UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
CONSEJO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DIVISIÓN DE POSTGRADO
POSTGRADO DE MATEMÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA

MÉTODO ANALÍTICO PARA DETERMINAR LA DISTRIBUCIÓN DE LOS ESFUERZOS NORMALES Y CORTANTES ACTUANDO SOBRE SUPERFICIES POTENCIALES DE ROTURA EN TALUDES ROCOSOS.

POR:
ING. NORLY T. BELANDRIA RODRIGUEZ
TUTOR: PH.D ROBERTO UCAR NAVARRO

Trabajo de grado presentado como requisito parcial
para obtener el grado de
MAGÍSTER SCIENTIAE EN MATEMÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA.

MÉRIDA, OCTUBRE DEL 2008.

RESUMEN.

El movimiento de masas en taludes naturales y excavados, es debido en gran parte a la acción de la gravedad, al efecto de la meteorización y a la acción de otros fenómenos naturales y ambientales, los cuales constituyen factores condicionantes y desencadenantes muy habituales en los materiales que conforman el talud, produciendo la aparición de inestabilidades al generarse una disminución progresiva de la resistencia al corte del suelo o macizo rocoso.

El método analítico propuesto en el siguiente trabajo permite determinar en forma aproximada la distribución en cualquier punto de los esfuerzos normales y cortantes actuando sobre superficies potenciales de rotura bien sea plana, parabólica o circular, y por ende el factor de seguridad en taludes teniendo en cuenta las ecuaciones de equilibrio y mediante rotaciones de ejes para el caso bidimensional. Adicionalmente, el procedimiento desarrollado facilita una mejor interpretación de los resultados al expresar la distribución de tensiones en forma adimensional en taludes de cualquier inclinación. Asimismo, se determina el esfuerzo promedio para la rotura plana empleando como base el teorema de la integral del valor medio y, para la rotura parabólica y circular la aproximación de los esfuerzos promedios se realiza con la ayuda del método de mínimos cuadrados. Finalmente se realizan comparaciones con otros procedimientos desarrollados por Ucar (2004) en su Manual de Anclajes en Ingeniería Civil con la finalidad de corroborar los resultados obtenidos a través de esta investigación, también la metodología desarrollada permite calcular los parámetros de corte instantáneos y compararlos con el programa de Roclab.

ÍNDICE.

INDICE DE TABLAS.

INDICE DE FIGURAS.

CAPÍTULO VI

1.1− Introducción.

Como es bien conocido, el estudio de superficies potenciales de falla en taludes, ha sido ampliamente investigado en el campo de la ingeniería geotécnica en función del estado de tensiones actuando sobre una predeterminada superficie de rotura.

Los métodos analíticos propuestos en el siguiente trabajo permiten determinar en forma aproximada la distribución de los esfuerzos normales y cortantes sobre superficies potenciales de rotura bien sea plana, parabólica o circular, teniendo en cuenta las ecuaciones de equilibrio y mediante rotaciones de ejes para el caso bidimensional. Además el procedimiento desarrollado determina la distribución de tensiones para taludes de cualquier inclinación, expresado en forma adimensional, facilitando a la vez una mejor interpretación de los resultados.

El objetivo general es desarrollar expresiones analíticas que permitan hallar la distribución de los esfuerzos normales y cortantes en cualquier punto de las superficies potenciales de rotura previamente descritas, facilitando un mayor entendimiento en el análisis de la estabilidad de taludes.

Asimismo, apoyándose en el criterio de rotura de Hoek y Brown se determinan los valores instantáneos de la cohesión (C) y ángulo de fricción interna (ϕ) en función de la tensión normal actuando en un determinado punto de la superficie potencial de rotura. Adicionalmente, se han considerado las expresiones expuestas por Ucar en el Manual de Anclajes en Ingeniería Civil (2004), para el cálculo de parámetros importantes que permiten comparar los resultados obtenidos con el método analítico con otros métodos desarrollados por dicho autor, con la finalidad de evaluar los resultados y validar el método propuesto.

La metodología aplicada para la realización del trabajo estuvo basada por su simplicidad en un talud vertical, posteriormente, se investigó el caso de taludes inclinados con la ayuda de la rotación de ejes, hallando expresiones que junto con las condiciones de contorno y los parámetros geométricos considerados se obtienen las ecuaciones de los esfuerzos normales y cortantes, para el caso particular de rotura plana, parabólica y circular, teniendo en cuenta las ecuaciones de la recta, parábola y la circunferencia respectivamente. Para el caso de la rotura plana se determina el esfuerzo promedio utilizando como base el teorema de la integral del valor medio, y para la rotura parabólica y circular la aproximación de los esfuerzos promedios se realiza con la ayuda del método de mínimos cuadrados. Finalmente, se anexa un capítulo de criterios de rotura, el cual proporciona las herramientas para calcular los parámetros de corte instantáneos aplicando la ecuación de Mohr- Coulomb, es decir, la cohesión (C) y el ángulo de fricción interna (ϕ), así como el factor de seguridad (FS).

1.2– Justificación:

El movimiento de una masa rocosa en la superficie de un talud, debido a la acción de la gravedad, junto al debilitamiento progresivo de los materiales, consecuencia de la meteorización y a la actuación de otros fenómenos naturales y ambientales, hacen que los movimientos del terreno sean relativamente habituales en la masa rocosa que conforma el talud.

El objetivo fundamental es determinar un método analítico que permita hallar la distribución de los esfuerzos normales y cortantes actuando sobre superficies potenciales de rotura en taludes considerando el caso particular de rotura plana, parabólica y circular.

La importancia de conocer la distribución de los esfuerzos en los taludes y la determinación de expresiones matemáticas dará un aporte importante, por cuanto permitirá conocer con mayor precisión el factor de seguridad, los esfuerzos en cada punto de la superficie de falla, así como la cohesión y el ángulo de fricción instantáneo para un determinado entorno de esfuerzos, al aplicar el criterio de rotura empírico de Hoek y Brown y Barton.

1.3– Limitaciones:

La superficie de la cara del talud se ha considerado plana y no presenta irregularidades geométricas. Asimismo, el tipo de material que forma el talud debe ser considerado homogéneo para que las expresiones matemáticas sean manejables y sencillas.

Por otra parte, no se ha tomado en cuenta el efecto sísmico y la presión intersticial debido al agua. Sin embargo, para este último caso en mencionarse, al conocer la altura del nivel freático, es posible determinar el valor medio del peso unitario en función del peso unitario sumergido (γ') y natural (γ_h), y por ende la presión efectiva.

$$\gamma_{medio} = \left[\frac{\gamma_h h_1 + (\gamma_{sat} - \gamma_w) h_2}{h_1 + h_2} \right] \tag{I-1}$$

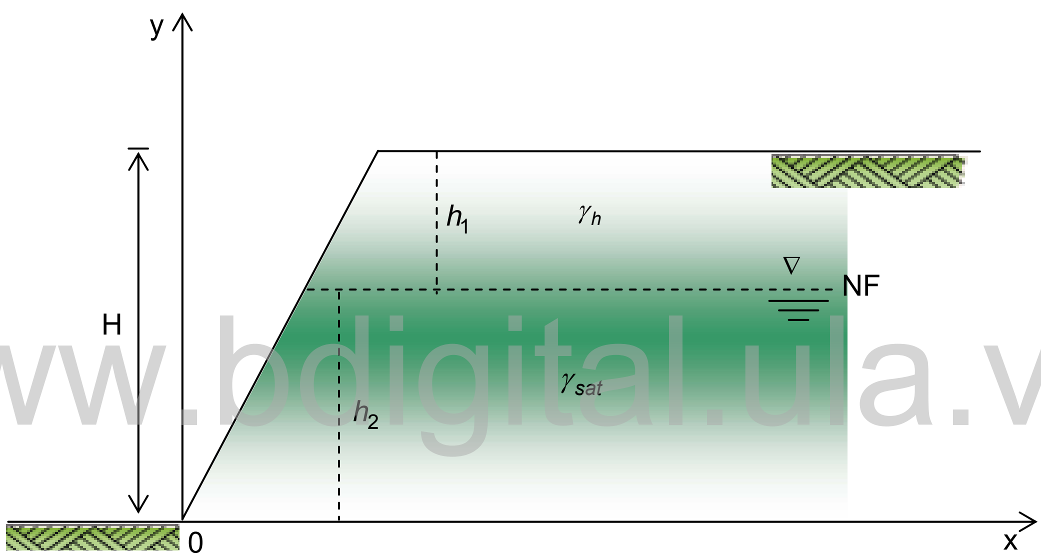


Fig. I-1 Representación de dos estratos con peso específico húmedo γ_h y peso específico saturado γ_{sat}.

1.4– Objetivos:

1.4.1– Objetivo General:

- ✓ Determinar la distribución de los esfuerzos normales y cortantes para taludes con diferentes superficies de rotura.

1.4.2- Objetivos Específicos:

- ✓ Determinar las expresiones analíticas para hallar los esfuerzos normales y cortantes cuya superficie de rotura es plana.
- ✓ Determinar las expresiones analíticas para hallar los esfuerzos normales y cortantes cuya superficie de rotura es parabólica.
- ✓ Determinar las expresiones analíticas para hallar los esfuerzos normales y cortantes cuya superficie de rotura es circular.
- ✓ Determinar los parámetros de corte C y Ø instantáneos, aplicando el criterio de Hoek y Brown y Barton.
- ✓ Comparar las diferentes superficies de rotura obtenidas, en el programa de Excel.

1.5 Metodología:

1. Recopilación de la información: Esta etapa consiste en la revisión bibliográfica, hemerográfica de todos aquellos trabajos afines a dicha investigación.

2. Etapa de desarrollo: Consiste en desarrollar todas las expresiones matemáticas necesarias para luego ser suministradas en la hoja de cálculo Excel y su posterior análisis.

3. Etapa Final: consiste en el análisis y comparación de los resultados, aplicando los distintos criterios de rotura mediante ejemplos prácticos, conjuntamente con sus respectivas conclusiones.

1.6 Fundamentos Teóricos:

Como se sabe el mecanismo de falla relacionado con la estabilidad de taludes en macizos rocosos está controlado por estructuras geológicas tales como diaclasas, foliación, estratificación, así como otras discontinuidades que conjuntamente con las anteriores son las causantes de que existan deslizamientos al llevarse a cabo excavaciones en obras civiles y mineras, tanto en la construcción de presas y obras viales como en las explotaciones a cielo abierto y subterráneas, con el resultado lamentable en muchas circunstancias de la pérdida de vidas humanas, además del costo horario adicional que representan las interrupciones y demoras, conjuntamente con las inversiones cuantiosas que deben realizar las empresas y organismos competentes encargados de la remoción de bloques y fragmentos de roca y de la posterior estabilización del macizo rocoso en caso de que se requiera.

Lógicamente lo dicho anteriormente indica que el ingeniero geotécnico juega un papel preponderante en la toma de decisiones con la finalidad de poder garantizar la seguridad de las excavaciones en macizos rocosos.

En estas condiciones, es de fundamental interés conocer los modos de rotura que ocurren en la roca cuyo movimiento está controlado por discontinuidades geológicas, las cuales pueden dividirse en tres tipos:

1.6.1– Rotura Plana:

Se produce a favor de una superficie preexistente, que puede ser la estratificación, una junta tectónica, una falla etc. La condición básica es la presencia de discontinuidades buzando al favor del talud y con su misma dirección, cumpliéndose la condición de que la discontinuidad debe tener una inclinación menor que la del talud ($\beta > \alpha$) y su buzamiento debe ser mayor que su ángulo de rozamiento interno ($\alpha > \phi$)

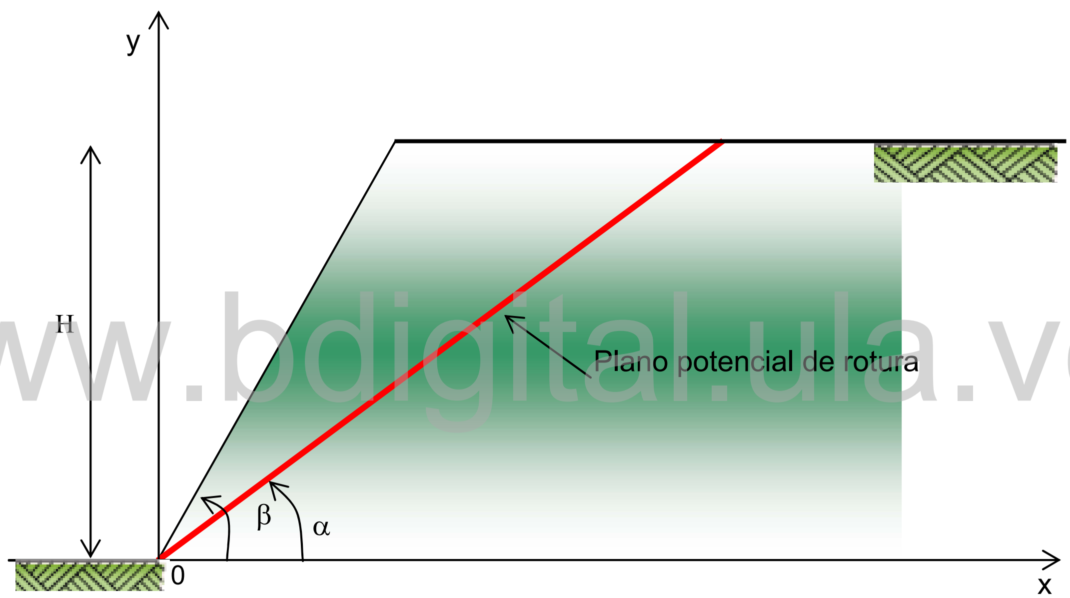


Fig. I-2.Rotura plana. Según Ucar (2004)

Las condiciones geométricas para la ocurrencia de la falla son las siguientes, tal como lo indican Hoek y Brown (1981):

1.- $\phi < \alpha < \beta$

Donde:

α = ángulo que forma el plano de falla con la horizontal (buzamiento de la discontinuidad).

β = inclinación de la cara del talud con la horizontal.

$\phi = \phi_j$ = ángulo de fricción interna del macizo rocoso en la superficie de deslizamiento.

2.- El plano de falla debe tener un rumbo aproximadamente paralelo (± 20°) con relación al plano del talud.

1.6.2- Rotura por Cuña:

Ocasionada a través de dos planos de discontinuidad dispuestos oblicuamente al plano del talud, en el cual el desplazamiento está gobernado por la inclinación y dirección de la recta de intersección de los dos planos. Para que se produzca este tipo de rotura, los dos planos deben aflorar en la superficie del talud y se deben cumplir iguales condiciones que para la rotura plana: ($\beta > \alpha > \phi$), siendo α en este caso el buzamiento de la línea de intersección.

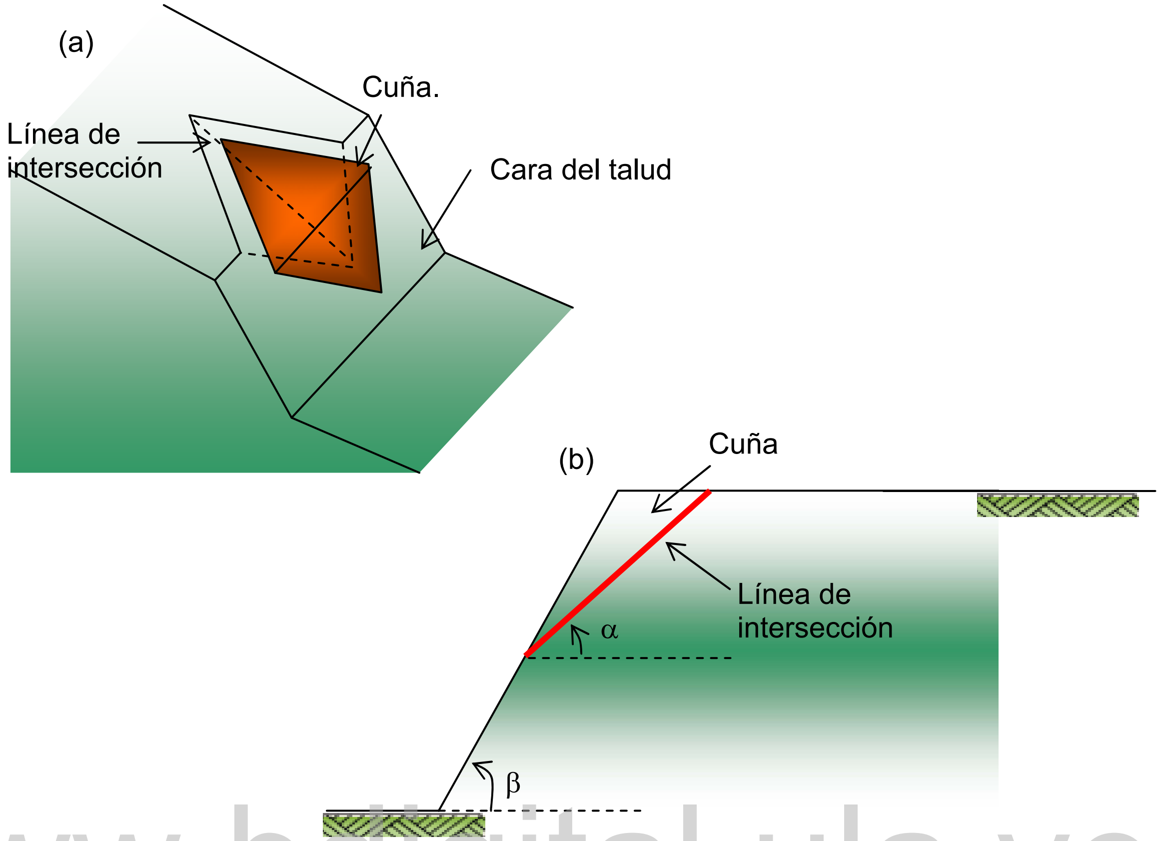


Fig. I-3. (a) Rotura por cuña. (b) Perfil de la rotura por cuña, mostrando la línea de intersección. Según de González de V et al. (2002).

1.6.3- Vuelco de Estratos:

Este tipo de rotura se caracteriza por una rotación de la columna o bloque de roca sobre su base, bajo el efecto de la acción de la gravedad y de las fuerzas desarrolladas por las rocas adyacentes o en ciertos casos debido al empuje del agua al penetrar en las discontinuidades.

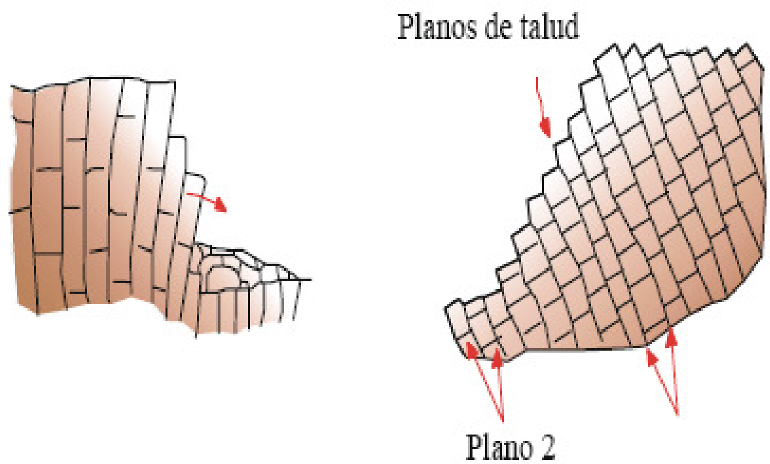


Fig. I-4 Vuelco de estratos. Tomado del Manual de Anclajes en Ingeniería Civil, Ucar (2004)

Finalmente vista su importancia es de gran interés mencionar, $La\ rotura\ circular$, la cual se caracteriza por aproximarse bastante bien a una superficie cilíndrica cuya sección transversal se asemeja a un arco de círculo. Esta clase de deslizamiento ocurre con frecuencia en suelos o macizos rocosos altamente fracturados sin direcciones predominantes de los planos de discontinuidad. Adicionalmente debe cumplirse que las partículas de suelo o roca deben tener un tamaño muy pequeño en comparación con las dimensiones del talud.

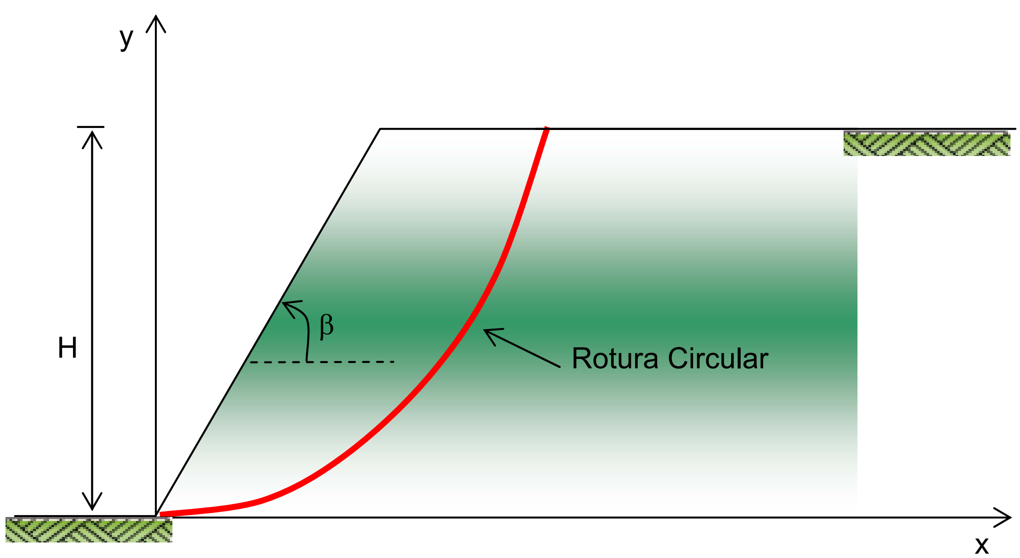


Fig. I-5. Rotura circular. Según de González de V. et al. (2002).

2.- ESFUERZOS.

2.1- Las fuerzas que actúan en un medio continuo se clasifican en *fuerzas de cuerpo* (o de masa) y *fuerzas de superficie*. Las primeras están distribuidas de manera continua en todo el medio y son producida sin contacto físico con otros cuerpos (ejemplo fuerzas gravitacional, magnética e inercial), las segundas actúan sobre las superficies externas de un cuerpo y resulta del contacto físico con otros cuerpos.

El esfuerzo, se puede definir suponiendo que una fuerza $\left(\vec{F}\right)$ actúa sobre una superficie (S), estando distribuida sobre la misma de manera continua, de modo que a una pequeña área parcial ΔS corresponda una pequeña parte $\overline{\Delta\vec{F}}$ de la fuerza total; La tensión $\vec{T}$ en el punto P según el plano π se define como el valor límite de la superficie, por lo tanto:

$$\vec{T} = \overset{n}{\vec{T}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\overline{\Delta\vec{F}}}{\Delta S} = \frac{\overline{d\vec{F}}}{dS} \qquad \text{(II-1)}$$

El vector esfuerzo no tiene que ser necesariamente perpendicular al plano y se puede descomponer en dos componentes ortogonales. Se llama componente normal del vector esfuerzo, o simplemente el esfuerzo normal σ, a la proyección del T en la dirección del vector unitario normal $\vec{n}$, el cual puede obtenerse a través del siguiente producto escalar:

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n} = \left|\vec{T}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cos\varphi \qquad \text{(II-2)}$$

$$\sigma = T\cos\varphi$$

Siendo $\left|\vec{n}\right| = 1, \quad y \quad \left|\vec{T}\right| = \left|\overset{n}{\vec{T}}\right| = T = \overset{n}{T}$ *

Al aplicar el teorema de Pitágoras, la componente tangencial del esfuerzo, denominada también esfuerzo cortante o de cizalla es $\tau = \sqrt{T^2 - \sigma^2}$:

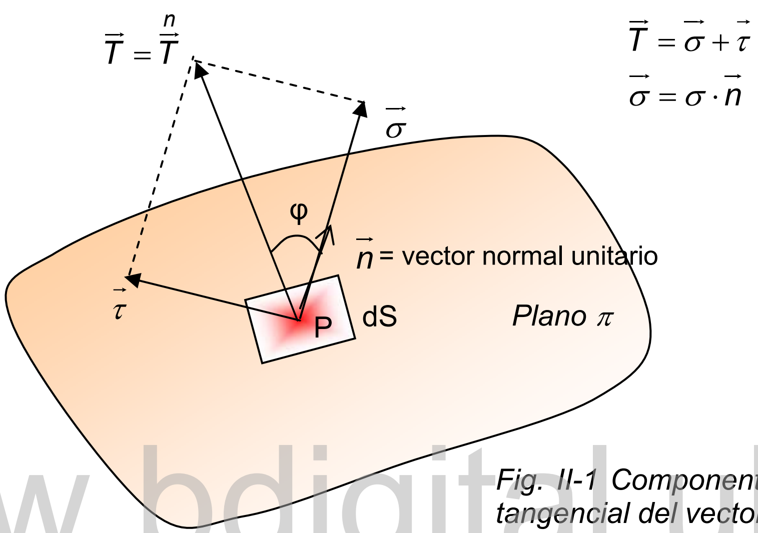


Fig. II-1 Componente normal y tangencial del vector esfuerzo.

2.2- Matriz de Esfuerzo:

Para establecer las ecuaciones de equilibrio interno del cuerpo a estudiar, se supone la hipótesis que el material es homogéneo e isótropo, que la materia que lo constituye es un medio continuo y que ocupa un dominio continuo y limitado del espacio.

Bajo la acción de las fuerzas exteriores, el cuerpo se deforma pero se supone que las deformaciones son lentas y pequeñas, lo que permite despreciar las aceleraciones y admitir, por consiguiente, que en cada instante, el material esta en equilibrio y que su temperatura no varia. Si las deformaciones son pequeñas, el cuerpo vuelve a su forma inicial cuando

* Cabe señalar que es frecuente que la tensión resultante se le coloque encima del símbolo **T** la letra **n**, para indicar que dicho esfuerzo está actuando sobre un plano cuya normal es **n**.

cesan de actuar las fuerzas exteriores. Se llama “medio elástico” a un medio material que cumpla esta hipótesis.

Para las ecuaciones de equilibrio interno, se trata de estudiar un sólido ideal continuo, en la que, con arreglo a la hipótesis y teoría de la mecánica racional, todas y cada una de las partículas están en equilibrio bajo la acción de fuerzas exteriores que directamente actúen sobre ellas y las que, sobre su superficie en contacto con el resto del sólido, ejerza este (Fig. II-2).

Considérese, dentro del sólido, un paralelepípedo recto elemental (fig. II-3), con sus aristas paralelas a tres ejes de coordenados ortogonales arbitrarios XX, YY, ZZ, de modo que las aristas de dicho paralelepípedo elemental sean dx, dy, dz. Este paralelepípedo puede estar sometido a fuerzas actuando sobre cada una de sus caras, y además puede soportar la acción de fuerzas de masa.

Cada una de estas fuerzas, la que actúa sobre el volumen interior del paralelepípedo y las que actúan sobre cada una de las caras del mismo, pueden descomponerse en sus proyecciones o componente según los tres ejes.

Sobre cada cara se tendrá una componente normal a ella y dos componentes situadas en la misma o componentes cortantes, perpendiculares entre si.

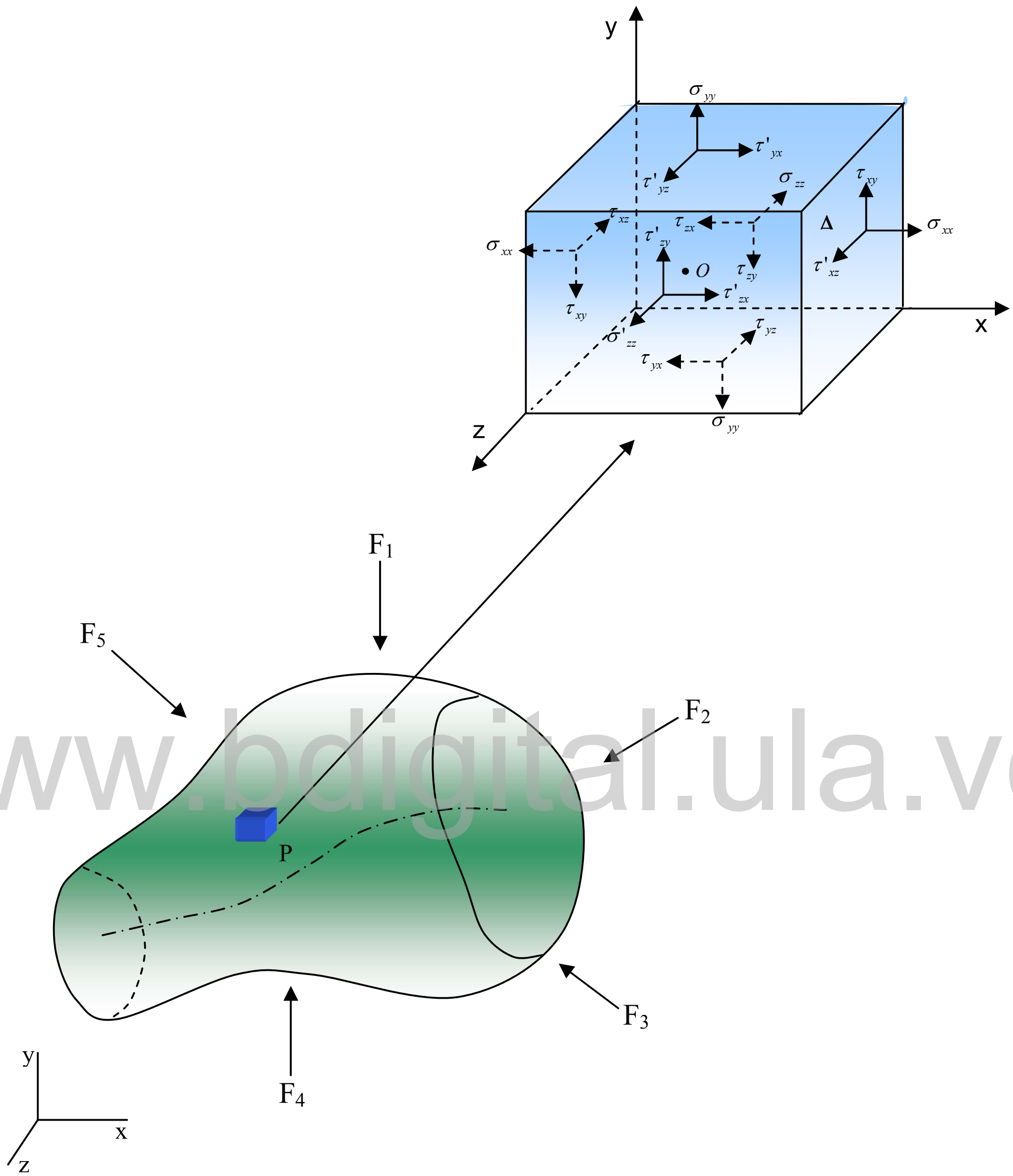


Fig. II-2. Fuerzas que actúan sobre un paralelepípedo en equilibrio.

Sean $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ $las\ \ tensiones\ \ normales$ por unidad de superficie con un doble subíndice, el primer subíndice indica la dirección normal al plano donde actúa el esfuerzo, y el segundo subíndice la dirección del eje, el cual es paralelo la componente normal del esfuerzo. Lógicamente en el caso particular de las tensiones normales ambos subíndices coinciden. $Las\ \ tensiones\ \ cortantes,$ se designan con los símbolos $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ son las componentes por unidad de superficie tangenciales, caracterizándose también por el doble subíndice. Nuevamente, el primero indica la dirección normal al plano en que actúa la componente tangencial del esfuerzo, cuya dirección es paralela al eje que indica el segundo subíndice.

Estas nueve componentes definen completamente el estado de esfuerzos en un punto de un sólido, en el sentido de que, una vez conocido el vector de esfuerzo en un plano cualquiera de normal **n** que pase por ese punto debe determinarse.

Por comodidad estas componentes suelen escribirse en forma matricial como:

$$\sigma = \overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-3)}$$

Donde $\sigma = \overline{\overline{\sigma}}$ es llamada matriz de esfuerzo.

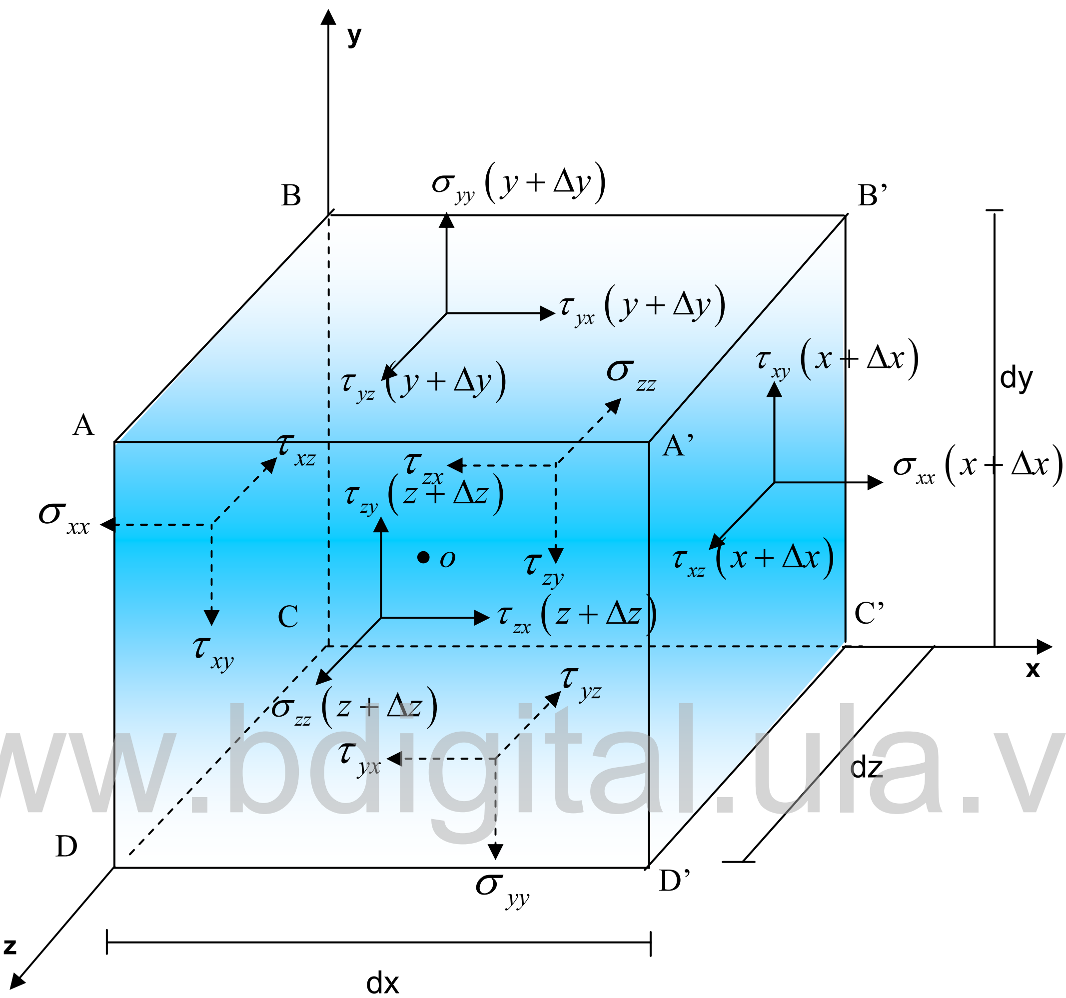


Fig. II-3 Componentes de la matriz de esfuerzos

En forma indicial, la matriz de esfuerzo puede escribirse como sigue:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{(b -II-3)}$$

Se tienen en la fig. II-3 sobre las tres caras consideradas planos yz, xz, xy, las nueves tensiones siguientes: tres tensiones normales $\left(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}\right)$ y seis cortantes $\left(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}\right)$. Al aplicar la condición de momentos, estas seis tensiones cortantes se transforman en tres, por cuanto $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ y $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Las tensiones de las tres caras opuestas del paralelepípedo se reducen de las anteriores por desarrollo de Taylor observando que en cada cara el incremento es: (x+dx), para la cara A'B'C'D'; (y+dy), para la cara ABA'B', y (z+dz), para la cara ADA'D'.

Se tendrá así en la cara A'B'C'D', al aplicar la expansión de Taylor:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}\left(x+\Delta x\right) &= \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \\
\tau_{xy}\left(x+\Delta x\right) &= \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \qquad \text{(II-4)} \\
\tau_{xz}\left(x+\Delta x\right) &= \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx
\end{aligned}$$

Luego, en la cara ABB'A' las tensiones serán:

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}\left(y+\Delta y\right) &= \sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \\
\tau_{yx}\left(y+\Delta y\right) &= \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \qquad \text{(II-5)} \\
\tau_{yz}\left(y+\Delta y\right) &= \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy
\end{aligned}$$

Posteriormente, en la cara AA'DD' las tensiones serán:

$$\sigma_{zz}\left(z+\Delta z\right)=\sigma_{zz}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}dz$$
$$\tau_{zx}\left(z+\Delta z\right)=\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz \qquad \text{(II-6)}$$
$$\tau_{zy}\left(z+\Delta z\right)=\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz$$

Las fuerzas másicas que actúan sobre el paralelepípedo es, en general, el peso propio con resultantes que consideramos aplicada en el centro de gravedad del mismo en virtud de la continuidad. Se designa con X, Y, Z las componentes de las fuerzas másicas por unidad de volumen.

El paralelepípedo está equilibrado bajo la acción de las tensiones citadas que actúan sobre las caras y las fuerzas másicas que actúan en el punto "o", centro de gravedad. Este equilibrio supone el planteamiento de seis ecuaciones: tres relativas a traslación y tres respecto a rotación.

Así, por ejemplo la ecuación de equilibrio de momentos respecto a un eje paralelo a (y), el cual pasa por el punto (o), es:

$$\tau_{xz}dzdy\frac{dx}{2}+\tau\left(x+\Delta x\right)dzdy\frac{dx}{2}-\tau_{zx}dydx\frac{dz}{2}-\tau\left(x+\Delta x\right)dydx\frac{dz}{2}=0 \qquad \text{(II-7)}$$

Es decir:

$$\tau_{xz}dzdydx+\left(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx\right)dzdydx-\tau_{zx}dydxdz-\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}dx\right)dydxdz=0 \qquad \text{(II-8)}$$

Al simplificar se obtiene que, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Por lo tanto, para que una partícula cualquiera del cuerpo esté en equilibrio, es necesario y suficiente que sean nulos los momentos de la componente de esfuerzos respecto a los tres ejes, y que sean nulos las sumas de las proyecciones sobre cada uno de los tres ejes de todas las componentes normales y cortantes por unidad de superficie que actúan sobre el elemento. En estas condiciones al considerar que:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \\ &\sum F_y = 0 \\ &\sum F_z = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II-9)}$$

Se obtienen las ecuaciones de equilibrio interno. Teniendo en cuenta la primera ecuación, es decir, $\sum F_x = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} &-\sigma_{xx}dydz + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz - \tau_{yx}dxdz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz \\ &-\tau_{zx}dxdy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy + Xdxdydz = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II-10)}$$

Realizando el mismo procedimiento con $\sum F_y = 0$ y $\sum F_z = 0$ se obtienen las ecuaciones de equilibrio de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+Z=0\end{aligned}} \tag{II-11}$$

En forma indicial la ecuación anterior puede expresarse como sigue:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+X_i=0^{*}\;\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+X_1=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}+X_2=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+X_3=0\end{cases} \tag{II-12}$$

Donde: X_1=X, X_2=Y, y X_3=Z.

2.3- Transformación de las Componentes de Esfuerzos:

Al analizar la estabilidad de taludes, es de vital importancia conocer el tensor de esfuerzos actuando sobre el plano potencial de rotura, por lo tanto se requiere hallar las componentes del esfuerzo referido a los nuevos ejes en función de los cosenos directores.

Al observar la fig. II-4, y considerando el caso bidimensional la matriz de rotación $\overline{\overline{R}}$, utilizando los mencionados cosenos directores es:

---

* También puede expresarse como:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=\sigma_{ij,j}\quad\therefore\quad\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$$

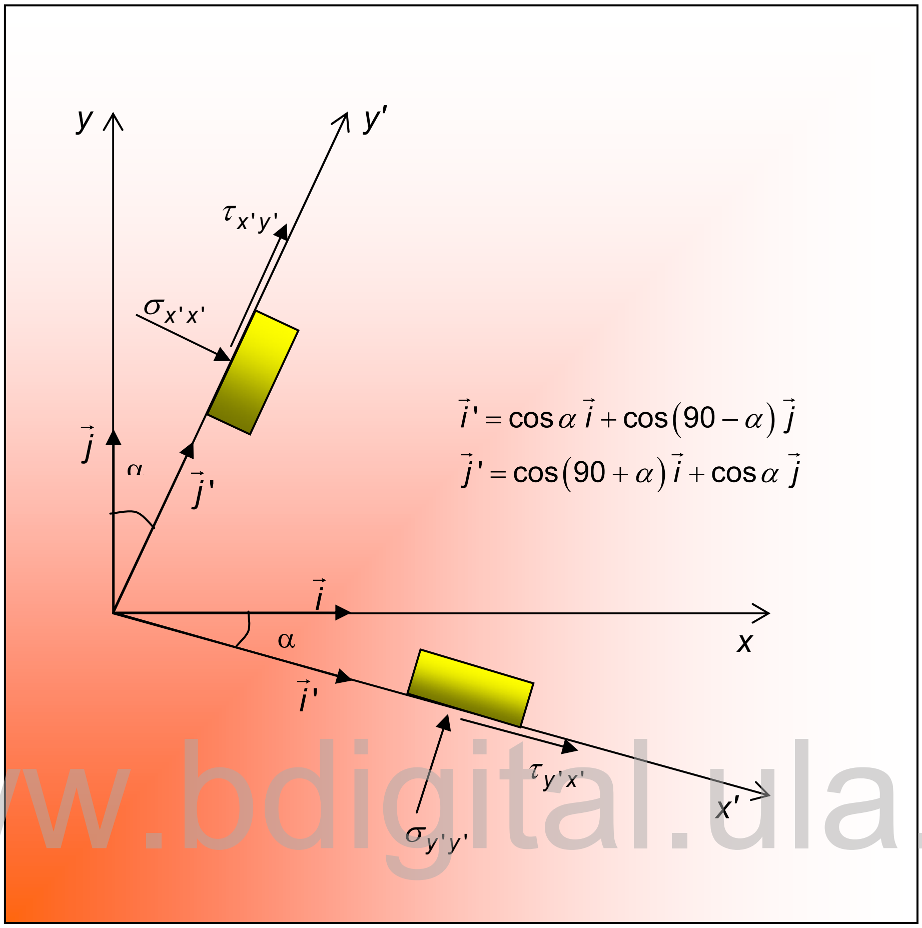


Fig. II-4 Representación gráfica de la rotación de ejes.

$$\overline{\overline{R}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(90-\alpha) \\ \cos(90+\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \qquad \text{(II-13)}$$

Por lo tanto, los nuevos componentes del esfuerzo en el sistema coordenado rotado en el plano x', y', se determinan a través de la expresión:

$$\overline{\overline{\sigma}}' = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overline{\overline{R}}^T \qquad \text{(II-14)}$$

Siendo:

$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}_{xy} =$ Matriz de esfuerzos referida al plano xy. Es decir, la matriz que define el estado tensional referido al sistema de referencia.

$\overline{\overline{R}}$ = Matriz rotación.

$\overline{\overline{R}}^{T}$ = Transpuesta de la matriz rotación.

$\overline{\overline{\sigma}}' = \overline{\overline{\sigma}}_{x'y'} =$ Matriz de esfuerzo referida al plano x'y'.

Expandiendo la expresión anterior:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{\sigma}}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{R}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{\sigma}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{R}}^{T}} \tag{II-15}$$

Una forma sencilla de obtener cada componente de los esfuerzos es a través de las expresiones siguientes:

$$\sigma_{x'x'} = \bar{i}' \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \bar{i}'^{T} \tag{II-16}$$

$\bar{i}' =$ Vector fila = $\begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(x',y) \end{bmatrix}$

$\bar{i}'^{T} =$ Transpuesta de $\bar{i}'$ = $\begin{bmatrix} \cos(x',x) \\ \cos(x',y) \end{bmatrix}$

$$\sigma_{y'y'} = \bar{j}' \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \bar{j}'^{T} \tag{II-17}$$

$\bar{j}' =$ Vector fila = $\begin{bmatrix} \cos(y',x) & \cos(y',y) \end{bmatrix}$

$\bar{j}'^{T} =$ Transpuesta de $\bar{j}'$ = $\begin{bmatrix} \cos(y',x) \\ \cos(y',y) \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= \bar{i}'\cdot\bar{\bar{\sigma}}\cdot\bar{j}'^{T} \\ \tau_{y'x'} &= \bar{j}'\cdot\bar{\bar{\sigma}}\cdot\bar{i}'^{T}\end{aligned}\right\}\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} \qquad \text{(II-18)}$$

Por lo tanto, $\sigma_{x'x'} = \bar{i}'\cdot\bar{\bar{\sigma}}\cdot\bar{i}'^{T}$

$$\sigma_{x'x'} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\end{bmatrix} \qquad \text{(II-19)}$$

Empleando las relaciones trigonométricas, y teniendo en cuenta que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, se obtiene que:

$$\boxed{\sigma_{x'x'} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)\cos(2\alpha)+\tau_{xy}\cdot 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} \qquad \text{(II-20)}$$

Siguiendo igual procedimiento, $\sigma_{y'y'} = \bar{j}'\cdot\bar{\bar{\sigma}}\cdot\bar{j}'^{T}$, resultando:

$$\sigma_{y'y'} = \begin{bmatrix}-\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\end{bmatrix} \qquad \text{(II-21)}$$

$$\boxed{\sigma_{y'y'} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_{yy}-\sigma_{xx}\right)\cos(2\alpha)-2\cdot\tau_{xy}\, sen(\alpha)\cos(\alpha)} \qquad \text{(II-22)}$$

Igualmente, el esfuerzo cortante o de cizalla es, $\tau_{x'y'} = \bar{i}'\cdot\bar{\bar{\sigma}}\cdot\bar{j}'^{T}$

$$\tau_{x'y'} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\end{bmatrix} \qquad \text{(II-23)}$$

A través de la multiplicación de matrices, y aplicando las relaciones trigonométricas, se obtiene que:

$$\tau_{x'y'} = \frac{-\sigma_{xx}\sin(2\alpha)}{2} + \frac{\sigma_{yy}\sin(2\alpha)}{2} + \tau_{xy}\left[\cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)\right] \qquad \text{(II-24)}$$

Como $\left[\cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)\right] = \cos(2\alpha)$ resulta:

$$\boxed{\tau_{x'y'} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\right)\sin(2\alpha) + \tau_{xy}\cos(2\alpha)} \qquad \text{(II-25)}$$

Igualmente, observando la fig. II-5, el esfuerzo normal actuando en un plano arbitrario se obtiene en forma matricial a través de la expresión:

$$\sigma_{nn} = \overline{n} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overline{n}^T \qquad \text{(II-26)}$$

Siendo:

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

$$\sigma_{nn} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{pmatrix} \overline{\overline{\sigma}} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

2.4− Tensión o Esfuerzo Correspondiente a un Plano de Orientación Arbitraria:

Considerando un punto “o” en el interior de un cuerpo y los tres planos perpendiculares fig.II-5. Se supone conocidas las tensiones correspondientes a esos planos, paralelos a los planos coordenados, en las proximidades del punto "o" (a una distancia infinitamente pequeña del mismo), entonces resulta el tetraedro infinitesimal mostrado en la fig. II-6 (llamado tetrahedro de Cauchy).

