Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Mérida - Venezuela

Existencia de Soluciones Acotadas para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Aplicaciones

Lic. Zoraida M. Sívoli Barrios

Tesis de Grado
Para optar al título de

Magister en Matemáticas

Tutor: *Dr. Hugo Leiva*

1999

A:

José Javier de Jesús

Agradecimiento

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al *Dr. Hugo Leiva* por su guía en esta etapa de mi formación académica, por su asesoramiento y dedicación.

Al *Dr. Jesús Rivero*, por el estímulo que siempre me ha brindado.

A la *Sra. Luz Elena Luengo*, por el esmero en la transcripción de esta tesis.

A todos los que me apoyaron durante la realización de este trabajo, Gracias.

Resumen

En este trabajo estudiamos la **Existencia y Estabilidad de Soluciones Acotadas** para el siguiente Sistema de Ecuaciones Diferenciales No Lineales

$$w' + \mathcal{A}(\eta)\, w = F(t, w, P) \tag{1}$$

donde $w \in I\!R^n$, $\mathcal{A}(\eta)$ es una matriz $(n \times n)$ continua en η y F es una función continua no lineal. Luego se extiende el estudio al caso en que $w \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ espacio de Banach, y $\mathcal{A}(\eta)$es un operador acotado.

En el primer caso se obtienen condiciones que garantizan la existencia y estabilidad de una solución acotada de (1) mientras que en el segundo caso se garantiza la existencia de una solución moderada acotada de (1) y una solución clásica "casi siempre".

Luego se aplican estos resultados en ciertos modelos, como por ejemplo la Ecuación de Sine-Gordon, el Modelo del Puente de Lazer-McKenna y un Modelo de Fotoconductividad.

Í n d i c e

Introducción

Muchas leyes generales de la Física, Biología e Ingeniería, encuentran su expresión natural en una Ecuación Diferencial Ordinaria. El objetivo de esta tesis es estudiar la **Existencia y Estabilidad de Soluciones Acotadas** de ecuaciones del tipo

$$w' + \mathcal{A}(\eta)\, w = F(t, w, P) \tag{1}$$

Con este fin se ha dividido el trabajo en cuatro capítulos.

En los Capítulos 1 y 2, se desarrolla una síntesis de la Teoría de Operadores y del Problema de Cauchy No Lineal; los cuales constituyen el marco teórico necesario para los capítulos posteriores.

En el Capítulo 3, se estudia la ecuación (1) para $w \in \mathbb{R}^n$ y se muestran algunos ejemplos y simulaciones en los que se aplican los resultados obtenidos.

En el Capítulo 4, se buscan nuevamente soluciones acotadas de la ecuación (1), ahora para el caso en que $w \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ espacio de Banach.

Se logra establecer para $w \in \mathbb{R}^n$ condiciones necesarias que nos permitan garantizar la Existencia, Estabilidad y Periodicidad de Soluciones Acotadas de (1); mientras que en el caso en que $w \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ espacio de Banach, se demuestra la Existencia, Estabilidad y Periodicidad de una Solución Moderada Acotada, más aún se establecen criterios para la suavidad de dicha solución y se presentan algunos ejemplos en los que sí es posible garantizar la existencia de una solución clásica acotada.

Capítulo 1
Semigrupos de Operadores

1.1 Introducción

Una motivación a la Teoría de Semigrupos de Operadores nos la proporciona el siguiente problema:

Sea Z un espacio de Banach y $A : Z \to Z$ un operador lineal y acotado $(A \in L(Z))$. Consideremos el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + f(t), & z \in Z, \quad t \geq 0 \\ z(0) = z_0, & z_0 \in Z \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $f \in C([0, \infty), Z)$.

Solución: Definamos la siguiente familia de operadores lineales:

$$T(t) := e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

Se prueba que la familia de operadores lineales y acotados $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisface las siguientes propiedades:

i) $T(0) = Id$

ii) $T(t+s) = T(t)\,T(s)$ para todo $t, s \geq 0$

iii) $\lim\limits_{t \to 0^+} \|T(t)z - z\| = 0 \quad (z \in Z \text{ fijo})$

$$\begin{aligned} Az &= \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)z - z}{t}, \quad \forall z \in Z \\ &= \left. \frac{dT(t)z}{dt} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

v) Para todo $z \in Z$ tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\{T(t)z\} = AT(t)z = T(t)Az, \quad t \geq 0$$

Por lo tanto, el problema homogéneo:

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t), \quad t \geq 0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

tiene como solución a la función:

$$z(t) = T(t)z_0, \quad t \geq 0.$$

Supongamos que el problema (1.1) tiene una solución $z(t)$ definida en $[0,\infty)$. Ahora consideremos la siguiente función:

$$F(s) = T(t-s)z(s), \quad s \in [0,t].$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(s) &= -AT(t-s)z(s) + T(t-s)z'(s) \\ &= -AT(t-s)z(s) + T(t-s)[Az(s) + f(s)] \\ &= T(t-s)f(s) \end{aligned}$$

Así:

$$F(t) - F(0) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

Pero:

$$F(t) = z(t) \quad \wedge \quad F(0) = T(t)z_0.$$

Con lo cual:

$$z(t) = T(t)\, z_0 + \int_0^t T(t-s)\, f(s)\, ds, \quad t \geq 0 \tag{1.2}$$

Por consiguiente, si el problema (1.1) tiene solución, ella debe ser la función $z(t)$ dada por (1.2).

1.2 Semigrupo de Operadores Fuertemente Continuo

1.2.1. Definición: *Una familia* $\{T(t)\}_{0\leq t<\infty}$ de *operadores lineales y acotados del espacio de Banach* X *en sí mismo, se dice que es un* **Semigrupo Fuertemente Continuo** *o* C_0*-semigrupo, si se satisfacen las siguientes condiciones:*

i) $T(0) = Id \quad (Id \in L(x))$

ii) $T(t+s) = T(t) \circ T(s), \quad t, s \in \mathbb{R}^+$

iii) *Para cada* $x \in X$ *se tiene:*

$$\|T(t+\triangle t)\, x - T(t)\, x\| \to 0 \quad \text{cuando } \triangle\, t \to 0, \quad t, t+\triangle t \geq 0.$$

Si en ii) se tiene que $t, s \in \mathbb{R}$*, entonces diremos que* $\{T(t)\}$ *es un* **Grupo Fuertemente Continuo**.

- *Si además de las tres condiciones anteriores tenemos que* $\|T(t+\triangle t) - T(t)\| \to 0$, cuando $\triangle t \to 0$, *para* $t, t+\triangle t \geq 0$*, entonces la familia* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *se dice que es un* **Semigrupo Uniformemente Continuo**.

- *Si el semigrupo fuertemente continuo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *satisface la propiedad* $\|T(t)\| \leq 1$ *para* $t \geq 0$, *entonces se dice que es un* **Semigrupo de Contracción** *en* X.

1.2.2. Definición: *Una función* $w : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *es llamada subaditiva si:*

$$w(t_1 + t_2) \leq w(t_1) + w(t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0.$$

1.2.3. Ejemplo: Sea $w(t) = \log\|T(t)\|$, luego:

$$\begin{aligned} w(t_1 + t_2) &= \log\|T(t_1 + t_2)\| = \log\|T(t_1) \cdot T(t_2)\| \leq \\ &\leq \log[\|T(t_1)\| \cdot \|T(t_2)\|] = \log(\|T(t_1)\|) + \log(\|T(t_2)\|) \\ &= w(t_1) + w(t_2). \end{aligned}$$

Así $w(t)$ es subaditiva.

1.2.4. Lema: *Sea* $w : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *una función subaditiva y acotada superiormente en cada subintervalo finito. Entonces el número* $w_0 = \inf_{t>0} \dfrac{w(t)}{t}$ *es finito ó* $-\infty$ *y* $w_0 = \lim_{t\to\infty} \dfrac{w(t)}{t}$.

Demostración: Sea $w_0 = \inf_{t>0} \dfrac{w(t)}{t}$. Ya que $w(t)$ está acotada superiormente, w_0 es finito o menos infinito.

Supongamos que w_0 es finito. Dado cualquier $\delta > w_0$ existe un t_0 tal que $\dfrac{w(t_0)}{t_0} < \delta$, sea $t > t_0$ entonces podemos escribir $t = n(t)\,t_0 + r$ donde $n(t) \in Z^+$ y $0 \leq r < t_0$.

Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{w(t)}{t} &= \frac{w[n(t)t_0 + r]}{t} \leq \frac{w(n(t)t_0) + w(r)}{t} \\
&\leq \frac{w(n(t)t_0)}{(n(t)t_0 + r)} + \frac{w(r)}{t} \leq \frac{n(t)w(t_0)}{n(t)t_0 + r} + \frac{w(r)}{t} \\
&= \frac{w(t_0)}{t_0 + \dfrac{r}{n(t)}} + \frac{w(r)}{t}.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t} \leq \frac{w(t_0)}{t_0} \leq \delta.$$

Por otra parte, de la definición de w_0 se sigue que:

$$w_0 \leq \lim_{t\to\infty} \inf \frac{w(t)}{t} = \frac{\lim}{t\to\infty} \frac{w(t)}{t}.$$

Consideremos ahora $\delta = w_0 + \frac{1}{n}$. Tenemos que:

$$w_0 \leq \frac{\lim}{t\to\infty} \frac{w(t)}{t} \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{w(t)}{t} \leq \delta = w_0 + \frac{1}{n}. \tag{1.3}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ en la desigualdad anterior, obtenemos que:

$$w_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t}.$$

■

1.2.5. Teorema: *El límite:*

$$w_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{(\log \|T(t)\|)}{t} \quad \text{existe.}$$

Para cada $w > w_0$, existe una constante M_w tal que:

$$\|T(t)\| \leq M_w e^{wt}, \quad t \geq 0.$$

El número w_0 es llamado el tipo del semigrupo.

Demostración: Basta probar que existe $\delta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ está acotada en $[0, \delta]$.

Por el absurdo, supongamos que no existe tal $\delta > 0$, luego para $n \geq 1$ existe $t_n \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ tal que $\|T(t_n)\| \geq n$; así hemos construido una sucesión $\{T(t_n)\}_{n\geq 1}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0 \quad \wedge \quad \|T(t_n)\| \underset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Del principio de acotamiento uniforme se tiene que existe $x \in X$ tal que

$$\begin{aligned} \rho_n : \ & X \to X \\ & x \to T(t_n)\, x \end{aligned}$$

no es acotada. En efecto, supongamos por el absurdo que $\|T(t_n)\, x\| < \infty$ $\forall x \in X$, entonces por el Principio de Acotamiento Uniforme, se tiene que

$$\sup_n \|T(t_n)\| < \infty \quad \Rightarrow \|T(t_n)\| \leq M, \quad \forall \{t_n\}, \quad \text{contradicción,}$$

luego debe exitir $x \in X$ tal que $\|\rho_n(x)\| > M\|x\|, \quad \forall M \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} & \|T(t_n)\, x\| - M\|x\| && > 0 \quad \forall M \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow\ & \|T(t_n)\, x\| - \|x\| && > 0 \\ \Rightarrow\ & \|T(t_n)\, x - x\| && > 0 \\ \Rightarrow\ & \lim_{n\to\infty} \|T(t_n)\, x - x\| && > 0 \quad \text{contradicción,} \end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} \|T(t_n)\, x - x\| = 0.$$

Luego existe un $\delta > 0, \quad M > 1$ tal que $\|T(t)\| < M, \quad \forall t \in [0, \delta]$.

Sea ahora $t > \delta$, entonces:

$$t = m\delta + \tau, \quad 0 \leq \tau < \delta$$

$$\Rightarrow \|T(t)\| = \|T(m\delta + \tau)\| \leq \|T(m\delta)\| \, \|T(\tau)\| \leq \|T(\delta)\|^m \, \|T(\tau)\| \leq M^m M.$$

Pero:

$$\frac{t}{\delta} = m + \frac{\tau}{\delta} \Rightarrow m \leq \frac{t}{\delta}.$$

Así:

$$\|T(t)\| \leq M^{t/\delta} M = Me^{wt}$$

donde

$$e^{wt} = M^{t/\delta} \Rightarrow wt = \frac{t}{\delta} \mathrm{Ln} M$$

$$\Rightarrow w = \frac{\mathrm{Ln} M}{\delta}. \tag{1.4}$$

Hemos probado entonces que para todo t

$$\|T(t)\| \leq M_w e^{wt}$$

donde

$$M_w = \begin{cases} Me^{-wt} & \text{si } t \leq \delta \\ M & \text{si } t > \delta. \end{cases}$$

Luego:

$$M_w = \begin{cases} Me^{-wt} & \text{si } w < 0 \\ M & \text{si } w \geq 0. \end{cases}$$

■

1.3 El Generador Infinitesimal

Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo (SFC) en el espacio de Banach X. Para $h>0$ definamos el operador:

$$A_h x = \frac{T(h)\,x - x}{h} = \frac{1}{h}\left[T(h) - I\right](x)$$

A_h es un operador lineal y acotado; es decir, $A_h \in L(x) \quad \forall h > 0$.

1.3.1 Definición: *El generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es el operador:*

$$A : D(A) \subseteq X \to X$$

donde:

$$Ax = \lim_{h\to o^+} \frac{T(h)\,x - x}{h} = \lim_{h\to o^+} A_h x$$

y

$$D(A) = \left\{ x \in X \backslash \lim_{h\to o^+} \frac{T(h)\,x - x}{h} \quad \text{existe} \right\}.$$

1.3.2. Teorema: *Sea* $\{T(t)\}, t \geq 0$ *un semigrupo de operadores fuertemente continuo en el espacio de Banach* X, A *su generador infinitesimal con dominio* $D(A)$. *Entonces se tiene:*

a) $D(A)$ *es un subespacio vectorial de* X *y* A *es lineal.*

b) *Si* $x \in D(A)$, *entonces* $T(t)\,x \in D(A), t \geq 0$ *y* $t \to T(t)\,x$ *es fuertemente diferenciable. Más aún:*

$$\frac{d}{dt} T(t)\,x = AT(t)\,x = T(t)\,Ax, \quad \forall x \in D(A)\,, \quad t \geq 0.$$

c) *Si* $x \in D(A)$, *entonces:*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(u)\,Axdu, \quad t, s \geq 0.$$

d) *Si* $f : [0, +\infty) \to I\!R$, *continua, entonces:*

$$\lim_{h \to o^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)\,T(s)\,xds = f(t)\,T(t)\,x \quad \forall x \in X.$$

e) $\displaystyle\int_0^t T(s)\,xds \in D(A)\,, \quad \forall x \in X, \quad t > 0$

$$T(t)\,x = x + A\int_0^t T(s)\,xds.$$

f) $\overline{D(A)} = x$ *y* A *es un operador cerrado.*

Demostración:

a) Sean $x, y \in D(A)$ y $\alpha \in I\!R$. Veamos que $\alpha x + y \in D(A)$ y que A es lineal:

$$\lim_{h \to o^+} \frac{T(h)(\alpha x + y) - (\alpha x + y)}{h} = \lim_{h \to o^+} \frac{\alpha T(h)\,x + T(h)\,y - \alpha x - y}{h}$$

$$= \lim_{h \to o^+} \frac{\alpha\left[T(h)\,x - x\right]}{h} + \lim_{h \to o^+} \frac{T(h)\,y - y}{h} = \alpha \lim_{h \to o^+} A_h x + \lim_{h \to o^+} A_h y \tag{1.5}$$

Luego $\alpha x + y \in D(A)$ ya que los límites en (1.5) existen, por estar x e y en $D(A)$; además se tiene que:

$$\begin{aligned} A(\alpha x + y) &= \lim_{h \to o^+} \frac{T(h)(\alpha x + y) - (\alpha x + y)}{h} \\ &= \alpha \lim_{h \to o^+} A_h x + \lim_{h \to o^+} A_h y = \alpha A x + A y. \end{aligned}$$

b) Sea $y(t) = T(t)x, \quad x \in D(A)$, entonces $y(t) \in X, \quad \forall t \geq 0$, queremos ver que $y(t) \in D(A)$.

