{a^m - 1\}, \frac{a^m}{b^l}\right\} \text{ e } y^M = \max\left\{\frac{e^m[r^m + x^M]}{h^l}, \frac{r^m + x^M}{h^l}\exp\{e^m - 1\}\right\}.$$

Demostración.
A continuación se demuestra que $\limsup_{k\to\infty} x(k) \leq x^M$, se llevara a cabo la prueba en dos partes. Primero, suponga que existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x(k_0 + 1) \geq x(k_0)$, entonces usando la primera ecuación de (3.1) se tiene que

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k)\exp\left\{a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k) + x(k)}\right\} \\ &\leq x(k)\exp\{a(k) - b(k)x(k)\}. \end{aligned}$$

En particular, tome $k = k_0$.

$$x(k_0) \leq x(k_0 + 1) \leq x(k_0)\exp\{a(k_0) - b(k_0)x(k_0)\}.$$

Y se sigue que $a(k_0) - b(k_0)x(k_0) \geq 0$ y por lo tanto $x(k_0) \leq \dfrac{a(k_0)}{b(k_0)}$.

Por otro lado, $b^l \leq b(k)$ y $a(k) \leq a^m$ como todos los parámetros son positivos

$$b^l a(k) \leq b(k)a^m,$$

así para $k = k_0$,

$$x(k_0) \leq \frac{a(k_0)}{b(k_0)} \leq \frac{a^m}{b^l}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(k_0 + 1) &\leq x(k_0)\exp\{a(k_0) - b(k_0)x(k_0)\} \\ &\leq \frac{a^m}{b^l}\left[\frac{x(k_0)}{a(k_0)/b(k_0)}\right]\exp\{a(k_0) - b(k_0)x(k_0)\} \\ &\leq \frac{a^m}{b^l}\left[\frac{x(k_0)}{a(k_0)/b(k_0)}\right]\exp\left\{a^m\left[1 - \frac{x(k_0)}{a(k_0)/b(k_0)}\right]\right\} \\ &\leq \frac{1}{b^l}\exp\{a^m - 1\} = x^M, \end{aligned}$$

donde se usa el hecho que $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \ x\exp\{r[1-x]\} = \dfrac{\exp\{r-1\}}{r}$ para $r > 0$.

Ahora para ver que la solución $x(k)$ está acotada para valores mayores que $k_0 \in \mathbb{N}$,

Afirmación: $x(k) \leq x^M$ para $k \geq k_0$.

Para mostrar esto se razona por reducción al absurdo. Suponga que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \geq k_0$ tal que $x(n_0) > x^M$, se deduce que $n_0 \geq k_0 + 2$. Tome p_0 el entero mas pequeño entre k_0 y n_0, es decir, $k_0 \leq p_0 \leq n_0$, tal que

$$x(p_0) = \max_{k_0 \leq k \leq n_0} \{x(k)\},$$

entonces $x(p_0) \geq x^M$. Por lo tanto $p_0 \geq k_0 + 2$ y $x(p_0) \geq x(p_0 - 1)$. Y por el argumento anterior se tendría que $x(p_0) \leq x^M$, lo cual es una contradicción.

En consecuencia, es cierta la afirmación.

Suponga $x(k) \geq x(k+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como la sucesión es decreciente y además está acotada se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} x(k)$ existe y se denota por $\overline{x}$.

Afirmación: $\overline{x} \leq x^M$.

Suponga que $\overline{x} > x^M$, esto implica que

$$1 - \frac{\overline{x}}{x^M} < 0.$$

Por otro lado, tomando límite en la primera ecuación de (3.1) entonces

$$\lim_{k\to\infty} x(k+1) = \lim_{k\to\infty} x(k)\exp\left\{a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right\}.$$

De esto,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k\to\infty} a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)} \leq \lim_{k\to\infty} a(k) - b(k)x(k) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} a^m \left[1 - \frac{x(k)}{a(k)/b(k)}\right] \leq \lim_{k\to\infty} a^m \left[1 - \frac{x(k)}{a^m/b^l}\right] \\
&\leq \lim_{k\to\infty} a^m \left[1 - \frac{x(k)}{x^M}\right] = a^m \left[1 - \frac{\overline{x}}{x^M}\right] < 0,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, ya que $\dfrac{a^m}{b^l} \leq x^M$, y esto prueba la afirmación.

Por lo tanto, se cumple

$$\limsup_{k\to\infty} x(k) \leq x^M.$$

Similarmente al análisis anterior, se prueba que

$$\limsup_{k\to\infty} y(k) \leq y^M.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x(k) < x^M + \varepsilon$, para $k \geq N$. Ahora, se demuestra que $\limsup_{k\to\infty} y(k) \leq y^M$. En efecto, suponga que existe un $k_0 \geq N$ tal que $y(k_0+1) \geq x(k_0)$, entonces usando la segunda ecuación de (3.1) se tiene

$$y(k_0) \leq y(k_0+1) \leq y(k_0)\exp\left\{e(k_0) - \frac{h(k_0)y(k_0)}{r(k_0)+x(k_0)}\right\}$$

$$\leq y(k_0)\exp\left\{e(k_0) - \frac{h(k_0)y(k_0)}{r(k_0)+(x^M+\varepsilon)}\right\}.$$

Y se sigue que

$$0 \leq e(k_0) - \frac{h(k_0)y(k_0)}{r(k_0)+(x^M+\varepsilon)}.$$

Así, $y(k_0) \leq \dfrac{e(k_0)[r(k_0)+(x^M+\varepsilon)]}{h(k_0)}$. Por otro lado, $r(k) \leq r^m$, $h^l \leq h(k)$ y $e(k) \leq e^m$, como todos los parámetros son positivos

$$h^l e(k)[r(k)+(x^M+\varepsilon)] \leq h(k)e^m[r^m+(x^M+\varepsilon)],$$

así para $k = k_0$,

$$y(k_0) \leq \frac{e(k_0)[r(k_0)+(x^M+\varepsilon)]}{h(k_0)} \leq \frac{e^m[r^m+(x^M+\varepsilon)]}{h^l}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} y(k_0+1) &\leq y(k_0)\exp\left\{e(k_0) - \frac{h(k_0)y(k_0)}{r(k_0)+(x^M+\varepsilon)}\right\} \\ &\leq \frac{e^m[r^m+(x^M+\varepsilon)]}{h^l}\left[\frac{y(k_0)}{e(k_0)[r(k_0)+(x^M+\varepsilon)]/h(k_0)}\right] \\ &\times \left(\exp\left\{e^m\left[1 - \frac{y(k_0)}{e(k_0)r(k_0)+(x^M+\varepsilon)]/h(k_0)}\right]\right\}\right). \end{aligned}$$

De nuevo por $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \ x\exp\{r[1-x]\} = \frac{\exp\{r-1\}}{r}$ para $r>0$, se obtiene

$$y(k_0+1) \leq \frac{[r^m + (x^M+\varepsilon)]}{h^l}\exp\{e^m-1\} =: y^{\varepsilon}.$$

Afirmación: $y(k) \leq y^{\varepsilon}$ para $k \geq k_0$.