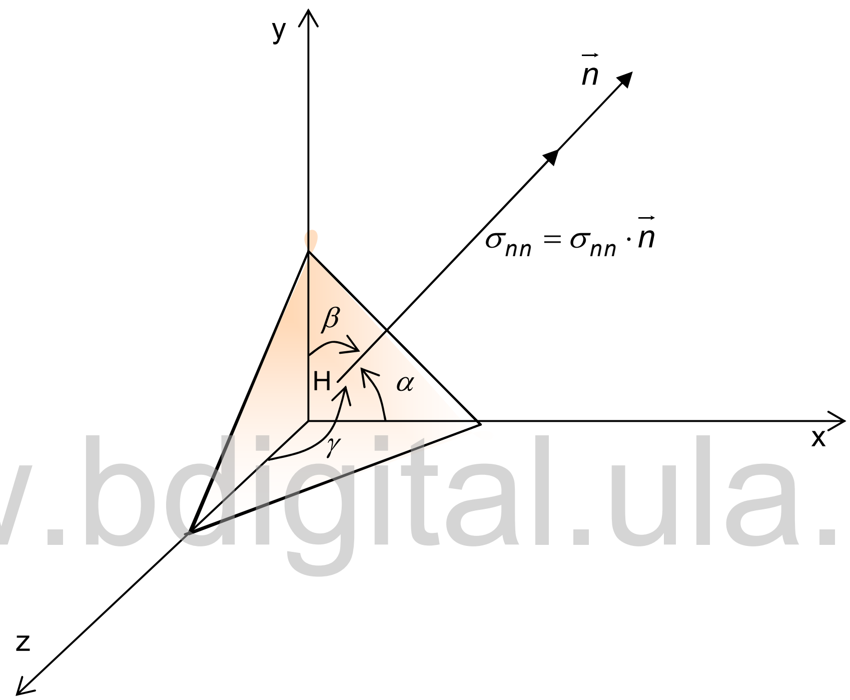


Fig. II-5. Representación del esfuerzo normal correspondiente a un plano de orientación arbitraria.

En la fig. II-6 Se detallan las seis componentes de los esfuerzos referidos al plano x, y, z, y se desea conocer la tensión correspondiente al plano ABC de orientación arbitraria, cuya normal al plano está definida por los ángulos *α, β* y *γ* que forma con los ejes x, y, z, es decir, $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k} = \cos(n,x)\vec{i} + \cos(n,y)\vec{j} + \cos(n,z)\vec{k}$

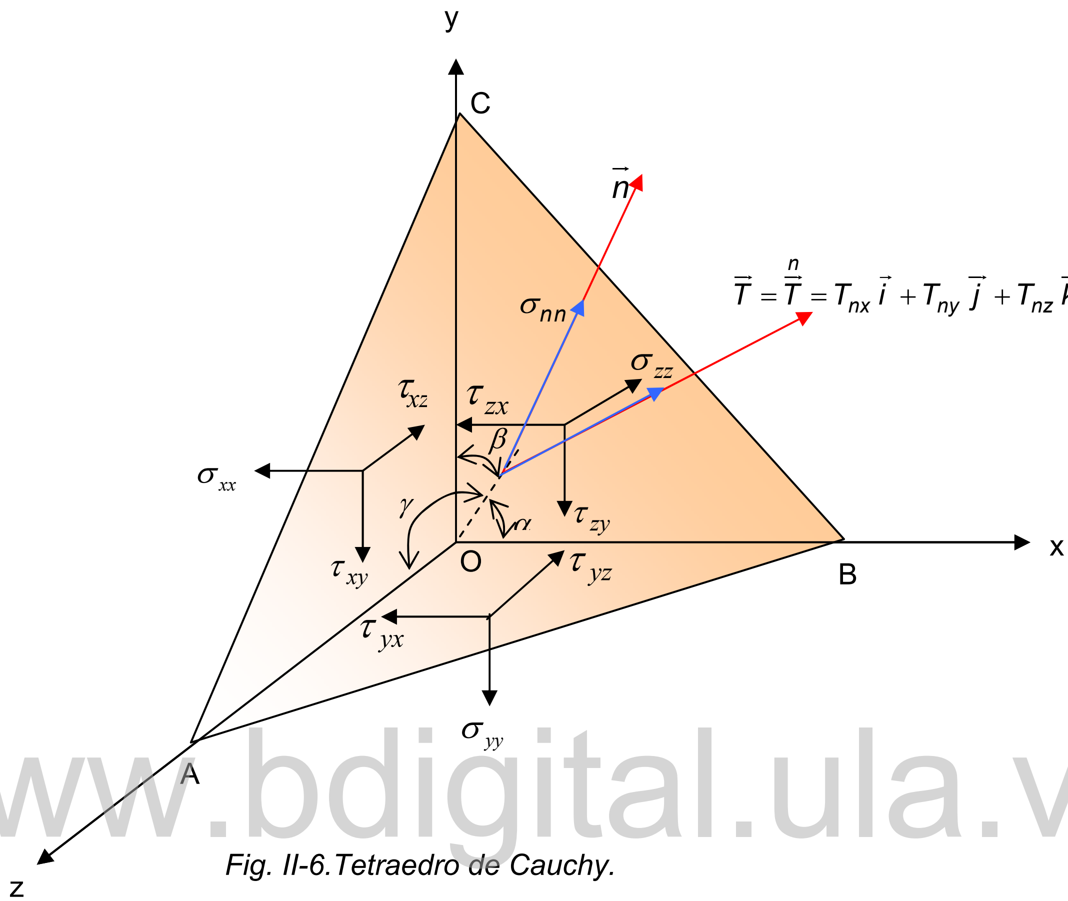


Fig. II-6.Tetraedro de Cauchy.

Para que el tetraedro esté en equilibrio, la suma de las componentes paralelas a cada eje debe ser nula. Adicionalmente se ha considerado que los momentos son infinitésimos de tercer orden, así como las fuerzas de volumen.*

* $\lim_{h\to 0}\frac{X\cdot h\cdot dA}{3}=\frac{Y\cdot h\cdot dA}{3}=\frac{Z\cdot h\cdot dA}{3}=0$, donde X, Y, Z, indican las fuerzas por unidad de volumen en la dirección x, y, z respectivamente.

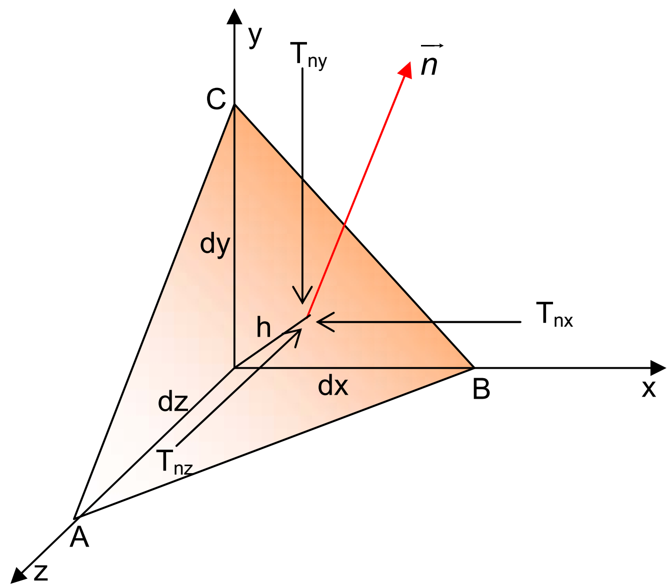


Fig. II-7 Representación de las tres componentes del esfuerzo resultante $\vec{T}^{n}$.

Las áreas de las caras del tetraedro paralelos a los planos coordenados son las proyecciones ortogonales del área ΔA del triángulo ABC, es decir, tienen valores:

Área del plano OBC= ΔAcos(α)
Área del plano OAC= ΔAcos(β) (II-27)
Área del plano OAB= ΔAcos(γ)

Planteando las ecuaciones de equilibrio en el tetraedro, realizando las sumatorias de fuerzas con respecto a x, y e z, se tiene:

$$\sum F_x = 0$$
$$\sigma_{xx}\Delta A\cos\alpha + \tau_{yx}\Delta A\cos\alpha + \tau_{zx}\Delta A\cos\alpha - T_{nx}\Delta A = 0 \qquad \text{(II-28)}$$

Se divide la expresión anterior entre el ΔA quedando:

$$T_{nx} = \sigma_{xx}\cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma \tag{II-29}$$

Siguiendo igual procedimiento en y, z, como puede verse en la fig. II-7 resulta:

$$\begin{aligned} T_{ny} &= \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_{yy}\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma \\ T_{nz} &= \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_{zz}\cos\gamma \end{aligned} \tag{II-30}$$

Por cuanto $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ y $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, es preferible por tanto escribir las ecuaciones (II-29) y (II-30) considerando que el segundo subíndice corresponde a la dirección del eje al cual es paralela, es decir:

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_{xx}\cos(n,x) + \tau_{xy}\cos(n,y) + \tau_{xz}\cos(n,z) \\ T_{ny} &= \tau_{yx}\cos(n,x) + \sigma_{yy}\cos(n,y) + \tau_{yz}\cos(n,z) \\ T_{nz} &= \tau_{zx}\cos(n,x) + \tau_{zy}\cos(n,y) + \tau_{zz}\cos(n,z) \end{aligned} \tag{II-31}$$

Simplificando:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} T_{nx} & T_{ny} & T_{nz} \end{pmatrix}}_{\bar{\bar{T}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(n,x) & \cos(n,y) & \cos(n,z) \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{n}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}}_{\bar{\bar{\sigma}}} \tag{II-32}$$

Esta ecuación es denominada *Fórmula de Cauchy*. Dicha fórmula permite determinar el vector de esfuerzo o la tensión en un punto dado del sólido para cada normal **n** siempre que se conozca la matriz esfuerzo en ese punto.

Introduciendo la notación indicial, y utilizando la convención sumatoria de Einstein por medio de la cual habrá que sumar cuando un subíndice aparece dos veces en cualquier expresión. Si el subíndice aparece una sola vez se llama subíndice libre y toma cada uno de los valores 1,2,3 sin implicar suma. Por lo tanto es posible escribir la ecuación (II-32) en forma indicial como sigue:

$$\overset{n}{T}_i = \sigma_{ij} n_j \tag{II-33}$$

$$\overset{n}{T}_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = T_{nx}$$
$$\overset{n}{T}_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 = T_{ny}$$
$$\overset{n}{T}_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 = T_{nz}$$

Siendo,

$$\left|\overset{n}{T}\right| = \sqrt{\left(\overset{n}{T}_1\right)^2 + \left(\overset{n}{T}_2\right)^2 + \left(\overset{n}{T}_3\right)^2} = \sqrt{(Tnx)^2 + (Tny)^2 + (Tnz)^2} \tag{II-34}$$

Usando la convención sumatoria, teniendo en cuenta la ecuación II-2, queda

$$\sigma_{nn} = \overset{n}{T}_i n_i \tag{II-35}$$

Es decir,

$$\sigma_{nn} = \overset{n}{T}_1 n_1 + \overset{n}{T}_2 n_2 + \overset{n}{T}_3 n_3 \tag{II-36}$$

Igualmente sustituyendo $\overset{n}{T}_i = \sigma_{ij} n_j$ en σ_{nn} resulta:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{ij} n_j n_i \tag{II-37}$$

Aplicando la convención sumatoria, queda:

$$\sigma_{nn} = \sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j n_i \right] \tag{II-38}$$

$$\sigma_{nn} = \sum_{i=1}^{3} \left[\sigma_{i1} n_1 n_i + \sigma_{i2} n_2 n_i + \sigma_{i3} n_3 n_i \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} = {} & \sigma_{11} n_1 n_1 + \sigma_{12} n_2 n_1 + \sigma_{13} n_3 n_1 \\ & + \sigma_{21} n_1 n_2 + \sigma_{22} n_2 n_2 + \sigma_{23} n_3 n_2 \\ & + \sigma_{31} n_1 n_3 + \sigma_{32} n_2 n_3 + \sigma_{33} n_3 n_3 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{11} n_1^{\,2} + \sigma_{22} n_2^{\,2} + \sigma_{33} n_3^{\,2} + 2\left[\sigma_{12} n_2 n_1 + \sigma_{23} n_3 n_2 + \sigma_{31} n_1 n_3 \right] \tag{II-39}$$

Siendo,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{II-40}$$

La componente cortante τ viene dada por:

$$\overset{n}{T}{}^{2} = \sigma_{nn}^{\;2} + \tau_{nt}^{\;2} \tag{II-41}$$

2.5– Ejemplos de Aplicación:

2.5.1– Ejemplo1:

Se requiere calcular los esfuerzos que actúan sobre un plano inclinado $\sigma_{y'y'}$, $\sigma_{x'x'}$, $\tau_{x'y'}$ sabiendo que:

$\sigma_{y'y'} = \sigma_{nn}$ y $\tau_{y'x'} = \tau_{nt}$

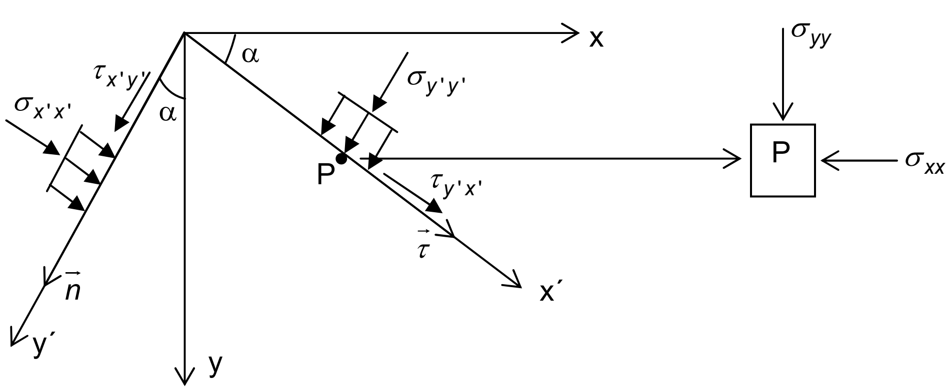
$\alpha = 30º$

$c = 5,00\,kN/m^2$
$\phi = 32º$
Parámetros que gobiernan la resistencia al corte del suelo.

$\sigma_{yy} = \gamma h = 24,00\,kN/m^3 * 20,00m = 480,00\,kN/m^2$

$\sigma_{xx} = 1/2 * \sigma_{yy} = 1/2 * 480,00\,kN/m^2 = 240,00\,kN/m^2$

$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$



Sustituyendo los datos en las ecuaciones (II-17, II-21, II-25) se hallan los esfuerzos:

$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{nn} = \frac{1}{2}(240,00 + 480,00) + \frac{1}{2}(480,00 - 240,00)\cos(2*30)$$

$$\boxed{\sigma_{y'y'} = \sigma_{nn} = 420,00\, kN/m^2}$$

$$\sigma_{x'x'} = \frac{1}{2}(240,00 + 480,00) + \frac{1}{2}(240,00 - 480,00)\cos(2*30)$$

$$\boxed{\sigma_{x'x'} = 300,00 kN/m^2}$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2}(480,00 - 240,00)\sin(2*30) \Rightarrow \frac{120\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\tau_{x'y'} = 103,92\, kN/m^2}$$

Calculando el factor de seguridad:

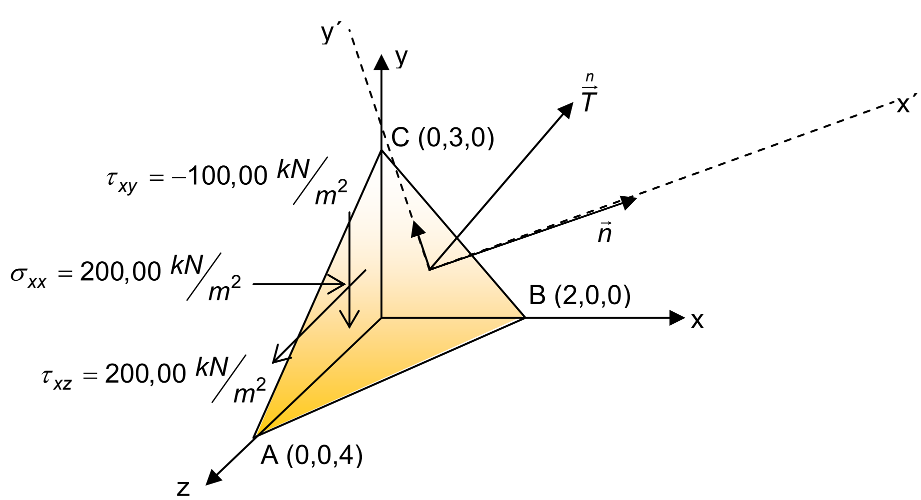
$$FS = \frac{c + \sigma_{y'y'}\tan\phi}{\tau_{x'y'}} \Rightarrow Fs = \frac{5,00 + 420,00\tan(32^{o})}{60\sqrt{3}}$$

$$\boxed{FS = 2,57}$$

Es decir, el suelo es estable en el punto (P) investigado.

2.5.2- Ejemplo 2:

Hallar σ_{nn} ; $\overset{n}{T}$ y τ_{nt} actuando sobre el plano ABC de la figura anexa.



La matriz de esfuerzo[*2] es:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 200,00 & -100,00 & 300,00 \\ -100,00 & 400,00 & 0,00 \\ 300,00 & 0,00 & -100,00 \end{bmatrix} kN/m^2$$

Se halla la ecuación paramétrica del plano:

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

Para el punto A (0, 0,4) $\quad \frac{0}{A} + \frac{0}{B} + \frac{4}{C} = 1 \Rightarrow C = 4$

Para el punto B (2, 0,0) $\quad \frac{2}{A} + \frac{0}{B} + \frac{0}{C} = 1 \Rightarrow A = 2$

Para el punto C (0, 3,0) $\quad \frac{0}{A} + \frac{3}{B} + \frac{0}{C} = 1 \Rightarrow B = 3$

La ecuación del plano es: $\quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

Simplificando la expresión anterior: $\quad 6x + 4y + 3z = 12$

El vector normal ($\overrightarrow{N}$) coincide con x' del sistema girado y es el siguiente:

$$\overrightarrow{N} = 6\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

El vector unitario se halla dividiendo entre el módulo del vector

[*2] Compresión se ha tomado como positivo.

$$\vec{n}=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{6\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{6^2+4^2+3^2}}=\frac{6\hat{i}}{\sqrt{61}}+\frac{4\hat{j}}{\sqrt{61}}+\frac{3\hat{k}}{\sqrt{61}}=$$
$$=\cos(n,x)\vec{i}+\cos(n,y)\vec{j}+\cos(n,z)\vec{k}$$

Ahora se hallan las componentes de $\overset{n}{T}$ a través de la ecuación (II-32)

$$\overset{n}{T}=\bar{n}\cdot\bar{\bar{\sigma}}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix}T_{nx} & T_{ny} & T_{nz}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(n,x) & \cos(n,y) & \cos(n,z)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}T_{nx} & T_{ny} & T_{nz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6/\sqrt{61} & 4/\sqrt{61} & 3/\sqrt{61}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200,00 & -100,00 & 300,00\\ -100,00 & 400,00 & 0,00\\ 300,00 & 0,00 & -100,00\end{pmatrix}$$

Simplificando:

$$\boxed{\begin{bmatrix}T_{nx} & T_{ny} & T_{nz}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1700}{\sqrt{61}} & \frac{1000}{\sqrt{61}} & \frac{1500}{\sqrt{61}}\end{pmatrix}}$$

Expresado en forma vectorial,

$$\vec{T}=\overset{n}{\vec{T}}=\frac{1700}{\sqrt{61}}\vec{i}+\frac{1000}{\sqrt{61}}\vec{j}+\frac{1500}{\sqrt{61}}\vec{k}$$

Ahora se halla el módulo de $\overset{n}{\vec{T}}$

$$\vec{T} = \left|\overset{n}{\vec{T}}\right| = \sqrt{T_{nx}^{\ 2} + T_{ny}^{\ 2} + T_{nz}^{\ 2}}$$

$$\vec{T} = \left|\overset{n}{\vec{T}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1700}{\sqrt{61}}\right)^2 + \left(\frac{1000}{\sqrt{61}}\right)^2 + \left(\frac{1500}{\sqrt{61}}\right)^2} \Rightarrow 317{,}26\, kN/m^2$$

Cálculo del esfuerzo normal:

$$\sigma_{nn} = \bar{n} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n}^T$$

$$\sigma_{nn} = \begin{bmatrix} \cos(n,x) & \cos(n,y) & \cos(n,z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos(n,x) \\ \cos(n,y) \\ \cos(n,z) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{nn} = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{61} & 4/\sqrt{61} & 3/\sqrt{61} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200{,}00 & -100{,}00 & 300{,}00 \\ -100{,}00 & 400{,}00 & 0{,}00 \\ 300{,}00 & 0{,}00 & -100{,}00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/\sqrt{61} \\ 4/\sqrt{61} \\ 3/\sqrt{61} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_{nn} = 306{,}55\, kN/m^2}$$

Cálculo del esfuerzo cortante:

Sabiendo que: $T^2 = \sigma_{nn}^{\ 2} + \tau_{nt}^{\ 2}$

$$\tau_{nt} = \sqrt{T^2 - \sigma_{nn}^{\ 2}}$$

$$\boxed{\tau_{nt} = 81{,}74\, kN/m^2}$$

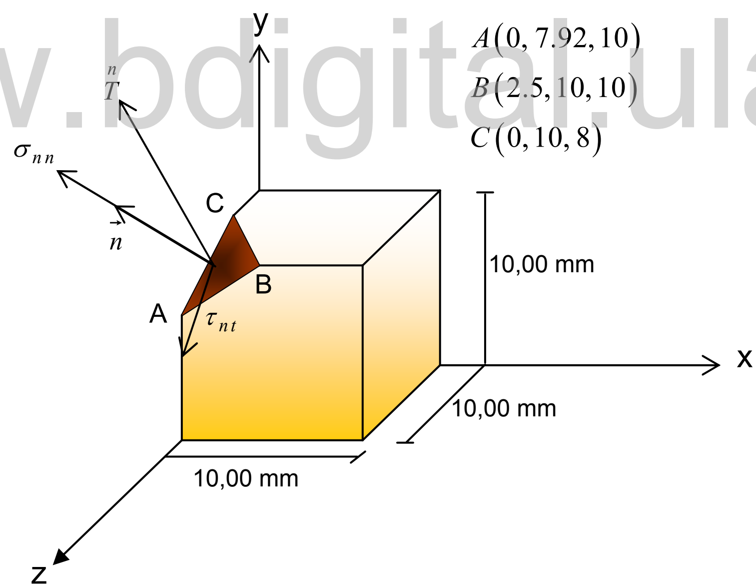
Determinación del factor de seguridad:

$$FS = \frac{C + \sigma_{nn} \tan\phi}{\tau_{nt}} = \frac{5{,}00 + 306{,}55 \tan(32^{o})}{81{,}74} = \frac{196{,}55}{81{,}74} = 2{,}40$$

Se observa que no hay rotura por cuanto los esfuerzos cortantes resistentes son mayores a los esfuerzos actuantes.

2.5.3- Ejemplo 3:

Un cuerpo consiste en un cubo de 10 mm. de lado, como puede verse en la figura anexa. La fuerza resultante actuando sobre el plano ABC es: $\vec{F} = -10i + 2k \quad N$. Determinar σ_{nn}, $\overset{n}{T}$ y τ_{nt}.



Solución: se determinan dos vectores del plano ABC:

$$\overrightarrow{AB} = 2{,}50\vec{i} + 2{,}08\vec{j}, \quad \overrightarrow{AC} = 2{,}08\vec{i} + 2{,}00\vec{k}$$

El vector normal al plano es:

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2,50 & 2,08 & 0,00 \\ 0,00 & 2,08 & -2,00 \end{vmatrix} = -4,16\vec{i} + 5,00\vec{j} + 5,20\vec{k}$$

Por otra parte, se sabe que:

$$\left|\vec{N}\right| = 2 \cdot Area = \left(4,16^2 + 5,00^2 + 5,20^2\right) = 8,33\,mm^2$$

Donde:

$$Area = 4,16mm^2 = 4,16 \times 10^{-6}\,m^2$$

Siendo, el vector unitario:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = 0,50\vec{i} + 0,60\vec{j} + 0,63\vec{k}$$

Las componentes de la fuerza normal y cortante son:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = F_n = \left(-10,00\vec{i} + 2,00\vec{k}\right) \cdot \left(0,50\vec{i} + 0,60\vec{j} + 0,63\vec{k}\right) = 6,25N$$

$$F_t = \sqrt{F^2 - F_n{}^2} = \sqrt{10,20^2 - 6,25^2} = 8,07N$$

Finalmente, los valores medios del esfuerzo resultante $\overset{n}{T}$, esfuerzo normal σ_{nn} y cortante τ_{nt}, actuando sobre el plano ABC son:

$$\left|\overset{n}{T}\right| = \frac{F}{Area} = 2,45MPa, \quad \sigma_{nn} = \frac{F_n}{Area} = 1,15MPa, \quad \tau_{nt} = \frac{F_t}{Area} = 1,94MPa$$

3.-Método Analítico para Determinar la Distribución de los Esfuerzos Considerando Rotura Plana:

Se analiza un talud con una inclinación (β), y se quiere determinar el estado tensional referido al nuevo sistema de ejes rotados x', y', tal como se indica en la fig. III-1.

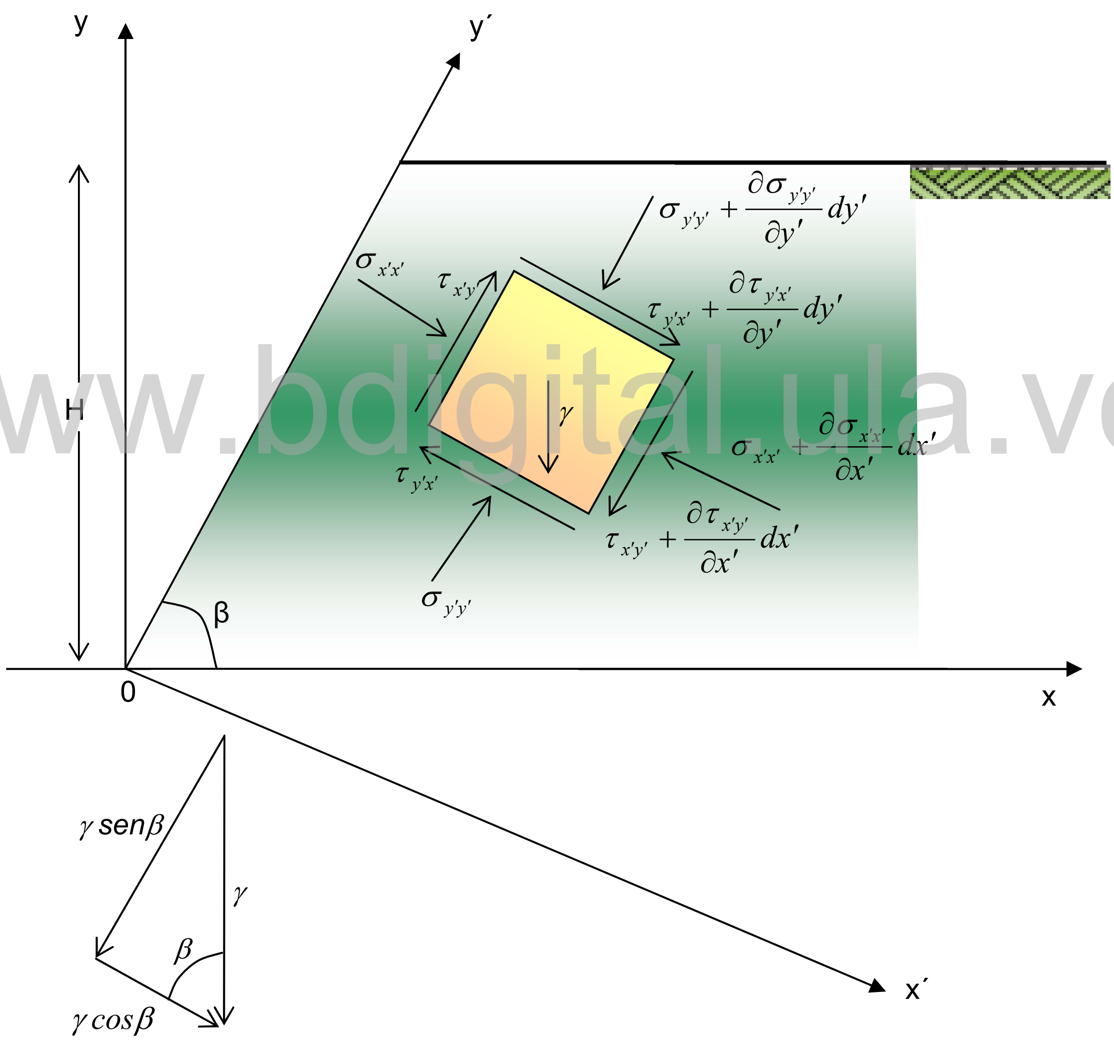


Fig. III-1. Representación de la distribución de los esfuerzos para un talud inclinado.

3.1– Ecuaciones de Equilibrio:

Siguiendo el mismo procedimiento indicado en la sección 2.1, las ecuaciones de equilibrio interno al proyectar las componentes de los esfuerzos que actuan sobre el elemento en cada uno de los ejes x', y', z', se obtienen como sigue:

$$\sum F_{x'} = 0$$

$$\sigma_{x'x'} dy' - \left[\sigma_{x'x'} - \frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} dx' \right] dy' + \tau_{y'x'} dx' - \left[\tau_{y'x'} + \frac{\partial \tau_{y'x'}}{\partial y'} dy' \right] dx' + \gamma \cos \beta \, dx'dy' = 0 \quad \text{(III-1)}$$

Simplificando la ecuación (III-1) queda:

$$\frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{y'x'}}{\partial y'} = \gamma \cos \beta \quad \text{(III-2)}$$

Siguiendo igual procedimiento:

$$\sum F_{y'} = 0$$

$$\sigma_{y'y'} dx' - \left[\sigma_{y'y'} - \frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} dy' \right] dx' + \tau_{y'x'} dx' - \left[\tau_{x'y'} + \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial x'} dx' \right] dy' - \gamma \sin \beta \, dx'dy' = 0 \quad \text{(III-3)}$$

Simplificando la ecuacion (III-3) se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial x'} = -\gamma \sin \beta \quad \text{(III-4)}$$

Realizando la sumatoria de momentos:

$$\sum M_{x'} = 0$$

$$\left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right] dx \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx \frac{dy}{2} - \left[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx\right] dy \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dy \frac{dx}{2} = 0 \qquad \text{(III-5)}$$

Simplifcando la ecuacion (III-5) se obtiene la conocida expresión:

$$\tau_{y'x'} = \tau_{x'y'} \qquad \text{(III-6)}$$

En estas condiciones, el proximo paso es llevar a cabo la transformación de las componentes de esfuerzos en los planos x'y' e x''y'', haciendo coincidir el eje y' con el plano del talud que forma un ángulo β con la horizontal y el eje y'' con el plano potencial de rotura que forma un ángulo α con la horizontal, siendo α < β, por cuanto una de las condiciones geométricas para que ocurra la rotura plana es que: ϕ < α < β, siendo ϕ el ángulo de fricción interna de la masa de suelo o roca.

La matriz rotación del plano x''y'' en función del plano x'y' es :

$$\overline{\overline{R}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta-\alpha) & \cos\left[90+(\beta-\alpha)\right] \\ \cos\left[90-(\beta-\alpha)\right] & \cos(\beta-\alpha) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-7)}$$

Simplificando la ecuación (III-10) se obtiene:

$$\overline{\overline{R}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha) \\ -\sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-8)}$$

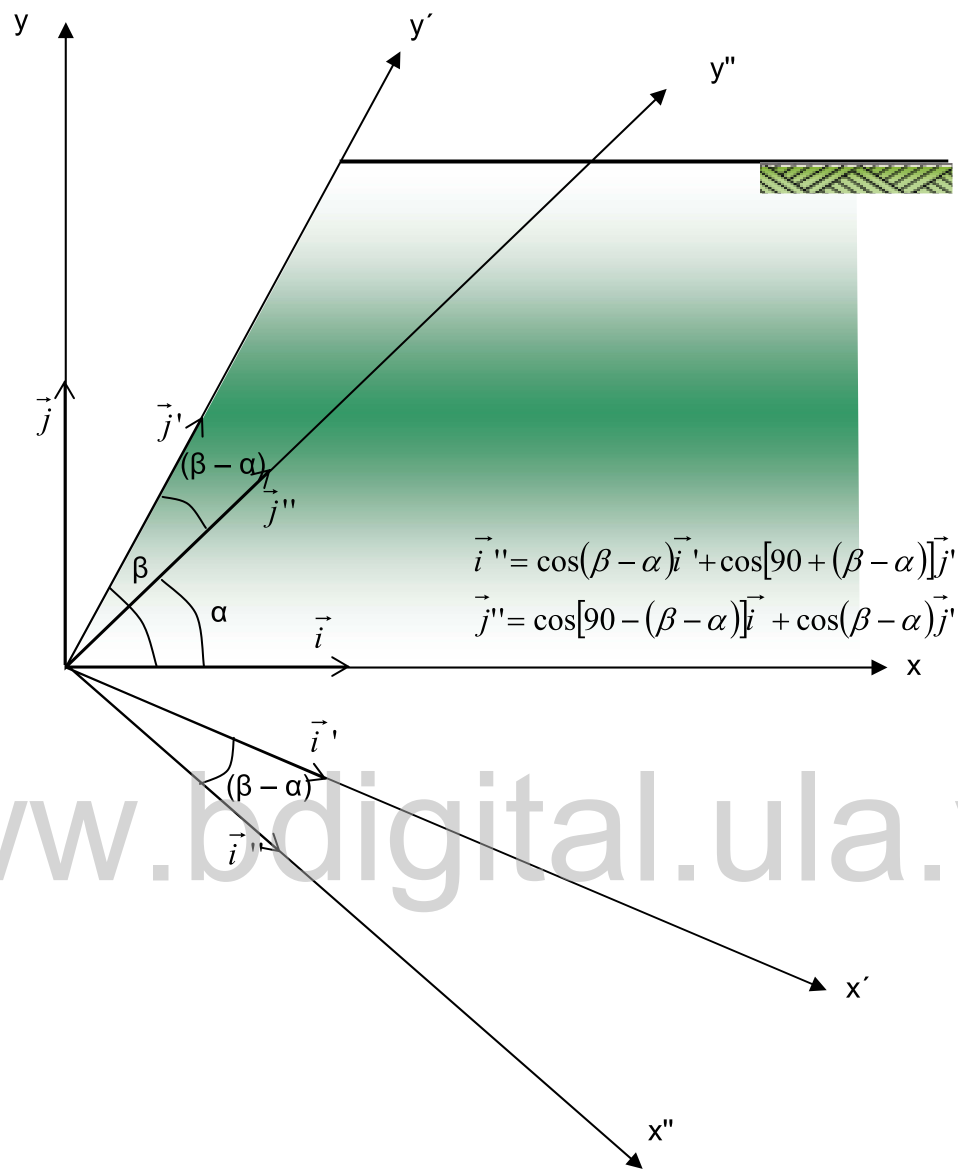


Fig. III-2. Representación gráfica de la rotación de ejes.

La rotación de los ejes trae como resultado que para obtener los esfuerzos en el plano x’’y’’ se debe aplicar la siguiente ecuación. Según Ucar, (2004):

$$\begin{cases} \overline{\overline{\sigma}}\,'' = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{\sigma}}\,' \cdot \overline{\overline{R}}^{T} \\ \overline{\overline{\sigma}}_{x''y''} = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{\sigma}}_{x'y'} \cdot \overline{\overline{R}}^{T} \end{cases} \qquad \text{(III-9)}$$

La ecuación anterior relaciona a los esfuerzos actuando en el plano x''y'' con los esfuerzos del plano x'y' por medio de la matriz de rotación. En forma general la ecuación (III-9), puede expresarse como sigue:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x"x"} & \tau_{x"y"} \\ \tau_{y"x"} & \sigma_{y"y"} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha) \\ -\sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta-\alpha) & -\sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{bmatrix}$$

(III-10)

Por otra parte se sabe que $\overline{\overline{\sigma}}_{x"x"} = \vec{i}\,"\cdot \overline{\overline{\sigma}}_{x'y'} \cdot \vec{i}\,"^{T}$, según Ucar (2004),

$$\sigma_{x"x"} = \begin{bmatrix} \cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-11)}$$

Resolviendo el producto matricial de la ecuación anterior y simplificando queda:

$$\boxed{\sigma_{x"x"} = \sigma_{x'x'} \cos^2(\beta-\alpha) + \sigma_{y'y'} \sin^2(\beta-\alpha) + 2\tau_{x'y'} \sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)} \qquad \text{(III-12)}$$

De la ecuación (III-10) se observa que: $\overline{\overline{\tau}}_{x"y"} = \vec{i}\,"\cdot \overline{\overline{\sigma}}_{x'y'} \cdot \vec{j}\,"^{T}$.

Por lo tanto,

$$\tau_{x"y"} = \begin{bmatrix} \cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\beta-\alpha) \\ \cos(\beta-\alpha) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-13)}$$

Resolviendo las matrices de la ecuación anterior y simplificando se obtiene:

$$\boxed{\tau_{x''y''} = \left[\sigma_{y'y'} - \sigma_{x'x'}\right]\frac{\sin\left[2\left(\beta-\alpha\right)\right]}{2} + \tau_{x'y'}\cos\left[2\left(\beta-\alpha\right)\right]} \qquad \text{(III-14)}$$

De la ecuación (III-10) se halla $\overline{\overline{\sigma}}_{y''y''} = \vec{j}\,''\cdot \overline{\overline{\sigma}}_{x'y'} \cdot \vec{j}\,''^{T}$ obteniendose:

$$\sigma_{y''y''} = \left[-\sin\left(\beta-\alpha\right) \quad \cos\left(\beta-\alpha\right)\right]\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\sin\left(\beta-\alpha\right) \\ \cos\left(\beta-\alpha\right)\end{bmatrix} \qquad \text{(III-15)}$$

Resultando del producto matricial:

$$\boxed{\sigma_{y''y''} = \sigma_{x'x'}\sin^2\left(\beta-\alpha\right) + \sigma_{y'y'}\cos^2\left(\beta-\alpha\right) - 2\tau_{x'y'}\cos\left(\beta-\alpha\right)\sin\left(\beta-\alpha\right)}$$

(III-16)

A continuación se determinan las componentes de los esfuerzos actuando sobre un plano de rotura de inclinación α, que pasa por el pie del talud, de inclinación β y altura H, tal como se muestra en fig. III-3. Por otra parte los valores de las abscisas X_A y X_B de acuerdo a la mencionada figura son:

$$\left.\begin{aligned} X_A &= H\cot\beta \\ X_B &= H\cot\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III-17)}$$

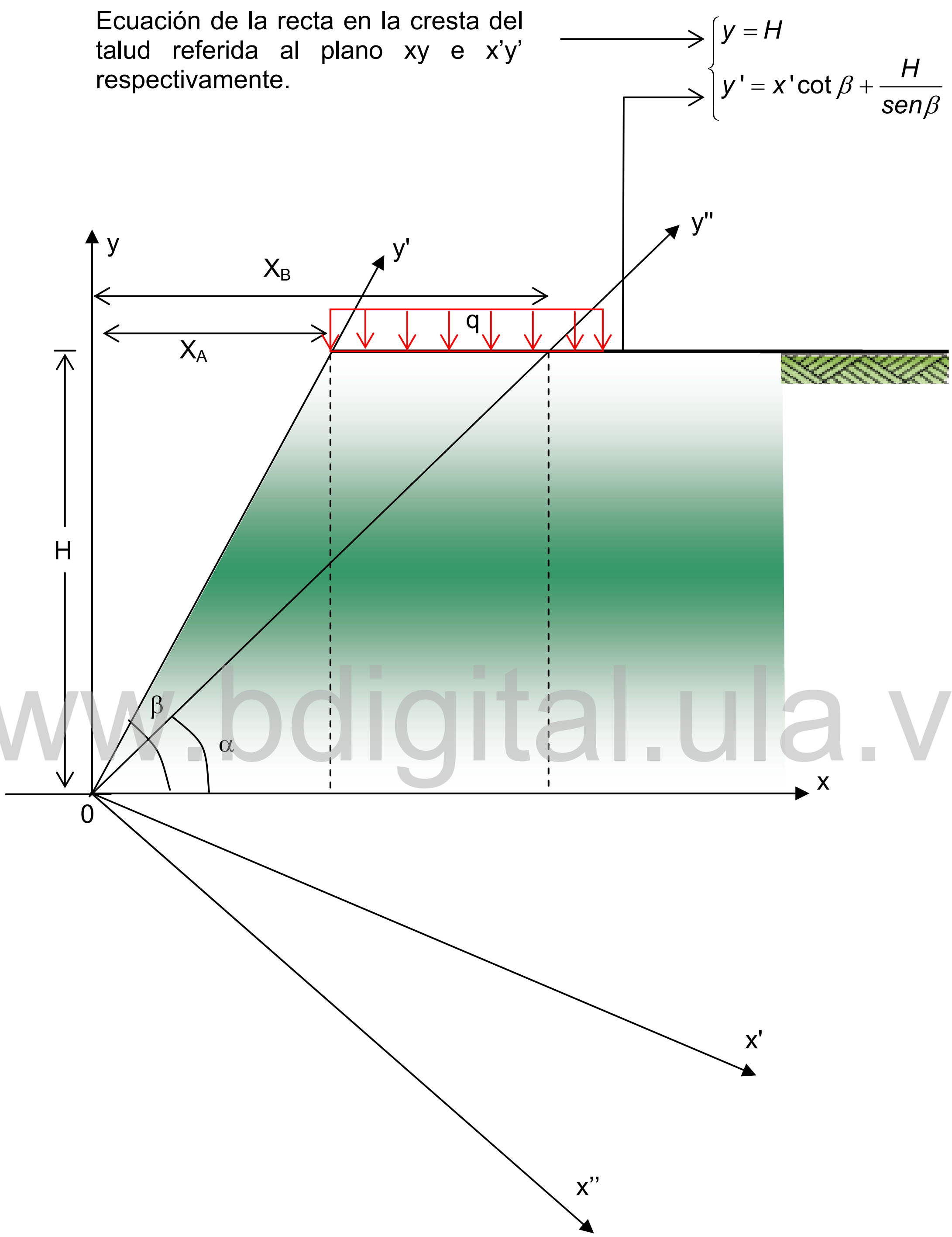


Fig. III-3 Representación de un talud inclinado con superficie de rotura plana.

Con la finalidad de obtener a través de las ecuaiones de equilibrio los valores de las tensiones normales $\sigma_{y'y'}$ y $\sigma_{x'x'}$, previamente se consideran para efectos de simplificar el problema que el esfuerzo cortante es una función lineal de x', así:

$$\tau_{x'y'} = ax' + a_1 \qquad \text{(III-18)}$$

En la cara del talud, es decir, en x'=0, $\left[\tau_{x'y'}\right]_{x'=0} = 0$, por lo tanto $a_1 = 0$, quedando finalmente que:

$$\tau_{x'y'} = ax' \qquad \text{(III-19)}$$

Siendo la constante "a" determinada mediante las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de borde.