En efecto:

$$\lim_{h \to o^+} \frac{T(h)\, y(t) - y(t)}{h} = \lim_{h \to o^+} \frac{T(h)\, T(t)\, x - T(t)\, x}{h}$$

$$= \lim_{h \to o^+} \frac{T(t)\, T(h)\, x - T(t)\, x}{h} = T(t) \lim_{h \to o^+} \frac{T(h)\, x - x}{h} = T(t)\, Ax.$$

Así hemos probado que $T(t)\, x \in D(A)$ y que:

$$AT(t)\, x = T(t)\, Ax. \tag{1.6}$$

Probemos ahora que $y(t) = T(t)\, x$ es diferenciable.

$$\lim_{h \to o^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \lim_{h \to o^+} \frac{T(t+h)\, x - T(t)\, x}{h}.$$

Consideremos:

$$\lim_{h \to o^+} \frac{T(t+h)\, x - T(t)\, x}{h} = \lim_{h \to o^+} \frac{T(t)\, T(h)\, x - T(t)\, x}{h}$$

$$= \lim_{h \to o^+} T(t) \frac{[T(h)\, x - x]}{h} = T(t) \lim_{h \to o^+} \frac{T(h)\, x - x}{h} = T(t)\, Ax.$$

Por otra parte, sea $t > 0$ y consideremos:

$$\lim_{h\to o^-}\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h}=\lim_{h\to o^-}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}$$

$$=\lim_{h\to o^-}\frac{T(t-h)x-T(t-h+h)x}{-h}=\lim_{h\to o^-}T(t-h)\left(\frac{T(h)x-x}{h}\right)$$

$$=T(t)Ax$$

ya que:

$$T(t-h)\left(\frac{T(h)x-x}{h}\right)\ =T(t-h)Ax+T(t-h)\left(\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right)$$

y además:

$$\left\|T(t-h)\left(\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right)\right\|\ \le\|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|$$

$$\le M_w e^{wt}\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|.$$

Entonces:

$$\lim_{h\to o^+}\left\|T(t-h)\left(\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right)\right\|=0.$$

Lo que prueba que:

$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x.$$

c) Veamos que si $x\in D(A)$ entonces:

$$T(t)x-T(s)x=\int_s^t T(u)Axdu,\quad t,s\ge 0.$$

Sea $y(t) = T(t)x$, sabemos que $y(t)$ es diferenciable, más aún $y'(t)$ es continua, entonces $y(t)$ es una función abstracta continuamente diferenciable y se tiene que

$$y(t) - y(s) = \int_s^t y'(u)\,du = \int_s^t T(u)\,Axdu$$

$$\Rightarrow T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(u)\,Axdu$$

d) Para probar d) consideremos $f : [0, +\infty) \to I\!R$ continua y $y(t) = f(t)\,T(t)\,x$; así $y : [0, +\infty) \to X$ es una función abstracta continua.

Consideremos:

$$F(s) = \int_t^{t+s} f(u)\,T(u)\,xdu$$

luego:

$$F'(s) = f(t+s)\,T(t+s)\,x$$

por lo tanto:

$$F'(0) = f(t)\,T(t)\,x \tag{1.7}$$

Por otra parte:

$$F'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} f(u)\,T(u)\,xdu\right] \tag{1.8}$$

De (1.7) y (1.8) obtenemos:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(u)\,T(u)\,xdu = f(t)\,T(t)\,x.$$

En particular, si $f(t) \equiv 1$, entonces:

$$T(t)x = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(u)\, x du.$$

Más aún, si $f(t) \equiv 1$ y $t = 0$ se tiene:

$$x = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^{h} T(u)\, x du. \tag{1.9}$$

e) Probemos e), para ello observemos que:

$$\begin{aligned} A_h : \quad & X \to X \\ & x \to \frac{T(h)\, x - x}{h} \end{aligned}$$

es un operador cerrado en el espacio de Banach X y:

$$\int_0^t T(s)\, xds \in C\left[[0,\infty), X\right]$$

se tiene (ver [8]).

$$\begin{aligned} A_h \int_0^t T(s)\, xds &= \int_0^t A_h\left(T(s)\, x\right) ds \\ &= \int_0^t \frac{T(h)\, T(s)\, x - T(s)\, x}{h} ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T(h+s)\, x - T(s)\, xds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{h+t} T(s)\, xds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)\, xds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)\, xds - \frac{1}{h} \int_t^{h} T(s)\, xds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)\, xds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)\, xds - \frac{1}{h} \int_0^{h} T(s)\, xds. \end{aligned}$$

Es decir:

$$A_h \int_0^t T(s)\, xds = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)\, xds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)\, xds.$$

Tomando límite cuando $h \to 0^+$ a ambos lados y usando la parte d) de este teorema, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} A_h \int_0^t T(s)\, xds &= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)\, xds - \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)\, xds \\ &= T(t)\, x - x \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_0^t T(s)\, xds \in D(A)$$

y

$$A \int_0^t T(s)\, xds = T(t)\, x - x$$

Así:

$$T(t)\, x = x + A \int_0^t T(s)\, xds \tag{1.10}$$

f) En f), probemos primero que $D(A)$ es denso en X; para ello consideremos $x \in X$ y una sucesión $(h_n)_{n=1}^{\infty} \subset I\!R^+$ tal que $h_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Sea:

$$x_n = \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} T(s)\, xds.$$

Por las partes a) y e) de este teorema tenemos que $x_n \in D(A) \quad \forall n$, y por la parte d) se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} T(s)\, xds = x.$$

Así hemos probado que $\forall x \in X$ existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in D(A)$, tal que $X_n \to X$. Por lo tanto $\overline{D(A)} = X$.

Probemos ahora que A es cerrado.

Sea $x_n \in D(A)$ tal que:

$$x_n \to x, \quad n \to \infty$$

y

$$Ax_n \to y, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Entonces se tiene que:

$$T(t)x - x = \lim_{n\to\infty} T(t)x_n - x_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(u)Ax_n du \tag{1.11}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \|T(s)Ax_n - T(s)y\| &= \|T(s)[Ax_n - y]\| \\ &\leq \|T(s)\| \|Ax_n - y\| \leq M \|Ax_n - y\|. \end{aligned}$$

Tomando límite a ambos lados, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq M \lim_{n\to\infty} \|Ax_n - y\| = 0$$

$$\Rightarrow T(s)Ax_n \to T(s)y \quad \text{uniformemente.} \tag{1.12}$$

De (1.11) y (1.12) tenemos que:

$$T(t)x - x = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(u)Ax_n du = \int_0^t T(u)y.$$

Luego de la definición de A_h y por d) se tiene:

$$\lim_{h\to 0^+} A_h x = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h T(u)\, y du = y$$

Así hemos probado que:

$$\lim_{h\to 0^+} A_h x = y$$

Es decir, $x \in D(A)$ y $Ax = y$. ■

Como una aplicación del Teorema 1.3.3 probemos que el problema abstracto de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, & t \geq 0 \\ \\ x(0) = x_0, & x_0 \in D(A) \end{cases} \tag{1.13}$$

tiene solución única donde A es el generador infinitesimal de un SFC.

A continuación presentaremos uno de los principales teoremas de este capítulo.

1.3.3. Teorema: *Sea $A : D(A) \subseteq X \to X$ el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Entonces el PVI (1.13) tiene una única solución, más aún, esa solución es:*

$$x(t) = T(t)\, x_0 \tag{1.14}$$

Demostración: Usando el Teorema 1.3.3 se verifica fácilmente que (1.14) es solución del PVI (1.13).

Probemos la unicidad, para ello supongamos que $y(t)$ es otra solución de (1.13), entonces $y(t) \in D(A)$.

Sea $F(s) = T(t-s)\,y(s)$, del Teorema 1.3.3, se sigue que:

$$F'(s) = -AT(t-s)\,y(s) + T(t-s)\,Ay(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq t$$

$$\Rightarrow \quad F(t) = F(0)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = T(t)\,y(0) = T(t)\,x_0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = x(t)\,, \quad \forall t.$$

■

Consideremos ahora el problema no homogéneo de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + f(t)\,, & t \geq 0 \\ x(0) = x_0, & x_0 \in D(A) \end{cases} \tag{1.15}$$

1.3.4. Teorema: *Sea $A : D(A) \subseteq X \to X$ el generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Sea $f : [0,+\infty) \to X$ una función continuamente diferenciable (fuertemente). Entonces el problema de Cauchy (1.15) tiene como única solución:*

$$x(t) = T(t)\,x_0 + \int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds, \quad t \geq 0 \tag{1.16}$$

Demostración: Veamos la unicidad, supongamos que $y(t)$ es solución del PVI (1.16) y consideremos:

$$F(s) = T(t-s)\,y(s)$$

entonces:

$$\frac{d}{ds}F(s) = -AT(t-s)\,y(s) + T(t-s)\,[Ay(s) + f(s)]$$

Luego:

$$F'(s) = T(t-s)\,f(s)$$

Integrando obtenemos:

$$F(t) - F(0) = \int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad y(t) - T(t)\,x_0 = \int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = T(t)\,x_0 + \int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds$$

De (1.16) se sigue que $y(t) \equiv x(t)$.

Probemos ahora la existencia.

Sea

$$g(t) = \int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds \tag{1.17}$$

Haciendo un cambio de variable, obtenemos:

$$g(t) = \int_0^t T(u)\,f(t-u)\,du \tag{1.18}$$

$F(t-s)\,f(s)$ es Riemann integrable. En efecto, de la continuidad de $T(t), f(t)$ y de la aplicación $t \to T(t)\,x$ para x fijo se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|T(t-s)\,f(s) - T(t-\tau)\,f(\tau)\| &= \|T(t-s)\,[f(s) - f(\tau) + f(\tau)] - \\
&\quad -T(t-\tau)\,f(\tau)\| \\
&\leq \|T(t-s)\,(f(s) - f(\tau))\| + \|(T(t-s) - T(t-\tau))\,f(\tau)\| \\
&\leq M_w e^{w(t-s)}\,\|f(s) - f(\tau)\| + \|T(t-s) - T(t-\tau)\|\,\|f(\tau)\|
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando s tiende a τ tenemos:

$$\|T(t-s)f(s)-T(t-\tau)f(\tau)\|\to 0.$$

Por lo tanto $t\to T(t-s)f(s)$ es continua y por lo tanto Riemann integrable, de lo cual se deduce que $g(t)$ está bien definida.

Veamos ahora que $g(t)$ es (fuertemente) diferenciable y que:

$$g'(t)=Ag(t)+f(t);$$

es decir, $g(t)$ es una solución particular de (1.15).

De (1.18) tenemos que:

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h}T(u)f(t+h-u)\,du-\int_0^t T(u)f(t-u)\,du\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[\int_0^t T(u)\left[f(t+h-u)-f(t-u)\right]du+\int_t^{t+h}T(u)f(t+h-u)\,du\right]$$

Así:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^t T(u)\left[f(t+h-u)-f(t-u)\right]\right]du+$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(u)f(t+h-u)\,du=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\int_0^t T(u)\frac{[f(t+h-u)-f(t-u)]}{h}du+$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(u)f(t+h-u)\,du=$$

$$=\int_0^t T(u)f'(t-u)\,du+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(u)f(t+h-u)\,du$$

$$=\int_0^t T(u)f'(t-u)\,du+T(t)f(0).$$

Hemos probado que:

$$g'(t)=\int_0^t T(u)f'(t-u)\,du+T(t)f(0). \tag{1.19}$$

Sea $h>0$, de (1.17) tenemos:

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h}T(t+h-s)f(s)-\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[\int_0^t (T(t+h-s)f(s)-T(t-s)f(s))\,ds+\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\,ds\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[\int_0^t (T(t-s)T(h)f(s)-T(t-s)f(s))\,ds\right]+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\,ds$$

$$=\frac{1}{h}\left[\int_0^t (T(h)-I)(T(t-s)f(s))\,ds\right]+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\,ds$$

$$=\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t (T(t-s)f(s))\,ds+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\,ds$$

De (1.19) se tiene que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\quad \text{existe.}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t (T(t-s)f(s))\,ds+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\,ds\right]$$

existe; y como:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\,ds=T(0)f(t)$$

Entonces debe existir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

lo cual dice que:

$$\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds\in D(A)$$

y

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds=A\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds.$$

Luego:

$$g'(t)=A\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds+f(t)=Ag(t)-f(t)\,.$$

Así $g(t)$ es una solución particular, con lo que queda demostrado el Teorema. ∎

1.3.5. Teorema: *Un operador A con dominio $D(A)$ denso en el espacio de Banach X puede ser el generador infinitesimal a lo sumo de un semigrupo fuertemente continuo.*

Demostración: Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dos semigrupos de operadores fuertemente continuos, con generador infinitesimal A. Consideremos el problema de Cauchy (1.13):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, & t \geq 0 \\ \\ x(0) = x_0, & x_0 \in D(A) \end{cases}$$

En vista del Teorema 1.3.3, $x(t) = T(t)\,x_0$ e $y(t) = S(t)\,x_0$ son soluciones de PVI (1.13). Por unicidad se sigue que:

$$T(t)\,x_0 = S(t)\,x_0; \quad t \geq 0, \quad x_0 \in D(A).$$

De la densidad de $D(A)$ y del hecho que $T(t) \wedge S(t)$ son acotados se sigue que:

$$T(t)\,x = S(t)\,x; \quad t \geq 0, \quad x \in X.$$

■

1.4 Teorema de Hille-Yosida-Phillips

En esta sección vamos a exponer la condiciones para que un operador A con dominio $D(A)$ en el espacio de Banach X sea el generador de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

1.4.1. Definición: *Sea A un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \to X$. El conjunto resolvente de A denotado por $\rho(A)$ está dado por:*

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in C / (\lambda I - A)^{-1} \quad \text{existe} \right\}$$

$\rho(A)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$.

1.4.2. Definición: *Sea $A : D(A) \subseteq X \to X$ lineal. La función resolvente, denotada por $R(\lambda, A)$ está dada por $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, es un operador lineal, analítico y acotado, para cada $\lambda \in \rho(A)$.*

1.4.3. Teorema: *Una condición necesaria y suficiente para que un operador cerrado A con dominio denso $D(A)$ en el espacio de Banach X sea el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es que existan números reales M y ω tales que para cualquier número real $\lambda > \omega$:*

$$\lambda \in \rho(A) \quad \text{y} \quad \|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Demostración: Probemos primero la suficiencia. Definamos la familia de operadores acotados:

$$B_\lambda = \lambda[\lambda R(\lambda, A) - I], \quad \lambda > \omega$$

Vamos a construir el operador $T(t)$ como el límite fuerte cuando $\lambda \to \infty$ del operador $S_\lambda(t)$, donde $S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda}$. Por conveniencia dividiremos la prueba en una serie de afirmaciones. ∎

Afirmación 1: El operador $S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda}$ es uniformemente acotado para λ suficientemente grande.

En efecto, usando el producto de series de Cauchy, tenemos:

$$\begin{aligned}
S_\lambda(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tB_\lambda)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda [\lambda R(\lambda, A) - I])^n}{n!} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[t\lambda^2 R(\lambda, A) - t \cdot \lambda]^n}{n!} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} \left(t\lambda^2 R(\lambda, A)^{n-j}\right) (-\lambda t)^j \\
& = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-j)!j!} \left(t\lambda^2 R(\lambda, A)^{n-j}\right) (-\lambda t)^j \right) \\
& = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t\lambda^2 R(\lambda, A)^{n-j}}{(n-j)!} \cdot \frac{(-\lambda t)^j}{j!} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n R^n(\lambda, A)}{n!} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} R^n(\lambda, A)
\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}
S_\lambda(t) & = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \|R^n(\lambda, A)\| \leq \\
& \leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n M}{n!(\lambda - \omega)^n} \leq M e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t / \lambda - \omega} = \\
& = M e^{\frac{\lambda \omega t}{\lambda - \omega}}
\end{aligned}$$

Dado que $\dfrac{\lambda \omega t}{\lambda - \omega} \to t\omega$ cuando $\lambda \to \infty$ se sigue que para ω_1 fijo, $\omega_1 > \omega$:

$$S_\lambda(t) \leq M e^{t\omega_1}$$

para λ suficientemente grande.