Para mostrar esto se razona por reducción al absurdo. En efecto, suponga que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \geq k_0$ tal que $y(n_0) > y^{\varepsilon}$, de esto se deduce lo siguiente $n_0 \geq k_0+2$. Tome q_0 el entero mas pequeño entre k_0 y n_0, es decir, $k_0 \leq q_0 \leq n_0$, tal que

$$y(q_0) = \max_{k_0\leq k\leq n_0}\{y(k)\},$$

entonces $y(q_0) \geq y(n_0)$. Por lo tanto, $q_0 \geq k_0+2$ y $y(q_0) \geq y(q_0-1)$. Y por el argumento anterior observe que $y(q_0) \leq y^{\varepsilon}$, lo cual es una contradicción.

En consecuencia, la afirmación es cierta.

Ahora suponga que $y(k) \geq y(k+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como la sucesión es decreciente y además está acotada se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} y(k)$ existe y se denota como $\overline{y}$.

Por otro lado, si se toma el límite en la primera ecuación de (3.1) entonces

$$\lim_{k\to\infty} y(k+1) = \lim_{k\to\infty} y(k)\exp\left\{e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right\}.$$

De esto,

$$0 = \lim_{k\to\infty} e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}.$$

Pero

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k\to\infty} e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)} \leq \lim_{k\to\infty} e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+(x^M+\varepsilon)} \\
&\leq \lim_{k\to\infty} e^m\left[1 - \frac{y(k)}{e(k)[r(k)+(x^M+\varepsilon)]/h(k)}\right] \leq \lim_{k\to\infty} e^m\left[1 - \frac{y(k)}{e^m[r^m+(x^M+\varepsilon)]/h^l}\right] \\
&\leq \lim_{k\to\infty} e^m\left[1 - \frac{y(k)}{y^{\varepsilon}}\right] = e^m\left[1 - \frac{\overline{y}}{y^{\varepsilon}}\right] < 0,
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Esto prueba la afirmación, y $\lim_{\varepsilon \to 0} y^{\varepsilon} = y^{M}$.

Por lo tanto se cumple que

$$\limsup_{k \to \infty} y(k) \leq y^{M}. \qquad \square$$

Teorema 3.1.2. *Suponga que* $a^l d^l - c^m y^M > 0$. *Entonces*

$$\liminf_{k \to \infty} x(k) \geq x_m, \quad \liminf_{k \to \infty} y(k) \geq y_m, \tag{3.3}$$

donde

$$x_m = \min\left\{ \frac{a^l}{b^m}\left[1 - \frac{c^m y^M}{a^l d^l}\right] \exp\left\{a^l - b^m x^M - \frac{c^m y^M}{d^l}\right\}, \frac{a^l}{b^m}\left[1 - \frac{c^m y^M}{a^l d^l},\right]\right\},$$

$$y_m = \min\left\{ \left[\frac{e^l[r^l + x_m]}{h^m}\right] \exp\left\{e^l - \frac{h^m y^M}{r^l + x_m}\right\}, \frac{e^l[r^l + x_m]}{h^m}\right\}.$$

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$ tal que $a^l d^l - c^m(y^M + \varepsilon) > 0$, usando el teorema anterior existe k^* tal que

$$x(k) < x^M + \varepsilon, \quad y \quad y(k) < y^M + \varepsilon \quad para\ k \geq k^*$$

Se quiere ver que $\liminf_{k \to \infty} x(k) \geq x_m$, suponga que existe $k_0 \geq k^*$ tal que $x(k_0+1) \leq x(k_0)$. Usando la primera ecuación de (3.1),

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) \exp\left\{a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k) + x(k)}\right\} \\ &\geq x(k) \exp\left\{a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)}\right\} \\ &\geq x(k) \exp\left\{a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)(y^M + \varepsilon)}{d(k)}\right\}, \end{aligned}$$

particularmente para $k = k_0$

$$x(k_0) \geq x(k_0 + 1) \geq x(k_0) \exp\left\{a(k_0) - b(k_0)x(k_0) - \frac{c(k_0)(y^M + \varepsilon)}{d(k_0)}\right\},$$

$$1 \geq \exp\left\{a(k_0) - b(k_0)x(k_0) - \frac{c(k_0)(y^M + \varepsilon)}{d(k_0)}\right\}.$$

Se sigue que

$$a(k_0) - b(k_0)x(k_0) - \frac{c(k_0)(y^M + \varepsilon)}{d(k_0)} \leq 0,$$

y por lo tanto

$$x(k_0) \geq \frac{a(k_0)}{b(k_0)}\left[1 - \frac{c(k_0)(y^M+\varepsilon)}{a(k_0)d(k_0)}\right].$$

Por otro lado, se sabe que $a^l \leq a(k)$, $b(k) \leq b^m$, $c(k) \leq c^m$ y $d^l \leq d(k)$. Entonces

$$x(k_0) \geq \frac{a(k_0)}{b(k_0)}\left[1 - \frac{c(k_0)(y^M+\varepsilon)}{a(k_0)d(k_0)}\right] \geq \frac{a^l}{b^m}\left[1 - \frac{c^m(y^M+\varepsilon)}{a^l d^l}\right] =: \Delta_1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} x(k_0+1) &\geq x(k_0)\exp\left\{a(k_0) - b(k_0)x(k_0) - \frac{c(k_0)(y^M+\varepsilon)}{d(k_0)}\right\} \\ &\geq \Delta_1 \exp\left\{a^l - b^m(x^M+\varepsilon) - \frac{c^m(y^M+\varepsilon)}{d^l}\right\} =: x_\varepsilon. \end{aligned}$$

Afirmación: $x(k) \geq x_\varepsilon$ para $k \geq k_0$.

