"EXISTENCIA DE SOLUCIONES ACOTADAS Y CONTROLABILIDAD PARA UNA CLASE DE ECUACIONES DE EVOLUCIÓN"

Por

SIVOLI BARRIOS ZORAIDA MARGARITA

Tesis presentada como requisito parcial para la obtención
de grado de Doctora en Ciencias Aplicadas
Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes

Tutor: *Dr. Hugo Leiva*

El amor es la fuerza mas humilde y
la más poderosa de que dispone el mundo

M.Ghandhi

DEDICADO A:

Mis Padres:*Eudoro y Carmen.*

Mi Hijo:*José Javier de Jesús.*

Agradecimiento

A Dios Todopoderoso por acompañarme, guiarme y fortalecerme a lo largo de este camino.

Al *Dr. Hugo Leiva*, por la dedicación, paciencia y mística con que desarrolla su labor de investigador y profesor; su invalorable guía hicieron posible concluir exitosamente este trabajo.

Al *Dr.Diómedes Bárcenas*, por su valiosa colaboración en el desarrollo del capítulo 3 y sus importantes comentarios a lo largo de este trabajo.

A los Doctores , *Aníbal Rodriguez* y *Josecho Arrieta* de la Universidad Complutense, por el aporte que me brindaron en mi formación académica.

A los Doctores *Miguel Ríos*; *Carmen Elena Vera* y *Teodoro Lara* por sus oportunas sugerencias y estimulantes comentarios

Al los miembros del Doctorado en Ciencias Aplicadas y mis compañeros del Departamento de Cálculo de la Facultad de Ingeniería.

A todos los que me apoyaron durante la realización de este trabajo.

GRACIAS.

Introducción

El estudio cualitativo de Ecuaciones Diferenciales pasa, en primer lugar, por la existencia y unicidad de las soluciones; en segundo lugar por el comportamiento asintótico de las mismas, lo cual incluye entre otras cosas el estudio de la estabilidad de las soluciones, luego puede probarse la existencia de soluciones particulares como son, las de equilibrio, periódicas, homoclínicas, heteroclínicas y en general Soluciones Acotadas. Otros estudios paralelos a los anteriores y de mucho interés en la Ingeniería Moderna, son los referentes a la Teoría de Control de sistemas gobernados por Ecuaciones Diferenciales, el cual constituye una de los métodos básicos para la resolución de problemas inherentes a la Ingeniería de Control; prueba de ello, es la cantidad de artículos publicados anualmente sobre el tema.

En este trabajo se estudia la Existencia de Soluciones Acotadas y la Controlabilidad de una amplia clase de Ecuaciones de Evolución, la cual aparece con frecuencia en aplicaciones a la Física e Ingeniería, como por ejemplo la Ecuación de Sine-Gordon [30], la Ecuación de Termoelasticidad en una placa [28], la Ecuación que modela una viga flexible amortiguada [9], la Ecuación de la Onda Fuertemente Amortiguada [9], etc. Las Técnicas usadas con mayor frecuencia en esta tesis se basan en el estudio de Semigrupos de Operadores Fuertemente Continuos, Teoremas de Punto Fijo, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en Espacios de Banach, Operadores Lineales Compactos y Teoría de Control en Espacios de Banach. Se presentan los resultados expuestos en tres artículos, dos de los cuales han sido publicados en revistas internacionales arbitradas e indexadas y el otro ha sido enviado para su posible publicación. La tesis consta de cuatro capítulos. En el **Capítulo 1**, se exponen las definiciones y los resultados básicos usados en el desarrollo de los restantes capítulos. El **Capítulo 2** se refiere a la Existencia de Soluciones Acotadas para la siguiente Ecuación Semilineal en Espacios de Banach

$$x' = Ax + F(t, x), \quad x \in X \tag{1}$$

donde X es un Espacio de Banach, A el generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ fuertemente continuo y $F : \mathbb{R} \times X \to X$ una función lo suficientemente suave para garantizar la existencia y unicidad de una única solución tal que $x(0) = x_0$. Se prueba, bajo ciertas condiciones, la existencia de una única solución acotada la cual es estable y con algunos ingredientes más sobre el semigrupo, se prueba que esta solución es clásica;

para ello se usan teoremas de punto fijo y la descomposición espectral del operador A, lo novedoso de esta parte del trabajo es que se establece una teoría que permite garantizar existencia de soluciones acotadas y suavidad de las mismas, para ecuaciones del tipo (1). Luego los resultados obtenidos se aplican a la siguiente ecuación de termoelasticidad de una placa

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha\Delta\theta = f_1(t,u,\theta) & t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta_t - \beta\Delta\theta - \alpha\Delta u_t = f_2(t,u,\theta), & t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta = u = \Delta u = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) suficientemente regular, $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$; u, θ denotan la deflección vertical y la temperatura de la placa, respectivamente. Se asumen las siguientes hipótesis:

H1) $f_1^e, f_2^e : \mathbb{R} \times L^2(\Omega)^2 \to L^2(\Omega)$ definidas por $f^e(t,u,\theta)(x) = f(t,u(x),\theta(x)), \quad x \in \Omega$ son funciones continuas y localmente Lipschitz , es decir, para cualquier B_ρ en $L^2(\Omega)^2$ de radio $\rho > 0$, existen constantes $L_1(\rho), L_2(\rho) > 0$ tales que para todo $(u,\theta),(v,\eta) \in B_\rho$

$$\|f_i^e(t,u,\theta) - f_i^e(t,v,\eta)\|_{L^2} \leq L_i(\rho)\{\|u-v\|_{L^2} + \|\theta-\eta\|_{L^2}\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

H2) Existe $L_f > 0$ tal que

$$\|f_i(t,0,0)\| \leq L_f, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2. \tag{4}$$

Observación 0.1 *En particular la hipótesis H1) se satisface en el caso en que* $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas y globalmente Lipschitz con constante de Lipschitz* $L_1, L_2 > 0$*,es decir,*

$$|f_i(t,u,\theta) - f_i(t,v,\eta)| \leq L_i\{|u-v|^2 + |\theta-\eta|^2\}, \quad t,u,v,\theta,\eta \in \mathbb{R}, i = 1,2. \tag{5}$$

La Ecuación de Termoelasticidad sin perturbación, en una placa ($f_i = 0, i = 1,2$), fué estudiada por Lagnese [24]

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + \alpha\Delta\theta = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta_t - \beta\Delta\theta - \alpha\Delta w_t = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta = w = \Delta w = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

en este trabajo el autor discutió la estabilidad del modelo. J.U. Kim [21] estudió el sistema (6) con la siguiente condición de borde

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial \eta} = w = 0, \quad \text{on} \quad \partial\Omega,$$

y probó el decaimiento exponencial de la energía del sistema. Por otra parte, Avalos y Lasiecka [3],[4],[5], estudiaron un modelo **lineal** de termoelasticidad en una placa, obteniendo resultados de estabilidad uniforme.

El aporte de esta parte del trabajo, consiste en probar la Existencia y Estabilidad de una Solución Acotada, para la Ecuación **No-Lineal** de Termoelasticidad en una placa (2).Como primer paso, se demuestra que el sistema lineal ($f_1 = f_2 = 0$) genera un semigrupo analítico fuertemente continuo el cual decae exponencialmente a cero; en segundo lugar, bajo algunas hipótesis adicionales, se prueba que el sistema no-lineal posee una solución Moderada Acotada la cual es Exponencialmente Estable y para una clase grande de funciones f_1, f_2 esta solución acotada es casi periódica; finalmente se usa la analiticidad del semigrupo para probar la suavidad de la Solución Moderada Acotada.

En el **capítulo 3** se prueba que una clase amplia de Sistemas de Control de dimensión infinita, **nunca** puede ser **Exactamente Controlable**, estos sistemas están dados por la Ecuación de Evolución

$$z' = A(t)z + B(t)u(t), \quad z(t) \in Z, \quad u(t) \in U, \quad t > 0, \tag{7}$$

donde Z, U son Espacios de Banach de dimensión infinita,la función de control u pertenece a $L^p(0, t_1; U), t_1 > 0, 1 \leq p < \infty$, $B \in L^\infty(0, t_1; L(U, Z))$, $t \to B(t) \in L(U, Z)$ es continuo en la topología de operadores fuertes de $L(U, Z)$ y $A(t)$ genera un operador de Evolución Fuertemente Continuo $U(t, s)$ (ver [35]). Se prueba el siguiente resultado: si $U(t, s)$, $0 < s \leq t$ es **compacto**, entonces el sistema (7) no puede ser Exactamente Controlable. El caso autónomo

$$z' = Az + Bu(t), \quad z(t) \in Z, \quad u(t) \in U, \quad t > 0, \tag{8}$$

ha sido estudiado por varios autores, particularmente, en Curtain - Pritchard [12],[13] se prueba que, si B es el límite en la topología uniforme de una familia de operadores $\{B_n\}$ con rango de dimensión finita, entonces el sistema (8) no es exactamente controlable en $[0, t_1]$; el resultado obtenido aplicado al caso autónomo establece que si el semigrupo generado por el operador A es compacto, entonces el sistema (8) no es exactamente controlable en $[0, t_1]$. Este resultado es incompatible con los presentados en [7] [8] y [6]; donde se asume la compacidad del semigrupo o del operador de Evolución y la controlabilidad Exacta del sistema lineal simultáneamente, de hecho, se han recibido comunicación de los autores de estos artículos manifestando la veracidad del resultado y expresando su felicitación por este modesto e importante aporte a la Teoría de Control.

En el **Capítulo 4**, se estudia la Controlabilidad Exacta del siguiente sistema de Ecuaciones Funcionales Semilineales Integrodiferenciales en el Espacio de Banach X,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \displaystyle\int_0^t f(s, x_s)ds \quad t \in J = [0, b] \\ x_0 &= \phi \ \text{ en } \ [-r, 0], \quad u(t) \in U \end{cases} \tag{9}$$

donde U es un espacio de Banach, la funcion de control u pertenece al espacio $L^2(J, U)$, A genera un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ en X y $B \in L(U, X)$. El término no lineal $f : J \times C \longrightarrow X$ es un operador continuo en J ; uniformemente lipschitz en $C = C([-r, 0], X)$ el espacio de las funciones continuas $\phi : [-r, 0] \longrightarrow X$ con la norma

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}$$

Bajo estas hipótesis se prueba que el sistema (9) es Exactamente Controlable.

Esta clase de sistema fué estudiado por Balachandran [6] , asumiendo la compacidad del semigrupo generado por el operador A y la controlabilidad Exacta del sistema lineal asociado, hipótesis que por lo demostrado en el capítulo 3, son incompatibles. Nosotros probamos la Controlabilidad Exacta del sistema (9), descartando la compacidad del semigrupo y pidiendo condiciones adicionales al término no-lineal.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Como se enuncio en la introducción del trabajo, en este capítulo se darán algunas definiciones y se presentaran ciertos resultados que serán utilizados en los capítulos siguientes.

Caracterización de Operadores Sobreyectivos.

Teorema 1.1 *Sea $A : D(A) \subset E \to F$ un operador no acotado, cerrado y con $\overline{D(A)} = E$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

i.- *A es sobreyectivo, es decir,* $\mathrm{R(A)} = F$.

ii.- *Existe una constante $C \geq 0$ tal que*

$$\|x\| \leq C\|A^*x\| \quad x \in D(A^*).$$

iii.- $\mathrm{Ker(A^*)} = \{0\}$ *y* $\mathrm{R(A^*)}$ *es cerrado.*

Demostración. Ver [11]

Corolario 1.1 *Sean E y F espacios de Banach reflexivos y $G \in L(E, F)$. Entonces tenemos:*

a.- $\mathrm{R(G)} = F$ *si, y sólo si, existe α tal que $\|G^*x^*\| \geq \alpha\|x^*\|$, $x^* \in F^*$.*

b.- $\overline{\mathrm{R(G)}} = F$ *si, y sólo si,* $\mathrm{Ker(G^*)} = \{0\}$.

Corolario 1.2 *Si además de las hipótesis anteriores, se tiene que $dimF < \infty$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a.- $\mathrm{R(G)} = F$.

b.- Existe $\alpha > 0$ *tal que* $\|G^*x^*\| \geq \alpha\|x^*\|,\ x^* \in F^*$.

c.- $\mathrm{Ker}(G^*) = \{0\}$.

Teorema 1.2 (Azcoli) *Sea* X *un subconjunto compacto de un espacio Métrico,* F *un espacio de Banach y* $\Phi \subseteq C[X, F]$ *el conjunto de las transformaciones continuas con la norma del supremo. Entonces,* Φ *es Relativamente Compacto en* $C[X, F]$*, si y solo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

1. Φ *es equicontinuo.*

2. *Para cada* $x \in X$*, el conjunto* $\Phi(x) = \{f(x) \backslash\ f \in \Phi\}$ *es relativamente compacto.*

Teorema 1.3 (Punto Fijo de Banach) *Sea* X *un espacio de Banach y* $T : X \to X$ *una Contracción, (Es decir, para algún* $k \in [0, 1)$ $\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$*). Entonces,* T *posee un único punto fijo* x^**. Más aún, la sucesión* $\{T^n(x)\}$ *converge a* x^* *para cualquier* $x \in X$*.*

Demostración. Ver [14]

Teorema 1.4 (Shauder) *Sea* X *un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach* E*. Entonces, toda aplicación continua y compacta* $T : X \to X$ *tiene un punto fijo.*

1.1. Semigrupos de Operadores Fuertementes Continuos y Generador Infinitesimal.

Definición 1.1 *Sea* X *un espacio de Banach. Una familia* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores lineales y continuos* $T(t) : X \to X$ *se denomina Semigrupo Fuertemente Continuo si se verifican las tres condiciones siguientes:*

(i) $T(0) = Id$.

(ii) $T(t + s) = T(t)T(s)\ ,\quad (t, s \geq 0)$.

(iii) Para todo $x_0 \in X$*,* $T(t)x_0$ *es fuertemente continuo en* $t = 0$*, es decir*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x_0 - x_0\|_X = 0.$$

a) *Si* $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T(t)-I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es un Semigrupo de Operadores Uniformemente Continuo.*

b) *Si* $\|T(t)\| \leq 1$, *el semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es un Semigrupo de Contracción.*

Teorema 1.5 *Sea* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un Semigrupo Fuertemente Continuo en el espacio de Banach* X*; entonces:*

a. $\|T(t)\|$ *está acotada sobre intervalos finitos de* $[0,\infty)$.

b. Para cada $x_0 \in X$ *fijo, la aplicación que va de* $[0,\infty) \to X$*,definida por* $t \to T(t)x_0$*, es fuertemente continua* $\forall t \in [0,+\infty)$.

c. Para todo $x_0 \in X$ *se tiene que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x_0 ds = T(t)x_0$$

En particular,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^{h} T(s)x_0 ds = x_0.$$

d. Si $w_0 = \inf\limits_{t>0}\left(\frac{1}{t}\log\|T(t)\|\right)$, *entonces* $w_0 = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\log\|T(t)\|\right) < \infty.$

e. Para todo $w > w_0$*, existe* M_w *tal que* $\|T(t)\| \leq M_w e^{(wt)}$, $t \geq 0$.

Demostración. Ver [12]

Definición 1.2 *Sea* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un Semigrupo Fuertemente Continuo en el espacio de Banach* X*. Para* $t > 0$ *definamos el operador lineal* A_t *mediante*

$$A_t x_0 = \frac{T(t)x_0 - x_0}{t}, \quad x_0 \in X.$$

Consideremos el subespacio

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} A_t x \quad \text{existe} \right\}$$

y definamos el operador

$$\begin{array}{rll} A: & D(A) & \longrightarrow X \\ & x & \longrightarrow \lim\limits_{t\to 0^+} A_t x \end{array}$$

El operador A*, así definido, es llamado el* ***Generador Infinitesimal*** *del Semigrupo Fuertemente Continuo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Teorema 1.6 *Sea* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un Semigrupo Fuertemente Continuo y* A *su Generador Infinitesimal con dominio* $D(A)$. *Entonces*

a) $D(A)$ *es un subespacio lineal de* X *y* A *es un operador lineal.*

b) Si $x_0 \in D(A)$, *entonces* $T(t)x_0 \in D(A)$, $t \geq 0$; *además* $T(t)x_0$ *es fuertemente diferenciable en* t *y se tiene:*

$$\frac{d}{dt}T(t)x_0 = AT(t)x_0 = T(t)Ax_0, \quad (t \geq 0).$$

c) Si $x_0 \in D(A)$, *entonces* $T(t)x_0 - T(s)x_0 = \int_s^t T(u)Ax_0 du \quad t, s \geq 0.$

d) Si $f : [0, \infty) \to I\!R$ *es continua, entonces*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)T_s x_0 ds = f(t)T_t x_0 \quad x_0 \in X, t \geq 0.$$

e) $\int_0^t T_s x_0 ds \in D(A)$ *y* $T(t)x_0 = x_0 + A\int_0^t T_s x_0 ds, \quad \forall x_0 \in X$

f) El subespacio $D(A)$ *es denso en* X *y* A *es un operador lineal cerrado en* $D(A)$.

Demostración. Ver [23]

Teorema 1.7 ***[Hille-Yosida-Phillips]****. Una condición necesaria y suficiente para que un operador lineal y cerrado* A, *con dominio denso en el espacio de Banach* X, *genere un semigrupo fuertemente continuo, es que existan números reales* M *y* w *tales que para todo número real* $\lambda > w$; $\lambda \in \rho(A)$

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

En este caso $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$.

Demostración. Ver [23]

Corolario 1.3 *Un operador lineal* A *es el generador infinitesimal del Semigrupo de Contracción* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *si y sólo si*

i .- A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$.

ii .- $(0,+\infty) \subset \rho(A)$ *y* $\forall \;\; \lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\| < \frac{1}{\lambda}.$$

Lema 1.1 *Sea Z un espacio de Hilbert separable y $\{A_n\}_{n\geq 1}$,$\{P_n\}_{n\geq 1}$ dos familias de operadores lineales y acotados en Z, con $\{P_n\}_{n\geq 1}$ una familia completa de proyectores ortogonales, tales que*

$$A_n P_n = P_n A_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

Defina la siguiente familia de operadores lineales

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

Entonces

a. *$T(t)$ es un operador lineal acotado si*

$$\|e^{A_n t}\| \leq g(t); \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

para alguna función continua a valores reales $g(t)$.

b. *Bajo la condición anterior, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo en el espacio de Hilbert Z, cuyo generador infinitesimal A está dado por*

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \quad z \in D(A) = \{z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty\}$$

c. *El espectro $\sigma(A)$ de A está dado por $\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})}$, donde $\overline{A_n} = A_n P_n$.*

Demostración. Ver [27]

Definición 1.3 (Semigrupo Analítico) *Un Semigrupo Fuertemente Continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es Analítico, si para $x \in X$ la función $t \to T(t)x, \;\; t > 0$ es diferenciable y existe una región $\triangle_\alpha = \{\varepsilon \in C : Re(\varepsilon) > 0, |arg\varepsilon| < \alpha\}$ del plano complejo tal que $T(t)$ puede extenderse a $\triangle_\alpha$ analíticamente y:*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x, \; t > 0. \tag{1.4}$$

Definición 1.4 (Operador Sectorial) *Un Operador A, lineal y cerrado sobre un espacio de Banach X, se llama Sectorial si su dominio es denso en X, y para algún $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$, $a \in R$, el sector*

$$S_{a,\phi} = \{ \ \lambda \ : \ \phi \leq arg|\lambda - a| \ \leq \pi, \quad \lambda \neq a\}$$

está contenido en el conjunto resolvente de A. Además,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \textit{para todo} \quad \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Teorema 1.8 *Si A es un Operador Sectorial, entonces $-A$ es el Generador Infinitesimal de un Semigrupo Analítico.*

Demostración. Ver [15]

Teorema 1.9 *Supongase que las condiciones del Lema 1.1 ocurren y que existe un conjunto acotado $S \subset \mathbf{C}$ con Real$(S) > 0$ tal que*

$$-\frac{1}{\lambda_n}\sigma(A_n) \subset S \qquad \lambda_n > 0 \qquad \forall n = 1, 2, \ldots \quad .$$

Entonces, el operador A dado por el Lema (1.1) genera un C_0-semigrupo Analítico

Demostración. Ver [27]

Definición 1.5 (Semigrupo Diferenciable) *Un Semigrupo Fuertemente Continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es Diferenciable para $t > t_0$, si para cualquier $x \in X$ la función $t \to T(t)x$, es diferenciable para $t > t_0$. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es **Diferenciable**, si es diferenciable para todo $t > 0$*

Definición 1.6 (Espacios de Potencias Fraccionarias) *Sea H un espacio de Hilbert separable, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de H y $\alpha \in [0, \infty)$*

$$\textit{Se denota por :} \quad X^\alpha = \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha} |u_n|^2 < \infty \right\}$$

$$\begin{aligned} A^\alpha : D(A^\alpha) = X^\alpha \quad &\longrightarrow \quad H \\ u \quad &\longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha u_n e_n \end{aligned}$$

Se considera la siguiente norma en X^α

$$\|u\|_{X^\alpha} = \|A^\alpha u\|_H = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha}|u_n|^2\right)^{1/2}$$

Luego,

a. $(X^\alpha, \|\cdot\|_{X^\alpha})$ *es un espacio de Hilbert con el producto interno* $\langle u, v\rangle_{X^\alpha} = \langle A^\alpha u, A^\alpha v\rangle_H$. *En particular,* $X^0 = H$ *y* $X^1 = D(A)$.

b. *Si* $\alpha \geq \beta \geq 0$, $X^\alpha \subset X^\beta$ *con inyección continua y densa; si* $\alpha > \beta$ *esta inyección es compacta.*

1.2. Problema de Valores Iniciales (P.V.I)

Los resultados que aparecen en esta sección así como sus demostraciones pueden verse con mayor amplitud en [35], [15], [17].