Utilizando las ecuaciones de equilibrio(III-2) y (III-4) y sustituyendo la expresion de $\tau_{x'y'}$ obtenida en la ecuación (III-19) en la primera ecuacion de equilibrio (III-2), derivando y simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} + 0 = \gamma \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \sigma_{x'x'} = \int \gamma \cos\beta \, dx' \qquad \text{(III-20)}$$

Integrando la expresion anterior resulta:

$$\sigma_{x'x'} = \gamma \cos\beta \, x' + c \qquad \text{(III-21)}$$

Igualmente, sustituyendo en la ecuación de equilibrio (III-4) la expresión de $\tau_{x'y'}$ obtenida en la ecuacion (III-19) queda:

$$\frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} + a = -\gamma \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \sigma_{y'y'} = \int \left(-\gamma \sin\beta - a\right) dy' \qquad \text{(III-22)}$$

Integrando la expresion anterior el valor de la tensión $\sigma_{y'y'}$ es:

$$\sigma_{y'y'} = \left(-\gamma \sin\beta - a\right) y' + b \qquad \text{(III-23)}$$

Para x'=0; $\sigma_{x'x'} = 0$, esto implica que en la ecuación (III-21) la constante de integracion "c" es igual a cero, por tanto dicha ecuación queda de la forma:

$$\sigma_{x'x'} = \gamma \cos\beta x' \qquad \text{(III-24)}$$

De esta manera al usar las condiciones de contorno se obtienen tres expresiones fundamentales para el problema de estudio:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_{x'x'} = \gamma \cos\beta x' \\ &\sigma_{y'y'} = \left(-\gamma sen\beta - a\right) y' + b \\ &\tau_{x'y'} = ax' \end{aligned}} \qquad \text{(III-25)}$$

3.2–Cálculo de las Constantes de Integración a y b:

El próximo paso se fundamenta en relacionar la matriz de esfuerzos referida al plano xy con la matriz de esfuerzo del sistema rotado x'y'. A través de la ecuación (II-14), se sabe que: $\overline{\overline{\sigma}}_{x'y'} = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{\sigma}}_{xy} \cdot \overline{\overline{R}}^T$. Por otra parte, lo que se desea es obtener $\overline{\overline{\sigma}}_{xy}$ resultando,

$$\overline{\overline{\sigma}}_{xy} = \overline{\overline{R}}^T \cdot \overline{\overline{\sigma}}_{x'y'} \cdot \overline{\overline{R}} \qquad \text{(III-26)}$$

Luego determinando $\sigma_{y'y'} = \bar{j}' \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \bar{j}'^T$, $\sigma_{yy} = \vec{j}^T \cdot \overline{\overline{\sigma}}' \cdot \vec{j}$ queda:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{y'y'} \sin^2\beta + \sigma_{x'x'} \cos^2\beta - 2\tau_{x'y'} \sin\beta\cos\beta \qquad \text{(III-27)}$$

Sustituyendo las tres condiciones de contorno indicadas en las ecuaciones (III-25) en la ecuación (III-27) se obtiene:

$$\sigma_{yy} = \left[-(\gamma\sin\beta + a)y' + b\right]\sin^2\beta + \left[\gamma\cos\beta\, x'\right]\cos^2\beta - 2(ax')\sin\beta\cos\beta \qquad \text{(III-28)}$$

Reemplazando el valor de $y' = x' \cot\beta + H/\sin\beta$ (cresta del talud, ver fig. III-3 y Anexo A), y=H (en el plano xy) en la ecuación (III-28), el esfuerzo normal σ_{yy} en el extremo superior del talud es:

$$\left(\sigma_{yy}\right)_{cresta} = \left[-(\gamma\sin\beta + a)\left(x'\cot\beta + \frac{H}{\sin\beta}\right) + b\right]\sin^2\beta + \left[\gamma\cos\beta\, x'\right]\cos^2\beta - 2(ax')\sin\beta\cos\beta \qquad \text{(III-29)}$$

Simplificando la ecuación anterior:

$$\sigma_{yy} = \left[-\gamma\, x'\cos\beta - ax'\cot\beta - \gamma H - a\frac{H}{\sin\beta} + b \right]\sin^2\beta + \gamma\, x'\cos^3\beta - (ax')\sin 2\beta \tag{III-30}$$

Sacando factor común de x' la ecuación anterior, queda:

$$\sigma_{yy} = x'\left[-\gamma\cos\beta\sin^2\beta - a\cot\beta\sin^2\beta + \gamma\cos^3\beta - a\sin 2\beta \right] + \sin^2\beta\left[-\gamma H\sin^2\beta - a\frac{H}{\sin\beta} + b\sin^2\beta \right] \tag{III-31}$$

De la rotación de ejes del plano x'y' con respecto al plano xy, Apostol (1965) se tiene:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \sin\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix} \tag{III-32}$$

Se resuelve la multiplicación de matrices para hallar x' y y'

$$\begin{aligned} x' &= xsen\beta - y\cos\beta \\ y' &= x\cos\beta + ysen\beta \end{aligned} \tag{III-33}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en σ_{yy} de la ecuación (III-31) se obtiene:

$$\sigma_{yy} = \left[x\sin\beta - y\cos\beta \right]\left[-\gamma\cos\beta\sin^2\beta - a\cot\beta\sin^2\beta + \gamma\cos^3\beta - a\sin 2\beta \right] + \sin^2\beta\left[-\gamma H - a\frac{H}{\sin\beta} + b \right] \tag{III-34}$$

3.2.1− Caso Particular en el que $\sigma_{y'y'}$ y $\sigma_{x'x'}$ son Esfuerzos Principales:

Un caso particular para resolver la ecuación (III-34) es considerando que $\sigma_{y'y'}$ y $\sigma_{x'x'}$ son esfuerzos principales (ver fig. III-4), lo que indica que $\tau_{x'y'} = 0$, y por ende a=0. En estas condiciones, el valor de σ_{yy} para la condición el la cual a=0 es:

$$\sigma_{yy} = \left[x\sin\beta - y\cos\beta\right]\left[-\gamma\cos\beta\sin^2\beta + \gamma\cos^3\beta\right] + \sin^2\beta\left[-\gamma H + b\right] \qquad \text{(III-35)}$$

La constante "b" se determina considerando la condicion de contorno, en el cual el esfuerzo σ_{yy} es igual a la sobrecarga (q), cuando la ordenada (y) es igual a la altura del talud (H), tal como se muestra en la figura (III-4):

$$\sigma_{yy}\Big|_{y=H} = q \qquad \text{(III-36)}$$

Integrando la expresión anterior a lo largo de la cresta del talud donde está aplicada la carga "q" se obtiene:

$$\int_{X_A}^{X_B} \sigma_{yy}dx \quad \Rightarrow \quad \sigma_{yy}\, X\Big|_{X_A}^{X_B} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{yy}\left(X_A - X_B\right) \qquad \text{(III-37)}$$

Sustituyendo los valores de $X_A = H\cot\beta$ y $X_B = H\cot\alpha$ mostrados en la fig. III-3, y $\sigma_{yy} = q$ en la ecuación anterior se tiene:

$$\int_{X_A}^{X_B} \sigma_{yy}\, dx \quad \Rightarrow \quad qH(\cot\beta - \cot\alpha) \qquad \text{(III-38)}$$

Integrando la expresión (III-35) entre los límites X_A y X_B y además sustituyéndole la ecuación (III-38) resulta la siguiente expresión:

$$qH(\cot\beta - \cot\alpha) = \int_{X_A}^{X_B} \left\{ [x\sin\beta - H\cos\beta]\left[\gamma\cos\beta\left(\cos^2\beta - \sin^2\beta\right)\right] + \sin^2\beta\,[-\gamma H + b] \right\} dx \qquad \text{(III-39)}$$

Smplificando la ecuación y separando integrales,

$$qH(\cot\beta - \cot\alpha) = \int_{X_A}^{X_B} x\gamma\sin\beta\cos\beta\cos 2\beta\, dx - \int_{X_A}^{X_B} \gamma H\cos^2\beta\cos 2\beta\, dx + \int_{X_A}^{X_B} [-\gamma H + b]\sin^2\beta\, dx \qquad \text{(III-40)}$$

Al integrar, resulta:

$$q(X_A - X_B) = \gamma\sin\beta\cos\beta\cos 2\beta\left[\frac{{X_A}^2 - {X_B}^2}{2}\right] - \gamma H\cos^2\beta\cos 2\beta(X_A - X_B) + [-\gamma H + b]\sin^2\beta(X_A - X_B) \qquad \text{(III-41)}$$

Simplificando,

$$q = \frac{\gamma\sin 4\beta}{8}(X_A + X_B) - \gamma H\cos^2\beta\cos 2\beta + [-\gamma H + b]\sin^2\beta \qquad \text{(III-42)}$$

Sustituyendo los valores de X_A y X_B en la ecuación anterior y despejando b, se obtiene:

$$\boxed{b=\gamma H+\frac{q}{\sin^2\beta}-\frac{\gamma\sin 4\beta}{8\sin^2\beta}\left(H\cot\beta+H\cot\alpha\right)+\frac{\gamma H\cos^2\beta\cos 2\beta}{\sin^2\beta}} \qquad \text{(III-43)}$$

3.2.2- Cálculo del esfuerzo σ_{nn} para el caso particular que $\sigma_{y'y'}$ y $\sigma_{x'x'}$ son esfuerzos principales.

Para calcular el esfuerzo $\sigma_{x''x''}=\sigma_{nn}$ como se muestra en la fig.(III-4) se ha utilizado la ecuación de equilibrio (III-12), considerando que el esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$ igual a cero. Por lo tanto, para este caso en particular $\sigma_{y'y'}$ y $\sigma_{x'x'}$ son esfuerzos principales,

(III-44)

$$\sigma_{x''x''}=\sigma_{nn}=\sigma_{x'x'}\cos^2\left(\beta-\alpha\right)+\sigma_{y'y'}\sin^2\left(\beta-\alpha\right)$$

Sustituyendo el valor de $\sigma_{x'x'}=\gamma\cos\beta x'$ y $\sigma_{y'y'}=-\gamma sen\beta y'+b$ de las condiciones de contorno indicadas en la ecuación (III-25), queda:

$$\sigma_{nn}=\gamma\cos\beta\, x'Cos^2(\beta-\alpha)+sen^2(\beta-\alpha)\left(-\gamma\sin\beta\, y'+b\right) \qquad \text{(III-45)}$$

Por otra parte, al reemplazar en la en la ecuación anterior el valor de $x'=xsen\beta-y\cos\beta$ y $y'=x\cos\beta+ysen\beta$ indicada en la ecuación III-33 y la expresión de la constante "b" obtenida en la ecuación (III-43), se obtiene:

$$\sigma_{nn} = \gamma \cos\beta\left(x sen\beta - y\cos\beta\right)\cos^2(\beta-\alpha) + \sin^2(\beta-\alpha)\left[-\gamma\sin\beta\left(x\cos\beta + y sen\beta\right) + \gamma H + \frac{q}{\sin^2\beta} + \frac{\gamma H\cos^2\beta\cos 2\beta}{\sin^2\beta} - \frac{\gamma\sin 4\beta}{8\sin^2\beta}\left(H\cot\beta + H\cot\alpha\right)\right] \quad \text{(III-46)}$$

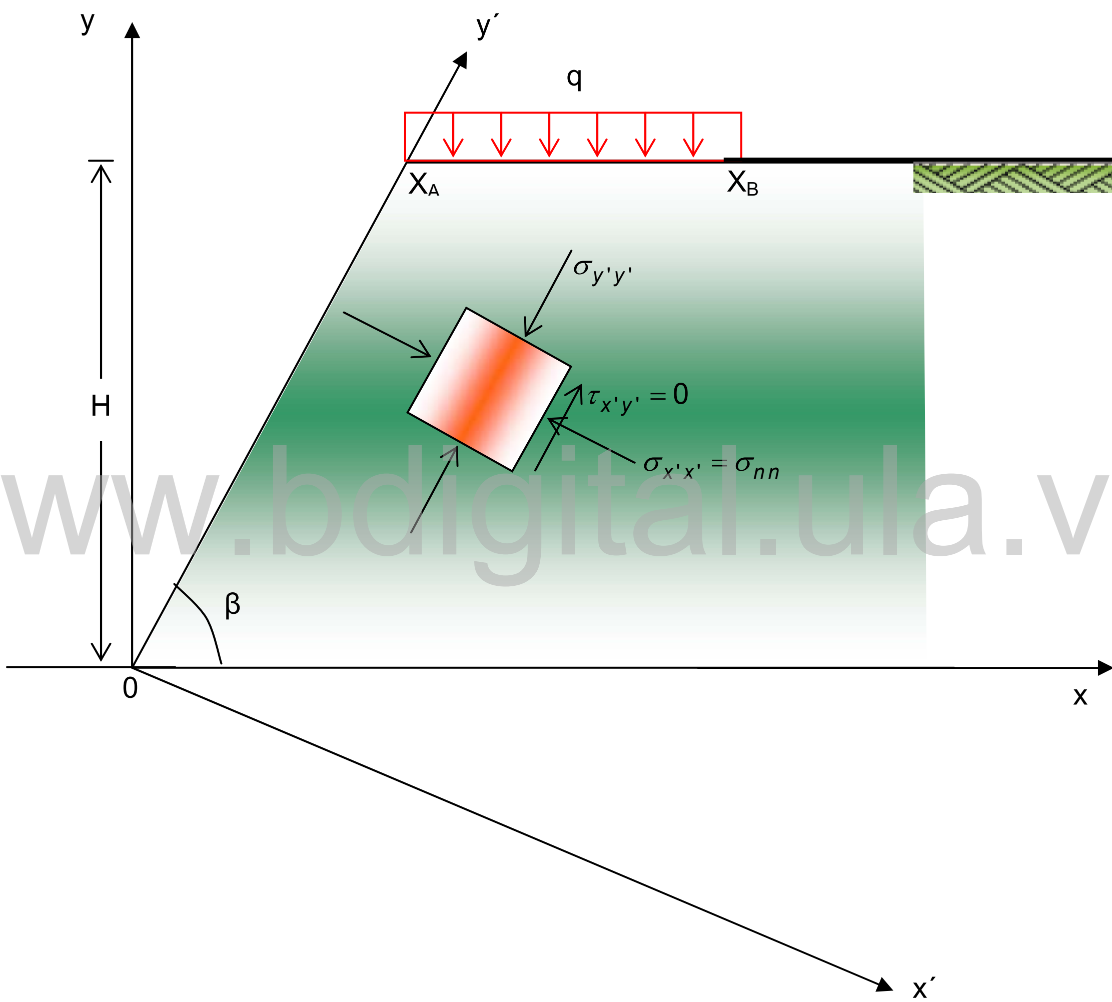


Fig. III-4. Representación de los esfuerzos, para el caso particular en el cual $\sigma_{x'x'}$ *y* $\sigma_{y'y'}$ *son esfuerzos principales.*

En este caso $\tau_{x'y'} = ax' = 0 \quad \therefore \quad a = 0$

Simplificando al ecuación anterior:

$$\sigma_{nn} = \left[2\cos^2(\beta-\alpha)-1\right]\gamma x\cos\beta sen\beta - \gamma y\left(\cos^2(\beta-\alpha)\cos^2\beta + sen^2(\beta-\alpha)sen^2\beta\right)$$
$$+\sin^2(\beta-\alpha)\left[\gamma H + \frac{q+\gamma H\cos^2\beta\cos 2\beta-(1/8)\gamma\sin 4\beta\left(H\cot\beta+H\cot\alpha\right)}{\sin^2\beta}\right]$$

(III-44)

Dividiendo toda la expresion anterior entre γH, se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = \left[2\cos^2(\beta-\alpha)-1\right]\frac{x}{H}\cos\beta sen\beta - \frac{y}{H}\left(\cos^2(\beta-\alpha)\cos^2\beta + sen^2(\beta-\alpha)sen^2\beta\right)$$
$$+\frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\sin^2\beta}\left[sen^2\beta + \frac{q}{\gamma H} + \cos^2\beta\cos 2\beta - (1/8)\sin 4\beta\left(\cot\beta+\cot\alpha\right)\right]$$

(III-45)

De esta manera, se expresa σ_{nn} como una fracción de la presión vertical γH. Teniendo en cuenta que $y = x\tan\alpha$ y sustituyendo en la ecuación anterior, queda finalmente:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = \frac{x}{H}\left\{\left[2\cos^2(\beta-\alpha)-1\right]\cos\beta sen\beta - \tan\alpha\left(\cos^2(\beta-\alpha)\cos^2\beta + sen^2(\beta-\alpha)sen^2\beta\right)\right\}$$
$$+\frac{\sin^2(\beta-\alpha)}{\sin^2\beta}\left[sen^2\beta + \frac{q}{\gamma H} + \cos^2\beta\cos 2\beta - (1/8)\sin 4\beta\left(\cot\beta+\cot\alpha\right)\right]$$

(III-46)

3.3- Caso general en el cual $\tau_{x'y'} = ax' \neq 0$:

Nuevamente, considerando la condición de contorno, en la cual esfuerzo σ_{yy} es igual a la carga "q" como se muestra fig. III-4, cuando y=H (altura del talud) e integrando entre los límites X_A y X_B, resulta:

$$\int_{X_A}^{X_B} \sigma_{yy} dx = q(X_B - X_A) \quad \therefore \quad y = H \tag{III-47}$$

Sustituyendo el valor de σ_{yy} indicado en (III-34) en la expresión anterior e integrando se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{X_A}^{X_B} \Big\{ & [x\sin\beta - y\cos\beta]\left[\gamma\cos^3\beta - \gamma\cos\beta\sin^2\beta - a\cot\beta\sin^2\beta - a\sin 2\beta\right] \\ & + \sin^2\beta\left[-\gamma H - a\frac{H}{\sin\beta} + b\right]\Big\} dx = q(X_B - X_A)\end{aligned} \tag{III-48}$$

Simplificando la ecuación anterior y aplicando relaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}\int_{X_A}^{X_B} \Big\{ & [x\sin\beta - H\cos\beta]\left[\gamma\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}a\sin 2\beta\right] \\ & + \sin^2\beta\left[-\gamma H - a\frac{H}{\sin\beta} + b\right]\Big\} dx = q(X_B - X_A)\end{aligned} \tag{III-49}$$

En términos de (x) e independientes, integrando:

$$\int_{X_A}^{X_B} x\sin\beta\left[\gamma\cos\beta\cos 2\beta-\frac{3}{2}a\sin 2\beta\right]dx-H\cos\beta\int_{X_A}^{X_B}\left[\gamma\cos\beta\cos 2\beta-\frac{3}{2}a\sin 2\beta\right]dx$$
$$+\int_{X_A}^{X_B}\sin^2\beta\left[-\gamma H-a\frac{H}{\sin\beta}+b\right]dx=q(X_B-X_A) \quad \text{(III-50)}$$

Integrando,

$$\frac{1}{2}(X_B+X_A)\sin\beta\left[\gamma\cos\beta\cos 2\beta-\frac{3}{2}a\sin 2\beta\right]$$
$$-H\cos\beta\left[\gamma\cos\beta\cos 2\beta-\frac{3}{2}a\sin 2\beta\right]+\sin^2\beta\left[-\gamma H-a\frac{H}{\sin\beta}+b\right]=q \quad \text{(III-51)}$$

Agrupando los parámetros “a” y ” b” de la expresión anterior:

$$a\left[\frac{3}{2}\sin 2\beta H\cos\beta-H\sin\beta-\frac{3}{4}(X_B+X_A)\sin 2\beta\sin\beta\right]$$
$$+b\sin^2\beta+\left[\frac{\gamma}{2}(X_B+X_A)\sin\beta\cos\beta\cos 2\beta-\gamma H\cos^2\beta\cos 2\beta-\gamma H\sin^2\beta\right]=q$$
(III-52)

Llamando:

$$\psi=\left[\frac{3}{2}\sin 2\beta H\cos\beta-H\sin\beta-\frac{3}{4}(X_B+X_A)\sin 2\beta\sin\beta\right] \quad \text{(III-53)}$$

$$\xi=\left[\frac{\gamma}{4}(X_B+X_A)\sin 2\beta\cos 2\beta-\gamma H\cos^2\beta\cos 2\beta-\gamma H\sin^2\beta\right] \quad \text{(III-54)}$$

La ecuación (III-52) puede escribirse como sigue:

$$\boxed{a\psi + b\sin^2\beta + \xi = q} \tag{III-55}$$

Al despejar la constante b:

$$a\psi + b\sin^2\beta + \xi = q \quad \Rightarrow \quad b = \frac{q - \xi - a\psi}{\sin^2\beta} \tag{III-56}$$

Si se considera que no existen esfuerzos cortantes (caso particular visto anteriormente), implica que la constante “a” es igual a cero, y la constante b de la ecuación queda expresada como:

$$b = \frac{q-\xi}{\sin^2\beta} = \left\{ \frac{q - \frac{\gamma}{8}(X_B + X_A)\sin 4\beta + \gamma H\cos^2\beta\cos 2\beta + \gamma H\sin^2\beta}{\sin^2\beta} \right\} \tag{III-57}$$

Simplificando:

$$\boxed{b = \gamma H + \frac{q - \frac{\gamma}{8}(X_B + X_A)\sin 4\beta + \gamma H\cos^2\beta\cos 2\beta}{\sin^2\beta}} \tag{III-58}$$

Cabe destacar que la expresión obtenida en la ecuación (III-43), es la misma al compararla con la obtenida en (III-58)

El proximo paso, es emplear la ecuación (III-26), para obtener τ_{xy}, es decir $\tau_{x'y'} = \vec{i}\,'\cdot\overline{\overline{\sigma}}\cdot\vec{j}\,'^{T}$, $\tau_{xy} = \vec{j}^{\,T}\cdot\overline{\overline{\sigma}}\,'\cdot\vec{i}$ con la finalidad de emplear otras ecuaciones que relacionen los parámetros a y b:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{y'y'} - \sigma_{x'x'}\right)\sin 2\beta - \tau_{x'y'}\cos 2\beta \tag{III-59}$$

Por la condición:

$$\int_{X_A}^{X_B} \tau_{xy}\,dx = 0 \quad \therefore \quad y = H \tag{III-60}$$

La ecuación (III-60) y las condiciones de contorno encontradas en la expresión (III-25) pueden sustituirse en la expresión del esfuerzo cortante (III-59) quedando:

$$\int_{X_A}^{X_B} \left\{\frac{1}{2}\left(-\left(\gamma\sin\beta + a\right)y' + b - \gamma\cos\beta\, x'\right)\sin 2\beta - a\,x'\cos 2\beta\right\}dx = 0 \tag{III-61}$$

Remplazando $y_{cresta} = y' = x'\cot\beta + \dfrac{H}{\sin\beta}$ (ver fig. III-3 y anexo A) en la ecuación anterior resulta:

$$\int_{X_A}^{X_B} \left\{\frac{1}{2}\left(-\left(\gamma\sin\beta + a\right)\left(x'\cot\beta + \frac{H}{\sin\beta}\right) + b - \gamma\cos\beta\, x'\right)\sin 2\beta - a\,x'\cos\frac{2\beta}{}\right\}dx = 0 \tag{III-62}$$

Agrupando los términos que contienen x' de la ecuación anterior:

$$\int_{X_A}^{X_B} \left\{-x'\left[\left(\gamma\,\cos\beta + a\cot\beta + \gamma\cos\beta\right)\sin 2\beta + 2a\cos 2\beta\right]\right.$$
$$\left. + \left(b - \gamma H - a\frac{H}{\sin\beta}\right)\sin 2\beta\right\}dx = 0 \tag{III-63}$$

Sustituyendo el valor de $x' = x\sin\beta - H\cos\beta \quad \therefore \quad y = H$ resulta:

$$\int_{X_A}^{X_B}\Big\{-\left(x\sin\beta - H\cos\beta\right)\left[\left(2\gamma\cos\beta + a\cot\beta\right)\sin 2\beta + 2a\cos 2\beta\right] + \left(b - \gamma H - a\frac{H}{\sin\beta}\right)\sin 2\beta\Big\}dx = 0 \tag{III-64}$$

Integrando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{\left(X_A + X_B\right)}{2}\sin\beta\left[2\gamma\cos\beta\sin 2\beta + a\left(6\cos^2\beta - 2\right)\right] - H\cos\beta\left[2\gamma\cos\beta\sin 2\beta + a\left(6\cos^2\beta - 2\right)\right] - \left(b - \gamma H - a\frac{H}{\sin\beta}\right)\sin 2\beta = 0 \tag{III-65}$$

Reagrupando términos y simplificando,

$$a\left(6\cos^2\beta - 2\right)\left[\frac{\left(X_A + X_B\right)}{2}\sin\beta - H\cos\beta\right] + a2H\cos\beta - b\sin 2\beta$$
$$2\gamma\cos\beta\sin 2\beta\left[\frac{\left(X_A + X_B\right)}{2}\sin\beta - H\cos\beta\right] + \gamma H\sin 2\beta = 0 \tag{III-66}$$

Llamando,

$$\theta = \left(6\cos^2\beta - 2\right)\left[\frac{\left(X_A + X_B\right)}{2}\sin\beta - H\cos\beta\right] + 2H\cos\beta \tag{III-67}$$

$$\mu = 2\gamma\cos\beta\sin 2\beta\left[\frac{\left(X_A + X_B\right)}{2}\sin\beta - H\cos\beta\right] + \gamma H\sin 2\beta \tag{III-68}$$

Por lo tanto, la expresión (III-66) queda expresada de la siguiente manera:

$$\boxed{a\theta - b\sin 2\beta = -\mu} \tag{III-69}$$

Se tienen entonces dos expresiones (III-55) y (III-69) que se pueden agrupar en un sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} a\psi + b\sin^2\beta = q - \xi \\ a\theta - b\sin 2\beta = -\mu \end{cases} \tag{III-70}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones el parámetro $"a"$, se determina mediante la ecuación siguiente:

$$a = \frac{(q-\xi)2\cos\beta - \mu\sin\beta}{(\psi 2\cos\beta + \theta\sin\beta)} \tag{III-71}$$

Luego se halla el valor del parámetro "b" despejándolo del sistema de ecuaciones indicado en (III-70), resultando:

$$b = \frac{q-\xi-a\psi}{\sin^2\beta} \tag{III-72}$$

Al reemplazar el valor de "a" en (III-72) queda:

$$b = \frac{q-\xi}{\sin^2\beta} - \frac{\psi}{\sin^2\beta}\left[\frac{(q-\xi)2\cos\beta - \mu\sin\beta}{(\psi 2\cos\beta + \theta\sin\beta)}\right] \tag{III-73}$$

Por otra parte, los valores de θ, μ, ψ, ξ se obtiene a través de las ecuaciones (III-53), (III-54), (III-67) y (III-68) respectivamente. Al sustituir $X_A + X_B = H(\cot\alpha + \cot\beta)$ en cada una de las fórmulas antes mencionadas y expresándolas en forma adimensional resulta:

$$\boxed{\left(\frac{\theta}{H}\right) = \overline{\theta_1} = \left(3\cos^2\beta - 1\right)\left[\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)\sin\beta - 2\cos\beta\right] + 2H\cos\beta} \qquad \text{(III-74)}$$

$$\boxed{\frac{\mu}{\gamma H} = \overline{\mu_1} = \cos\beta\sin 2\beta\left[\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)\sin\beta - 2\cos\beta\right] + \sin 2\beta} \qquad \text{(III-75)}$$

$$\boxed{\frac{\psi}{H} = \overline{\psi_1} = \left[\frac{3}{2}\sin 2\beta\cos\beta - \sin\beta - \frac{3}{4}\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)\sin 2\beta\sin\beta\right]} \qquad \text{(III-76)}$$

$$\boxed{\frac{\xi}{\gamma H} = \overline{\xi_1} = \left[\frac{1}{4}\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)\sin 2\beta\cos 2\beta - \cos^2\beta\cos 2\beta - \sin^2\beta\right]} \qquad \text{(III-77)}$$

También el parámetro “a” obtenido en la expresión (III-71) se expresa en forma adimensional mediante la ecuación:

$$\bar{a} = \left(\frac{a}{\gamma}\right) = \frac{\left(\frac{q}{\gamma H} - \frac{\xi}{\gamma H}\right)2\sin\beta\cos\beta - \left(\frac{\mu}{\gamma H}\right)\sin^2\beta}{\left(\frac{\psi}{H}2\sin\beta\cos\beta + \frac{\theta}{H}\sin^2\beta\right)} \qquad \text{(III-78)}$$

Seguidamente $\bar{a}$ se expresa en función de $\overline{\theta_1}, \overline{\psi_1}, \overline{\xi_1}, \overline{\mu_1}$ y $\bar{q} = \frac{q}{\gamma H}$. Dichas ecuaciones son las indicadas en (III-74), (III-75), (III-76) y (III-77):

$$\boxed{\bar{a} = \frac{\left(\bar{q} - \overline{\xi_1}\right)2\cos\beta - \overline{\mu_1}\sin\beta}{\left(\overline{\psi_1}2\cos\beta + \overline{\theta_1}\sin\beta\right)}} \qquad \text{(III-79)}$$

El parámetro “b” obtenido en la expresión (III-72) se puede expresar en forma adimensional al dividir por γH, es decir:

$$\bar{b} = \frac{b}{\gamma H} = \frac{\frac{q}{\gamma H} - \frac{\xi}{\gamma H} - \frac{a}{\gamma}\frac{\psi}{H}}{\sin^2\beta} \qquad \text{(III-80)}$$

Finalmente, $\bar{b}$ en función de $\overline{\psi_1}, \overline{\xi_1}, \bar{a}$ y $\bar{q} = \frac{q}{\gamma H}$, resulta:

$$\boxed{\bar{b} = \frac{\bar{q} - \overline{\xi_1} - \bar{a}\overline{\psi_1}}{\sin^2\beta}} \qquad \text{(III-81)}$$

3.4– Cálculo del Esfuerzo Normal σ_{nn} en Función de los Parámetros Adimensionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$:

Expresando nuevamente la tensión $\sigma_{x''x''} = \sigma_{nn}$ obtenida a través de la ecuación de equilibrio (III-12), resulta:

$$\sigma_{x''x''} = \sigma_{nn} = \sigma_{x'x'}\cos^2(\beta-\alpha) + \sigma_{y'y'}\sin^2(\beta-\alpha) + 2\tau_{x'y'}\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha) \qquad \text{(III-82)}$$

Las condiciones de contorno de la ecuación (III-25) son sustituidas en la expresion anterior obteniéndose:

$$\sigma_{nn} = \gamma\cos\beta x'\cos^2(\beta-\alpha) + \left[(-\gamma\sin\beta - a)y' + b\right]\sin^2(\beta-\alpha) + ax'\sin\left[2(\beta-\alpha)\right] \qquad \text{(III-83)}$$

Sacando factor comun de x’:

$$\sigma_{nn} = x'\left[\gamma\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) + a\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] + \left[(-\gamma\sin\beta - a)y' + b\right]\sin^2(\beta-\alpha) \qquad \text{(III-84)}$$

Sustituyendo (x') y (y') indicados en la ecuación (III-33), se obtiene:

$$\sigma_{nn} = (x\sin\beta - y\cos\beta)\left[\gamma\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) + a\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] \\ +\left[(-\gamma\sin\beta - a)(x\cos\beta + y\sin\beta) + b\right]\sin^2(\beta-\alpha) \qquad \text{(III-85)}$$

Teniendo en cuenta que $y = x\tan\alpha$ resulta:

$$\sigma_{nn} = x(\sin\beta - \tan\alpha\cos\beta)\left[\gamma\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) + a\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] \\ +\left[b - x(\gamma\sin\beta + a)(\cos\beta + \tan\alpha\sin\beta)\right]\sin^2(\beta-\alpha) \qquad \text{(III-86)}$$

La expresion de σ_{nn} se divide entre γH para obtener los resultados en forma adimensional quedando:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = \frac{x}{H}(\sin\beta - \tan\alpha\cos\beta)\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) + \frac{a}{\gamma}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] \\ +\left[\frac{b}{\gamma H} - \frac{x}{H}\left(\sin\beta + \frac{a}{\gamma}\right)(\cos\beta + \tan\alpha\sin\beta)\right]\sin^2(\beta-\alpha) \qquad \text{(III-87)}$$

La expresion de σ_{nn} se expresa ahora en funcion de $\bar{a} = {}^{a}\!/_{\gamma}$ y $\bar{b} = {}^{b}\!/_{\gamma H}$ resultando:

$$\boxed{\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = \frac{x}{H}(\sin\beta - \tan\alpha\cos\beta)\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) + \bar{a}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] \\ +\left[\bar{b} - \frac{x}{H}(\sin\beta + \bar{a})(\cos\beta + \tan\alpha\sin\beta)\right]\sin^2(\beta-\alpha)} \qquad \text{(III-88)}$$

3.5– Cálculo del Esfuerzo Cortante τ_{nt}:

Considerando nuevamente la ecuación (III-14) correspondiente al esfuerzo cortante $\tau_{x''y''} = \tau_{nt}$, se tiene:

$$\tau_{x''y''} = \tau_{nt} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{y'y'} - \sigma_{x'x'}\right) sen\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] + \tau_{x'y'} \cos\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \qquad \text{(III-89)}$$

Sustituyendo las condiciones de contorno definidas a través de (III-25) queda:

$$\tau_{nt} = -\frac{1}{2}\left[\left(\gamma sen\beta + a\right)y' - b + \gamma \cos\beta x'\right] sen\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] + ax' \cos\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \qquad \text{(III-90)}$$

Reemplazando (x') y (y') indicados en la ecuación (III-33), el esfuerzo cortante τ_{nt} toma la forma:

$$\begin{aligned}\tau_{nt} = -\frac{1}{2}&\left[\left(\gamma sen\beta + a\right)\left(x\cos\beta + y sen\beta\right) - b + \gamma\cos\beta\left(x sen\beta - y\cos\beta\right)\right] sen\left[2\left(\beta-\alpha\right)\right] \\ &+ a\left(x sen\beta - y\cos\beta\right)\cos\left[2\left(\beta-\alpha\right)\right]\end{aligned} \qquad \text{(III-91)}$$

Teniendo en cuenta que $y = x\tan\alpha$ y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\tau_{nt} = -\frac{1}{2}&\left[\left(\gamma sen\beta + a\right)\left(x\cos\beta + x\tan\alpha sen\beta\right) - b + \gamma\cos\beta\left(x sen\beta - x\tan\alpha\cos\beta\right)\right] sen\left[2\left(\beta-\alpha\right)\right] \\ &+ a\left(x sen\beta - x\tan\alpha\cos\beta\right)\cos\left[2\left(\beta-\alpha\right)\right]\end{aligned} \qquad \text{(III-92)}$$

Dividiendo la expresión anterior entre γH queda:

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{\gamma H}\right)=-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{H}\left(sen\beta+\frac{a}{\gamma}\right)(\cos\beta+\tan\alpha sen\beta)-\frac{b}{\gamma H}+\frac{x}{H}\cos\beta(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\right]sen\left[2(\beta-\alpha)\right]$$
$$+\frac{x}{H}\frac{a}{\gamma}(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\cos\left[2(\beta-\alpha)\right] \qquad \text{(III-93)}$$

Como $\bar{a}=\dfrac{a}{\gamma}$ y $\bar{b}=\dfrac{b}{\gamma H}$ se sustituye en la expresión (III-142) quedando finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\tau_{nt}}{\gamma H}=&-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{H}\left(sen\beta+\bar{a}\right)(\cos\beta+\tan\alpha sen\beta)-\bar{b}+\frac{x}{H}\cos\beta(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\right]sen\left[2(\beta-\alpha)\right]\\&+\frac{x}{H}\bar{a}(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\cos\left[2(\beta-\alpha)\right]\end{aligned}}$$

(III-94)

Tabla III-1 Resumen de las ecuaciones involucradas en la rotura plana para la determinación de los esfuerzos σ_{nn} y τ_{nt}

$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H}=\frac{x}{H}(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha)+\bar{a}sen\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] +\left[\bar{b}-\frac{x}{H}(sen\beta+\bar{a})(\cos\beta+\tan\alpha sen\beta)\right]sen^2(\beta-\alpha)$
$\frac{\tau_{nt}}{\gamma H}=-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{H}(sen\beta+\bar{a})(\cos\beta+\tan\alpha sen\beta)-\bar{b}+\frac{x}{H}\cos\beta(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\right]sen\left[2(\beta-\alpha)\right] +\frac{x}{H}\bar{a}(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\cos\left[2(\beta-\alpha)\right]$
Parámetros Involucrados
$\bar{a}=a/\gamma$, $\bar{b}=b/\gamma H$ y $\bar{q}=q/\gamma H$ $\bar{a}=\frac{(\bar{q}-\bar{\xi}_1)2\cos\beta-\bar{\mu}_1\sin\beta}{(\bar{\psi}_1 2\cos\beta+\bar{\theta}_1\sin\beta)}$ y $\bar{b}=\frac{\bar{q}-\bar{\xi}_1-\bar{a}\bar{\psi}_1}{\sin^2\beta}$
Siendo: $\bar{\xi}_1=\left[\frac{1}{4}(\cot\alpha+\cot\beta)\sin 2\beta\cos 2\beta-\cos^2\beta\cos 2\beta-\sin^2\beta\right]$ $\bar{\psi}_1=\left[\frac{3}{2}\sin 2\beta\cos\beta-\sin\beta-\frac{3}{4}(\cot\alpha+\cot\beta)\sin 2\beta\sin\beta\right]$ $\bar{\mu}_1=\cos\beta\sin 2\beta\left[(\cot\alpha+\cot\beta)\sin\beta-2\cos\beta\right]+\sin 2\beta$ $\bar{\theta}_1=(3\cos^2\beta-1)\left[(\cot\alpha+\cot\beta)\sin\beta-2\cos\beta\right]+2H\cos\beta$

H = Altura del talud, m.

β = Inclinación del talud con la horizontal.

α = Inclinación del plano de falla con la horizontal.

γ = Peso unitario del macizo rocoso, kN/m^3.

3.6− Ejemplo de aplicación de las ecuaciones obtenidas:

Se desea hallar sobre una superficie potencial de rotura plana los esfuerzos actuantes teniendo en cuenta:

Altura del talud H = 40,00 m

Inclinación de talud $\beta = 90º$

Angulo de rotura con respecto a la horizontal $\alpha = 50º$

Peso unitario $\gamma = 24{,}00\,{}^{kN}\!/_{m^3}$

Sobrecarga $q = 0{,}00\,{}^{kN}\!/_{m^2}$

y (m)	x (m)
0,00	0,00
5,00	4,20
10,00	8,39
15,00	12,59
20,00	16,78
25,00	20,98
30,00	25,17
35,00	29,37
40,00	33,56

Tabla III-2 Valores de la superficie de rotura plana, obtenidos en la hoja de cálculo Excel , a través de la ecuación $\alpha = \left({}^{y}\!/_{\tan\alpha} \right)$ *y considerando* α*=50º.*

El gráfico que representa la superficie de rotura plana, se ha expresado bidimensionalmente representados por los valores de x e y que se encuentran en la tabla anterior:

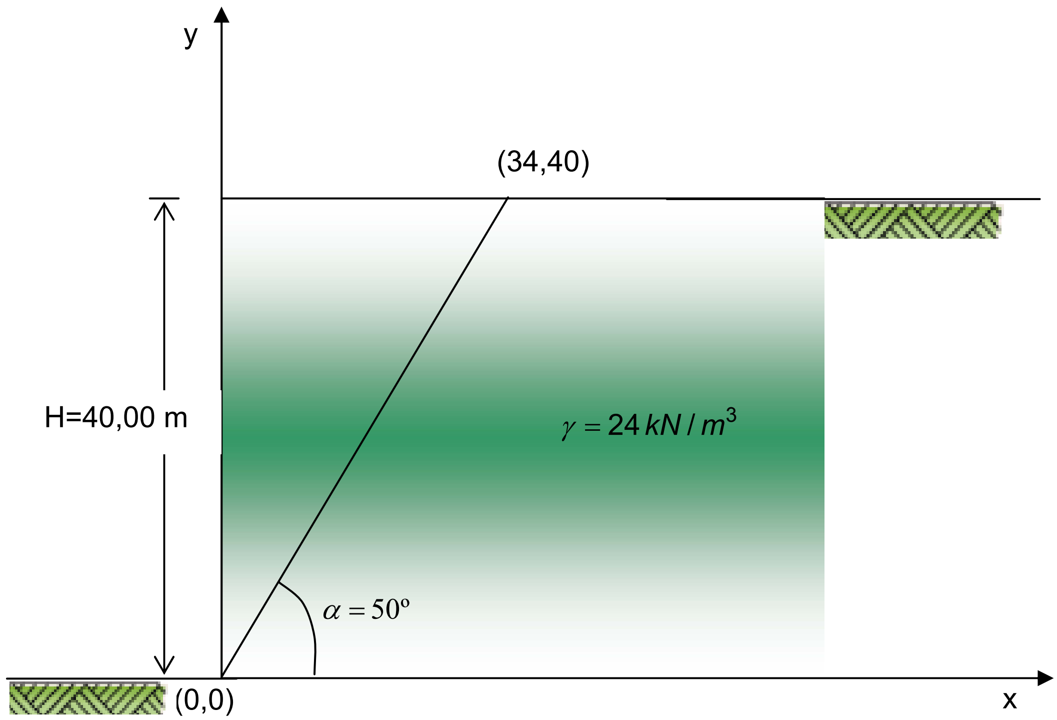


Fig. III-5 Representación gráfica de la superficie de rotura plana.

Aplicando las ecuaciones de la tabla resumen (III-1) se calculan los parámetros $\overline{\theta_1}, \overline{\mu_1}, \overline{\psi_1}, \overline{\varepsilon_1}$, los cuales permiten determinar los parámetros $\overline{a}$ y $\overline{b}$ en forma adimensional. Posteriormente se determina la distribución de los esfuerzos σ_{nn} y τ_{nt} aplicando las ecuaciones analíticas observadas en la misma tabla, obteniéndose:

x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	$\tau_{nt}/\gamma H$
0,00	0,41	0,49
0,10	0,36	0,43
0,21	0,31	0,37
0,31	0,26	0,31
0,42	0,21	0,25
0,52	0,15	0,18
0,63	0,10	0,12
0,73	0,05	0,06
0,84	0,00	0,00

Tabla III-3 Valores de esfuerzos adimensionales normales y cortantes para la rotura plana, obtenidos en la hoja de cálculo Excel.

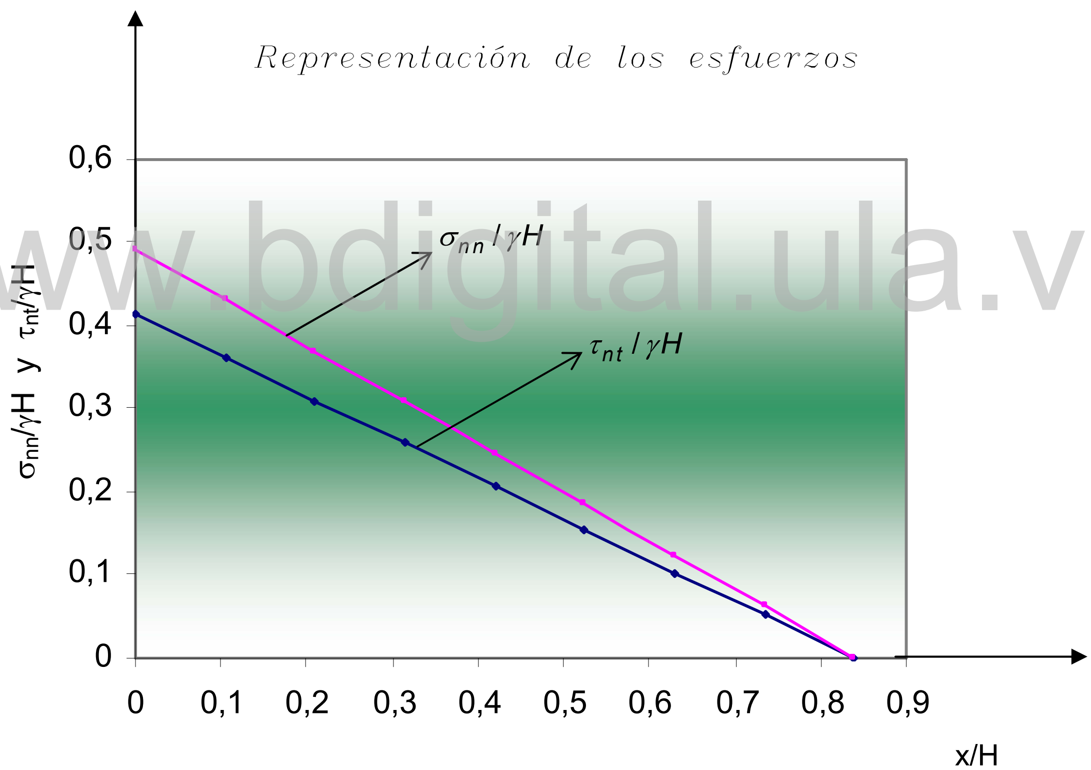


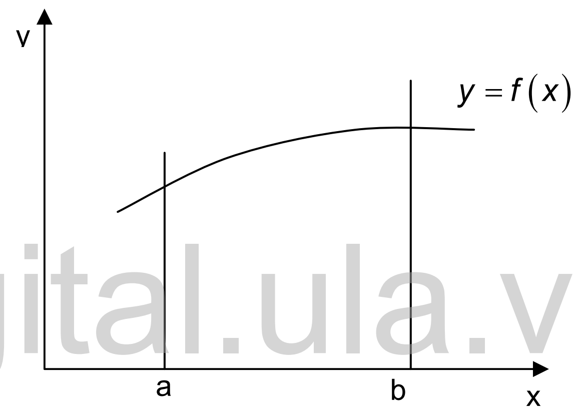
Fig. III-6 Representación gráfica de los esfuerzos normales y cortantes para una superficie de rotura plana.

3.8- Valor Medio de los Esfuerzos Normales y Cortantes para un Talud Inclinado:

El próximo paso es determinar el valor medio de σ_{nn} y τ_{nt} y luego utilizar las expresiones obtenidas para el caso particular de un talud vertical, el cual se utilizará como ejemplo práctico.

Como se sabe el valor medio[*3] de la función $y = f(x)$ se define por:

$$y_{medio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



Por lo tanto al emplear la ecuación (III-88) el valor medio de σ_{nn} es:

$$\frac{\sigma_{nn(prom)}}{\gamma H} = \frac{1}{X_B - X_A}\int_{X_A}^{X_B} \sigma_{nn}(x)dx \qquad \text{(III-95)}$$

$$\frac{\sigma_{nn\,(prom)}}{\gamma H} = \frac{1}{X_B - X_A}\int_{X_A}^{X_B} \left\{ \frac{x}{H}(\sin\beta - \tan\alpha\cos\beta)\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) + \bar{a}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] \right.$$
$$\left. + \left[\bar{b} - \frac{x}{H}(\sin\beta + \bar{a})(\cos\beta + \tan\alpha\sin\beta)\right]\sin^2(\beta-\alpha)\right\} dx \qquad \text{(III-96)}$$

[*3] Thomas, G., 1966. Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.