Por reducción al absurdo. Suponga que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \geq k_0$ tal que $x(n_0) < x_\varepsilon$, se deduce que $n_0 \geq k_0 + 2$. Tome p_0 el entero más pequeño entre k_0 y n_0, es decir, $k_0 \leq p_0 \leq n_0$, tal que

$$x(p_0) = \min_{k_0 \leq k \leq n_0}\{x(k)\},$$

entonces $x(p_0) \leq x_\varepsilon$. Por lo tanto $p_0 \geq k_0 + 2$ y $x(p_0) \leq x(p_0 - 1)$. Y por el argumento anterior se tiene $x(p_0) \geq x_\varepsilon$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, la afirmación es cierta.

Suponga $x(k+1) \geq x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como la sucesión es creciente y además está acotada se tiene que $\lim_{k\to\infty} x(k)$ existe y se denotará por $\underline{x}$.

Afirmación: $\underline{x} \geq \Delta_1$.

En efecto, suponga que $\underline{x} < \Delta_1$ Por otro lado, tomando límite en la primera ecuación de (3.1) entonces

$$\lim_{k\to\infty} x(k+1) = \lim_{k\to\infty} x(k)\exp\left\{a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right\}.$$

De esto,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k\to\infty} a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)} \geq \lim_{k\to\infty} a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)} \\
&\geq a^l \left[1 - \frac{c^m(y^M+\varepsilon)}{a^l d^l}\right] - b^m \underline{x} \geq b^m \left(\frac{a^l}{b^m}\left[1 - \frac{c^m(y^M+\varepsilon)}{a^l d^l}\right] - \underline{x}\right) \\
&= b^m(\Delta_1 - \underline{x}) > 0,
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

Y así, la afirmación es cierta. Note que $x^M \geq \dfrac{a^m}{b^l} \geq \dfrac{a^l}{b^m}$, lo cual implica que $\Delta_1 \geq x_\varepsilon$ y además, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon = x_m$, en consecuencia

$$\liminf_{k\to\infty} x(k) \geq x_m.$$

Similarmente al análisis anterior, se muestra

$$\liminf_{k\to\infty} y(k) \geq y_m.$$

Ya que $\liminf\limits_{k\to\infty} x(k) \geq x_m$, existe $k_* \geq k^*$ tal que $x_m - \varepsilon < x(k)$ para $k \geq k_*$. Suponga que existe $k_0 \geq k_*$ tal que $y(k_0+1) \leq y(k_0)$. Usando la segunda ecuación de (3.1) se tiene

$$\begin{aligned}
y(k+1) &= y(k)\exp\left\{e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right\} \\
&\geq y(k)\exp\left\{e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+(x_m-\varepsilon)}\right\},
\end{aligned}$$

particularmente para $k = k_0$,

$$y(k_0) \geq y(k_0+1) \geq y(k_0)\exp\left\{e(k_0) - \frac{h(k_0)y(k_0)}{r(k_0)+(x_m-\varepsilon)}\right\},$$

así,

$$1 \geq \exp\left\{e(k_0) - \frac{h(k_0)y(k_0)}{r(k_0)+(x_m-\varepsilon)}\right\}.$$

Se sigue que

$$e(k_0) - \frac{h(k_0)y(k_0)}{r(k_0)+(x_m-\varepsilon)} \leq 0.$$

Así, $y(k_0) \geq e(k_0)[r(k_0)+(x_m-\varepsilon)]/h(k_0)$. Por otro lado, $r^l \leq r(k)$, $e^l \leq e(k)$ y $h(k) \leq h^m$. Como todos los parámetros son positivos

$$h^m e(k)[r(k)+(x_m-\varepsilon)] \leq h(k)e^l[r^l+(x_m-\varepsilon)],$$

así para $k = k_0$,

$$y(k_0) \geq \frac{e(k_0)[r(k_0) + (x_m - \varepsilon)]}{h(k_0)} \geq \frac{e^l[r^l + (x_m - \varepsilon)]}{h^m} =: \Delta_2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} y(k_0+1) &\geq y(k_0) \exp\left\{ e(k_0) - \frac{h(k_0)y(k_0)}{r(k_0) + (x_m - \varepsilon)} \right\} \\ &\geq \Delta_2 \exp\left\{ e^l - \frac{h^m(y^M + \varepsilon)}{r^l + (x_m - \varepsilon)} \right\} =: y_\varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y(k) \geq y_\varepsilon$ para $k \geq k_0$.

Suponga $y(k+1) \geq y(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como la sucesión es creciente y además está acotada se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} y(k)$ existe y se denota por $\underline{y}$.

Afirmación: $\underline{y} \geq \Delta_2$.

En efecto, suponga que $\underline{y} < \Delta_2$. Tomando límite en la segunda ecuación de (3.1) entonces

$$\lim_{k\to\infty} y(k+1) = \lim_{k\to\infty} y(k) \exp\left\{ e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k) + x(k)} \right\}.$$

De esto,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{k\to\infty} e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)} &\geq \lim_{k\to\infty} e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k) + (x_m - \varepsilon)} \\ &\geq e^l \left[1 - \frac{h^m \underline{y}}{e^l[r^l + (x_m - \varepsilon)]} \right] \\ &= e^l \left[1 - \frac{\underline{y}}{e^l[r^l + (x_m - \varepsilon)]/h^m} \right] > 0, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

Y así, la afirmación anterior es cierta. Note que $y^M \geq \dfrac{r^m + x^M}{h^l} \geq \dfrac{e^l[r^l + (x_m - \varepsilon)]}{h^m}$, lo cual implica que $\Delta_2 \geq y_\varepsilon$ y además, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon = y_m$; en consecuencia,

$$\liminf_{k\to\infty} y(k) \geq y_m. \qquad \square$$

Del teorema 3.1.1 y teorema 3.1.2 se obtiene la permanencia del sistema (3.1).