1.2.1. Problema Homogéneo de Valores Iniciales

Sea X un espacio de Banach y A un operador definido en un dominio $D(A) \subset X$; sea $x_0 \in X$ y consideremos el P.V.I

$$\begin{cases} x'(t) &= Ax(t), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0, \quad x_0 \in X \end{cases} \tag{1.5}$$

Definición 1.7 *Una solución de (1.5) es una función continua* $x : [0, +\infty) \to X$, *continuamente diferenciable en* $(0, +\infty)$ *con* $x'(t) \in X$, $x(t) \in D(A)$, $\forall t > 0$ *y que verifique la ecuación (1.5).*

Teorema 1.10 *Sea* A *un operador lineal definido densamente en el espacio de Banach* X, *tal que* $\rho(A) \neq \emptyset$. *El problema de valor inicial (1.5) tiene una única solución* $x(t)$, *la cual es continuamente diferenciable en* $[0, +\infty)$ *para todo* $x_0 \in D(A)$, *si sólo si* A *es el generador de un semigrupo fuertemente continuo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$

Teorema 1.11 *Si* A *es el generador de un Semigrupo Diferenciable, entonces para todo* $x_0 \in X$ *el P.V.I (1.5) posee una única solución.*

Corolario 1.4 *Si* A *es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico, entonces para cualquier* $x_0 \in X$ *el P.V.I (1.5) posee una única solución.*

1.2.2. El Problema de Valor Inicial No-Homogéneo.

Se considera a continuación el siguiente P.V.I en el espacio de Banach X

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), \quad t > 0. \\ x(0) = x_0 \,, \end{cases} \tag{1.6}$$

donde $f : [0, T) \to X$, $A : D(A) \subset X \to X$ el generador del C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ en X.

Definición 1.8 *La función $x : [0, T) \to X$ es una solución clásica del problema (1.6) si es continua en $[0, T)$; continuamente diferenciable y $x(t) \in D(A)$ en $(0, T)$; satisfaciendo además, la ecuación (1.6) en $[0, T)$.*

Teorema 1.12 *Sea $f \in L^1(0, T; X)$ y $x_0 \in X$. Si el problema de valor inicial (1.6) tiene una solución, esta viene dada por:*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{1.7}$$

Definición 1.9 *Sea A el generador de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$; $x_0 \in X$ y $f \in L^1(0, T; X)$. Entonces, la función $x \in C([0, T], X)$ dada por*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{1.8}$$

es una solución moderada del problema (1.6) en $[0, T]$.

Teorema 1.13 *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$; $f \in L^1(0, T; X)$ continua en $(0, T]$ y sea*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.9}$$

El P.V.I (1.6) tiene una única solución x en $[0, T)$ para cualquier $x_0 \in D(A)$, si y sólo si, se satisface una de las siguientes condiciones:

i. $v(t)$ es continuamente diferenciable en $(0, T)$.

ii. $v(t) \in D(A)$, $\forall t \in (0,T)$ *y* $Av(t)$ *es continua en* $(0,T)$.

Además, si (1.6) tiene una solución en $[0,T)$ *para* $x_0 \in D(A)$, *entonces* $v(t)$ *satisface i y ii.*

Corolario 1.5 *Sea* A *el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. *Si* $f \in C^1([0,T];X)$, *entonces el P.V.I (1.6) posee una única solución* $x : [0,T) \to X$, $\forall x_0 \in D(A)$.

Corolario 1.6 *Sea* A *el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$; $f \in L^1(0,T;X)$ *continua en* $(0,T)$. *Si* $f(s) \in D(A)$ *para todo* $0 < s < T$ *y* $Af(s) \in L^1([0,T];X)$, *entonces para cualquier* $x \in D(A)$ *el P.V.I (1.6) tiene una única solución sobre* $[0,T)$.

1.2.3. Regularidad de Soluciones Moderadas para Semigrupos Analíticos.

En esta parte, se considera nuevamente el problema (1.6), agregando la condición que el semigrupo generado por el operador A es Analítico.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + f(t), \quad t > 0, \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Teorema 1.14 *Sea* A *el generador de un semigrupo analítico* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. *Sea* $f \in L^1(0,T;X)$ *y asuma que para cualquier* $0 < t < T$ *existe un* $\delta_t > 0$ *y una función continua* $w_t(.) : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *tal que*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq w_t(|t-s|) \qquad y \qquad \int_0^{\delta_t} \frac{w_t(\tau)}{\tau} d(\tau) < \infty.$$

Entonces, para cualquier $x_0 \in X$ *la solución moderada de (1.6) es una solución clásica.*

Corolario 1.7 *Sea* A *el generador infinitesimal de un semigrupo analítico* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. *Si* $f \in L^1(0,T;X)$ *es localmente Hölder continua en* $(0,T]$, *entonces para cualquier* $x_0 \in X$ *el P.V.I (1.6) tiene una única solución.*

1.2.4. Ecuación no Lineal

A continuación se estudia el siguiente P.V.I, en el espacio de Banach X:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t > t_0, \\ \\ x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X. \end{cases} \tag{1.10}$$

Donde A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X, el operador $f : U \subset R^+ \times X \to X$ satisface una condición de Lipschitz en X; U abierto, f continua en t y $(t_0, x_0) \in U$.

Definición 1.10 *a. Una solución **clásica** del problema (1.10) en $[t_0, T)$ es una función continua $x : [t_0, T) \longrightarrow X$ tal que $x(t_0) = x_0$; $(t, x(t)) \in U$, $x'(t) \in X$, $x(t) \in D(A)$ y satisface la ecuación diferencial $\forall t \in (t_0, T)$.*

*b. Una solución **moderada** en $[t_0, T)$ es una función continua $x(t)$ tal que $(t, x(t)) \in U$; $t \to f(\cdot, x(\cdot)) \in L^1((t_0, T), X)$ y*

$$x(t) = T(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)f(s, x(s))ds. \tag{1.11}$$

Teorema 1.15 (Existencia Local.) *Sea $\Omega \in X$ un abierto, $x_0 \in \Omega$. Sea $f : I\!R^+ \times \Omega \longrightarrow X$ continua y satisfaciendo la siguiente condición de Lipschitz: para cada $\tau \in I\!R^+$, existe $k = k(\tau)$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq k\|x - y\|_X, \quad \forall t \in [0, \tau]; \quad x, y \in \Omega.$$

Entonces, para $\tau > 0$ suficientemente pequeño, existe una única solución moderada de (1.10) en $[0, \tau)$.

Teorema 1.16 (Existencia Global.) *Sea $x_0 \in X$ y $f : I\!R^+ \times X \longrightarrow X$ continua y satisfaciendo la siguiente condición de Lipschitz: para cada $\tau > 0$, existe $k = k(\tau)$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq k\|x - y\|_X, \quad \forall t \in [0, \tau]; \quad x, y \in X.$$

Entonces, (1.10) tiene una única solución moderada para todo τ en $I\!R^+$.

Teorema 1.17 *Supongase que $f : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ es continua y satisface la siguiente condición de Lipschitz: para cada $c > 0$, existe $k(c)$ tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k(c)\|x-y\|, \quad \forall t \in [0,c]; \quad x,y \in \overline{B_X(0,c)}.$$

Sea $x \in C([0,\tau), X)$ la solución moderada de (1.10) donde $\tau < \infty$. Entonces se satisface una de las siguientes posibilidades:

1. *Existe una única solución moderada de (1.10) en $\mathbb{R}^+$.*

2. *$[0,\tau)$ es el intervalo maximal de existencia de la solución moderada (1.10) y se tiene*

$$\lim_{t \to \tau^-} \|x(t)\| = +\infty.$$

1.2.5. Regularidad de la solución Moderada

Regularidad de la solución Moderada para semigrupos C_0

Teorema 1.18 *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X . Si $x_0 \in D(A)$ y $f : [t_0, T] \times X \to X$ es continuamente diferenciable, entonces la solución moderada de (1.10) es una solución clásica.*

Teorema 1.19 *Sea A como en el Teorema anterior. Si X es un espacio de Banach Reflexivo , $f : [t_0, T] \times X \to X$ es Lipschitz en ambas variables y $x_0 \in D(A)$, entonces la solución moderada de (1.10) es una solución clásica.*

Regularidad de Soluciones Moderadas para Semigrupos Analíticos.

Se considera nuevamente el problema

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t > t_0, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{1.12}$$

suponiendo que A genera un semigrupo analítico $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X, se define el espacio de potencias fraccionarias $X^\alpha = D(A^\alpha)$ $0 \leq \alpha < 1$; y se supone además que $U \subset \mathbb{R}^+ \times X^\alpha$,es abierto y que la función $f : U \longrightarrow X$ es tal que existe un entorno $V \subset U$ y constantes $L \geq 0$, $0 < v \leq 1$ tales que

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leq L(\|t_1 - t_2\|^v + \|x_1 - x_2\|_{X^\alpha}) \quad \forall (t_i, x_i) \in V. \tag{1.13}$$

Teorema 1.20 *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo analítico $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, el cual satisface $\|T(t)\| \leq M$, asuma además que $0 \in \rho(A)$. Si se satisface (1.13), entonces para cualquier $(t_0, x_0) \in U$ el P.V.I (1.12), tiene una única solución local*

$$x \in C([t_0, t_1); X) \bigcap C^1((t_0, t_1); X), \quad t_1 = t_1(t_0, x_0) > t_0.$$

Teorema 1.21 *Sea $0 \in \rho(A)$ y A el generador infinitesimal de un semigrupo analítico $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tal que $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \geq 0$. Sea $f : [t_0, +\infty) \times X_\alpha \longrightarrow X$ que satisface (1.13). Si existe una función continua no decreciente $k : [t_0, +\infty) \longrightarrow I\!R$ tal que*

$$\|f(t,x)\| \leq k(t)(1 + \|x\|_\alpha) \quad \forall t \geq t_0, \quad x \in X_\alpha,$$

entonces para cualquier $x_0 \in X_\alpha$, el problema de valor inicial (1.6) tiene una unica solución $x(t)$ definida en $[t_0, +\infty)$.

1.3. Ecuación de Evolución .

Sea X un espacio de Banach. Para $t \in [0, T]$ sean $A(t) : D(A(t)) \longrightarrow X$, un operador lineal en X y sea $f : [0, T] \to X$. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) + f(t), \quad 0 \leq s < t \leq T \\ x(s) &= y \end{cases} \tag{1.14}$$

El P.V.I (1.14) es llamado **Problema de Evolución** .

Definición 1.11 *Una función $x : [s, T) \to X$ es una solución clásica del problema (1.14), si x es continua en $[s, T]$; continuamente diferenciable y $x(t) \in D(A(t))$ en $(s, T]$; y además la ecuación (1.14) se satisface en $[s, T]$.*

Definición 1.12 *Una famila bi-paramétrica de operadores $U(t,s)$ $0 \leq s < t \leq T$ en X, es llamado un* ***Operador de Evolución*** *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$U(t,s) \in L(X)$ el espacio de Operadores Lineales y Acotados en X con $0 \leq s \leq t \leq t_1$ y para todo $x \in X$ la aplicación $(t,s) \to U(t,s)z$ es continua.*

2. *$U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s), \quad 0 \leq s \leq t \leq t_1$.*

3. *$U(t,t) = I$ es el Operador Identidad en X.*

4. *$M = \sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \|U(t,s)\| < \infty$.*

En la sección anterior estudiamos el caso en que $A(t) = A$

Se considera, ahora, el sistema homogéneo asociado a (1.14)

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), & 0 \leq s < t \leq T \\ x(s) = y \end{cases} \tag{1.15}$$

donde $A(t)$, $0 \leq t \leq T$ es un operador lineal acotado en X y la aplicación $t \to A(t)$ es continua en la topología de operador uniforme.

Para sistemas del tipo (1.15), se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.22 *Sea X un espacio de Banach y $A(t)$ un operador lineal acotado para cualquier $t \in [0,T]$. Si la función $t \to A(t)$ es continua en la topología de operador uniforme, entonces para cualquier $y \in X$ el problema de valor inicial (1.15) tiene una única solución en el sentido clásico.*

Demostración. Ver [35].

Teorema 1.23 *Sea X un espacio de Banach, $A(t)$ un operador lineal acotado, $t \in [0,T]$ y la función $t \to A(t)$ continua en la topología uniforme; sea $x(t)$ la solución del problema de valor inicial (1.15)garantizada por el teorema 1.22, entonces $x(t)$ está dada por $x(t) = U(t,s)y$ para $0 \leq s \leq t \leq T$, $y \in X$, donde el operador $U(t,s)$ es un Operador de Evolución.*

Demostración. Ver [35]. .

De la unicidad de la solución del problema de valores iniciales (1.14), se sigue que para el caso autónomo ($A = A(t)$), se tiene que $U(t,s) = T(t-s)$ y el operador solución corresponde al semigrupo generado por el operador A

1.4. Controlabilidad de Sistemas Lineales de Dimensión Infinita.

Sean X y U espacios de Banach de dimensión infinita. Se considera a continuación el sistema de control

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in J = [0, b], \tag{1.16}$$

donde A es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ en X,
$B \in \mathcal{L}(U, X)$, y $u \in L_p(J, U)$.

De acuerdo al teorema 1.12 y a la definición 1.9, para todo dato inicial $x_0 \in X$ y cada control $u \in L_p(J, U)$, existe una única **solución moderada** del sistema (1.16) dada por

$$x_u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)B(s)u(s)ds.$$

En el resto de esta sección se supondrá que el espacio de Banach X es Reflexivo.

Los resultados que aparecen en esta sección así como las demostraciones correspondientes se pueden encontrar en [12], [13], [14], [10].

1.4.1. Controlabilidad Exacta

Definición 1.13 *Sean x_0 y x_1 dos puntos en X. Se dice que el sistema (1.16) es exactamente controlable o controlable sobre $J = [0, b]$, si existe un control $u \in L_p[J; U]$, $1 \leq p < \infty$, tal que se satisfagan las siguientes condiciones de frontera*

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(T) = x_1$$

Definimos el siguiente operador lineal y continuo,

$$\begin{aligned} G_b : L^p(J; U) &\longrightarrow X, \\ u &\longrightarrow \int_0^b T(b-s)B(u(s))ds. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Teorema 1.24 *Sea $u \in L_p[J;U], 1 < p < \infty$, X, U espacios de Banach Reflexivos; las siguientes proposiciones son equivalentes*

i.- El sistema (1.16) es Exactamente Controlable sobre $[0,b]$.

ii.- $Rang(G_b) = X$.

iii.- Existe $\gamma > 0$ tal que:

$$\gamma \|B^*(\cdot)T^*(\cdot)x^*\|_{L_q[J;U^*]} \geq \|x^*\|_{X^*};\ x^* \in X^*,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Definición 1.14 *Sea $W: X \to X$ el operador dado por*

$$W(x) = \int_0^b T(b-s)BB^*T^*(b-s)xds. \tag{1.18}$$

Teorema 1.25 *Sea $u \in L^2(J,U)$ con U, X espacios de Hilbert. El sistema (1.16) es exactamente controlable en $[0,b]$, si y sólo si, el operador W, dado por (1.18), es invertible; además, el control $u \in L^2(J,U)$ que lleva el estado inicial x_0 hasta el estado final x_1, en tiempo $b > 0$, está dado por*

$$u(t) = B^*T^*(b-s)W^{-1}(x_1 - T(b)x_0).$$

1.4.2. Controlabilidad Aproximada

Definición 1.15 (Controlabilidad Aproximada sobre [0,b]) *Se dice que el sistema (1.16) es aproximadamente controlable sobre $[0,b]$ si para cualquier $x_0, x_1 \in X$, $\varepsilon > 0$, existe un control $u \in L_p[J;U]$ tal que*

$$x_u(0) = x_0 \quad y \quad \|x_u(b) - x_1\|_X \leq \varepsilon$$

Teorema 1.26 *Sean U, X Espacios de Banach reflexivos y $u \in L_p[J;U], 1 < p < \infty$ .El sistema (1.16) es ε-controlable sobre $[0,b]$, si y sólo si*

$$B^*T^*x^* = 0, \quad 0 \leq t \leq b \quad \Rightarrow \quad x^* = 0.$$

Teorema 1.27 *El sistema (1.16) es ε-controlable sobre $[0,b]$, si existe un entero n tal que,*

$$\overline{\text{Span}}\{A^n BU\colon n = 0, 1, \ldots\} = X$$

1.4.3. Resultados Varios

Definición 1.16 *Una función f de variable real t, se dice casi periódica, si para todo $\epsilon > 0$ existe $L > 0$ tal que, para todo intervalo I de longitud mayor o igual a L existe $x \in I$ que satisface:*

$$\|f(t) - f(t+x)\| < \epsilon$$

Teorema 1.28 *[Cayley-Hamilton] Sea A una matriz $n \times n$ y consideremos*

$$f(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} .... + C_1\lambda + C_0,$$

el polinomio característico de A. Entonces $f(A) = 0$. Es decir A satisface la ecuación :

$$A^n + C_{n-1}A^{n-1} .... + C_1 A + C_0 = 0.$$

Capítulo 2

Existencia, Estabilidad y Suavidad de Soluciones Acotadas para Ecuaciones de Evolución

En el presente capítulo se estudiarán Ecuaciones de Evolución de la forma

$$x' = Ax + F(t,x) \ , \tag{2.1}$$

y se probará la existencia de una Solución Acotada que es Exponencialmente Estable . En primer lugar se prueba la existencia de una Solución Moderada Acotada la cual está definida Local o Globalmente, dependiendo del tipo de lipschicidad del término no- lineal, para hacer esto, se usa el teorema del punto fijo de Banach; también se probará que dicha solución es exponencialmente estable , además la solución del sistema heredará las propiedades de periodicidad o casi periodicidad del término no-lineal. En segundo lugar se prueba la suavidad de la solución Moderada Acotada. Finalmente se aplican los resultados obtenidos para realizar el estudio de la **Ecuación de Termoelasticidad no-lineal** en una placa.

El aporte del presente trabajo, consiste en establecer resultados que permitirán garantizar la Existencia de Soluciones Acotadas en el **sentido Clásico** para Ecuaciones del tipo 2.1, además se darán condiciones para que estas soluciones sean periódicas o casi-periódicas, dependiendo del comportamiento del término no-lineal.