Afirmación 2:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)\, x = x, \quad x \in X.$$

De la hipótesis tenemos que:

$$\|\lambda R(\lambda; A)\| \leq \frac{M\,|\lambda|}{\lambda - \omega}$$

y además

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{M\,|\lambda|}{\lambda - \omega} = M.$$

Entonces, para λ suficientemente grande, se tiene que:

$$\|\lambda R(\lambda; A)\| \leq 2M.$$

Por otra parte, para todo $x \in D(A)$ se tiene que:

$$\lambda R(\lambda; A)\, x - x = R(\lambda; A)\, Ax.$$

Por lo tanto:

$$\|\lambda R(\lambda; A)\, x - x\| = \|R(\lambda; A)\, Ax\| \leq \frac{M\,|\lambda|}{(\lambda - \omega)} \|Ax\|.$$

Luego:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)\, x = x \quad \forall x \in D(A).$$

Pero como $D(A)$ es denso en x y $\lambda R(\lambda; A)$ es acotado $\forall x \in X$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)\, x = x \quad \forall x \in X.$$

Afirmación 3:

$$\lim_{\lambda\to\infty} B_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

En efecto:

$$\lim_{\lambda\to\infty} B_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\left(\lambda R\left(\lambda; A\right) - I\right) x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\left(\lambda R\left(\lambda; A\right) x - x\right) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R\left(\lambda; A\right) Ax$$

Luego, por la afirmación anterior, tenemos que:

$$\lim_{\lambda\to\infty} B_\lambda x = Ax$$

Afirmación 4: Para cualquier $t \geq 0$ y $x \in X$ se tiene que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda\left(t\right) x$ existe y define el operador acotado $T\left(t\right)$.

Tenemos que $R_\lambda = \left(\lambda I - A\right)^{-1}$ para $\lambda \in \rho\left(A\right)$ y $S_\lambda = e^{tB_\lambda} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\left(tB_\lambda\right)^n}{n!}$.

Probemos primero que $R_\lambda R_u = R_u R_\lambda$:

$$\left(\lambda I - A\right)^{-1}\left(uI - A\right)^{-1} = y \quad \Leftrightarrow \left(uI - A\right)^{-1} = \left(\lambda I - A\right) y$$

$$\Leftrightarrow \quad Id = \left(uI - A\right)\left(\lambda I - A\right) y \Leftrightarrow Id = \left(uI - A\right)\left(\lambda y - Ay\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad Id = u\lambda y - A\lambda y - uAy + A^2 y \Leftrightarrow Id = u\lambda y - \lambda Ay - uAy + A^2 y$$

$$\Leftrightarrow \quad Id = \left(\lambda I - A\right)\left(uI - A\right) y \Leftrightarrow \left(\lambda I - A\right)^{-1} = \left(uI - A\right) y$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\lambda I - A\right)^{-1}\left(uI - A\right)^{-1} = y \Leftrightarrow R_u R_\lambda = y$$

$$\therefore R_\lambda R_u = R_u R_\lambda \tag{1.20}$$

Dado que $B_\lambda = \lambda\left[\lambda R\left(\lambda, A\right) - I\right], \lambda > w$ se tiene de (1.20) que:

$$B_\lambda B_u = B_u B_\lambda$$

Luego $B_u S_\lambda\left(t\right) = S_\lambda\left(t\right) B_u$ para $\lambda, u \in \rho\left(A\right)$.

Por ser S_λ una función abstracta, se tiene que:

$$\begin{aligned} S_\lambda(t) - S_u(t)\,x &= \int_0^t \frac{d}{ds}\left(S_u(t-s)\,S_\lambda(s)\,x\right) ds \\ &= \int_0^t \left[-S_u(t-s)\,B_u S_\lambda(s) + S_u(t-s)\,S_\lambda(s)\,B_\lambda\right] x ds \\ &= \int_0^t S_u(t-s)\,S_\lambda(s)\,(B_\lambda - B_u)\,x ds. \end{aligned}$$

Usando las Afirmaciones 1 y 3 se tiene $\forall x \in D(A)$ que:

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)\,x - S_u(t)\,x\| &= \left\|\int_0^t S_u(t-s)\,S_\lambda(s)\,(B_u - B_\lambda)\,x ds\right\| \\ &\leq \int_0^t \|S_u(t-s)\|\,\|S_\lambda(s)\|\,\|B_\lambda x - B_u x\|\,ds \\ &\leq \int_0^t M e^{\frac{u(t-s)w}{(u-w)}} \cdot M e^{\frac{\lambda s w}{\lambda - w}}\,\|B_\lambda x - B_u x\|\,ds. \end{aligned}$$

Sea w_1 suficientemente grande, entonces si $\lambda, u \to \infty$ tenemos:

$$\|S_\lambda(t)\,x - S_u(t)\,x\| \leq \int_0^t M^2 e^{tw_1}\,\|B_\lambda x - B_u x\|\,ds$$

pero $\|B_\lambda x - B_u x\| \to 0$ si $\lambda, u \to \infty$, por lo tanto:

$$\|S_\lambda(t)\,x - S_u(t)\,x\| \to 0 \quad \text{si } \lambda, u \to \infty.$$

Más aún, la convergencia es uniforme para cualquier intervalo finito de t; de lo cual concluimos que existe un operador acotado $T(t)$ tal que:

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)\,x = T(t)\,x, \quad x \in X \tag{1.21}$$

claramente $\|T(t)\| \leq M e^{tw_1}$.

Afirmación 5: La familia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en X.

i) $T(0) = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(0)\, x = x.$

ii) $T(t+s) = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t+s)\, x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t) \cdot S_\lambda(s)\, x = T(t) \cdot T(s)\, x.$

iii) $\lim_{\triangle t\to 0} \|T(t+\triangle t)\, x - T(t)\, x\| = 0$

En efecto, la convergencia en (1.21) es uniforme para cualquier intervalo finito de t, por lo tanto $T(t)\, x$ es fuertemente continuo en t $\forall x \in X$ y por lo tanto se cumple iii).

Para completar la prueba de suficiencia necesitamos demostrar que A es el generador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Supongamos que B es el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Debemos probar que $A = B$.

Encontremos primero una fórmula para la resolvente $R(\lambda, B)$ del generador infinitesimal B de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ donde $\|T(t)\| \leq Me^{tw_1}$ $\forall t \geq 0$.

Afirmación 6: Cualquier $\lambda > w_1$ está en $\rho(B)\, y$.

$$R(\lambda, B)\, x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x dt, \quad x \in X, \quad \lambda > w_1. \tag{1.22}$$

Consideremos el operador $R(\lambda)$ definido por:

$$R(\lambda)\, x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x dt, \quad x \in X, \quad \lambda > w_1. \tag{1.23}$$

Dado que:

$$\left\| e^{-\lambda t} T(t) \right\| \leq e^{-\lambda t} M e^{tw_1} = Me^{(-\lambda + w_1)t}$$

tenemos que la integral en (1.23) es absolutamente convergente para todo $\lambda > w_1$ y por lo tanto 1.23 está bien definido.

Observe que para $h > 0$, y $x \in X$:

$$\begin{aligned}
B_h R(\lambda) x &= \frac{T(h) R(\lambda) x - R(\lambda) x}{h} \\
&= h^{-1} \left[\int_0^\infty T(h) e^{-\lambda t} T(t) x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt \right] \\
&= h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(h+t) x dt - h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt \\
&= h^{-1} \int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s) x ds - h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt \\
&= h^{-1} \int_h^\infty e^{\lambda h} e^{-\lambda s} T(s) x ds - h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt \\
&= h^{-1} e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds - h^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t) x dt \right]
\end{aligned}$$

Así:

$$\lim_{h \to o^+} B_h R(\lambda) x = \lambda R(\lambda) x - x.$$

Esto prueba que $R(\lambda) x \in D(B)$ y que $B(R(\lambda)) x = \lambda R(\lambda) x - x$; esto es:

$$(\lambda I - B) R(\lambda) x = x, \quad x \in X, \quad \lambda > w_1. \tag{1.24}$$

Por otra parte, dado que B es un operador cerrado, que $R(\lambda) x \in D(B)$ y que la aplicación $t \to e^{-\lambda t} T(t) x$ es una función abstracta se tiene por el Teorema 1.3.3 que

$$\begin{aligned}
BR(\lambda) x &= B \textstyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt = \int_0^\infty B \left(e^{-\lambda t} T(t) x \right) dt \\
&= \textstyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) Bx dt = R(\lambda) Bx \quad \forall x \in D(B).
\end{aligned}$$

De (1.24) tenemos que:

$$\lambda R(\lambda)x - x = B(R(\lambda))x = R(\lambda)Bx$$

$$\Rightarrow R(\lambda)[\lambda I - B]x = x, \quad \forall x \in D(B), \quad \lambda > w_1. \tag{1.25}$$

De (1.24) y (1.25) concluimos que $R(\lambda)$ es la inversa de $\lambda I - B$ y existe para todo $\lambda > w_1$; así:

$$R(\lambda, B)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x dt$$

lo cual prueba la Afirmación 6.

Afirmación 7: $D(A) \subset D(B)$ y $Ax = Bx$ para $x \in D(A)$.

Para $x \in X$, tenemos:

$$S_\lambda(t)x - x = \int_0^t \frac{d}{dt}[S_\lambda(s)x]\, ds = \int_0^t S_\lambda(s) B_\lambda x ds. \tag{1.26}$$

Observemos que para $x \in D(A)$:

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(s) B_\lambda x - T(s) Ax\| &= \|S_\lambda(s)(B_\lambda x - Ax) + S_\lambda(s) Ax - T(s) Ax\| \leq \\ &\leq \|S_\lambda(s)\| \|B_\lambda x - Ax\| + \|S_\lambda(s) - T(s)\| \|Ax\| \end{aligned}$$

Así:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|S_\lambda(s) B_\lambda x - T(s) Ax\| = 0.$$

Por lo tanto:

$$S_\lambda(s) B_\lambda x \to T(s) Ax \text{ uniformemente en } S \tag{1.27}$$

para cualquier intervalo cerrado $[0, t]$.

De (1.26) y (1.27) concluimos que $\forall x \in D(A)$:

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s) Axds.$$

Así:

$$Bx = \lim_{t\to 0^+} \frac{[T(t)x - x]}{t} = \lim_{t\to 0^+} h^{-1}\left[\int_0^t T(s) Axds\right] = Ax \quad \text{(Por el Teorema 1.3.3)}$$

Por lo tanto $D(A) \subset D(B)$ y $Ax = Bx, \forall x \in D(A)$.

Afirmación 8: $D(B) \subset D(A)$.

Por hipótesis tenemos que si $\forall \lambda > w$ entonces $\lambda \in \rho(A)$.

Sea $\lambda > w_1 > w$ entonces por la Afirmación 6, $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ por lo tanto $\rho(A) \cap \rho(B) \neq 0$.

De la Afirmación 7 tenemos que para $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$:

$$(\lambda_0 I - B) D(A) = (\lambda_0 I - A) D(A) = X = (\lambda_0 I - B) D(B).$$

Luego si $X_\beta \in D(B)$ existe un $X_\alpha \in D(A)$ tal que

$$(\lambda_0 I - B) X_\alpha = (\lambda_0 I - B) X_\beta.$$

De la inyectividad de $(\lambda_0 I - B)$ se sigue que $X_\alpha = X_\beta$; por lo tanto $D(A) = D(B)$, con lo cual queda probada la suficiencia del teorema.

Probemos ahora el recíproco.

Veamos que si A es el generador de $T(t)$, existen números M y w tales que para cualquier $\lambda > w, \lambda \in \rho(A)$ y $\|R^n(\lambda, A)\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - w)^n}, n = 1, 2, ...$

De lo probado en la Afirmación 6, tenemos que para cualquier $\lambda > w$ se cumple que $\lambda \in \rho(A)$ y además:

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x dt, \quad x \in X. \tag{1.28}$$

Por otra parte tenemos que:

$$R(\lambda, A) - R(u, A) = (u - \lambda) R(\lambda, A) R(u, A), \quad \lambda, u > w. \tag{1.29}$$

De la analicidad de $R(\lambda, A)$ para $\lambda \in \rho(A)$ y de (1.29) se sigue que:

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = \lim_{u \to \lambda} \frac{[R(\lambda, A) - R(u, A)]}{(\lambda - u)} = -R(\lambda, A)^2 .$$

Luego por inducción se tiene que:

$$\left(\frac{d^n}{d\lambda^n}\right) R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}, \quad \lambda > w. \tag{1.30}$$

Además:

$$\frac{(R(\lambda + h; A) - R(\lambda, A))\, x}{h} = h^{-1} \int_0^\infty \left(e^{-ht} - 1\right) e^{-\lambda t} T(t)\, x dt. \tag{1.31}$$

Dado que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left[e^{-ht} - 1\right] e^{-\lambda t} T(t)\, x}{h} = -te^{-\lambda t} T(t)\, x$$

y

$$\left\| \left(\frac{e^{-ht} - 1}{h}\right) e^{-\lambda t} T(t)\, x \right\| \leq Mte^{-(\lambda - w - |h|)t}$$

Tomando límite en (1.31) tenemos que:

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)\, x = \int_0^\infty -te^{-\lambda t} T(t)\, x dt.$$

Después de n pasos, tenemos:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[R(\lambda, A)x\right] = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{(-\lambda t)} T(t)\, x dt, \quad x \in X, \quad \lambda > w. \tag{1.32}$$

Comparando (1.30) y (1.32) tenemos:

$$(-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)\, x dt$$

$$\begin{aligned}
R(\lambda, A)^{n+1} &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)\, x dt \\
\Rightarrow \quad R(\lambda, A)^n &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)\, x dt \\
\Rightarrow \quad \|R^n(\lambda, A)\| &\leq \frac{M}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1} e^{(-\lambda+w)t} dt \leq \frac{M}{(n-1)!}\left(\frac{(n-1)!}{(\lambda - w)^n}\right) \\
\Rightarrow \quad \|R^n(\lambda, A)\| &\leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \quad \lambda > w
\end{aligned}$$

y la prueba es completa.