3.2. Existencia de soluciones periódicas positivas

Suponga ahora que $a(k), b(k), c(k), d(k), e(k), h(k), r(k)$ son funciones w-periódicas , es decir,

$$a(k+w) = a(k),\ b(k+w) = b(k),\ c(k+w) = c(k),\ d(k+w) = d(k)$$

$$e(k+w) = e(k),\ h(k+w) = h(k),\ r(k+w) = r(k),$$

para $k \in \mathbb{Z}$. Dados x_m, x^M, y_m, y^M como en el Teorema 3.1.1 y Teorema 3.1.2, se quiere mostrar la existencia de las soluciones periódicas para el sistema (3.1).
La forma exponencial de las ecuaciones en (3.1) asegura que la trayectoria $(x(k), y(k))$ del sistema con respecto a cualquier condición inicial $x(0) > 0, y(0) > 0$, permanece en el cuadrante positivo del plano todo para todo k. Nótese que de los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2, la región comprendida por $[x_m, x^M] \times [y_m, y^M]$ forma un conjunto invariante para el sistema (3.1)

Teorema 3.2.1. *Suponga* $a^l d^l - c^m y^M > 0$. *Entonces el sistema* (3.1) *tiene una solución* w*-periódica, denotada por* $(x^*(k), y^*(k))$.

Demostración. Primero, note que el conjunto $[x_m, x^M] \times [y_m, y^M]$ es invariante ya que dada cualquier solución $(x(k), y(k))$ de nuestro sistema tal que $(x(0), y(0))$ pertenece a $[x_m, x^M] \times [y_m, y^M]$, así $(x(k), y(k)) \in [x_m, x^M] \times [y_m, y^M]$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Luego, se define una aplicación F sobre $[x_m, x^M] \times [y_m, y^M]$ con ley de correspondencia

$$F(x(0), y(0)) = (x(w), y(w)),$$

para $(x(0), y(0)) \in [x_m, x^M] \times [y_m, y^M]$. Del sistema (3.1) note que las soluciones $(x(w), y(w))$ dependen continuamente de $(x(0), y(0))$. Es decir, con $x(0) > 0$ y $y(0) > 0$

$$\begin{aligned} x(1) &= x(0) \exp\left\{ a(0) - b(0)x(0) - \frac{c(0)y(0)}{d(0) + x(0)} \right\}, \\ y(1) &= y(0) \exp\left\{ e(0) - \frac{h(0)y(0)}{r(0) + x(0)} \right\}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x(2) &= x(1) \exp\left\{ a(1) - b(1)x(1) - \frac{c(1)y(1)}{d(1) + x(1)} \right\}, \\ y(2) &= y(1) \exp\left\{ e(1) - \frac{h(1)y(1)}{r(1) + x(1)} \right\}. \end{aligned}$$

Equivalente a

$$x(2) = x(0)\exp\left\{a(0) - b(0)x(0) - \frac{c(0)y(0)}{d(0)+x(0)}\right\}\exp\left\{a(1) - b(1)x(1) - \frac{c(1)y(1)}{d(1)+x(1)}\right\},$$

$$y(2) = y(0)\exp\left\{e(0) - \frac{h(0)y(0)}{r(0)+x(0)}\right\}\exp\left\{e(1) - \frac{h(1)y(1)}{r(1)+x(1)}\right\}.$$

Haciendo

$$f(k) = \exp\left\{a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right\}$$

y

$$g(k) = \exp\left\{e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right\},$$

para $k \in \mathbb{N}$. Observe que

$$x(2) = x(0)\exp\{f(0)+f(1)\},$$
$$y(2) = y(0)\exp\{g(0)+g(1)\},$$

Y note que la solución $(x(2), y(2))$ depende de $(x(0), y(0))$, y así mismo para todo k es por ello que las soluciones $(x(w), y(w))$ dependen continuamente de $(x(0), y(0))$. De esto, F es continua y mapea el intervalo $[x_m, x^M] \times [y_m, y^M]$ sobre si mismo. En adición a esto, usando el Teorema del punto fijo de Brouwer, y ya que $[x_m, x^M] \times [y_m, y^M]$ es un conjunto compacto, se sigue que F tiene un punto fijo (x^*, y^*) y la solución (x^*, y^*) es una solución w-periódica del sistema (3.1).

□

3.3. Estabilidad global de las soluciones periódicas positivas

Teorema 3.3.1. *Suponga que*

$$c^m \leq \text{mín}\left\{\frac{a^l d^l}{y^M}, \frac{(d^l)^2(b^l-\tau)}{y^M}\right\},$$

donde $\tau > 0$ es una constante arbitraria pero fija y tal que $b^l > \tau$, suponga además que existe una constante positiva ν tal que

$$\text{mín}\left\{b^l - \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} - \tau, \frac{c^M}{d^l} + \frac{r^l\tau}{y^M}\right\} > \nu.$$

Entonces, el sistema (3.1) *posee una única órbita periódica positiva globalmente estable.*

Demostración.
Como $c^m < \dfrac{a^l d^l}{y^M}$, por el Teorema 3.2.1 se tiene que el sistema (3.1) posee una órbita periódica positiva.
Sea $(x^*(k), y^*(k))$ solución periódica positiva del sistema (3.1) obtenida en el Teorema 3.2.1. Considere el siguiente cambio de variable

$$u(k) = x(k) - x^*(k), \quad v(k) = y(k) - y^*(k),$$

donde $(x(k), y(k))$ es cualquier otra solución del sistema. Así, el sistema (3.1) es transformado en

$$\begin{aligned} u(k+1) = x(k) \exp&\left\{a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right\} \\ &- x^*(k) \exp\left\{a(k) - b(k)x^*(k) - \frac{c(k)y^*(k)}{d(k)+x^*(k)}\right\} \end{aligned}$$

y

$$v(k+1) = y(k) \exp\left\{e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right\} - y^*(k) \exp\left\{e(k) - \frac{h(k)y^*(k)}{r(k)+x^*(k)}\right\}.$$

Teniendo en cuenta las aproximaciones usando el polinomio de Taylor para dos variables y tomando las derivadas de orden 1, se tiene que

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + H(k,w(k)),$$

donde $\lim\limits_{w\to 0} \dfrac{H(w)}{\parallel w \parallel} = 0$.
Tomando

$$\begin{aligned} f(x(k),y(k)) &= x(k) \exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right) \\ &\quad - x^*(k) \exp\left(a(k) - b(k)x^*(k) - \frac{c(k)y^*(k)}{d(k)+x^*(k)}\right), \\ g(x(k),y(k)) &= y(k) \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right) \\ &\quad - y^*(k) \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y^*(k)}{r(k)+x^*(k)}\right). \end{aligned}$$