2.1. Existencia de Soluciones Moderadas Acotadas.

Se considera el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' &= Ax + F(t,x), \quad t > t_0 \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Sujeto a las siguientes condiciones:

1. A genera un C_0-semigrupo, en el espacio de Banach X.

2. $F : \mathbb{R} \times X \to X$ es continua y localmente Lipschitz en X. Es decir, para cualquier bola B_ρ en X, de radio $\rho > 0$ existe una constante L_ρ tal que

$$\|F(t,x) - F(t,y)\| \leq L_\rho \|x - y\|, \quad t \in \mathbb{R}, \ x, y \in B_\rho. \tag{2.3}$$

3. Existen constantes M y $\beta > 0$ tales que

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\beta t} \quad t \geq 0.$$

4. Existe una constante L_F tal que

$$\|F(t,0)\| \leq L_F \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

De las condiciones (1) y (2) y del Teorema 1.16, se concluye la existencia de una solución moderada de (2.2) dada por:

$$x(t) = T(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)F(s, x(s))ds, \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.5}$$

Sea $X_b = C_b(I\!R, X)$, el espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas definidas en $I\!R$, tomando valores en X con la norma

$$\|x\|_b = \sup\{\|x(t)\|_X, \quad t \in I\!R\}.$$

Una bola de radio $\rho > 0$ y centro $x = 0$ en este espacio está dada por

$$B_\rho^b = \{x \in X_b : \|x\|_b < \rho\}$$

Lema 2.1 *Sea $x \in X_b$. x es una solución moderada de (2.2) si y sólo si, x está dada por*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)F(s, x(s))ds, \quad t \in I\!R. \tag{2.6}$$

Demostración. . Sea $x(t)$ una solución moderada. Entonces

$$x(t) = T(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)F(s, x(s))ds, \quad \forall t > t_0.$$

Se tiene que

$$\|T(t-t_0)x(t_0)\| \leq Me^{-\beta(t-t_0)}\|x(t_0)\|.$$

Entonces

$$\lim_{t_0\to-\infty}\|T(t-t_0)x(t_0)\| = 0.$$

Tomando límite cuando $t_0 \to -\infty$ en la ecuación (2.5) se tiene que

$$\lim_{t_0\to-\infty} x(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)F(s,x(s))ds$$

$\Leftarrow$) Para probar el recíproco se supone que $x(t)$ es solución de la ec. integral (2.6). Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)F(s,x(s))ds \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} T(t-s)F(s,x(s))ds + \int_{t_0}^{t} T(t-s)F(s,x(s))ds \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} \left\|\int_{-\infty}^{t_0} T(t-s)F(s,x(s))ds\right\| &\leq \int_{-\infty}^{t_0} \|T(t-s)\|\|F(s,x(s))\|ds \\ &\leq M\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-s)}\Big[\|F(s,x(s))-F(s,0)\| + \|F(s,0)\|\Big]ds \\ &\leq M\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)}\Big[L\|x(s)\|_X + L_F\Big]ds \\ &\leq M[L\|x\|_b + L_F]\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-s)}ds \\ &\leq \frac{ML\|x\|_b + ML_F}{\beta} \end{aligned}$$

Entonces, $\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} T(t-s)F(s,x(s))ds$ converge.

De las propiedades de semigrupo, se tiene que $T(t-s) = T(t-t_0+t_0-s)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{t_0} T(t-s)F(s,x(s))ds = T(t-t_0)\int_{-\infty}^{t_0} T(t_0-s)F(s,x(s))ds.$$

Si

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} T(t_0-s)F(s,x(s))ds,$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{t} T(t-s)F(s,x(s))ds = T(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)F(s,x(s))ds$$

□

Teorema 2.1 *Si F es Localmente Lipschitz y $\rho > 0$ tal que*

$$0 < ML_F < (\beta - ML_\rho)\rho \quad , \tag{2.7}$$

donde L_ρ es la constante de Lipschitz de F en la bola $B^b_{2\rho}$; entonces, el sistema dado por la ecuación (2.2) tiene una y solo una, solución moderada $x_b(.)$ la cual pertenece a B^b_ρ.

Además, está solución es exponencialmente estable.

Demostración. Para garantizar la existencia de una solución moderada, se probará que el operador $T : B^b_\rho \to B^b_\rho$, dado por

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)F(s,x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

tiene un único punto fijo en la bola B^b_ρ. En efecto, para $x \in B^b_\rho$ se tiene que

$$\|Tx(t)\| \leq \int_{-\infty}^{t} Me^{-\beta(t-s)} \{L_\rho \|x(s)\| + L_F\} \leq \frac{ML_\rho\rho + ML_F}{\beta}.$$

La condición (2.7) implica que

$$M\rho L_\rho + ML_F < \beta\rho \iff \frac{M\rho L_\rho + ML_F}{\beta} < \rho.$$

Por lo tanto, $Tx \in B^b_\rho$ para todo $x \in B^b_\rho$.

Para probar que T es una contracción, se toman $x_1, x_2 \in B^b_\rho$ y se obtiene la siguiente estimación:

$$\|Tx_1(t) - Tx_2(t)\| \leq \int_{-\infty}^{t} Me^{-\beta(t-s)} L_\rho \|x_1(s) - x_2(s)\| ds \leq \frac{ML_\rho}{\beta}\|x_1 - x_2\|_b, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así,

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_b \leq \frac{ML_\rho}{\beta}\|x_1 - x_2\|_b, \quad x_1, x_2 \in B^b_\rho.$$

La condición (2.7) implica que

$$0 < \beta - ML_\rho \iff ML_\rho < \beta \iff \frac{ML_\rho}{\beta} < 1.$$

Por lo tanto, T es una contracción.Del Teorema del punto fijo de Banach (teorema 1.3), se sigue que T tiene un único punto fijo x_b en B_ρ^b, el cual satisface

$$x_b(t) = (Tx_b)(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)F(s, x_b(s))ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

Luego, del Lema 2.1, x_b es una solución moderada acotada de la ecuación (2.2).

Para probar que $x_b(\cdot)$ es exponencialmente estable. Se considera cualquier otra solución moderada $x(\cdot)$ dada por la ecuación (2.5), tal que $\|x(0) - x_b(0)\| < \frac{\rho}{2M}$. Entonces, $\|x(0)\| < 2\rho$. Sea $t_1 = \sup\{t > 0 : \quad \|x(t)\| < 2\rho \ \ \forall t \in [0, t_1)\}$.

Se tiene la siguiente estimación :

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_b(t)\| &\leq \|T(t)(x(0) - x_b(0)) + \int_0^t T(t-s)\left\{F(s, x(s)) - F(s, x_b(s))\right\} ds\| \\ &\leq Me^{-\beta t}\|(x(0) - x_b(0))\| + \int_0^t Me^{-\beta(t-s)} L_\rho \|x(s) - x_b(s)\| ds. \ \ \forall t \in [0, t_1) \end{aligned}$$

Entonces,

$$e^{\beta t}\|x(t) - x_b(t)\| \leq M\|(x(0) - x_b(0))\| + \int_0^t Me^{\beta s} L_\rho \|x(s) - x_b(s)\| ds.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Gronwall's se obtiene

$$\|x(t) - x_b(t)\| \leq Me^{(ML_\rho - \beta)t}\|(x(0) - x_b(0))\|, \quad t \in [0, t_1).$$

De la hipótesis dada en la ecuación (2.7) tenemos $ML_\rho - \beta < 0$. Por lo tanto

$$\|x(t) - x_b(t)\| \leq \rho/2. \tag{2.8}$$

Dado que $\|x(t)\| < 2\rho$ sobre $[0, t_1)$, entonces, $t_1 = \infty$ ó $\|x(t_1)\| = 2\rho$. Pero la segunda alternativa contradice la ecuación (2.8), así la solución $x(t)$ permanece en la bola $B_{2\rho}^b$ para todo $t \geq 0$.

Luego,

$$\|x(t) - x_b(t)\| \leq Me^{(ML_\rho - \beta)t}\|(x(0) - x_b(0))\|, \quad t \geq 0.$$

. □

Teorema 2.2 *Si F es globalmente Lipschitz con constante de Lipschitz $L > 0$ y*

$$\beta > ML. \tag{2.9}$$

Entonces, la ecuación (2.2) tiene una y solo una, solución moderada acotada $x_b(t)$ en $\mathbb{R}$.

Además, esta solución es la única solución acotada de la ecuación (2.5) y es exponencialmente estable.

Demostración. La Condición (2.9) implica, que para $\rho > 0$ suficientemente grande, se tiene la siguiente estimación

$$0 < ML_F < (\beta - ML)\rho, \tag{2.10}$$

El teorema anterior permite garantizar que el operador $T : B_\rho^b \to B_\rho^b$ dado por

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)F(s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

es una contracción; por lo tanto, T tiene un único punto fijo x_b en B_ρ^b dado por

$$x_b(t) = (Tx_b)(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)F(s, x_b(s))ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

Usando el lema 2.1, se concluye que x_b es una solución moderada acotada de la ecuación (2.5). Dado que la condición (2.10) ocurre para cualquier $\rho > 0$ suficientemente grande, entonces x_b es la única solución de la ecuación (2.5) en X_b.

Con el fin de probar que $x_b(t)$ es exponencialmente estable para $t > 0$, se considera cualquier otra solución $x(t)$ de (2.5) y se realiza el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}\|x(t) - x_b(t)\| &\leq \|T(t)(x(0) - x_b(0)) + \int_0^t T(t-s)\{F(s, x(s)) - F(s, x_b(s))\}ds\| \\ &\leq Me^{-\mu t}\|(x(0) - x_b(0))\| + \int_0^t Me^{-\mu(t-s)}L\|x(s) - x_b(s)\|ds.\end{aligned}$$

Entonces,

$$e^{\mu t}\|x(t) - x_b(t)\| \leq M\|(x(0) - x_b(0))\| + \int_0^t MLe^{\mu s}\|x(s) - x_b(s)\|ds.$$

Se aplica ahora la desigualdad de Gronwall's para obtener

$$\|x(t) - x_b(t)\| \leq Me^{(ML-\beta)t}\|(x(0) - x_b(0))\|, \quad t > 0.$$

De la ecuación (2.10) se tiene que $ML - \beta < 0$ y por lo tanto $x_b(t)$ es exponencialmente estable para todo $t > 0$. □

Corolario 2.1 *Si F es periódica en t de período τ, es decir, $F(t+\tau, \xi) = F(t, \xi)$, entonces, la única solución acotada dada por los teoremas 2.1 y 2.2 es también periódica de período τ.*

Demostración. Sea x_b la única solución de (2.5) en la bola B^b_ρ. Se quiere probar que, $x(t) = x_b(t+\tau)$ es también una solución de la ecuación (2.5) en la bola B^b_ρ.
En efecto, dado $x_0 = x_b(0)$ y

$$\begin{aligned}
x_b(t+\tau) &= T(t+\tau)x_0 + \int_0^{t+\tau} T(t+\tau-s)F(s,x_b(s))ds \\
&= T(t)T(\tau)x_0 + \int_0^{\tau} T(t+\tau-s)F(s,x_b(s))ds \\
&+ \int_\tau^{t+\tau} T(t+\tau-s)F(s,x_b(s))ds \\
&= T(t)\left\{T(\tau)x_0 + \int_0^{\tau} T(\tau-s)F(s,x_b(s))ds\right\} \\
&+ \int_0^{t} T(t-s)F(s,x_b(s+\tau))ds \\
&= T(t)x_b(\tau) + \int_0^{t} T(t-s)F(s,x_b(s+\tau))ds.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x_b(t+\tau) = x(t) = T(t)x_b(\tau) + \int_0^t T(t-s)F(s,x(s))ds,$$

y por la unicidad del punto fijo de la aplicación contractil T en esta bola, se concluye que $x_b(t) = x_b(t+\tau), \quad t \in \mathbb{R}$.

Observación 2.1 *Bajo algunas condiciones, la solución acotada dada por los teoremas 2.1 y 2.2 es casi periódica; por ejemplo, se puede estudiar el caso cuando la función F tiene la siguiente forma:*

$$F(t,x) = g(x) + P(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

donde $P \in C_b(\mathbb{R},X)$ y $g : X \to X$ es una función localmente Lipschitz .

Corolario 2.2 *Supongase F tiene la forma (2.11) y que g es una función globalmente Lipschitz con constante de Lipschitz $L > 0$; entonces, la solución acotada $x_b(\cdot,P)$ dada por el teorema 2.2 depende continuamente de $P \in C_b(\mathbb{R},Z_1)$.*

Demostración. Sean $P_1, P_2 \in C_b(\mathbb{R},Z_1)$ y $x_b(\cdot,P_1), x_b(\cdot,P_2)$ las funciones acotadas dadas por el teorema 2.2. Entonces

$$\begin{aligned}
x_b(t,\cdot,P_1) - x_b(t,\cdot,P_2) &= \int_{-\infty}^t T(t-s)[g(x_b(s,P_1)) - g(x_b(s,P_2))]ds \\
&+ \int_{-\infty}^t T(t-s)[P_1(s) - P_2(s)]ds.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \|x_b(\cdot, P_1) - x_b(\cdot, P_2)\|_b &\leq \frac{ML}{\beta}\|x_b(\cdot, P_1) - x_b(\cdot, P_2)\|_b \\ &+ \frac{M}{\beta}\|P_1 - P_2\|_b. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|x_b(\cdot, P_1) - x_b(\cdot, P_2)\|_b \leq \frac{M}{\beta - ML}\|P_1 - P_2\|_b.$$

□

Lema 2.2 *Si F tiene la forma dada en (2.11)y si $P(t)$ es casi perió dica , entonces la única solución acotada del sistema (2.5) dada por los teoremas 2.1 y 2.2 es también casi periódica.*

Demostración. Para probar este lema,se usa un resultado que se debe a S. Bohr [19],el cual establece que una función $h \in C(\mathbb{R}; X)$ es casi-periódica (a.p), si y solo si, el Hull de h, denotado por $H(h)$, es compacto en la topología de la convergencia uniforme, donde $H(h)$ es la clausura del conjunto de trasladados de h bajo la topología de la convergencia uniforme

$$H(h) = \overline{\{h_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}, \qquad h_\tau(t) = h(t + \tau), t \in \mathbb{R}.$$

Dado que el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones casi - periódicas es una función casi -periódica, entonces el conjunto A_ρ de funciones a.p, en la bola B^b_ρ, es cerrado, donde ρ está dado por el teorema (2.1)

Afirmación. La contracción T dada por los Teoremas 2.1 y 2.2 deja invariante al conjunto A_ρ .

En efecto; si $x \in A_\rho$, entonces $h(t) = g(x(t)) + P(t)$ es también una función a.p. Se considera a continuación la función

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) = (Tx)(t) &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)\{g(x(s)) + P(s)\}\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)h(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para demostrar la afirmación es suficiente probar que $H(\mathcal{F})$ es compacto en la topología de la convergencia uniforme. Sea $\{\mathcal{F}_{\tau_k}\}$ una sucesión en $H(\mathcal{F})$. Debido a que h es a.p, dada una sucesión $\{h_{\tau_k}\} \in H(h)$ podemos seleccionar una subsucesión convergente $\{h_{\tau_{k_j}}\}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\tau_{k_j}}(t) = \mathcal{F}(t + \tau_{k_j}) &= \int_{-\infty}^{t+\tau_{k_j}} T(t + \tau_{k_j} - s)h(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)h(s + \tau_{k_j})ds. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_{\tau_{k_j}}(t)-\mathcal{F}_{\tau_{k_i}}(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)}\|h(s+\tau_{k_j})-h(s+\tau_{k_i})\|ds\\ &\leq \|h_{\tau_{k_j}}-h_{\tau_{k_i}}\|_b \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)}ds=\frac{1}{\beta}\|h_{\tau_{k_j}}-h_{\tau_{k_i}}\|_b.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{\mathcal{F}_{\tau_{k_j}}\}$ es una sucesión de cauchy; lo cual prueba que $H(\mathcal{F})$ es compacto en la topología de la convergencia uniforme, y por lo tanto, $\mathcal{F}$ es a.p. y $TA_\rho \subset A_\rho$.

Ahora, el único punto fijo de T en la bola B_ρ^b permanece en A_ρ, lo cual garantiza que la única solución acotada $x_b(t)$ de la ecuación (2.5), dada por el Teorema 2.1, es también una función casi periódica.

□

2.2. Suavidad de la Solución Moderada Acotada.

En esta sección se probará que la solución Moderada Acotada de la ecuación (2.5), dada por los teoremas 2.1 y 2.2, es también una solución de la ecuación (2.2) en el sentido clásico. Para la realización de esta prueba, se usa el siguiente teorema que aparece en [23].

Teorema 2.3 *Sea A un operador lineal y cerrado definido en $D(A) \in X$ y sea $x \in C([a,b);X)$ con $b \leq \infty$; se supone además que $x(t) \in D(A)$, $Ax(t)$ es continua en $[a,b)$ y que las siguientes integrales impropias*

$$\int_a^b x(s)ds \quad y \quad \int_a^b Ax(s)ds$$

existen. Entonces

$$\int_a^b x(s)ds \in D(A) \qquad y \qquad A\int_a^b x(s)ds = \int_a^b Ax(s)ds.$$

Teorema 2.4 *Sea $x_b(t)$ la solución moderada acotada de la ecuación (2.2), dada por los teoremas 2.1 y 2.2. Si para todo $t>0$, $n \in N$ y $s \in (-\infty, t-\frac{1}{n}]$, se cumple lo siguiente:*

1. *$T(t-s)F(s,x_b(s)) \in D(A)$.*
2. *$AT(t-s)F(s,x_b(s))$ es continua*
3. *$\int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} AT(t-s)F(s,x_b(s))ds$ existe.*

*Entonces, $\mathbf{x_b(t)}$ **es una solución clásica** de la ecuación (2.2) en $\mathbb{R}^+$; es decir ,*

$$x_b'(t) = Ax_b(t) + F(t,x_b(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Sea $x_b(t)$ la única solución moderada acotada de la ecuación (2.2) dada por los teoremas 2.1 y 2.2. Por lo visto en la sección anterior se puede garantizar que

$$x_b(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)g(s)ds = \int_{0}^{+\infty} T(s)g(t-s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $g(s) = F(s, x_b(s))$. Luego $g \in C_b(\mathbb{R}, X)$ y $\|g(s)\| \leq \|g\|_b, \quad s \in \mathbb{R}$.

Sea $y(s) = T(t-s)g(s), \ s \in (-\infty, t)$. Entonces que $y(s)$ es una función continua que satisface las hipó tesis del teorema 2.3 en $(-\infty, t - \frac{1}{n}]$; por lo tanto se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} y(s)ds \in D(A), \quad \text{y} \quad A\int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} y(s)ds = \int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} Ay(s)ds.$$

i.e.,

$$\int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} T(t-s)g(s)ds \in D(A), \quad \text{y} \quad A\int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} T(t-s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} AT(t-s)g(s)ds.$$

A continuación se prueba que:

1. $\int_{-\infty}^{t} y(s)ds \ \in D(A)$
2. $A\int_{-\infty}^{t} y(s)ds \ = \ \int_{-\infty}^{t} Ay(s)$

Para verificar las afirmaciones anteriores, sea $I_n = \int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} y(s)ds$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_{-\infty}^{t} y(s)ds \tag{2.12}$$

y

$$y_n \ = \ AI_n = A\int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} y(s)ds = \int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} Ay(s)ds. \tag{2.13}$$

Dado que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach X, existe $y_0 \in X$ tal que $y_n \longrightarrow y_0$

De la definición de integral impropia y de las ecuaciones (2.12) y (2.13) se tiene que:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-\infty}^{t} Ay(s) \ &= \ \textstyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} Ay(s)ds \\ &= \ \textstyle\lim_{n\to\infty} A\int_{-\infty}^{t-\frac{1}{n}} y(s)ds \\ &= \ \textstyle\lim_{n\to\infty} AI_n \end{aligned} \tag{2.14}$$

Se probó que :

$$\begin{aligned} I_n &\to \textstyle\int_{-\infty}^{t} y(s)ds \\ AI_n &\to \textstyle\int_{-\infty}^{t} Ay(s)ds \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dado que el operador A es cerrado, por ser el generador de un C_0-semigrupo, se obtiene que:

- $\int_{-\infty}^{t} y(s)ds \ \in D(A)$,
- $\int_{-\infty}^{t} Ay(s) = A\int_{-\infty}^{t} y(s)ds$.