1.4.4. Lema: *Sea A con $D(A)$ el generador infinitesimal de un semigrupo de contracción. Entonces para cada $x \in D(A)$:*

$$\|(I + \varepsilon A)\, x\| \leq \|x\| + 0(\varepsilon) \text{ cuando } \varepsilon \to 0^+. \tag{1.33}$$

Demostración: En la Afirmación 6, del Teorema 1.4.3 probamos que $\forall \lambda > w_1, \lambda \in \rho(A)$ y

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x dt \quad \text{donde } w_1 > w,$$

y

$$\|S_\lambda(t)\| \leq M e^{t w_1}.$$

Del hecho que el semigrupo es de contracción, se tiene que $M = 1$ y $w = 0$; por lo tanto:

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, x dt \quad \forall \lambda \in (0, +\infty)$$

y

$$\|R(\lambda, A)\, x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)\|\, x dt \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|$$

$$\therefore \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Sea $\varepsilon = \lambda^{-1} > 0$, entonces:

$$\left\|(I - \varepsilon A)^{-1}\right\| = \left\|\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\right\| = \left\|\left(\frac{\lambda I - A}{\lambda}\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{\lambda}\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq 1, \quad \varepsilon > 0 \tag{1.34}$$

Observe que para $x \in D(A)$ y $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}(I + \varepsilon A)\, x &= (I + \varepsilon A)(I - \varepsilon A)(I - \varepsilon A)^{-1} x = \\ &= ((I - \varepsilon A) + \varepsilon A (I - \varepsilon A))(I - \varepsilon A)^{-1} x = \\ &= ((I - \varepsilon A) + \varepsilon A + \varepsilon^2 A^2)(I - \varepsilon A)^{-1} x = \\ &= (I - \varepsilon^2 A^2)(I - \varepsilon A)^{-1} x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (I + \varepsilon A)\, x = (I - \varepsilon A)^{-1} x - \varepsilon^2 A^2 (I - \varepsilon A)^{-1} x \tag{1.35}$$

Probemos que:

$$\varepsilon^2 A^2 (I - \varepsilon A)^{-1} x = \varepsilon B_\varepsilon A x, \text{ donde } B_\varepsilon = \varepsilon A (t - \varepsilon A)^{-1} \tag{1.36}$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
& A\left(I-\varepsilon A\right)\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}=Ax \\
\Rightarrow\quad & \left(A-\varepsilon A^{2}\right)\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}x=Ax \\
\Rightarrow\quad & \left(I-\varepsilon A\right)A\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}x=Ax \\
\Rightarrow\quad & A\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}x=\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}Ax \\
\Rightarrow\quad & A^{2}\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}x=A\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}Ax \\
\Rightarrow\quad & \varepsilon^{2}A^{2}\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}x=\varepsilon^{2}A\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}Ax=\varepsilon B_{\varepsilon}Ax
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$(I-(I-\varepsilon A))=\varepsilon A$$

$$\Rightarrow\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}-I=\varepsilon A\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}=B_{\varepsilon} \tag{1.37}$$

Luego de (1.34) tenemos que:

$$\|B_{\varepsilon}\|\leq 2 \tag{1.38}$$

Por (1.36) tenemos:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\|B_{\varepsilon}y\|=\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\left\|\varepsilon A\left(I-\varepsilon A\right)^{-1}y\right\|\leq\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\varepsilon\|Ay\|=0\quad\forall y\in D\left(A\right).$$

Dado que el dominio de A es denso en X, se tiene que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\|B_{\varepsilon}y\|=0\quad\forall y\in X;$$

entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}B_{\varepsilon}y=0\quad\forall y\in X. \tag{1.39}$$

Finalmente de lo mostrado en (1.34), (1.35), (1.36) y (1.39), tenemos que:

$$\|(I-\varepsilon A)\,x\| \leq \|x\| + \varepsilon\,\|B_\varepsilon A x\| = \|x\| + \theta\,(\varepsilon) \;\text{ cuando } \varepsilon \to 0^+$$

y la prueba es completa. ■

1.4.5. Teorema: *Asuma que:*

i) *Para cada $t \in [a,b]$ el operador $A\,(t)$ con dominio $D\,[A\,(t)]$ genera un semigrupo de contracción en el espacio de Banach X.*

ii) $x \in C\,[[a,b]\,,X]\,, x\,(t) \in D\,(A\,(t))$, *es fuertemente continua con derivada lateral derecha $x'_+\,(t)$ tal que:*

$$x'_+\,(t) = A\,(t)\,x\,(t)\,, \quad a \leq t \leq b$$

entonces $\|x\,(t)\|$ es no creciente en t para $t \in [a,b]$.

Demostración: De la definición de $x'_+\,(t)$ se tiene que:

$$\left\| \frac{x\,(t+\varepsilon) - x\,(t)}{\varepsilon} - x'_+\,(t) \right\| = \varphi\,(\varepsilon) \;\text{ si } \varepsilon \to 0^+$$

por lo tanto:

$$\|x\,(t+\varepsilon) - x\,(t)\,[I - \varepsilon A\,(t)]\| = \varphi\,(\varepsilon) \;\text{ si } \varepsilon \to 0^+.$$

Usando el Lema 1.4.4 obtenemos:

$$\begin{aligned} \|x\,(t+\varepsilon)\| &\leq \|[I + \varepsilon A\,(t)]\,x\,(t)\| + \varphi\,(\varepsilon) \\ &\leq \|x\,(t)\| + \varphi\,(\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\|x(t)\|'_+ \leq 0$ para $a \leq t \leq b$. Este hecho unido a que por hipótesis $x(t)$ es continua permite concluir que $\|x(t)\|$ es no creciente. ■

1.4.6. Corolario: *Bajo la primera hipótesis del Teorema 1.4.5 el problema abstracto de Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)\,x; \quad a \leq t \leq b \\ \\ x(a) = x_a, \quad X_a \in D[A(a)] \end{cases} \tag{1.40}$$

tiene a lo sumo una solución en $[a,b]$.

Demostración: Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones del sistema (1.40). Sea $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Entonces $x'(t) = A(t)\,x(t)$ y $x(a) = 0$. Del Teorema 1.4.5 se sigue que $\|x(t)\|$ es no creciente en t. Dado que $x(a) = 0$ se sigue que $x(t) = 0$ lo cual concluye la prueba. ■

Como aplicación del Teorema 1.4.3, considere $X = C_0(-\infty, +\infty)$ el espacio de las funciones continuas a valores complejos, las cuales tienden a cero en el infinito. Considere la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad u(0,x) = u_0(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Sea:

$$D(A) = \Big\{ y \in C_0(-\infty,+\infty) \text{ tal que } y \quad \wedge \quad \frac{dy}{dx} \text{ son continuamente diferen-} \\ \text{ciales} \quad \wedge \quad \frac{d^2y}{dx^2} \in X \Big\}$$

$$D(A)=\left\{y\in C_0(-\infty,+\infty)\,/y(x)\,,\frac{dy}{dx}\in C^1(-\infty,+\infty)\right.$$

$$\left.\wedge\quad \frac{d^2y}{dx^2}\in C_0(-\infty,+\infty)\right\}$$

Definamos el operador A con dominio $D(A)$ por:

$$Ay=\frac{d^2y}{dx^2}\quad \dot{A}:D(A)\subseteq X\to X$$

Claramente, $D(A)$ es denso en X y A es un operador cerrado en $D(A)$.

La solución de:

$$(\lambda I-A)\,y=\lambda y-\frac{d^2y}{dx^2}=u_0(x)$$

en $D(A)$ puede ser obtenida por el método de Variación de los parámetros como:

$$y(x)=\left(2\sqrt{\lambda}\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sqrt{x}(x-s)}u_0(s)\,ds.$$

Usando la representación integral de $R(\lambda,A)$ se sigue que $\|R(\lambda,A)\|\le\frac{1}{\lambda}$. Por lo tanto A genera un semigrupo de contracción en X.

Capítulo 2
El Problema de Cauchy No-Lineal

Consideremos el problema:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f[t, u(t)], \quad u(t) \in X \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{2.2}$$

donde A genera el semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X y X es un espacio de Banach.

2.1. Teorema: (Del Punto Fijo de Picard-Banach). *Sea $\mathcal{M}$ un espacio métrico completo, con métrica d. Sea $\alpha < 1$ y sea $S : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, satisfaciendo:*

$$d(S^n x, S^n y) \leq \alpha d(x, y)$$

para algún entero positivo n y para todo $x, y \in \mathcal{M}$. Entonces S tiene un único punto fijo en $\mathcal{M}$; esto es, existe un único $x_0 \in \mathcal{M}$ tal que $Sx_0 = x_0$.

Demostración:

a) Para $n = 1$, sea $x_0 \in \mathcal{M}$ arbitrario y consideremos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$, dada por $x_n = S^n(x_0)$.

   Veamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. En efecto, tenemos que $d(x_n, x_{n+1}) = d(S^n(x_0), S^n(x_1)) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$. Así:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-1}\right] d\left(x_0, x_1\right) = \\
&= \alpha^n \left[1 + \alpha + \ldots + \alpha^{p-1}\right] d\left(x_0, x_1\right) \\
&\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d\left(x_0, x_1\right)
\end{aligned}$$

por lo tanto $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+p}\right) = 0$, lo que quiere decir que $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Dado que $\mathcal{M}$ es completo, se tiene que existe $x \in \mathcal{M}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Luegȯ

$$S\left(x\right) = S\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} S\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

es decir, x es un punto fijo de S.

Probemos ahora que es único; para ello supongamos que existe otro, sea $y = S\left(y\right)$, entonces $d\left(x,y\right) = d\left(S\left(x\right), S\left(y\right)\right) \leq \alpha d\left(x,y\right)$; por lo tanto debe tenerse $x = y$.

b) Probemos ahora para $n > 1$.

Supongamos, por inducción que $S^k\left(x\right) = x$ para un único x; entonces $S^{k+1}\left(x\right) = S\left(S^k\left(x\right)\right) = S\left(x\right) = x$. Para probar la unicidad consideremos que $y = S^n\left(y\right)$, entonces:

$$d\left(x,y\right) = d\left(S^n\left(x\right), S^n\left(y\right)\right) \leq \alpha d\left(x,y\right)$$

Entonces:

$$x = y$$

Lo cual finaliza la prueba. ■

2.2. Observación: Toda solución de (2.1) - (2.2) satisface la ecuación integral:

$$u(t) = T(t)\,u_0 + \int_0^t T(t-s)\,f(s, u(s))\,ds, \quad t > 0. \tag{2.3}$$

Dado que las soluciones de (2.3) en general no son diferenciables, no toda solución de (2.3) es solución de (2.1) - (2.2).

2.3. Definición: *A las soluciones de (2.3) las llamaremos soluciones moderadas de (2.1) - (2.2).*

2.4. Teorema: (Existencia Local). *Sea $\Omega \subset X$ un abierto y $u_0 \in \Omega$. Sea $f : I\!R^+ \times \Omega \to X$ una función continua, la cual satisface la siguiente condición de Lipschitz:*

$$\forall \tau \in I\!R_+ \text{ existe } k = k(\tau),$$

tal que:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\,\|x - y\|, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \tau, \quad x, y \in \Omega.$$

Entonces para τ suficientemente pequeño, existe una única solución moderada de (2.1) - (2.2) definida en $[0, \tau)$.

Demostración: Sea $\tau > 0$, consideremos el espacio de Banach $Y = C([0,\tau], X)$. Sea $E = B(u_0, \rho) \subset \Omega$, la bola de centro u_0 y radio $\rho > 0$ contenida en Ω. Definamos el siguiente espacio métrico completo:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{v \in y \setminus v(o) = u_0, \quad v(t) \in E, \quad t \in [0,\tau]\} \\ &= \{v \in y \setminus v(o) = u_{0,} \quad \|v(t)\| \leq \rho, \quad t \in [0,\tau]\} \end{aligned}$$

Definamos el operador $S : \mathcal{M} \to Y$, mediante:

$$Su(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) f(s, u(s))\, ds, \quad t \in [0,\tau].$$

Sean M y W tales que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}, t \geq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|Su - Sv\|_y &= \sup_{0\leq t\leq \tau} \|Su(t) - Sv(t)\| = \\ &= \sup_{0\leq t\leq \tau} \left\| \int_0^t T(t-s)\left[f(s,u(s)) - f(s,v(s))\right] ds \right\| \leq \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq \tau} Me^{w\tau} \int_0^t k(\tau) \|u(s) - v(s)\|\, ds \\ &\leq Me^{w\tau} k(\tau)\, \tau\, \|u - v\|_y \quad \forall u, v \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Asumiendo que $k(\tau)$ está acotada, tenemos que:

$$\lim_{\tau \to o^+} Me^{w\tau} k(\tau)\, \tau = 0;$$

en particular $Me^{w\tau} k(\tau)\, \tau < 1$ para τ suficientemente pequeño.

Así $S : \mathcal{M} \to Y$ es una contracción. Veamos que $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\|Su - u_0\|_y &= \sup_{0\le t\le\tau} \left\| T(t)\, u_0 + \int_0^t T(t-s)\, f(s, u(s))\, ds - u_0 \right\| \le \\
&\le \sup_{0\le t\le\tau} \|T(t)\, u_0 - u_0\| + \sup_{0\le t\le\tau} \left\| \int_0^t T(t-s)\, f(s, u(s))\, ds \right\| = \\
&= J_1(\tau) + J_2(\tau) \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

a) Dado que $\lim_{t\to 0} T(t)\, u_0 = u_0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$\|T(t)\, u_0 - u_0\| < \frac{\rho}{2}, \quad \text{si } t \in [0, \delta_1).$$

b) Por otra parte:

$$\begin{aligned}
J_2(\tau) &= \sup_{0\le t\le\tau} \left\| \int_0^t T(t-s)\, f(s, u(s))\, ds \right\| \le \\
&\le \int_0^t \|T(t-s)\|\, \|f(s, u(s))\|\, ds \le \\
&\le Me^{wt} \sup_{S\in[0,\tau]} \|f(s, u(s))\|\, \tau \le \\
&\le \tau Me^{wt} \left\{ \sup_{0\le t\le\tau} \|f(t, u_0)\| + k(\tau) \sup_{0\le t\le\tau} \|u(t) - u_0\| \right\}
\end{aligned}$$

Así:

$$\lim_{\tau\to 0^+} J(\tau) = 0,$$

por lo tanto existe δ_2 tal que:

$$\|J(\tau)\| < \frac{\rho}{2} \text{ si } \tau < \delta_2.$$

De a) y b) se concluye que $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ si τ es suficientemente pequeño. Por el Teorema 2.1 podemos asegurar que S tiene un único punto fijo, es decir, existe $u(t) \in \mathcal{M}$ tal que:

$$u(t) = T(t)\, u_0 + \int_0^t T(t-s)\, f(s, u(s))\, ds.$$

■

2.5. Teorema: (Existencia Global). *Sea* $u_0 \in X$ *y* $f : I\!R_+ \times X \to X$ *satisfaciendo la siguiente condición de Lipschitz: para todo* $\tau > 0$ *existe una constante* $k = k(\tau)$ *tal que:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\,\|x - y\| \quad \forall 0 \leq t \leq \tau; \quad x, y \in X.$$

Entonces (2.1) - (2.2) tiene una única solución moderada en $I\!R^+$.

Demostración: Sean S, M y W como en la prueba del teorema anterior. Probemos primero la siguiente afirmación:

$$\|S^n(u(t)) - S^n(v(t))\| \leq \frac{[Mk(\tau)\, e^{w\tau} t]^n}{n!}\, \|u - v\|, \quad t > 0, \quad u, v \in C([0,\tau], X) \tag{2.5}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $k(\tau)$ es no decreciente.

Para $n = 1$ la ecuación (2.5) es válida, por la demostración del Teorema 2.4. Supongamos que vale para $n = k$ y probemos para $n = k + 1$:

$$\left\|S^{k+1}\left(u\left(t\right)\right)-S^{k+1}\left(v\left(t\right)\right)\right\|=\left\|S\left(S^{k}\left(u\left(t\right)\right)\right)-S\left(S^{k}\left(v\left(t\right)\right)\right)\right\|=$$

$$=\left\|T\left(t\right)S^{k}\left(u_{0}\right)+\int_{0}^{t}T\left(t-s\right)f\left(s,S^{k}u\left(s\right)\right)ds-T\left(t\right)S^{k}v\left(0\right)-\right.$$

$$\left.-\int_{0}^{t}T\left(t-s\right)f\left(s,S^{k}v\left(s\right)\right)ds\right\|=$$

$$=\left\|\int_{0}^{t}T\left(t-s\right)\left[f\left(s,S^{k}u\left(s\right)\right)-f\left(s,S^{k}v\left(s\right)\right)\right]ds\right\|$$

$$\leq Me^{w\tau}\int_{0}^{t}k\left(\tau\right)\left\|S^{k}u\left(s\right)-S^{k}v\left(s\right)\right\|ds\leq$$

$$\leq Me^{w\tau}k\left(\tau\right)\int_{0}^{t}\frac{\left[Mk\left(\tau\right)e^{w\tau}s\right]^{k}}{k!}\left\|u-v\right\|_{y}ds=$$

$$=\left[Me^{w\tau}k\left(\tau\right)\right]^{k+1}\int_{0}^{t}\frac{S^{k}}{k!}\left\|u-v\right\|ds$$

Así:

$$\left\|S^{k+1}\left(u\left(t\right)\right)-S^{k+1}\left(v\left(t\right)\right)\right\|=\left[Me^{w\tau}k\left(\tau\right)\right]^{k+1}\frac{t^{k+1}}{k+1!}\left\|u-v\right\|.$$

Sea $\tau>0$ fijo y arbitrario. Entonces podemos elegir n suficientemente grande, tal que:

$$\alpha=\frac{Me^{w\tau}k\left(\tau\right)\tau}{n!}<1.$$

Por lo tanto, S posee un único punto fijo lo cual implica que el problema (2.1) - (2.2) tiene una única solución moderada definida en $[0,\tau]$. Dado que $\tau>0$ es arbitrario, el resultado es válido en $I\!R^{+}$. ■

2.6. Teorema: *Supongamos que* $f : \mathbb{R}_+ \times X \to X$ *es continua y satisface la siguiente condición:* $\forall c > 0$ *existe* $k(c)$ *tal que:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k(c)\|x - y\|, \quad 0 \leq t \leq c, \quad \|x\| \leq c, \quad \|y\| \leq c.$$

Sea $u \in C([0,\tau], X)$ *una solución moderada de (2.1) - (2.2), con* $\tau < \infty$. *Entonces:*

a) *(Unicidad). Para cada* $\tau > 0$ *existe una única solución moderada definida en* $[0,\tau)$.

b) *(Extensión o Explotación). Ocurre una de las siguientes alternativas:*

   b.1) *Existe una solución moderada sobre* $\mathbb{R}_+$ *ó*

   b.2) *Existe* $\tau > 0$ *tal que hay una solución moderada* u *sobre* $[0,\tau)$ *tal que:*

$$\lim_{t \to \tau^-} \|u(t)\| = \infty.$$

Demostración: Por el Teorema 2.4 sabemos que para cada $u_0 \in X$ existe una única solución moderada en $[0,\varepsilon)$ para algún $\varepsilon = \varepsilon(u_0) > 0$ lo que prueba a).