Separando las integrales:

$$\frac{\sigma_{nn(prom)}}{\gamma H}=\frac{1}{X_B-X_A}\left\{\int_{X_A}^{X_B}\frac{x}{H}(\sin\beta-\tan\alpha\cos\beta)\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha)+\bar{a}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right]dx\right.$$
$$\left.-\int_{X_A}^{X_B}\left[\frac{x}{H}(\sin\beta+\bar{a})(\cos\beta+\tan\alpha\sin\beta)\right]\sin^2(\beta-\alpha)dx+\int_{X_A}^{X_B}\bar{b}\sin^2(\beta-\alpha)dx\right\}$$

(III-97)

Integrando,

$$\frac{\sigma_{nn(prom)}}{\gamma H}=\frac{X_B+X_A}{2H}(\sin\beta-\tan\alpha\cos\beta)\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha)+\bar{a}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right]$$
$$\left.-\frac{X_B+X_A}{2H}(\sin\beta+\bar{a})(\cos\beta+\tan\alpha\sin\beta)\sin^2(\beta-\alpha)+\bar{b}\sin^2(\beta-\alpha)\right\}$$

(III-98)

Teniendo en cuenta que $X_A=H\cot\beta,\quad X_B=H\cot\alpha$ y simplificando resulta:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\sigma_{nn(prom)}}{\gamma H}&=\frac{1}{2}(\cot\beta+\cot\alpha)(\sin\beta-\tan\alpha\cos\beta)\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha)+\bar{a}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right]\\&\left.-\frac{1}{2}(\cot\beta-\cot\alpha)(\sin\beta+\bar{a})(\cos\beta+\tan\alpha\sin\beta)\sin^2(\beta-\alpha)+\bar{b}\sin^2(\beta-\alpha)\right\}\end{aligned}}$$

(III-99)

Para el esfuerzo cortante se procede de la misma manera hallando el valor medio a partir de la ecuación (III-94), obteniéndose:

$$\frac{\tau_{nt(prom)}}{\gamma H}=\frac{1}{X_B-X_A}\int_{X_A}^{X_B}\left\{-\frac{x}{2H}\left(sen\beta+\bar{a}\right)(\cos\beta+\tan\alpha sen\beta)sen\left[2(\beta-\alpha)\right]\right.$$
$$+\frac{\bar{b}}{2}sen\left[2(\beta-\alpha)\right]-\frac{x}{2H}\cos\beta(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)sen\left[2(\beta-\alpha)\right]$$
$$\left.+\frac{x}{H}\bar{a}(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\cos\left[2(\beta-\alpha)\right]\right\}dx \qquad \text{(III-100)}$$

Separando las integrales:

$$\frac{\tau_{nt(prom)}}{\gamma H}=\left(\frac{1}{X_B-X_A}\right)\left\{-\int_{X_A}^{X_B}\frac{x}{2H}\left(sen\beta+\bar{a}\right)(\cos\beta+\tan\alpha sen\beta)sen\left[2(\beta-\alpha)\right]dx\right.$$
$$+\int_{X_A}^{X_B}\frac{\bar{b}}{2}sen\left[2(\beta-\alpha)\right]dx-\int_{X_A}^{X_B}\frac{x}{2H}\cos\beta(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)sen\left[2(\beta-\alpha)\right]dx$$
$$\left.+\int_{X_A}^{X_B}\frac{x}{H}\bar{a}(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\cos\left[2(\beta-\alpha)\right]dx\right\} \qquad \text{(III-101)}$$

Integrando,

$$\frac{\tau_{nt(prom)}}{\gamma H}=-\frac{X_B+X_A}{4H}\left(sen\beta+\bar{a}\right)(\cos\beta+\tan\alpha sen\beta)sen\left[2(\beta-\alpha)\right]$$
$$-\frac{X_B+X_A}{4H}\cos\beta(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)sen\left[2(\beta-\alpha)\right]$$
$$+\frac{X_B+X_A}{2H}\bar{a}(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\cos\left[2(\beta-\alpha)\right]+\frac{\bar{b}}{2}sen\left[2(\beta-\alpha)\right] \qquad \text{(III-102)}$$

Reemplazando los valores de X_A y X_B en la ecuación anterior se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\tau_{nt(prom)}}{\gamma H}=&-\frac{1}{4}(\cot\beta+\cot\alpha)\left(sen\beta+\bar{a}\right)(\cos\beta+\tan\alpha sen\beta)sen\left[2(\beta-\alpha)\right]\\&-\frac{\cos\beta}{4}(\cot\beta+\cot\alpha)(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)sen\left[2(\beta-\alpha)\right]\\&+\frac{\bar{a}}{2}(\cot\beta+\cot\alpha)(sen\beta-\tan\alpha\cos\beta)\cos\left[2(\beta-\alpha)\right]+\frac{\bar{b}}{2}sen\left[2(\beta-\alpha)\right]\end{aligned}}$$

(III-103)

3.8– Ejemplos de Aplicación:

3.8.1– Ejemplo 1:

Es bien conocido que la altura crítica de un corte vertical $(\beta = 90^{o})$, se determina a través de la ecuación:

$$H_{crítica} = \frac{4C}{\gamma}\tan\left(45^{o} + \phi/2\right)$$

Siendo, $\alpha = \left(45^{o} + \phi/2\right)$, el ángulo que forma el plano de rotura con el esfuerzo principal menor, C la cohesión, ϕ el ángulo de fricción interna y γ el peso unitario. Dicho valor se obtiene para la condición en la cual el factor de seguridad FS=1, es decir:

$$FS = \frac{C + \sigma_{nn}\tan\phi}{\tau_{nt}} = 1$$

En forma adimensional,

$$FS = \frac{(C/\gamma H) + (\sigma_{nn}/\gamma H)\cdot\tan\phi}{(\tau_{nt}/\gamma H)} = 1$$

Por lo tanto si, $C = 40{,}00\,kN/m^2$, $\phi = 30°$, $\alpha = 60°$ y $\gamma = 20{,}00\,kN/m^3$, se obtiene una altura crítica $H_c = 13{,}85\,m$. Al emplear (III-99) y (III-103) y determinando que $\bar{a} = 0$ y $\bar{b} = 1$, se obtiene que $\sigma_{nn}/\gamma H = 0{,}125$ y $\tau_{nt}/\gamma H = 0{,}217$, por lo tanto el factor de seguridad es:

$$FS = \frac{\left(40{,}00 \big/ 20{,}00 \times 13{,}85\right) + 0{,}125 \tan\left(30^\circ\right)}{0{,}217} = 1$$

Coeficiente de seguridad que concuerda perfectamente co el valor de FS = 1, correspondiente a la altura crítica H_c. Cabe destacar que dicha altura se obtiene al considerar que la relación entre los esfuerzos principales en el instante de la rotura es: $\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \alpha + 2C \tan \alpha$, siendo $\alpha = \left(45^{\text{o}} + \phi \big/ 2\right)$.

3.8.2- Ejemplo 2:

El esfuerzo σ_{yy}, se representa por medio de la ecuación $\sigma_{yy} = \gamma\left(H - y\right)$, que cumple con la condición: $y = H, \quad \sigma_{yy} = 0 \quad y \quad y = 0, \quad \sigma_{yy} = H$, por lo tanto el esfuerzo medio es, $\sigma_{yy(medio)} = \dfrac{\gamma H}{2}$. Adicionalmente se considera que $\sigma_{xx} = 0$.

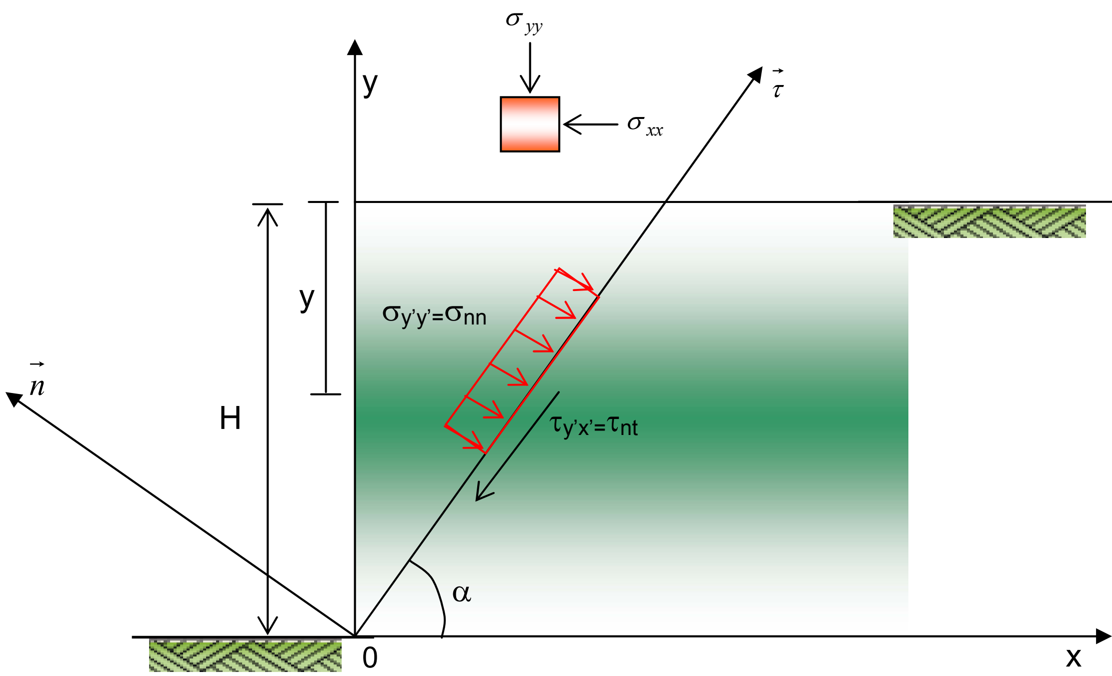
La matriz de esfuerzo queda:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma H / 2 \end{pmatrix}$$

El esfuerzo resultante es,

$$\begin{pmatrix} T_{nx} & T_{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma H / 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T_{nx} & T_{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha\gamma H / 2 \end{pmatrix}$$



El esfuerzo $\sigma_{y'y'} = \sigma_{nn}$ se expresa,

$$\sigma_{nn} = \bar{n} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n}^T = \begin{pmatrix} -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma H/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -sen\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que α = 60º

$$\sigma_{nn} = \cos^2\alpha \cdot {}^{\gamma H}\!/_{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = 0{,}125$$

El esfuerzo $\tau_{y'x'}$ se expresa, $\tau_{y'x'} = \vec{j}' \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{i}'^T$,

$$\tau_{y'x'} = \begin{pmatrix} -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma H/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ sen\alpha \end{pmatrix}$$

$$\tau_{y'x'} = sen\alpha\cos\alpha \cdot \gamma H/2$$

Para $\alpha = 60^{\circ}$, $\frac{\tau_{y'x'}}{\gamma H} = \frac{\tau_{nt}}{\gamma H} = 0{,}217$

4.–Método Analítico para Determinar la Distribución de los Esfuerzos cuya Superficie de Rotura es Parabólica:

Se analiza un talud con una inclinación (β), y se desea determinar la distribución de los esfuerzos al considerar que la superficie de rotura en el talud es de forma parabólica. (fig. IV-1).

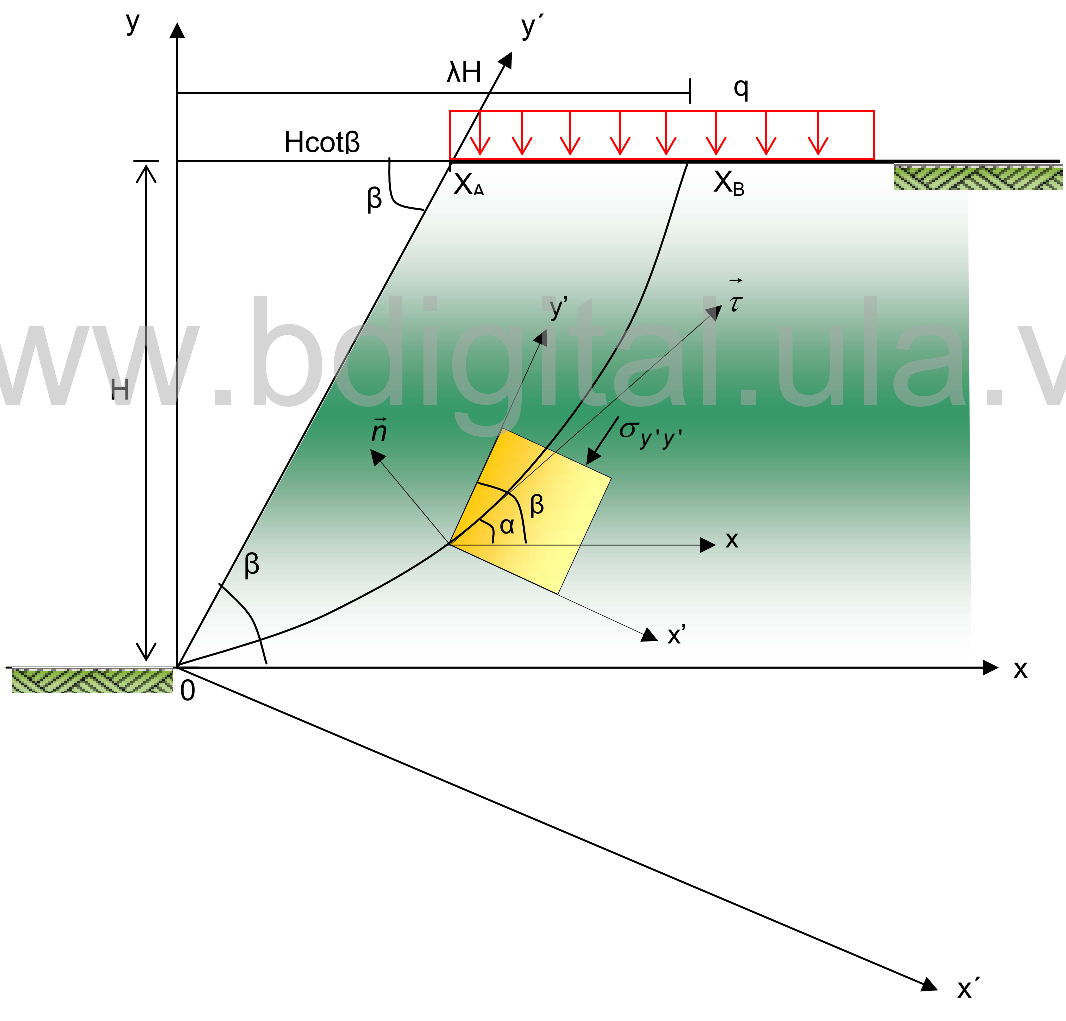


Fig. IV-1 Representación de la superficie de rotura parabólica y sus relaciones geométricas.

Para una rotura parabólica la ecuación es la siguiente:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{IV-1}$$

A través de las condiciones de contorno nos es posible determinar las constantes:

1.- En el origen x=0 ; y=0, por lo tanto la constante c=0.
2.- En la cresta del talud, cuando y=H. x=λH, es decir la ecuación (IV-1), se transforma en:

$$H = a(\lambda H)^2 + b\lambda H \tag{IV-2}$$

3.- La tercera condición es, que la pendiente en el origen es cero es decir,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \tag{IV-3}$$

$$H = a(\lambda H)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\lambda^2 H}$$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola puede escribirse como sigue:

$$y = \frac{x^2}{\lambda^2 H} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{H}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 \tag{IV-4}$$

Expresando la ecuación anterior en términos de "y" la ecuación de la parábola toma la forma:

$$\boxed{x = \lambda\left(2y - \frac{y^2}{H}\right)} \tag{IV-5}$$

Derivando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{H}{2\lambda}\left(\frac{1}{H-y}\right) \tag{IV-6}$$

Teniendo en cuenta que la derivada es igual a la tangente del ángulo α, resulta:

$$\tan\alpha = \frac{H}{2\lambda}\left(\frac{1}{H-y}\right) \tag{IV-7}$$

Siendo el ángulo α tal como se indica en la figura (IV-1):

$$\boxed{\alpha = \arctan\left[\frac{H}{2\lambda}\left(\frac{1}{H-y}\right)\right]} \tag{IV-8}$$

Expresando "y" en función de la variable "x" a través de (IV-5), resulta:

$$x = \lambda\left(2y - \frac{y^2}{H}\right) \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2yH + \frac{xH}{\lambda} = 0 \tag{IV-9}$$

Los valores de "y" a través de dicha ecuación cuadrática son:

$$y = H \pm \sqrt{H^2 - \left(H/\lambda\right)x} \tag{IV-10}$$

Para obtener la solución que cumpla con las condiciones de contorno del problema estudiado se toma la raíz negativa, por cuanto debe cumplirse que para x=0; y=0 entonces:

$$y = H - \sqrt{H^2 - \left(H/\lambda\right)x} \qquad \text{(IV-11)}$$

Sustituyendo esta última expresión en (IV-8), el ángulo α puede expresarse como:

$$\boxed{\alpha = \arctan\left[\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(x/\lambda H\right)}}\right)\right]} \qquad \text{(IV-12)}$$

La ecuación que relaciona los esfuerzos en el plano xy con respecto al plano x'y' es $\sigma_{yy} = \vec{j}^{T} \cdot \overline{\overline{\sigma}}' \cdot \vec{j}$, tal como se indica en la ecuación (III-26) del capítulo anterior. Por otra parte se sabe que: $\sigma_{x'x'} = \gamma \cos\beta x'$, $\sigma_{y'y'} = (-\gamma sen\beta - a)y' + b$, y $\tau_{x'y'} = ax'$ indicadas en la ecuación (III-25). Finamente aplicando la ecuación (III-31), se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= x'\left[-\gamma\cos\beta\sin^2\beta - a\cot\beta\sin^2\beta + \gamma\cos^3\beta - a\sin 2\beta\right] \\ &\quad + \sin^2\beta\left[-\gamma H\sin^2\beta - a\frac{H}{\sin\beta} + b\sin^2\beta\right]\end{aligned} \qquad \text{(IV-13)}$$

Sustituyendo $x' = xsen\beta - y\cos\beta$ en la ecuación anterior:

$$\sigma_{yy} = \left[x\sin\beta - y\cos\beta\right]\left[-\gamma\cos\beta\sin^2\beta - a\cot\beta\sin^2\beta + \gamma\cos^3\beta - a\sin 2\beta\right] + \sin^2\beta\left[-\gamma H - a\frac{H}{\sin\beta} + b\right] \qquad \text{(b-IV-13)}$$

El próximo paso corresponde caso general en el cual $\tau_{x'y'} = ax' \neq 0$, tal como se indicó en el capítulo anterior. A la vez se ha considerado la condicion de contorno, donde el esfuerzo σ_{yy} es igual a la carga "q" tal como se muestra fig. (IV-1). Integrando dicha expresión a lo largo de la superficie del talud donde está aplicada la carga "q", es decir, en la cresta del talud donde y=H, resulta:

$$\int_{X_A}^{X_B} \sigma_{yy}dx = q(X_B - X_A) \quad \therefore \quad y = H \qquad \text{(IV-14)}$$

Sustituyendo dicha expresión en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\int_{X_A}^{X_B} \left\{\left[x\sin\beta - y\cos\beta\right]\left[\gamma\cos^3\beta - \gamma\cos\beta\sin^2\beta - a\cot\beta\sin^2\beta - a\sin 2\beta\right] + \sin^2\beta\left[-\gamma H - a\frac{H}{\sin\beta} + b\right]\right\}dx = q(X_B - X_A) \qquad \text{(IV-15)}$$

Simplificando e integrando, resulta:

$$\frac{1}{2}(X_B + X_A)\sin\beta\left[\gamma\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}a\sin 2\beta\right] - H\cos\beta\left[\gamma\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}a\sin 2\beta\right] + \sin^2\beta\left[-\gamma H - a\frac{H}{\sin\beta} + b\right] = q \qquad \text{(IV-16)}$$

Expresando dicha ecuación en forma adimensional al dividir por γH, queda:

$$\frac{1}{2H}\left(X_B + X_A\right)\sin\beta\left[\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}\frac{a}{\gamma}\sin 2\beta\right] - \cos\beta\left[\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}\frac{a}{\gamma}\sin 2\beta\right]$$
$$+\sin^2\beta\left[-1 - \frac{\bar{a}}{\sin\beta} + \frac{b}{\gamma H}\right] = \frac{q}{\gamma H} \qquad \text{(IV-17)}$$

Como puede observarse a través de la figura (IV-1), $X_A = H\cot\beta$ y $X_B = \lambda H$. Adicionalmente al reemplazar $\bar{a} = \frac{a}{\gamma}$ y $\bar{b} = \frac{b}{\gamma H}$, en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{1}{2H}\left(\lambda H + H\cot\beta\right)\sin\beta\left[\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}\bar{a}\sin 2\beta\right] - \cos\beta\left[\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}\bar{a}\sin 2\beta\right]$$
$$+\sin^2\beta\left[-1 - \frac{\bar{a}}{\sin\beta} + \bar{b}\right] = \bar{q} \qquad \text{(IV-18)}$$

Simplificando y agrupando,

$$\bar{a}\left[\frac{3}{2}\sin 2\beta\cos\beta - \frac{3}{2}\sin 2\beta\sin\beta\frac{1}{2}\left(\lambda + \cot\beta\right) - \sin\beta\right]$$
$$+\left[\cos\beta\cos 2\beta\sin\beta\frac{1}{2}\left(\lambda + \cot\beta\right) - \cos^2\beta\cos 2\beta - \sin^2\beta\right] \qquad \text{(IV-19)}$$
$$+\bar{b}\sin^2\beta = \bar{q}$$

Llamando:

$$\psi_2 = \left[\frac{3}{2}\sin 2\beta\cos\beta - \frac{3}{4}\sin 2\beta\sin\beta\left(\lambda + \cot\beta\right) - \sin\beta\right]$$
$$\xi_2 = \left[\frac{1}{2}\cos\beta\cos 2\beta\sin\beta\left(\lambda + \cot\beta\right) - \cos^2\beta\cos 2\beta - \sin^2\beta\right] \qquad \text{(IV-20)}$$

Se obtiene:

$$\boxed{\bar{a}\psi_2 + \bar{b}\sin^2\beta + \xi_2 = \bar{q}} \tag{IV-21}$$

Por otro lado, es necesario hallar otras expresiones que relacionen los parámetros "a" y "b". En estas condiciones al considerar nuevamente la ecuación del esfuerzo cortante del plano xy con respecto al plano x'y', (III-59) indicada en el capítulo anterior, se tiene:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{y'y'} - \sigma_{x'x'}\right)\sin 2\beta - \tau_{x'y'}\cos 2\beta \tag{IV-22}$$

Considerando la condición de borde en la cual:

$$\int_{X_A}^{X_B} \tau_{xy}\,dx = 0 \quad \therefore \quad y = H \tag{IV-23}$$

Utilizando los valores de las tensiones $\sigma_{x'x'} = \gamma\cos\beta x'$, $\sigma_{y'y'} = \left(-\gamma sen\beta - a\right)y' + b$, y $\tau_{x'y'} = ax'$ previamente indicadas en la ecuación (III-25), y reemplazando en (IV-22) resulta:

$$\int_{X_A}^{X_B} \left\{\frac{1}{2}\left(-\left(\gamma\sin\beta + a\right)y' + b - \gamma\cos\beta\, x'\right)\sin 2\beta - a\,x'\cos 2\beta\right\}dx = 0 \tag{IV-24}$$

Sustituyendo $y_{cresta} = y' = x'\cot\beta + \dfrac{H}{\sin\beta}$, simplificando e integrando, se obtiene:

$$\frac{(X_A+X_B)}{2}\sin\beta\left(2\gamma\cos\beta\sin2\beta+a\left(6\cos^2\beta-2\right)\right)$$
$$-H\cos\beta\left(2\gamma\cos\beta\sin2\beta+a\left(6\cos^2\beta-2\right)\right)-\left(b-\gamma H-a\frac{H}{\sin\beta}\right)\sin2\beta=0 \qquad \text{(IV-25)}$$

Dividiendo por γH y simplificando, la ecuación anterior puede expresarse en forma adimensional como sigue:

$$\frac{a}{\gamma}\left(3\cos^2\beta-1\right)\left[\frac{(X_A+X_B)}{H}\sin\beta-2\cos\beta\right]+\frac{a}{\gamma}\frac{H}{\sin\beta}\sin2\beta$$
$$-\frac{b}{\gamma H}\sin2\beta+\sin2\beta+2\sin\beta\cos^2\beta\left[\frac{(X_A+X_B)}{H}\sin\beta-2\cos\beta\right]=0 \qquad \text{(IV-26)}$$

Reemplazando $X_A=H\cot\beta$, $X_B=\lambda H$ y teniendo en cuenta que $\bar{a}=\frac{a}{\gamma}$, y $\bar{b}=\frac{b}{\gamma H}$, resulta:

$$\bar{a}\left(3\cos^2\beta-1\right)\left[\frac{H(\lambda+\cot\beta)}{H}\sin\beta-2\cos\beta\right]+\bar{a}\frac{H}{\sin\beta}\sin2\beta$$
$$-\bar{b}\sin2\beta+\sin2\beta+2\sin\beta\cos^2\beta\left[\frac{H(\lambda+\cot\beta)}{H}\sin\beta-2\cos\beta\right]=0 \qquad \text{(IV-27)}$$

Simplificando:

$$\bar{a}\left\{\left(3\cos^2\beta-1\right)(\lambda\sin\beta-\cos\beta)+2\cos\beta\right\}$$
$$\left\{\sin2\beta\cos\beta\left[(\lambda\sin\beta-\cos\beta)-2\cos\beta\right]+\sin2\beta\right\}-\bar{b}\sin2\beta=0 \qquad \text{(IV-28)}$$

Llamando,

$$\theta_2 = \left(3\cos^2\beta - 1\right)\left(\lambda\sin\beta - \cos\beta\right) + 2\cos\beta$$
$$\mu_2 = \sin 2\beta\cos\beta\left[\left(\lambda\sin\beta - \cos\beta\right) - 2\cos\beta\right] + \sin 2\beta \quad \text{(IV-29)}$$

La ecuación anterior puede expresarse como sigue:

$$\boxed{\bar{a}\theta_2 + \bar{b}\sin^2\beta + \mu_2 = 0} \quad \text{(IV-30)}$$

Resultando un sistema de ecuaciones con las expresiones (IV-21) y (IV-30), lo que permite hallar los parámetros $\bar{a}$ y $\bar{b}$:

$$\begin{cases} \bar{a}\psi_2 + \bar{b}\sin^2\beta = \bar{q} - \xi_2 \\ \bar{a}\theta_2 - \bar{b}\sin 2\beta = -\mu \end{cases} \quad \text{(IV-31)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\bar{a} = \frac{(\bar{q} - \xi_2)\sin 2\beta - \mu_2\sin^2\beta}{\left(\psi_2\sin 2\beta + \theta_2\sin^2\beta\right)} \quad \text{(IV-32)}$$

Igualmente para el parámetro "$\bar{b}$"

$$\bar{b} = \frac{\bar{a}\theta_2 + \mu_2}{\sin 2\beta} \quad \text{(IV-33)}$$

4.1 – Cálculo del Esfuerzo Normal σ_{nn}:

El próximo paso es hallar el esfuerzo normal σ_{nn} , teniendo en cuenta la ecuación (III-12), es decir:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{x'x'}\cos^2(\beta-\alpha) + \sigma_{y'y'}\sin^2(\beta-\alpha) + 2\tau_{x'y'}\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha) \tag{IV-34}$$

Reemplazando las condiciones de contorno $\sigma_{x'x'} = \gamma\cos\beta x'$, $\sigma_{y'y'} = (-\gamma sen\beta - a)y' + b$, y $\tau_{x'y'} = ax'$ indicadas en la ecuación (III-25), la ecuación (IV-34) toma la forma:

$$\sigma_{nn} = x'\left[\gamma\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) - a\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] + \left[(-\gamma\sin\beta - a)y' + b\right]\sin^2(\beta-\alpha) \tag{IV-35}$$

Sustituyendo $x' = x\sin\beta - y\cos\beta$, $y' = x\cos\beta + y\sin\beta$ en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= (x\sin\beta - y\cos\beta)\left[\gamma\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) - a\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] \\ &+ \left[(-\gamma\sin\beta - a)(x\cos\beta + y\sin\beta) + b\right]\sin^2(\beta-\alpha)\end{aligned} \tag{IV-36}$$

Al dividir por γH el esfuerzo normal σ_{nn} expresado en forma adimensional es:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} &= \left(\frac{x}{H}\sin\beta - \frac{y}{H}\cos\beta\right)\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) - \frac{a}{\gamma}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] \\ &+ \left[\frac{b}{\gamma H} - \left(\sin\beta + \frac{a}{\gamma}\right)\left(\frac{x}{H}\cos\beta + \frac{y}{H}\sin\beta\right)\right]\sin^2(\beta-\alpha)\end{aligned} \tag{IV-37}$$

Seguidamente se procede a determinar la variable dependiente “x” en función de la variable “y” , cuya ecuación considerando una superficie de rotura parabólica esta indicada en la ecuación (IV-6) para $0 \le y \le H$.

Adicionalmente, al tener en cuenta que $\bar{a} = \dfrac{a}{\gamma}$ y $\bar{b} = \dfrac{b}{\gamma H}$ la expresión anterior queda:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = &\left\{\lambda\left[2\left(\frac{y}{H}\right)-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right]\sin\beta-\left(\frac{y}{H}\right)\cos\beta\right\}\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha)-\bar{a}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right]\\ &+\left\{\bar{b}-\left(\sin\beta+\bar{a}\right)\left[\lambda\left[2\left(\frac{y}{H}\right)-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right]\cos\beta+\frac{y}{H}\sin\beta\right]\right\}\sin^2(\beta-\alpha)\end{aligned}}$$

(IV-38)

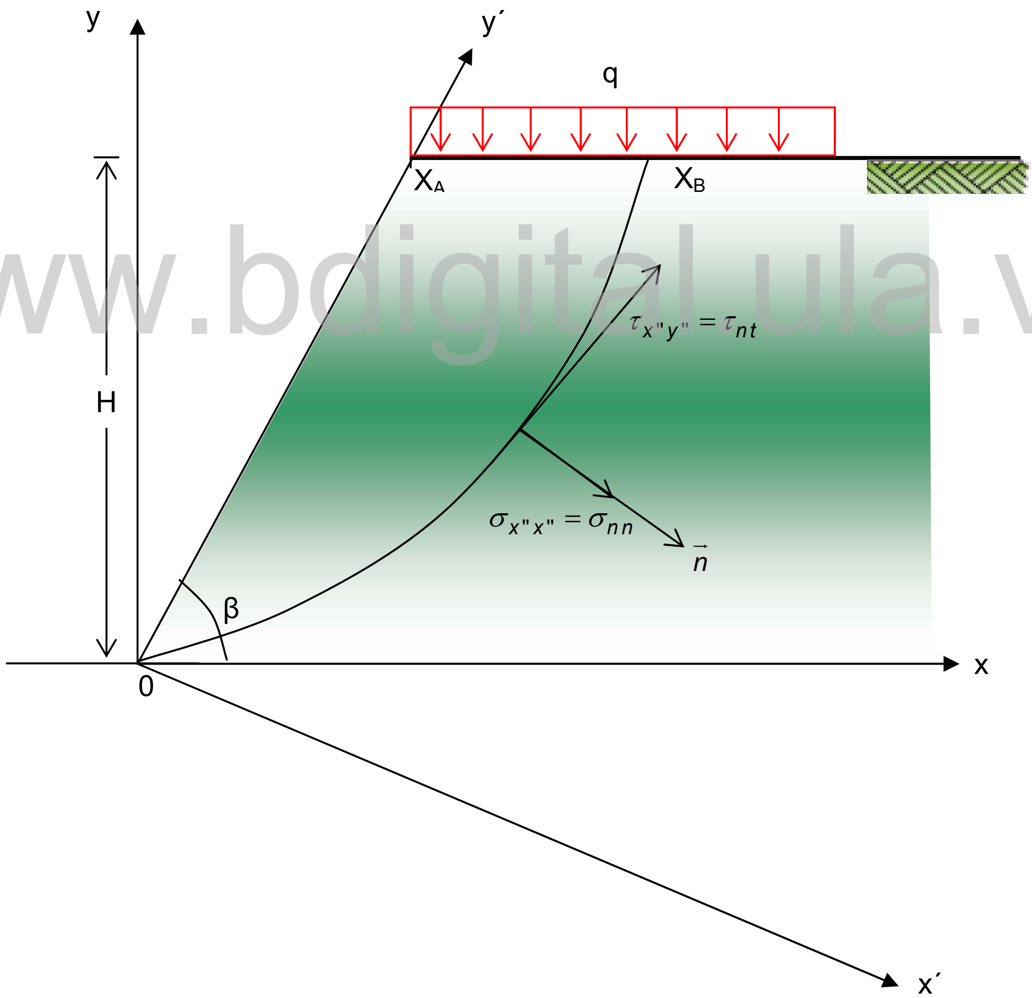


Fig. IV-2 Representación de los esfuerzos normales y de cortantes sobre la superficie de rotura parabólica.

4.2- Cálculo del Esfuerzo Cortante τ_{nt}:

Como se sabe, a través de la ecuación (III-14), el esfuerzo cortante τ_{nt}, puede expresarse como sigue:

$$\tau_{nt} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'}\right) sen\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] + \tau_{x'y'} \cos\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \qquad \text{(IV-39)}$$

Reemplazando los valores de $\sigma_{x'x'} = \gamma \cos \beta x'$, $\sigma_{y'y'} = \left(-\gamma sen\beta - a\right) y' + b$, y $\tau_{x'y'} = ax'$ indicadas en la ecuación (III-25), en (IV-39), se obtiene:

$$\tau_{nt} = \frac{1}{2}\left[\gamma \cos \beta x' + \left(\gamma sen\beta + a\right) y' - b\right] sen\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] + ax' \cos\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \qquad \text{(IV-40)}$$

Sustituyendo $x' = x \sin \beta - y \cos \beta$, $y' = x \cos \beta + y \sin \beta$ en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\tau_{nt} = &\frac{1}{2}\left[\gamma \cos \beta \left(xsen\beta - y \cos \beta\right) + \left(\gamma sen\beta + a\right)\left(x \cos \beta + ysen\beta\right) - b\right] sen\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \\ &+ a\left(xsen\beta - y \cos \beta\right) \cos\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \qquad \text{(IV-41)}\end{aligned}$$

Dividiendo la expresión anterior entre γH queda:

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{nt}}{\gamma H} = &\frac{1}{2}\left[\cos \beta \left(\frac{x}{H} sen\beta - \frac{y}{H} \cos \beta\right) + \left(sen\beta + \frac{a}{\gamma}\right)\left(\frac{x}{H} \cos \beta + \frac{y}{H} sen\beta\right) - \frac{b}{\gamma H}\right] sen\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \\ &+ a\left(\frac{x}{H} sen\beta - \frac{y}{H} \cos \beta\right) \cos\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \qquad \text{(IV-42)}\end{aligned}$$

Seguidamente se procede a expresar la variable dependiente "x" en función de la variable "y" , cuya ecuación considerando una superficie de rotura parabólica esta indicada en la ecuación (IV-6) para $0 \le y \le H$. Por otra parte al considerar que $\bar{a} = \frac{a}{\gamma}$ y $\bar{b} = \frac{b}{\gamma H}$ la expresión anterior puede escribirse como sigue:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\tau_{nt}}{\gamma H} = \frac{1}{2}\Bigg[&\cos\beta\left(\lambda\left(2\left(\frac{y}{H}\right)-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right)sen\beta-\left(\frac{y}{H}\right)\cos\beta\right)+\\ &+\left(sen\beta+\bar{a}\right)\left(\lambda\left(2\left(\frac{y}{H}\right)-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right)\cos\beta+\frac{y}{H}sen\beta\right)-\bar{b}\Bigg]sen\left[2\left(\beta-\alpha\right)\right]+\\ &+\bar{a}\left[\lambda\left(2\left(\frac{y}{H}\right)-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right)sen\beta-\frac{y}{H}\cos\beta\right]\cos\left[2\left(\beta-\alpha\right)\right]\end{aligned}}$$

(IV-43)

Tabla IV-1 Resumen de las ecuaciones involucradas en la rotura parabólica para la determinación de los esfuerzos σ_{nn} y τ_{nt}.

$$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H}=\left\{\lambda\left[2\left(\frac{y}{H}\right)-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right]\sin\beta-\left(\frac{y}{H}\right)\cos\beta\right\}\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha)-\bar{a}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right]$$
$$+\left\{\bar{b}-\left(\sin\beta+\bar{a}\right)\left[\lambda\left[2\left(\frac{y}{H}\right)-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right]\cos\beta+\frac{y}{H}\sin\beta\right]\right\}\sin^2(\beta-\alpha)$$

$$\frac{\tau_{nt}}{\gamma H}=\frac{1}{2}\left[\cos\beta\left(\lambda\left(2\left(\frac{y}{H}\right)-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right)sen\beta-\left(\frac{y}{H}\right)\cos\beta\right)+\right.$$
$$+\left(sen\beta+\bar{a}\right)\left(\lambda\left(2\left(\frac{y}{H}\right)-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right)\cos\beta+\frac{y}{H}sen\beta\right)-\left.\bar{b}\right]sen\left[2(\beta-\alpha)\right]+$$
$$+\bar{a}\left[\lambda\left(2\left(\frac{y}{H}\right)-\left(\frac{y}{H}\right)^2\right)sen\beta-\frac{y}{H}\cos\beta\right]\cos\left[2(\beta-\alpha)\right]$$

Parámetros Involucrados

$$\alpha=\arctan\left[\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(x/\lambda H\right)}}\right)\right]$$

$$\bar{a}=a/\gamma \quad y \quad \bar{b}=b/\gamma H$$

$$\bar{a}=\frac{(\bar{q}-\xi_2)\sin2\beta-\mu_2\sin^2\beta}{\left(\psi_2\sin2\beta+\theta_2\sin^2\beta\right)} \qquad \text{y} \qquad \bar{b}=\frac{\bar{a}\theta_2+\mu_2}{\sin2\beta}$$

Siendo:

$$\psi_2=\left[\frac{3}{2}\sin2\beta\cos\beta-\frac{3}{4}\sin2\beta\sin\beta(\lambda+\cot\beta)-\sin\beta\right]$$

$$\xi_2=\left[\frac{1}{2}\cos\beta\cos2\beta\sin\beta(\lambda+\cot\beta)-\cos^2\beta\cos2\beta-\sin^2\beta\right]$$

$$\theta_2=\left(3\cos^2\beta-1\right)\left(\lambda\sin\beta-\cos\beta\right)+2\cos\beta$$

$$\mu_2=\sin2\beta\cos\beta\left[(\lambda\sin\beta-\cos\beta)-2\cos\beta\right]+\sin2\beta$$

H = Altura del talud, m.

β = Inclinación del talud con la horizontal.

α = Inclinación del plano de falla con la horizontal.

γ = Peso unitario del macizo rocoso, kN/m^3.

4.3- Ejemplo de aplicación:

Se desea hallar sobre una superficie potencial de rotura parabólica, los esfuerzos actuantes teniendo en cuenta los siguientes datos:

Altura del talud H=40,00 m

Inclinación de talud $\beta = 90^{\circ}$

Peso unitario $\gamma = 24,00 \, {}^{kN}\!/_{m^3}$

Sobrecarga $q = 0,00 \, {}^{kN}\!/_{m^2}$

Variable $\lambda = 0,5$

Al considerar las ecuaciones de α y x de la tabla resumen (IV-1) se obtienen los siguientes resultados:

Abscisa	Ordenada	Angulo α	
x (m)	y (m)	α (radianes)	α (grados)
0,00	0,00	0,79	45,00
4,69	5,00	0,85	48,81
8,75	10,00	0,93	53,13
12,19	15,00	1,01	57,99
15,00	20,00	1,11	63,43
17,19	25,00	1,21	69,44
18,75	30,00	1,33	75,96
19,69	35,00	1,45	82,87
20,00	39,99	1,57	89,99

Tabla IV-2 Valores de la superficie de rotura parabólica, considerando que: $x = \left[\lambda\left(2y - {}^{y^2}\!/_{H}\right)\right]$, *obtenidos empleando la hoja de cálculo Excel.*

El gráfico que representa la superficie de rotura parabólica, se ha obtenido empleando la tabla anterior, tal como se muestra a continuación:

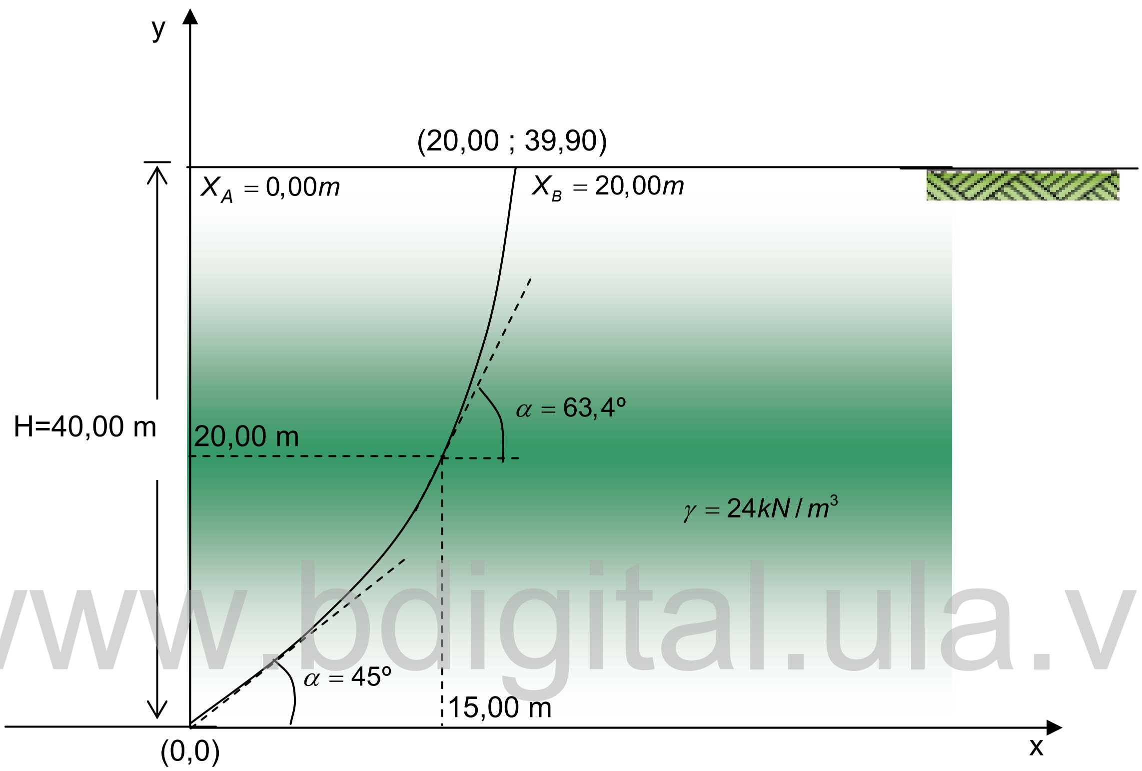


Fig. IV-3 Representación gráfica de la superficie de rotura parabólica.

A través de los parámetros $\bar{a}$ y $\bar{b}$ se han determinado la distribución de los esfuerzos aplicando las ecuaciones analíticas $\sigma_{nn}/\gamma H$ y $\tau_{nt}/\gamma H$ indicadas en la tabla resumen (IV-1):

x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	$\tau_{nt}/\gamma H$
0,00	0,50	0,50
0,12	0,38	0,43
0,22	0,27	0,36
0,30	0,18	0,28
0,38	0,10	0,20
0,43	0,05	0,12
0,47	0,01	0,06
0,49	0,00	0,02
0,50	0,00	0,00

Tabla IV-3 Valores de los esfuerzos normales y de corte expresados en forma adimensional al considerar que la superficie de rotura es parabólica, obtenidos en la hoja de cálculo de Excel.

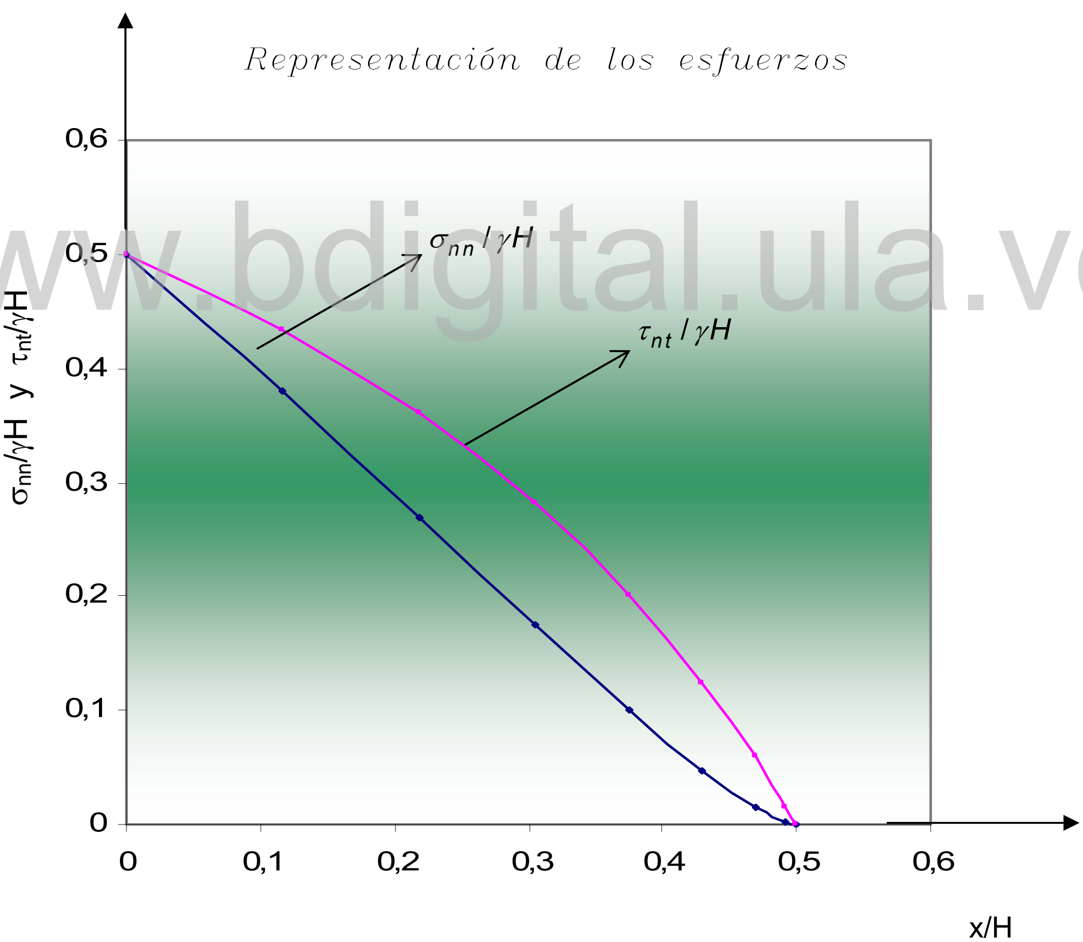
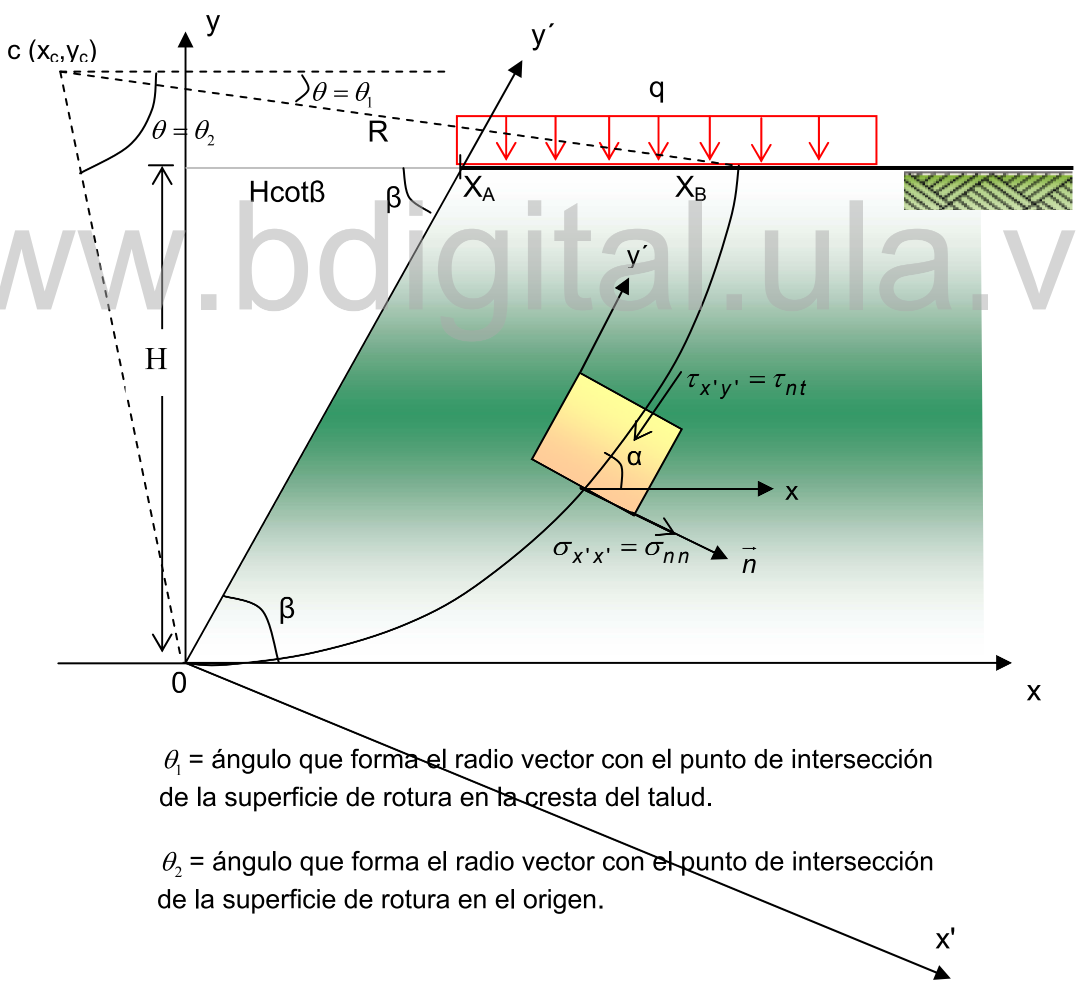


Fig. IV-4 Representación gráfica de los esfuerzos normales y cortantes expresados en forma adimensional al considerar que la superficie de rotura es parabólica.

