Facultad de Ciencias

Departamento de Física

Centro de Física Fundamental

Solitones en un volumen finito como estados coherentes

Autor:
Br. Salim Dávila

Tutor:
Dr. Nelson Pantoja

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al grado académico de Licenciado en Física

Julio 2022

Resumen

La imagen como estado coherente para el solitón topológico de la teoría φ^4 en un volumen infinito, trabajada explícitamente por G. Dvali, C. Gomez, L. Gruending y T. Rug en la referencia [1], es revisada y extendida al caso de volumen finito. A diferencia de su versión en volumen infinito, en la cual el número medio de ocupación diverge en el infrarrojo (garantizando así que su carga topológica no recibe correcciones cuánticas), encontramos que en el caso de volumen finito dicho número de ocupación es una cantidad finita. Por otro lado, mostramos que el estado del solitón cuántico en volumen finito puede ser escrito como un producto tensorial de estados coherentes que llevan la información de la carga topológica y de la energía como grados de libertad independientes, al igual que en el caso de volumen infinito. Todos los resultados obtenidos reproducen los de la referencia [1] en el límite de volumen infinito. Por último, comentamos algunos de los problemas técnicos que aparecen al intentar obtener la imagen como estado coherente del solitón topológico sine-Gordon en volumen finito, cuya versión en el caso de volumen infinito fue obtenida y discutida en la referencia [5].

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La búsqueda de soluciones a las ecuaciones de campo clásicas, se basa en la creencia que un enfoque semiclásico puede arrojar algo de luz sobre el mundo cuántico subyacente y que las configuraciones clásicas de campos, que hacen estacionaria la acción, juegan un papel importante. Además, si una teoría clásica es una buena descripción de la realidad a cierta escala, entonces es deseable que las teorías posteriores coincidan con esta en ciertos límites. Por esto, es de interés que los resultados cuánticos puedan tener alguna conexión con los clásicos, lo que generalmente se hace a través de los valores medios, ya que son los adecuados para hacer comparaciones entre el mundo cuántico y el clásico. Una forma de lograr lo anterior, es hacer coincidir, si es posible, los valores medios de la teoría cuántica con los resultados conocidos clásicamente, haciendo necesario tener a nuestro alcance estos últimos.

Entre todas las posibles configuraciones, son especialmente interesantes las no disipativas con energía finita, es decir, aquellas que su energía permanece localizada en una región del espacio finita y no es irradiada fuera de esta; dichos objetos son candidatos para describir sistemas extendidos a nivel cuántico como estados coherentes de los campos fundamentales, siempre y cuando sean estables al decaimiento. La estabilidad puede derivarse de alguna ley de conservación, tal vez de naturaleza topológica. Como es habitual en la literatura actual de física, estos sistemas se denominan solitones, debido a que surgen de una expansión alrededor de un punto estacionario no trivial de la acción, estos y sus excitaciones cuánticas exhiben características que no podrían haber sido sospechadas a partir de la expansión perturbativa ordinaria [16].

Los solitones topológicos han sido estudiados desde los años setenta en la física de altas energías (ver referencias [2, 3]). El interés sobre estos, se ha renovado continuamente en diferentes ramas de la física ya que aparecen, entre otros defectos topológicos, en modelos de materia condensada [20, 21, 22] y en escenarios de mundos brana [23, 24]. No sólo en física los solitones encuentran diversas aplicaciones, también en el área de las matemáticas son de interés, ya que por ejemplo, son soluciones a ecuaciones diferenciales de onda no lineales con características muy peculiares, que se asemejan a las propiedades obtenidas de soluciones a ecuaciones lineales.

Como se ha mencionado anteriormente, un estado de solitón cuántico puede describirse como un estado coherente en el que el valor esperado del operador de campo correspondiente, coincide con el campo clásico asociado al solitón. En la referencia [1], el estado del solitón topológico φ^4, en (1+1) dimensiones, con una dimensión espacial infinita, se construyó como un estado coherente de un número infinito de constituyentes y se discutió el origen cuántico de su carga topológica. Siguiendo la misma referencia [1], el estado coherente del solitón topológico del modelo sine-Gordon corrido fue construido, en (1+1) dimensiones, e igualmente en volumen infinito, en la referencia [5].

En ambos trabajos [1, 5], la carga topológica está determinada por los constituyentes de longitud de onda infinita y la divergencia en el número de ocupación medio total garantiza que esta no recibe correcciones cuánticas. Se debe tener en cuenta que la topología se trata de las propiedades globales de la configuración, lo que significa que surge del comportamiento de largo alcance, el cual se captura en los casos bajo consideración por los constituyentes con momentos extremadamente pequeños. Además de lo anterior es bastante sorprendente que los estados coherentes del solitón φ^4 y del sine-Gordon corrido se puedan descomponer en un estado de producto tensorial, en el cual la información sobre la topología se separa de la información correspondiente a la energía.

En este trabajo nos ocuparemos de los estados coherentes teóricos de campos asociados a solitones topológicos en volumen finito. En particular, estudiaremos las teorías cuánticas de los solitones φ^4 y sine-Gordon corrido en (1+1) dimensiones, con la dimensión espacial compactada en un cilindro de circunferencia $2\pi R$ [6, 7]. Construiremos los estados coherentes correspondientes para estas dos teorías, y a partir de ellos encontraremos que muchas de las características (pero no todas) en el caso de volumen infinito se replican en volumen finito.