Esto es:

- $\int_{-\infty}^{t} T(t-s)g(s)ds \ \in D(A)$
- $A\int_{-\infty}^{t} T(t-s)g(s)ds \ = \ \int_{-\infty}^{t} AT(t-s)g(s)ds$

Con lo cual se han demostrado las afirmaciones 1 y 2 .
A continuación se probará que, $x_b(t)$ es una solución de (2.2); para lo cual se considera,

$$\begin{aligned} \frac{x_b(t+h)-x_b(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{t+h} T(t+h-s)g(s)ds - \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{t} T(t-s)g(s)ds \\ &= \left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_{-\infty}^{t} T(t-s)g(s)ds + \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} T(t+h-s)g(s)ds. \end{aligned}$$

Se usa la definición de generador infinitesimal de semigrupo, el teorema 1.6 y se toma el límite cuando $h \to 0^+$ para obtener que

$$x_b'(t) = A\int_{-\infty}^{t} T(t-s)g(s)ds + T(0)g(t).$$

Así,

$$x_b'(t) = Ax_b(t) + F(t, x_b(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

2.3. Existencia, Estabilidad y Suavidad de Soluciones Acotadas para la Ecuación de Termoelasticidad en una placa .

En esta sección se estudiará la existencia, estabilidad y suavidad de soluciones acotadas para la ecuación de termoelasticidad en una placa, con condiciones de borde del Tipo Dirichlet homogéneas

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha\Delta\theta = f_1(t,u,\theta) & t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta_t - \beta\Delta\theta - \alpha\Delta u_t = f_2(t,u,\theta), & t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta = u = \Delta u = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.16}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N(N \geq 1)$ suficientemente regular, $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$; u, θ denotan la deflección vertical y la temperatura de la placa, respectivamente. Se consideran las siguientes hipótesis:
H1) $f_1^e, f_2^e : \mathbb{R}^+ \times L^2(\Omega)^2 \to L^2(\Omega)$ definida por $f^e(t,u,\theta)(x) = f(t,u(x),\theta(x)),\ x \in \Omega$ son funciones continuas y localmente Lipschitz en la segunda y tercera variable, esto es, para cualquier bola de radio $\rho > 0$, B_ρ en $L^2(\Omega)^2$, existen constantes $L_1(\rho), L_2(\rho) > 0$ tales que para todo $(u,\theta),(v,\eta) \in B_\rho$ se tiene

$$\|f_i^e(t,u,\theta) - f_i^e(t,v,\eta)\|_{L^2} \leq L_i(\rho)\{\|u-v\|_{L^2} + \|\theta-\eta\|_{L^2}\}, \quad t \in \mathbb{R}^+.\ i = 1,2 \tag{2.17}$$

H2) Existe $L_f > 0$ tal que

$$\|f_i(t,0,0)\| \leq L_f, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1,2. \tag{2.18}$$

Observación 2.2 *La hipótesis H1) se satisface en el caso en que $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y globalmente Lipschitz, con constantes de Lipschitz $L_1, L_2 > 0$ respectivamente. Es decir,*

$$|f_i(t,u,\theta) - f_i(t,v,\eta)| \leq L_i\{|u-v|^2 + |\theta-\eta|^2\}, \quad t,u,v,\theta,\eta \in \mathbb{R},\ i = 1,2. \tag{2.19}$$

En el trabajo realizado por J. Lagnese [24], sobre la Ecuación de Termoelasticidad en una placa sin perturbación, $(f_i = 0, i = 1,2)$

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + \alpha\Delta\theta = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta_t - \beta\Delta\theta - \alpha\Delta w_t = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta = w = \Delta w = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.20}$$

el autor estudia la estabilidad de sistemas del tipo (2.20).

J.U. Kim [21](1992) estudió el sistema (2.20) sujeto a la siguiente condición de borde homogénea, mixta,

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial \eta} = w = 0, \quad \text{en} \quad \partial\Omega,$$

y probó que la energía del sistema decae exponencialmente.De igual modo, la ecuación de termoelasticidad **lineal** en una placa ha sido estudiada por otros autores, como podemos apreciar en [3], [4], [5], [31], [36], y [34], los cuales constituyen una buena referencia a este problema.

En esta parte del trabajo se estudiará la ecuación **no lineal** de termoelasticidad y se obtendrán resultados que permitan garantizar la de existencia de una solución moderada acotada para esta ecuación y la suavidad de dicha solución.

En primer lugar, se probará que el sistema lineal, ($f_1 = f_2 = 0$), genera un semigrupo analítico, el cual decae exponencialmente a cero,luego, se obtendrá, bajo algunas condiciones adicionales, una solución moderada acotada, la cual es exponencialmente estable; mas aún, para una clase grande de funciones , esta solución es casi-periódica . Finalmente se usará la analiticidad del semigrupo generado por el sistema lineal, para probar la suavidad de la solución acotada.

2.3.1. Formulación Abstracta del Problema

En esta sección se plantea el problema (2.16),como una Ecuación Diferencial Ordinaria Abstracta, para lo cual es necesario seleccionar el espacio en el cual el problema será planteado .

Sea $X = L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{R})$, $A : D(A) \subset X \to X$, el operador lineal no acotado definido por $A\phi = -\Delta\phi$, donde

$$D(A) = H^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}). \tag{2.21}$$

Es conocido que el operador A posee las siguientes propiedades, ver [12], [14]:

1. El espectro de A consiste solo de autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty,$$

cada uno con multiplicidad finita γ_n igual a la dimensión del espacio propio correspondiente.

2. Existe un conjunto ortonormal completo $\{\phi_{n,k}\}$ de autovectores del operador A.

3. Para todo $x \in D(A)$ tenemos

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k=1}^{\gamma_n} \langle x, \phi_{n_k} \rangle \phi_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n x, \tag{2.22}$$

donde $< \cdot, \cdot >$ es el producto interno de X y

$$E_n x = \sum_{k=1}^{\gamma_n} \langle x, \phi_{n_k} \rangle \phi_{n_k}. \tag{2.23}$$

Así, $\{E_n\}$ es una familia de proyectores ortogonales completos en X y $x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n x, \quad x \in X$.

4. $-A$ genera un semigrupo analítico $\{e^{-At}\}$ dado por

$$e^{-At}x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} E_n x. \tag{2.24}$$

5. El espacio de potencias fraccionarias X^r está dado por:

$$X^r = D(A^r) = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n)^{2r}\|E_n x\|^2 < \infty\}, \quad r \geq 0,$$

con la norma

$$\|x\|_r = \|A^r x\| = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2r}\|E_n x\|^2\right\}^{1/2}, \quad x \in X^r,$$

y

$$A^r x = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^r E_n x. \tag{2.25}$$

Se considera el Espacio de Hilberth $Z_r = X^r \times X \times X$, $r \geq 0$, con la norma y producto interno dados respectivamente por :

$$\left\|\begin{bmatrix} w \\ v \\ \theta \end{bmatrix}\right\|_{Z_r}^2 = \|w\|_r^2 + \|v\|^2 + \|\theta\|^2.$$

$$\langle(w_1, v_1, \theta_1), (w_2, v_2, \theta_2)\rangle \quad = \langle A^r w_1, A^r w_2\rangle_X + \langle v_1, v_2\rangle_X + \langle\theta_1, \theta_2\rangle_X$$

Así, la ecuación (2.16) se puede escribir como un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -A^2u + \alpha A\theta + f_1(t, u, \theta) \\ \theta' = -\beta A\theta - \alpha Av + f_2(t, u, \theta). \end{cases} \tag{2.26}$$

Finalmente, el sistema anterior puede escribirse como una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden de la forma (2.2), en el Espacio de Hilbert $Z_1 = X^1 \times X \times X$,

$$z' = \mathcal{A}z + F(t, z) \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0, \tag{2.27}$$

donde $F : \mathbb{R}^+ \times Z_1 \to Z_1$,

$$z = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}, \quad F(t, u, v, \theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1^e(t, u, \theta) \\ f_2^e(t, u, \theta) \end{bmatrix}$$

y

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ -A^2 & 0 & \alpha A \\ 0 & -\alpha A & -\beta A \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

es un operador lineal no acotado, con dominio

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in H^4(\Omega) : u = \Delta u = 0\} \times D(A) \times D(A).$$

De la hipótesis **H1**, se tiene que F es una función localmente Lipschitz en la segunda variable. Así F satisface la siguiente condición: para toda bola B_ρ en Z_1, de radio $\rho > 0$, existe una constante L_ρ tal que

$$\|F(t,z) - F(t,y)\| \leq L_\rho \|z - y\|, \quad t \in \mathbb{R}^+, \ z, y \in B_\rho. \tag{2.29}$$

y de la hipótesis H2) se obtiene la siguiente estimación

$$\|F(t,0)\| \leq L_F = \sqrt{2\mu(\Omega)} L_f, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.30}$$

donde $\mu(\Omega)$ es la medida de Lebesgue de Ω.

2.3.2. Ecuación Lineal de Termoelasticidad en una Placa

En esta parte del trabajo, se prueba que el operador $\mathcal{A}$ dado por la ecuación (2.28) genera un semigrupo fuertemente continuo, el cual decae exponencialmente a cero, para lo cual se usa el lema 1.1 que aparece en los preliminares.

Teorema 2.5 *El operador $\mathcal{A}$, dado por (2.28), es el generador infinitesimal del semigrupo analítico $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dado por*

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0. \tag{2.31}$$

donde $\{P_j\}_{j\geq 0}$ es una familia completa de proyectores ortogonales en el espacio de Hilbert Z_1 dado por

$$P_j = \begin{bmatrix} E_j & 0 & 0 \\ 0 & E_j & 0 \\ 0 & 0 & E_j \end{bmatrix}, \quad , j = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{2.32}$$

y

$$A_j = B_j P_j, \quad B_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda_j^2 & 0 & \alpha\lambda_j \\ 0 & -\alpha\lambda_j & -\beta\lambda_j. \end{bmatrix}, \, j \geq 1 \tag{2.33}$$

Además, los autovalores $\sigma_1(j)$, $\sigma_2(j)$, $\sigma_3(j)$ de la matrix B_j son simples y están dados por:

$$\sigma_1(j) = -\lambda_j \rho_1, \quad \sigma_2(j) = -\lambda_j \rho_2, \quad \sigma_3(j) = -\lambda_j \rho_3$$

donde $\rho_i > 0, \quad i = 1, 2, 3$ son las raíces de la ecuación característica

$$\rho^3 - \beta\rho^2 + (1 + \alpha^2)\rho - \beta = 0,$$

y este semigrupo decae exponencialmente a cero

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}, \quad t \geq 0, \tag{2.34}$$

donde

$$\mu = \lambda_1 min\{Re(\rho): \quad \rho^3 - \beta\rho^2 + (1+\alpha^2)\rho - \beta = 0\}$$

Demostración. De la ecuación (2.28), es conocido que $\mathcal{A}z$ tiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}z &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -A^2 & 0 & \alpha A \\ 0 & -\alpha A & -\beta A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v \\ -A^2 w + \alpha A\theta \\ -\alpha A v - \beta A\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} E_j v \\ -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 E_j w + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j \theta \\ -\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j v - \beta \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j \theta \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \begin{bmatrix} E_j v \\ -\lambda_j^2 E_j w + \alpha\lambda_j E_j \theta \\ -\alpha\lambda_j E_j v - \beta\lambda_j E_j \theta \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda_j^2 & 0 & \alpha\lambda_j \\ 0 & -\alpha\lambda_j & -\beta\lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j & 0 & 0 \\ 0 & E_j & 0 \\ 0 & 0 & E_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} A_j P_j z.
\end{aligned}$$

Trivialmente $A_j P_j = P_j A_j$. Con el fin de aplicar el lema 1.1, es necesario chequear la condición (1.3) de este lema; para hacer esto, se calcula el espectro de la matriz B_j, cuya ecuación característica está dada por:

$$\lambda^3 + \beta\lambda_j\lambda^2 + \lambda_j^2(1+\alpha^2)\lambda + \beta\lambda_j^3 = 0.$$

Entonces,

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^3 + \beta\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^2 + (1+\alpha^2)\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right) + \beta = 0.$$

Haciendo $\frac{\lambda}{\lambda_j} = -\rho$, se obtiene :

$$\rho^3 - \beta\rho^2 + (1+\alpha^2)\rho - \beta = 0. \tag{2.35}$$

Usando el teorema de Routh Hurwitz, se puede garantizar que la parte real de las raíces ρ_1, ρ_2, ρ_3 de la ecuación (2.35) son positivas. Por lo tanto, los autovalores $\sigma_1(j)$, $\sigma_2(j)$, $\sigma_3(j)$ de B_j están dados por:

$$\sigma_1(j) = -\lambda_j\rho_1, \quad \sigma_2(j) = -\lambda_j\rho_2, \quad \sigma_3(j) = -\lambda_j\rho_3. \tag{2.36}$$

Dado que los autovalores de B_j son simples, existe una familia completa de proyectores complementarios $\{q_i(j)\}_{i=1}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{cases} B_j &= \sigma_1(j)q_1(j) + \sigma_2(j)q_2(j) + \sigma_3(j)q_3(j) \\ e^{B_jt} &= e^{-\lambda_j\rho_1 t}q_1(j) + e^{-\lambda_j\rho_2 t}q_2(j) + e^{-\lambda_j\rho_3 t}q_3(j), \end{cases}$$

Del teorema de Cayley-Hamilton (1.28), se desprende que $q_i(j), \ \ i = 1, 2, 3$ están dados por:

$$\begin{aligned} q_1(j) &= \frac{1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)} \begin{bmatrix} \rho_2\rho_3 - 1 & \frac{\rho_2+\rho_3}{\lambda_j} & \frac{\alpha}{\lambda_j} \\ \lambda_j(\rho_3-\rho_2) & \rho_2\rho_3 - 1 - \alpha^2 & \alpha(\rho_2+\rho_3-\beta) \\ \lambda_j\alpha & -\alpha(\rho_2+\rho_3-\beta) & (\rho_3-\beta)^2 - \alpha^2, \end{bmatrix} \\ q_2(j) &= \frac{1}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)} \begin{bmatrix} \rho_1\rho_3 - 1 & \frac{\rho_1+\rho_3}{\lambda_j} & \frac{\alpha}{\lambda_j} \\ \lambda_j(\rho_3-\rho_1) & \rho_1\rho_3 - 1 - \alpha^2 & \alpha(\rho_1+\rho_3-\beta) \\ \lambda_j\alpha & -\alpha(\rho_1+\rho_3-\beta) & (\rho_3-\beta)^2 - \alpha^2, \end{bmatrix} \\ q_3(j) &= \frac{1}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)} \begin{bmatrix} \rho_1\rho_2 - 1 & \frac{\rho_1+\rho_2}{\lambda_j} & \frac{\alpha}{\lambda_j} \\ \lambda_j(\rho_2-\rho_1) & \rho_1\rho_2 - 1 - \alpha^2 & \alpha(\rho_1+\rho_2-\beta) \\ \lambda_j\alpha & -\alpha(\rho_1+\rho_2-\beta) & (\rho_2-\beta)^2 - \alpha^2. \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} A_j &= \sigma_1(j)P_{j1} + \sigma_2(j)P_{j2} + \sigma_3(j)P_{j3} \\ e^{A_jt} &= e^{-\lambda_j\rho_1 t}P_{j1} + e^{-\lambda_j\rho_2 t}P_{j2} + e^{-\lambda_j\rho_3 t}P_{j3}, \end{cases}$$

y

$$\mathcal{A}z = \sum_{j=1}^{\infty} \{\sigma_1(j)P_{j1}z + \sigma_2(j)P_{j2}z + \sigma_3(j)P_{j3}z\}, \tag{2.37}$$

siendo $P_{ji} = q_i(j)P_j$ una familia completa de proyectores en Z_1.

Para probar que $e^{A_nt}P_n : Z_1 \to Z_1$ satisface la condition (1.3) del lema 1.1, es necesario probar que para cada n, $e^{-\lambda_n\rho_i t}q_i(n)P_n$, satisface dicha condición , $n \in \mathbb{N}, \ \ i = 1, 2, 3$; para lo cual es suficiente probar que $e^{-\lambda_n\rho_i t}q_i(n)P_n$ satisface esta condición para algún $n \in \mathbb{N}, \ \ i \in 1, 2, 3$. En efecto, sin pérdida de generalidad se considera que i=2, y $z = (z_1, z_2, z_3)^T \in Z_1$ tal que $\|z\| = 1$. Entonces,

$$\|z_1\|_1^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|E_jz_1\|^2 \leq 1, \quad \|z_2\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|E_jz_2\|^2 \leq 1 \ \text{ and } \ \|z_3\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|E_jz_3\|^2 \leq 1.$$

Por lo tanto, $\lambda_j\|E_jz_1\| \leq 1, \quad \|E_jz_2\| \leq 1, \quad \|E_jz_3\| \leq 1 \quad j = 1, 2, \ldots$. Entonces,

$$|e^{-\lambda_j\rho_2 t}q_2(n)P_nz\|^2_{Z_1} =$$

$$\frac{e^{-2\lambda\rho_2 t}}{(\rho_2-\rho_1)^2(\rho_2-\rho_3)^2}\left\|\begin{array}{c}(\rho_1\rho_3-1)E_nz_1+\frac{\rho_1+\rho_3}{\lambda_n}E_nz_2+\frac{\alpha}{\lambda_n}E_nz_3\\ \lambda_n(\rho_3-\rho_1)E_nz_1+(\rho_1\rho_3-1-\alpha^2)E_nz_2+\alpha(\rho_1+\rho_3-\beta)E_nz_3\\ \lambda_n\alpha E_nz_1+-\alpha(\rho_1+\rho_3-\beta)E_nz_2+[(\rho_3-\beta)^2-\alpha^2]E_nz_3\end{array}\right\|^2_{Z_1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\rho_2-\rho_1)^2(\rho_2-\rho_3)^2}[e^{-2\lambda_n\rho_2 t}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2\|E_j\left((\rho_1\rho_3-1)E_nz_1+\frac{\rho_1+\rho_3}{\lambda_j}E_nz_2+\frac{\alpha}{\lambda_j}E_nz_3\right)\|^2\\
&+ e^{-2\lambda_n\rho_2}\sum_{j=1}^{\infty}\|E_j\left(\lambda_n(\rho_3-\rho_1)E_nz_1+(\rho_1\rho_3-1-\alpha^2)Ez_2+\alpha(\rho_1+\rho_3-\beta)Enz_3\right)\|^2\\
&+ e^{-2\lambda_n\rho_2 t}\sum_{j=1}^{\infty}\|E_j\left(\lambda_n\alpha E_nz_1+-\alpha(\rho_1+\rho_3-\beta)E_nz_2+[(\rho_3-\beta)^2-\alpha^2]E_nz_3\right)\|^2]\\
&= \frac{1}{(\rho_2-\rho_1)^2(\rho_2-\rho_3)^2}[e^{-2\lambda_n\rho_2 t}\lambda_n^2\|(\rho_1\rho_3-1)E_nz_1+\frac{\rho_1+\rho_3}{\lambda_n}E_nz_2+\frac{\alpha}{\lambda_n}E_nz_3\|^2\\
&+ e^{-2\lambda_n\rho_2 t}\|\lambda_n(\rho_3-\rho_1)E_nz_1+(\rho_1\rho_3-1-\alpha^2)E_nz_2+\alpha(\rho_1+\rho_3-\beta)E_nz_3\|^2\\
&+ e^{-2\lambda_n\rho_2 t}\|\lambda_\alpha E_nz_1+-\alpha(\rho_1+\rho_3-\beta)E_nz_2+[(\rho_3-\beta)^2-\alpha^2]E_nz_3\|^2]\\
&\leq e^{-2\lambda_n\rho_2 t}\left[|\rho_1\rho_3-1|+\rho_1+\rho_3+\alpha\right]^2\\
&+ e^{-2\lambda_n\rho_2 t}\left[|\rho_3-\rho_1|+|\rho_1\rho_3-1-\alpha^2|+\alpha|\rho_1+\rho_3-\beta|\right]^2\\
&+ e^{-2\lambda_n\rho_2 t}\left[\alpha+\alpha|\rho_1+\rho_3-\beta|+|(\rho_3-\beta)^2-\alpha^2|\right]^2\\
&\leq M^2e^{-2\lambda_n\rho_2 t}.
\end{aligned}$$

donde $M = M(\alpha,\beta) \geq 1$. Así se obtiene que

$$\|e^{-\lambda_n\rho_2 t}q_2(n)P_n\|_{Z_1} \leq M(\alpha,\beta)e^{-\lambda_n\rho_2 t}, \quad t \geq 0 \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Del mismo modo se prueba que

$$\begin{aligned}
\|e^{-\lambda_n\rho_1 t}q_1(n)P_n\|_{Z_1} &\leq M(\alpha,\beta)e^{-\lambda_n\rho_1 t}, \quad t \geq 0 \quad n = 1, 2, \ldots,\\
\|e^{-\lambda_j\rho_3 t}q_3(n)P_n\|_{Z_1} &\leq M(\alpha,\beta)e^{-\lambda_n\rho_3 t}, \quad t \geq 0 \quad n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|e^{A_nt}P_n\|_{Z_1} \leq M(\alpha,\beta)e^{-\mu t}, \quad t \geq 0 \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde

$$\mu = \lambda_1\min\{\mathrm{Re}(\rho) : \quad \rho^3-\beta\rho^2+(1+\alpha^2)\rho-\beta = 0\}.$$