Sea $\tau = \sup\{t \setminus \text{existe una solución moderada en } [0,t)\}$.

Si $\tau = \infty$ la prueba es completa.

Supongamos que $\tau < \infty$ y sea u la solución moderada en $[0,\tau)$ entonces u no es solución en $[0,\tau]$ pues si lo fuera, por la parte a) existiría una solución

$v(t)$ del problema:

$$v'(t) = Av + f(t, v(t))$$

$$v(0) = u(\tau) \text{ para } [0, \varepsilon_0)$$

y luego haciendo $u(t+\tau) = v(t)$ encontraríamos una solución moderada de (2.1) - (2.2) en $[0, \tau + \varepsilon_0)$ contradiciendo la escogencia de τ.

Supongamos ahora que $\lim\limits_{t \to \tau^-} \|u(t)\| < \infty$, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a τ por la izquierda tal que:

$$c = \sup_n \|u(t_n)\| + 1 < \infty.$$

Dado que existe un k tal que $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x-y\|$ si $\|x\|$, $\|y\| \leq D = Me^w c + c$, y $t \leq \tau + 1$ (donde M y W son como antes) entonces:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\| &\leq \|f(t,0)\| + \|f(t,0) - f(t,x)\| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau+1} \|f(t,0)\| + kD \equiv L < \infty \text{ si } \|x\| \leq D. \end{aligned}$$

Así, como en la prueba del Teorema 2.4 se tiene:

$$S_n v(t) = T(t) u(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+t} T(t_n + t - s) f(s, v(s)) \, ds$$

para $0 \leq t \leq \delta$, y $v \in \mathcal{M}_n$, donde:

$$\mathcal{M}_n = C([t_n, t_n + \delta], \{x \in X \setminus \|x\| \leq D\}).$$

Por razonamiento análogo al realizado en la demostración del Teorema 2.4 tenemos que $S(\mathcal{M}_n) \subset \mathcal{M}_n$ para $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño, independientemente de n. Se prueba además que S es una contracción, por lo tanto posee un punto fijo $v_n \in \mathcal{M}_n$.

Sea:

$$v(t) = \begin{cases} u(t) \text{ para } 0 \leq t \leq t_n \\ \\ v_n(t) \text{ para } t_n < t \leq t_n + \delta. \end{cases}$$

Entonces $v(t)$ es una solución moderada en $[0, t_n + \delta]$ y $t_n + \delta > \tau$ para n suficientemente grande, por unicidad tenemos $v(t) = u(t)$ para $0 \leq t < \tau$; lo cual contradice la escogencia del τ; por lo tanto debe ser:

$$\lim_{t \to \tau^-} \|u(t)\| = \infty.$$

■

Capítulo 3
Existencia y Estabilidad de Soluciones Acotadas de la Ecuación

$$w'+\mathcal{A}(\eta)\,w = F(t,w,P)\,, \quad t \in I\!R, \quad w \in I\!R^n \tag{3.1}$$

En este capítulo estudiaremos la existencia, estabilidad y periodicidad de soluciones acotadas de la ecuación (3.1), donde el término no lineal es lo suficientemente "bueno" para garantizar la existencia de dicha solución; además probaremos que si P es tal que la aplicación $t \to F(t, w(t), P)$ es casi-periódica para toda $w(t)$ casi-periódica, entonces la solución también lo es. Al final del capítulo aplicaremos estos resultados para establecer condiciones que nos permitan garantizar la existencia de una solución acotada de un modelo matemático de fotoconductividad no autónomo [11], el caso autónomo ha sido estudiado en [12]; también estudiaremos ecuaciones del tipo:

$$w'' + cw' + dAw + kH(w) = P(t)\,.$$

Ver [9], como por ejemplo el puente en suspensión de Lazer y McKenna o el modelo de Sine-Gordon.

3.1 Hipótesis

Estudiaremos el sistema de ecuaciones (3.1) sujeto a las siguientes condiciones:

a) $\eta \in (M_1, h_1)\,; P \in (M_2, h_2)$, donde M_i es un espacio métrico para $i = 1, 2$ con métrica h_i .

b) $\mathcal{A}(\eta)$ es una matriz $n \times n$ continua en η.

c) $F : I\!R \times I\!R^n \times M_2 \to I\!R^n$ es una función continua, tal que $F(t, 0, P)$ es acotada.

d) Existen:

   i) $\beta : M_1 \to (0, +\infty)$ continua.

   ii) Proyectores $\{P(\eta)\}_{\eta \in M_1}$ en $I\!R^n$, tales que:

$$P(\eta)\,\mathcal{A}(\eta) = \mathcal{A}(\eta)\,P(\eta)$$

$$\left\| e^{-\mathcal{A}(\eta)t} P(\eta) \right\| \leq M e^{-\beta(\eta)t}, \quad t \geq 0, \quad M > 1$$

$$\left\| e^{-\mathcal{A}(\eta)t} \left(I - P(\eta)\right) \right\| \leq M e^{\beta(\eta)t}, \quad t \leq 0, \quad M > 1.$$

3.2 Existencia de Soluciones Acotadas

3.2.1 Definición: *Sea $Q(\eta) = I - P(\eta)$. Definimos la función de Green:*

$$G_\eta(t, s) = \begin{cases} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} P(\eta)\,, & \text{si } t \geq s \\ \\ -e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} Q(\eta)\,, & \text{si } t < s. \end{cases} \tag{3.2}$$

3.2.2. Proposición:

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(t,s)\, ds \right\| \leq \frac{2M}{\beta(\eta)}. \tag{3.3}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(t,s)\, ds \right\| &\leq \left\| \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} P(\eta)\, ds \right\| + \left\| \int_{t}^{+\infty} -e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} Q(\eta)\, ds \right\| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} M e^{-\beta(\eta)(t-s)} ds + \int_{t}^{+\infty} M e^{\beta(\eta)(t-s)} ds = \\
&= \int_{0}^{+\infty} M e^{-\beta(\eta)k} dk + \int_{-\infty}^{0} M e^{\beta(\eta)k} dk = \\
&= M \left[\int_{-\infty}^{0} e^{\beta(\eta)k} dk + \int_{0}^{+\infty} e^{-\beta(\eta)k} dk \right] = \\
&= \frac{2M}{\beta(\eta)}.
\end{aligned}$$

■

Sea $W_b = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones continuas y acotadas definidas en $\mathbb{R}$, tomando valores en $\mathbb{R}^n$, con la norma del supremo:

$$\|w\|_b = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|w(t)\|, \quad w \in W_b \tag{3.4}$$

Denotemos por B_ρ y B_ρ^b las siguientes bolas en los espacios $\mathbb{R}^n$ y W_b respectivamente:

$$B_\rho = \{w \in \mathbb{R}^n / \|w\| < \rho\} \tag{3.5}$$

y

$$B_\rho^b = \{w \in W_b / \|w\|_b < \rho\}. \tag{3.6}$$

3.2.3. Lema: *Sea $w \in W_b$ y consideremos $\rho > 0$ tal que $\rho > \|w\|_b$; supongamos que en el entorno $\mathbb{R} \times B_\rho \times \{P\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_2$, F es Lipschitz en la segunda variable con constante L_ρ; entonces w es solución de (3.1) sii:*

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(t,s) F(s, w(s), P)\, ds. \tag{3.7}$$

Demostración:

Si $w(t)$ es solución de (3.1), entonces, por la fórmula de variación de los parámetros tenemos que:

$$w(t) = e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-t_0)} w(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} F(s, w(s), P)\, ds.$$

Por hipótesis tenemos que

$$w(t) = P(\eta)\, w(t) + Q(\eta)\, w(t), \tag{3.8}$$

Luego:

$$P(\eta)\, w(t) = e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-t_0)} P(\eta)\, w(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} P(\eta)\, F(s, w(s), P)\, ds. \tag{3.9}$$

Dado que

$$\left\| e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-t_0)} P(\eta)\, w(t_0) \right\| \leq M e^{-\beta(\eta)(t-t_0)} \|w(t_0)\|$$

se tiene que:

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \left\| e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-t_0)} P(\eta)\, w(t_0) \right\| = 0.$$

Por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned} \|F(s, w(s), P)\| &\leq \|F(s, w(s), P) - F(s, 0, P)\| + \|F(s, 0, P)\| \leq \\ &\leq L_\rho \|w(s)\| + L_p \leq \rho L_\rho + L_p \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde L_p es una constante tal que $\|F(s,0,P)\| \leq L_p$. Luego la integral impropia $\int_{-\infty}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} P(\eta) F(s, w(s), P)\, ds$ existe.

Tomando límite cuando $t_0 \to -\infty$ en (3.9) tenemos que:

$$P(\eta) w(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} P(\eta) F(s, w(s), P)\, ds.$$

Análogamente se prueba que:

$$Q(\eta) w(t) = \int_{t}^{+\infty} -e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} Q(\eta) F(s, w(s), P)\, ds.$$

Así, de (3.8) se sigue que:

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} P(\eta) F(s, w(s), P)\, ds + \\ &\quad + \int_{t}^{+\infty} -e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} Q(\eta) F(s, w(s), P)\, ds. \end{aligned}$$

Entonces

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(t,s) F(s, w(s), P)\, ds.$$

Recíprocamente supongamos que w es solución de (3.7). Entonces:

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} P(\eta) F(s, w(s), P)\, ds + \\ &\quad + \int_{t}^{+\infty} -e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} Q(\eta) F(s, w(s), P)\, ds \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} P(\eta) F(s, w(s), P)\, ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} P(\eta) F(s, w(s), P)\, ds + \int_{0}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} P(\eta) F(s, w(s), P)\, ds$$

Del mismo modo:

$$\int_{t}^{+\infty} -e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)}Q(\eta)\,F(s,w(s),P)\,ds =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} -e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)}Q(\eta)\,F(s,w(s),P)\,ds - \int_{0}^{t} -e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)}Q(\eta)\,F(s,w(s),P)\,ds$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\eta}(t,s)\,F(s,w(s),P)\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)}P(\eta)\,F(s,w(s),P)\,ds + \int_{0}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)}F(s,w(s),P)\,ds +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} -e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)}Q(\eta)\,F(s,w(s),P)\,ds$$

$$= e^{-\mathcal{A}(\eta)t}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\mathcal{A}(\eta)s}P(\eta)\,F(s,w(s),P)\,ds + \int_{0}^{+\infty} -e^{\mathcal{A}(\eta)s}Q(\eta)\,F(s,w(s),P)\,ds\right] +$$

$$+ \int_{0}^{t} e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)}F(s,w(s),P)\,ds. \tag{3.11}$$

Dado que:

$$w(o) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\eta}(o,s)\,F(s,w(s),P)\,ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\mathcal{A}(\eta)s}P(\eta)\,F(s,w(s),P)\,ds + \int_{0}^{+\infty} -e^{\mathcal{A}(\eta)s}Q(\eta)\,F(s,w(s),P)\,ds.$$

Se tiene de (3.7) y (3.11) que

$$w(t) = e^{-\mathcal{A}(\eta)t} w(0) + \int_0^t e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} F(s, w(s), P)\, ds.$$

■

A continuación presentaremos uno de los principales resultados de este capítulo.

3.2.4. Teorema: *Supongamos que para cierto $\rho > 0$ se tiene que:*

i) *En el entorno $\mathbb{R} \times B_{2\rho} \times \{P\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_2$, F es Lipschitz en la segunda variable con constante L_ρ.*

ii) *Dado $P \in M_2$ existe $\eta \in M_1$ tal que*

$$0 < L_\rho = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, 0, P)\| \leq \frac{(\beta(\eta) - 2ML_\rho)\rho}{2M}. \tag{3.12}$$

Entonces la ecuación (3.1) posee una única solución acotada $w_b(t)$. Más aún $\|w_b(t)\| \leq \rho$, $t \in \mathbb{R}$.

Demostración: Para probar la existencia y unicidad veamos que el siguiente operador posee un único punto fijo en B_ρ^b. Sea $T : B_\rho^b \to W_b$ como sigue:

$$Tw(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(t, s)\, F(s, w(s), P)\, ds.$$

Entonces:

$$\|Tw(t)\| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(t, s)\, F(s, w(s), P)\, ds \right\|.$$

Sabemos por (3.10) que $\|F(s,w(s),P)\| \leq L_\rho \|w(s)\| + L_p$, luego usando (3.12) se tiene:

$$\begin{aligned}
\|Tw(t)\| &\leq (L_\rho \|w(s)\| + L_\rho) \int_{-\infty}^{+\infty} \|G_\eta(t,s)\| \, ds \leq \\
&\leq (L_\rho \|w(s)\| + L_p) \frac{2M}{\beta(\eta)} \\
&\leq (\rho L_\rho + L_p) \frac{2M}{\beta(\eta)} < \rho.
\end{aligned}$$

Así, $Tw(t) \in B_\rho^b, \forall w \in B_\rho^b$.

Consideremos ahora $w_1, w_2 \in B_\rho^b$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\|Tw_1(t) - Tw_2(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(t,s) \left[F(s,w_1(s),P) - F(s,w_2(s),P) \right] ds \right\| \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} L_\rho \|w_1(s) - w_2(s)\| \, \|G_\eta(t,s)\| \, ds \leq \\
&\leq \frac{2M}{\beta(\eta)} L_\rho \|w_1 - w_2\|_b .
\end{aligned}$$

La condición (3.12) implica que $\dfrac{2ML_\rho}{\beta(\eta)} < 1$; lo cual nos permite concluir que T es una contracción. Usando ahora el Teorema del Punto Fijo de Banach, podemos asegurar la existencia de un único punto fijo:

$$w_b(t) = T(w_b(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(t,s) F(s,w(s),P) \, ds. \tag{3.13}$$

Luego por el Lema 3.2.3 concluimos que $w_b(t)$ es la única solución acotada de (3.1), tal que $\|w_b(t)\| < \rho$. ■

El siguiente teorema constituye el resultado principal de este capítulo.

3.2.5. Teorema: *Supongamos que F es globalmente Lipschitz en la segunda variable con constante L y que para algún $\eta \in M_1$;*

$$(\beta(\eta) - 2ML) > 0 \ .$$

Entonces para cada $P \in M_2$ existe una única solución acotada de (3.1).