Se le dará especial atención al solitón φ^4, ya que encontraremos que la construcción del estado coherente para el solitón sine-Gordon corrido en volumen finito, plantea problemas técnicamente desafiantes que están mas allá del alcance del presente trabajo. Aquí, sólo se considerará el movimiento libre de estos objetos extendidos y, como era de esperar, en el límite $R \longrightarrow \infty$, recuperaremos los resultados obtenidos en las referencias [1, 5].

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 2, damos una breve descripción de la teoría clásica de solitones, en la cual mostramos la ecuación de donde surgen y las condiciones necesarias para que dichas soluciones tengan energía finita, localizada y estabilidad topológica. Luego, aplicamos los resultados obtenidos para encontrar los solitones, bien conocidos, de las teorías clásicas φ^4 y sine-Gordon. Por último, terminamos este capítulo con una discusión del concepto de carga topológica, en la que definimos esta cantidad y mencionamos algunas de sus propiedades más importantes.

En el tercer capítulo, se estudia como cuantizar campos clásicos vía estados coherentes para el caso de volumen infinito. Para esto se mostrará como realizar la expansión de Fourier de dichos campos, y mediante el formalismo de operadores de creación-aniquilación, se encontrará el operador de campo correspondiente a la teoría. Con esto, podremos construir el estado coherente en el que el valor medio del operador de campo corresponde al solitón clásico deseado.

Inmediatamente, aplicaremos el formalismo de la parte anterior para encontrar los estados coherentes de los solitones φ^4 y sine-Gordon, con lo que demostraremos que en ambos casos el número de ocupación medio total diverge, asegurando, como hemos dicho, la conservación de la carga topológica en la teoría cuántica de dichos solitones en volumen infinito. Seguidamente veremos que los solitones clásicos se pueden escribir como una convolución de una parte asociada a la topología y otra a la energía, lo que implica a nivel cuántico una imagen en estados coherentes que se descomponen en un producto tensorial de un estado asociado a la topología y otro asociado a la energía.

Para el capítulo 4, en la primera sección, se hará un tratamiento análogo al del segundo capítulo, mostrando las versiones en volumen finito de los solitones clásicos. En especifico, veremos las soluciones en un volumen $2\pi R$ para las teorías clásicas φ^4 y sine-Gordon, donde se demostrará que para $R \longrightarrow \infty$ recuperamos los campos obtenidos en el capítulo 2.

En la segunda sección, se mostrará como cuantizar los campos clásicos en el caso de volumen finito, haciendo un tratamiento totalmente análogo al capítulo 3, es decir, usaremos el formalismo de operadores de creación-aniquilación para construir estados coherentes en los que el valor esperado del operador de campo correspondiente a la teoría en volumen finito, coincida con el solitón clásico deseado. Luego, aplicaremos lo anterior en la construcción de la imagen como estados coherentes de los solitones φ^4 y sine-Gordon, dando especial importancia al primero de estos dos, debido a las dificultades que se introducen para el otro. De esta manera estudiaremos la convergencia del número de ocupación medio total de la teoría cuántica φ^4 en volumen finito, encontrando en esto la mayor diferencia con el caso de volumen infinito. También, mostraremos como realizar la descomposición en una convolución de los solitones clásicos, para poder encontrar la imagen en estados coherentes que separa la información topológica de la energética.

En el quinto y último capítulo, se dan las conclusiones obtenidas del presente trabajo, así como algunas posibles extensiones del mismo.

Capítulo 2

Solitones clásicos en volumen infinito

Los solitones surgen clásicamente de ecuaciones de onda con términos no lineales. Estos no son simples soluciones a dichas ecuaciones ya que cumplen con tener energía finita y estar localizados. Debido a sus características son buenos candidatos para describir sistemas cuánticos extendidos, lo que no supone sorpresa, pues estos deberían ser entes localizados con energía finita. Por lo anteriormente mencionado, en este capítulo nos dedicaremos a revisar la teoría clásica de solitones en el caso de volumen infinito, para encontrar esas soluciones particulares que son requeridas generalmente en la formulación de una teoría cuántica de solitones. Además, cabe destacar que el desarrollo mostrado a continuación está fundamentado principalmente en las referencias [2], [3], [5], [11], [12], [13] y [17].

2.1. Teoría clásica de solitones

Antes de avanzar especifiquemos nuestra notación teniendo en cuenta que sólo trabajaremos con solitones en (1+1) dimensiones. Sea $\mathbb{M}_2$ el espacio-tiempo 2-dimensional de Minkowski, es decir, $(\mathbb{R}^2, \eta)$ con $\eta_{\mu\nu} = diag(-1,1)$ y $x^0 = t,\ x^1 = x$. Adicionalmente se ha fijado $c = 1$.

Estudiaremos la teoría que viene dada por la acción

$$\mathbf{S} = \int d^2x \left[-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi) \right], \tag{2.1.0.1}$$

donde φ es un campo escalar real y el potencial $V(\varphi)$ es una función real no negativa ($V(\varphi) \geq 0$) y suave de φ.