5.- Método Analítico para Determinar la Distribución de los Esfuerzos Cuya Superficie de Rotura es Circular:

Se analiza un talud con una inclinación (β), y se desea determinar la distribución de los esfuerzos normales y cortantes al considerar que la superficie de rotura es circular. El ángulo que forma la superficie de rotura con la horizontal se denomina α. A continuación se presenta en la fig. (V-1). Las características tomadas en cuenta para este tipo de rotura.



θ_1 = ángulo que forma el radio vector con el punto de intersección de la superficie de rotura en la cresta del talud.

θ_2 = ángulo que forma el radio vector con el punto de intersección de la superficie de rotura en el origen.

Fig. V-1 Representación de la superficie de rotura circular y sus relaciones geométricas.

Para una rotura circular la ecuación de la circunferencia es la siguiente:

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2 \tag{V-1}$$

Siendo, (x_c, y_c) las coordenadas del circulo crítico, tal como se observa en la figura (V-1). Por otra parte, las siguientes condiciones de contorno nos permiten determinar las constantes:

1.- Para efectos prácticos, se ha considerado que la curva pasa por el origen, por lo tanto para x=0, y=0, debe cumplirse que:

$$(x_c)^2+(y_c)^2=R^2 \tag{V-2}$$

2.- Se aprecia a través de la figura (V-1), que para y=H , x =X_B, por lo tanto al emplear la ecuación(V-1), resulta:

$$(X_B-x_c)^2+(H-y_c)^2=R^2 \tag{V-3}$$

De la ecuación anterior al despejar X_B se obtiene que:

$$X_B=\pm\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c \tag{V-4}$$

También X_B puede ser expresada como $X_B=R\cos\theta_1-x_C$. Por lo tanto al sustituir dicho valor en la ecuación (V-4) se obtiene:

$$R\cos\theta_1-x_c=\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c \tag{V-5}$$

Despejando el ángulo θ_1 de la ecuación anterior:

$$\boxed{\theta_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+2x_c}{R}\right)} \tag{V-6}$$

Despejando "y" de la ecuación (V-1), resulta,

$$y = y_c - \sqrt{R^2-(x-x_c)^2} \tag{V-7}$$

´

Al derivar se obtiene la tangente a la curva en función de R, x_c , y la abscisa x, es decir:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(x-x_c)}{\sqrt{R^2-(x-x_c)^2}} \tag{V-8}$$

Como la derivada de ("y") con respecto a ("x") es igual a la tangente de α, la ecuación anterior también tiene la forma:

$$\tan\alpha = \frac{(x-x_c)}{\sqrt{R^2-(x-x_c)^2}} \tag{V-9}$$

Al despejar el ángulo α de la expresión anterior queda:

$$\boxed{\alpha = \arctan\left[\frac{(x-x_c)}{\sqrt{R^2-(x-x_c)^2}}\right]} \tag{V-10}$$

Esta ecuación representa la variación del ángulo de rotura con respecto a la horizontal y sirve para hallar la pendiente a la curva en cualquier punto de coordenadas (x,y).

La ecuación que relaciona los esfuerzos actuando en el plano xy con respecto al plano x'y' es $\sigma_{yy} = \vec{j}^{T} \cdot \overline{\overline{\sigma'}} \cdot \vec{j}$, tal como se indica en la ecuación (III-26) del capítulo III. Por otra parte, al considerar el estado de tensiones: $\sigma_{x'x'} = \gamma \cos\beta x'$, $\sigma_{y'y'} = \left(-\gamma sen\beta - a\right) y' + b$, y $\tau_{x'y'} = ax'$ indicadas en la ecuación (III-25). Finamente aplicando la ecuación (III-31), se obtiene:

$$\sigma_{yy} = x' \left[-\gamma \cos\beta \sin^2\beta - a\cot\beta \sin^2\beta + \gamma \cos^3\beta - a\sin 2\beta \right] + \sin^2\beta \left[-\gamma H \sin^2\beta - a\frac{H}{\sin\beta} + b\sin^2\beta \right] \tag{V-11}$$

Sustituyendo $x' = xsen\beta - y\cos\beta$ en la ecuación anterior:

$$\sigma_{yy} = \left[x\sin\beta - y\cos\beta \right] \left[-\gamma \cos\beta \sin^2\beta - a\cot\beta \sin^2\beta + \gamma \cos^3\beta - a\sin 2\beta \right] + \sin^2\beta \left[-\gamma H - a\frac{H}{\sin\beta} + b \right] \tag{b-V-11}$$

Seguidamente se aplica el caso general en el cual $\tau_{x'y'} = ax' \neq 0$, tal como se ha indicado en el capítulo III. A la vez se ha considerado la condicion de contorno donde el esfuerzo σ_{yy} es igual a la carga "q" en la cresta del talud donde y=H (vease fig. V-1) e integrando dicha expresión a lo largo de la superficie del talud donde está aplicada la carga "q" , es decir, en la cresta del talud donde y=H, resulta:

$$\int_{X_A}^{X_B} \sigma_{yy} dx = q(X_B - X_A) \quad \therefore \quad y = H \tag{V-12}$$

Sustituyendo dicha expresión en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\int_{X_A}^{X_B} \left\{ [x\sin\beta - y\cos\beta] \left[\gamma\cos^3\beta - \gamma\cos\beta\sin^2\beta - a\cot\beta\sin^2\beta - a\sin 2\beta \right] + \sin^2\beta \left[-\gamma H - a\frac{H}{\sin\beta} + b \right] \right\} dx = q(X_B - X_A) \tag{V-13}$$

Simplificando e integrando, resulta:

$$\frac{1}{2}(X_B + X_A)\sin\beta \left[\gamma\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}a\sin 2\beta \right] - H\cos\beta \left[\gamma\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}a\sin 2\beta \right] + \sin^2\beta \left[-\gamma H - a\frac{H}{\sin\beta} + b \right] = q \tag{V-14}$$

Expresando dicha ecuación en forma adimensional al dividir por γH, queda:

$$\frac{1}{2H}(X_B + X_A)\sin\beta \left[\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}\frac{a}{\gamma}\sin 2\beta \right] - \cos\beta \left[\cos\beta\cos 2\beta - \frac{3}{2}\frac{a}{\gamma}\sin 2\beta \right] + \sin^2\beta \left[-1 - \frac{\bar{a}}{\sin\beta} + \frac{b}{\gamma H} \right] = \frac{q}{\gamma H} \tag{V-15}$$

De acuerdo a la figura (V-1) se sabe que: $X_A = H\cot\beta$ y $X_B = \sqrt{R^2 - (H - y_c)^2} + x_c$. Adicionalmente, al reemplazar $\bar{a} = \frac{a}{\gamma}$ y $\bar{b} = \frac{b}{\gamma H}$ la ecuación anterior al sustituir dichos valores toma la forma:

$$\frac{1}{2H}\left(\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c+H\cot\beta\right)\sin\beta\left[\cos\beta\cos2\beta-\frac{3}{2}\bar{a}\sin2\beta\right]$$
$$-\cos\beta\left[\cos\beta\cos2\beta-\frac{3}{2}\bar{a}\sin2\beta\right]+\sin^2\beta\left[-1-\frac{\bar{a}}{\sin\beta}+\bar{b}\right]=\bar{q} \qquad \text{(V-16)}$$

Simplificando y agrupando,

$$\bar{a}\left[-\frac{3}{4H}\left(\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c+H\cot\beta\right)\sin\beta\sin2\beta+\frac{3}{2}\sin2\beta\cos\beta-\sin\beta\right]$$
$$+\left[\frac{1}{2H}\left(\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c+H\cot\beta\right)\sin\beta\cos\beta\cos2\beta-\cos^2\beta\cos2\beta-\sin^2\beta\right]$$
$$+\bar{b}\sin^2\beta=\bar{q}$$

(V-17)

Llamando:

$$\psi_3=\left[-\frac{3}{4H}\left(\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c+H\cot\beta\right)\sin\beta\sin2\beta+\frac{3}{2}\sin2\beta\cos\beta-\sin\beta\right]$$
$$\xi_3=\left[\frac{1}{2H}\left(\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c+H\cot\beta\right)\sin\beta\cos\beta\cos2\beta-\cos^2\beta\cos2\beta-\sin^2\beta\right]$$

(V-18)

Se obtiene:

$$\boxed{\bar{a}\psi_3+\xi_3+\bar{b}\sin^2\beta=\bar{q}} \qquad \text{(V-19)}$$

Por otro lado, es necesario determinar otra condición que relacione los parámetros "a" y "b". Esto se obtiene, a través de la ecuación del esfuerzo cortante actuando en el plano xy con respecto al plano x'y', (III-59) y considerando que la sumatoria de las fuerzas cortantes en la cresta del talud son cero:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{y'y'} - \sigma_{x'x'}\right)\sin 2\beta - \tau_{x'y'}\cos 2\beta \qquad \text{(V-20)}$$

Considerando la condición de borde en la cual:

$$\int_{X_A}^{X_B} \tau_{xy}\, dx = 0 \quad \therefore \quad y = H \qquad \text{(V-21)}$$

Al reemplazar, $\sigma_{x'x'} = \gamma \cos\beta x'$, $\sigma_{y'y'} = \left(-\gamma sen\beta - a\right)y' + b$, y $\tau_{x'y'} = ax'$ previamente indicadas en la ecuación (III-25), en la ecuación anterior resulta:

$$\int_{X_A}^{X_B} \left\{\frac{1}{2}\left(-\left(\gamma\sin\beta + a\right)y' + b - \gamma\cos\beta\, x'\right)\sin 2\beta - a\,x'\cos 2\beta\right\}dx = 0 \qquad \text{(V-22)}$$

Teniendo en cuenta que, $y_{cresta} = y' = x'\cot\beta + \dfrac{H}{\sin\beta}$, e integrando, se obtiene:

$$\frac{\left(X_A + X_B\right)}{2}\sin\beta\left(2\gamma\cos\beta\sin 2\beta + a\left(6\cos^2\beta - 2\right)\right) \qquad \text{(V-23)}$$

$$-H\cos\beta\left(2\gamma\cos\beta\sin 2\beta + a\left(6\cos^2\beta - 2\right)\right) - \left(b - \gamma H - a\frac{H}{\sin\beta}\right)\sin 2\beta = 0$$

Dividiendo por γH y simplificando, la ecuación anterior puede expresarse en forma adimensional como sigue:

$$\frac{a}{\gamma}\left(3\cos^2\beta-1\right)\left[\frac{(X_A+X_B)}{H}\sin\beta-2\cos\beta\right]+\frac{a}{\gamma}\frac{H}{\sin\beta}\sin 2\beta$$
$$-\frac{b}{\gamma H}\sin 2\beta+\sin 2\beta+2\sin\beta\cos^2\beta\left[\frac{(X_A+X_B)}{H}\sin\beta-2\cos\beta\right]=0 \qquad \text{(V-24)}$$

Reemplazando $X_A = H\cot\beta$ y $X_B=\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c$ sabiendo además que $\bar{a}=\frac{a}{\gamma}$, y $\bar{b}=\frac{b}{\gamma H}$, la ecuación anterior se transforma:

$$\bar{a}\left(3\cos^2\beta-1\right)\left[\frac{1}{H}\left(H\cot\beta+\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c\right)\sin\beta-2\cos\beta\right]$$
$$+2\sin\beta\cos^2\beta\left[\frac{1}{H}\left(H\cot\beta+\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c\right)\sin\beta-2\cos\beta\right] \qquad \text{(V-25)}$$
$$+\bar{a}\frac{H}{\sin\beta}\sin 2\beta-\bar{b}\sin 2\beta+\sin 2\beta=0$$

Simplificando,

$$\bar{a}\left\{\left(3\cos^2\beta-1\right)\left[\frac{1}{H}\left(H\cot\beta+\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c\right)\sin\beta-2\cos\beta\right]+2H\cos\beta\right\}$$
$$+2\sin\beta\cos^2\beta\left[\frac{1}{H}\left(H\cot\beta+\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c\right)\sin\beta-2\cos\beta\right]+\sin 2\beta$$
$$-\bar{b}\sin 2\beta=0 \qquad \text{(V-26)}$$

Llamando:

$$\theta_3=\left\{\left(3\cos^2\beta-1\right)\left[\frac{1}{H}\left(H\cot\beta+\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c\right)\sin\beta-2\cos\beta\right]+2H\cos\beta\right\}$$
$$\mu_3=2\sin\beta\cos^2\beta\left[\frac{1}{H}\left(H\cot\beta+\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c\right)\sin\beta-2\cos\beta\right]+\sin 2\beta$$
$$\text{(V-27)}$$

La expresión (V-26) se reduce como sigue:

$$\boxed{\bar{a}\theta_3 + \bar{b}\sin^2\beta + \mu_3 = 0} \qquad \text{(V-28)}$$

En estas condiciones, se obtiene un sistema de ecuaciones a través de (V-19) y (V-28) y por lo tanto los parámetros $\bar{a}$ y $\bar{b}$, resultan:

$$\begin{cases} \bar{a}\psi_3 + \bar{b}\sin^2\beta = \bar{q} - \xi_3 \\ \bar{a}\theta_3 - \bar{b}\sin 2\beta = -\mu_3 \end{cases} \qquad \text{(V-29)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\bar{a} = \frac{(\bar{q} - \xi_3)\sin 2\beta - \mu_3\sin^2\beta}{\left(\psi_3\sin 2\beta + \theta_3\sin^2\beta\right)} \qquad \text{(V-30)}$$

Igualmente para el parámetro "$\bar{b}$", se obtiene:

$$\bar{b} = \frac{\bar{a}\theta_3 + \mu_3}{\sin 2\beta} \qquad \text{(V-31)}$$

5.1 − Cálculo del Esfuerzo Normal σ_{nn}:

El próximo paso es hallar el esfuerzo normal σ_{nn} , teniendo en cuenta la ecuación (III-12), es decir:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{x'x'}\cos^2(\beta-\alpha) + \sigma_{y'y'}\sin^2(\beta-\alpha) + 2\tau_{x'y'}\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha) \qquad \text{(V-32)}$$

Reemplazando las tensiones $\sigma_{x'x'} = \gamma\cos\beta x'$, $\sigma_{y'y'} = (-\gamma sen\beta - a)y' + b$, y $\tau_{x'y'} = ax'$ indicadas en la ecuación (III-25), la ecuación (V-32) toma la forma:

$$\sigma_{nn} = x'\left[\gamma\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) - a\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] + \left[(-\gamma\sin\beta - a)y' + b\right]\sin^2(\beta-\alpha) \tag{V-33}$$

Sustituyendo $x' = x\sin\beta - y\cos\beta$, $y' = x\cos\beta + y\sin\beta$ en la expresión anterior queda:

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= (x\sin\beta - y\cos\beta)\left[\gamma\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) - a\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] \\ &\quad + \left[(-\gamma\sin\beta - a)(x\cos\beta + y\sin\beta) + b\right]\sin^2(\beta-\alpha)\end{aligned} \tag{V-34}$$

Al dividir por γH el espuerzo normal σ_{nn} expresado en forma adimensional es:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} &= \left(\frac{x}{H}\sin\beta - \frac{y}{H}\cos\beta\right)\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha) - \frac{a}{\gamma}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right] \\ &\quad + \left[\frac{b}{\gamma H} - \left(\sin\beta + \frac{a}{\gamma}\right)\left(\frac{x}{H}\cos\beta + \frac{y}{H}\sin\beta\right)\right]\sin^2(\beta-\alpha)\end{aligned} \tag{V-35}$$

Seguidamente se procede a determinar la variable dependiente "x" en función de la variable "y", cuya ecuación considerando una superficie de rotura circular se ha indicado previamente a través de la ecuación (V-1). Adicionalmente, al considerar que $\bar{a} = \dfrac{a}{\gamma}$ y $\bar{b} = \dfrac{b}{\gamma H}$ la expresión anterior toma la forma:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H}=\left\{\left(\frac{\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}+x_c}{H}\right)\sin\beta-\left(\frac{y}{H}\right)\cos\beta\right\}\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha)-\bar{a}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right]$$
$$+\left\{\bar{b}-\left(\sin\beta+\bar{a}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}+x_c}{H}\right)\cos\beta+\left(\frac{y}{H}\right)\sin\beta\right]\right\}\sin^2(\beta-\alpha)$$

(V-36)

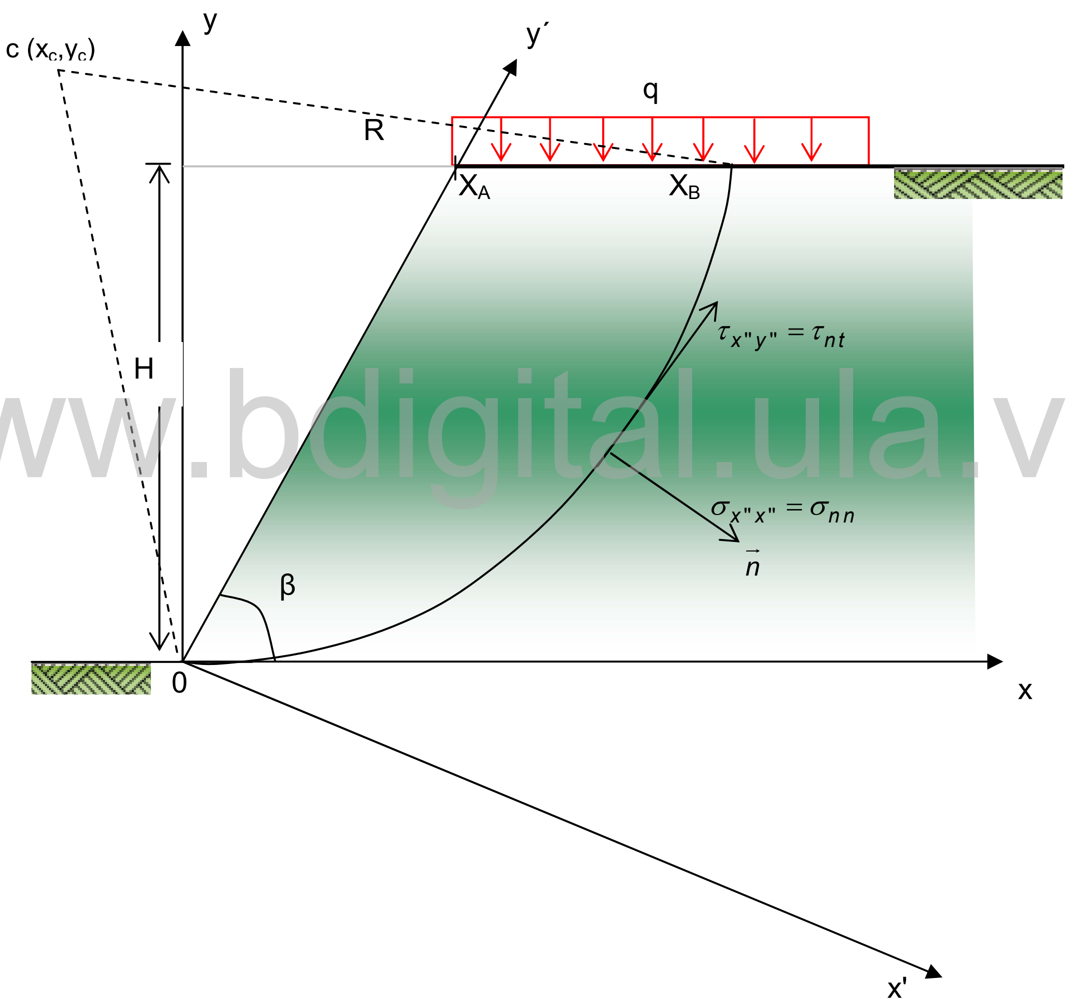


Fig. V-2. Representación de los esfuerzos normales y de cortantes sobre la superficie de rotura circular.

5.2- Cálculo del Esfuerzo Cortante τ_{nt}:

Como se sabe, a través de la ecuación (III-14), el esfuerzo cortante τ_{nt}, puede expresarse como sigue:

$$\tau_{nt} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'}\right) sen\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] + \tau_{x'y'} \cos\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \tag{V-37}$$

Reemplazando las tensiones $\sigma_{x'x'} = \gamma \cos\beta x'$, $\sigma_{y'y'} = \left(-\gamma sen\beta - a\right) y' + b$, y $\tau_{x'y'} = ax'$ indicadas en la ecuación (III-25), en (V-37), se obtiene:

$$\tau_{nt} = \frac{1}{2}\left[\gamma \cos\beta x' + \left(\gamma sen\beta + a\right) y' - b\right] sen\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] + ax' \cos\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \tag{V-38}$$

Sustituyendo $x' = x \sin\beta - y\cos\beta$, $y' = x\cos\beta + y\sin\beta$ en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\tau_{nt} = &\frac{1}{2}\left[\gamma \cos\beta\left(xsen\beta - y\cos\beta\right) + \left(\gamma sen\beta + a\right)\left(x\cos\beta + ysen\beta\right) - b\right] sen\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \\ &+ a\left(xsen\beta - y\cos\beta\right)\cos\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right]\end{aligned} \tag{V-39}$$

Dividiendo la expresión anterior entre γH queda:

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{nt}}{\gamma H} = &\frac{1}{2}\left[\cos\beta\left(\frac{x}{H} sen\beta - \frac{y}{H}\cos\beta\right) + \left(sen\beta + \frac{a}{\gamma}\right)\left(\frac{x}{H}\cos\beta + \frac{y}{H} sen\beta\right) - \frac{b}{\gamma H}\right] sen\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right] \\ &+ \frac{a}{\gamma}\left(\frac{x}{H} sen\beta - \frac{y}{H}\cos\beta\right)\cos\left[2\left(\beta - \alpha\right)\right]\end{aligned} \tag{V-40}$$

Seguidamente se procede a expresar la variable dependiente "x" en función de la variable "y", cuya ecuación considerando una superficie de rotura circular, se ha indicado a través de la ecuación (V-1) . Por otra parte, al considerar que $\bar{a} = \frac{a}{\gamma}$ y $\bar{b} = \frac{b}{\gamma H}$ la expresión anterior queda:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\tau_{nt}}{\gamma H} = \frac{1}{2}\Bigg\{&\cos\beta\left[\left(\frac{\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}+x_c}{H}\right)sen\beta - \frac{y}{H}\cos\beta\right] \\ &+\left(sen\beta+\bar{a}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}+x_c}{H}\right)\cos\beta + \frac{y}{H}sen\beta\right] - \bar{b}\Bigg\}sen\left[2(\beta-\alpha)\right] \\ &+\bar{a}\left[\left(\frac{\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}+x_c}{H}\right)sen\beta - \frac{y}{H}\cos\beta\right]\cos\left[2(\beta-\alpha)\right]\end{aligned}}$$

(V-41)

Tabla V-1 Resumen de las ecuaciones involucradas en la rotura circular para la determinación de los esfuerzos σ_{nn} y τ_{nt}

$$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H}=\left\{\left(\frac{\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}+x_c}{H}\right)\sin\beta-\left(\frac{y}{H}\right)\cos\beta\right\}\left[\cos\beta\cos^2(\beta-\alpha)-\bar{a}\sin\left[2(\beta-\alpha)\right]\right]$$

$$+\left\{\bar{b}-\left(\sin\beta+\bar{a}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}+x_c}{H}\right)\cos\beta+\left(\frac{y}{H}\right)\sin\beta\right]\right\}\sin^2(\beta-\alpha)$$

$$\frac{\tau_{nt}}{\gamma H}=\frac{1}{2}\left\{\cos\beta\left[\left(\frac{\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}+x_c}{H}\right)sen\beta-\frac{y}{H}\cos\beta\right]\right.$$

$$\left.+\left(sen\beta+\bar{a}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}+x_c}{H}\right)\cos\beta+\frac{y}{H}sen\beta\right]-\bar{b}\right\}sen\left[2(\beta-\alpha)\right]$$

$$+\bar{a}\left[\left(\frac{\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}+x_c}{H}\right)sen\beta-\frac{y}{H}\cos\beta\right]\cos\left[2(\beta-\alpha)\right]$$

Parámetros Involucrados

$$\alpha=\arctan\left[\frac{-x+x_c}{\sqrt{R^2-(x-x_c)^2}}\right]\qquad x=x_c+\sqrt{R^2-(y-y_c)^2}$$

$$\bar{a}=a/\gamma,\quad \bar{b}=b/\gamma H\quad y\quad \bar{q}=q/\gamma H$$

$$\bar{a}=\frac{(\bar{q}-\xi_3)\sin2\beta-\mu_3\sin^2\beta}{\left(\psi_3\sin2\beta+\theta_3\sin^2\beta\right)}\qquad \text{y}\qquad \bar{b}=\frac{\bar{a}\theta_3+\mu_3}{\sin2\beta}$$

Siendo,

$$\psi_3=\left[-\frac{3}{4H}\left(\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c+H\cot\beta\right)\sin\beta\sin2\beta+\frac{3}{2}\sin2\beta\cos\beta-\sin\beta\right]$$

$$\xi_3=\left[\frac{1}{2H}\left(\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c+H\cot\beta\right)\sin\beta\cos\beta\cos2\beta-\cos^2\beta\cos2\beta-\sin^2\beta\right]$$

$$\theta_3=\left\{\left(3\cos^2\beta-1\right)\left[\frac{1}{H}\left(H\cot\beta+\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c\right)\sin\beta-2\cos\beta\right]+2H\cos\beta\right\}$$

$$\mu_3=2\sin\beta\cos^2\beta\left[\frac{1}{H}\left(H\cot\beta+\sqrt{R^2-(H-y_c)^2}+x_c\right)\sin\beta-2\cos\beta\right]+\sin2\beta$$

H = Altura del talud, m.

β = Inclinación del talud con la horizontal.

α = Inclinación del plano de falla con la horizontal.

γ = Peso unitario del macizo rocoso, kN/m^3.

5.3- Ejemplo de Aplicación:

Se quiere determinar la distribución de los esfuerzos normales y cortantes en un corte vertical y con las siguientes propiedades geotécnicas:

Altura del talud H=40,00 m

Inclinación de talud $\beta = 90^{\circ}$

Peso unitario $\gamma = 24{,}00 \, {kN}/{m^3}$

Sobrecarga $q = 0{,}00 \, {kN}/{m^2}$

Para efectos de diseño se ha considerado que el centro c(x,y) del círculo tiene de coordenadas $(-60,60)$ y el radio del círculo es: $R = 84{,}85\,m$. Los valores de α y x obtenidos empleando la tabla resumen (V-1) se indican a continuación:

y (m)	x (m)	α (radianes)	α (grados)
0,00	0,00	0,79	45,00
5,00	4,61	0,87	49,60
10,00	8,56	0,94	53,90
15,00	11,94	1,01	57,97
20,00	14,83	1,08	61,87
25,00	17,30	1,15	65,64
30,00	19,37	1,21	69,30
35,00	21,09	1,27	72,86
39,99	22,46	1,33	76,36

Tabla V-2 Valores para la superficie de rotura circular, obtenidos empleando la hoja de cálculo Excel.

El gráfico que representa la superficie de rotura circular, se ha obtenido empleando la tabla anterior, tal como se muestra a continuación:

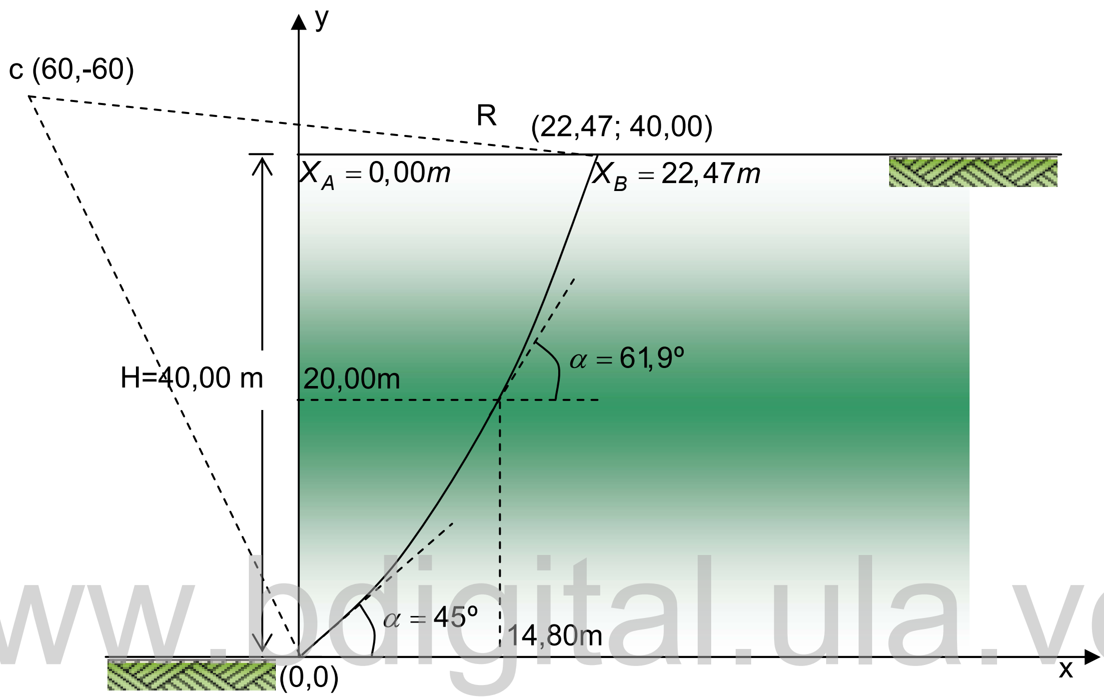


Fig. V-3 Representación gráfica de la superficie de rotura circular.

Aplicando las ecuaciones de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ se determinan los parámetros que posteriormente son usados para calcular la distribución de los esfuerzos aplicando las ecuaciones analíticas $\sigma_{nn} / \gamma H$ y $\tau_{nt} / \gamma H$ expuestas en la tabla resumen (V-1):

x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	$\tau_{nt}/\gamma H$
0,00	0,50	0,50
0,12	0,37	0,43
0,21	0,26	0,36
0,30	0,18	0,28
0,37	0,11	0,21
0,43	0,06	0,14
0,48	0,03	0,08
0,53	0,01	0,04
0,56	0,00	0,00

Tabla V-3 Esfuerzos normales y tangenciales expresados adimensionalmente en términos de γH, obtenidos a través de la hoja de cálculo de Excel.

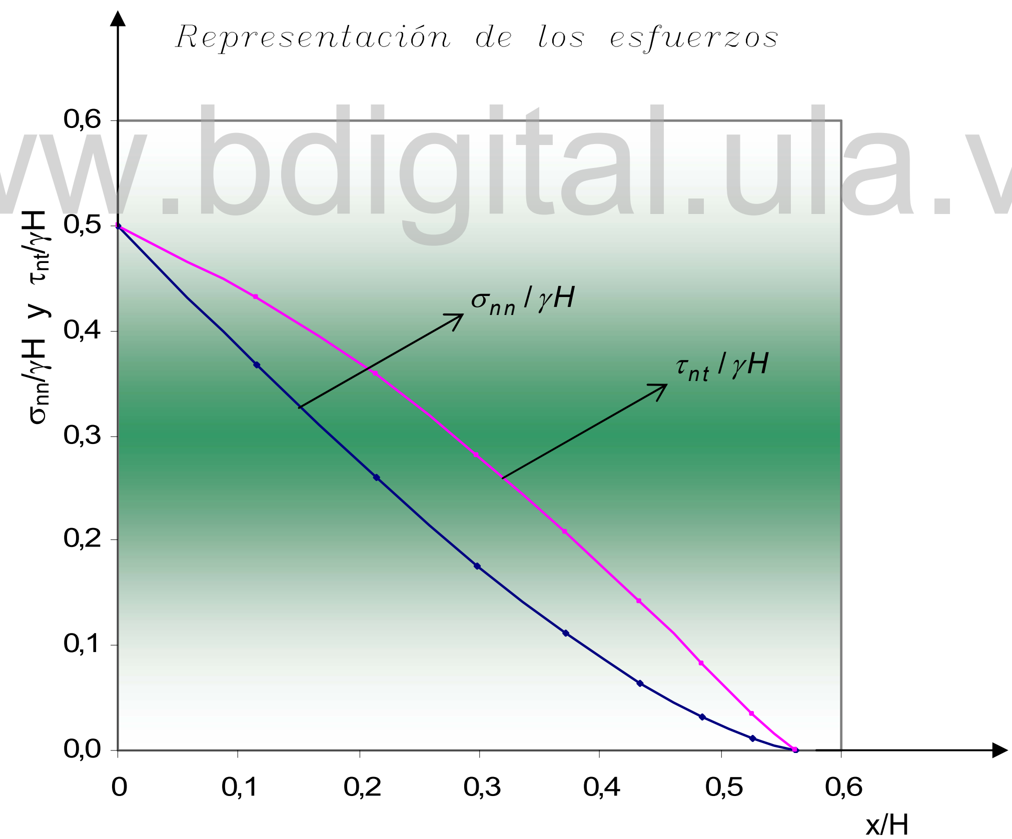


Fig. V-4 Representación gráfica de los esfuerzos normales y cortantes para la superficie de rotura circular investigada.

5.4- Comparación de los Diferentes Métodos Analíticos de Rotura Utilizados para Calcular los Esfuerzos Normales y Cortantes:

En esta sección se lleva a cabo las comparaciones de los diferentes resultados obtenidos para cada una de las roturas estudiadas, es decir plana, parabólica y circular. Un caso de interés a sido descrito por Chen, W. (1975) aplicando el cálculo de variaciones en el cual compara superficies plana, circular y espiral logarítmica obteniendo los siguientes resultados para un talud vertical $\beta = 90º$, ver figura V-5.

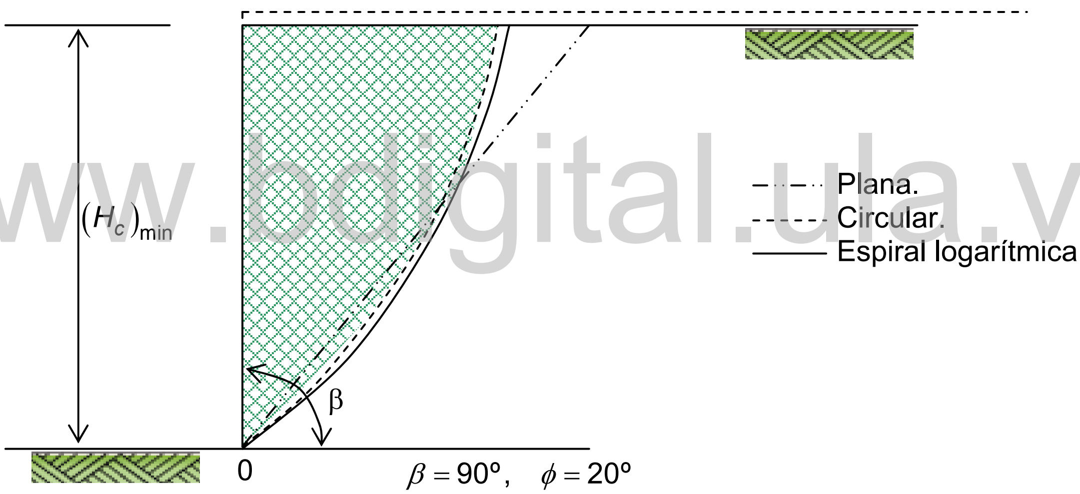


Fig. V-5 Comparación de las superficies de rotura para un talud vertical. Chen (1975).

Asimismo dicho autor comparó los resultados de las tres superficies para un talud con $\beta = 70º$, ver figura V-6.

Se observa que para un talud vertical ($\beta = 90º$) las tres superficies de rotura se mantienen próximas, mientras que para el talud con $\beta = 70º$, la superficie plana tiende a alejarse de las otras dos a medida que nos acercamos a la cresta del talud. Esta diferencia es importante en casos prácticos como la estabilización de un talud inclinado, por cuanto se requerirá al considerar la rotura plana de anclajes más profundos. A la vez se generan costos adicionales en la obra de estabilización, ya que la rotura plana no corresponde a la superficie más crítica.

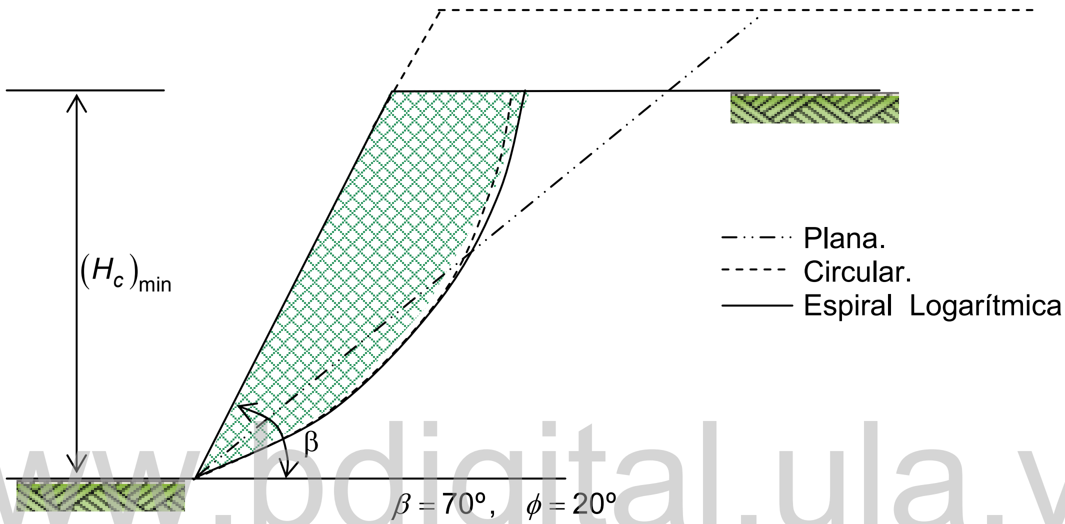


Fig. V-6 Comparación de las superficies de rotura para un talud inclinado. Chen (1975).

Para efectos prácticos, en esta investigación, se ha considerado que en la superficie plana el ángulo de rotura es de α=50º con la horizontal. Adicionalmente la rotura parabólica y circular, se han aproximado lo más cerca posible a la superficie plana con la finalidad de poder comparar la distribución de los esfuerzos normales y cortantes para los tres casos investigados.

Cabe destacar, que el centro c(x,y) de la circunferencia y el parámetro lamda (λ) de la parábola se han variado hasta lograr aproximar las tres superficies.

5.4.1– Ejemplo 1:

Las ecuaciones obtenidas para un corte vertical de altura H=40,00 m, son las siguientes:

1) Superficie plana α=50º
2) Superficie circular el centro c(x,y) del círculo es: c(-60,60).
3) Superficie Parabólica λ=0,5.

Valores en metros.			
y	x (Plana)	x (Parabólica)	x (Circular)
0,00	0,00	0,00	0,00
5,00	4,20	4,69	4,61
10,00	8,39	8,75	8,56
15,00	12,59	12,19	11,94
20,00	16,78	15,00	14,83
25,00	20,98	17,19	17,30
30,00	25,17	18,75	19,37
35,00	29,37	19,69	21,09
40,00	33,56	20,00	22,46

Tabla V-4 Comparación de las coordenadas para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

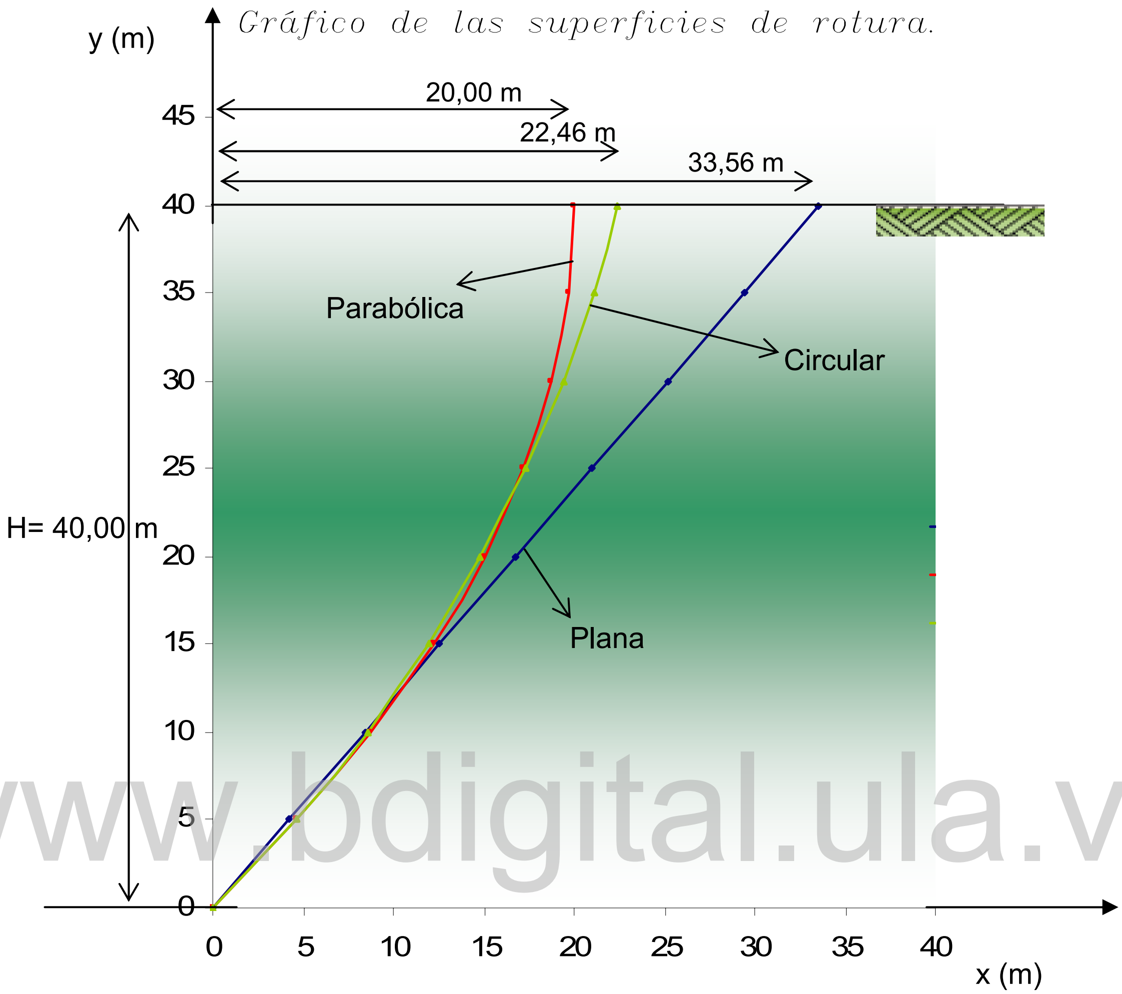


Fig. V-7 Representación y comparación gráfica de las distintas superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

Como puede observarse en el gráfico anterior la rotura plana se encuentra representada por una línea de color azul, la rotura parabólica por una curva de color rojo y la rotura circular por una curva de color verde. Las superficies de rotura se aproximan en el píe del talud hasta la mitad de la altura, luego debido a la características de la superficie plana, ésta se aleja en la cresta del talud, al compararse con las otras dos superficies (parabólica y circular) que se aproximan.