Para $f(x(k),y(k))$ derivando respecto a $x(k)$ se tiene

$$\begin{aligned} f_x(x(k),y(k)) = &\exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right) \\ &+x(k) \exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right)\left[-b(k) + \frac{c(k)y(k)}{(d(k)+x(k))^2}\right] \end{aligned}$$

$$= \exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right)\left[1 + x(k)(-b(k) + \frac{c(k)y(k)}{(d(k)+x(k))^2})\right],$$

ahora derivando $f(x(k), y(k))$ respecto a $y(k)$

$$f_y(x(k), y(k)) = x(k)\exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k)+x(k)}\right)\left(-\frac{c(k)}{d(k)+x(k)}\right).$$

Por otro lado, tomando $g(x(k), y(k))$ y derivando con respecto a $x(k)$

$$\begin{aligned} g_x(x(k), y(k)) &= y(k)\exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right)\left[\frac{h(k)y(k)}{(r(k)+x(k))^2}\right] \\ &= \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right)\left[\frac{h(k)(y(k))^2}{(r(k)+x(k))^2}\right], \end{aligned}$$

ahora derivando $g(x(k), y(k))$ y derivando con respecto a $y(k)$ tenemos

$$\begin{aligned} g_y(x(k), y(k)) &= \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right) + y(k)\exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right)\left[\frac{-h(k)}{r(k)+x(k)}\right] \\ &= \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right)\left[1 - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)}\right]. \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones de Taylor alrededor de la solución $(x^*(k), y^*(k))$ se tiene

$$\begin{aligned} f(x(k), y(k)) &= f(x^*(k), y^*(k)) + f_x(x^*(k), y^*(k))u(k) + f_y(x^*(k), y^*(k))v(k) \\ &\quad + H_1(k, w(k)). \end{aligned}$$

Haciendo el cambio

$$f(x(k), y(k)) = \exp\left(a(k) - b(k)x^*(k) - \frac{c(k)y^*(k)}{d(k)+x^*(k)}\right)\times$$

$$\left[1 + x^*(k)(-b(k) + \frac{c(k)y^*(k)}{(d(k)+x^*(k))^2})\right]u(k) + \exp\left(a(k) - b(k)x^*(k) - \frac{c(k)y^*(k)}{d(k)+x^*(k)}\right)$$

$$\times\left(-\frac{c(k)x^*(k)}{d(k)+x^*(k)}\right)v(k) + H_1(k, w(k)),$$

simplificando,

$$= \exp\left(a(k) - b(k)x^*(k) - \frac{c(k)y^*(k)}{d(k)+x^*(k)}\right) \times \left[\left(1 + x^*(k)(-b(k) + \frac{c(k)y^*(k)}{(d(k)+x^*(k))^2})\right)u(k)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{c(k)x^*(k)}{d(k)+x^*(k)}\right)v(k) + H_1(k, w(k))\right].$$

Y también para

$$\begin{aligned} g(x(k), y(k)) &= g(x^*(k), y^*(k)) + g_x(x^*(k), y^*(k))u(k) + g_y(x^*(k), y^*(k))v(k) \\ &\quad + H_2(k, w(k)), \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} g(x(k), y(k)) &= y^*(k)\exp\left(e(k) - \frac{h(k)y^*(k)}{r(k)+x^*(k)}\right)\left[\frac{h(k)y^*(k)}{(r(k)+x^*(k))^2}\right]u(k) \\ &\quad + \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y^*(k)}{r(k)+x^*(k)}\right)\left[1 - \frac{h(k)y^*(k)}{r(k)+x^*(k)}\right]v(k) \\ &\quad + H_2(k, w(k)). \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} = \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y^*(k)}{r(k)+x^*(k)}\right) \times \left[\left(\frac{h(k)(y^*(k))^2}{(r(k)+x^*(k))^2}\right)u(k)\right. \\ \left. + \left(1 - \frac{h(k)y^*(k)}{r(k)+x^*(k)}\right)v(k) + H_2(k, w(k))\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{gathered} u(k+1) = \exp\left(a(k) - b(k)x^*(k) - \frac{c(k)y^*(k)}{d(k)+x^*(k)}\right)\times \\ \left[\left(1 + x^*(k)(-b(k) + \frac{c(k)y^*(k)}{(d(k)+x^*(k))^2})\right)u(k) - \left(\frac{c(k)x^*(k)}{d(k)+x^*(k)}\right)v(k) + H_1(k, w(k))\right], \\ v(k+1) = \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y^*(k)}{r(k)+x^*(k)}\right)\times \\ \left[\left(\frac{h(k)(y^*(k))^2}{(r(k)+x^*(k))^2}\right)u(k) + \left(1 - \frac{h(k)y^*(k)}{r(k)+x^*(k)}\right)v(k) + H_2(k, w(k))\right], \end{gathered} \tag{3.4}$$

donde $\lim_{x\to\infty} \dfrac{H_i(x)}{\parallel x \parallel} = 0$ para $i = 1, 2$ y $k \in \mathbb{N}$. Haciendo

$$\frac{x^*(k+1)}{x^*(k)} = exp\left(a(k) - b(k)x(k) - \frac{c(k)y(k)}{d(k) + x(k)}\right)$$

y también

$$\frac{y^*(k+1)}{y^*(k)} = \exp\left(e(k) - \frac{h(k)y(k)}{r(k) + x(k)}\right).$$

Luego, sustituyendo en la ecuación anterior se sigue que

$$\begin{aligned} u(k+1) &= \left[\frac{x^*(k+1)}{x^*(k)}\right] \times \left[\left(1 + x^*(k)(-b(k) + \frac{c(k)y^*(k)}{(d(k) + x^*(k))^2})\right) u(k) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{c(k)x^*(k)}{d(k) + x^*(k)}\right) v(k) + H_1(k, w(k))\right], \\ v(k+1) &= \frac{y^*(k+1)}{y^*(k)}\left[\left(\frac{h(k)(y(k))^2}{(r(k) + x^*(k))^2}\right) u(k) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{h(k)y^*(k)}{r(k) + x^*(k)}\right) v(k) + H_2(k, w(k))\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ahora defina la función

$$V(w(k)) = \eta_1 |\frac{u(k)}{x^*(k)}| + \eta_2 |\frac{v(k)}{y^*(k)}|,$$

donde η_1 y η_2 son constantes positivas. Calculando la diferencia de V a lo largo de la solución del sistema (3.5) se obtiene $\Delta V(w(k)) = V(w(k+1)) - V(w(k))$, y se sigue