Fácilmente de la acción obtenemos el lagrangiano (o densidad lagrangiana)

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi). \tag{2.1.0.2}$$

Estamos interesados en las soluciones no triviales que hacen a la acción estacionaria. Mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos obtener estas, consiguiendo así la ecuación dinámica del campo φ

$$-\partial_t\partial_t\varphi + \partial_x\partial_x\varphi = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \tag{2.1.0.3}$$

y además este tiene asociada la densidad de energía

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 + V(\varphi), \tag{2.1.0.4}$$

la cual es siempre positiva o cero por ser la suma de términos cuadráticos y un potencial no negativo, lo que implica que las energías serán de igual forma mayores o iguales a cero.

Por los momentos, se está trabajando en volumen infinito. El funcional energía se obtiene integrando la densidad anterior en todo el espacio

$$E[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 + V(\varphi) \right], \tag{2.1.0.5}$$

de esta energía total se distinguen dos partes: la primera, asociada a la derivada temporal como energía cinética

$$K[\varphi] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \, (\partial_t \varphi)^2 \tag{2.1.0.6}$$

y la segunda, que incluye al potencial en conjunto con la derivada espacial como energía potencial

$$U[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 + V(\varphi) \right]. \tag{2.1.0.7}$$

Ahora nos concentraremos en encontrar soluciones a la ecuación de onda no lineal (2.1.0.3). Para esto nos limitaremos a aquellas que son estáticas, es decir, soluciones las cuales en algún sistema de referencia no dependen del tiempo. Cabe destacar que debido a la invarianza bajo Lorentz, dada una solución estática podemos obtener otra que se mueva a velocidad constante aplicando un boost de Lorentz. Sea $\boldsymbol{F}$ el espacio de los campos estáticos

$$\boldsymbol{F} = \{\varphi / \ \partial_t \varphi = 0\}, \tag{2.1.0.8}$$

donde la ecuación del campo (2.1.0.3) toma la forma

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \tag{2.1.0.9}$$

e integrándola una vez obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = V(\varphi) + C. \tag{2.1.0.10}$$

C aparece como una constante de integración, y para determinarla vemos que la energía en el caso estático,

$$E[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + V(\varphi) \right], \tag{2.1.0.11}$$

igualmente tiene que permanecer finita por lo que en volumen infinito C debe ser igual a cero.

No basta con lo anterior para mantener la energía finita. Además, debemos agregar algunas condiciones adicionales, tanto para esto como para conseguir soluciones localizadas. Sea $\boldsymbol{M_{vac}}$ el conjunto de mínima energía global o los estados de vacío clásicos. En una teoría invariante bajo Poincaré, los estados de vacío son invariantes bajo este. También, están caracterizados por tener la energía más baja posible, en este caso cero, lo que implica una densidad de energía nula. Esto significa que nuestras soluciones de vacío deben ser constantes y puntos mínimos del potencial [12]. Ya que $V(\varphi) \geq 0$, los estados de vacío son ceros de $V(\varphi)$,

$$\boldsymbol{M_{vac}} = V^{-1}(0) = \{\varphi / \ V(\varphi) = 0\} \tag{2.1.0.12}$$

y si φ pertenece a $\boldsymbol{M_{vac}}$, entonces $E[\varphi] = 0$.

Si $E[\varphi] < \infty$ y está localizada implica [2, 3, 11, 12]:

$$1. \frac{d\varphi}{dx} \longrightarrow 0 \ \ cuando \ \ x \longrightarrow \pm\infty, \tag{2.1.0.13}$$

$$2. \lim_{x\to-\infty} \varphi \ y \lim_{x\to+\infty} \varphi \ \ deben \ \ pertenecer \ \ a \ \ V^{-1}(0), \tag{2.1.0.14}$$

lo que nos da las condiciones de contorno para nuestros campos.

Dentro del espacio ***F*** está contenido el subesapacio ***FE*** de campos estáticos con energía finita

$$\boldsymbol{FE} = \left\{\varphi / \ \partial_t \varphi = 0 \ y \ E[\varphi] < \infty\right\} \tag{2.1.0.15}$$

y a su vez este contiene al subesapacio ***M*** de las soluciones clásicas, estáticas y con energía finita

$$\boldsymbol{M} = \left\{\varphi / \ \partial_t \varphi = 0, \ E[\varphi] < \infty \ y \ \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}\right\}. \tag{2.1.0.16}$$

La primera integral de la ecuación de campos estáticos (2.1.0.10), puede ser resuelta formalmente para un potencial dado

$$x - x_0 = \pm \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}, \tag{2.1.0.17}$$

con x_0 igual a una constante de integración. A pesar de esto, estamos interesados en potenciales que pueden escribirse de la forma [3]

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{dW(\varphi)}{d\varphi}\right)^2, \tag{2.1.0.18}$$

donde $W(\varphi)$ es conocido como el superpotencial y admite al menos un punto crítico. Derivando (2.1.0.18), obtenemos

$$\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = \frac{dW(\varphi)}{d\varphi}\frac{d^2W(\varphi)}{d\varphi^2}, \tag{2.1.0.19}$$

es claro que $V(\varphi)$ tiene puntos críticos en los mismos que $W(\varphi)$ $(dW(\varphi)/d\varphi = 0)$ y en los de su primera derivada $dW(\varphi)/d\varphi$ $(d^2W(\varphi)/d^2\varphi = 0)$.