Aplicando ahora el lema 1.1, se garantiza que $\mathcal{A}$ genera un semigrupo fuertemente continuo, el cual está dado por (2.31). A continuación se probará que este semigrupo decae exponencialmente a cero. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|T(t)z\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \|e^{A_j t} P_j z\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|e^{A_j t}\|^2 \|P_j z\|^2 \\
&\leq M^2(\alpha,\beta) e^{-2\mu t} \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j z\|^2 \\
&= M^2(\alpha,\beta) e^{-2\mu t} \|z\|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|T(t)\| \leq M(\alpha,\beta) e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Para probar la analiticidad de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, usaremos el teorema 1.3.4 de [15]. Para lo cual, debemos garantizar, que el operador $-\mathcal{A}$ es sectorial,(definición 1.4). Con la finalidad de construir el sector, se consideran las siguientes matrices 3×3

$$\overline{K}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda_n \rho_1 & -\lambda_n \rho_2 & -\lambda_n \rho_3 \\ \frac{-\alpha\rho_1}{\rho_1-\beta}\lambda_n & \frac{-\alpha\rho_2}{\rho_2-\beta}\lambda_n & \frac{-\alpha\rho_3}{\rho_3-\beta}\lambda_n \end{bmatrix}, \tag{2.38}$$

$$\overline{K}_n^{-1} = \frac{1}{a(\alpha,\beta)(\lambda_n)^2} \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.39}$$

donde

$$\begin{aligned}
&a_{11} = \tfrac{\alpha\rho_3\rho_2(\rho_2-\rho_3)}{(\rho_3-\beta)(\rho_2-\beta)}\lambda_n^2, \quad a_{12} = \tfrac{-\alpha\beta(\rho_2-\rho_3)}{(\rho_3-\beta)(\rho_2-\beta)}\lambda_n, \\
&a_{13} = (\rho_2-\rho_3)\lambda_n, \quad a_{21} = \tfrac{\alpha\rho_1\rho_3(\rho_1-\rho_3)}{(\rho_3-\beta)(\rho_1-\beta)}\lambda_n^2, \\
&a_{22} = \tfrac{-\alpha\beta(\rho_1-\rho_3)}{(\rho_3-\beta)(\rho_1-\beta)}\lambda_n, \quad a_{23} = (\rho_1-\rho_3)\lambda_n, \\
&a_{31} = \tfrac{\alpha\rho_1\rho_2(\rho_1-\rho_2)}{(\rho_1-\beta)(\rho_2-\beta)}\lambda_n^2,, \quad a_{32} = \tfrac{-\alpha\beta(\rho_1-\rho_2)}{(\rho_2-\beta)(\rho_1-\beta)}\lambda_n, \\
&a_{33} = (\rho_1-\rho_2)\lambda_n,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$a(\alpha,\beta) = \frac{\alpha\rho_3\rho_2}{(\rho_3-\beta)} + \frac{\alpha\rho_1\rho_3}{(\rho_1-\beta)} + \frac{\alpha\rho_2\rho_1}{(\rho_2-\beta)} - \frac{\alpha\rho_1\rho_2}{(\rho_1-\beta)} - \frac{\alpha\rho_3\rho_1}{(\rho_3-\beta)} - \frac{\alpha\rho_2\rho_3}{(\rho_2-\beta)}. \tag{2.41}$$

Entonces

$$B_n = \overline{K}_n^{-1}\overline{J}_n\overline{K}_n, \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{2.42}$$

Con

$$\overline{J}_n = \begin{bmatrix} -\lambda_n\rho_1 & 0 & \\ 0 & -\lambda_n\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_n\rho_3 \end{bmatrix}.$$

Se definen a continuación los siguientes operadores lineales acotados:

$$K_n : X \times X \times X \to X^1 \times X \times X, \qquad K_n^{-1} : X^1 \times X \times X \to X \times X \times X, \tag{2.43}$$

de la siguiente manera:
$K_n^{-1} = \overline{K}_n^{-1} P_n \qquad K_n = \overline{K}_n P_n.$

Y se prueba que $\|K_n^{-1}\|$ y $\|K_n\|$, son acotados. Para lo cual se toma $z = (z_1, z_2, z_3)^T \in Z_1 = X^1 \times X \times X$, tales que $\|z\|_{Z_1} = 1$. Entonces,

$$\|z_1\|_1^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \|E_j z_1\|^2 \leq 1, \quad \|z_2\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j z_2\|^2 \leq 1 \ \text{ y } \ \|z_3\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j z_3\|^2 \leq 1.$$

Por lo tanto $\lambda_j\|E_j z_1\| \leq 1, \quad \|E_j z_2\| \leq 1, \quad \|E_j z_3\| \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|K_n^{-1} z\|_{X\times X\times X}^2 &= \frac{1}{a(\alpha,\beta)\lambda_n^2} \left\| \begin{bmatrix} a_{11}E_n z_1 - a_{12}E_n z_2 + a_{13}E_n z_3 \\ -a_{21}E_n z_1 + a_{22}E_n z_2 - a_{23}E_n z_3 \\ a_{31}E_n z_1 - a_{32}E_n z_2 + a_{33}E_n z_3 \end{bmatrix} \right\|_{X\times X}^2 \\
&= \frac{1}{a(\alpha,\beta)\lambda_n^2} \|a_{11}E_n z_1 - a_{12}E_n z_2 + a_{13}E_n z_3\|^2 \\
&+ \frac{1}{a(\alpha,\beta)\lambda_n^2} \|-a_{21}E_n z_1 + a_{22}E_n z_2 - a_{23}E_n z_3\|^2 \\
&+ \frac{1}{a(\alpha,\beta)\lambda_n^2} \|a_{31}E_n z_1 - a_{32}E_n z_2 + a_{33}E_n z_3\|^2 \\
&\leq \frac{\Gamma_1^2(\alpha,\beta)}{\lambda_n^2}.
\end{aligned}$$

De este modo,

$$\|K_n^{-1}\|_{L(X^1\times X\times X, \ X\times X\times X)} \leq \frac{\Gamma_1(\alpha,\beta)}{\lambda_n}. \tag{2.44}$$

Para probar que, $\|K_n\|_{L(X\times X\times X, \ X^1\times X\times X)}$ es acotado, se considera $z = (z_1, z_2, z_3)^T \in Z = X \times X \times X$, con $\|z\|_Z = 1$. Entonces,

$$\|z_i\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j z_i\|^2 \leq 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Por lo tanto, $\|E_j z_i\| \leq 1, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,\ldots$, lo cual implica

$$\begin{aligned}
\|K_n z\|^2_{X^1\times X\times X} &= \left\| \begin{bmatrix} E_n z_1 + E_n z_2 + E_n z_3 \\ -\lambda_n \rho_1 E_n z_1 - \lambda_n \rho_2 E_n z_2 - \lambda_n \rho_3 E_n z_3 \\ \frac{-\alpha\rho_1\lambda_n}{\rho_1-\beta} E_n z_1 - \frac{\alpha\rho_2\lambda_n}{\rho_2-\beta} E_n z_2 - \frac{\alpha\rho_3\lambda_n}{\rho_3-\beta} E_n z_3 \end{bmatrix} \right\|^2_{X^1\times X\times X} \\
&= \lambda_n^2 \|E_n z_1 + E_n z_2 + E_n z_3\|^2 \\
&+ \|\lambda_n \rho_1 E_n z_1 + \lambda_n \rho_2 E_n z_2 + \lambda_n \rho_3 E_n z_3\|^2 \\
&+ \|\frac{\alpha\rho_1\lambda_n}{\rho_1-\beta} E_n z_1 + \frac{\alpha\rho_2\lambda_n}{\rho_2-\beta} E_n z_2 + \frac{\alpha\rho_3\lambda_n}{\rho_3-\beta} E_n z_3\|^2 \\
&\leq \Gamma_2^2(\alpha,\beta)\lambda_n^2.
\end{aligned}$$

Así

$$\|K_n\|_{L(X\times X\times X, X^1\times X\times X)} \leq \Gamma_2(\alpha,\beta)\lambda_n. \tag{2.45}$$

Ahora, la matriz $\overline{-J_n}$ puede escribirse de la siguente manera:

$$\begin{aligned}
-\overline{J}_n &= \operatorname{diag}[\lambda_n\rho_1, \lambda_n\rho_2, \lambda_n\rho_3] &(2.46)\\
&= \lambda_n\rho_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_n\rho_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_n\rho_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &(2.47)\\
&= \lambda_n\rho_1 q_1 + \lambda_n\rho_2 q_2 + \lambda_n\rho_1 q_1. &(2.48)
\end{aligned}$$

Se define el sector S_θ de la siguiente manera:

$$S_\theta = \{\lambda \in \mathcal{C} : \theta \leq |\arg(\lambda)| \leq \pi, \quad \lambda \neq 0\}, \tag{2.49}$$

donde

$$\max_{i=1,2,3}\{|\arg(\rho_i)|\} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Sea $\lambda \in S_\theta$, luego, λ es distinto de $\lambda_n\rho_i$, $i = 1,2,3$ .Entonces

$$\begin{aligned}
\|\left(\lambda + \overline{J}_n\right)^{-1} y\|^2 &= \frac{1}{(\lambda - \lambda_n\rho_1)^2}\|q_1 y\|^2 \\
&+ \frac{1}{(\lambda - \lambda_n\rho_2)^2}\|q_2 y\|^2 \\
&+ \frac{1}{(\lambda - \lambda_n\rho_3)^2}\|q_3 y\|^2.
\end{aligned}$$

Haciendo

$$N = \sup\left\{\frac{|\lambda|}{|\lambda - \lambda_n\rho_i|} : \lambda \in S_\theta, \quad n \geq 1; \quad i = 1,2,3\right\},$$

se obtiene

$$\| \left(\lambda + \overline{J}_n\right)^{-1} y\|^2 \leq \left(\frac{N}{|\lambda|}\right)^2 \left[\|q_1 y\|^2 + \|q_2 y\|^2 + \|q_3 y\|^2\right]$$

Así,

$$\| \left(\lambda + \overline{J}_n\right)^{-1} \| \leq \frac{N}{|\lambda|}, \quad \lambda \in S_\theta.$$

Ahora, si $\lambda \in S_\theta$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\lambda, -\mathcal{A})z &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + A_n)^{-1} P_n z \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left(\lambda + \overline{J}_n\right)^{-1} K_n^{-1} P_n z. \end{aligned}$$

Lo cual implica

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(\lambda, -\mathcal{A})z\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|K_n\|^2 \|K_n^{-1}\|^2 \| \left(\lambda + \overline{J}_n\right)^{-1} \|^2 \|P_n z\|^2 \\ &\leq \left(\Gamma_1^2(\alpha, \beta)\Gamma_2^2(\alpha, \beta)\right) \left(\frac{N}{|\lambda|}\right)^2 \|z\|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\mathcal{R}(\lambda, -\mathcal{A})\| \leq \frac{R}{|\lambda|}, \quad \lambda \in S_\theta.$$

Lo cual permite concluir que $-\mathcal{A}$ es sectorial; lo cual completa la prueba del teorema. □

2.3.3. Existencia de una Solución Moderada Acotada

En esta sección se prueba la existencia y estabilidad de una única solución moderada acotada para la ecuación (2.27); para lo cual se usan los resultados obtenidos en la Sección 2.1 de este capítulo.

Teorema 2.6 *Si existe $\rho > 0$ tal que*

$$0 < ML_F < (\mu - ML_\rho)\rho, \tag{2.50}$$

donde L_ρ es la constante de Lipschitz de F en la bola $B_{2\rho}^b$. Entonces, la ecuación (2.27) tiene una y solo una solución moderada $z_b(t)$ la cual pertenece a B_ρ^b.

Además está solución es exponencialmente estable.

Demostración. Dado que $\|T(t)\| \leq M(\alpha, \beta)e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$; la demostración se sigue directamente de aplicar el teorema 2.1, para $\beta = \mu$ y $M = M(\alpha, \beta)$

Teorema 2.7 *Si F es globalmente Lipschitz con constante de Lipschitz $L > 0$ y*

$$\mu > ML. \tag{2.51}$$

Entonces,la ecuación (2.27) tiene una y solo una solución moderada acotada $z_b(t)$ en $\mathbb{R}^+$. Además, esta solución moderada acotada es exponencialmente estable.

Demostración. Se sigue del teorema 2.2 de la sección anterior.

Corolario 2.3 *Si F es periódica en t de período τ, esto es: $F(t+\tau,\xi) = F(t,\xi)$, entonces, la única solución acotada dada por los teoremas 2.6 y 2.7 es también periódica de período τ.*

2.3.4. Suavidad de la Solución Acotada

En esta sección se prueba que la solución moderada acotada dada por los teoremas 2.6 y 2.7 es una solución de la ecuación (2.27), en el sentido clásico .

Teorema 2.8 *La Solución Moderada Acotada $z_b(t)$ de la ecuación (2.27) dada por los teoremas 2.6 and 2.7 es una solución clásica de esta ecuación en $\mathbb{R}^+$. es decir:*

$$z_b'(t) = \mathcal{A}z_b(t) + F(t, z_b(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Sea $z_b(t)$ la única solución moderada acotada de (2.27) . Entonces

$$z_b(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)g(s)ds = \int_0^\infty T(s)g(t-s)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $g(s) = F(s, z_b(s))$. Por lo tanto, $g \in C_b(\mathbb{R}, Z_1)$ y $\|g(s)\| \leq \|g\|_b, \quad s \in (-\infty, t)$.

Sea $x(s) = T(t-s)g(s), \quad s \in (-\infty, t)$. Con el fin de aplicar el teorema 2.4 se considera el intervalo $(-\infty, t-\eta]$,$\eta > 0$ lo suficientemente pequeño y se prueban las siguientes afirmaciones:

1. $\mathbf{x(s) \in D(\mathcal{A})}, \ s \in (-\infty, t-\eta]$.

2. $\mathcal{A}\mathbf{x(s)}$ **es una función continua en** $(-\infty, t-\eta]$ y $\int_{-\infty}^{t-\eta} \mathcal{A}\mathbf{x(s)ds}$ **existe**.

Afirmación 1 $x(s) \in D(\mathcal{A})$. Se sigue de observar que $x(s) = T(t-s)g(s)$; y de la analiticidad el semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Afirmación 2
Para probar esta afirmación es suficiente observar que $g \in C_b(\mathbb{R}, Z_1)$ y :

$$\mathcal{A}x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n T(t-s) g(s)$$

donde:

$$\begin{cases} A_j & = \sigma_1(j) q_1(j) P_j + \sigma_2(j) q_2(j) P_j + \sigma_3(j) q_3(j) P_j \\ e^{A_j t} & = e^{-\lambda_j \rho_1 t} q_1(j) P_j + e^{-\lambda_j \rho_2 t} q_2(j) P_j + e^{-\lambda_j \rho_3 t} q_3(j) P_j, \end{cases}$$

y

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ e^{-\lambda_j \rho_1 t} P_{j1} z + e^{-\lambda_j \rho_2 t} P_{j2} z + e^{-\lambda_j \rho_3 t} P_{j3} z \right\},$$

siendo $\{q_i(j)\}_{i=1}^{3}$ una familia completa de proyectores en $\mathbb{R}^3$ y $P_{ji} = q_i(j) P_j$ es una familia completa de proyectores en Z_1.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x(s) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n T(t-s) g(s) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n (\sum_{k=1}^{\infty} e^{(A_k(t-s))} P_k g(s)) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n e^{(A_n(t-s))} P_n g(s) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n [e^{-\lambda_n \rho_1 (t-s)} P_{n1} g(s) + e^{-\lambda_n \rho_2 (t-s)} P_{n2} g(s) + e^{-\lambda_n \rho_3 (t-s)} P_{n3} g(s)] \end{aligned} \tag{2.52}$$

Sea

$$f_n(s) = \sum_{k=1}^{n} A_k P_k [e^{-\lambda_k \rho_1 (t-s)} P_{k1} g(s) + e^{-\lambda_k \rho_2 (t-s)} P_{k2} g(s) + e^{-\lambda_k \rho_3 (t-s)} P_{k3} g(s)]$$

Entonces:

$$\mathcal{A}x(s) = \lim_{n \to \infty} f_n(s)$$

Dado que:

$$
\begin{aligned}
f_n(s) \;=\; & -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\rho_1 q_1(k)P_k e^{-\lambda_k\rho_1(t-s)}q_1(k)P_k g(s) + \lambda_k\rho_1 q_1(k)P_k e^{-\lambda_k\rho_2(t-s)}q_2(k)P_k g(s) + \\
& \lambda_k\rho_1 q_1(k)P_k e^{-\lambda_k\rho_3(t-s)}q_3(k)P_k g(s) + \lambda_k\rho_2 q_2(k)P_k e^{-\lambda_k\rho_1(t-s)}q_1(k)P_k g(s) + \\
& \lambda_k\rho_2 q_2(k)P_k e^{-\lambda_k\rho_2(t-s)}q_2(k)P_k g(s) + \lambda_k\rho_2 q_2(k)P_k e^{-\lambda_k\rho_3(t-s)}q_3(k)P_k g(s) \\
& +\lambda_k\rho_3 q_3(k)P_k e^{-\lambda_k\rho_1(t-s)}q_1(k)P_k g(s) + \lambda_k\rho_3 q_3(k)P_k e^{-\lambda_k\rho_2(t-s)}q_2(k)P_k g(s) + \\
& \lambda_k\rho_3 q_3(k)P_k e^{-\lambda_k\rho_3(t-s)}q_3(k)P_k g(s)
\end{aligned} \tag{2.53}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\|f_n(s)\| \;\leq\; & \textstyle\sum_{k=1}^{n} M_1\lambda_n e^{-\lambda_n M_2(t-s)}\|g(s)\|, \\
\text{donde} \qquad & M_1 = 9Max\{\rho_i\}_{i=1}^{3}, \quad M_2 = min\{\rho_i\}_{i=1}^{3}.
\end{aligned} \tag{2.54}
$$

Es conocido que

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_1\lambda_n e^{-\lambda_n M_2(t-s)}\|g(s)\|, \quad s \in (-\infty, t-\eta]$$

converge uniformemente.Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} A_k P_k T(t-s)g(s) \longrightarrow \mathcal{A}x(s)$$

Uniformemente, para todo $s \in (-\infty, t-\eta]$ y $\forall\eta > 0$. Luego, la continuidad de $\mathcal{A}x(s)$ se sigue de la continuidad de $f_n(s)$ para cada n.

La integrabilidad de $\mathcal{A}x(s)$, se obtiene al observar que para cada $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2...$, la siguiente integral existe,

$$
\begin{aligned}
\| \textstyle\int_{\eta}^{\infty} -\lambda_j\rho_i e^{-\lambda_j\rho_i s}P_{ji}g(t-s)ds\| \leq\; & \textstyle\int_{\eta}^{\infty} \lambda_j|\rho_i|e^{-\lambda_j \mathrm{Re}(\rho_i)s}\|P_{ji}g(t-s)\|ds \\
=\; & \frac{e^{-\lambda_j\|\rho_i\|}}{-\lambda_j\mathrm{Re}(\rho_i)}\|g\|_b.
\end{aligned} \tag{2.55}
$$

Por lo tanto $\|f_n(s)\|$ es integrable para cada n, y por la convergencia uniforme de la siguiente serie,

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_1\lambda_n e^{-\lambda_n M_2(t-s)}\|g(s)\| \quad s \in (-\infty, t-\eta],$$

se obtiene que $\mathcal{A}x(s)$ es integrable en $(-\infty, t-\eta]$, con lo cual finalizamos la prueba de la afirmación 2.

Aplicando ahora el resultado obtenido en el Teorema 2.4 para $\eta = \frac{1}{n}$, $n \in N$, se obtiene la suavidad de la solución moderada acotada, esto es:

$$z_b'(t) = \mathcal{A}z_b(t) + F(t, z_b(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

$\square$

Capítulo 3

Ecuaciones de Evolución que no son Exactamente Controlables

En el presente capítulo se mostrará una clase grande de Ecuaciones de Evolución que no puede ser Exactamente Controlables, esta clase es representada por el siguiente sistema de control no-autónomo :

$$z' = A(t)z + B(t)u(t), \quad z(t) \in Z, \quad u(t) \in U, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

donde Z, U son espacios de Banach de dimensión infinita, la función de control u pertenece a $L^p(0,t_1;U), t_1 > 0, 1 \leq p < \infty$, $B \in L^\infty(0,t_1;L(U,Z))$, $t \to B(t) \in L(U,Z)$ es continua en la topología fuerte de Operadores de $L(U,Z)$ y $A(t)$ genera un Operador de Evolución Fuertemente Continuo $U(t,s)$, de acuerdo a la Definición 1.12 que aparece en los preliminares, [35].

El siguiente sistema es un caso particular de (3.1) y ha sido estudiado por varios autores, particularmente en [12],[13]

$$z' = Az + Bu(t), \quad z(t) \in Z, \quad u(t) \in U, \quad t > 0, \tag{3.2}$$

donde $B \in L(U,Z)$ y A es el Generador Infinitesimal del Semigrupo Fuertemente Continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. El principal resultado de este capítulo fué motivado por la proposición 3.2 de [12] pp. 51, la cual establece:

Proposición 3.1 *Si B es el límite en la topología uniforme de una familia de operadores $\{B_n\}$ con rango de dimensión finita, entonces el sistema (3.2) no es exactamente controlable en* $[0,t_1]$.