Demostración: Para $\rho_1 > 0$ suficientemente grande se tiene que:

$$0 < L_p < \left(\frac{\beta(\eta) - 2ML}{2M}\right) \rho_1.$$

Por otra parte, la condición $\beta(\eta) - 2ML > 0$ es independiente de ρ. Entonces por el teorema anterior se tiene que para cada $\rho > \rho_1$ existe una única solución de (3.1) en B_ρ^b; como $B_{\rho_k} \subset B_{\rho_s}$ si $\rho_k < \rho_s$ se sigue que existe una única solución acotada de (3.1) definida en todo $I\!R$. ■

3.2.6. Corolario: *Supongamos que $F(\cdot, w(\cdot), P)$ es globalmente Lipschitz en la segunda y tercera variable, con constante de Lipschitz L, y que para algún $\eta \in M_1$ se tiene que $\beta(\eta) - 2ML > 0$. Entonces la única solución acotada W_b dada por el Teorema 3.2.5 depende continuamente de $P \in (M_2, h_2)$.*

Demostración: Sean P_1 y P_2 en M_2 y w_1, w_2 las respectivas soluciones dadas por el Teorema 3.2.5. Entonces:

$$\begin{aligned} \|w_1(t) - w_2(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(t,s) \left[F(s, w_1(s), P_1) - F(s, w_2(s), P_2)\right] ds \right\| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} L \left\{\|w_1(s) - w_2(s)\| + h_2(P_1, P_2)\right\} \|G_\eta(t,s)\| \, ds. \end{aligned}$$

Luego:

$$\|w_1(\cdot, P_1) - w_2(\cdot, P_2)\| \leq \frac{2ML}{\beta(\eta)} \|w_1(\cdot, P_1) - w_2(\cdot, P_2)\| + \frac{2ML}{\beta(\eta)} (h_2(P_1, P_2)).$$

Así:

$$\|w_1(\cdot, P_1) - w_2(\cdot, P_2)\| \leq \frac{2ML}{\beta(\eta) - 2ML} h_2(P_1, P_2)$$

lo cual finaliza la demostración. ■

3.2.7. Lema: *Sea $P \in (M_2, h_2)$ tal que la aplicación $g(t) = F(t, w(t), P)$ es casi-periódica para toda $w(\cdot)$ casi-periódica. Entonces la única solución acotada de la ecuación (3.1) dada por el Teorema 3.2.5 es también casi-periódica.*

Demostración: En esta prueba vamos a usar un resultado que se debe a S. Bohr, el cual establece que una función $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ es casi-periódica sii el Hull de f, $(H(f))$ es compacto en la topología de la convergencia uniforme; donde:

$$H(f) = \left\{\overline{f_\tau : t \in \mathbb{R}}\right\}, \quad f_\tau(t) = f(t + \tau), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dado que el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones casi-periódicas es casi-periódica, entonces el conjunto $A \cdot P$ de funciones casi-periódicas en B_ρ^b es cerrado.

Afirmación: *La contracción T, dada por el Teorema 3.2.4. deja invariante al conjunto de las funciones $A \cdot P$ en B_ρ^b. En efecto, sea:*

$$L(t) = T(w(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(t, s) F(s, w(s), P) \, ds, \qquad w(\cdot) \in \left(A \cdot P \cap B_\rho^b\right).$$

Vamos a probar que $H(L)$ es compacto en la topología de la convergencia uniforme. Para ello consideremos:

$$L_{\tau_k}(t) = L(\tau_k + t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(\tau_k + t, s)\, g(s)\, ds$$

donde $g(t) = F(t, w(t), P)$. Entonces:

$$L_{\tau_k}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(\tau_k + t, s + \tau_k)\, g(s + \tau_k)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(\tau_k + t, s + \tau_k)\, g_{\tau_k}(s)\, ds.$$

Dado que $g(t)$ es casi-periódica, el Hull de g es compacto, por lo tanto existe $\left\{g_{\tau_{k_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ convergente la cual "genera" una subsucesión $\left\{L_{\tau_{k_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$.

Consideremoa ahora:

$$\begin{aligned}\left\|L_{\tau_{k_j}}(t) - L_{\tau_{k_\rho}}(t)\right\| &= \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta\left(\tau_{k_j} + t, \tau_{k_j} + s\right) g_{\tau_{k_j}}(s) - \right. \\ &\qquad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta\left(\tau_{k_\rho} + t, \tau_{k_\rho} + s\right) g_{\tau_{k_\rho}}(s)\, ds\right\|.\end{aligned}$$

Observemos que:

$$G_\eta\left(\tau_{k_j} + t, \tau_{k_j} + s\right) = G_\eta\left(\tau_{k_\rho} + t, \tau_{k_\rho} + s\right) = G_\eta(t, s).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\left\|L_{\tau_{k_j}}(t) - L_{\tau_{k_\rho}}(t)\right\| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|g_{\tau_{k_j}}(s) - g_{\tau_{k_\rho}}(s)\right\| \left\|G_\eta(t, s)\right\| ds \leq \\ &\leq \frac{2M}{\beta(\eta)} \left\|g_{\tau_{k_j}} - g_{\tau_{k_\rho}}\right\|.\end{aligned}$$

Así:

$$\lim_{j,\rho \to +\infty} \left\|L_{\tau_{k_j}}(t) - L_{\tau_{k_\rho}}(t)\right\| = 0.$$

Por lo tanto, el Hull de L es compacto, lo que indica que $L(t)$ es casi-periódica; sabemos además que $L(t)$ es una contracción, lo cual nos permite asegurar que el único punto fijo de $L(t)$ en B_ρ^b pertenece al conjunto de las funciones casi-periódicas. Así, la única solución acotada $w_b(t)$ de la ecuación (3.1) dada por el Teorema 3.2.5 es casi-periódica. ■

3.2.8 Corolario: *Si $P(\eta) = Id$ entonces la solución dada por el Teorema 3.2.4 es localmente asintóticamente estable, y la dada por el Teorema 3.2.5 es globalmente asintóticamente estable.*

Demostración: Probemos primero la estabilidad local bajo las hipótesis de 3.2.4.

Sea $w_b \in B_\rho^b$ solución de (3.1); luego:

$$w_b(t) = e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-t_0)} w_b(o) + \int_0^t e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} F(s, w_b(s), P)\, ds$$

y consideremos cualquier otra solución $w(t)$ de (3.1) tal que $\|w(o) - w_b(o)\| < \dfrac{\rho}{2M}$. Entonces $\|w(o)\| < 2\rho$. Durante el tiempo en que $\|w(t)\|$ es menor que 2ρ, tenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \|w(t) - w_b(t)\| &\leq \left\|e^{-\mathcal{A}(\eta)t}\right\| \cdot \|w(o) - w_b(o)\| + \\ &\quad + \int_0^t \left\|e^{-\mathcal{A}(\eta)(t-s)} \left[F(s, w(s), P) - F(s, w_b(s), P)\right] ds\right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|w(t)-w_b(t)\| &\leq Me^{-\beta(\eta)t}\|w(o)-w_b(o)\| + \\ &\quad + \int_0^t Me^{-\beta(\eta)(t-s)}L_\rho \|w(s)-w_b(s)\|\, ds = \\ &= Me^{-\beta(\eta)t}\|w(o)-w_b(o)\| + \\ &\quad + Me^{-\beta(\eta)t}\int_0^t e^{\beta(\eta)s}L_\rho \|w(s)-w_b(s)\|\, ds.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$e^{\beta(\eta)t}\|w(t)-w_b(t)\| \leq M\|w(o)-w_b(o)\| + \int_0^t ML_\rho e^{\beta(\eta)s}\|w(s)-w_b(s)\|\, ds.$$

Luego, por la desigualdad de Gronwall's tenemos:

$$e^{\beta(\eta)t}\|w(t)-w_b(t)\| \leq M\|w(o)-w_b(o)\| e^{\int_0^t ML_\rho ds}$$

Lo cual nos permite obtener:

$$\|w(t)-w_b(t)\| \leq M\|w(o)-w_b(o)\| e^{[ML_\rho - \beta(\eta)]t} \quad \forall t \in [0, t_1]$$

donde t_1 está dada por:

$$t_1 = \sup\left\{\hat{t} \in I\!R \text{ tq } \|w(t)\| < 2\rho \quad \forall t \in \left[0, \hat{t}\right)\right\}.$$

De la ecuación 3.12 tenemos que $ML_\rho - \beta(\eta) < 0$; por la tanto

$$\|w(t)-w_b(t)\| \leq M\|w(o)-w_b(o)\| < \frac{\rho}{2}.$$

Tenemos que $\|w(t_1)\| = 2\rho \quad$ ó $\quad t_1 = +\infty$.

Si $\|w(t_1)\| = 2\rho$ entonces:

$$\|w(t_1)\| < \frac{\rho}{2} + \rho,$$

lo cual no lleva a una contradicción. Por lo tanto $t_1 = +\infty$. Así, $w(t) \in B_{2\rho} \quad \forall t \geq 0$. Luego:

$$\|w(t) - w_b(t)\| \leq e^{[ML_\rho - \beta(\eta)]t} \|w(o) - w_b(o)\|, \quad t \geq 0,$$

lo cual prueba la estabilidad asintótica local.

Para probar la estabilidad global, consideremos $w_b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, entonces existe $\rho > 0$ tal que $w_b \in B_\rho^b$; dado que $ML - \beta(\eta) < 0$ independiente de ρ, donde L es la constante de Lipschitz, se sigue, por razonamiento análogo al anterior que:

$$\|w(t) - w_b(t)\| \leq \|w(o) - w_b(o)\| e^{[ML - \beta(\eta)]t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Luego:

$$\lim_{t \to +\infty} \|w(t) - w_b(t)\| = 0$$

lo cual prueba la estabilidad asintótica global. ■

3.3 Aplicaciones

3.3.1 Modelo de Fotoconductividad

En esta parte estudiaremos el siguiente modelo matemático para procesos de fotoconductividad no autónomo en semiconductores intrínsicos; el caso autónomo fue estudiado en [12]. Probaremos que bajo ciertas condiciones existe una única solución acotada local.

El modelo en cuestión es el siguiente:

$$\begin{cases} x' = G(t) - \alpha x (R - y) - cx + \gamma y. \\ y' = \alpha x (R - y) - \delta yz - \gamma y. \\ z' = G(t) - \delta yz - dz. \end{cases} \tag{3.14}$$

Donde:

a) c y d son las velocidades de captación de electrones y huecos.

b) R es el número total de trampas en el sistema.

c) $y(t)$ es el número de trampas ocupadas en el tiempo t.

d) α es la probabilidad de captura de electrones de las bandas de conducción a las trampas.

e) γ es la probabilidad de expulsar los electrones desde las trampas a las bandas de conducción por exitación térmica.

f) δ es la constante de recombinación para la captura de electrones.

g) $x(t)$ representa los electrones excedentes que contribuyen al proceso de fotoconductividad.

h) $z(t)$ son huecos excedentes que contribuyen al proceso.

i) $G(t)$ es la velocidad de fotoexitación de las cargas.

El modelo presentado en el sistema (3.14) corresponde a una ecuación del tipo:

$$w' = -\mathcal{A}(\eta)\, w + F(w) + P(t) \tag{3.15}$$

para

$$-\mathcal{A}(\eta) = \begin{pmatrix} -(\alpha R + c) & \gamma & 0 \\ \alpha R & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ c \\ R \\ d \end{pmatrix} \in I\!R^5 \qquad P(t) = \begin{pmatrix} G(t) \\ 0 \\ G(t) \end{pmatrix}$$

$$F(w) = \begin{pmatrix} \alpha xy \\ -\alpha xy - \delta yz \\ -\delta yz \end{pmatrix} \qquad w(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle .$$

donde (3.15) es una ecuación del tipo (3.1) haciendo

$$F(t, w, P) = F(w) + P(t); \quad P(t) \in C\left(I\!R, I\!R^3\right)$$

Existencia de Soluciones

Los autovalores de $-\mathcal{A}(\eta)$ son:

$$\lambda = -d, \quad \lambda = -\frac{(\alpha R + c + \gamma) \pm \sqrt{(\alpha R + c + \gamma)^2 - 4(c\gamma)}}{2}$$

y se observa que el espectro de $-\mathcal{A}(\eta)$ tiene parte real negativa, por lo tanto $P(\eta) = Id$,

$$\beta(\eta) = \min \left\{ d, \frac{(\alpha R + c + \gamma) - \sqrt{(\alpha R + c + \gamma)^2 - 4(c\gamma)}}{2} \right\}$$

y se cumple que

$$\left\| e^{-\mathcal{A}(\eta)t} \right\| \leq e^{-\beta(\eta)t}.$$

Tenemos además que:

$$F\left(t, w\left(t\right), P\right) = \left\langle \alpha xy + G\left(t\right), -\alpha xy - \delta yz, -\delta yz + G\left(t\right)\right\rangle$$

es localmente Lipschitz con constante $L_\rho = 4k\rho$ donde $k = \max\{|\alpha|, |\delta|\}$.

Luego, el Teorema 3.2.4 nos permite asegurar que si dados $G(t) \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\eta \in \mathbb{R}^5$, se cumple que

$$0 < \sup_{t \in \mathbb{R}} d\left(0, G\left(t\right)\right) \leq \frac{\left(\beta\left(\eta\right) - 8k\rho\right)\rho}{2}$$

entonces (3.14) tiene una única solución acotada.

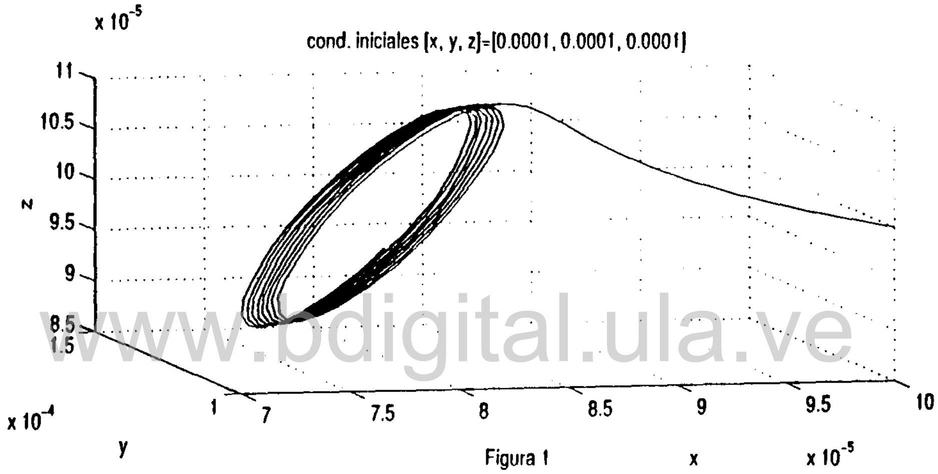
A continuación se presentan dos simulaciones correspondientes al modelo (3.14) para valores iniciales positivos; observamos que las órbitas se mantienen en el primer octante; lo cual nos permite "intuir" que la solución acotada que garantizamos es positiva.

Simulación

Para la Primera Simulación: Consideramos los siguientes valores.