Combinando la expresión (2.1.0.18) con (2.1.0.10), llegamos a la ecuación de Bogomol'nyi

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm\frac{dW(\varphi)}{d\varphi} \tag{2.1.0.20}$$

y al integrar (2.1.0.20) obtenemos

$$x - x_0 = \pm \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{\frac{dW(\varphi)}{d\varphi}}, \tag{2.1.0.21}$$

con x_0 jugando el mismo papel ya mencionado. Es importante notar que la ecuación de campo (2.1.0.9) se obtiene al derivar la de Bogomol'nyi respecto a x, por lo que las soluciones φ_s de (2.1.0.20) pertenecen a ***M***.

Hasta el momento conocemos una cota inferior de la energía, la cual es cero y es un mínimo global de esta, debido a que $E[\varphi] \geq 0$ gracias a la densidad positiva. Podemos encontrar una cota inferior mayor reescribiendo el funcional energía (2.1.0.11) como [17]

$$E[\varphi] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\varphi}{dx} \mp \sqrt{2V(\varphi)}\right)^2 \pm \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(+\infty)} d\varphi \sqrt{2V(\varphi)} \geq \pm \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(+\infty)} d\varphi \sqrt{2V(\varphi)}, \qquad (2.1.0.22)$$

estas dos posibilidades se pueden condensar en la siguiente expresión [3]

$$E[\varphi] \geq \left| \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(+\infty)} d\varphi \sqrt{2V(\varphi)} \right|. \qquad (2.1.0.23)$$

Usando la definición del superpotencial (2.1.0.18), vemos que [3]

$$E[\varphi] \geq \left| W(\varphi(+\infty)) - W(\varphi(-\infty)) \right|, \qquad (2.1.0.24)$$

esta y las desigualdades anteriores nos dan un nueva cota inferior superior a la ya conocida siempre que el campo no pertenezca a $\boldsymbol{M_{vac}}$.

Las soluciones a la ecuación de Bogomol'nyi (2.1.0.20) saturan la energía y tienen valor mínimo de esta

$$E[\varphi] = \left| W(\varphi_s(+\infty)) - W(\varphi_s(-\infty)) \right| = \pm \left[W(\varphi_s(+\infty)) - W(\varphi_s(-\infty)) \right], \qquad (2.1.0.25)$$

notemos que en el caso estático la energía total del sistema coincide con la potencial (2.1.0.7), por lo que estos campos también minimizan a la energía potencial.

Un solitón es una solución clásica y estática de la ecuación de campo no lineal (2.1.0.9), cuya energía no es un mínimo global. En muchos casos, el espacio de los campos estáticos de energía finita no es conexo, y un solitón topológico es una configuración de energía finita en una componente donde el mínimo global no es alcanzado. Si estos mínimos locales existen, serán soluciones topológicamente estables y degeneradas. Lo ultimo debido a que si un mínimo ocurre en $\varphi_s(x)$, también ocurrirá en $\varphi_s(x+a)$, porque el funcional energía (2.1.0.11) es invariante bajo traslaciones.

La existencia de solitones topológicos depende de que el espacio $\boldsymbol{M_{vac}}$ posea más de un elemento. Si $\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty)$, entonces φ puede ser deformado suavemente en una configuración de vacío, la cual es constante y tiene energía cero. Estos campos no topológicos son poco probables que existan debido a lo anterior. En cambio, si $\varphi(+\infty) \neq \varphi(-\infty)$, φ no puede ser deformado suavemente, manteniendo la energía finita, en una solución de vacío con energía cero, obteniéndose así configuraciones topológicas estables. Más detalles sobre esto pueden ser encontrados en las referencias [3, 12].

Las soluciones con signo positivo y de mínima energía locamente, a la segunda integral, ya sea (2.1.0.17) o (2.1.0.21), de la ecuación de campo (2.1.0.9), son llamadas solitones. Mientras que las soluciones con signo negativo y de mínima energía locamente, son llamadas antisolitones. También, dichas soluciones son llamadas generalmente kinks (la de signo +) y antikinks (la de signo -) cuando son interpoladas entre diferentes vacíos.

2.2. Solitón φ^4 clásico

Consideremos el superpotencial

$$W(\varphi) = g\varphi\left(\frac{m^2}{g^2} - \frac{1}{3}\varphi^2\right),\ 0 < m < \infty,\ \ 0 < g < \infty, \tag{2.2.0.1}$$

el cual da origen al potencial

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}g^2\left(\frac{m^2}{g^2} - \varphi^2\right)^2, \tag{2.2.0.2}$$

donde el espacio de energía mínima global (o los estados de vacío clásicos) viene dado por

$$\boldsymbol{M_{vac}} = V^{-1}(0) = \left\{-m/g,\ +m/g\right\}. \tag{2.2.0.3}$$

Para este sistema, $\boldsymbol{M}$ es la unión de cuatro componentes

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{++} \cup \boldsymbol{M}_{+-} \cup \boldsymbol{M}_{-+} \cup \boldsymbol{M}_{--}, \tag{2.2.0.4}$$

donde $\boldsymbol{M}_{++}$ contiene las configuraciones de campos φ pertenecientes a $\boldsymbol{M}$, interpoladas entre los siguientes elementos de vacío

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi = +m/g,\ \lim_{x\to+\infty} \varphi = +m/g, \tag{2.2.0.5}$$

y $\boldsymbol{M}_{+-}$ contiene las configuraciones de campos φ pertenecientes a $\boldsymbol{M}$, interpoladas entre los siguientes elementos de vacío