Se probará el siguiente resultado: **Si $U(t,s)$ es compacto para $0 \leq s < t \leq t_1$, entonces el sistema (3.1) nunca puede ser exactamente controlable en** $[0,t_1]$. En particular,si $T(t)$ es compacto para $t > 0$, entonces el sistema autónomo (3.2) nunca puede ser exactamente controlable en $[0,t_1]$.

El sistema general (3.1) modela ecuaciones de difusión, ecuaciones de amortiguamiento de una viga flexible, algunas ecuaciones de termoelasticidad, ecuaciones de onda fuertemente amortiguadas, etc.
El resultado aquí obtenido,es incompatible con los presentados en la sección 5 de [6] y los resultados principales de [7],[8], dado que en ellos se asume que el Operador de Evolución es compacto y que el sistema lineal es Exactamente Controlable, lo cual es contradictorio, en vista de lo probado en el Teorema 3.4.

3.1. Notación y Preliminares.

Para Sistemas Autónomos gobernados por Semigrupos Fuertemente Continuos, las definiciones de Solución Moderada, Controlabilidad Exacta y Controlabilidad Aproximada, se encuentran en los preliminares del presente trabajo,(Def 1.9),(Def 1.13),
(Def 1.15). Para el caso de Sistemas de Evolución, estas definiciones toman la siguiente forma:

Definición 3.1 *Sea $A(t)$ el generador de un Operador de Evolución fuertemente continuo $U(t,s)$ $0 \leq s \leq t \leq t_1$; $z_0 \in Z$, $B \in L^\infty(0,t_1;L(U,Z))$, u pertenece a $L^p(0,t_1;U)$, $t_1 > 0$, $1 \leq p < \infty$ .Entonces, la función $z \in C([0,T],Z)$ dada por*

$$z(t,z_0,u) = U(t,0)z_0 + \int_0^t U(t,s)B(s)u(s)ds, \quad 0 \leq t \leq t_1, \tag{3.3}$$

es una Solución Moderada del sistema (3.1)

Proposición 3.2 *Para todo $z_0 \in Z$ y cada control $u \in L^p(0,t_1;U), 1 \leq p < \infty$, la ecuación (3.1) admite una única solución Moderada dada por la ecuación (3.3)*

Definición 3.2 *(**Controlabilidad Exacta**) El sistema (3.1) es exactamente controlable en $[0,t_1]$, $t_1 > 0$, si para todo $z_0, z_1 \in Z$ existe un control $u \in L^p(0,t_1;U)$ tal que la solución $z(t)$ de(3.3) correspondiente a u, verifica: $z(t_1) = z_1$.*

Sea $G : L^p(0,t_1;U) \to Z$, el siguiente operador lineal acotado

$$Gu = \int_0^{t_1} U(t_1,s)B(s)u(s)ds. \tag{3.4}$$

Entonces,la siguiente proposición caracteriza la controlabilidad exacta del sistema (3.1).

Proposición 3.3 *El sistema (3.1) es exactamente controlable en $[0,t_1]$ si y solo si, el operador G es sobreyectivo; es decir:*

$$G(L^p(0,T;U)) = GL^p = Range(G) = Z.$$

Definición 3.3 (**Controlabilidad Aproximada**) *Se dice que el sistema (3.1) es aproximadamente controlable en* $[0, t_1]$, *si para todo* z_0, $z_1 \in Z$ *y* $\epsilon > 0$, *existe un control* $u \in L^p(0, t_1; U)$ *tal que la solución* $z(t)$ *dada por(3.3) satisface*

$$\|z(t_1) - z_1\| \leq \epsilon.$$

Proposición 3.4 *El sistema (3.1) es aproximadamente controlable en* $[0, t_1]$ *si y solo si,* $\overline{Range(G)} = Z$.

El siguiente teorema se aplica a sistemas del tipo(3.2) y puede ser encontrado en [12].

Teorema 3.1 *Sean* X *y* U *Espacios de Banach Reflexivos;* $u \in L^p(0, t_1; U)$ $1 < p < \infty$. *El sistema (3.2) es aproximadamente controlable en* $[0, t_1]$ *si y solo si,*

$$B^* T^*(t) z^* = 0, \quad \forall t \in [0, t_1], \quad \Rightarrow z^* = 0. \tag{3.5}$$

3.2. Resultado Principal

En esta sección se probará el resultado principal de este capítulo, para lo cual se usarán dos importantes resultados de la Teoría de Operadores, los cuales aparecen en [14] y [22] respectivamente.

Teorema 3.2 *Sea* W *y* Z *espacios lineales normados y* $G : W \to Z$ *un operador lineal. Entonces, las siguientes proposiciones son ciertas:*

a) Si $\{G_n\}$ *es una sucesión de operadores compactos de* W *en el espacio de Banach* Z, *la cual converge uniformemente a* G, *entonces* G *es un operador compacto.*

b) Si W *y* Z *son espacios de Banach de dimensión infinita y* $G \in L(W, Z)$ *es un operador compacto, entonces* G *no puede ser sobreyectivo*

Teorema 3.3 *Sea* W *y* Z *espacios de Banach y* $G \in L(W, Z)$ *con* $Range(G) = Z$. *Entonces, existe* $\alpha > 0$ *tal que para todo* $S \in L(W, Z)$ *con* $\|G - S\| < \alpha$ *tenemos que* $Range(S) = Z$.

El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

Teorema 3.4 *Si* $U(t, s)$ *es compacto para* $0 \leq s < t \leq t_1$, *entonces el sistema (3.1) no puede ser exactamente controlable en* $[0, t_1]$

Prueba. De la proposición 3.3, es suficiente probar que el operador

$$G : L^p(0, t_1; U) \to Z, \quad Gu = \int_0^{t_1} U(t_1, s) B(s) u(s) ds.$$

satisface

$$\text{Range}(G) \neq Z. \tag{3.6}$$

Con la finalidad de verificar (3.6) se probará primero que el operador G es compacto. En efecto, tenemos que para todo $0 < \delta < t_1$ el operador G puede ser escrito de la siguiente manera:

$$G = G_\delta + S_\delta, \quad G_\delta, S_\delta \in L(L^p(0, t_1; U), Z),$$

donde

$$G_\delta u = \int_0^{t_1-\delta} U(t_1, s)B(s)u(s)ds \ \text{ y } \ S_\delta u = \int_{t_1-\delta}^{t_1} U(t_1, s)B(s)u(s)ds.$$

Afirmación 1. El operador G_δ es compacto. En efecto,

$$\begin{aligned} G_\delta u &= \int_0^{t_1-\delta} U(t_1, t_1-\delta)U(t_1-\delta, s)B(s)u(s)ds \\ &= U(t_1, t_1-\delta)\int_0^{t_1-\delta} U(t_1-\delta, s)B(s)u(s)ds \\ &= U(t_1, t_1-\delta)H_\delta u, \end{aligned}$$

donde

$$H_\delta u = \int_0^{t_1-\delta} U(t_1-\delta, s)B(s)u(s)ds.$$

Dado que $U(t_1, t_1-\delta)$ es compacto y $H_\delta \in L(L^p(0, t_1; U), Z)$, entonces G_δ es compacto.

Afirmación 2. Para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|S_\delta\| < \epsilon$. Para probar esta afirmación se aplica la desigualdad de Hölder para obtener,

$$\begin{aligned} \|S_\delta u\| &\leq \int_{t_1-\delta}^{t_1} \|U(t_1, s)\|\|B(s)\|\|u(s)\|ds \\ &\leq M\|B\|_\infty \delta \|u\|_{L^p}, \end{aligned}$$

Donde

$$M = \sup_{0\leq s\leq t\leq t_1} \|U(t, s)\|.$$

Por lo tanto, $\|S_\delta\| < \epsilon$ if $\delta < \frac{\epsilon}{M\|B\|_\infty}$.

Luego, para todo número Natural n, existe un $\delta_n > 0$ tal que

$$\|G - G_{\delta_n}\| = \|S_{\delta_n}\| < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De esta manera se ha probado que, la sucesión de operadores compactos $\{G_{\delta_n}\}$ converge uniformemente a G. Entonces, aplicando la parte a) del Teorema 3.2 se obtiene que G es compacto y por la parte b) del Teorema 3.2, concluimos que Range$(G) \neq Z$.

□

Observación 3.1 Una seguda Prueba del Teorema 3.4. *Se puede probar el Teorema 3.4 aplicando el Teorema 3.3. En efecto, si se supone por contradicción, que el sistema (3.1) es exactamente controlable en* $[0, t_1]$. *Entonces, de la proposición 3.3 se deduce que*

$$Rango(G) = Z.$$

Por otra parte, para todo $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que el operador* G *puede ser escrito como*

$$G = G_\delta + S_\delta, \quad G_\delta, S_\delta \in L(L^p(0, t_1; U), Z),$$

con G_δ *compacto y* $\|S_\delta\| < \epsilon$.

Luego, si $\alpha > 0$ *viene dado por el Teorema 3.3, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\|G - G_\delta\| = \|S_\delta\| < \alpha.$$

Por lo tanto, G_δ *es compacto y sobreyectivo, lo cual contradice la parte b) del Teorema 3.2.*

□

Corolario 3.1 *Si* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es compacto para* $t > 0$ *, entonces el sistema (3.2), no es Exactamente Controlable.*

Observación 3.2 *El Teorema 3.4 no puede ser aplicado a Ecuaciones Diferenciales Funcionales ya que ellas generan un Semigrupo Fuertemente Continuo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$*, el cual es compacto solo para* $t > r > 0$.

3.3. Sistemas Aproximadamente Controlables

En esta sección se mostrará una clase de sistemas que son aproximadamente controlables, pero nunca exactamente controlables, para lo cual se usará el lema (1.1) que aparece en los preliminares. [27].

Se considera el sistema autónomo dado por

$$z' = Az + Bu(t), \quad z(t) \in Z, \quad u(t) \in U, \quad t > 0, \tag{3.7}$$

donde Z es un Espacio de Hilbert, U un Espacios de Banach Reflexivo, $B \in L(U, Z)$ el espacio de operadores lineales acotados de U a Z y A el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Lema 3.1 *Bajo las condiciones del Lema 1.1; si* $dim(\mathcal{R}(P_n)) = \gamma_n < \infty$ *y para* $t > 0$ $\lim_{n\to\infty} \|e^{A_n t}\| = 0$, *entonces el semigrupo dado por*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad t \geq 0 \tag{3.8}$$

es compacto para $t > 0$.

Prueba. Sea $\{T_n(t)z\}_{n=1}^{\infty}$, la sucesión de operadores compactos dada por,

$$T_n(t)z = \sum_{k=1}^{n} e^{A_k t} P_k z, \quad t > 0, \quad z \in Z.$$

Por hipótesis se tiene que, dado $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que $\|e^{A_n t}\| < \epsilon$, $n \geq N$. Debido a que $T(t)$ está dado por la ecuación (3.8)se prueba que

$$\begin{aligned} \|T(t)z - T_n(t)z\|^2 &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \|e^{A_k t} P_k z\|^2 \\ &\leq \epsilon^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \|P_k z\|^2 \\ &\leq \epsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k z\|^2 = \epsilon^2 \|z\|^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\|T(t) - T_n(t)\| < \epsilon, \quad n \geq N.$$

Por lo tanto, la sucesión de operadores compactos $\{T_n(t)\}$, converge uniformemente a $T(t)$ para todo $t > 0$. Luego, de la parte a) del Teorema 3.2 se concluye la compacidad de $T(t)$.

□

Proposición 3.5 *Si* A *satisface las hipótesis del Lema 1.1 y además se tiene que para* $t > 0$, $\lim_{n\to\infty} \|e^{A_n t}\| = 0$ *y* $dim(\mathcal{R}(P_n)) = \gamma_n < \infty$, *entonces el sistema 3.7 no puede ser Exactamente Controlable*

Prueba Se sigue inmediatamente del Lema 3.1 y el Teorema 3.4. □

Bajo las condiciones del Lema 1.1, se estudiará la controlabilidad aproximada del sistema 3.7.

Teorema 3.5 *Si el sistema (3.7) es aproximadamente controlable en* $[0, t_1]$, *entonces cada uno de los siguientes sistemas es aproximadamente controlable en* $[0, t_1]$

$$y' = A_j P_j y + P_j B u, \quad y \in \mathcal{R}(P_j); \quad j = 1, 2, \ldots, . \tag{3.9}$$

Prueba Con el propósito de llegar a una contradicción, se supone que el sistema (3.7) es aproximadamente controlable en $[0, t_1]$ y que existe J tal que el sistema

$$y' = A_J P_J y + P_J B u, \quad y \in \mathcal{R}(P_J),$$

no es aproximadamente controlable en $[0, t_1]$. Entonces, debe existir un $V_J \in \mathcal{R}(P_J)$ tal que

$$(P_J B)^* e^{A_J^* t} V_J = 0, \quad t \in [0, t_1] \text{ y } V_J \neq 0. \tag{3.10}$$

Dado que el sistema (3.7) es aproximadamente controlable, del Teorema 3.1 se tiene que:

$$B^* T^*(t) z = 0, \quad \forall t \in [0, t_1], \quad \Rightarrow z = 0.$$

Sea $z = P_J V_J = V_J$. Entonces,

$$\begin{aligned} B^* T^*(t) z &= B^* \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n^* t} P_n z, \\ &= B^* e^{A_J^* t} P_J z = (P_J B)^* e^{A_J^* t} V_J = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $V_J = 0$, lo cual contradice la suposición hecha en (3.10).

□

Se considera ahora, una familia particular de operadores B, que permita asegurar la controlabilidad aproximada del sistema (3.7). Para ello se define, para cualquier número natural m, con $1 \leq m \leq \infty$ ($m = \infty$ es posible) el espacio de Hilbert l_2^m

$$l_2^m = \{U = \{u_j\}_1^m : \quad u_j \in \boldsymbol{C}, \quad \sum_{j=1}^{m} |u_j|^2 < \infty\},$$

donde el producto interno y la norma están dadas de la siguiente manera:

$$\langle U, V \rangle = \sum_{j=1}^{m} u_j v_j, \quad \|U\|_{l_2}^2 = \sum_{j=1}^{m} |u_j|^2.$$

Sea $\{b_j\}_{j=1}^m$ una sucesión contenida en Z tal que $\sum_{j=1}^m \|b_j\|^2 < \infty$. Entonces el operador $B : l_2^m \to Z$ definido por

$$BU = \sum_{j=1}^{m} u_j \; b_j, \tag{3.11}$$

es un operador lineal y acotado.

Teorema 3.6 *Supongase que* $dim(\mathcal{R}(P_n)) = \gamma_n < \infty$*, que el espectro de* A_n *es tal que* $\sigma(A_n) = \{\rho_j(n)\}_{j=1}^{\gamma_n}$ *con* $\{\{Re(\rho_j(n))\}_{j=1}^{\gamma_n}\}_{n\geq 1}$ *una sucesión estrictamente decreciente y* B *está dado por (3.11). Entonces, (3.7) es aproximadamente controlable en* $[0, t_1]$ *si y solo si, los siguientes sistemas son controlables en* $[0, t_1]$

$$y' = A_j P_j y + P_j B u, \quad y \in \mathcal{R}(P_j); \quad j = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{3.12}$$

Además, si $m < \infty$*, entonces (3.12) es aproximadamente controlable en* $[0, t_1]$ *si y solo si,*

$$Rank \left[P_j B \vdots A_j P_j B \vdots A_j^2 P_j B \vdots \cdots A_j^{\gamma_j - 1} P_j B \right] = \gamma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{3.13}$$

Con el fin de facilitar la lectura, se presentan a continuación dos resultados que son utilizados para la demostración del Teorema 3.6 y que aparecen en [26] y [13], respectivamente.

Proposición 3.6 *Bajo las condiciones del Teorema 3.6, si* $m < \infty$*,entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(a) El sistema (3.12) es controlable en $[0, t_1]$*,*
(b) $B^* P_j^* e^{A_j^* t} y = 0, \quad \forall t \in [0, t_1], \quad \Rightarrow y = 0.$
(c) $Rank \left[P_j B \vdots A_j P_j B \vdots A_j^2 P_j B \vdots \cdots A_j^{\gamma_j - 1} P_j B \right] = \gamma_j.$

Lema 3.2 *Sea* $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ *y* $\{\beta_{i,j} : i = 1, 2, \ldots, m\}_{j\geq 1}$ *dos sucesiones de números complejos, tales que:* $Re(\alpha_1) > Re(\alpha_2) > Re(\alpha_3) \cdots$.

Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{\alpha_j t} \beta_{i,j} = 0, \quad \forall t \in [0, t_1], \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

sii

$$\beta_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, \infty.$$

Prueba del Teorema 3.6. Se supone que para cada $j = 1, 2, \ldots, \infty$ el sistema (3.12) es controlable en $[0, t_1]$ y se calcula $B^* : Z \to l_2^m$:

$$\begin{aligned}\langle BU, z\rangle_{Z,Z} &= \langle \sum_{j=1}^{m} u_j b_j, z\rangle_{Z,Z} \\ &= \sum_{j=1}^{m} u_j \langle b_j, z\rangle_{Z,Z} \\ &= \langle U, \{\langle b_j, z\rangle\}_{j=1}^{m}\rangle_{l_2^m, l_2^m}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B^* z = \{\langle b_j, z\rangle\}_{j=1}^{m} = \sum_{j=1}^{m} \langle b_j, z\rangle e_j,$$

donde $\{e_j\}_{j=1}^{m}$ es la base canónica de l_2^m. Dado que

$$T^*(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j^* t} P_j z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0. \tag{3.14}$$

Entonces,

$$B^* T^*(t) z = \sum_{j=1}^{m} \langle b_j, T^*(t) z\rangle e_j.$$

De acuerdo al Teorema 3.1 y por la ecuación anterior, para probar que el sistema (3.7) es aproximadamente controlable en $[0, t_1]$ es necesario verificar que se satisface la siguiente condición :

$$\text{Si} \quad < b_i, T^*(t) z >= 0, \quad \forall t \in [0, t_1], \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad \Rightarrow z = 0. \tag{3.15}$$

Con el fin de verificar (3.15), se considera la ecuación (3.14) y se obtiene que :

$$< b_i, T^*(t) z >= 0 \quad \text{sii} \quad \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} < b_i, e^{A_j^* t} P_j z >= 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad t \in [0, t_1]$$

.

Dado que el espectro de A_j esta formado por autovalores simples, $\sigma(A_j) = \{\rho_s(j)\}_{s=1}^{\gamma_j}$, existe una familia completa de proyectores complementarios $\{q_s(j)\}_{s=1}^{\gamma_j}$ en $\mathcal{R}(P_j)$, tal que:

$$e^{A_j^* t} = \sum_{s=1}^{\gamma_j} e^{\rho_s(j) t} q_s^*(j).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} < b_i, T^*(t)z > &= \sum_{j=1}^{\infty} < b_i, e^{A_j^* t} P_j^* z > = \sum_{j=1}^{\infty} < b_i, \sum_{s=1}^{\gamma_j} e^{\rho_s(j)t} P_{s,j}^* z > \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\gamma_n} e^{\rho_s(j)t} < b_i, P_{s,j}^* z > = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad t \in [0, t_1], \end{aligned}$$

donde $P_{s,j} = q_s(j) P_j$.

Aplicando ahora el Lema 3.2, se concluye que

$$< b_i, P_{s,j}^* z > = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, \infty, \quad t \in [0, t_1].$$

Entonces,

$$< b_i, e^{A_j^* t} P_j^* z > = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, \infty, \quad t \in [0, t_1].$$

Por lo tanto,

$$B^* e^{A_j^* t} P_j^* z = 0; \quad j = 1, 2, \cdots, \infty, \quad t \in [0, t_1].$$

Dado que $P_j^* = P_j$ y $(P_j)^2 = P_j$, entonces

$$(P_j B)^* e^{A_j^* t} P_j z = 0; \quad j = 1, 2, \cdots, \infty, \quad t \in [0, t_1].$$

Por hipótesis se tiene que el sistema (3.12) es controlable, entonces $P_j z = 0$, $j = 1, 2, \cdots, \infty$. Dado que $\{P_j\}_{j \geq 1}$ es una familia completa de proyectores ortogonales en Z, se concluye que $z = 0$ y la condición 3.15 se satisface.

La demostración en el otro sentido se sigue directamente del Teorema 3.5.

□

3.4. Aplicaciones

En esa sección se muestran algunos ejemplos de Sistemas de Control de dimensión infinita, gobernados por Ecuaciones Diferenciales Parciales, los cuales son Aproximadamente Controlables, pero no pueden se Exactamente Controlables.