$$\Delta V(w(k)) = \eta_1 |\frac{u(k+1)}{x^*(k+1)}| + \eta_2 |\frac{v(k+1)}{y^*(k+1)}| - \eta_1 |\frac{u(k)}{x^*(k)}| - \eta_2 |\frac{v(k)}{y^*(k)}|.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Delta V(w(k)) = \left[\eta_1 \left|\frac{1}{x^*(k)}\right|\right] \times \Bigg[\Bigg(1 + x^*(k)(-b(k) + \frac{c(k)y(k)}{(d(k)+x(k))^2}) \Bigg) u(k) \\
- \left(\frac{c(k)x(k)}{d(k)+x(k)}\right) v(k) + H_1(k, w(k)) | \Bigg] \\
+\eta_2 | \frac{1}{y^*(k)} \left[\left(\frac{h(k)(y(k))^2}{(r(k)+x(k))^2} \right) u(k) + \left(1 - \frac{h(k)y(k)}{r(k)+x(k)} \right) v(k) + H_2(k, w(k)) \right] | \\
-\eta_1 \left|\frac{u(k)}{x^*(k)}\right| - \eta_2 \left|\frac{v(k)}{y^*(k)}\right|, \\
= \eta_1 \left|\frac{u(k)}{x^*(k)}\right| + \eta_1 \left| \left(-b(k) + \frac{c(k)y^*(k)}{(d(k)+x^*(k))^2} \right) u(k) \right| \\
-\eta_1 \left| \left(\frac{c(k)}{d(k)+x^*(k)} \right) v(k) \right| + \eta_1 \left| \left(\frac{H_1(k, w(k))}{x^*(k)} \right) \right| \\
+\eta_2 \left| \left(\frac{h(k)y^*(k)}{(r(k)+x(k))^2} \right) u(k) \right| + \eta_2 \left|\frac{v(k)}{y^*(k)}\right| - \eta_2 \left| \left(\frac{h(k)}{r(k)+x(k)} \right) v(k) \right| + \eta_2 \left| \left(\frac{H_2(k, w(k))}{y^*(k)} \right) \right| \\
-\eta_1 \left|\frac{u(k)}{x^*(k)}\right| - \eta_2 \left|\frac{v(k)}{y^*(k)}\right|.
\end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}
= \eta_1 \left| \left(-b(k) + \frac{c(k)y^*(k)}{(d(k)+x^*(k))^2} \right) u(k) \right| - \eta_1 \left| \left(\frac{c(k)}{d(k)+x^*(k)} \right) v(k) \right| + \eta_1 \left| \left(\frac{H_1(k, w(k))}{x^*(k)} \right) \right| \\
+\eta_2 \left| \left(\frac{h(k)y^*(k)}{(r(k)+x(k))^2} \right) u(k) \right| - \eta_2 \left| \left(\frac{h(k)}{r(k)+x^*(k)} \right) v(k) \right| + \eta_2 \left| \left(\frac{H_2(k, w(k))}{y^*(k)} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Agrupando términos observe que,

$$\begin{aligned}
\Delta V = \left[\eta_1 \left(-b(k) + \frac{c(k)y^*(k)}{(d(k)+x^*(k))^2} \right) + \eta_2 \left(\frac{h(k)y^*(k)}{(r(k)+x^*(k))^2} \right) \right] |u(k)| \\
+ \left[-\eta_1 \left(\frac{c(k)}{d(k)+x^*(k)} \right) - \eta_2 \left(\frac{h(k)}{r(k)+x^*(k)} \right) \right] |v(k)| \\
+ \eta_1 \left| \left(\frac{H_1(k, w(k))}{x^*(k)} \right) \right| + \eta_2 \left| \left(\frac{H_2(k, w(k))}{y^*(k)} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
-\eta_1 b(k) + \eta_1 \frac{c(k)y^*(k)}{(d(k)+x^*(k))^2} + \eta_2 \frac{h(k)y^*(k)}{(r(k)+x^*(k))^2} \\
\leq -\eta_1 b(k) + \eta_1 \frac{c(k)y^*(k)}{(d(k))^2} + \eta_2 \frac{h(k)y^*(k)}{(r(k))^2}.
\end{aligned}$$

Como los parámetros están acotados se tiene $b^l \leq b(k) \leq b^M$, $c^l \leq c(k) \leq c^M$, $d^l \leq d(k) \leq d^M$, $h^l \leq h(k) \leq h^M$, $r^l \leq r(k) \leq r^M$, por lo tanto,

$$\leq -\eta_1 b(k) + \eta_1 \frac{c(k)y^M}{(d(k))^2} + \eta_2 \frac{h(k)y^M}{(r(k))^2} \leq -\eta_1 b^l + \eta_1 \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} + \eta_2 \frac{h^M y^M}{(r^l)^2}$$

$$= \eta_1 \left(-b^l + \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} \right) + \eta_2 \frac{h^M y^M}{(r^l)^2}.$$

Haciendo $\eta_2 = \dfrac{(r^l)^2}{h^M y^M}(\eta_1 \tau)$, donde $\tau > 0$ es arbitrario pero fijo.

$$= \eta_1 \left(-b^l + \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} \right) + \eta_1 \tau = \eta_1 \left(-b^l + \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} + \tau \right)$$

Luego, se busca bajo que condiciones esta última expresión es menor que cero, es decir,

$$\eta_1 \left(-b^l + \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} + \tau \right) < 0, \quad \text{si y solo si,} \quad -b^l + \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} + \tau < 0,$$

si y solo si,

$$\frac{c^M y^M}{(d^l)^2} < b^l - \tau, \quad \text{si y solo si,} \quad c^M < \frac{(d^l)^2}{y^M}[b^l - \tau] \quad \text{con } b^l > \tau.$$

Por lo tanto, de la hipótesis

$$\begin{aligned} \Delta V \leq & \left[\eta_1 \left(-b(k) + \frac{c(k)y^*(k)}{(d(k) + x^*(k))^2} \right) + \eta_2 \left(\frac{h(k)y^*(k)}{(r(k) + x^*(k))^2} \right) \right] x^*(k) |\frac{u(k)}{x^*(k)}| \\ & + \left[-\eta_1 \left(\frac{c(k)}{d(k) + x^*(k)} \right) - \eta_2 \left(\frac{h(k)}{r(k) + x^*(k)} \right) \right] y^*(k) |\frac{v(k)}{y^*(k)}| \\ & + \eta_1 | \left(\frac{H_1(k, w(k))}{x^*(k)} \right) | + \eta_2 | \left(\frac{H_2(k, w(k))}{y^*(k)} \right) |, \quad \text{para } k \text{ grande.} \end{aligned}$$