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi = +m/g,\ \lim_{x\to+\infty} \varphi = -m/g, \tag{2.2.0.6}$$

con $\boldsymbol{M}_{-+}$ y $\boldsymbol{M}_{--}$ análogos. Estos subespacios están topológicamente desconectados, es decir, no es posible deformar suavemente una solución en uno de ellos a otra en un subespacio distinto. Los campos pertenecientes a $\boldsymbol{M}_{++}$ y $\boldsymbol{M}_{--}$ son configuraciones no topológicas ya que pueden deformarse suavemente en las configuraciones de vacío. En cambio, las soluciones pertenecientes a $\boldsymbol{M}_{-+}$ y $\boldsymbol{M}_{+-}$ son topológicamente estables y dan origen a mínimos locales de energía (solitón y antisolitón, respectivamente). Para más detalles ver la referencia [12].

Ahora, para el signo + de la integral (2.1.0.21), encontramos

$$\varphi_k(x) = \frac{m}{g} tanh\left[m(x - x_*)\right],\ -\infty < x < +\infty, \tag{2.2.0.7}$$

solución que cumple las condiciones de contorno

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi_k(x) = -m/g,\ \lim_{x\to+\infty} \varphi_k(x) = +m/g, \tag{2.2.0.8}$$

por lo que pertenece a $\boldsymbol{M}_{-+}$. Además, su derivada

$$\frac{d\varphi_k(x)}{dx} = \frac{m^2}{g} sech^2\left[m(x - x_*)\right], \tag{2.2.0.9}$$

se vuelve cero cuando $x \longrightarrow \pm\infty$. Esta solución es el bien conocido kink de la teoría φ^4 [2, 3, 11, 12, 13], el cual cumple con los requisitos necesarios para tener energía finita, localizada y ser estable topológicamente. La constante de integración x_* es interpretada como la posición del kink, y es un parámetro libre correspondiente a la invarianza bajo traslaciones. También existe una solución conocida como antikink, la cual surge para el signo - de la integral (2.1.0.21). El antikink es justamente $-\varphi_k(x)$ y pertenece a $\boldsymbol{M}_{+-}$.

La densidad de energía del kink viene dada por

$$\varepsilon_k(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi_k}{dx}\right)^2 + V(\varphi_k) = \frac{m^4}{g^2} sech^4\left[m(x - x_*)\right], \tag{2.2.0.10}$$

la cual alcanza su máximo justamente en x_*, cosa que se asocia a la posición del kink. La energía total de $\varphi_k(x)$ es

$$E[\varphi_k] = M_{cl} = \frac{4m^3}{3g^2}, \tag{2.2.0.11}$$

esta también se asocia con la masa clásica del kink, ya que en el sistema estudiado este está quieto y corresponde con su masa en reposo. Para la partícula cuántica asociada al campo, la energía es una aproximación clásica de su masa en reposo. El hecho de que exista divergencia cuando $g^2 \longrightarrow 0$, indica que la solución no es perturbativa.

Aplicando un boost de Lorentz, obtenemos un solución en movimiento

$$\varphi_k(t,x) = \frac{m}{g} tanh\left[\frac{m(x - vt - x_*)}{\sqrt{1-v^2}}\right], \; -1 < v < 1, \tag{2.2.0.12}$$

donde v es la velocidad del kink. La densidad de energía en este caso móvil viene dada por

$$\varepsilon_k(t,x) = \frac{1}{2}(\partial_t\varphi_k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi_k)^2 + V(\varphi_k) = \frac{m^4}{g^2(1-v^2)} sech^4\left[\frac{m(x - vt - x_*)}{\sqrt{1-v^2}}\right], \tag{2.2.0.13}$$

con la cual se obtiene la nueva energía total

$$E[\varphi_k] = \frac{M_{cl}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.2.0.14}$$

que coincide con lo esperado para una partícula de masa M_{cl} que se mueve a velocidad v.

2.3. Solitón sine-Gordon clásico

Escojamos el superpotencial de la forma

$$W(\varphi) = -4\frac{\alpha^{1/2}}{\beta^2} cos\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right), \; 0 < \alpha < \infty, \;\; 0 < \beta < \infty, \tag{2.3.0.1}$$

el cual da origen al potencial

$$V(\varphi) = \frac{\alpha}{\beta^2}\left[1 - cos(\beta\varphi)\right], \tag{2.3.0.2}$$

donde el espacio de energía mínima global (o los estados de vació clásicos) viene dado por

$$\boldsymbol{M_{vac}} = V^{-1}(0) = \left\{\varphi = 2n\pi/\beta, con\; n \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{2.3.0.3}$$

Para este caso, $\boldsymbol{M}$ no se puede ver simplemente como la unión de un número finito de componentes debido a que $\boldsymbol{M_{vac}}$ tiene infinitos elementos. Para obtener soluciones estables topológicamente impondremos las condiciones de contorno

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0,\;\; \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=2\pi/\beta, \tag{2.3.0.4}$$

las cuales también nos garantizan energía finita y localizada. Notemos que esta elección es arbitraria, ya que podemos elegir entre cualquier par de valores distintos en la configuración de vació. Sin embargo, debido a que el Lagrangiano es invariante bajo traslaciones del campo en cualquier múltiplo entero de $2\pi/\beta$ ($\varphi\to\varphi+2n\pi/\beta$), podemos hacer la elección anterior sin perder generalidad. Así, el resto de soluciones posibles que tienen la diferencia $\varphi(+\infty)-\varphi(-\infty)$ igual a $2\pi/\beta$, pueden obtenerse con esta a través de dichas traslaciones en φ.