Ejemplo 3.1 *Sistemas de Ecuaciones Parabólicas con condiciones de borde del tipo Dirichlet*

$$\begin{cases} z_t &= D\Delta z + b_1(x)u_1 + \ldots + b_m(x)u_m, \quad t \geq 0, \quad z \in I\!R^n, \\ z &= 0, \quad on \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

donde Ω *es un dominio suficientemente suave en* $I\!R^N$, $b_i \in L^2(\Omega; I\!R^n)$, *los controles* $u_i \in L^2(0, t_1; I\!R)$; $i = 1, 2, \ldots, m$ *y* D *es una matriz* $n \times n$ **no-diagonal** *cuyos autovalores* *son semi-simples con parte real positiva . Un caso particular es, la ecuación parabólica escalar:*

$$\begin{cases} z_t &= z_{xx} + b(x)u \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ z(t,1) &= z(t,0) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

El siguiente ejemplo aparece en [13]

Ejemplo 3.2 *La ecuación que modela una viga flexible amortiguada:*

$$\begin{cases} z_{tt} &= -z_{xxxx} + 2\alpha z_{txx} + b(x)u \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ z(t,1) &= z(t,0) = 0 = z_{xx}(0,t) = z_{xx}(1,t), \end{cases} \tag{3.18}$$

donde $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $b(x) = \frac{1}{2\epsilon} 1_{[}x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$.

Ejemplo 3.3 *La Ecuación de Onda fuertemente amortiguada con condición de borde tipo Dirichlet:*

$$\begin{cases} w_{tt} + \eta(-\Delta)^{1/2} w_t + \gamma(-\Delta)w = d_1(x)u_1 + \ldots + d_m(x)u_m, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ w(t,x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

Ejemplo 3.4 *La Ecuación de Termoelasticidad en una placa con condición de borde tipo Dirichlet:*

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + \alpha\Delta\theta = a_1(x)u_1 + \ldots + a_m(x)u_m, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta_t - \beta\Delta\theta - \alpha\Delta w_t = d_1(x)u_1 + \ldots + d_m(x)u_m, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \theta = w = \Delta w = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

Capítulo 4

Controlabilidad Exacta para un Sistema de Ecuaciones Funcionales Semilineales Integrodiferenciales

En el presente capítulo se estudiará la Controlabilidad Exacta del siguiente sistema de ecuaciones funcionales semilineal integrodiferencial en el Espacio de Banach X

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) + \int_0^t f(s, x_s)ds \quad t \in J = [0, b] \\ x_0 & = & \phi \ \text{ en } \ [-r, 0], \quad u(t) \in U \end{array}\right. \tag{4.1}$$

donde U es un espacio de Banach, la función de control u pertenece al espacio $L^2(J, U)$, A genera un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X y $B \in \mathcal{L}(U, X)$; el término no lineal $f : J \times C \longrightarrow X$ es un operador continuo en J, uniformemente lipschitz en $C = C([-r, 0], X)$ el espacio de las funciones continuas $\phi : [-r, 0] \longrightarrow X$ con la norma

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}$$

Es decir, existe un $L > 0$ tal que

$$\|f(t, \phi_1) - f(t, \phi_2)\| \leq L\|\phi_1 - \phi_2\|_C, \ t \in J, \ \phi_1, \phi_2 \in C$$

El sistema (4.1) fué estudiado por Balachandran [6] asumiendo, entre otras hipótesis, la compacidad del semigrupo generado por el operador A y la controlabilidad exacta del sistema lineal asociado. En el capítulo anterior se probó que estas hipótesis no son compatibles.

Con el fin de obtener la controlabilidad exacta del sistema (4.1)se suprime la compacidad del semigrupo, se dan condiciones adicionales al término no-lineal y se prueba el siguiente resultado: **si el sistema lineal**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in J = [0, b].$$

es exactamente controlable, y

$$\|\mathcal{W}^{-1}\| M^3 L \|B\|^2 \frac{b^3}{2} \exp\left(\frac{MLb^2}{2}\right) \leq 1,$$

entonces, el sistema (4.1) es Exactamente Controlable.

Donde $\mathcal{W} : X \to X$ es el operador acotado dado por:

$$\mathcal{W}x = \int_0^b T(b-s)BB^\star T^\star(b-s)xds.$$

4.1. Notación y Preliminares.

En esta sección se presentan algunos resultados básicos, que junto a los que aparecen en la sección 1.4 de los preliminares, permiten formular y obtener el resultado principal de este capítulo.

Se considera el siguiente sistema de control en el espacio de Banach X

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), & t \in J = [0, b], \quad b > 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

donde U es un espacio de Banach, A es el generador de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$; el operador $B \in \mathcal{L}(U, X)$ y la función de control u pertenece al espacio $L^2(J, U)$.

Se definen los siguientes operadores acotados:

$$\hat{G} : L^2(J, U) \to X \qquad \hat{G}u = \int_0^b T(b-s)Bu(s)ds. \tag{4.3}$$

$$\mathcal{W} : X \to X \qquad \mathcal{W}x = \int_0^b T(b-s)BB^\star T^\star(b-s)xds. \tag{4.4}$$

Los resultados que aparecen a continuación caracterizan la controlabilidad Exacta del sistema (4.2)

$$< \mathcal{W}x, x_0 >= 0, \quad \forall x \in X.$$

En particular, haciendo $x = x_0$ obtenemos de la ecuación (4.7) que

$$0 =< \mathcal{W}x_0, x_0 > \quad \geq \frac{1}{\gamma^2}\|x_0\|_X^2.$$

Entonces $x_0 = 0$, lo cual es una contradicción; de este modo se ha probado que $\mathcal{W}$ es una biyección; el Teorema de la Aplicación Abierta, permite concluir que $\mathcal{W}^{-1}$ es un operador lineal acotado.

Para probar el recíproco se supone que $\mathcal{W}$ es invertible y se prueba que dado $x \in X$, existe un control $u \in L^2$ tal que $Gu = x$. En efecto, sea u definido de la siguiente manera:

$$u(t) = B^*T^*(b-t)\mathcal{W}^{-1}x.$$

Entonces

$$Gu = \int_0^b T(b-s)\mathcal{B}u(s)ds = \int_0^b T(b-s)\mathcal{B}\mathcal{B}^*T^*(b-s)\mathcal{W}^{-1}xds = \mathcal{W}\mathcal{W}^{-1}x = x.$$

De esta forma queda probado que el control u dado por (4.6) lleva el estado inicial x_0 al estado final x_1 en tiempo b.

□

Se considera ahora el sistema semilineal:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \int_0^t f(s, x_s)ds, \quad t \in J \\ \\ x_0 &= \phi \ \text{ en } \ [-r, 0] \end{cases} \tag{4.8}$$

donde X y U son Espacios de Banach, la función de control u pertenece al espacio $L^2(J, U)$; el operdor A genera un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X y $B \in \mathcal{L}(U, X)$. El término no-lineal $f : J \times C \longrightarrow X$ es un operador continuo en J; uniformemente lipschitz en C siendo $C = C([-r, 0], X)$ el espacio de las funciones continuas $\phi : [-r, 0] \longrightarrow X$ con la norma

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}$$

Además, para

$$x \in C([-r, b], X) \tag{4.9}$$

se tiene que $x_t \in C([-r, 0], X)$ es el truncamiento de (4.9) el cual se define como:

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \qquad \forall\, \theta \in [-r, 0], \quad t \in [0, b].$$

Definición 4.1 *Sea A el generador del C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$; $\phi \in C([-r,0],X)$, $u \in L^2(J,U)$, $B \in \mathcal{L}(U,X)$, $f : J \times C \longrightarrow X$ continua en J y uniformemente lipschitz en C; entonces el operador $x \in C([J,0],X)$ dado por*

$$x(t) = \begin{cases} T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)[Bu(s) + \int_0^s f(\tau, x_\tau)d_\tau]ds, & t \in J \\ \phi(t), & -r \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

es una solución moderada del problema (4.8).

Proposición 4.2 *Sea $f : J \times C \longrightarrow X$ continua en J y uniformemente Lipschitz en C. Si A es el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X, entonces para cualquier $\phi \in C$ el problema (4.8) posee una única solución moderada dada por (4.10)*

Demostración.

Sea $\phi \in C = C([-r,0],X)$, y se define el operador,

$$F : C([-r,b],X) \rightarrow C([-r,b],X)$$

como:

$$Fx(t) = \begin{cases} T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)[Bu(s) + \int_0^s f(\tau, x_\tau)d_\tau]ds & t \in J, \\ \phi(t) & -r \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Sean $x, v \in C([-r,b],X)$ y $t \in [0,b]$.
Entonces:

$$\begin{aligned} \|Fx(t) - Fv(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s) \int_0^s [f(\tau, x_\tau) - f(\tau, v_\tau)]d_\tau ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \int_0^s L\|x_\tau - v_\tau\|d_\tau ds \\ &\leq ML \int_0^t \int_0^s \|x_\tau - v_\tau\|d_\tau ds, \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde L es la constante de Lipschitz de F y $M = \hat{M}e^{wb}$; siendo $\hat{M}$ la contante que satisface $\|T(t)\| \leq \hat{M}e^{wt}, \quad t \geq 0$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \|x_\tau - v_\tau\| &= \sup_{\phi\in[-r,0]} \|x(\tau+\theta) - v(\tau+\theta)\| \\ &= \sup_{\epsilon\in[-r+\tau,\tau]} \|x(\epsilon) - v(\epsilon)\| \\ &\leq \sup_{\epsilon\in[-r,b]} \|x(\epsilon) - v(\epsilon)\| \\ &= \|x-v\|_{C([-r,b],X)}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Así, de (4.12) se obtiene que,

$$\|Fx(t) - Fv(t)\| \leq ML\|x-v\|\frac{t^2}{2}, \quad t\in J. \tag{4.14}$$

Si $t\in[-r,0]$, entonces $\|Fx(t)-Fv(t)\| = 0$. Luego la ecuación (4.14) se satisface para
$t\in[-r,b]$.

Usando (4.12) se prueba que:

$$\begin{aligned} \|(F^2x)(t) - (F^2v)(t)\| &= \|F(Fx(t)) - F(Fv(t))\| \\ &\leq ML\int_0^t\int_0^s \|(Fx)_\tau - (Fv)_\tau\| d_\tau ds \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dado que:

$$\begin{aligned} \|(Fx)_\tau - (Fv)_\tau\| &= \sup_{\theta\in[-r,0]} \|(Fx)(\tau+\theta) - (Fv)(\tau+\theta)\| \\ &= \sup_{\epsilon\in[-r+\tau,\tau]} \|Fx(\epsilon) - Fv(\epsilon)\| \\ &\leq \sup_{s\in[-r,b]} \|(Fx)(s) - (Fv)(s)\|, \end{aligned}$$

de (4.14) se tiene que:

$$\begin{aligned} \|(Fx)_\tau - (Fv)_\tau\| &\leq \sup_{s\in[0,\tau]} ML\|x-v\|\tfrac{s^2}{2} \\ &= ML\tfrac{\tau^2}{2}\|x-v\| \end{aligned} \tag{4.16}$$

Luego, de (4.15) se concluye que:

$$\begin{aligned}\|(F^2x)(t) - (F^2v)(t)\| &\leq ML\int_0^t \int_0^s \frac{ML\tau^2}{2}\|x-v\|d_\tau ds \\ &= \tfrac{M^2L^2t^4}{2\cdot 3\cdot 4}\|x-v\|.\end{aligned}$$

De, este modose ha probado que

$$\|(F^2x)(t) - (F^2v)(t)\| \leq \tfrac{M^2L^2t^4\|x-v\|}{4!}, \quad t \in [-r,b]. \tag{4.17}$$

Usando el método de inducción completa, se prueba que que:

$$\|(F^nx)(t) - (F^nv)(t)\| \leq \tfrac{M^nL^nt^{2n}\|x-v\|}{(2n)!}, \quad \forall t \in [-r,b]$$

Por lo tanto,

$$|(F^nx) - (F^nv)\| \leq \tfrac{(MLb^2)^n}{(2n!)}\|x-v\| \tag{4.18}$$

Dado que para n suficientemente grande

$$\frac{(MLb^2)^n}{2n!} < 1,$$

se sigue del principio de Contracción que F tiene un único punto fijo $x \in C([-r,b],X)$.

Luego de la definición 4.1 se obtiene el resultado. □

4.2. Resultado Principal

En esta sección se probará el resultado principal de este capítulo, el cual se refiere a la Çontrolabilidad Exacta del Sistema Semilineal,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \int_0^t f(s,x_s)ds \quad t \in J = [0,b], \\ x_0 &= \phi \text{ in } [-r,0]. \end{cases} \tag{4.19}$$

Definición 4.2 *Se dice que el sistema (4.19) es exactamente controlable en J, si para cualquier par $\phi \in C$ y $x_1 \in X$ existe un control $u \in L^2(J,U)$, tal que la solución $x(t)$ de (4.10) satisface $x(b) = x_1$*

Sea

$$G_f : L^2([0,b],U) \to X$$

el operador dado por

$$G_f u = \int_0^b T(b-s)[Bu(s) + \int_0^s f(\tau, x_\tau)d\tau]ds, \tag{4.20}$$

donde x_τ es el truncamiento de la solución moderada:

$$x(t) = x(t, \phi(0), u)$$

correspondiente al sistema (4.19)

Proposición 4.3 *El Sistema (4.19) es exactamente controlable en J si y solo si, el operador G_f dado por (4.20) es sobreyectivo, esto es:*

$$G_f(L^2(J,U) = X. \tag{4.21}$$

Lema 4.1 *Sean $u_1, u_2 \in L^2(J,U)$; $\phi \in C$ y $x_i = x(t, \phi(0), u_i)$; $i = 1,2,$ la solución moderada de (4.19). Entonces ocurre la siguiente estimación:*

$$\|x_t^2 - x_t^1\| \leq M\|B\|\|u_2 - u_1\|_{L^2(J,U)}\sqrt{b}e^{\frac{MLb^2}{2}}, \quad 0 \leq t \leq b, \tag{4.22}$$

donde L es la constante de Lipschitz de f, $M = \hat{M}e^{wb}$ y $x_t^i = (x_i)_t$ es el truncamiento de la solución x_i, $i = 1,2$

Demostración.

Sean x_1, x_2 las soluciones moderadas de (4.19), correspondientes a u_1, u_2 respectivamente, entonces:

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| =$$

$$\| \int_0^t T(t-s)[Bu_2(s) - Bu_1(s)]ds + \int_0^t T(t-s)[\int_0^s \|f(\tau, x_\tau^2) - f(\tau, x_\tau^1)\|d\tau]ds, \quad t \in J.$$

Por lo tanto

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq$$

$$M\|B\| \int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\|ds + M\int_0^t \int_0^s \|f(\tau, x_\tau^2) - f(\tau, x_\tau^1)\|d\tau ds\ , \quad t \in\ J. \tag{4.23}$$

Se usa la desigualdad de Holder's para obtener:

$$\int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\| ds \leq (\|u_2 - u_1\|)_{L^2} \sqrt{b} \tag{4.24}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s \|f(\tau, x_\tau^2) - f(\tau, x_\tau^1)\| d\tau ds &\leq L \int_0^t \int_0^s \|x_\tau^2 - x_\tau^1\| d_\tau ds = \\ = L \int_0^t \int_\tau^t \|x_\tau^2 - x_\tau^1\| ds d_\tau &= L \int_0^t \|x_\tau^2 - x_\tau^1\| (t-\tau) d_\tau \end{aligned} \tag{4.25}$$

Luego, de las ecuaciones (4.23),(4.24),(4.25), se tiene que:

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq M\|B\|(\|u_2 - u_1\|)_{L^2(J,U)} \sqrt{b} + ML \int_0^t \|x_\tau^2 - x_\tau^1\|(t-\tau) d\tau, \ \forall \ t \in J.$$

Dado que el lado derecho se esta desigualdad es una función creciente de t y además

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| = 0, \forall t \in [-r, 0],$$

entonces

$$\|x_2(t+\theta) - x_1(t+\theta)\| \leq M\|B\|(\|u_2 - u_1\|)_{L^2(J,U)} \sqrt{b} + ML \int_0^t \|x_\tau^2 - x_\tau^1\|(t-\tau) d\tau, \ \forall\, t \in J, \theta \in [-r, 0].$$

Así,

$$\|x_t^2 - x_t^1\| \leq M\|B\|(\|u_2 - u_1\|)_{L^2(J,U)} \sqrt{b} + ML \int_0^t \|x_\tau^2 - x_\tau^1\|(t-\tau) d\tau, \ \forall \ t \in J.$$

Usando ahora la desigualdad de Gronwall´s se obtiene

$$\|x_t^2 - x_t^1\| \leq M\|B\| \|u_2 - u_1\|_{L^2(J,U)} \sqrt{b} \exp\left(\frac{MLb^2}{2}\right).$$

Lo cual concluye la prueba del Lema 4.1. □

A continuación se presenta el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.2 *Sea X y U Espacios de Hilbert;se supone que el sistema lineal (4.2) es exactamente controlable, que $f : J \times C \longrightarrow X$ es continua en J, uniformemente Lipschitz en C y que*

$$\|W^{-1}\| M^2 L \|B\| \frac{b^3}{2} \exp\left(\frac{MLb^2}{2}\right) \leq 1. \tag{4.26}$$

Entonces el sistema (4.19) es exactamente controlable.

Demostración.

Dado que el sistema lineal (4.2) es exactamente controlable, es conocido en virtud de los Teoremas 4.1 y 1.24 que el operador

$$\mathcal{W}x = \int_0^b T(b-s)BB^\star T^\star(b-s)xds, \quad x \in X$$

es invertible y que el operador

$$\hat{G}u = \int_0^b T(b-s)Bu(s)ds.$$

es sobreyectivo.

Para demostrar la controlabilidad exacta del sistema no-lineal (4.19), es suficiente probar, de acuerdo a la proposición 4.3, que el operador G_f, dado por (4.20), es sobreyectivo; para ello se toman:

$$x_1 \in X \quad , u_1 \in L^2(J,U), \quad y \quad \phi \in C([-r,0],X)$$

y se denota por

$$x_1(t) = x(t, \phi(0), u_1)$$

a la solución moderada de (4.19) dada por (4.10)

Por lo tanto, la controlabilidad del sistema lineal (4.2) permite asegurar la existencia de un control $u_2 \in L^2(J,U)$ tal que:

$$\hat{G}u_2 = x_1 - \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^1)d_\tau \; ds.$$

Así,

$$x_1 - \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^1)d_\tau ds \; - \; \int_0^b T(b-s)Bu_2(s)ds = 0,$$

donde

$$u_2(t) = B^\star T^\star(b-t)\mathcal{W}^{-1}(x_1 - \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^1)d_\tau ds \;).$$

Sea $x_2(t,\phi,u_2) = x_2,$ la solución moderada de (4.19) dada por (4.10) y x_τ^2 su truncación . Dado que

$$x_1 - \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^2)d_\tau ds \quad \in X$$

Existe un control $u_3 \in L^2(J,U)$ y la correspondiente solución moderada de (4.19) dada por $x^3(t,\phi,u_3)$, la cual satisface

$$\hat{G}u_3 = x_1 - \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^2)d_\tau \, ds$$

y

$$x_1 - \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^2)d_\tau ds \; - \; \int_0^b T(b-s)Bu_3(s)ds = 0,$$

Donde

$$u_3(t) = B^\star T^\star(b-t) \; \mathcal{W}^{-1}(x_1 - \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^2)d_\tau ds \;).$$

Continuando con este proceso, se construyen dos sucesiones: $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset L^2(J,U)$ y $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C([-r,b],X)$, Tales que:

$$\begin{cases} u_{n+1} = B^\star T^\star(b-t)\mathcal{W}^{-1}(x_1 - \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^n)d_\tau ds \;), \\ x_1 - \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau, x_\tau^n)d_\tau ds \; - \; \int_0^b T(b-s)Bu_{n+1}(s)ds \;\; = \;\; 0. \end{cases} \tag{4.27}$$

A continuación se prueba que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(J,U)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \;\; &\leq \|B^\star\|\|T^\star(b-t)\|\|\mathcal{W}^{-1}[\int_0^b T(b-s)(\int_0^s f(\tau, x_\tau^{n-1}) - f(\tau, x_\tau^n)d_\tau)ds \;]\| \\ &\leq \|B^\star\|\|T^\star(b-t)\|\|\mathcal{W}^{-1}\|[\int_0^b \|T(b-s)\|(\int_0^s \|f(\tau, x_\tau^n) - f(\tau, x_\tau^{n-1})\|d_\tau)ds \;] \\ &\leq \|B^\star\|\|T^\star(b-t)\|\|\mathcal{W}^{-1}\|[ML\int_0^b (\int_0^s \|x_\tau^n - x_\tau^{n-1}\|d_\tau)ds \;] \\ &= \|B\|\|T(b-t)\|\|\mathcal{W}^{-1}\|[ML\int_0^b (\int_0^s \|x_\tau^n - x_\tau^{n-1}\|d_\tau)ds \;] \\ &= \|B\|M^2L\|\mathcal{W}^{-1}\|[\int_0^b (\int_\tau^b \|x_\tau^n - x_\tau^{n-1}\|ds)d_\tau \;] \\ &= \|B\|M^2L\|\mathcal{W}^{-1}\|\int_0^b \|x_\tau^n - x_\tau^{n-1}\|(b-\tau)d_\tau \end{aligned}$$

Aplicando ahora, el lema 4.1, se obtiene que:

$$\|u_{n+1}(t)-u_n(t)\| \leq M^3L\|B\|^2\|\mathcal{W}^{-1}\|\|u_n-u_{n-1}\|_{L^2(J,U)}\frac{b^{\frac{5}{2}}}{2}\mathrm{e}^{\frac{MLb^2}{2}}$$

Se eleva al cuadrado y luego se integra ambos miembros de la desigualdad anterior, para obtener:

$$\int_0^b\|u_{n+1}(t)-u_n(t)\|^2dt \leq M^6L^2\|\mathcal{W}^{-1}\|^2\|B\|^4\|u_n-u_{n-1}\|^2_{L^2[J,U]}\{\frac{b^{\frac{5}{2}}}{2}\}^2\mathrm{e}^{MLb^2}\int_0^b dt.$$

Entonces:

$$\|u_{n+1}-u_n\|_{L^2(J,X)} \leq M^3L\|\mathcal{W}^{-1}\|\|B\|^2\|u_n-u_{n-1}\|_{L^2[J,U]}\frac{b^3}{2}\mathrm{e}^{\frac{MLb^2}{2}}$$

Por lo tanto, si

$$M^3L\|\mathcal{W}^{-1}\|\|B\|^2\frac{b^3}{2}\mathrm{e}^{\frac{MLb^2}{2}} \leq 1,$$

$(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(J,U)$., Entonces, existe $u \in L^2(J,U)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u\ .$$

Sea $x(t) = x(t,\phi,u)$ la solución moderada correspondiente a u, se prueba que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau,x_\tau^n)d_\tau ds = \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau,x_\tau)d_\tau ds, \qquad (4.28)$$

donde x_τ, es el truncamiento de la solución moderada $x(t,\phi,u)$.