La variación de los esfuerzos normales y cortantes[*3] para cada uno de los métodos analíticos investigados al emplear las fórmulas previamente desarrolladas para cada una de las superficies estudiadas, es decir, plana, parabólica y circular, se indica en la tabla adjunta.

Primero se representa el esfuerzo normal σ_{nn} para cada uno de los métodos analíticos y se comparan tanto en tablas como gráficamente.

	$\sigma_{nn}/\gamma H$					
	Plana		Parabólica		Circular	
y (m)	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H
0,00	0,41	0,00	0,50	0,00	0,50	0,00
5,00	0,36	0,10	0,38	0,12	0,37	0,12
10,00	0,31	0,21	0,27	0,22	0,26	0,21
15,00	0,26	0,31	0,18	0,30	0,18	0,30
20,00	0,21	0,42	0,10	0,38	0,11	0,37
25,00	0,15	0,52	0,05	0,43	0,06	0,43
30,00	0,10	0,63	0,01	0,47	0,03	0,48
35,00	0,05	0,73	0,00	0,49	0,01	0,53
40,00	0,00	0,84	0,00	0,50	0,00	0,56

Tabla V-5 Valores de $\sigma_{nn} / \gamma H$, para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica, circular), obtenidos a través de la hoja de cálculo Excel.

[*3] Conocido también como esfuerzo tangencial o de cizallamiento.

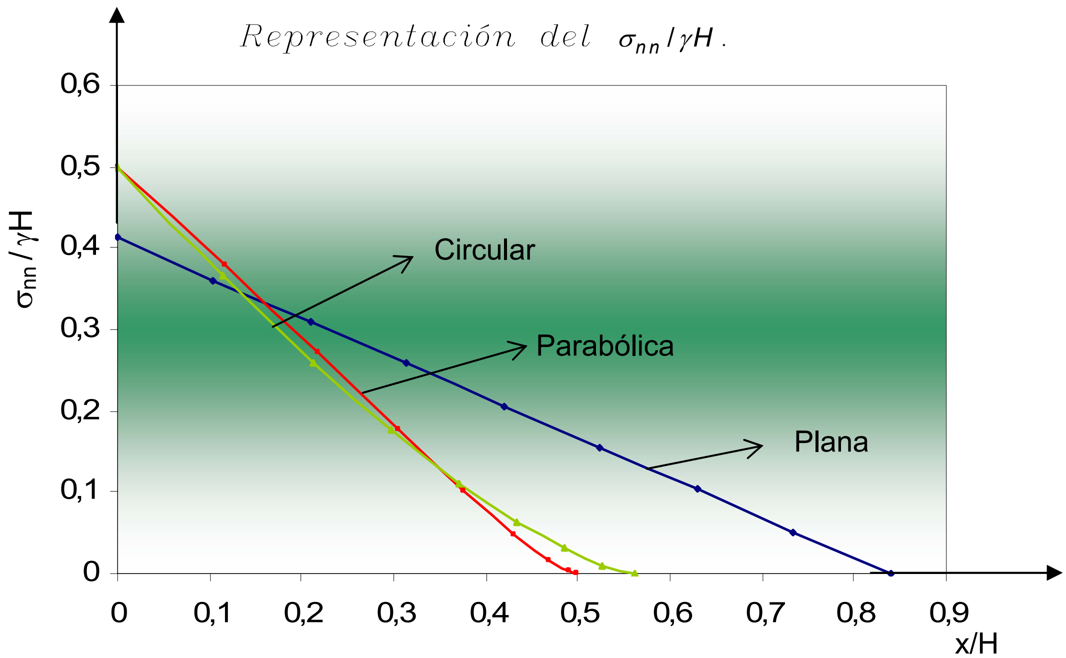


Fig. V-8 Representación y comparación gráfica de $\sigma_{nn}/\gamma H$ para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

Nótese que en el pie del talud (x=0) los esfuerzos normales, al considerar la superficie parabólica y circular presentan el mismo valor, aproximadamente de $\sigma_{nn}/\gamma H$ = 0,50 respectivamente. Por otra parte, en la rotura plana el valor de $\sigma_{nn}/\gamma H$ = 0,41. Cabe destacar que la distribución de los esfuerzos normales en el intervalo $0,00 \leq y \leq 15,00 \quad m$ de la altura del talud las tres superficies investigadas arrojan valores cercanos como puede notarse en la tabla (V-5). Adicionalmente, las superficies parabólica y circular tienen valores muy parecidos de $\sigma_{nn}/\gamma H$ mientras que la rotura plana se aleja por ser la característica de una recta. También se observa que la superficie plana con respecto a las otras dos se intersecan en el punto de $\sigma_{nn}/\gamma H = 0,33$, x/H=0,18 donde se puede decir que el esfuerzo normal es igual.

En segundo lugar se determina el esfuerzo cortante τ_{nt}, empleando las fórmulas ya descritas para cada uno de los métodos analíticos de rotura plana, parabólica y circular. En la tabla siguiente se comparan los valores adimensionales de $\tau_{nt}/\gamma H$, considerando las mencionadas superficies de rotura:

	$\tau_{nt}/\gamma H$					
	Plana		Parabólica		Circular	
y (m)	$\tau_{nt}/\gamma H$	x/H	$\tau_{nt}/\gamma H$	x/H	$\tau_{nt}/\gamma H$	x/H
0,00	0,49	0,00	0,50	0,00	0,50	0,00
5,00	0,43	0,10	0,43	0,12	0,43	0,12
10,00	0,37	0,21	0,36	0,22	0,36	0,21
15,00	0,31	0,31	0,28	0,30	0,28	0,30
20,00	0,25	0,42	0,20	0,38	0,21	0,37
25,00	0,18	0,52	0,12	0,43	0,14	0,43
30,00	0,12	0,63	0,06	0,47	0,08	0,48
35,00	0,06	0,73	0,02	0,49	0,04	0,53
40,00	0,00	0,84	0,00	0,50	0,00	0,56

Tabla V-6 Valores de $\tau_{nt}/\gamma H$, para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica, circular), obtenidos a través de la hoja de cálculo Excel.

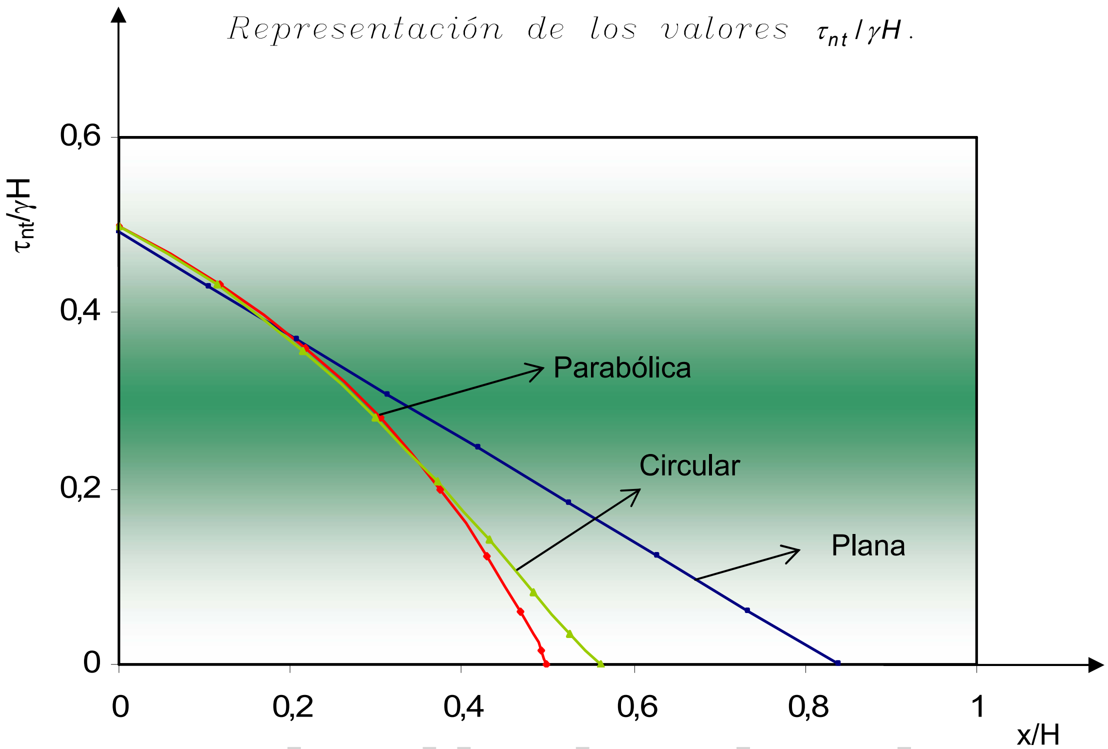


Fig. V-9 Representación y comparación gráfica de $\tau_{nt}/\gamma H$ para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

Nótese que en el pie del talud (x=0) los esfuerzos cortantes al considerar las tres superficie investigadas presentan valores aproximados de $\tau_{nt}/\gamma H$ = 0,50 respectivamente. Por otra parte, la distribución de los esfuerzos cortantes en el intervalo $0{,}00 \le y \le 20{,}00 \quad m$ de la altura del talud, las tres superficies investigadas arrojan valores cercanos como puede notarse en la tabla (V-6). Adicionalmente, la superficie parabólica y circular, tienen valores muy parecidos de $\tau_{nt}/\gamma H$ mientras que la rotura plana se aleja por tener pendiente constante. También se observa que la superficies se intersecan en el punto de $\tau_{nt}/\gamma H = 0{,}38$, x/H=0,22 donde se puede decir que el esfuerzo cortante es igual.

5.4.2- Ejemplo 2:

A través de la metodología utilizada por Ucar, R. (2004) en su libro de Manual de anclajes se ha obtenido el mínimo factor de seguridad para una rotura plana considerando, ángulo de fricción interna $\phi = 30°$, ángulo de rotura $\alpha = (45° + \phi/2) = 60°$ .La altura crítica del corte vertical (FS = 1), se obtiene a través de la bien conocida expresión:

$$H_C = \frac{4c}{\gamma}\tan(45° + \phi/2)$$

Por lo tanto, si $\phi = 30°$, $c = 40{,}00\ kN/m^2$ y $\gamma = 20{,}00\ kN/m^3$, resulta que:

$H_C = 13{,}86\ m$.

Los resultados arrojados con ayuda de la hoja de cálculo Excel son los siguientes, como se puede observar en la tabla y gráfica anexa:

Valores en metros			
y	x (Plana)	x (Parabólica)	x (Circular)
0,00	0,00	0,00	0,00
2,00	1,15	2,15	2,49
4,00	2,31	3,97	4,28
6,00	3,46	5,45	5,62
8,00	4,62	6,60	6,61
10,00	5,77	7,41	7,32
12,00	6,93	7,89	7,78
13,00	7,51	8,01	7,92
13,80	7,97	8,04	7,99

Tabla V-7 Comparación de las coordenadas para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

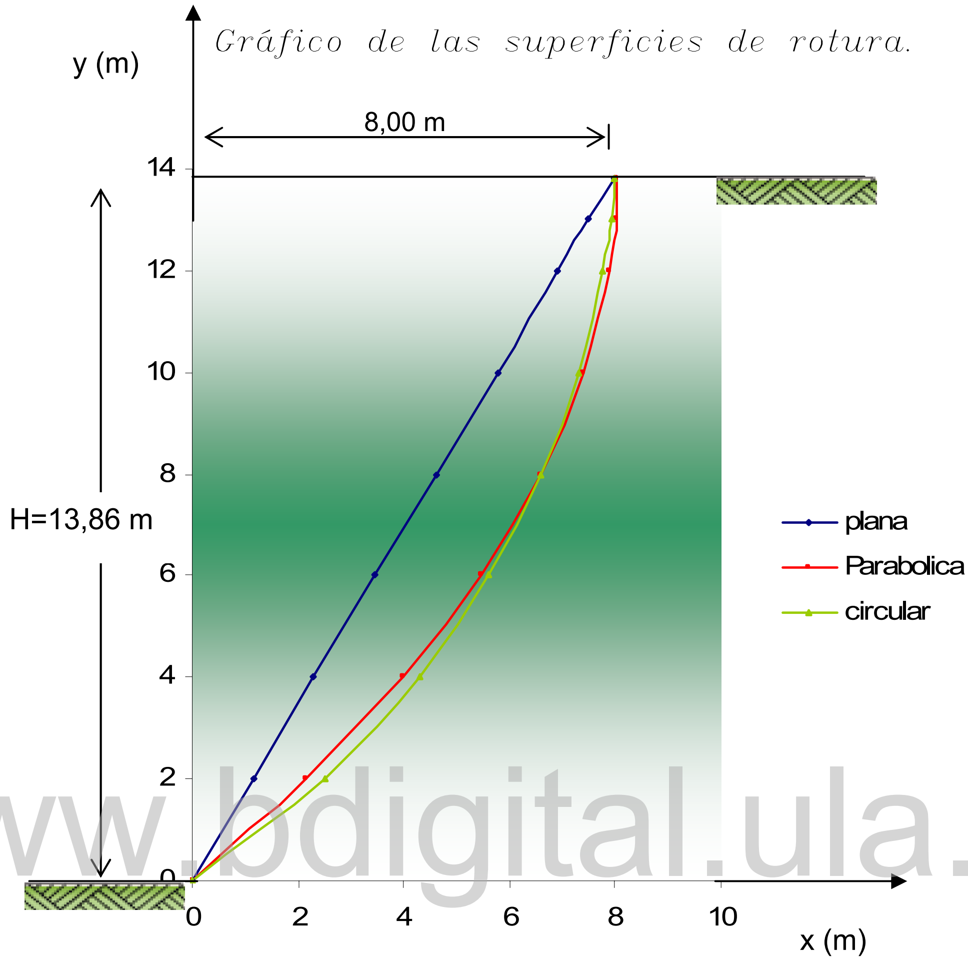


Fig. V-10 Representación y comparación gráfica de las distintas superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

Cabe destacar que en el gráfico anterior la rotura plana se encuentra representada por una línea de color azul, la rotura parabólica por color rojo y la rotura circular por un color verde. Nótese que se hizo coincidir el tope y el pie del talud para las tres superficies potenciales de rotura estudiadas, es decir, el valor en la cresta del talud para la superficie plana es aproximadamente igual a la superficie circular y parabólica teniendo un valor de 8 m respectivamente, y para el pie del talud los valores se aproximan a cero.

Posteriormente se calculan los esfuerzos normales y cortantes para cada uno de los métodos analíticos investigados, utilizando las formulas previamente determinadas en capítulos anteriores para cada una de las superficies: plana, parabólica y circular se observan los valores de $\sigma_{nn} / \gamma H$ en función de la cota (y), junto con la relación x/H.

	$\sigma_{nn}/\gamma H$					
	Plana		Parabólica		Circular	
y (m)	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H
0,00	0,25	0,00	0,57	0,00	0,69	0,00
2,00	0,21	0,08	0,42	0,16	0,44	0,18
4,00	0,18	0,17	0,29	0,29	0,26	0,31
6,00	0,14	0,25	0,17	0,39	0,14	0,41
8,00	0,11	0,33	0,08	0,48	0,06	0,48
10,00	0,07	0,42	0,03	0,54	0,02	0,53
12,00	0,03	0,50	0,00	0,57	0,00	0,56
13,00	0,02	0,54	0,00	0,58	0,00	0,57
13,80	0,00	0,58	0,00	0,58	0,00	0,58

Tabla V-8 Valores de $\sigma_{nn} / \gamma H$, para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica, circular), obtenidos a través de la hoja de cálculo Excel.

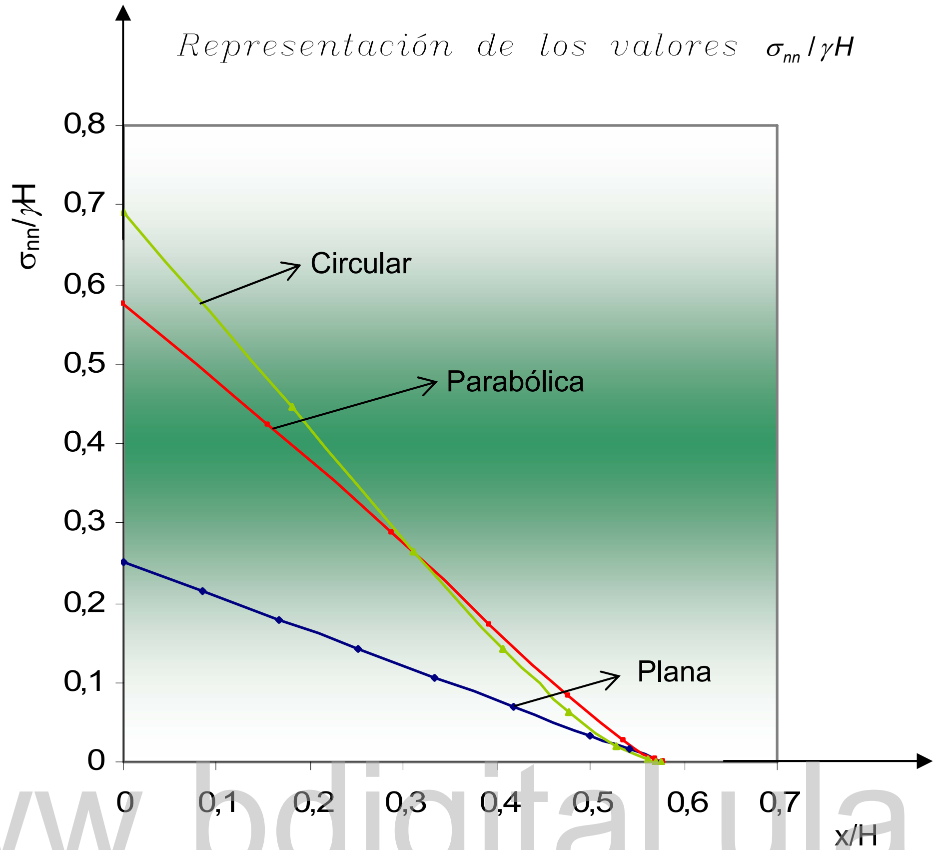


Fig. V-11 Representación y comparación gráfica de $\sigma_{nn}/\gamma H$ para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

Nótese que en el pie del talud (x=0) los valores de $\sigma_{nn}/\gamma H$ tanto para la superficie parabólica como la circular se aproximan tomando valores de 0,57 y 0,69 respectivamente, los resultados obtenidos para la rotura plana está alrededor de $\sigma_{nn}/\gamma H$ = 0,25. Por otra parte, la distribución de los esfuerzos converge cuando y = 13,85 m, es decir, en el tope del talud tanto en la rotura plana, parabólica y circular tienden a ser cero. También se puede notar que tanto la rotura parabólica como la circular tienen valores muy parecidos para los diferentes puntos tomados a lo largo de las superficies potenciales de rotura.

En segundo lugar se representa el esfuerzo de cortante τ_{nt}, y la relación $\tau_{nt}/\gamma H$ empleando las fórmulas desarrolladas para cada uno de los métodos analíticos de rotura plana, parabólica y circular se comparan en la tabla siguiente:

	$\tau_{nn}/\gamma H$					
	Plana		Parabólica		Circular	
y (m)	$\tau_{nn}/\gamma H$	x/H	$\tau_{nn}/\gamma H$	x/H	$\tau_{nn}/\gamma H$	x/H
0,00	0,43	0,00	0,49	0,00	0,46	0,00
2,00	0,37	0,08	0,43	0,16	0,43	0,18
4,00	0,31	0,17	0,35	0,29	0,34	0,31
6,00	0,25	0,25	0,26	0,39	0,25	0,41
8,00	0,18	0,33	0,17	0,48	0,15	0,48
10,00	0,12	0,42	0,08	0,54	0,07	0,53
12,00	0,06	0,50	0,02	0,57	0,02	0,56
13,00	0,03	0,54	0,00	0,58	0,01	0,57
13,80	0,00	0,58	0,00	0,58	0,00	0,58

Tabla V-9 Valores de $\tau_{nt}/\gamma H$, para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica, circular), obtenidos a través de la hoja de cálculo Excel.

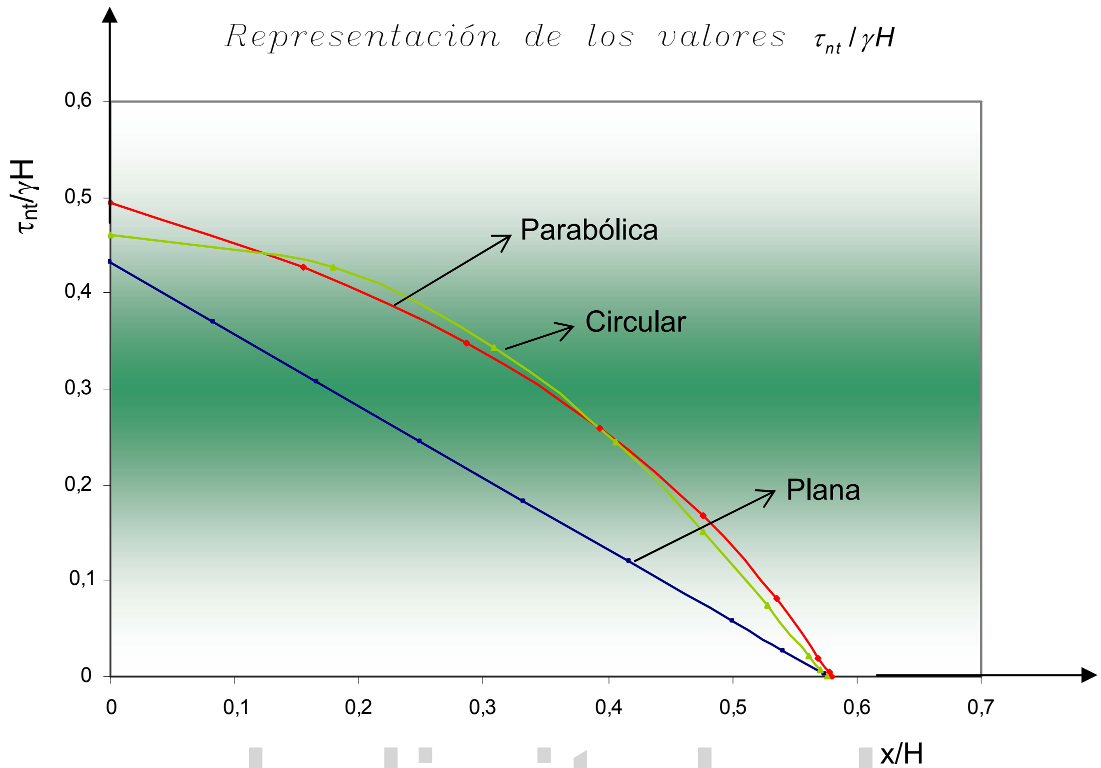


Fig. V-12 Representación y comparación gráfica de $\tau_{nt} / \gamma H$ para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

Comparando los resultados en el pie del talud (x=0) se observa una buena aproximación para los tres casos estudiados. Los valores obtenidos son de $\tau_{nt} / \gamma H$ igual a 0,43 (plana); 0,49(parabólica) y 0,46 (circular). También se observan valores muy semejantes de $\tau_{nt} / \gamma H$ para diferentes valores de (x/H) al considerar las superficies potenciales de rotura parabólica y circular. Por otra parte, en el tope del talud todos los resultados convergen siendo $\tau_{nt} / \gamma H$ =0,00 para los tres casos estudiados.

Adicionalmente, para las diferentes superficies de rotura se han determinado los esfuerzos normales y cortantes promedios. Los resultados se indican en el capitulo III del ejemplo 3 considerando la superficie de rotura plana. Para el caso de la rotura parabólica y circular los valores promedios de $\sigma_{nn} / \gamma H$ y

$\tau_{nt} / \gamma H$ se determinan aproximando los resultados por mínimos cuadrados con el método de regresión polinomial que se encuentra desarrollado en el anexo (C), a través del cual se han obtenido los siguientes resultados. Para la superficie parabólica:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = 0{,}0781x^2 - 1{,}0569x + 0{,}5788$$
$$\frac{\tau_{nt}}{\gamma H} = -1{,}2445x^2 - 0{,}1062x + 0{,}4874$$

Posteriormente, aplicando el teorema del valor medio previamente indicado a través de la ecuación (III-95) a las dos expresiones polinomiales entre los limites $x_A = 0$ y $x_B = \lambda H = 0{,}58 \cdot 13{,}86 = 8{,}04\ m$ se obtiene el esfuerzo normal y cortante promedio para la superficie parabólica indicada en la tabla (V-9). Así mismo se obtiene para la superficie circular los esfuerzos aproximados por medio de polinomios de segundo grado:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = 0{,}7047x^2 - 1{,}639x + 0{,}699$$
$$\frac{\tau_{nt}}{\gamma H} = -1{,}5713x^2 + 0{,}1017x + 0{,}4613$$

Los valores promedios de las relaciones $\sigma_{nn} / \gamma H$ y $\tau_{nt} / \gamma H$ arriba indicados al integrar de la misma manera que en el caso anterior, y conociendo que el centro del circulo es $(-10\,,15)$ m y el radio es R=18,03 m, los limites son $x_A = 0$ y $x_B = \sqrt{R^2 - (H - y_c)^2} - x_c = 8{,}83\ m$.

	Plana	Parabólica	Circular
$\sigma_{nn}/\gamma H$	0,125	0,281	0,273
$\tau_{nt}/\gamma H$	0,217	0,317	0,281
FS	1	0,96	1,07

Tabla V-10. Comparación de los esfuerzos promedios de los tres métodos analíticos investigados de superficies potenciales de rotura.

Al comparar los tres métodos estudiados, la distribución de los esfuerzos normales y cortantes para superficies de rotura parabólica y circular presentan valores cercanos, mientras que hay diferencias importantes con respecto a la rotura plana.

5.4.3- Ejemplo 3:

Considerando una excavación en roca meteorizada con los siguientes parámetros. Comparar las tres superficies potenciales de rotura investigadas, para el caso de un talud inclinado.

H =40,00 m

H1 =0 (presencia de agua).

β =85°

C=312,90 kN/m^2.

γ =24,00 kN/m^3.

q =0,00 kN/m^2. (sobrecarga).

ϕ=30°

α=45° [*1]

[*1] El valor de se obtiene del ejemplo numérico (1.3) del libro Manual de Anclajes en Ingeniería Civil, Ucar (2004).

Los resultados obtenidos con ayuda de la hoja de cálculo Excel para las diferentes superficies de roturas estudiadas son los siguientes:

Valores en metros.			
y	x (plana)	x (parabólica)	x (circular)
0,00	0,00	0,00	0,00
5,00	5,00	6,56	5,83
10,00	10,00	12,25	10,76
15,00	15,00	17,06	15,00
20,00	20,00	21,00	18,65
25,00	25,00	24,06	21,81
30,00	30,00	26,25	24,53
35,00	35,00	27,56	26,85
40,00	40,00	28,00	28,82

Tabla V-11 Comparación de las coordenadas para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular) para un talud inclinado.

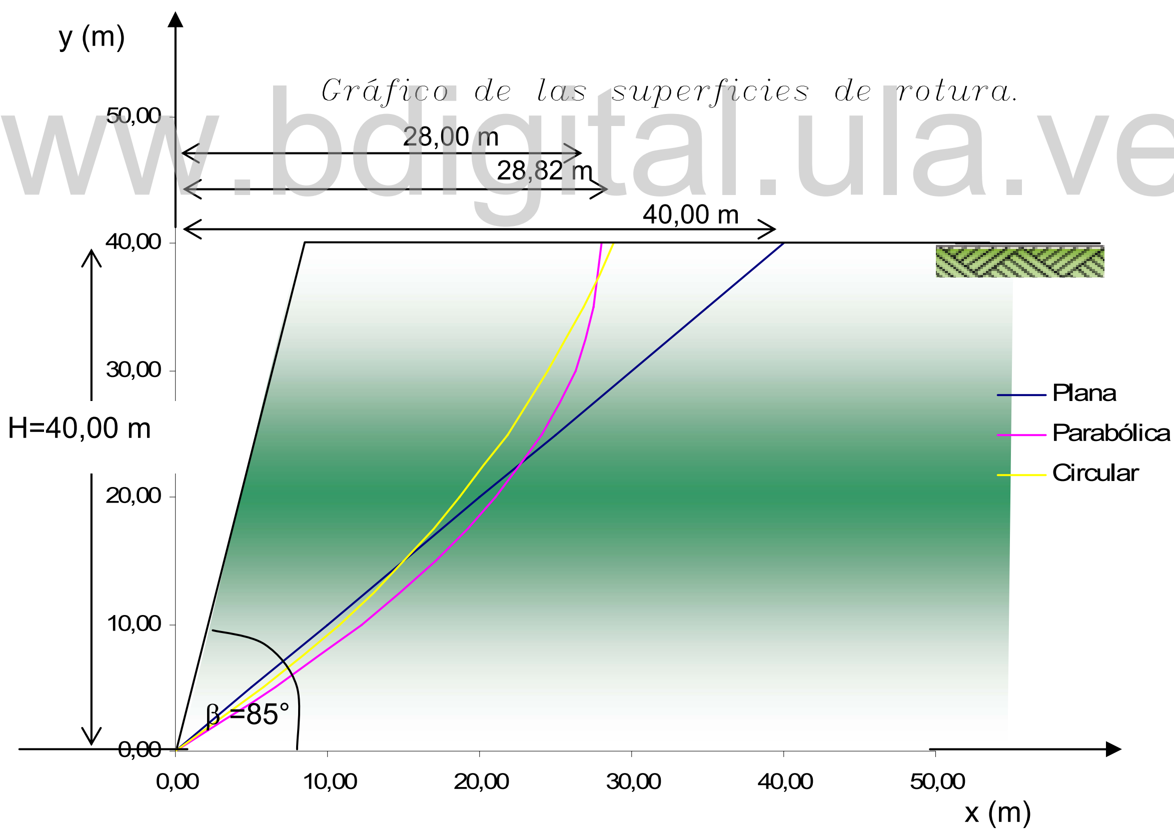


Fig. V-13 Representación y comparación gráfica de las distintas superficies de rotura (plana, parabólica y circular) para un talud inclinado.

Cabe destacar que en el gráfico anterior la rotura plana se encuentra representada por una línea de color azul, la rotura parabólica por color rojo y la rotura circular por un color amarillo. Nótese que en los primeros 20,00 m de altura, las coordenadas de los puntos de las superficies potenciales de rotura estudiadas se aproximan bien. Por otra parte, para valores de x > 20,00 m la superficie plana se aleja de la rotura parabólica y circular. Adicionalmente, estas dos últimas superficies presentan valores aproximados entre sus coordenadas, acercándose más alrededor de la cresta del talud. Posteriormente se calculan los esfuerzos normales y cortantes para cada uno de los métodos analíticos investigados, utilizando las fórmulas halladas en capítulos anteriores, tabla resumen (III-1; IV-1; V-1) para cada una de las superficies: plana, parabólica y circular. A continuación, en la tabla anexa se indican los valores de $\sigma_{nn} / \gamma H$,

	$\sigma_{nn}/\gamma H$					
	Plana		Parabólica		Circular	
y (m)	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H
0,00	0,43	0,00	0,61	0,00	0,55	0,00
5,00	0,38	0,13	0,47	0,16	0,40	0,15
10,00	0,33	0,25	0,34	0,31	0,29	0,27
15,00	0,28	0,38	0,23	0,43	0,21	0,38
20,00	0,23	0,50	0,14	0,53	0,14	0,47
25,00	0,18	0,63	0,08	0,60	0,10	0,55
30,00	0,13	0,75	0,05	0,66	0,07	0,61
35,00	0,08	0,88	0,05	0,69	0,06	0,67
40,00	0,03	1,00	0,06	0,70	0,05	0,72

Tabla V-12 Valores Excel de $\sigma_{nn} / \gamma H$, para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica, circular) para un talud inclinado, obtenidos a través de la hoja de cálculo.

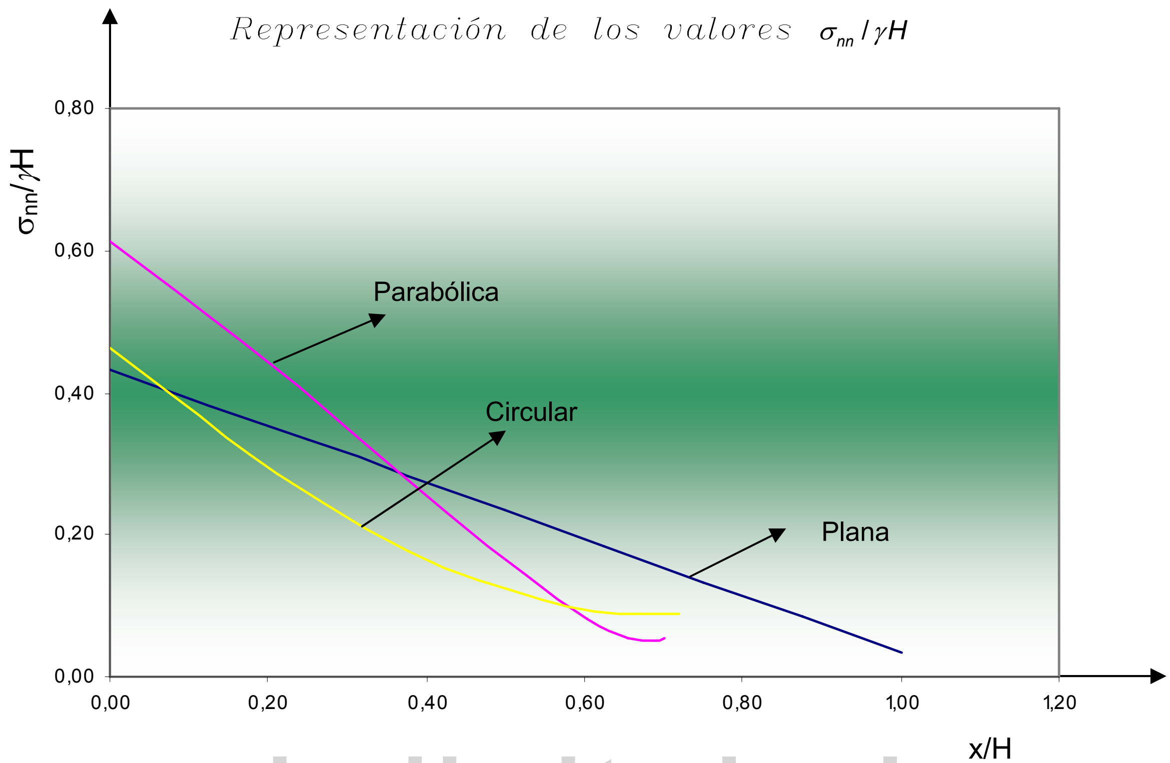


Fig. V-14 Representación y comparación gráfica de $\sigma_{nn}/\gamma H$ para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular) para un talud inclinado.

En la figura anterior se observa la variación de los esfuerzos normales expresados en forma adimensional para cada una de las superficies estudiadas. Nótese que los resultados no se aproximan pero se tienen valores de distribución que van disminuyendo de la base al tope del talud.

En segundo lugar se representa el esfuerzo de cortante τ_{nt}, y la relación $\tau_{nt}/\gamma H$ empleando las fórmulas desarrolladas para cada uno de los métodos analíticos de rotura plana, parabólica y circular y se comparan en la tabla siguiente:

	$\tau_{nt}/\gamma H$					
	Plana		Parabólica		Circular	
y (m)	$\tau_{nt}/\gamma H$	x/H	$\tau_{nt}/\gamma H$	x/H	$\tau_{nt}/\gamma H$	x/H
0,00	0,51	0,00	0,52	0,00	0,51	0,00
5,00	0,44	0,13	0,45	0,16	0,44	0,15
10,00	0,37	0,25	0,37	0,31	0,35	0,27
15,00	0,30	0,38	0,28	0,43	0,27	0,38
20,00	0,23	0,50	0,19	0,53	0,19	0,47
25,00	0,16	0,63	0,10	0,60	0,12	0,55
30,00	0,08	0,75	0,03	0,66	0,06	0,61
35,00	0,01	0,88	0,01	0,69	0,01	0,67
40,00	0,06	1,00	0,01	0,70	0,02	0,72

Tabla V-13 Valores de $\tau_{nt}/\gamma H$, para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica, circular) para un talud inclinado, obtenidos a través de la hoja de cálculo Excel.

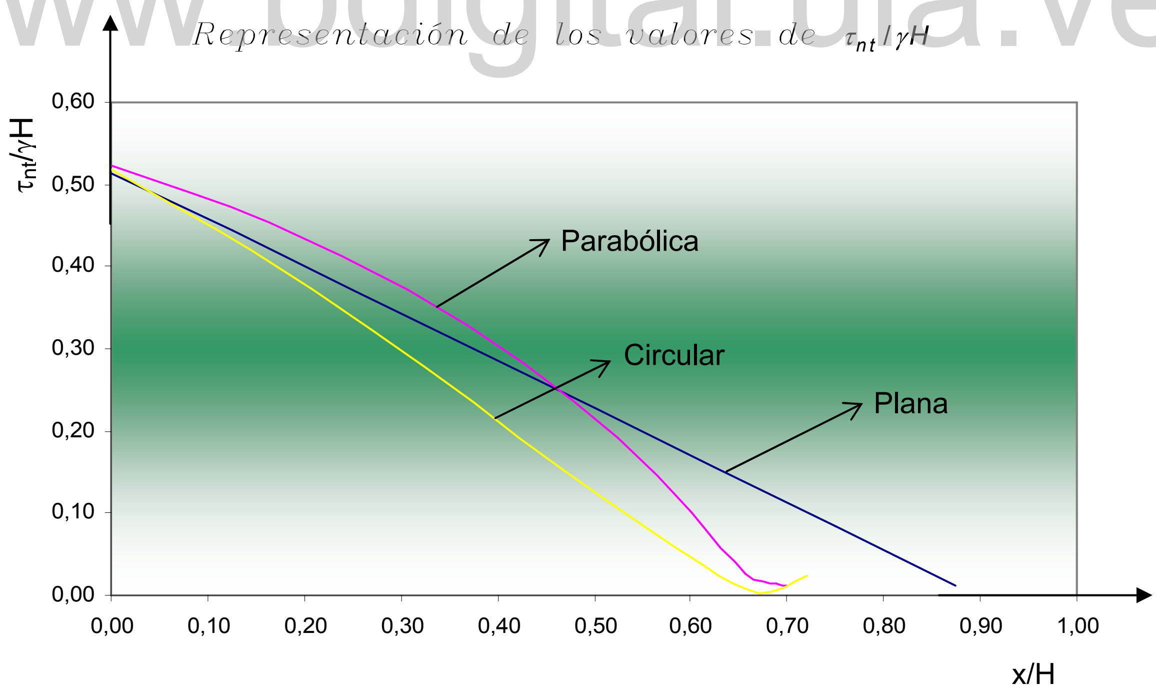


Fig. V-15 Representación y comparación gráfica de $\tau_{nt}/\gamma H$ para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular) para un talud inclinado.

Comparando los resultados se observa la diferencia de valores para cada una de las superficies estudiadas y la disminución del esfuerzo cortante de la base a la cresta del talud.

Adicionalmente, para las diferentes superficies de rotura se han determinado los esfuerzos normales y cortantes promedios. Para la rotura plana se aplica la ecuación (III- 99) y (III-103), los resultados se observan en la tabla (V-14), para el caso de la rotura parabólica y circular los valores promedios de $\sigma_{nn}/\gamma H$ y $\tau_{nt}/\gamma H$ se determinan aproximando los resultados por mínimos cuadrados con el método de regresión polinomial que se encuentra desarrollado en el anexo (C) obteniéndose los siguientes resultados para la superficie parabólica:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = 0{,}276x^2 - 1{,}033x + 0{,}623$$

$$\frac{\tau_{nt}}{\gamma H} = -0{,}639x^2 - 0{,}304x + 0{,}524$$

Posteriormente, aplicando el teorema del valor medio previamente indicado a través de la ecuación (III-95) a las dos expresiones polinomiales entre los límites:

$$x_A = H\cot\beta = 40\cdot\cot(85^\circ) = 3{,}49\ m \qquad \text{y}$$

$$x_B = \lambda H = 0{,}7\cdot 40 = 28{,}00\ m$$

Se obtiene el esfuerzo normal y cortante promedio para la superficie parabólica indicada en la tabla (V-14). Así mismo, se obtiene para la superficie circular los esfuerzos aproximados por medio de polinomios de segundo grado:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} = 0{,}621x^2 - 1{,}154x + 0{,}552$$

$$\frac{\tau_{nt}}{\gamma H} = -0{,}149x^2 - 0{,}632x + 0{,}523$$

Los valores promedios de las relaciones $\sigma_{nn}/\gamma H$ y $\tau_{nt}/\gamma H$ arriba indicados al integrar de la misma manera que los esfuerzos de la rotura parabólica, conociendo que el centro del círculo es $(-55\,,70)$ m y el radio es R=89,02 m, los límites son:

$$x_A = H\cot\beta = 40\cdot\cot(85°) = 3{,}49\,m \quad y$$

$$x_B = \sqrt{R^2 - (H - y_c)^2} - x_c = 28{,}81\,m\,.$$

Los resultados se observan en la tabla (V-14).

	Plana	Parabólica	Circular
$\sigma_{nn}/\gamma H$	0,219	0,268	0,208
$\tau_{nt}/\gamma H$	0,206	0,285	0,238
FS	2,19	2,19	2,34

Tabla V-14. Comparación de los esfuerzos promedios de los tres métodos analíticos investigados de superficies potenciales de rotura para un talud inclinado.

6.- *Criterios de Rotura*

Los esfuerzos generados por aplicación de las fuerzas pueden producir deformaciones y roturas en las rocas dependiendo de la resistencia de las mismas y de otras condiciones intrínsecas del material rocoso.

La deformación indica el cambio de la forma o configuración de un cuerpo, correspondiéndose con los desplazamientos que sufre la roca al soportar la carga, mientras que *el esfuerzo* indica una condición de la roca en un instante y depende de las fuerzas aplicadas.

La resistencia se define como el esfuerzo que la roca puede soportar para unas ciertas condiciones de deformación. *La rotura* es un fenómeno que se produce cuando la roca no puede soportar las fuerzas aplicadas, alcanzando el esfuerzo un valor máximo correspondiente a la resistencia pico del material.

Los criterios de rotura son expresiones matemáticas que representan modelos que permiten estimar la resistencia del material en base a los esfuerzos aplicados y a sus propiedades resistentes, y predecir cuando ocurre la rotura.

González de Vallejo (2004), menciona que, de los criterios, el mas extendido en mecánica de rocas es el criterio de rotura lineal propuesto por Coulomb a finales del siglo XVIII,

$$\tau_f = C + \sigma_{nn} \tan\phi \qquad \text{(VI-1)}$$

Donde:

τ_f y σ_{nn}, son los esfuerzos cortantes y normales sobre el plano de rotura o de falla.

C y ϕ, son los parámetros de cohesión y el ángulo de rozamiento interna del material.

Este criterio expresa la resistencia al corte a lo largo de un plano sometido a un estado tensional, obteniéndose la relación entre los esfuerzos normales y cortantes actuantes en el momento de la rotura.

Balmer presenta en (1952)*, una simple relación para determinar el esfuerzo normal σ_{nn}, y el esfuerzo de cortante τ_f, en función de los esfuerzos principales mayor σ_1 y menor σ_3 en el instante de la rotura. Dicha relación parte de las expresiones obtenidas en el capitulo II

$$\sigma_{nn} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\alpha$$
$$\tau_f = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) sen2\alpha \qquad \text{(VI-2)}$$

Elevando al cuadrado, ambas ecuaciones pueden expresarse como sigue:

$$\left[\sigma_{nn} - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\alpha\right]^2$$
$$(\tau_f)^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) sen2\alpha\right]^2 \qquad \text{(VI-3)}$$

Al sumar resulta:

* Tomado de Edelbro, C. 2004, tesis de licenciatura.

$$\left[\sigma_{nn}-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]^2+\tau_f{}^2=\left[\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\right]^2\left(\cos^2 2\alpha+sen^2 2\alpha\right) \qquad \text{(VI-4)}$$

Como, $\left(\cos^2 2\alpha+sen^2 2\alpha\right)=1$ la ecuación anterior se expresa como sigue:

$$\boxed{\left[\sigma_{nn}-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]^2+\tau_f{}^2=\left[\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\right]^2} \qquad \text{(VI-5)}$$

Esta ecuación representa la ecuación de una circunferencia, de la forma $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, donde:

$$a=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3); \quad b=0; \quad r=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) \qquad \text{(VI-6)}$$

Es decir, el centro de la circunferencia es $\left(\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3),0\right)$ y el radio de la circunferencia es $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$, que puede graficarse, representando el círculo de Mohr, donde σ_1 representa el esfuerzo principal mayor y σ_3 el esfuerzo principal menor en el instante de la rotura.

6.1− Envolvente de una Familia de Líneas Planas:

Para determinar la curva envolvente a una familia de curvas llamadas involutas según M. Tejerizo (1965), se procede de la siguiente manera:

Si todas las líneas de la familia de un parámetro (t):

$$f(x,y,t)=0 \qquad \text{(VI-7)}$$

Son tangentes a una cierta línea fija (E), esta línea se llama envolvente de la familia representada por la ecuación (VI-7), cuyas líneas se denominan involutas (ver figura VI-1).

Por otra parte, supóngase que (E) existe y sea M (x,y) el punto de contacto de (E) con la involuta correspondiente al valor de (t) del parámetro; las coordenadas "x" e "y" de (M) serán, pues, funciones de (t) por ahora desconocidas.

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad \text{(VI-8)}$$

Por lo tanto si la familia de líneas planas $f(x,y,t)=0$ admite envolvente, las funciones indicadas en (VI-8), que definen las ecuaciones paramétricas de esta envolvente, deben satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$f(x,y,t)=0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad \text{(VI-9)}$$

Por ejemplo la ecuación $(x-t)^2+y^2-2t+1=0$ representa una familia circunferencias de radio variable, teniendo todas ellas su centro en la recta ox (fig. VI-1).