Para el signo + de la integral (2.1.0.21), encontramos

$$\varphi_s(x)=\frac{4}{\beta}arctan\left[exp\left\{\alpha^{1/2}(x-x_*)\right\}\right],\; -\infty<x<+\infty, \tag{2.3.0.5}$$

aquí se ha interpolado $\varphi_s(x)$ entre los valores ya mencionados. La constante de integración x_* es interpretada como la posición del solitón, y es un parámetro libre correspondiente a la invarianza bajo traslaciones. Además, su derivada

$$\frac{d\varphi_s(x)}{dx}=\frac{2\alpha^{1/2}}{\beta}sech\left[\alpha^{1/2}(x-x_*)\right], \tag{2.3.0.6}$$

se anula cuando $x\longrightarrow\pm\infty$. Con esto hemos encontrado el conocido solitón de sine-Gordon [2, 3, 11, 12, 13]. También existe una solución conocida como antisolitón, $\varphi_{as}(x)$, la cual surge para el signo - de la integral (2.1.0.21),

$$\varphi_{as}(x)=\frac{4}{\beta}arctan\left[exp\left\{-\alpha^{1/2}(x-x_*)\right\}\right],\; -\infty<x<+\infty, \tag{2.3.0.7}$$

y cumple las condiciones

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=2\pi/\beta,\;\; \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0. \tag{2.3.0.8}$$

La densidad de energía del solitón sine-Gordon viene dada por

$$\varepsilon_s(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi_s}{dx}\right)^2+V(\varphi_s)=\frac{4\alpha}{\beta^2}sech^2\left[\alpha^{1/2}(x-x_*)\right], \tag{2.3.0.9}$$

la cual alcanza su máximo justamente en x_*, cosa que se asocia a la posición del solitón. La energía total de $\varphi_s(x)$ es

$$E[\varphi_s]=\frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2}, \tag{2.3.0.10}$$

e igualmente que exista divergencia cuando $\beta^2\longrightarrow 0$, indica que la solución no es perturbativa.

Aplicando un boost de Lorentz, obtenemos un solución en movimiento

$$\varphi_s(t,x)=\frac{4}{\beta}arctan\left[exp\left\{\frac{\alpha^{1/2}(x-vt-x_*)}{\sqrt{1-v^2}}\right\}\right],\; -1<v<1, \tag{2.3.0.11}$$

donde v es la velocidad del solitón. La densidad de energía en este caso móvil viene dada por

$$\varepsilon_s(t,x) = \frac{1}{2}(\partial_t\varphi_s)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi_s)^2 + V(\varphi_s) = \frac{4\alpha}{\beta^2(1-v^2)}sech^2\left[\frac{\alpha^{1/2}(x-vt-x_*)}{\sqrt{1-v^2}}\right], \tag{2.3.0.12}$$

con la cual se obtiene la nueva energía total

$$E[\varphi_s] = \frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.3.0.13}$$

que es la esperada para el caso de un solitón sine-Gordon en movimiento.

También estamos interesados en encontrar una versión distinta a la convencional del solitón sine-Gordon. Notemos que $\beta\varphi$, tanto en (2.3.0.1) como en (2.3.0.2), puede ser interpretado como un ángulo, lo que nos permite considerar el campo corrido $\tilde{\varphi}_s$ [5]

$$\tilde{\varphi}_s(x) = \varphi_s(x) - \frac{\pi}{\beta} = \frac{4}{\beta}arctan\left[exp\left\{\alpha^{1/2}(x-x_*)\right\}\right] - \frac{\pi}{\beta}, \tag{2.3.0.14}$$

el cual puede ser reescrito mediante la definición de la función de Gudermannian $gd(x)$

$$gd(x) = 2arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \tag{2.3.0.15}$$

y la relación funcional $senh(x) = tan\big(gd(x)\big)$ [8], como

$$\tilde{\varphi}_s(x) = \frac{2}{\beta}arctan\left[senh\left\{\alpha^{1/2}(x-x_*)\right\}\right], \; -\infty < x < \infty. \tag{2.3.0.16}$$

Se puede demostrar que (2.3.0.16) surge para el signo + de la integral (2.1.0.21), en la teoría que viene dada por el superpotencial [5]

$$W(\varphi) = 4\frac{\alpha^{1/2}}{\beta^2}sen\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right), \; 0<\alpha<\infty, \;\; 0<\beta<\infty, \tag{2.3.0.17}$$

que da origen al potencial

$$V(\varphi) = \frac{\alpha}{\beta^2}\left[1+cos(\beta\varphi)\right], \tag{2.3.0.18}$$

donde para este caso los estados de vacío son

$$\boldsymbol{M_{vac}} = V^{-1}(0) = \left\{\varphi = (2n-1)\pi/\beta, con\ n \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{2.3.0.19}$$