En efecto,

$$\begin{aligned}\|\int_0^b T(b-s)[\int_0^s f(\tau,x_\tau^n)-f(\tau,x_\tau)d_\tau]ds\| &\leq ML\int_0^b\int_0^s\|x_\tau^n-x_\tau\|d_\tau ds\\ = ML\int_0^b\int_\tau^b\|x_\tau^n-x_\tau\|dsd_\tau &= ML\int_0^b\|x_\tau^n-x_\tau\|(b-\tau)d_\tau\\ &\leq MLb\int_0^b\|x_\tau^n-x_\tau\|d_\tau\end{aligned}$$

Usando ahora el lema 4.1, se tiene que:

$$\|\int_0^b T(b-s)[\int_0^s f(\tau,x_\tau^n)-f(\tau,x_\tau)d_\tau]ds\| \leq M^2Lb^{\frac{5}{2}}\|B\|\exp\frac{MLb^2}{2}\|u_n-u\|_{L^2(J,U)}$$

Así

$$\lim_{n\to\infty} \| \int_0^b T(b-s)[\int_0^s f(\tau, x_\tau^n) - f(\tau, x_\tau)d_\tau]ds\| = 0,$$

lo cual prueba (4.28).
Finalmente, tomando limite en (4.27), se obtiene que,

$$x_1 - \int_0^b T(b-s)\int_0^s f(\tau, x_\tau)d_\tau ds \ - \int_0^b T(b-s)Bu(s)ds \ = \ 0.$$

Entonces,

$$\int_0^b T(b-s)[Bu(s) + \int_0^s f(\tau, x_\tau)d_\tau]ds = x_1,$$

lo cual prueba que G_f es sobreyectiva. Por lo tanto, de la proposición 4.3, permite concluir que el sistema (4.19) es exactamente controlable.

□

4.3. Ejemplo

Con el fin de ilustrar el resultado principal de este capítulo, se presenta a continuación el siguiente ejemplo, en el cual estudiamos la controlabilidad de la Ecuación de la Onda con retardo.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} & = & \dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) + \displaystyle\int_0^t p(\tau, w(\tau - r, x))d\tau, \quad 0 \le t \le b; \quad 0 < x < 1, \\ w(t,0) & = & w(t,1) = 0, \quad t > 0, \\ w(t,x) & = & \phi(t,x) \quad -r \le t \le 0, \quad 0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{4.29}$$

Donde $\phi : [-r, 0]\mathrm{x}[0,1] \to R$ es una función continua, el control u pertenece a $L^2([0,b]\mathrm{x}[0,1]) = L^2(0,b; L[0,1])$ y $p \in L^1([0,b]\mathrm{x}R)$.

El sistema (4.29) puede ser escrito como una ecuación abstracta de segundo orden en el Espacio de Hilbert $X = \mathrm{L}^2[0,1]$, de la siguiente manera:

$$\ddot{w}(t) = -A_0 w + u(t) + \int_0^t \mathcal{P}(\tau, w_\tau)d\tau. \tag{4.30}$$

Donde:

$$
\begin{array}{ll}
A_0\phi = \frac{-d^2\phi}{dx^2}; & D(A_0) = H^2 \bigcap H_0^1 \\
u \in \mathrm{L}^2(J, \mathrm{L}^2[0,1]), & J = [0, b] \\
\mathcal{P} : [0, b]\mathrm{x}\mathcal{C} \ \to \mathrm{L}^2[0,1], & \mathcal{C} = C([-r, 0], \mathrm{L}^2[0,1]) \\
\mathcal{P}(t, \psi)(x) = p(t, \psi(-r)(x)) = & p(t, \psi(-r, x)). \\
\text{Así} & \\
\mathcal{P}(t, w_\tau)(x) = p(t, w(\tau - r, x)). &
\end{array}
\tag{4.31}
$$

Es conocido que el espectro de A_0, $\sigma(A_0)$, está formado por los autovalores simples $\lambda_n = n^2\pi^2$ de multiplicidad uno y autofunciones correspondientes $\phi_n = \sin(n\pi x)$, lo cual permite garantizar la existencia de una familia completa de proyectores ortogonales E_n en $L^2[0,1]$ tales que :

$$E_n x = \langle x, \phi_n \rangle \phi_n, \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n x.$$

Usando el siguiente cambio de variables :

$$\dot{w} = v \quad y \quad z = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix},$$

se puede escribir(4.29) como un sistema semilineal de primer orden en el Espacio de Hilbert $\mathbf{Z}_{\frac{1}{2}} = D(A_0^{\frac{1}{2}})$ x $L^2[0,1]$, de la siguiente manera:

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\dot{z} = & \mathcal{A}z + Bu + \displaystyle\int_0^t F(\tau, z_\tau)d\tau, & t \in J, \\
z(t) = & \tilde{\phi}(t) & t \in [-r, 0].
\end{array}
\right.
\tag{4.32}
$$

Donde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D(A) = D(A_0)\text{x}L^2[0,1]$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \qquad I = I_d : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1] \tag{4.33}$$

$$F(t, z_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{P}(t, z_t^1) \end{pmatrix}, \quad z_t \in \mathrm{C}([-r,0], Z_{\frac{1}{2}}), \quad z_t =< z_t^1, z_t^2 >$$

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(t) \end{pmatrix}.$$

Para probar que el operador $\mathcal{A}$ genera un semigrupo fuertemente continuo se usará el lema 1.1, de la sección de preliminares, [27].

Proposición 4.4 *El operador $\mathcal{A}$ dado en (4.33) , es el generador infinitesimal del grupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$,dado por:*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad z \in \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}, \tag{4.34}$$

donde $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una familia completa de proyectores ortogonales en el Espacio de Hilbert $\mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}$ dado por

$$P_n = diag\,(E_n, E_n) \ , n \geq 1 \ , \tag{4.35}$$

y

$$A_n = B_n P_n, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}, n \geq 1 \tag{4.36}$$

Demostración. Sea $z =< w, v >^T$, $\ z \in D(A) = D(A_0)$ x $L^2[0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}z &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v \\ -A_0 w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} E_n v \\ -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n w \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} E_n v \\ -\lambda_n E_n w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z.
\end{aligned}
$$

Es claro que $A_nP_n = P_nA_n$. Se probará a continuación que se satisface la condición (1.3) del Lema 1.1. Para hacer esto, se calcula el espectro de la matriz B_n, el cual está dada por:

$$\sigma(B_n) = \{\sqrt{\lambda_n}i, -\sqrt{\lambda_n}i\} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Por lo tanto:

$$e^{B_nt} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(\sqrt{\lambda_n} cos(\sqrt{\lambda_n}t)I + sen(\sqrt{\lambda_n}t)B_n \right)$$

Lo que es equivalente a:

$$e^{B_nt} = \begin{bmatrix} cos(\sqrt{\lambda_n}t) & \frac{sen(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}} \\ -\sqrt{\lambda_n}sen(\sqrt{\lambda_n}t) & cos(\sqrt{\lambda_n})t \end{bmatrix},$$

Sea $z = (w, v)^T \in \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}$ tal que $\|z\|_{\mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}} = 1$. Entonces,

$$\|w\|^2_{D(A_0)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \|E_jw\|^2 \leq 1 \quad \text{and} \quad \|v\|^2_{L^2[0,1]} = \sum_{j=1}^{\infty} \|E_jv\|^2 \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{\lambda_j}\|E_jw\| \leq 1, \quad \|E_jv\| \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{4.37}$$

Dado que $e^{A_n t} = e^{B_n t} P_n$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\|e^{A_n t} z\|^2_{\mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}} &= \left\| \begin{array}{c} \cos(\sqrt{\lambda_n} t) E_n w + \frac{sen(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} E_n v \\ -\sqrt{\lambda_n} \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n} t) E_n w + \cos(\sqrt{\lambda_n} t) E_n v \end{array} \right\|^2_{\mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}} \\
&= \left\| \cos(\sqrt{\lambda_n} t) E_n w + \tfrac{\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} E_n v \right\|^2_{D(A_0)^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \left\| -\sqrt{\lambda_n}\, \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n} t) E_n w + \cos(\sqrt{\lambda_n} t) E_n v \right\|^2_{L^2[0,1]} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \| E_j [\cos(\sqrt{\lambda_n} t) E_n w + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} E_n v] \|^2 \\
&+ \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \| E_j [-\sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) E_n w + \cos(\sqrt{\lambda_n} t) E_n v] \|^2 \qquad (4.38) \\
&= \lambda_n \| \cos(\sqrt{\lambda_n} t) E_n w + \tfrac{\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} E_n v \|^2 \\
&+ \| -\sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) E_n w + \cos(\sqrt{\lambda_n} t) E_n v \|^2 \\
&\leq \sqrt{2} [| \cos(\sqrt{\lambda_n} t)| + | \sin(\sqrt{\lambda_n} t)|] \\
&= 2 \sin(\tfrac{\pi}{4} + \sqrt{\lambda_n} t)
\end{aligned}
$$

Luego de (4.37) se obtiene

$$\|e^{A_n t}\|^2_{Z_{\frac{1}{2}}} \leq 2 \qquad (4.39)$$

Usando ahora el Lema 1.1, se concluye que el operador $\mathcal{A}$ genera un grupo fuertemente continuo dado por (4.34) □

Proposición 4.5 *Sea $p : [0,b] \mathrm{x} R \to R$ continua en J, globalmente Lipschitz en la segunda variable y que $\|W^{-1}\| L \frac{b^3}{2} \exp\left(\frac{Lb^2}{2}\right) \leq 1$. Entonces el sistema (4.29) es exactamente controlable.*

Demostración. En primer lugar se prueba que si $p(t,x)$ es globalmente Lipschitz en la segunda variable, entonces: $\mathcal{P} : [0,b] \mathrm{x} \mathcal{C} \to \mathrm{L}^2[0,1]$, dado por $\mathcal{P}(t,\hat{\phi})(x) = p(t, \hat{\phi}(-r,x))$, es uniformemente Lipschitz en la segunda variable.

En efecto, si $\hat{\phi}$ y $\hat{\psi} \in C([-r,0], L^2[0,1])$, entonces:

$$\|\mathcal{P}(t,\hat{\phi})-\mathcal{P}(t,\hat{\psi})\|^2_{L^2[0,1]} = \int_0^1 |\mathcal{P}(t,\hat{\phi})(s)-\mathcal{P}(t,\hat{\psi})(s)|^2 ds =$$

$$\int_0^1 |p(t,\hat{\phi}(-r,s))-p(t,\hat{\psi}(-r,s))|^2 ds \leq l^2\int_0^1 |\hat{\phi}(-r,s)-\hat{\psi}(-r,s)|^2 ds = \tag{4.40}$$

$$= l^2\ \|\hat{\phi}(-r,.)-\hat{\psi}(-r,.)\|^2_{L^2[0,1]} \leq l^2\|\hat{\phi}-\hat{\psi}\|^2_C,$$

Donde l es la constante de Lipschitz de p(t,x); demostrando así, que $\mathcal{P}(t,\hat{\psi})$ es uniformemente Lipschitz en la segunda variable. A continuación se prueba que el operador

$$\mathcal{F}:[0,b]\mathrm{x}C([-r,0],\mathbf{Z}_{\frac{1}{2}})\rightarrow\mathbf{Z}_{\frac{1}{2}},$$

dada por

$$\mathcal{F}(t,\phi)=(<0,\mathcal{P}(t,\phi^1)>)^T$$

es uniformemente Lipschitz en la segunda variable, donde $\phi=<\phi^1,\phi^2>$,
$\phi^1(\theta)\in D(A_0^{\frac{1}{2}})$, $\phi^2(\theta)\in L^2[0,1]$, $\theta\in[-r,0]$.

En efecto, si ϕ y $\psi\in C([-r,0],\mathrm{Z}_{\frac{1}{2}})$, entonces:

$$\|\mathcal{F}(t,\phi)-\mathcal{F}(t,\psi)\|^2_{Z_{\frac{1}{2}}} = \|\mathcal{P}(t,\phi^1)-\mathcal{P}(t,\psi^1)\|^2_{L^2[0,1]}.$$

Dado que $D(A_0)^{\frac{1}{2}}$ está continuamente incluido en $\mathrm{L}^2[0,1]$, existe una contante $M>0$ tal que

$$\|\phi^1-\psi^1\|_{L^2[0,1]} \leq M\|\phi^1-\psi^1\|_{D(A_0^{\frac{1}{2}})}.$$

Sean $\phi^1,\psi^1\ \in C([-r,0],\mathrm{L}^2[0,1])$. Luego, de (4.40) tenemos que:

$$\|\mathcal{P}(t,\phi^1)-\mathcal{P}(t,\psi^1)\|^2_{L^2[0,1]} \leq l^2\|\phi^1-\psi^1\|^2_{C([-r,0],L^2[0,1])}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}(t,\phi)-\mathcal{F}(t,\psi)\|_{Z_{\frac{1}{2}}} && \leq l\|\phi^1-\psi^1\|_{C([-r,0],L^2[0,1])}\\
&\leq l\ \sup_{\theta\in[-r,0]}\ \|\phi^1(\theta)-\psi^1(\theta)\|_{L^2[0,1]} && \leq l\sup_{\theta\in[-r,0]}\ M\|\phi^1(\theta)-\psi^1(\theta)\|_{D(A_0^{\frac{1}{2}})}\\
&\leq lM\ \sup_{\theta\in[-r,0]}\ \{\|\phi^1(\theta)-\psi^1(\theta)\|_{D(A_0^{\frac{1}{2}})} && +\ \|\phi^2(\theta)-\psi^2(\theta)\|_{L^2[0,1]}\}\\
&= L\|\phi-\psi\|_{C([-r,0],\mathbf{Z}_{\frac{1}{2}})}.
\end{aligned}$$

Donde $L = lM$, lo cual prueba que $\mathcal{F}(t,\phi)$ es uniformemente Lipschitz en la segunda variable. Trivialmente $\mathcal{F}(t,\phi)$ es continua en t.

Por otra parte es conocido que el sistema Lineal

$$\dot{z} = Az + B\mathbf{u}$$

es exactamente controlable, ver [12]; aplicando ahora el teorema (4.2) concluimos que la ecuación de Onda con retardo modelada por le ecuación (4.29) es exactamente controlable.

Bibliografía

[1] Y.A. ABRAMOVICH and C.D ALIPRANTIS, "An Invitation to Operator Theory", *Graduate Studies in Math*, Vol. 50, Amer. Math. Soc. Providence, RI. (2002).

[2] W. ARENDT AND C.J.K. BATTY, "Almost periodic solutions fo first and second-order Cauchy problems", *J.Differential Equations*,vol. 137, (1997),pp 363-383.

[3] G. AVALOS and I. LASIECKA . " Exponential Stability of a Thermoelastic System Without Mechanical Dissipation", *Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste.* Vol. XXVIII, (1997) pp 1-28.

[4] G. AVALOS and I. LASIECKA . " Boundary Controllability of Thermoelastic Plates Via the Free Boundary Conditions". *SIAM J. Control Optim*, vol. 38, N°. 2,(2000) pp. 337-383.

[5] G. AVALOS and I. LASIECKA . " Exponential Stability of a Thermoelastic System with Free Boundary Conditions Without Mechanical Dissipation". *SIAM J. Math. Anal*, vol. 29, N°. 1, (1998),pp. 155-182.

[6] K. BALACHANDRAN and R.SAKTHIVEL, " Controlabillity of Functional Semilinear Integrodifferential Systems in Banach Spaces", *Journal of Math. Anal. and Appl*, vol. 255, (2001), pp.447-457.

[7] K. BALACHANDRAN, "Controllability of Sobolev Type Integrodifferential Systems in Banach Spaces ",*Journal of Math. Anal. and Appl*, vol. 217, (1998), pp. 335-348.

[8] K. BALACHANDRAN and P. MANIMEGALAI,"Controllability of Nonlinear Abstract Neutral Evolution Integrodifferential Systems", *Nonlinear Funct. Anal. and Appl*, vol. 7, N°. 1 (2002), pp. 85-100.

[9] D. BÁRCENAS, H. LEIVA and Z. SÍVOLI, "A Broad Class of Evolution Equation are Never exactly",*IMA-Journal of Mathematical Control and Information*, (2005),pp. 310-320.

[10] D. BÁRCENAS, H. LEIVA "Semigrupos Fuertemente Continuos y Algunas Aplicaciones".Editorial Texto, Caracas (2002).

[11] H. Brézis, " Análisis Funcional.Teoría y Aplicaciones".Alianza Editorial, Madrid (1984).

[12] R.F. CURTAIN and A.J. PRITCHARD, " Infinite Dimensional Linear Systems", *Lecture Notes in Control a Information Sciences*, Vol. 8. Springer Verlag, Berlín (1978).

[13] R.F. CURTAIN and A.J. PRITCHARD, "An Abstrac Theory for Unbounded Control Action for Disributed Parameter System" *SIAM. J. Control and Optimization*, Vol 15, N° 4, (1977).

[14] R.F. CURTAIN and H. J. ZWART, " An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory", *Text in Applied Mathematics*, Vol. 21. Springer Verlag, New York (1995).

[15] DAN HENRY," Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations",*Lectures Notes in Mathematics* . Springer Verlag, (1981).

[16] J.P. DAUER and K. BALACHANDRAN,"Existence of Solutions of Nonlinear Neutral Integrodifferential Equations in Banach Spaces",*Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol 251,(2000), pag. 93-105

[17] Goldstein,Jerome A "Semigroups of Linear Operators and Applications" . Oxford University Press, New York (1985).

[18] J. HALE," Theory of Functional Differential Equations", *Applied Mathematics*, VOL. 3. Springer Verlag, New York (1977).

[19] J. HALE, "Ordinary Differential Equations",*Wiley Interscience*, Rebert E. Krieger Publ. Co., New York (1969).

[20] J. L. KELLEY, " General Topology", *International Students Editions*,(1970).

[21] J. U. KIM . " On the Energy Decay of a Linear Thermoelastic Bar and Plate". *SIAM J. Math Anal.* Vol. 23, No. 4, (1992).

[22] A. KOLMOGOROV y S. FOMIN,"Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional",*Editorial MIR* , 3ra edición ,(1978).

[23] G. LADAS y V. LAKSHMIKANTHAM, " Differential Equations in Abstract Spaces", *Academic Press*, New York (1972).

[24] J. LAGNESE," Boundary Stabilization of Thin Plate", *SIAM Studies in Appl.Math*,Vol.10,(1989)

[25] S. Lang," Real Analysis",*Addison-Wesley Series in Matematics*,(1969)