$G(t) = (\mathrm{sen}\,t) \cdot 10^{-8}$ $\quad R = 5 \times 10^{14}$ $\quad c = 1,5 \times 10^{-3}$ $\quad d = 1,5 \times 10^{-5}$

$\alpha = 2,5 \times 10^{-5}$ $\quad \delta = 10^{-15}$ $\quad \gamma = 0,83$



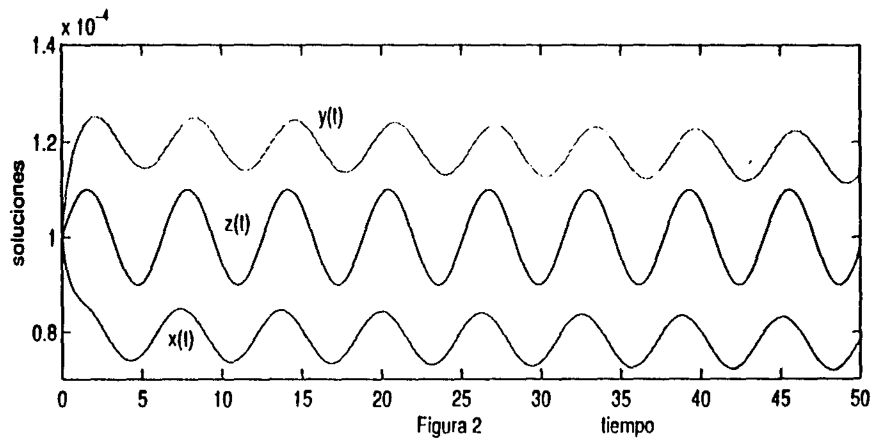
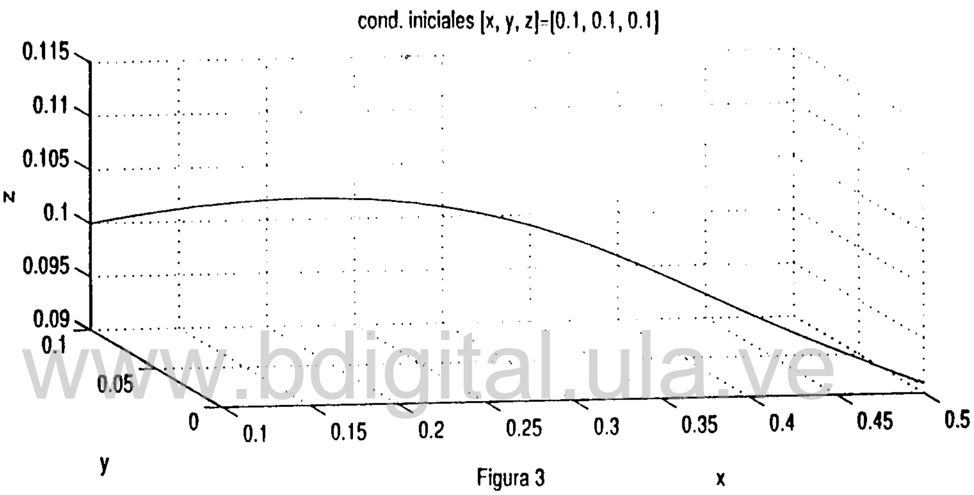


Figura 1. Órbita, Figura 2. Gráficas de $X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$

Para la Segunda Simulación: Consideremos

$$G(t) = 0,1 \qquad R = 3 \times 10^{13} \qquad c = 0,2 \qquad d = 0,8$$

$$\alpha = 0,4 \times 10^{-6} \qquad \delta = 0,6 \qquad \gamma = 0,9$$



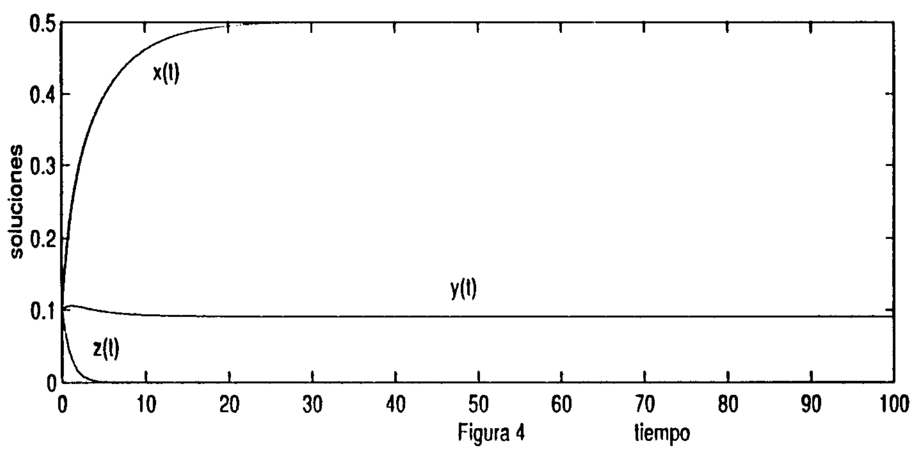


Figura 3. Órbita, Figura 4. Gráfica de $X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$

3.3.2 Ecuación de Segundo Orden con Difusión

En esta parte vamos a estudiar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con difusión:

$$u'' + cu' + dAu + kH(u) = P(t); \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.16}$$

donde c, d y k son constantes positivas; $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función localmente Lipschitz; $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada; A es una matriz $n \times n$ cuyos autovalores son positivos y semi-simples.

Para realizar este estudio, escribiremos la ecuación (3.16) como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$w' + \mathcal{A}(\eta) w + k\mathcal{H}(w) = \mathcal{P}(t) \tag{3.17}$$

efectuando los siguientes cambios

$$u' = v, \qquad w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ H(u) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}(\eta) = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n\times n} \\ dA_{n\times n} & CI_{n\times n} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{P}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ P(t) \end{pmatrix}_{2n\times 1} \qquad \eta = (c, d)$$

La ecuación (3.17) corresponde a una ecuación del tipo (3.1) haciendo

$$F(t, w, P) = \mathcal{P}(t) - k\mathcal{H}(w).$$

Probemos a continuación que las hipótesis de la Sección 3.1 se satisfacen:

1) $\eta \in \mathbb{R}^2, P \in C_b\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n}\right)$.

2) $F(t,w,P)$ es una función continua debido a la continuidad de las funciones $\mathcal{H}$ y $\mathcal{P}$, más aún, $F(t,o,P)$ es acotada ya que P es acotada.

3) $\mathcal{A}$ es una matriz $2n \times 2n$ continua en η.

4) Con el fin de verificar que se cumple la hipótesis (e), enunciaremos los siguientes resultados cuyas pruebas se encuentran en [9].

3.3.2.1 Teorema: *Supongamos que* $c \neq 2\sqrt{d\lambda_j}$, $j = 1, 2, ..., \rho$; λ_j *los autovalores de la matriz* $\mathcal{A}(\eta)$. *Entonces la matriz exponencial* $e^{-\mathcal{A}(\eta)t}$ *de la matriz* $\mathcal{A}(\eta)$ *de (3.17) puede ser escrita como:*

$$\begin{aligned} e^{-\mathcal{A}(\eta)t}w &= \sum_{j=1}^{\rho}\left\{e^{\rho_1(j)t}Q_1(j)\,w + e^{\rho_2(j)t}Q_2(j)\,w\right\}, \\ w &\in W = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde

$$\rho(j) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4d\lambda_j}}{2}, \quad j = 1, 2, ..., \rho, \quad \lambda_j \in \sigma(A).$$

y

$$\{Q_i(j) : i = 1, 2\}_{j=1}^{\rho}$$

es un sistema ortogonal de proyectores en W.

3.3.2.2 Corolario: *El espectro* $\sigma(-\mathcal{A}(\eta))$ *de la matriz* $-\mathcal{A}(\eta)$ *está dado por:*

$$\sigma(-\mathcal{A}(\eta)) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4d\lambda_j}}{2}, \quad j = 1, 2, ..., \rho.$$

3.3.2.3 Corolario: *Bajo las hipótesis del Teorema 3.3.2.1 tenemos que*

$$\left\| e^{-\mathcal{A}(\eta)t} \right\| \leq e^{-\beta(\eta)t}, \quad t \geq 0$$

donde

$$-\beta(\eta) = \max\left\{ \operatorname{Re}(\rho_j) = \operatorname{Re}\left(\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4d\lambda_j}}{2} \right), \quad j = 1, 2, ..., \rho, \quad i = 1, 2 \right\}$$

De los resultados anteriores concluimos entonces que se cumple (e) para $P(\eta) = Id$.

A continuación enunciaremos dos teoremas que facilitan el estudio de ecuaciones del tipo (3.16).

3.3.2.4 Teorema: *Supongamos que $\mathcal{H}(w)$ es localmente Lipschitz con constante L_ρ en B_ρ. Entonces existen constantes c y d tales que (3.17) posee una solución acotada asintóticamente estable en $I\!R$. Más aún, $\|w(t)\| \leq \rho$, $t \in I\!R$.*

Demostración: Del Corolario 3.3.2.3 tenemos que

$$\beta(\eta) = \min\left\{ \operatorname{Re}\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4d\lambda_j}}{2} \right) / \lambda_j \in \sigma(A) \right\};$$

por lo tanto, siempre es posible encontrar $\eta = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ tal que $(\beta(\eta) - 2L_\rho) > 0$. Así, dado $P \in C_b\left(I\!R, I\!R^{2n}\right)$ existen $\eta \in I\!R^2$ y $\rho > 0$ tales que

$$\sup_{t \in I\!R} \|P(t)\| \leq \frac{\beta(\eta) - 2L_\rho}{2} \rho.$$

Por lo tanto, el resultado se sigue del Teorema 3.2.4 y del Corolario 3.2.8.

■

3.3.2.5 Teorema: Supongamos que $\mathcal{H}(w)$ es globalmente Lipschitz. Entonces existen constantes c y d tales que (3.17) posee una única solución acotada asintóticamente estable.

Demostración: Dado que $\beta(\eta)$ es como en la demostración anterior; existe $\eta \in I\!R^2$ tal que $(\beta(\eta) - 2L) > 0$, donde L es la constante de Lipschitz; luego para $\rho > 0$ suficientemente grande se tiene que

$$\sup_{t \in I\!R} \|P(t)\| \leq (\beta(\eta) - 2L)\,\rho$$

y el resultado se sigue del Teorema 3.2.5 y del Corolario 3.2.8. ■

Como aplicación de los teoremas anteriores veamos dos ejemplos cuyo estudio se hace a través de la ecuación (3.16).

3.3.2.6 Ecuación de Sine-Gordon: La ecuación de Sine-Gordon con condición de Dirichlet, estudiada en [9] está dada por:

$$\begin{cases} u_{tt} + cu_t - du_{xx} + k\text{sen}u = P(t,x), \quad 0 < x < L, \quad t \in I\!R \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

donde c, d, k son constantes positivas y $P : I\!R \times [0,L] \to I\!R$ es una función continua y acotada.

Una discretización espacial de (3.18) es un sistema de $N+1$ ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} u_i'' + cu_i' + d\dfrac{[2u_i(t) - u_{i+1} - u_{i-1}]}{h^2} + k\text{sen}u_i = P_i(t) \\ \\ u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

donde $u_i = u(x_i, t)$, $P_i(t) = P(t, x_i)$, $x_i = \dfrac{iL}{N+1}$.

Consideremos ahora $\overline{u} = \langle u_1, u_2, \ldots, u_N \rangle$, entonces (3.17) puede escribirse como (3.16). Es decir,

$$u'' + cu' + dAu + kH(u) = P(t)$$

donde

$$A = h^{-2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(u) = \begin{pmatrix} \text{sen}u_1 \\ \text{sen}u_2 \\ \vdots \\ \text{sen}u_N \end{pmatrix}$$

Dado que $H(u)$ es globalmente Lipschitz, por el Teorema 3.3.2.5 podemos concluir que para cada discretización de (3.19) existe una única solución acotada asintóticamente estable.

3.3.2.7 Modelo del Puente en Suspensión Propuesto por Lazer y McKenna: La ecuación que describe este modelo, el cual ha sido estudiado en [7] y [9], es la siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} + cu_t + du_{xxxx} + ku^+ = P(t,x), \quad 0 < x < L, \quad t \in I\!R \\ u(t,0) = u(t,L) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,L) = 0, \quad t \in I\!R \end{cases} \tag{3.20}$$

donde c, d y k son constantes positivas, $P : I\!R \times [0,L] \to I\!R$ es continua y acotada.

Una discretización espacial para (3.20) será un sistema de $N+1$ ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} u_i'' + cu_i' + d\dfrac{[u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}]}{h^4} + kH(u) = P_i(t), \quad i = 2, \ldots, N-1. \\ u_1'' + cu_1' + \dfrac{d}{h^4}[-4u_0 + 6u_1 - 4u_2 + u_3] + kH(u_1) = P_1(t). \\ u_N'' + cu_N' + \dfrac{d}{h^4}[u_{N-2} - 4u_{N-1} + 6u_N - 4u_{N+1}] + kH(u_N) = P_N(t). \\ u(t,0) = u(t,N+1) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,N+1) = 0, \end{cases} \tag{3.21}$$

donde $u_i = (x_i, t), \quad P_i(t) = P(x_i, t), \quad x_i = \dfrac{iL}{N+1}, \quad h = \dfrac{L}{N+1}.$

Haciendo $\overline{u} = \langle u_1, \ldots, u_N \rangle$ obtenemos, como en el caso anterior, que (3.21) puede ser escrita como (3.17). Es decir,

$$u'' + cu' + dAu + kH(u) = P(t), \quad u \in I\!R^n, \quad t \in I\!R$$

donde

$$H(u) = \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \\ \vdots \\ u_N^+ \end{pmatrix} \quad P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_N(t) \end{pmatrix}$$

$$A = dh^{-4} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Dado que $H(u)$ es globalmente Lipschitz, por el Teorema 3.3.2.5, existe para cada discretización de (3.20) una única solución acotada asintóticamente estable.

Capítulo 4
Existencia y Estabilidad de Soluciones Acotadas de la Ecuación Abstracta

$$w' + \mathcal{A}(\eta)\, w = F(t, w, P), \quad t \in I\!R, \quad w \in W \tag{4.1}$$

En este capítulo, extenderemos los resultados del capítulo anterior, al caso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en espacios de Banach de dimensión infinita. Específicamente, demostraremos que bajo ciertas condiciones, la ecuación abstracta (4.1) posee siempre una solución moderada acotada; también estudiaremos la suavidad de dicha solución y presentaremos algunos casos en que esta solución es clásica. Donde $\eta \in M_1$, $P \in M_2$, W es un espacio de Banach; M_1 y M_2 son como antes, espacios métricos, $\mathcal{A}(\eta)$ un operador no acotado en W, el cual genera para $\eta \in M_1$ un grupo fuertemente continuo, y $F : I\!R \times W \times M_2 \to W$ una función continua.

4.1 Hipótesis

1) F es globalmente Lipschitz.

2) Existen constantes $\beta(\eta)$ y $\alpha(\eta)$ tales que el grupo $\{T_\eta(t)\}_{t \geq 0}$ generado por $-\mathcal{A}(\eta)$ cumple:

   2.1) $\|T_\eta(t)\| \leq e^{-\beta(\eta)t}, t \geq 0.$

   2.2) $\|T_\eta(t)\| \leq e^{-\alpha(\eta)t}, t < 0.$

3) Para $P \in M_2$, la aplicación $t \to F(t,0,P)$ es acotada en $\mathbb{R}$.

4.2 Existencia de una Solución Moderada Acotada

En esta sección probaremos la existencia y estabilidad de una única solución moderada acotada de (4.1).