El nuevo solitón sine-Gordon (2.3.0.16) cumple las condiciones de contorno

$$\lim_{x\to-\infty}\tilde{\varphi}_s(x) = -\pi/\beta, \;\; \lim_{x\to+\infty}\tilde{\varphi}_s(x) = \pi/\beta, \tag{2.3.0.20}$$

por lo que es topológicamente estable. Además, su derivada

$$\frac{d\tilde{\varphi}_s(x)}{dx} = \frac{2\alpha^{1/2}}{\beta}sech\left[\alpha^{1/2}(x-x_*)\right], \tag{2.3.0.21}$$

tiende a cero cuando $x \longrightarrow \pm\infty$, que en combinación con (2.3.0.20) nos garantiza energía finita y localizada. Además, existe una antisolitón corrido, $\tilde{\varphi}_{as}(x)$, el cual surge para el signo - de la integral (2.1.0.21), y es justamente $-\tilde{\varphi}_s(x)$. La relación entre el antisolitón corrido y no corrido viene dada por

$$\tilde{\varphi}_{as}(x) = -\tilde{\varphi}_s(x) = \varphi_{as}(x) - \frac{\pi}{\beta}, \tag{2.3.0.22}$$

donde $\tilde{\varphi}_{as}(x)$ cumple

$$\lim_{x\to-\infty} \tilde{\varphi}_{as}(x) = \pi/\beta, \quad \lim_{x\to+\infty} \tilde{\varphi}_{as}(x) = -\pi/\beta. \tag{2.3.0.23}$$

La densidad de energía para $\tilde{\varphi}_s(x)$ es

$$\tilde{\varepsilon}_s(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{\varphi}_s}{dx}\right)^2 + V(\tilde{\varphi}_s) = \frac{4\alpha}{\beta^2} sech^2\left[\alpha^{1/2}(x-x_*)\right], \tag{2.3.0.24}$$

e igualmente, alcanza su máximo justamente en x_*, cosa que se asocia a la posición del solitón. La energía total es nuevamente

$$E[\tilde{\varphi}_s] = \frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2}, \tag{2.3.0.25}$$

lo cual, como era de esperarse, coincide con la energía del solitón sine-Gordon φ_s sin correr.

Por último, el solitón corrido que se mueve a velocidad v se obtiene de la expresión

$$\tilde{\varphi}_s(t,x) = \frac{2}{\beta} arctan\left[senh\left\{\frac{\alpha^{1/2}(x-vt-x_*)}{\sqrt{1-v^2}}\right\}\right], \ -1 < v < 1, \tag{2.3.0.26}$$

el cual tiene asociada la densidad de energía

$$\tilde{\varepsilon}_s(t,x) = \frac{1}{2}(\partial_t\tilde{\varphi}_s)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\tilde{\varphi}_s)^2 + V(\tilde{\varphi}_s) = \frac{4\alpha}{\beta^2(1-v^2)} sech^2\left[\frac{\alpha^{1/2}(x-vt-x_*)}{\sqrt{1-v^2}}\right], \tag{2.3.0.27}$$

con energía total

$$E[\tilde{\varphi}_s] = \frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.3.0.28}$$

que de nuevo coincide con el solitón sine-Gordon sin correr en movimiento.

2.4. La carga topológica

En esta sección, mostraremos una revisión del concepto de carga topológica en la teoría clásica de solitones en (1+1)-dimensiones, la cual está basada principalmente en la referencia [12].

Hemos mencionado que la existencia de solitones topológicos depende del número de elementos en el espacio de vacío clásico, es decir, depende de la degeneración de este. Una consecuencia de dicha degeneración es que el espacio de soluciones clásicas, $\boldsymbol{M}$, se divide en sectores diferentes caracterizados por las distintas combinaciones posibles de $\varphi(+\infty)$ y $\varphi(-\infty)$. Por ejemplo, en la teoría de φ^4, $\boldsymbol{M}$ se dividió en los cuatro sectores: $\boldsymbol{M}_{++}$, $\boldsymbol{M}_{+-}$, $\boldsymbol{M}_{-+}$ y $\boldsymbol{M}_{--}$. Para este caso, las soluciones de vacío $\varphi = -m/g$ y $\varphi = m/g$ pertenecen a $\boldsymbol{M}_{--}$ y $\boldsymbol{M}_{++}$, respectivamente. Por lo anterior, $\boldsymbol{M}_{--}$ y $\boldsymbol{M}_{++}$ son llamados sectores de vacío.

Ahora, para precisar que entendemos como deformación suave, consideremos una configuración de energía finita $\varphi(x)$. Una deformación suave de $\varphi(x)$ es una familia caracterizada por un parámetro β de configuraciones de energía finita, $\varphi_\beta(x)$, las cuales cumplen: 1) $\varphi_\beta(x)$ depende suavemente de β, 2) $\varphi_\beta(x)$ se reduce a $\varphi(x)$ cuando $\beta = 0$, es decir, $\varphi_{\beta=0}(x) = \varphi(x)$ [12].

Una deformación suave no puede modificar las condiciones de contorno, por lo que necesariamente la familia $\varphi_\beta(x)$ pertenece a un único sector del espacio $\boldsymbol{M}$. Gracias a lo anterior, los limites

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi_\beta(x) = \varphi(-\infty), \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi_\beta(x) = \varphi(+\infty), \tag{2.4.0.1}$$

deben ser independientes de β, ya que los valores asintóticos $\varphi(-\infty)$ y $\varphi(+\infty)$ están fijos en un mismo sector. Esto quiere decir que, no es posible, mediante deformaciones suaves, transformar una solución clásica de un sector de $\boldsymbol{M}$ a otra que viva en un sector diferente [12].