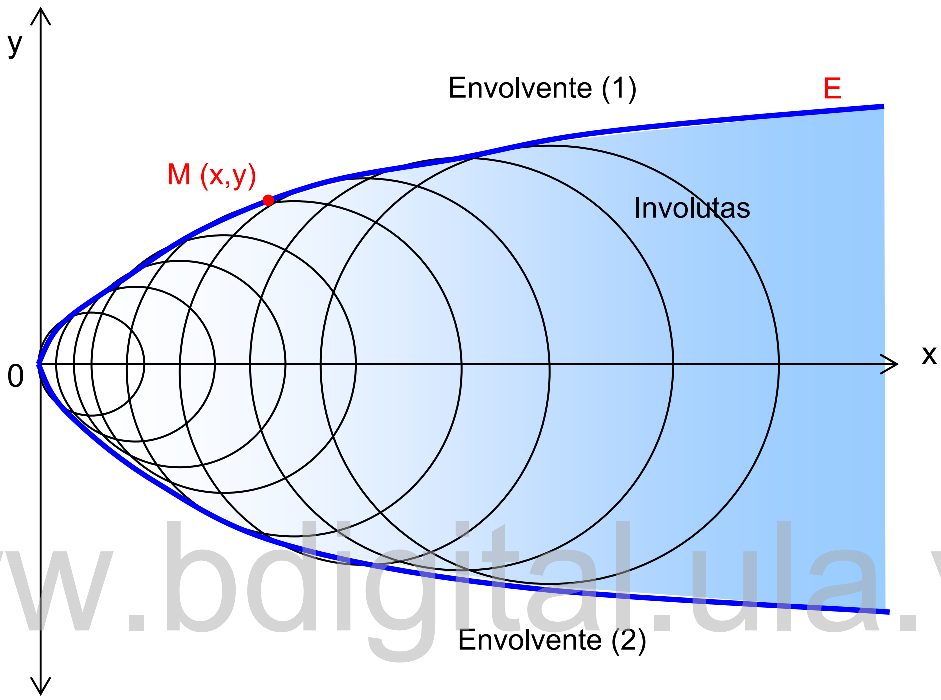


Fig. VI -1. Envolvente de una familia de líneas planas. Según Tejerizo, 1965.

La función $(x-t)^2+y^2-2t+1=0$, se deriva con respecto al parámetro (t) y se obtiene: $-2(x-t)-2=0$, despejando x en función de t, queda: $x=(t-1)$. Finalmente, expresando x en función de t en la ecuación de la circunferencia se obtiene: $y=\pm\sqrt{2(t-1)}$. De dicha ecuación se observa que hay dos curvas envolventes:

$$envolvente\ 1\begin{cases} x=(t-1) \\ y=\sqrt{2(t-1)} \end{cases} \qquad ,envolvente\ 2\begin{cases} x=(t-1) \\ y=-\sqrt{2(t-1)} \end{cases}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, es posible de encontrar la envolvente a las familias de líneas de la ecuación (VI-5). Por lo tanto, si las familias de líneas planas $f\left(\sigma_{nn},\tau_f,\sigma_3\right)=0$, admite envolvente, las funciones, $\sigma_{nn}=\xi\left(\sigma_3\right)$ y $\tau_f=\varphi\left(\sigma_3\right)$, que definen las ecuaciones paramétricas de esta envolvente, satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f\left(\sigma_{nn},\tau_f,\sigma_3\right)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_3}=0 \end{cases} \tag{VI-10}$$

Despejando en la ecuación anterior las coordenadas σ_{nn} y τ_f en función de σ_3, se obtienen las ecuaciones paramétricas que definen la envolvente. Asimismo, en caso que sea posible, se puede proceder eliminando σ_3 en las dos ecuaciones indicadas anteriormente, hallándose una relación de la forma $F\left(\sigma_{nn},\tau_f\right)=0$, la cual representa la envolvente.

Cabe destacar, que la familia de circunferencias de radio variable σ_3, representada a través de (VI-5) recibe el nombre de involutas. Tomando la derivada de σ_1 con respecto a σ_3 en ambos lados de la ecuación (VI-5) (tomado de Ucar , 2004), queda:

$$2\left[\sigma_{nn}-\frac{1}{2}\left(\sigma_1+\sigma_3\right)\right]\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}+1\right)=\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_1-\sigma_3\right)\right]\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}-1\right) \tag{VI-11}$$

Simplificando:

$$\left[\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\right]\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}-1\right)+\left[\sigma_{nn}-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}+1\right)=0 \qquad \text{(VI-12)}$$

Despejando σ_{nn} de la ecuación anterior:

$$\boxed{\sigma_{nn}=\sigma_3+\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}+1\right)}} \qquad \text{(VI-13)}$$

Sustituyendo σ_{nn} en la ecuación de la circunferencia (VI-5), y despejando τ_f se obtiene:

$$\boxed{\tau_f=\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}+1\right)}\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}\right)^{1/2}} \qquad \text{(VI-14)}$$

Partiendo del hecho $\sigma_1=f(\sigma_3)$ y además que dicha relación es lineal, se tiene:

$$\begin{cases}\sigma_1=a+b\sigma_3\\ \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_3}=b\end{cases} \qquad \text{(VI-15)}$$

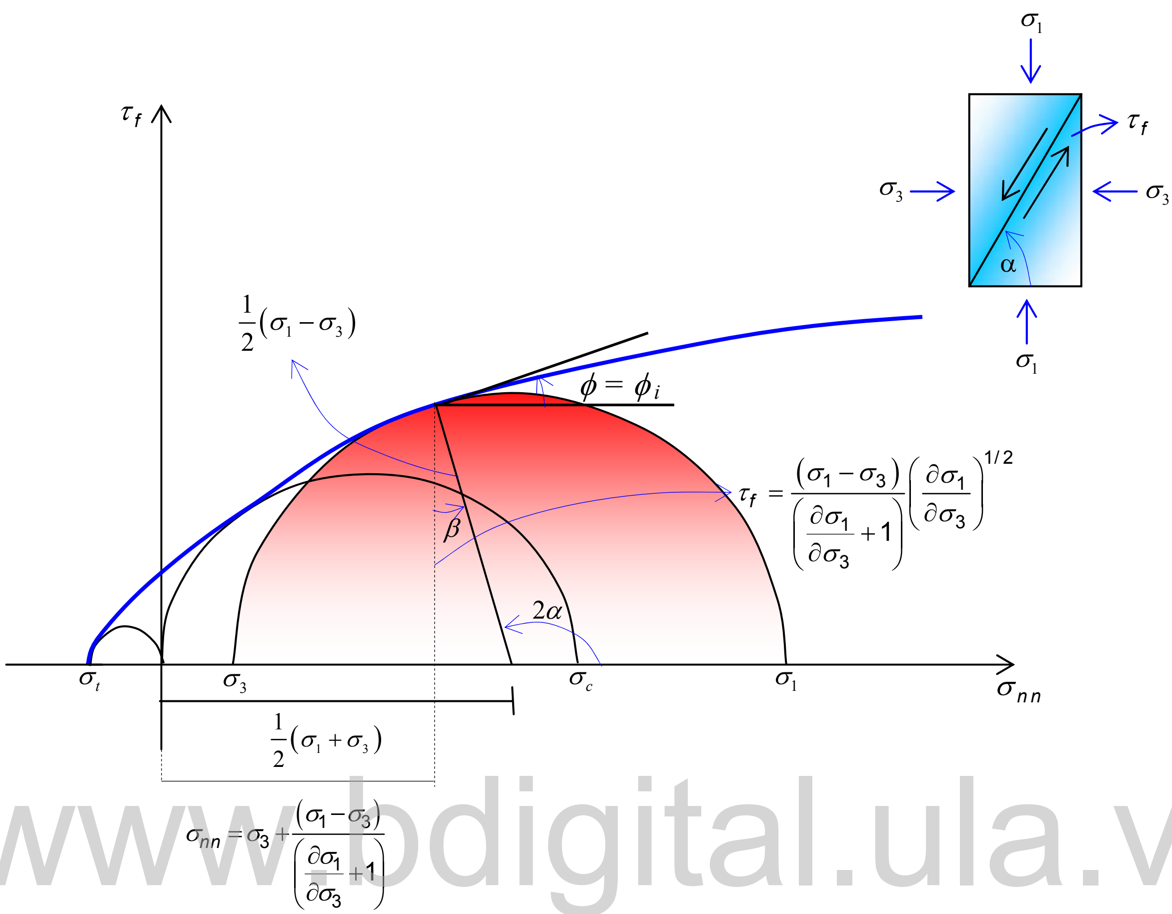


Fig. VI-2. Envolvente de rotura por cizallamiento en macizos rocosos. Tomado del manual de anclajes en Ingeniería Civil, Ucar (2004).

Reemplazando σ_1 y $\partial\sigma_1/\partial\sigma_3$ en (VI-13), y despejando σ_3 queda:

$$\sigma_3 = \frac{(b+1)\sigma_{nn} - a}{2b} \qquad \text{(VI-16)}$$

Sustituyendo en la ecuación (VI-15) queda:

$$\sigma_1 = \frac{(b+1)\sigma_{nn} + a}{2} \qquad \text{(VI-17)}$$

Sustituyendo (VI-16), (VI-17) en la expresión determinada para el esfuerzo cortante τ_f, (VI-14), queda:

$$\tau_f = \frac{a}{2(b)^{1/2}} + \sigma_{nn}\left[\frac{(b-1)}{2b^{1/2}}\right] \qquad \text{(VI-18)}$$

Es interesante señalar que el esfuerzo cortante τ_f se encuentra relacionada linealmente con el esfuerzo normal σ_{nn}, siempre y cuando σ_1 depende linealmente de σ_3, es decir:

$$\sigma_1 = a + b\sigma_3 \qquad \text{(VI-19)}$$

Si $\sigma_3 = 0$; $\sigma_1 = \sigma_c$, donde $\sigma_c = a$ (resistencia a la compresión simple) y $b = \tan\beta \Rightarrow$ pendiente. Por lo tanto,

$$\sigma_1 = \sigma_c + \tan\beta\, \sigma_3 \qquad \text{(VI-20)}$$

Tendiendo en cuenta la ecuación (VI-18) y derivando τ_f con respecto a σ_{nn}, queda:

$$\frac{d\tau_f}{d\sigma_{nn}} = \tan\phi = \frac{b-1}{2b^{1/2}} \qquad \text{(VI-21)}$$

Teniendo en consideración que $\sigma_{nn} = 0$, la ecuación (VI-18), se transforma entonces en, ver figura (VI-3):

$$C = \frac{a}{2b^{1/2}} \quad \Rightarrow \text{C = intercepto (cohesión).} \qquad \text{(VI-22)}$$

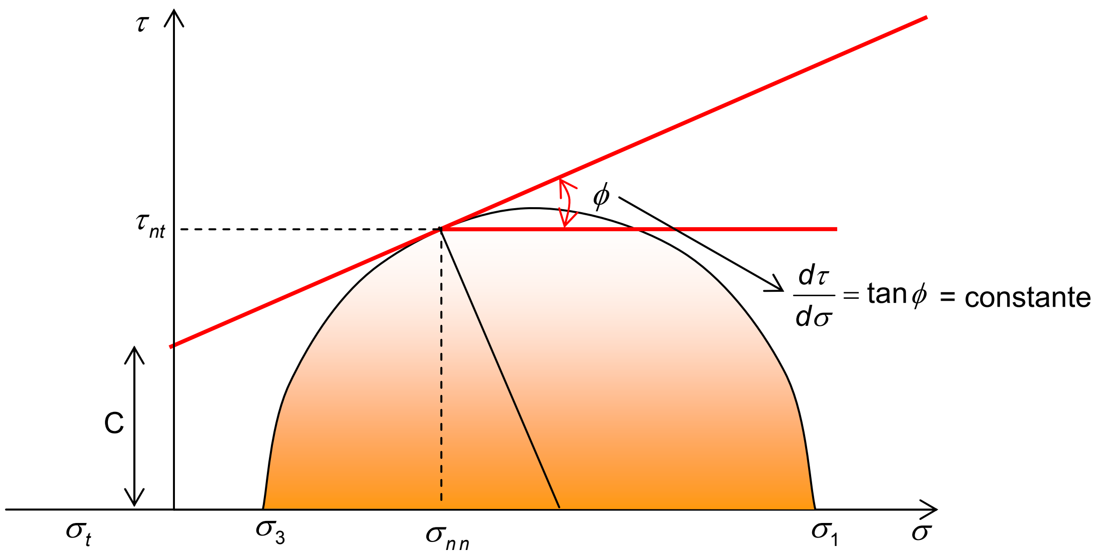


Fig. VI-3 Representación del ángulo de fricción interna ϕ, en función de la derivada del esfuerzo cortante con respecto al esfuerzo normal.

Reemplazando el valor de la pendiente $b = \tan\beta$ en (VI-21) se obtiene:

$$\tan\phi = \frac{\tan\beta - 1}{2\tan\beta^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad b = \tan\beta = \left(\frac{1+sen\phi}{1-sen\phi}\right) \qquad \text{(VI-23)}$$

Luego, sustituyendo la ecuación anterior en (VI-22) y $a = \sigma_c$, y despejando el esfuerzo a la compresión simple σ_c, queda:

$$a = \sigma_c = 2C\sqrt{b} = 2C\left(\frac{1+sen\phi}{1-sen\phi}\right)^{1/2} \qquad \text{(VI-24)}$$

Finalmente, sustituyendo en (VI-20), se obtiene:

$$\sigma_1 = \sigma_3 \underbrace{\left(\frac{1+sen\phi}{1-sen\phi}\right)}_{N_\phi} + 2C \underbrace{\left(\frac{1+sen\phi}{1-sen\phi}\right)^{1/2}}_{(N_\phi)^{1/2}} \qquad \text{(VI-25)}$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 N_\phi + 2C\left(N_\phi\right)^{1/2} \qquad \text{(VI-26)}$$

Siendo:

$$N_\phi = \left(\frac{1+sen\phi}{1-sen\phi}\right) = \tan^2\left(45^o + \phi/2\right), \text{ y}$$

$$\left(N_\phi\right)^{1/2} = \left(\frac{1+sen\phi}{1-sen\phi}\right)^{1/2} = \tan\left(45^o + \phi/2\right) = \left(\frac{\cos\phi}{1-sen\phi}\right) \qquad \text{(VI-27)}$$

En estas condiciones, la ecuación anterior se transforma:

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2\left(45^o + \phi/2\right) + \sigma_c \qquad \text{(VI-28)}$$

Esta relación puede expresarse en forma paramétrica como sigue:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)\tan^2\left(45^o + \phi/2\right) = 1 \qquad \text{(VI-29)}$$

Condiciones de borde:

Cuando $\sigma_1 = \sigma_c$ (resistencia a la compresión simple), $\sigma_3 = 0$.

Cuando $\sigma_3 = \sigma_t$ (resistencia a la tracción, $\sigma_t < 0$), $\sigma_1 = 0$).

Por lo tanto,

$$-\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)\tan^2\left(45^o+\frac{\phi}{2}\right)=1 \quad \Rightarrow \quad \tan^2\left(45^o+\frac{\phi}{2}\right)=-\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_t}\right) \qquad \text{(VI-30)}$$

Es decir, la ecuación (VI-29), se transforma:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c}+\frac{\sigma_3}{\sigma_t}=1 \qquad \text{(VI-31)}$$

Para mayor detalle véase fig. (VI-4).

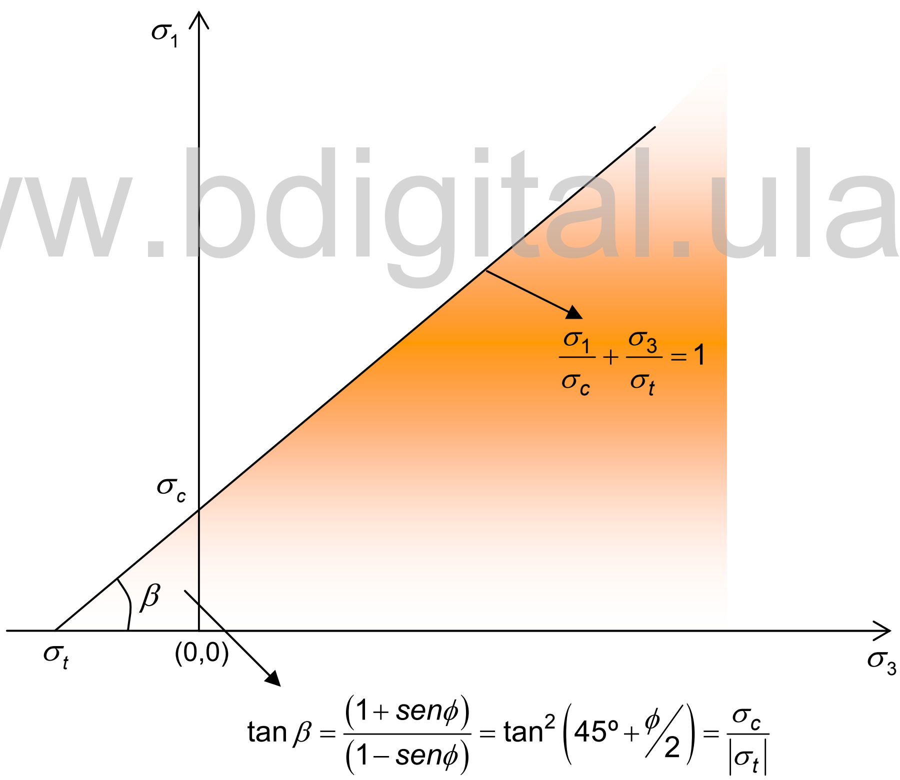


Fig. VI-4 Relación lineal entre los esfuerzos principales σ_1 *y* σ_3

6.2- Criterio de Mohr – Coulomb:

El criterio de Mohr – Coulomb también puede ser expresado en términos de los esfuerzos principales (VI-25), como:

$$\sigma_1 = 2C\left(\frac{\cos\phi}{1-sen\phi}\right)+\left(\frac{1+sen\phi}{1-sen\phi}\right)\sigma_3 \qquad \text{(VI-32)}$$

Como previamente se ha indicado, en muchos casos la ecuación anterior se expresa como sigue:

$$\sigma_1 = \sigma_c + b\sigma_3 \qquad \text{(VI-33)}$$

Donde $b = \tan^2\left(45° + \phi/2\right)$, representa la pendiente de la línea y σ_c el esfuerzo de compresión uniaxial. El valor del ángulo de fricción (ϕ) y el de la cohesión (C) pueden ser calculados como se indico anteriormente.

6.3- Criterio de Hoek y Brown:

In 1980 Hoek y Brown (tomado Ucar, 2004), propuso una relación entre el máximo y el mínimo esfuerzo principal, para evaluar la resistencia de la matriz rocosa, donde la representación gráfica de la rotura es una curva parabólica. Es un criterio empírico no lineal, en condiciones de esfuerzo triaxiales el cual puede ser particularizado por la condición de compresión simple (sin confinar) y de tracción. Se observa que al igual que el criterio de Mohr – Coulomb, no toma en cuenta el efecto del esfuerzo principal intermedio σ_2. Llevando a cabo innumerables ensayos de laboratorio, conjuntamente con los fundamentos teóricos que existen sobre fractura y propagación de grietas en roca, Hoek y Brown, hallaron una nueva hipótesis empírica de rotura estableciendo la siguiente relación entre los esfuerzos principales σ_1 *y* σ_3, es decir:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sqrt{m\sigma_c + s\sigma_c{}^2} \tag{VI-34}$$

En forma adimensional:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \sqrt{m\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s} \tag{VI-35}$$

σ_1 = esfuerzo principal mayor en la falla

σ_3 = esfuerzo principal menor en la falla

σ_c = resistencia a la compresión simple de la roca "intacta"

m, s = constantes que dependen de las propiedades de la roca.

El parámetro (m) controla la curvatura entre los esfuerzos principales, mientras que (s) regula la localización de la curva entre σ_1 *y* σ_3.

Por otra parte, la resistencia a la compresión simple de la roca intacta σ_c se obtiene al tomar en cuenta que no existe confinamiento lateral $(\sigma_3 = 0)$, y que además s=1, resultando por lo tanto a través de (VI-35) que, ${}^{\sigma_1}\!/_{\sigma_c} = s^{1/2} = 1$, es decir, $\sigma_1 = \sigma_c$.

Cuando el macizo presenta planos de fracturas, s<1. Por lo tanto, en estas condiciones la resistencia a la compresión de la masa rocosa σ_{cm} es una fracción de σ_c.

Igualmente, si $\sigma_3 = \sigma_t \quad \therefore \quad \sigma_1 = 0$, la ecuación (VI-35) queda:

$$\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)^2 = m\frac{\sigma_t}{\sigma_c} + 1 \qquad \text{(VI-36)}$$

Por lo tanto, $$m = \frac{\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)^2 - 1}{\frac{\sigma_t}{\sigma_c}} \qquad \text{(VI-37)}$$

Teniendo en cuenta que en la mayoría de los casos, $\sigma_t \leq \frac{1}{10}\sigma_c \quad \therefore \quad \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)^2 - 1 \simeq -1$, así:

$$m \approx -\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_t}\right) \quad \Rightarrow \quad m \approx \left|\frac{\sigma_c}{\sigma_t}\right| \qquad \text{(VI-38)}$$

Por cuanto σ_t es negativo, indica que m es positivo.

Los valores de m y s en función de RMR, pueden obtenerse de acuerdo a Hoek y Brown (1988) mediante la siguiente expresión cuando la roca ha sido correctamente excavada mediante equipo mecánico o voladura controlada (sin ser perturbada), y cuando ha sido perturbada.

$$m = m_i \exp\left[\frac{RMR - 100}{14\,\mathrm{I_m}}\right] \quad \therefore \quad \mathrm{I_m}\begin{cases}1 & \Rightarrow \quad roca \quad perturbada. \\ 2 & \Rightarrow \quad roca \quad no \quad perturbada.\end{cases}$$

(VI-39)

$$s = \exp\left[\frac{RMR - 100}{6I_s}\right] \quad \therefore \quad I_s\begin{cases}1 & \Rightarrow \quad roca \quad perturbada. \\ 1{,}5 & \Rightarrow \quad roca \quad no \quad perturbada.\end{cases}$$

Recientemente dichos autores (1998), han propuesto determinar m y s en función de un nuevo índice de calidad de la roca, conocido como índice de resistencia geológica GSI (Geological Strength Index), por considerar que se obtienen valores más reales. Al tomar en cuenta este nuevo índice resulta:

$$m = m_i \exp\left[\frac{GSI - 100}{28}\right]$$

$$s = \exp\left[\frac{GSI - 100}{9}\right] \qquad \text{(VI-40)}$$

Ucar, (1986), obtuvo la envolvente de cizalla para el criterio de Hoek y Brown de la ecuación anterior:

$$Tension \quad Norlmal \quad \sigma_{nn} = \frac{m}{8}\sigma_c\left[\frac{1}{2sen^2\phi_i} + sen\phi_1\right] - \sigma_c\left[\frac{3m}{16} + \frac{s}{m}\right]$$

$$\mathrm{Re}\,sistencia \quad al \quad corte \quad \tau_f = \frac{m}{8}\sigma_c\left[\frac{1 - sen\phi_i}{\tan\phi_i}\right] \qquad \text{(VI-41)}$$

Donde ϕ_i es el ángulo de fricción interna instantáneo, (ver figura VI-2).

Kumar (1998), deriva la envolvente de rotura del criterio de Hoek-Brown para valores de $a \neq 1/2$, utilizando el procedimiento general de la derivación de la envolvente desarrollado por Ucar (1986). Dicho investigador determinó la envolvente de una familia de líneas planas expuesta en este capitulo, utilizando la ecuación del criterio generalizado de Hoek y Brown que a continuación se indica:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^a \qquad \text{(VI-42)}$$

La constante a se determina mediante la expresión:

$$a = \left[0,65 - \left(\frac{GSI}{200} \right) \right] \quad si \quad GSI \leq 30 \qquad \text{(VI-43)}$$

Cuando $GSI \geq 30 \quad a = 1/2$

Kumar (1998) obtuvo un procedimiento analítico sencillo en el cual determinó la envolvente de rotura a través de la ecuación:

$$\frac{\tau_f}{\sigma_c} = \left(\frac{ma}{2} \right)^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \left(\frac{1 - sen\phi_i}{sen\phi_i} \right)^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \left(\frac{\cos\phi_i}{2} \right) \qquad \text{(VI-44)}$$

A partir de los datos m, s, a y $\left(\sigma_{nn} / \sigma_c \right)$, se puede obtener el ángulo ϕ_i y por lo tanto la resistencia al corte indicada en (VI-44). Siendo el esfuerzo normal:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\sigma_c} = \frac{1}{m} \left(\frac{ma}{2} \right)^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \left(\frac{1 - sen\phi_i}{sen\phi_i} \right)^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \left(1 + \frac{sen\phi_i}{a} \right) - \frac{s}{m} \qquad \text{(VI-45)}$$

Obsérvese que para a=1/2 las ecuaciones (VI-44) y (VI-45) se transforman en (VI-41).

Finalmente, Hoek, Carranza – Torres y Corkum (2002), recomiendan utilizar las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta el índice GSI, el factor D que depende del grado de perturbación de la roca durante el proceso de excavación y m_i para determinar los parámetros resistentes m y s y el exponente a involucrado en la formula que vincula a los esfuerzos principales en la falla $\sigma_1 \quad y \quad \sigma_3$.

$$m = m_i \exp\left(\frac{GSI-100}{28-14D}\right)$$
$$s = \exp\left(\frac{GSI-100}{9-3D}\right) \qquad \text{(VI-46)}$$
$$a = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(e^{-GSI/15}-e^{-20/3}\right)$$

Siendo D=0 cuando el macizo rocoso no ha sido perturbado y D=1, el valor correspondiente para el caso particular en que la roca ha sido altamente perturbada durante el proceso de excavación.

6.4– Criterio de Barton y Choubey:

Se trata de un criterio empírico, deducido a partir del análisis del comportamiento de las discontinuidades en ensayos de laboratorio, que permite estimar la resistencia al corte en discontinuidades rugosas. La resistencia al corte de pico, τ_p, de discontinuidades rugosas sin cohesión viene dada por la expresión:

$$\tau_p = \sigma'_n \tan\phi_p \qquad \text{(VI-47)}$$

Donde:

τ_p y σ'_n, son la resistencia al corte y el esfuerzo normal efectivo sobre el plano de discontinuidad.

$\phi_p = (\phi + i)$

ϕ, ángulo de rozamiento interno de la discontinuidad.

i, ángulo de rugosidad.

El valor de τ_p depende del valor de σ'_n y el valor del ángulo ϕ_p que suele variar entre 30º y 70º y que resulta de la suma del ángulo del fricción interna del material y del ángulo de rugosidad, i

Barton y Choubey (1976) mencionan que en muchos problemas de Ingeniería de rocas el máximo esfuerzo efectivo normal varían en el rango de 0,1 a 2 MPa (1 a 20 kgf/cm2). Estas cifras son por lo general alrededor de tres ordenes de magnitud menores que las obtenidas por los tectonofísicos, es decir cuando los valores de la presión normal efectiva se encuentran entre 100 a 2000 MPa.

También indican que geólogos experto en tectónica registran valores de la cohesión de decenas de MPa y ángulo de fricción interna de unos 20º, cuando la roca está sometida a elevadas tensiones normales, mientras que el ingeniero geotécnico que investiga la estabilidad de taludes obtiene valores de ángulo de fricción interna de 70º y cero cohesión. En consecuencia, por esta razón las opiniones concernientes a la resistencia al corte varían notablemente.

A partir de la determinación de la rugosidad en el campo, y de la medida de otros parámetros en afloramientos, puede estimarse el valor del ángulo de rozamiento de pico, ϕ_p, de una discontinuidad mediante la aplicación del criterio empírico de Barton y Choubey (1977):

$$i = JRC \cdot \log_{10}\left(\frac{JCS}{\sigma'_n}\right) \qquad \text{(VI-48)}$$

$$\phi_p = JRC \cdot \log_{10}\left(\frac{JCS}{\sigma'_n}\right) + \phi_r \qquad \text{(VI-49)}$$

Por lo tanto, la ecuación (VI-47) puede escribirse como sigue:

$$\tau_p = \sigma'_n \tan\left(JRC \cdot \log_{10}\left(\frac{JCS}{\sigma'_n}\right) + \phi_r\right) \qquad \text{(VI-50)}$$

Donde:

JCS, resistencia a la compresión simple de la pared de la discontinuidad, MPa.

Si las paredes de las discontinuidades no están alteradas o meteorizadas, puede tomarse el valor de la resistencia a la compresión simple en la condición intacta, σ_c *.

Si la pared está alterada, como ocurre en muchos casos, el valor de JCS puede tomarse a través de los resultados del esclerómetro o martillo Schmidt empleando la ecuación:

$$\log_{10} JCS = 0{,}88 \cdot \gamma_{roca} \cdot R + 1{,}01 \qquad \text{(VI-51)}$$

Siendo el peso unitario γ en MN/m^3, y *JCS* en MPa

R, Valor del rebote en el esclerómetro sobre la pared de la discontinuidad

JRC, coeficiente de rugosidad de la discontinuidad, $0 \le JRC \le 20$. (ver fig. (VI-5)

* Varios autores utilizan σ_{ci} para indicar la resistencia de la roca en la condición intacta.

JRC = 0 (superficie perfectamente suave)

JRC = 20 (superficie muy rugosa)

ϕ_r, ángulo de rozamiento interno residual de la discontinuidad. El valor de ϕ_r, puede a su vez ser estimado mediante la expresión:

$$\phi_r = (\phi_b - 20º) + 20º\left(\frac{r}{R}\right) \qquad \text{(VI-52)}$$

Siendo:

R, valor de rebote del esclerómetro sobre la matriz rocosa.

r, valor de rebote del esclerómetro sobre la pared de la discontinuidad.

ϕ_b, ángulo de fricción básico del material. (Ver valores en la tabla VI-1)

Si las paredes de la discontinuidad están sanas $\phi_r = \phi_b$

El valor de σ'_n se calcula en función de la carga litostática sobre la discontinuidad.

Una vez realizado el ensayo de corte directo sobre un determinado plano de fractura, se aprecia que el área de contacto real puede variar entre una décima a una milésima del área bruta total del plano de discontinuidad.

Por tanto, la relación entre el área bruta sobre la real está íntimamente relacionada con el coeficiente JCS/σ'_n, el cual juega un papel preponderante en la resistencia al cizallamiento de la roca. Adicionalmente cabe destacar, que la magnitud de la tensión normal efectiva actuando sobre el plano de discontinuidad es el factor externo más importante que afecta la resistencia al corte.

El ángulo de fricción interna instantáneo puede calcularse al tener en cuenta que $\phi_i = \arctan\left(\frac{\partial \tau_p}{\partial \sigma'_n}\right)$, es decir,

$$\tan\phi_i = \left(\frac{\partial \tau_p}{\partial \sigma'_n}\right) = \tan\left[\phi_b + JRC \cdot \log_{10}\left(\frac{JCS}{\sigma'_n}\right)\right] - \frac{JRC\,\pi \cdot \log_{10}(2{,}718281)}{180}\left\{1 + \tan^2\left[\phi_b + JRC \cdot \log_{10}\left(\frac{JCS}{\sigma'_n}\right)\right]\right\} \qquad \text{(VI-53)}$$

A la vez, la cohesión instantánea es:

$$C_i = \tau_p - \sigma'_n \tan\phi_i \qquad \text{(VI-54)}$$

Roca	Ángulo de fricción básico ϕ_b (grados)
Andesita	45
Arenisca	30 - 50
Basalto	48 – 55
Caliza	35 – 50
Caliza Margosa	30
Cuarcita	40 – 55
Diabasa	40 – 50
Diorita	50 – 55
Dolomía	25 – 35
Esquisto	25 – 30
Gabro	35
Gneis	30 – 40
Granito	45 – 58
Mármol	35 – 45
Lutita	40 – 60
Pizarra	40 – 55
Yeso	30

Tabla VI- 1 Valores típicos del ángulo de fricción básico (ϕ_b) para roca sana. Según González de V. et al (2002).

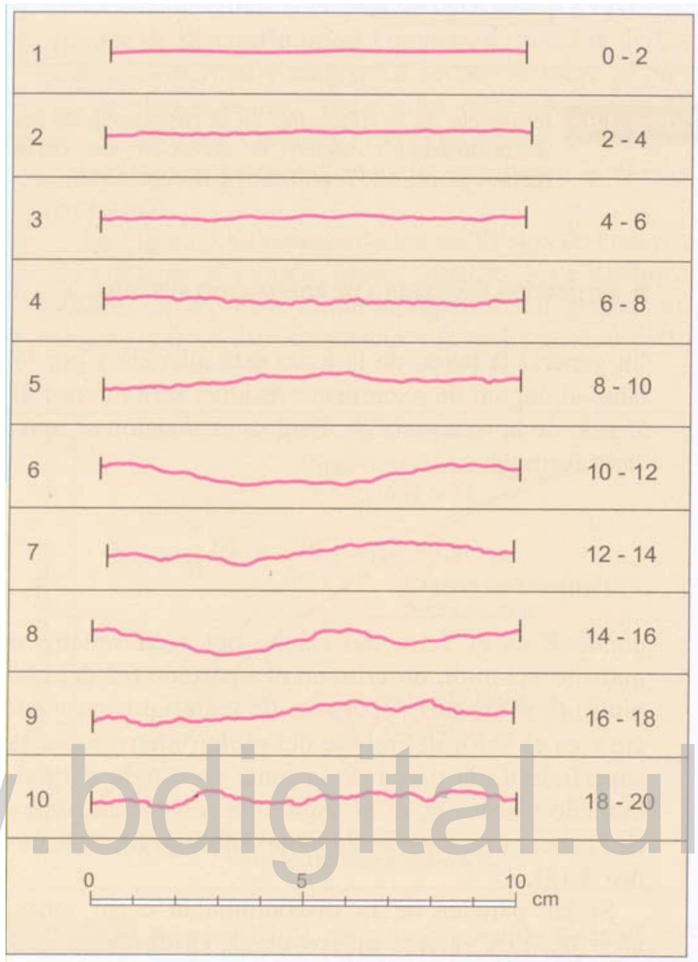


Fig. VI-5. Perfil tipo para estimar el coeficiente de rugosidad JRC, criterio de Barton y Choubey. Tomado de González de V. et al (2002)

6.5- Criterio de Bieniawski:

La expresión analítica que permite hallar la resistencia al corte en macizos rocosos al utilizar el criterio empírico de rotura desarrollado por Murrel y expresado posteriormente en forma adimensional por Bieniawski, en el cual los esfuerzos principales en el instante de la falla están vinculados a través de la siguiente ecuación y expresándola en forma adimensional viene dado por:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = A\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^K + 1 \qquad \text{(VI-55)}$$

Donde el parámetro A (ver tabla VI-2) es dependiente del tipo de roca y K es una constante que es independiente del tipo de roca siendo su valor de 0,75.

$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = A\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^K + 1$	$\therefore \quad K = 0{,}75$
TIPO DE ROCA INTACTA	**A**
Norita	5,00
Cuarcita	4,50
Limolita	4,00
Lodolita	3,00
Mayoría de las rocas	3,50

Tabla VI-2 Valores del parámetro A. Tomado de Ucar (2004).

Para el caso particular K=1, el valor del parámetro $A = \tan^2\left(45^\circ + \phi/2\right)$.

La envolvente de rotura determinada por Ucar (1986), se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_{nn}}{\sigma_c} = \cos\phi \tan^7\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) + \left[K_3 + \frac{4 - 3\cos^2\phi}{(1 - sen\phi)^3}\right] \qquad \text{(VI-56)}$$

Donde ϕ es el ángulo de fricción instantáneo, el cual puede calcularse conociendo el ángulo que forma el plano de falla con la dirección del esfuerzo principal menor σ_3, es decir: $\alpha = (45 + \phi/2)$. Por otra parte, K_3 representa la constante de integración.

La constante de integración K_3 se determina a través de (VI-56), al considerar la condición particular en la cual ϕ=0 y el valor de $\left(\sigma_{nn}/\sigma_c\right)_{\phi=0}$, resultando la siguiente tabla de valores:

K=0,75	$\left(\dfrac{\sigma_{nn}}{\sigma_c}\right)_{\beta=0} = \dfrac{\left\{A\left(\dfrac{1}{K\cdot A}\right)^{\frac{K}{K-1}}\cdot(1+K)+1\right\}}{2}$	$\left(\dfrac{\sigma_{nn}}{\sigma_c}\right)_{\beta=0} = (K_3+1)$
TIPO DE ROCA INTACTA	**A**	**K_3**
Norita	5,00	230
Cuarcita	4,50	151
Limolita	4,00	94
Lodolita	3,00	29
Mayoría de las rocas	3,50	55

Tabla VI-3 Valores de la constante K_3. Según Ucar (2004).

La resistencia al corte puede ser calculada por la expresión:

$$\frac{\tau_f}{\sigma_c} = \frac{1}{K_1}\left[\left(\frac{\sigma_{nn}}{\sigma_c}\right)\sec\phi - \left(K_1\frac{\sigma_{nn}}{\sigma_c} - K_2\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)\right] \qquad \text{(VI-57)}$$

Tomando en cuenta que K=0,75. Las expresiones para hallar K_1 y K_2 son las siguientes: $K_1 = \left(1+K\right)/2$ y $K_2 = K/2$.

6.6- Criterio Ucar:

A través de ensayos triaxiales, de compresión simple y de tracción en núcleos de concreto, Ucar (1992) propuso la siguiente relación:

$$\sigma_1 = K(\sigma_3 - \sigma_t) + K_1(\sigma_3 - \sigma_t)^{1/2} \qquad \text{(VI-58)}$$

Donde K y K_1 son constantes del material, y σ_t es la resistencia a la tracción. Torres (1992), halló los valores para las constantes en función de los resultados de laboratorio para ensayos en cilindros de concreto, valores que al ser reemplazados en la ecuación anterior, la cual en forma adimensional, toma la forma:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = 0{,}712\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) + 2{,}839\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)^{1/2} \qquad \text{(VI-59)}$$

La ecuación (VI-58) debe cumplir con las siguientes condiciones:

Cuando $\sigma_3 = 0$ resulta $\sigma_1 = \sigma_c$, por lo tanto,

$$K = \frac{K_1(-\sigma_t)^{1/2} - \sigma_c}{\sigma_t} \qquad \text{(VI-60)}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, resulta:

$$\sigma_1 = \left(\frac{K_1(-\sigma_t)^{1/2} - \sigma_c}{\sigma_t}\right)(\sigma_3 - \sigma_t) + K_1(\sigma_3 - \sigma_t)^{1/2} \qquad \text{(VI-61)}$$

Dividiendo la expresión anterior entre σ_c y realizando el cambio de $\xi = {\sigma_t}/{\sigma_c}$ * se obtiene la ecuación en forma adimensional:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = K\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right) + \left[\frac{K_1}{(\sigma_c)^{1/2}}\right]\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right)^{1/2} \quad \text{(VI-62)}$$

Con $K_2 = \dfrac{K_1}{(\sigma_c)^{1/2}}$ se puede colocar en la expresión anterior obteniéndose:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = K\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right) + K_2\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right)^{1/2} \quad \text{(VI-63)}$$

Arreglando la ecuación anterior queda:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = K_2\left[\left(\frac{(-\xi)^{1/2}}{\xi}\right)\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right) + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right)^{1/2}\right] - \frac{\left(\dfrac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right)}{\xi} \quad \text{(VI-64)}$$

Luego con la expresión obtenida se llevan a cabo los diferentes cambios de variables con la finalidad de aplicar la técnica de mínimos cuadrados:

$$Y = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}$$

$$X = \left[\left(\frac{(-\xi)^{1/2}}{\xi}\right)\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right) + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right)^{1/2}\right] \quad \text{(VI-65)}$$

* El valor de la resistencia a la tracción σ_t es negativo.

$$Z = \frac{\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right)}{\xi}$$

Quedando la expresión reducida a:

$$Y = K_2 X + Z \qquad \text{(VI-66)}$$

Minimizando la ecuación anterior se obtiene:

$$K_2 \sum_{i=1}^{n} (X_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (X_i Z_i) = \sum_{i=1}^{n} (X_i Y_i) \qquad \text{(VI-67)}$$

Valores de las constantes para diferentes rocas del criterio anteriormente expuesto pueden ser observados en el anexo (B), estas fueron hallados a partir de la ecuación (VI-67), y los datos experimentales según Sheorey (1997) en función de los esfuerzos principales σ_1 y σ_3. También se puede apreciar en la tabla anexa un resumen de la variación de las constantes K y K_1 para diferentes tipos de roca.

Roca	Tipo de roca	K	K_1
Metamórfica	Gnéis	4,49	0,22
	Cuarcita	3,32- 3,42	0,64 - 0,66
	Esquisto	3,89	1,89
	Mármol	3,69 - 3,98	1,04 -1,47
Sedimentaria	Arenisca	3,00 - 4,53	0,21 - 0,98
	Caliza	3,35 - 4,51	1,26 - 1,64
	Carbón	2,98 - 3,86	1,03 - 2,21
Ígnea	Granito	4,37 - 4,43	0,67 - 1,11
	Diorita	2,44 - 2,65	0,40- 0,63
	Andesita	4,40	2,01

Tabla VI-4. Tabla comparativa de las constantes K y K_1 del Criterio Ucar (1989) obtenidas a partir de datos experimentales, según Sheorey (1997).

Igualmente Torres(1992) al comparar los diferentes criterios que estudió, como lineal, parabólico, Bieniawski, Hoek y Brown y Ucar los valores de la desviación estándar calculados arrojó los siguientes resultados: Tanto los criterios Lineal y parabólico como el propuesto por Hoek y Brown, el ajuste deficiente de la zona hace que la desviación estándar sea ligeramente alta, el criterio de Bieniawski el ajuste teórico coincide perfectamente con los valores experimentales con la limitación que sólo es válido en la zona de compresión, mientras que el criterio de Ucar se caracteriza por presentar la menor desviación estándar, ajustándose bastante bien en la zona de tracción y de compresión.

6.7. Ejemplo de Aplicación.

6.7.1 Ejemplo 1:

Se analiza el ejemplo descrito en el Manual de Anclajes en Ingeniería Civil, Ucar (2004), en el cual aplica el cálculo de variaciones en la estabilidad de taludes. En estas condiciones, se desea comparar con el método analítico estudiado en los capítulos anteriores.

Los datos a utilizar son los siguientes:

H = 6,00 m

C = 20,00 kN/m^2

ϕ = 22,6º

γ =20,00 kN/m^3

FS =1

$\alpha = (45 + \phi/2) = 56{,}3^{\circ}$

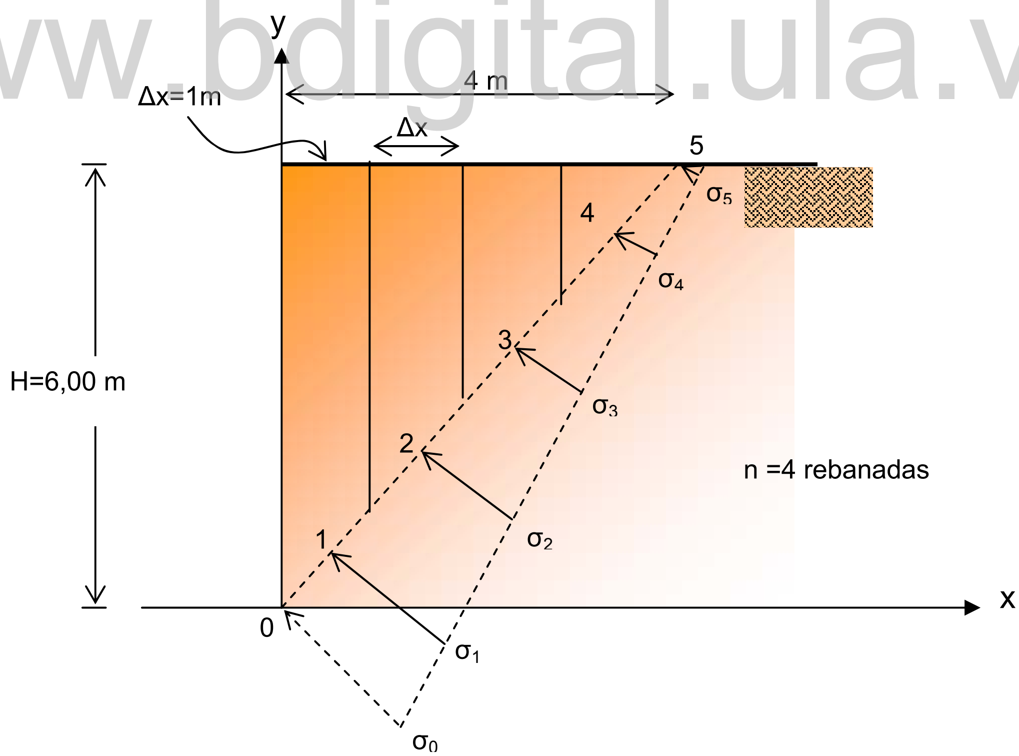


Fig. VI-6 Representación del talud aplicando el cálculo de variaciones. Tomado de Manual de Anclajes en Ingeniería Civil, Ucar (2004).

El talud analizado aplicando la técnica del cálculo de variaciones se dividió en 4 rebanadas y se determinaron los esfuerzos normales en el punto medio, obteniéndose también las tensiones normales en la cresta y el pie del talud. Los resultados según Ucar (2004), son los siguientes:

Punto	x (m)	y (m)	σ_i (kN/m^2)	$\sigma_{nn}/\gamma H$
0 (pie)	0,00	0,00	σ_0 = 38,00	0,32
1	0,50	0,75	σ_1 = 32,41	0,27
2	1,50	2,25	σ_2 = 21,90	0,18
3	2,50	3,75	σ_3 = 12,72	0,11
4	3,50	5,25	σ_4 = 4,72	0,04
5 (cresta)	4,00	6,00	σ_5 = 1,59	0,01

Tabla VI-5. Valores obtenidos para una superficie de rotura plana de los esfuerzos normales expresados en forma adimensional usando cálculo de variaciones.

Posteriormente, tomando los mismos datos, se aplican las ecuaciones del método analítico investigado para el caso de la superficie de rotura plana, que se obtuvo en el capítulo 3 y se encuentran expuestas en la tabla resumen (III-1), considerando las siguientes coordenadas (x, y):

y (m)	x (m)
0,00	0,00
0,75	0,50
2,25	1,50
3,75	2,50
5,25	3,50
6,00	4,00

Tabla VI-6. Valores usados en la rotura plana para representar la superficie de falla.