4.2.1. Definición: (Solución Moderada). Por una solución moderada de la ecuación (4.1) con condición inicial $w(t_0) = w_0$, $w_0 \in W$, entendemos una función dada por:

$$w(t) = T_\eta(t - t_0) w_0 + \int_{t_0}^{t} T_\eta(t-s) F(s, w(s), P)\, ds. \tag{4.2}$$

Consideremos el espacio $W_b = C_b(\mathbb{R}, W)$ el espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas definidas en $\mathbb{R}$, tomando valores en W, con la norma:

$$\|W\|_b = \sup\{\|w(t)\|_W, \quad t \in \mathbb{R}\}, \quad w \in W_b.$$

Una bola de radio $\rho > 0$ y centro cero en este espacio está dada por:

$$B_\rho^b = \{w \in W_b / \|w_b\| < \rho\}$$

4.2.2. Lema: *Sea $w \in W_b$. Entonces w es una solución moderada de (4.1) si y solo si w está dada por:*

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} T_\eta(t-s) F(s, w(s), P)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Demostración:

Supongamos primero que $w(t)$ es una solución moderada de (4.1). Entonces:

$$w(t) = T_\eta(t-t_0)\,w(t_0) + \int_{t_0}^{t} T_\eta(t-s)\,F(s,w(s),P)\,ds. \tag{4.4}$$

De la Hipótesis 2, tenemos que:

$$\|T_\eta(t-t_0)\,w(t_0)\| \leq e^{-\beta(t-t_0)}\,\|w(t_0)\|,$$

entonces

$$\lim_{t_0\to-\infty} \|T_\eta(t-t_0)\,w(t_0)\| = 0.$$

Tomando límite cuando $t_0 \to -\infty$ en (4.4) tenemos:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} T_\eta(t-s)\,F(s,w(s),P)\,ds.$$

Recíprocamente, supongamos que $w(t)$ es solución de la ecuación integral (4.3). Así,

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^{t} T_\eta(t-s)\,F(s,w(s),P)\,ds = \int_{-\infty}^{0} T_\eta(t-s)\,F(s,w(s),P)\,ds + \\ &\quad + \int_{0}^{t} T_\eta(t-s)\,F(s,w(s),P)\,ds \end{aligned}$$

Dado que

$$\left\|\int_{-\infty}^{0} T_\eta (t-s) F(s, w(s), P)\, ds\right\| \leq \int_{-\infty}^{0} e^{-\beta(t-s)} \|F(s, w(s), P)\|\, ds \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} e^{-\beta(t-s)} [\|F(s, w(s), P) - F(s, 0, P)\| + \|F(s, 0, P)\|]\, ds \leq$$

$$\leq [L \|w\|_b + L_p] \int_{-\infty}^{0} e^{-\beta(t-s)} ds \leq \frac{(L \|w\|_b + L_p)\, e^{-\beta t}}{\beta} \leq \frac{L \|w\|_b + L_p}{\beta}$$

Se tiene entonces, que la integral $\int_{-\infty}^{0} T_\eta (t-s) F(s, w(s), P)\, ds$ converge. Además:

$$w_0 = \int_{-\infty}^{0} T_\eta (-s) F(s, w(s), P)\, ds.$$

Por lo tanto:

$$w(t) = T_\eta (t) w_0 + \int_0^t T_\eta (t-s) F(s, w(s), P)\, ds.$$

■

4.2.3. Teorema: *Supongamos que existe $\eta \in M_1$ tal que $0 < (\beta_\eta - L)$ donde L es la constante de Lipschitz de F. Entonces, la ecuación (4.1) tiene una y solo una solución moderada acotada w_b, la cual pertenece a la bola B_ρ^b en W_b. Además esta solución acotada es la única solución acotada de la ecuación (4.2) y es exponencialmente estable.*

Demostración: Sea $\rho > 0$ lo suficientemente grande tal que:

$$0 < L_p = \sup_{s \in \mathbb{R}} \|F(s, 0, P)\| < (\beta_\eta - L)\, \rho. \tag{4.5}$$

Consideremos para este ρ, la bola B_ρ^b y el operador:

$$Tw(t) = \int_{-\infty}^{t} T_\eta (t-s) F(s, w(s), P)\, ds$$

y probemos que $T : B_\rho^b \to W_b$ tiene un único punto fijo. Para ello veamos primero que $T(w) \in B_\rho^b$ para todo $w(t) \in B_\rho^b$. En efecto, si $w \in B_\rho^b$, entonces

$$\|Tw(t)\| \leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta_\eta (t-s)} \|F(s, w(s), P)\| \, ds \leq \frac{L\|w\|_b + L_p}{\beta_\eta} \leq \frac{L_\rho + L_p}{\beta}$$

Dado que la condición (4.5) implica que $\dfrac{L_\rho + L_p}{\beta} < \rho$, tenemos que $T(w) \in B_\rho^b \quad \forall w \in B_\rho^b$.

Probemos ahora que $T(w)$ es una contracción. Para ello consideremos $w_1, w_2 \in B_\rho^b$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|Tw_1(t) - Tw_2(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta_\eta(t-s)} \|F(s, w_1(s), P) - F(s, w_2(s), P)\| \, ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta_\eta(t-s)} L \|w_1(s) - w_2(s)\|_W \, ds \\ &\leq \frac{L\|w_1 - w_2\|_b}{\beta_\eta}. \end{aligned}$$

Nuevamente la condición (4.5) implica que $\dfrac{L}{\beta_\eta} < 1$ lo cual prueba que T es una contracción, por lo tanto T tiene un único punto fijo w_b en B_ρ^b:

$$w_b(t) = T(w_b)(t) = \int_{-\infty}^{t} T_\eta(t-s) F(s, w_b(s), P) \, ds.$$

Del Lema 4.2.2 w_b es una solución moderada de la ecuación (4.1). Dado que esta solución existe para todo $\tilde{\rho} \geq \rho > 0$, entonces $w_b(t)$ es la única solución acotada de la ecuación (4.2).

Para probar que $w_b(t)$ es globalmente exponencial estable, consideremos cualquier otra solución w de (4.2) y hagamos la siguiente estimación:

$$\|w(t) - w_b(t)\| \leq \|T_\eta(t)(w(o) - w_b(o))\| +$$

$$+ \left\| \int_0^t T_\eta(t-s)\left[F(s, w(s), P) - F(s, w_b(s), P)\right] ds \right\|$$

$$\leq e^{-\beta_\eta t} \|w(o) - w_b(o)\| + \int_0^t e^{-\beta_\eta (t-s)} \|F(s, w(s), P) -$$

$$-F(s, w_b(s), P) \, ds\|$$

Entonces:

$$e^{\beta t} \|w(t) - w_b(t)\| \leq \|w(o) - w_b(o)\| + \int_0^t e^{\beta s} L \|w(s) - w_b(s)\|_W \, ds.$$

Por la desigualdad de Gronwall's tenemos:

$$e^{\beta t} \|w(t) - w_b(t)\| \leq \|w(o) - w_b(o)\| e^{Lt}.$$

Entonces:

$$\|w(t) - w_b(t)\| \leq \|w(o) - w_b(o)\| e^{(L-\beta)t}.$$

De (4.5) $L - \beta < 0$. Entonces $\lim\limits_{t \to +\infty} \|w(t) - w_b(t)\| = 0$, lo cual prueba que w_b es exponencialmente estable. ■

A continuación enunciaremos dos resultados cuyas pruebas son análogas a las dadas en el Corolario 3.2.6 y el Lema 3.2.7 de la sección anterior.

4.2.4. Corolario: *La solución moderada acotada de (4.1) dada por el Teorema 4.2.3 depende continuamente de* $P \in M_2$.

4.2.5. Lema: *Sea $P \in M_2$ tal que la aplicación $t \to F(t, w(t), P)$ es casi periódica para todo $w(t)$ casi periódico. Entonces la única solución moderada acotada de la ecuación (4.1) dada por el Teorema 4.2.3 es también casi periódica.*

4.3 Suavidad de la Solución Moderada Acotada

Sabemos que las soluciones de la ecuación (4.2) no son necesariamente diferenciables, es por ello que no siempre podemos garantizar la existencia de una solución acotada "clásica" de la ecuación (4.1) (ver Capítulo 2).

A continuación, demostraremos un lema, que nos permite garantizar que la única solución moderada acotada w_b de (4.1), dada por el Teorema 4.2.3 satisface la ecuación (4.1) casi siempre.

4.3.1. Lema: *Sea W un espacio de Hilbert; supongamos que se satisfacen las condiciones del Teorema 4.2.3 y que $0 \in \rho(\mathcal{A}(\eta))$. Supongamos además que $f(t) = F(t, w_b(t), P)$ es globalmente Lipschitz. Entonces, w_b satisface la ecuación (4.1) casi siempre.*

Demostración: Por comodidad, usaremos la siguiente notación:

$$T(t) = T_\eta(t), \qquad \beta = \beta(\eta), \qquad \mathcal{A}(\eta) = A \qquad \text{y} \qquad W = W_b.$$

Del Teorema 4.2.3, sabemos que

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)\, f(s, w(s), P)\, ds \\ &= \int_{0}^{+\infty} T(s)\, f(t-s)\, ds. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Consideremos el cociente

$$w_h(t) = \frac{w(t+h) - w(t)}{h}. \tag{4.7}$$

Dado que $0 \in \rho(A)$, entonces $A^{-2} = A^{-1} \circ A^{-1}$ existe y es acotado. Luego

$$A^{-2} w_h(t) = A^{-2} \left[\frac{\int_0^{+\infty} T(s)\, f(t+h-s)\, ds}{h} \right] - \frac{A^{-2} w(t)}{h}$$

$$= \frac{1}{h} \left[A^{-2} \int_0^h T(s)\, f(t+h-s)\, ds + A^{-2} \int_h^{+\infty} T(s)\, f(t+h-s)\, ds - A^{-2} w(t) \right]$$

$$= \frac{A^{-2}}{h} \int_h^{+\infty} T(s)\, f(t+h-s)\, ds - \frac{A^{-2}}{h} w(t) + \frac{1}{h} A^{-2} \int_0^h T(s)\, f(t)\, ds +$$

$$+ \frac{A^{-2}}{h} \int_0^h T(s) \left[f(t+h-s) - f(t) \right] ds$$

$$= \frac{A^{-2}}{h} \int_0^{+\infty} T(h+s)\, f(t-s)\, ds - \frac{A^{-2} w(t)}{h} + \frac{1}{h} A^{-2} \int_0^h T(s)\, f(t)\, ds +$$

$$+ \frac{A^{-2}}{h} \int_0^h T(s) \left[f(t+h-s) - f(t) \right] ds$$

Así

$$A^{-2}w_h(t) = \frac{A^{-2}}{h}T(h)\int_0^{+\infty} T(s)\,f(t-s)\,ds - \frac{A^{-2}w(t)}{h} + \frac{1}{h}A^{-2}\int_0^h T(s)\,f(t)\,ds +$$

$$+\frac{A^{-2}}{h}\int_0^h T(s)\left[f(t+h-s) - f(t)\right]ds. \tag{4.8}$$

De las propiedades de grupo y del hecho que $0 \in \rho(A)$, se tiene que

$$A^{-2}T(h)\int_0^{+\infty} T(s)\,f(t-s)\,ds = T(h)\,A^{-2}\int_0^{+\infty} T(s)\,f(t-s)\,ds.$$

Por lo tanto, de (4.8) se tiene:

$$\begin{aligned} A^{-2}w_h(t) &= \frac{1}{h}T(h)\,A^{-2}\int_0^{+\infty} T(s)\,f(t-s)\,ds - \frac{1}{h}A^{-2}w(t) + \\ &\quad + \frac{1}{h}A^{-2}\int_0^h T(s)\,f(t)\,ds + \frac{1}{h}A^{-2}\int_0^h T(s)\left[f(t+h-s) - f(t)\right]ds. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A^{-2}w_h(t) &= \frac{1}{h}\left[(T(h) - I)\,A^{-2}w(t)\right] + \frac{1}{h}A^{-2}\int_0^h T(s)\,f(t)\,ds + \\ &\quad + \frac{1}{h}A^{-2}\int_0^h T(s)\left[f(t+h-s) - f(t)\right]ds. \end{aligned}$$

Por ser f globalmente Lipschitz y A^{-2} acotado, tenemos

$$\left\|\frac{1}{h}A^{-2}\int_0^h T(s)\left[f(t+h-s) - f(t)\right]ds\right\| \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0.$$

Así

$$\lim_{h\to 0} A^{-2}w_h(t) = -AA^{-2}w(t) + A^{-2}f(t). \tag{4.9}$$

Es fácil probar que, si f es Lipschitz, entonces $w(t)$ también es Lipschitz y como W es Hilbert, se sigue que es derivable casi siempre (ver [5]), es decir, $\lim_{h\to 0} w_h(t)$ existe casi siempre.

De la ecuación (4.9) y del hecho de ser A^{-2} acotado, tenemos que en los puntos donde el límite existe se tiene:

$$
\begin{aligned}
& A^{-2}\left(\lim_{h\to 0} w_h(t)\right) = -AA^{-2}w(t) + A^{-2}f(t) \\
\Rightarrow\quad & A^{-2}\,\dot{w}(t) = -AA^{-1}A^{-1}w(t) + A^{-2}f(t) \qquad \text{c.s.} \\
\Rightarrow\quad & A^{-1}A^{-1}\,\dot{w}(t) = A^{-1}w(t) + A^{-2}f(t) \qquad \text{c.s.} \\
\Rightarrow\quad & A^{-1}\,\dot{w}(t) = -w(t) + A^{-1}f(t) \qquad \text{c.s.} \\
\Rightarrow\quad & \dot{w}(t) = -Aw(t) + f(t) \qquad \text{c.s.}
\end{aligned}
$$

■

4.4 Ejemplos

En la sección anterior probamos la existencia de una solución clásica acotada "casi siempre" de la ecuación (4.1). A continuación presentaremos algunos ejemplos en los que si es posible garantizar la existencia de una solución clásica acotada para todo $t \in \mathbb{R}$; estos modelos han sido estudiados por H. Leiva en [9],[10].

4.4.1 Ejemplo: Ecuación de Sine-Gordon con condiciones de borde tipo Dirichlet:

$$
\begin{cases}
u_{tt} + cu_t - du_{xx} + k\operatorname{sen} u = p(t,x), \quad 0 < x < L, \quad t \in \mathbb{R} \\
u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad t \in \mathbb{R}
\end{cases}
\tag{4.10}
$$

donde c, d y k son constantes positivas; $p : \mathbb{R} \times [0,L] \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua y acotada. En este caso tomemos $H = L^2(0,L)$; $A\phi = -\phi_{xx}$;

$D(A) = H^2 \cap H_0^1$; $G(u) = \text{sen} u$ y $P(t) = p(t, \cdot)$. Así 4.10 puede ser escrita como:

$$u'' + cu' - dAu + kG(u) = P(t). \tag{4.11}$$

Haciendo ahora el cambio

$$u' = v, \qquad w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ -dA & cId \end{pmatrix},$$

$$\eta = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \qquad F(t, w(t), p) = P(t) - kG(w), \qquad w \in W = H \times H$$

tenemos que (4.11) corresponde a una ecuación de tipo (4.1) y por lo estudiado en [10] se garantiza la existencia de una solución clásica acotada de (4.10).

4.4.2 Ejemplo: Modelo del puente en suspensión propuesto por Lazer y McKenna (ver [6], [7], [10]):

$$\begin{cases} u_{tt} + cu_t + du_{xxxx} + ku^+ = P(t, x), \quad 0 < x < L, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(t, 0) = u(t, L) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, L) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.12}$$

donde c, d y k son constantes positivas; $P : \mathbb{R} \times [0, L] \to \mathbb{R}$ es una aplicación contína y acotada. En este caso tomemos $H = L^2(0, L)$ y $A\phi = \phi_{xxxx}$:

$$D(A) = \{\phi \in H \setminus \phi_{xxxx} \in H; \phi(0) = \phi(L) = \phi_{xx}(0) = \phi_{xx}(L) = 0\}$$

$$P(t) = p(t, x), \quad G(u) = u^+$$

$$F(t, w(t), P) = P(t) - G(u)$$

Entonces (4.12) puede escribirse como:

$$u'' + cu' - dAu + kG(u) = P(t)\,. \tag{4.13}$$

Realizando los mismos cambios a los efectuados en el ejemplo anterior tenemos que (4.13) se puede escribir como (4.1); análogamente en [10] se prueba la existencia y estabilidad de una solución clásica acotada de (4.12).

Bibliografía

[1] J.M. Alonso and R. Ortega. *Boundedness and global asymptotic stability of forced oscillator nonlinear.* Anal. **25** (1995) 297-309.

[2] J.M. Alonso and R. Ortega. *Global asymptotic stability of a forced newtonian system with dissipation.* J. Math. Anal. and Applications. **19** (1995) 965-986.

[3] J.M. Alonso, J. Mauchin and R. Ortega. *Bounded solutions of second order semilinear evolution equation and applications to telegraph equations.* Rep. No. 284 - Juillet (1998). Séminaire Mathématique (Nouvelle série).

[4] R. Curtain; A. Pritchard. *Infinite dimensional linear systems theory.* Vol. 8. Springer-Verlag, New York (1978).

[5] Diestel and J.J. Uhl, Jr. *Vector measures.* Mathematical Survey, No. 15 (1977).

[6] L. García and H. Leiva. *Center manifold and exponentially bounded solutions of forced newtonian system with dissipation.* (por publicarse).

[7] J. Glover, A.C. Lazer and P.J. McKenna. *Existence and stability of large scale nonlinear oscillations in suspension bridges.* J. Appl. Math., Phys. **40** (1998) 172-200.

[8] G.E. Ladas, Lakshmikanthan. *Differential equations in abstract spaces.* Academic Press (1972).

[9] H. Leiva. *Existence of bounded solutions of a second order system with dissipation.* J.M.A.A. (1999).

[10] H. Leiva. *Bounded solutions of a second order abstract equations and applications.* (por publicarse).

[11] A. Serfaty y N.V. Joshi. *Detection of attractors and chaos in intrinsic photoconductors.* Physical Review. Vol. 47, No. 7 (1993).

[12] A. Tineo. *Global stability for a model of a photoconductivity process.* (por publicarse).

[13] A. Tineo. *Three dimensional periodic system with trivial dynamics, II.* J.M.A.A. (1997).