Haciendo $\eta_1 = 1$, resulta que

$$= \left(-b^l + \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} + \tau \right) | u(k) | - \left(\frac{c^M}{d^l} + \frac{r^l \tau}{y^M} \right) + | \left(\frac{H_1(k, w(k))}{x^*(k)} \right) | + \eta_2 | \left(\frac{H_2(k, w(k))}{y^*(k)} \right) |.$$

Ya que

$$-b^l + \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} + \tau < 0, \quad \text{equivale a} \quad b^l - \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} - \tau > 0.$$

Sea $\nu > 0$ tal que

$$b^l - \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} - \tau > \nu \quad \text{y} \quad \frac{c^M}{d^l} + \frac{r^l \tau}{y^M} > \nu,$$

por lo que

$$\Delta V \leq -\nu \mid u(k) \mid -\nu \mid v(k) \mid +\eta_1 \left| \left(\frac{H_1(k, w(k))}{x^*(k)} \right) \right| + \eta_2 \left| \left(\frac{H_2(k, w(k))}{y^*(k)} \right) \right|.$$

Usando la $\| \varphi \|$, como $\max\limits_{x_m \leq x(k) \leq x^M} (\mid \varphi(t) \mid)$ se tiene

$$\Delta V \leq -\nu \parallel w(k) \parallel +\eta_1 \left| \left(\frac{H_1(k, w(k))}{x^*(k)} \right) \right| + \eta_2 \left| \left(\frac{H_2(k, w(k))}{y^*(k)} \right) \right|.$$

Ya que $\dfrac{\mid H_i(k, w) \mid}{\parallel w \parallel}$ converge uniformemente a cero siempre que $\parallel w \parallel \to 0$ y para k suficientemente grande $\parallel w(k) \parallel \leq \gamma$ para algún $\gamma > 0$, se tiene $\dfrac{\mid H_i(k, w) \mid}{\parallel w \parallel} \leq \varepsilon$, entonces, $\mid H_i(k, w) \mid \leq \varepsilon(\parallel w \parallel)$, luego

$$\frac{\mid H_i(k, w) \mid}{x^*(k)} \leq \frac{\mid H_i(k, w) \mid}{x_m} \leq \frac{\varepsilon(\parallel w \parallel)}{x_m}.$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{\nu}{4} \left(max \left\{ x_m, y_m \right\} \right)$ se encuentra

$$\frac{\mid H_i(k, w) \mid}{x^*(k)} \leq \frac{\mid H_i(k, w) \mid}{x_m} \leq \frac{\varepsilon(\parallel w \parallel)}{x_m} \leq \frac{\nu}{4}((\parallel w \parallel)), \quad \text{para i=1,2.}$$

En consecuencia,

$$\Delta V \leq -\nu \parallel w(k) \parallel + \frac{\nu}{4}((\parallel w \parallel)) + \frac{\nu}{4}((\parallel w \parallel)) = -\frac{\nu}{2}((\parallel w \parallel)).$$

Ahora aplicando Teorema 1.4.1, se sigue que la solución trivial de la ecuación (3.5) es uniformemente estable asintóticamente y así también es la solución $(x^*(k), y^*(k))$ de (3.1). Por definición recuerde que estabilidad uniforme asintótica implica estabilidad asintótica.

Se muestra a continuación que $(x^*(k), y^*(k))$ la solución periódica positiva de (3.1) es globalmente estable. Para ello, es suficiente mostrar que para cualquier solución $(x(k), y(k))$ de (3.1)

$$\parallel x(k) - x^*(k) \parallel \to 0, \quad \parallel y(k) - y^*(k) \parallel \to 0, \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Escoja $p > 0$ suficientemente pequeño y $q > 0$ suficientemente grande tal que el conjunto R^* definido por

$$R^* = \left\{ t = (x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \mid p \leq x, y \leq q \right\},$$

satisface que $(x^*(0), y^*(0)) \in R^*$ y $(x(0), y(0)) \in R^*$. Ahora para cualquier solución $s \in R^*$, denote $(x(k,s), y(k,s))$ una solución del sistema (3.1) que pase a través de s en $k = 0$. Por la prueba anterior se sabe que $(x(k,s), y(k,s))$ es uniformemente estable asintóticamente. Por lo tanto, existe una vecindad $\Gamma(s)$ del punto s tal que $\Gamma(s)$ es una región uniformemente atractiva de $(x(k,s), y(k,s))$.
También, de esta construcción note que $R^* \subset \bigcup_{s \in R^*} \Gamma(s)$, usando el *Teorema de cubrimientos finitos (Heine-Borel)* se tiene que existe una cantidad finita de vecindades $\Gamma(s_1)$, $\Gamma(s_2)$, ..., $\Gamma(s_i)$ tales que $R^* \subset \bigcup_{j=1}^{i} \Gamma(s_j)$. Suponga que $(x^*(0), y^*(0)) \in \Gamma(s_1)$ y $(x(0), y(0)) \in \Gamma(s_i)$ y $\Gamma(s_j) \bigcap \Gamma(s_{j+1}) \neq \emptyset$, para $j = 1, ..., i-1$.

Sea $s_j^* \in \Gamma(s_j) \bigcap \Gamma(s_{j+1})$, para $j = 1, ..., i-1$. Ya que $(x(k,s_j), y(k,s_j))$ es uniformemente estable asintóticamente, usando la definición para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_j > 0$ tal que para $s \in \Gamma(s_j)$. Entonces

$$\| x(k,s_j) - x(k,s) \| < \frac{\varepsilon}{2i}, \quad \| y(k,s_j) - y(k,s) \| < \frac{\varepsilon}{2i}, \quad \text{cuando } k \geq \delta_j.$$

lo cual implica que

$$\| x(k,s_j) - x(k,s_j^*) \| < \frac{\varepsilon}{2i}, \quad \| y(k,s_j) - y(k,s_j^*) \| < \frac{\varepsilon}{2i}, \quad \text{cuando } k \geq \delta_j.$$

$$\| x(k,s_{j+1}) - x(k,s_j^*) \| < \frac{\varepsilon}{2i}, \quad \| y(k,s_{j+1}) - y(k,s_j^*) \| < \frac{\varepsilon}{2i}, \quad \text{cuando } k \geq \delta_{j+1},$$

donde $j = 1, ..., i-1$. Más aún,

$$\| x(k,s_1) - x(k,x^*(0)) \| < \frac{\varepsilon}{2i}, \quad \| y(k,s_1) - y(k,y^*(0)) \| < \frac{\varepsilon}{2i}, \quad \text{cuando } k \geq \delta_1.$$

$$\| x(k,s_i) - x(k,x(0)) \| < \frac{\varepsilon}{2i}, \qquad \| y(k,s_i) - y(k,y(0)) \| < \frac{\varepsilon}{2i}, \quad \text{cuando } k \geq \delta_i.$$