Los valores obtenidos para los esfuerzos normales y cortantes, expresados en forma adimensional en términos de γH, son los siguientes:

x/H	$\tau_{nt}/\gamma H$	σ_{nn}/γ
0,00	0,46	0,31
0,08	0,40	0,27
0,25	0,29	0,19
0,42	0,17	0,12
0,58	0,06	0,04
0,67	0,00	0,00

Tabla VI-7. Valores obtenidos para una superficie de rotura plana por el método analítico de los esfuerzos normales y cortantes expresados se forma adimensional.

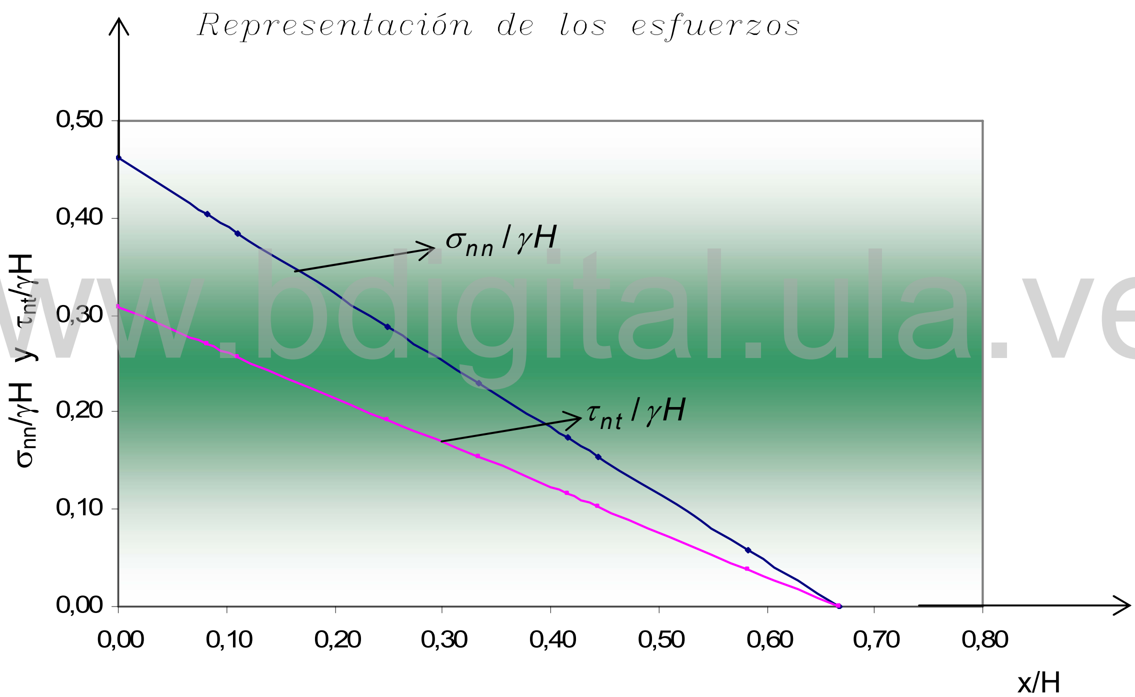


Fig. VI-7. Representación gráfica de $\sigma_{nn}/\gamma H$ y $\tau_{nt}/\gamma H$

Adicionalmente, también se determinó el factor de seguridad FS = 0,99* y el valor promedio del esfuerzo normal y cortante:

* A través del cálculo variacional se determinó el mismo valor del factor de seguridad.

$$\left(\frac{\sigma_{nn}}{\gamma H}\right)_{promedio} = 0{,}154; \quad y \quad \left(\frac{\tau_{nt}}{\gamma H}\right)_{promedio} = 0{,}231$$

Ahora se procede a comparar los dos métodos mediante la tabla siguiente:

Punto	x(m)	Cálculo de variaciones $\sigma_{nn}/\gamma H$	Método Analítico. $\sigma_{nn}/\gamma H$
0 (pie)	0,00	0,32	0,31
1	0,50	0,27	0,27
2	1,50	0,18	0,19
3	2,50	0,11	0,12
4	3,50	0,04	0,04
5 (cresta)	4,00	0,01	0,00

Tabla VI-8. Comparación de los valores obtenidos de la distribución de los esfuerzos normales por el método de cálculo de variaciones y el método analítico.

Los valores obtenidos son muy parecidos al comparar ambos métodos, y por tanto es recomendable la aplicación de dichos procedimientos.

6.7.2. Ejemplo 2:

Considérese un talud con los siguientes valores:

Índice de resistencia Geológica GSI = 38

m_i = 12,00

σ_c=15,00 MPa.

γ =0,024 MN/m^3

Por otro lado los coeficientes m y s son:

$$m = m_i \exp\left[\frac{GSI - 100}{28}\right] = 12 \cdot e^{-2.214} = 1{,}31$$

$$s = \exp\left[\frac{GSI - 100}{9}\right] = e^{-6.89} = 0{,}001018$$

Con el propósito de comparar resultados, se ha considerado una altura del talud H = 40,00 m, obtenida a partir de la ecuación de Ucar (2004) teniendo en cuenta los parámetros de Hoek y Brown, y al considerar que: β = 90°, α=75° y el factor de perturbación D =0.

En este sentido, hay que resaltar, como se ha indicado con anterioridad, que el esfuerzo normal variará en función del plano potencial de deslizamiento, y por ende los parámetros de corte dependerán a su vez de la distribución de dicha tensión. La tabla adjunta, muestra los resultados obtenidos, utilizando las diferentes ecuaciones halladas para la superficie de rotura plana, parabólica y circular. También se presentan los resultados obtenidos con el programa Roclab (RocScience). En primer lugar, se comparan las coordenadas de las superficies de rotura.

Valores en metros.			
y (m)	x (plana)	x (parabólica)	x (circular)
0,00	0,00	0,00	0,00
5,00	1,34	1,59	1,62
10,00	2,68	2,98	3,00
15,00	4,02	4,14	4,16
20,00	5,36	5,10	5,10
25,00	6,70	5,84	5,83
30,00	8,04	6,38	6,35
35,00	9,38	6,69	6,65
40,00	10,72	6,80	6,76

Tabla VI-9. Comparación de las coordenadas para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

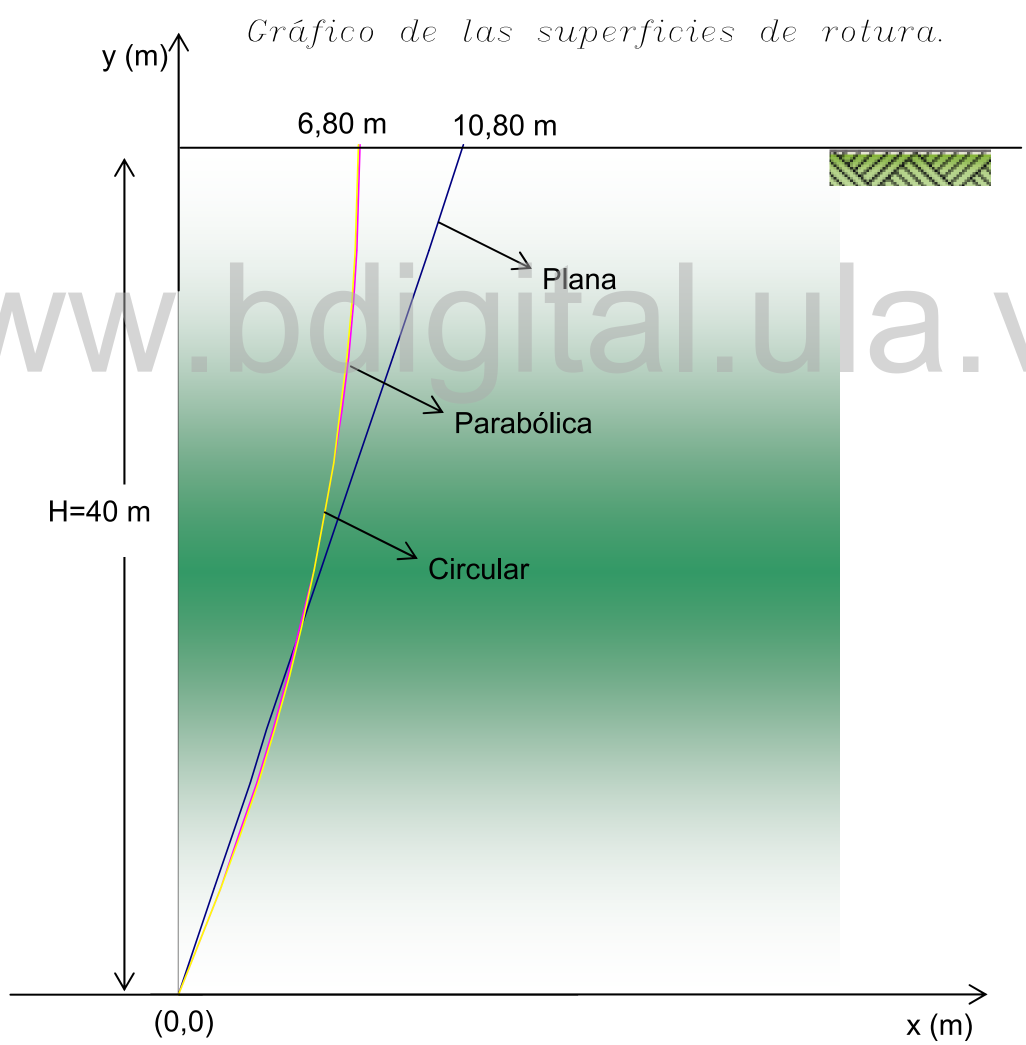


Fig. VI-8. Representación y comparación gráfica de las distintas superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

Por otro lado, en la tabla anexa se indica la variación de los esfuerzos normales en función de las coordenadas, para cada superficie potencial de rotura analizada:

	$\sigma_{nn}/\gamma H$					
	Plana		Parabólica		Circular	
y (m)	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H	$\sigma_{nn}/\gamma H$	x/H
0,00	0,07	0,00	0,10	0,00	0,11	0,00
5,00	0,06	0,03	0,07	0,04	0,07	0,04
10,00	0,05	0,07	0,05	0,07	0,05	0,08
15,00	0,04	0,10	0,03	0,10	0,03	0,10
20,00	0,03	0,13	0,01	0,13	0,01	0,13
25,00	0,03	0,17	0,01	0,15	0,01	0,15
30,00	0,02	0,20	0,00	0,16	0,00	0,16
35,00	0,01	0,23	0,00	0,17	0,00	0,17
40,00	0,00	0,27	0,00	0,17	0,00	0,17

Tabla VI-10. Valores de $\sigma_{nn}/\gamma H$, para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica, circular), obtenidos a través de la hoja de cálculo Excel.

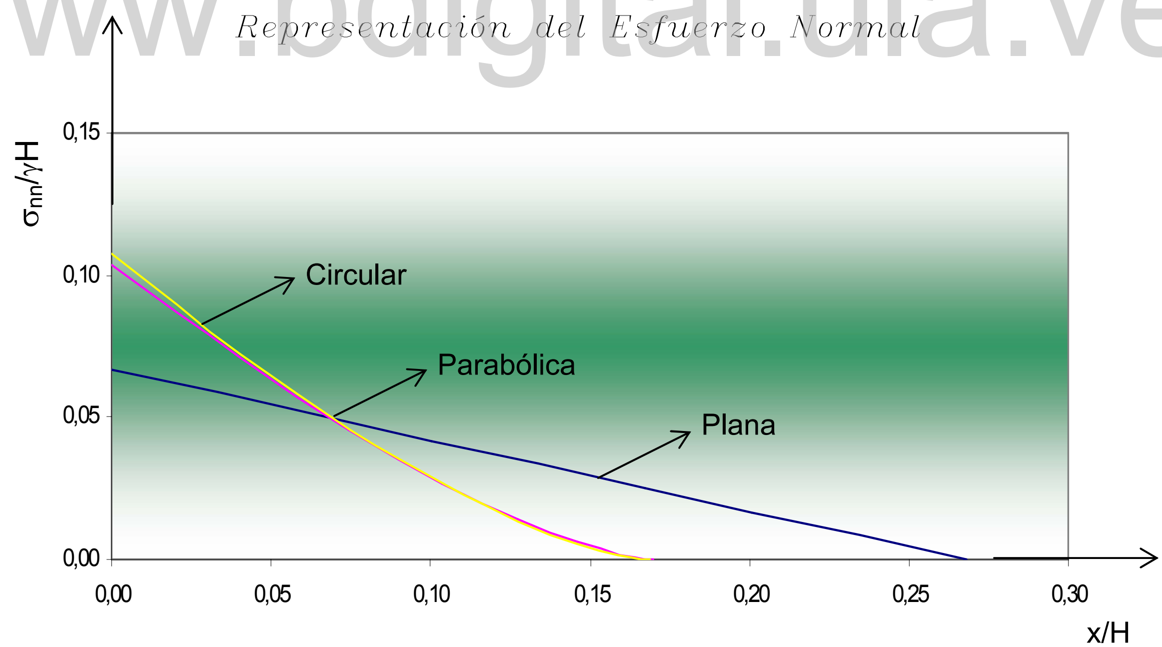


Fig. VI-9. Representación y comparación gráfica de $\sigma_{nn}/\gamma H$ para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

Igualmente se presenta la comparación del esfuerzo cortante obtenido para cada uno de las superficies de rotura estudiada.

	$\tau_{nt}/\gamma H$					
	Plana		Parabólica		Circular	
y (m)	$\tau_{nt}/\gamma H$	x/H	$\tau_{nt}/\gamma H$	x/H	$\tau_{nt}/\gamma H$	x/H
0,00	0,25	0,00	0,30	0,00	0,31	0,00
5,00	0,22	0,03	0,24	0,04	0,24	0,04
10,00	0,19	0,07	0,18	0,07	0,18	0,08
15,00	0,16	0,10	0,13	0,10	0,13	0,10
20,00	0,13	0,13	0,08	0,13	0,08	0,13
25,00	0,09	0,17	0,05	0,15	0,05	0,15
30,00	0,06	0,20	0,02	0,16	0,02	0,16
35,00	0,03	0,23	0,01	0,17	0,01	0,17
40,00	0,00	0,27	0,00	0,17	0,00	0,17

Tabla VI-11. Valores de $\tau_{nt} / \gamma H$, para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica, circular), obtenidos a través de la hoja de cálculo Excel.

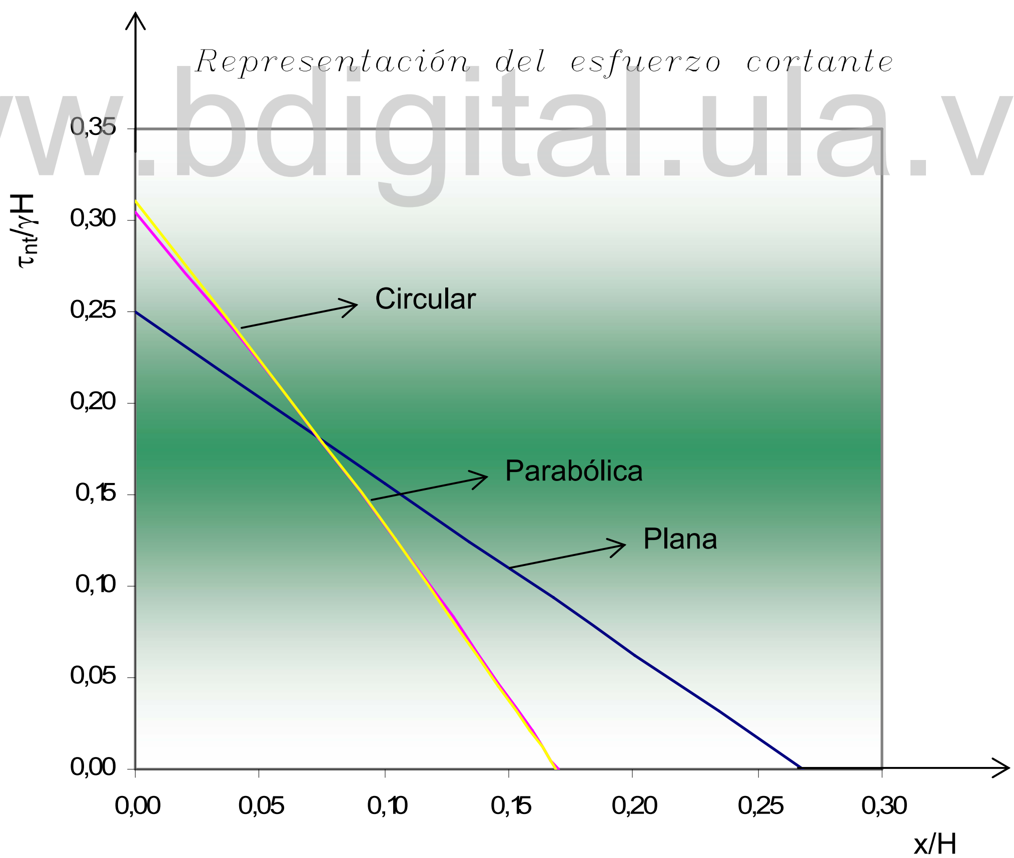


Fig. VI-10. Representación y comparación gráfica de $\tau_{nt} / \gamma H$ para las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular).

Finalmente, se obtiene los esfuerzos promedios para cada una de las superficies de rotura observadas en la tabla (VI-12)

También se obtiene los valores del ángulo de fricción interna instantáneo a través de la siguiente ecuación obtenida por Ucar (2004), expuesta en el libro de Manual y Anclajes en Ingeniería Civil.

$$\lambda = \frac{8}{m^2}\left[m\left(\frac{\sigma_{nn}}{\sigma_c}\right)+s\right]+\frac{3}{2}$$

$$sen\phi_i = \frac{\lambda}{3}\left\{2\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(1-\frac{27}{4\lambda^3}\right)+240º\right]+1\right\}$$

La cohesión se obtiene por la ecuación:

$$\tau_f = \frac{m\sigma_c}{8}\left(\frac{1-sen\phi}{\tan\phi}\right)$$

$$\tau_f = \frac{1{,}31\bullet 15{,}00}{8}\left(\frac{1-sen(63{,}9)}{\tan(63{,}9)}\right) = 0{,}123\ MPa$$

$$\tau_{nt} = C+\sigma_{nn}\tan\phi$$

$$C = \tau_{nt}-\sigma_{nn}\tan\phi = 0{,}123-0{,}033\cdot\tan(63{,}9º) = 0{,}056\,MPa$$

Los resultados pueden observarse en la tabla (VI-12)

Aplicando RocLab:

$$\sigma_{3(\max)} = 0{,}744\ MPa.$$

$$\frac{\sigma_{3(\max)}}{\sigma_c} = \frac{0{,}744}{15} = 0{,}049$$

Los resultados del programa RocLab, pueden visualizarse en la figura (VI-11):

	Plana	Parabólica	Circular	RocLab	Barton
$\sigma_{nn}/\gamma H$ (prom)	0,034	0,042	0,044		
σ_{nn}	0,033	0,040	0,042		
$\tau_{nt}/\gamma H$ (prom)	0,125	0,159	0,159		
τ_{nt}	0,120	0,153	0,153		
τ_f	0				
c (cohesión) MPa	0,056	0,059	0,060	0,224	0,056
ϕ	63,9º	62,9º	62,6º	41,7º	62,6
$\sigma_{3\ (max)}/\sigma_c$	0,003	0,003	0,003	0,049	0,003
H (altura) m	40,26	42,00	41,00	83,26	38,28

Tabla. VI-12. Tabla comparativa de las diferentes superficies de rotura (plana, parabólica y circular) con el programa Roclab

Usando la ecuación de Ucar (2004), que permite determinar el esfuerzo principal menor para las superficies investigadas:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_c} = \frac{1}{m}\left\{\frac{m}{4}\left(\frac{1}{sen\phi} - 1\right)^2 - s\right\}$$

$$= \frac{1}{1{,}31}\left\{\frac{1{,}31}{4}\left(\frac{1}{sen(63{,}9^o)} - 1\right)^2 - 0{,}001018\right\} = 0{,}003$$

Posteriormente, calculando la altura crítica, teniendo en cuenta que, $\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2\left(45 + \phi/2\right) + 2C\tan\left(45 + \phi/2\right)$ y considerando que $\sigma_1 = \gamma H/2$ y $\sigma_3 = 0$, resulta $H = \left(\frac{4C}{\gamma}\right)\tan\left(45 + \phi/2\right)$

Calculando la altura para cada uno de los métodos investigados, se obtiene:

$$H = \left(\frac{4C}{\gamma}\right)\tan\left(45 + \frac{\phi}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{4 \cdot 0{,}056}{0{,}024}\right)\tan\left(45 + \frac{63{,}9º}{2}\right) = 40{,}26\,m$$

Los resultados obtenidos se observan en la tabla (VI-12).

Asimismo, al emplear la ecuación del criterio de Hoek y Brown: $\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c\sqrt{m\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s}$, y considerando $\sigma_1 = \gamma H/2$ y $\sigma_3 = 0$, resulta:

$H = \frac{2\sigma_c}{\gamma}\sqrt{s}$, al sustituir los valores de s y σ_c se obtiene que la altura crítica es $H_c \approx 40{,}00\,m$.

Posteriormente, utilizando el criterio de Barton y Choubey expuesta en la sección 6.4 del capítulo, con los siguientes datos:

JCS = σ_c = 15,00 MPa. (Roca fresca)

JRC = 16,00

ϕ_b = 32º.

σ_{nn} = 0,033 MPa. (Obtenido en la rotura plana)

La relación JCS/σ_{nn} =500, El esfuerzo cortante τ_{nt} se calcula por la expresión (VI-47). El ángulo de fricción interna es calculado a través de la ecuación (VI-53) y el valor de σ_3 y la cohesión (C) se calculan utilizando las ecuaciones expuestas en este ejemplo.

Los resultados pueden observarse en la tabla (VI-12)

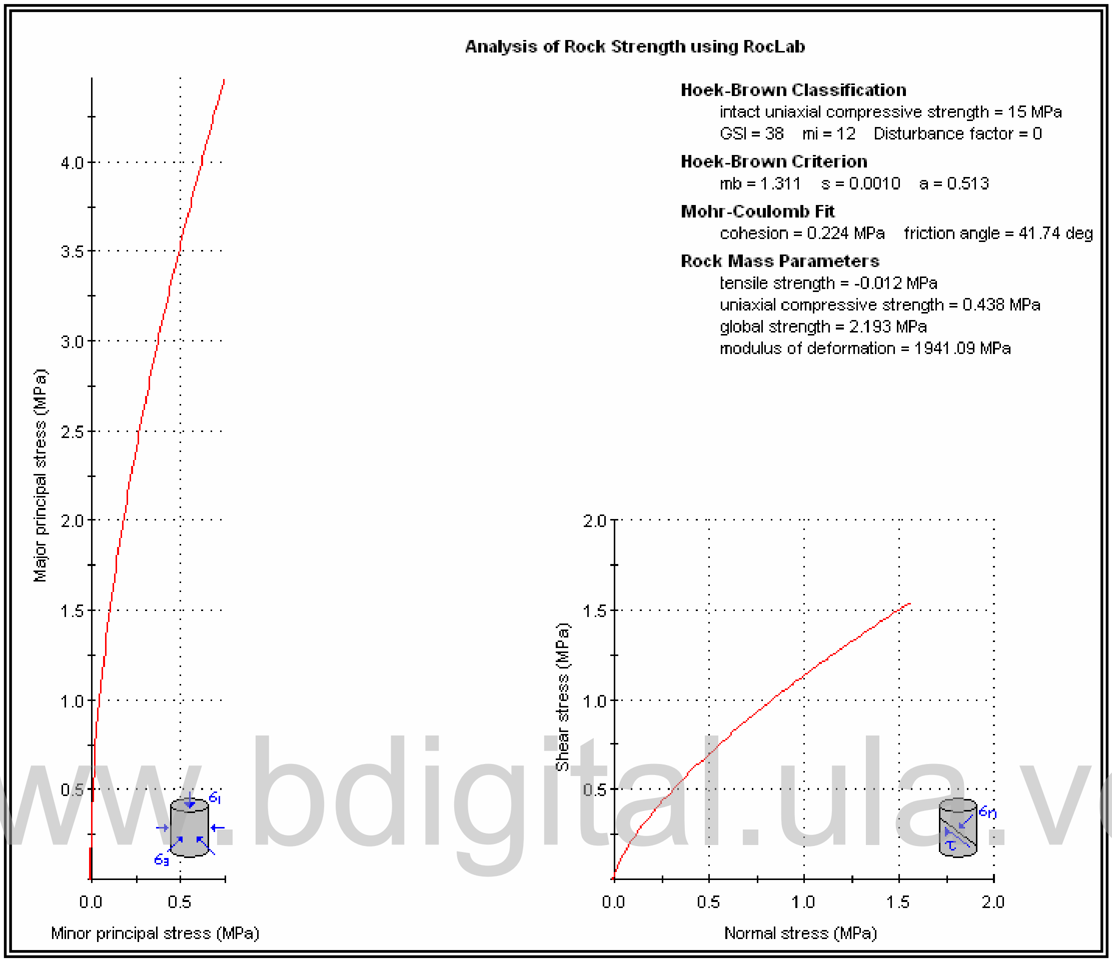


Fig. VI-11 Criterio de rotura de Hoek - Brown utilizando el programa de RocLab.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

A través de la metodología analítica llevada a cabo en el presente trabajo, se analiza la estabilidad de taludes constituidos por macizos rocosos, habiéndose determinado de una forma aproximada la distribución de los esfuerzos normales y cortantes en función de la coordenada “x” para el caso particular de superficies de rotura plana, parabólica y circular. Adicionalmente se halló el valor promedio del campo de tensiones que actúan en los diferentes planos de rotura, bien sea para el caso de un talud vertical o inclinado. Cabe destacar, que una de las ventajas de conocer la mencionada distribución de tensiones, es que permite calcular el factor de seguridad FS(x) en cada punto de la superficie potencial de rotura investigada, y por ende diagnosticar las zonas más críticas o potenciales de rotura.

Por otra parte, al investigar la estabilidad de un talud en particular, es necesario conocer previamente la geometría del talud, y todos los parámetros involucrados para su estudio. En estas condiciones, es posible determinar la distribución de las tensiones normales σ_{nn} y cortantes τ_{nt} y expresarlos en forma adimensional, en términos de γH, es decir, $\sigma_{nn}/\gamma H$ y $\tau_{nt}/\gamma H$, para su mejor manejo y comprensión, por cuanto se cuantifican o miden como una fracción de la presión vertical γH. Una vez establecido la distribución de tensiones conjuntamente con el criterio de rotura de Hoek y Brown, se determinaron los parámetros instantáneos y promedios de cohesión (C) y ángulo de fricción interna (ϕ), y por tanto el factor de seguridad para el talud estudiado, cuyo valor concuerda con otros procedimientos de cálculos utilizados en el campo de la geotecnia.

El procedimiento llevado a cabo cumple con los objetivos planteados, primero se determino la expresión analítica de la tensión normal y cortante de la superficie de rotura plana a partir de condiciones de contorno y rotación de ejes, para un talud que no necesariamente tiene que ser vertical. En estas condiciones se halló la distribución de los esfuerzos en cualquier punto de la superficie de rotura, y también su valor promedio. Esto permitió calcular el factor de seguridad el cual se comparó con otros métodos propuestos en el libro de Manual de Anclajes en Ingeniería Civil, Ucar (2004), obteniéndose resultados favorables, al compararse con los métodos variacionales validando las ecuaciones investigadas.

Igualmente, se determinaron las ecuaciones analíticas de las tensiones para la superficie de rotura parabólica, empleando el mismo procedimiento llevado a cabo con la rotura plana. Por lo tanto, se halló la distribución de los esfuerzos a lo largo se la superficie de rotura, y con ayuda de la regresión polinomial se obtuvo el valor promedio de las tensiones. Por último, se determinó una expresión analítica para la superficie de rotura circular con el mismo procedimiento que la rotura parabólica, hallándose la distribución de las tensiones normales y cortantes.

Las comparaciones realizadas a través de los diferentes métodos analíticos investigados se llevaron a cabo con la ayuda de la hoja de cálculo de Excel. Se comparó un talud vertical, obteniéndose buenos resultados de los esfuerzos normales y cortante que se expresaron en forma adimensional, es decir, en términos de (γH). La rotura parabólica y circular se aproximan muy bien, mientras que la rotura plana presenta una buena aproximación al pie del talud y luego en la cresta los resultados tienden ser alejados, tal como lo menciona Chen (1975) en sus resultados al comparar la rotura plana con la circular y espiral logarítmica. A medida que el talud es más inclinado los valores de las tensiones normales y de corte se alejan más al comparar la rotura plana con la parabólica y circular.

Por otra parte, al equiparar el método analítico de la rotura plana investigada en el presente trabajo, con el método de cálculo de variaciones expuesto por Ucar (2004), se obtuvo excelentes resultados en todos los puntos investigados para la distribución del esfuerzo normal calculado a lo largo de la superficie. Asimismo, al determinar el valor promedio del esfuerzo normal, el resultado obtenido es prácticamente el mismo para ambos métodos.

Finalmente, se llevó a cabo la comparación de los métodos investigados con el programa de Roclab y Barton y Choubey. El análisis se realiza para un talud vertical, considerando el criterio de rotura de Hoek y Brown. A través de los métodos investigados se determinó el valor promedio de los esfuerzos normales y cortantes y posteriormente los parámetros de corte equivalente C y ϕ con la ayuda del mencionado criterio de falla.

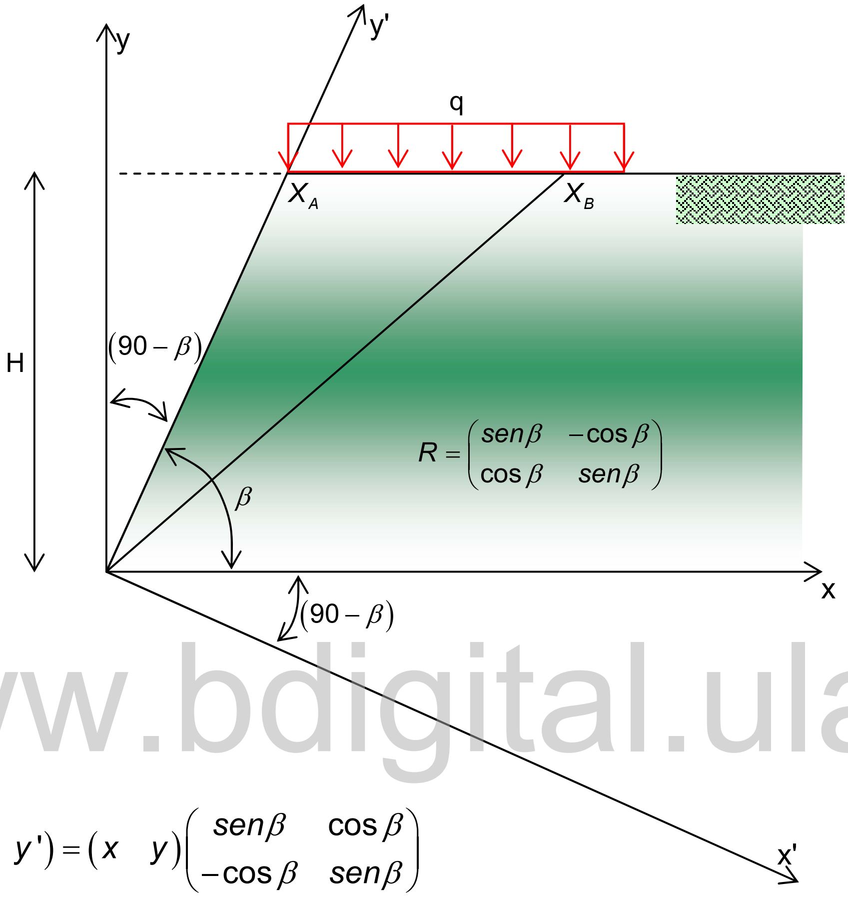
Cabe destacar, que al compararse los resultados obtenidos con el programa Roclab, éste último procedimiento arroja un valor de la cohesión muy alto, siendo la altura crítica obtenida de aproximadamente el doble con respecto al valor verdadero. Por lo tanto, al aplicar dicho programa es recomendable utilizar los parámetros de corte equivalentes de la cohesión y del ángulo de fricción interna con mucha cautela o reserva, por cuanto es posible que en muchos casos se esté sobrevalorando la resistencia al corte de la roca.

Adicionalmente, una de las limitaciones de los métodos investigados es que se considera que la cresta del talud es plana. Tampoco se ha tomado en cuenta el nivel freático, las diferencias litológicas y el efecto sísmico.

Por lo tanto, se recomienda considerar estos importantes aspectos en futuras investigaciones con el propósito de reducir las limitaciones de la metodología propuesta, debiéndose incluir también en el análisis la superficie de rotura espiral logarítmica.

ANEXO A

Cálculo de y cresta:



$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sen\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & sen\beta \end{pmatrix}$$

$$x' = xsen\beta - y\cos\beta$$
$$y' = x\cos\beta - ysen\beta$$

Considerando y=H, y despejando x en función de x’ de la primera ecuación se obtiene:

$$x' = xsen\beta - H\cos\beta \quad \therefore \quad x = \left(\frac{x'+H\cos\beta}{sen\beta}\right)$$
$$y' = x\cos\beta - Hsen\beta$$

Igualmente sustituyendo x en la segunda ecuación (y’), queda:

$$y' = \left(\frac{x' + H\cos\beta}{sen\beta} \right) \cos\beta - Hsen\beta$$

Simplificando,

$$\boxed{y' = x'\cot\beta + \frac{H}{sen\beta}}$$

ANEXO B

Datos experimentales de diferentes muestras y rocas utilizados para determinar las constantes K y K_1 del Criterio de Rotura Ucar (1981).

Apéndice	Muestra	Tipo de roca	σ_c	σ_t	ξ	K	K_1
A.1	17	Gnéis	326,80	-15,90	-0,05	4,49	0,22

Apéndice	Muestra	Tipo de roca	σ_c	σ_t	ξ	K	K_1
A.1	27	Cuarcita	168,10	-13,70	-0,08	3,32	0,64
	192		103,40	-9,97	-0,10	3,42	0,66
Rango Máximo de K y K_1						**3,42**	**0,66**
Rango Mínimo de K y K_1						**3,32**	**0,64**

Apéndice	Muestra	Tipo de roca	σ_c	σ_t	ξ	K	K_1
A.1	11	Esquisto grafítico	92,90	-8,44	-0,09	3,89	1,89

Apéndice	Muestra	Tipo de roca	σ_c	σ_t	ξ	K	K_1
A.1	33	Arenisca	115,40	-11,60	-0,10	3,00	0,49
	49		104,00	-6,00	-0,06	4,00	0,68
	58		127,50	-8,04	-0,06	3,87	0,46
	125		48,00	-3,85	-0,08	3,45	0,27
	126		48,00	-3,85	-0,08	3,46	0,25
	162		41,40	-2,60	-0,06	3,71	0,98
	191		67,70	-4,79	-0,07	3,70	0,22
A.2	38		65,00	-3,10	-0,05	4,53	0,21
	39		67,00	-3,50	-0,05	4,27	0,45
Rango Máximo de K y K_1						**4,53**	**0,98**
Rango Mínimo de K y K_1						**3,00**	**0,21**

Apéndice	Muestra	Tipo de roca	σ_c	σ_t	ξ	K	K_1
A.1	23	Diorita	58,80	-12,80	-0,22	2,44	0,63
	29		99,00	-12,70	-0,13	2,65	0,40
Rango Máximo de K y K_1						**2,65**	**0,63**
Rango Mínimo de K y K_1						**2,44**	**0,40**

Apéndice	Muestra	Tipo de roca	σ_c	σ_t	ξ	K	K_1
A.1	28	Andesita	225,20	-9,70	-0,04	4,40	2,01

Apéndice	Muestra	Tipo de roca	σ_c	σ_t	ξ	K	K_1
A.1	19	Caliza	128,00	-9,40	-0,07	3,35	1,26
	69		186,00	-8,14	-0,04	4,51	1,28
	196		68,00	-8,50	-0,13	3,41	1,64
Rango Máximo de K y K_1						**4,51**	**1,64**
Rango Mínimo de K y K_1						**3,35**	**1,26**

Apéndice	Muestra	Tipo de roca	σ_c	σ_t	ξ	K	K_1
A.1	13	Granito	223,90	-12,94	-0,06	4,43	1,11
	21	Granito- Brecha	363,00	-17,80	-0,05	4,37	0,67
Rango Máximo de K y K_1						**4,43**	**1,11**
Rango Mínimo de K y K_1						**4,37**	**0,67**

Apéndice	Muestra	Tipo de roca	σ_c	σ_t	ξ	K	K_1
A.1	70	Mármol	75,90	-5,96	-0,08	3,98	1,47
	71		102,80	-7,45	-0,07	3,69	1,08
Rango Máximo de K y K_1						**3,98**	**1,47**
Rango Mínimo de K y K_1						**3,69**	**1,08**

Apéndice	Muestra	Tipo de roca	σ_c	σ_t	ξ	K	K_1
A.1	80	Carbón	31,60	-2,17	-0,07	3,24	2,21
	82		13,20	-0,76	-0,06	3,86	1,30
	84		23,90	-2,07	-0,09	2,98	1,44
	85		21,80	-1,79	-0,08	3,19	1,03
Rango Máximo de K y K_1						**3,86**	**2,21**
Rango Mínimo de K y K_1						**2,98**	**1,03**

ANEXO C
REGRESIÓN POLINOMIAL.

Con el propósito de trabajar las ecuaciones de rotura parabólica y circular de manera más fácil, se ajustan los datos obtenidos en excel de los esfuerzos normal y tangencial mediante una regresión polinomial por mínimos cuadrados.

El procedimiento de mínimos cuadrados, suponiendo que ajustamos un polinomio de segundo grado o cuadrático:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + e$$

En este caso la suma de los cuadrados de los residuos es:

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^{\,2} \right)^2$$

Para determinar los valores de a0, a1, a2 la ecuación anterior se deriva con respecto a cada uno de los coeficientes desconocidos del polinomio:

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum \left(y_i - a_0 - a_{1i} x_i - a_2 x_i^{\,2} \right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i \left(y_i - a_0 - a_{1i} x_i - a_2 x_i^{\,2} \right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum x_i^{\,2} \left(y_i - a_0 - a_{1i} x_i - a_2 x_i^{\,2} \right)$$

Estas ecuaciones se igualan a cero y se reordenan para desarrollar el siguiente conjunto de ecuaciones normales:

$$(n)a_0 + \left(\sum x_i\right)a_1 + \left(\sum x_i^2\right)a_2 = \sum y_i$$
$$\left(\sum x_i\right)a_0 + \left(\sum x_i^2\right)a_1 + \left(\sum x_i^3\right)a_2 = \sum x_i y_i$$
$$\left(\sum x_i^2\right)a_0 + \left(\sum x_i^3\right)a_1 + \left(\sum x_i^4\right)a_2 = \sum x_i^2 y_i$$

Donde todas las sumatorias van desde i=1…n. Se puede observar que las tres ecuaciones anteriores son lineales y tienen tres incógnitas: a0, a1, a2. Los coeficientes de las incógnitas se evalúan de manera directa a partir de los datos observados. En este caso también se observa que el problema de determinar un polinomio de segundo grado por mínimos cuadrados es equivalente a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales simultáneas.

Para el caso de trabajar con esfuerzos los valores de xi corresponde a x/H y los valores de yi corresponden a $\sigma_{nn} / \gamma H$ o $\tau_{nt} / \gamma H$.

Ejemplo de una regresión polinomial:

Ajustar a un polinomio de segundo grado los datos dados en la siguiente tabla:

x_i	y_i
0,00	2,10
1,00	7,70
2,00	13,60
3,00	27,20
4,00	40,90
5,00	61,10

$n = 6 \quad \sum x_i = 15 \qquad \sum y_i = 152.6 \qquad \sum {x_i}^2 = 55 \qquad \sum {x_i}^3 = 225$

$\sum {x_i}^4 = 979 \qquad \sum x_i y_i = 585,6 \qquad \sum {x_i}^2 y_i = 2488,8$

Las ecuaciones lineales simultáneas son:

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 152,6 \\ 585,6 \\ 2488,8 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene: $a_0 = 2,48 \quad a_1 = 2,36 \quad a_2 = 1,86$. Por lo tanto la ecuación cuadrática por mínimos cuadrados en este caso es:

$$\boxed{y = 2,48 + 2,36x + 1,86x^2}$$

BIBLIOGRAFÍA.

- Apostol, Tom (1965). Matemática básica para ingenieros. Editorial reverseté S.A. Volumen I, Barcelona. 575 p.

- Anagnostopoulos, A. & Papadopoulos, V. (1989). Stabilité des talus dans les sols cohérents anisotropes. Université nacional technique d'Athénes. Bull Halson Labo. P. et ch . -164. p. 33 – 41.

- Edelbro, Catrin. (2004). Evaluation of rock mass strength criteria. Licentiate thesis, Lulea University of technology. Departament of civil an environmental engineering. 91p.

- Kumar, P (1998). Shear failure envelope of Hoek – Brown criterion for rockmass. Tunnelling and Underground Space Technology, Vol. 13, No. 4, Published by Elsevier Science Ltd. pp. 453-459.

- Hoek, E., Carranza, C. Corkum, B. (2002). El criterio de rotura de Hoek – Brown, tomado en febrero 20, 2008 en: http://www.rocscience.com/library/pdf/RL_3.pdf. 8 p.

- Ucar, R. (1986). Determination of shear failure envelope in rock masses. Journal of Geotechnical Engineering L4SCE) 112, pp. 303-315.

- Ucar, R. (1988). New Desing Methods for Ground Anchoring. Tesis de doctorado, Mc Gill University, Montreal, Canada.

- BARTON, N. y CHOUBEY, V. (1976). The Shear Strength of Rock

Joints in Theory and Practice. Rock Mechanics 10/1-2, pp 1-54, Springer –Verlag.

- Torres, R. (1992). Nuevos criterios sobre la resistencia del concreto. Tesis de la maestria. Universidad de Los Andes. Venezuela. 160 p.

- Ucar, R. Determinación de los parámetros de corte equivalentes en macizos rocosos a través del criterio empírico de Hoek y Brown, y su aplicación en la estabilidad de taludes. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

- Goncalves R. (1999) Introducción al análisis de esfuerzo, Universidad Simón Bolívar Caracas Venezuela. Industria Gráfica Integral C.A. p. 1-93.

- Eisenberg, M. (1980) Introduction to the mechanics of soilds. University of Florida, Canadá. Addison – Wesley Publishing Company. p. 1-74.

- González de V., L. (2002). Ingeniería Geológica. Pearson Educación. Madrid. p. 430 – 486.

- Jumikis, A. (1979). Rock Mechanics. Primera edición, Volumen 3, The State University of the New Jersey USA, Trans Tech Publications. p. 18-248.

- Ucar, R. (2004) Manual de Anclajes en Ingeniería Civil. Universidad Politecnica de Madrid, España. p. 53 – 275.

- Budynas, R. Advanced Strength and Applied Stress Analysis. Rochester Institute of Technology. McGraw- Hill . p. 298-313.
- Ucar, R.(1997). La estabilidad de taludes en macizos rocosos aplicando el criterio de rotura de Hoek y Brown. IV Simposio nacional sobre taludes y laderas inestables. Granada. 145-156 pp.

- Hoek, E. y Brown, T. (1988), The Hoek – Brown Failure Criterion, Proc. 15th Can. Roc. Mech. Symp. University of Toronto.

- Hoek, E. y Brown, T. (1998), Practical Stimates Of Rock Mass Strength, Int. J. Rock. Mech. Min. Sci, Vol 34, Nº 8, 1165-1186 pp.

- Tejerizo, M. (1965). Ampliación de Matemáticas para Técnicos. Editorial S.A.E.T.A. Madrid. P 770.

- Chen, Wai- Fah, (1975). Limit Analysis and Solid Plasticity. Editorial Elsevier. New York. P 638.

- Ucar, R. (1982). Aspectos Fundamentales entre los Esfuerzos Principales en la Rotura de Suelos y Macizos Rocosos. Boletín: Sociedad Venezolana de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Fundaciones. Nº 49, 3-12 pp.

- Sheorey, P.R. (1997). Empirical Rock Failure Criteria. A.A. Balkema, P 176

Lista de Símbolos:

σ_{xx}; Esfuerzo aplicado en dirección normal x perpendicular a, kN/m^2.

σ_{yy}; Esfuerzo aplicado en dirección x perpendicular a kN/m^2.

τ_{xy}; Esfuerzo de cizalla aplicado en dirección x perpendicular a kN/m^2.

σ_{nn}; Esfuerzo normal

τ_{nt}; Esfuerzo cortante.

β; Angulo de la superficie del talud con respecto al eje horizontal.

α; Angulo de la rotura de falla con respecto al eje horizontal.

γ; Peso unitario del material, kN/m^3.

F_x; Fuerza en dirección x.

F_y; Fuerza en dirección y.

$\sum F_x$; Sumatoria de fuerzas en dirección x.

$\overline{\overline{R}}$; Matriz de rotación.

$\overline{\overline{R^T}}$; Matriz transpuesta de rotación.

$\overline{\overline{\sigma}}'$; Matriz de esfuerzo correspondiente al plano x'y'

$\overline{\overline{\sigma}}''$; Matriz de esfuerzo correspondiente al plano x''y''.

a; Parámetro de integración.

$\bar{a}$; Parámetro de integración adimensional dividida entre γ

b; Parámetro de integración.

$\bar{b}$; Parámetro de integración adimensional dividida entre γH

q; carga que actúa sobre la superficie del talud, kN/m^2.

H; altura del talud, m.

X_A; distancia de la cresta de la superficie libre del talud con el eje y.

X_B; distancia de la cresta de la superficie de rotura en el talud con el eje y.

H_c; altura crítica.

λ; Distancia de la cresta de la superficie de rotura parabólica con respecto al eje y

x_c; Coordenada "x" del centro de un circunferencia.

y_c; Coordenada "y" del centro de la circunferencia.

R; radio de la circunferencia.

C; Cohesión, kN/m^2.

ϕ; Ángulo de fricción interna.

FS; Factor de seguridad.

σ_1; Esfuerzo principal mayor.

σ_3; Esfuerzo principal menor.

σ_c; esfuerzo de compresión uniaxial.

σ_t; esfuerzo de tracción.

γ_h; Peso específico húmedo.

γ_{sat}; Peso específico saturado.

γ_{medio}; Peso específico promedio.

$\vec{n}$; Vector normal unitario.