Se sigue que

$$\| x^*(k) - x(k) \| = \| x(k,x^*(0)) - x(k,x(0)) \| < \varepsilon, \quad \text{para } k \geq \sum_{j=1}^{i} \delta_j.$$

$$\| y^*(k) - y(k) \| = \| y(k,y^*(0)) - y(k,y(0)) \| < \varepsilon, \quad \text{para } k \geq \sum_{j=1}^{i} \delta_j.$$

Por lo tanto, cualquier solución $(x(k), y(k))$ de (3.1) es globalmente estable asintóticamente, en particular la solución $(x^*(k), y^*(k))$ es globalmente estable asintóticamente. Por ultimo, la unicidad se obtiene de la estabilidad global de la solución periódica. Esto culmina la demostración. $\square$

3.4. Comprobación Numérica

En esta sección se da un ejemplo numérico para ilustrar la factibilidad del resultado estudiado en el presente trabajo. Si en el sistema (3.1) se consideran los siguientes parámetros, que son 4−periódicos.

$$a(k) = 1 * [1.5 + cos(\frac{k\pi}{2})], \qquad b(k) = 0.5 * [0.5 + (0.25) * cos(\frac{k\pi}{2})],$$
$$c(k) = 1 * [0.01 + (0.005) * sin(\frac{k\pi}{2})], \qquad d(k) = 3 * [3 + (0.01) * cos(\frac{k\pi}{2})],$$
$$e(k) = 0.125 * [3.5 + sin(\frac{k\pi}{2})], \qquad h(k) = 2 * [0.2 + (0.01) * sin(\frac{k\pi}{2})],$$
$$r(k) = 2 * [1 + (0.05) * sin(\frac{k\pi}{2})].$$

Aquí las condiciones dadas en el Teorema 3.3.1 se satisfacen. En efecto, $a^l d^l - c^M y^M = 3.5177 > 0$ y $b^l - \frac{c^M y^M}{(d^l)^2} - \tau = 1.0442 > 0$, tomando $\tau = 0.1$ fijo. Por lo tanto, el sistema (3.1) admite una solución positiva periódica, que es globalmente asintóticamente estable. Esto se puede apreciar en la Figura 3.1

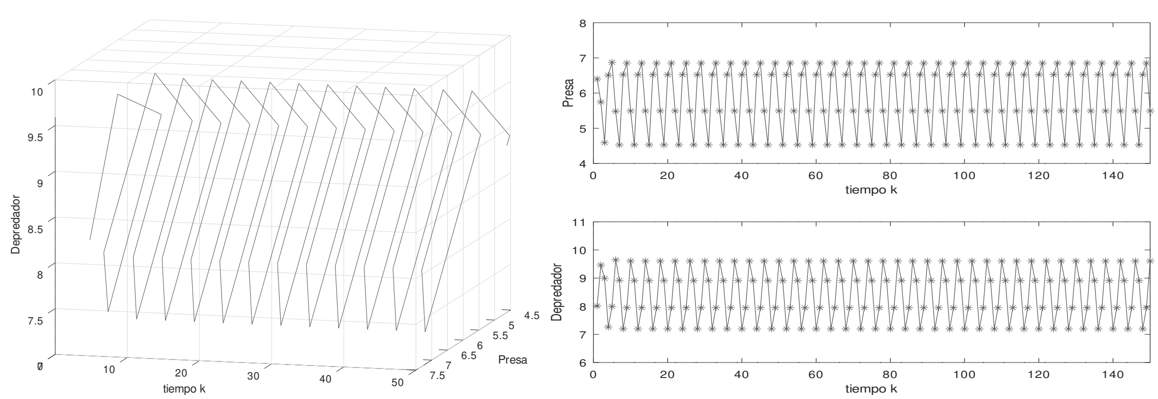

Figura 3.1: solución periódica con las condiciones iniciales $x(0) = 6.4$ y $y(0) = 8.01$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. P. Agarwal. Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Apllications, no. 228, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York (2000).

[2] M.A. Aziz-Alaoui, M. Daher-Okiye. Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified leslie-gower and holling type ii schemes. App. Math. Lett., 16(7):1069-1075, 2003. doi:10.1016/S0893-9659(03)90096-6.

[3] C. Duque, J. Uzcategui. Dynamics of a Discrete Predator-Prey System with non-constant Death rate, Boletín de Matemáticas **24**(1)(2017), 1-17.

[4] M. Fan, K. Wang. Periodic Solution of a Discrete Time Nonautonomous Ratio-Dependent Predator-Prey System, Math. Comput. Modelling **35**(2002), 951-961.

[5] C. S. Holling. Some characteristics of simple types of predation and parasitism , Can. Entomol. **91**(1959), 385-398.

[6] H. F. Hou, W. T. Li. Stable Periodic Solution of the Discrete Periodic Lesli-Gower Predator-Prey Model, Math. Comput. Modelling **40**(2004), 261-269.

[7] L. Hu, L. Nie. Permanence and Global Stability for a Non-Autonomous Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes with Delay. Appl. Math. **2**(2011), 47-56. doi:10.4236/am.2011.21006

[8] A. Korobeinkov. A lyapunov funtion for leslie-gower predator-prey models. Appl. Math. Lett., 14(6):697-699, 2001. doi: 10.1016/S0893-9659(01)80029-X.

[9] J. M. Smith. Models in Ecology, Cambridge University Press(1974), 23-25.

[10] W. Wendi, L. Zhengyi. Global stability of discrete models of Lotka-Volterra type, Nonlinear Anal. **35**(1999), 1019-1030.

[11] Z. Zhou, X. Zou. Stable Periodic Solution in a Discrete Periodic Logistic Equation, Appl. Math. Lett. **16**(2003), 165-171.