La evolución temporal es un ejemplo de deformación suave que mantiene la energía finita [3, 12]. El parámetro relacionado a la deformación en este caso es el tiempo t. Por esto, los limites

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(t,x) = \varphi(-\infty), \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(t,x) = \varphi(+\infty), \tag{2.4.0.2}$$

son independientes del tiempo.

Si la teoría posee una simetría discreta que relacione elementos del vacío clásico, entonces esta simetría también relacionará distintos sectores de $\boldsymbol{M}$ [12]. El Lagrangiano de φ^4 es invariante bajo la inversión $\varphi \to -\varphi$, que intercambia a sus dos elementos de vacío un por otro. Esta inversión transforma a $\boldsymbol{M}_{--}$ en $\boldsymbol{M}_{++}$, y viceversa. Análogamente, también intercambia a los sectores $\boldsymbol{M}_{-+}$ y $\boldsymbol{M}_{+-}$ entre si. Esta conexión, que surge de la simetría, nos indica que la estructura de los sectores relacionados es completamente equivalente. Por lo tanto en el modelo φ^4, tanto $\boldsymbol{M}_{--}$ y $\boldsymbol{M}_{++}$ como $\boldsymbol{M}_{-+}$ y $\boldsymbol{M}_{+-}$ tienen estructuras equivales.

Para el caso del solitón sine-Gordon sin correr, el Lagrangiano es invariante bajo la traslación $\varphi \to \varphi + 2k\pi/\beta$, con k perteneciente a los enteros. Esta traslación relaciona a diferentes elementos del espacio de vacío, por lo que también hará que distintos sectores de $\boldsymbol{M}$ tengan una estructura equivalente. A diferencia de φ^4, el espacio de soluciones clásicas está compuesto por infinitos sectores, los cuales se pueden etiquetar con dos indices enteros n y m, tal que el sector $\boldsymbol{M}_{n,m}$ cumple las condiciones de frontera

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 2n\pi/\beta, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 2m\pi/\beta. \tag{2.4.0.3}$$

La traslación con un k dado transforma a $\boldsymbol{M}_{n,m}$ en el sector $\boldsymbol{M}_{n+k,m+k}$, volviendo a estos completamente equivalentes en su estructura. En realidad, en el modelo sine-Gordon sin correr, se tendrá toda una familia de sectores equivalentes, los cuales poseen en común el número $q = m - n$. El valor $q = 0$ corresponde a la familia de sectores de vacío.

Además de la simetría bajo traslaciones, el Lagrangiano de la teoría sine-Gordon sin correr, de igual forma, es invariante bajo la inversión $\varphi \to -\varphi$. Esta inversión relaciona a estados de vacío y cambia al sector $\boldsymbol{M}_{n,m}$ por $\boldsymbol{M}_{-n,-m}$. Con esto vemos que la familia de sectores con estructura equivalente es más grande de lo encontrado anteriormente. De hecho, no sólo son equivalentes entre si todos lo sectores con igual q, también lo serán todos aquellos con $-q$ o q.

Es fácil ver que el solitón sine-Gordon corrido tiene las mismas simetrías en su Lagrangiano que el no corrido. Esto nos permite hacer algo totalmente análogo con los sectores de su espacio de soluciones clásicas $\tilde{\boldsymbol{M}}$. Ahora, el sector $\tilde{\boldsymbol{M}}_{n,m}$ cumple las condiciones de frontera

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=(2n-1)\pi/\beta,\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=(2m-1)\pi/\beta. \tag{2.4.0.4}$$

Al realizar una traslación con k fijo, el sector $\tilde{\boldsymbol{M}}_{n,m}$ se transforma a $\tilde{\boldsymbol{M}}_{n+k,m+k}$, lo que permite usar nuevamente a $q=m-n$, para etiquetar sectores equivalentes. Además, una inversión cambia al sector $\tilde{\boldsymbol{M}}_{n,m}$ en $\tilde{\boldsymbol{M}}_{-n+1,-m+1}$, y esto hace que todos los sectores con $-q$ o q sean también totalmente equivalentes.

Debido a la gran importancia que tienen las condiciones de contorno, introduzcamos la diferencia

$$Q=\varphi(+\infty)-\varphi(-\infty), \tag{2.4.0.5}$$

la cual es independiente del tiempo gracias a lo mencionado sobre la evolución temporal. Esta cantidad Q, puede ser interpretada como una carga conservada, cuya densidad de carga asociada viene dada por

$$\rho[\varphi]=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{2.4.0.6}$$

es decir,

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}\rho[\varphi]\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx=\varphi(+\infty)-\varphi(-\infty). \tag{2.4.0.7}$$

La conservación de (2.4.0.5) no se debe a la dinámica del sistema en lo más mínimo, esta depende únicamente de las condiciones de frontera, por lo que a Q se le llama carga topológica y su correspondiente ley de conservación es conocida como ley de conservación topológica [12]. Además, (2.4.0.6) recibe el nombre de densidad de carga topológica y es asociada a la corriente relativista

$$J^{\mu}=\epsilon^{\mu\nu}\partial_{\nu}\varphi, \tag{2.4.0.8}$$

cuya conservación se puede verificar fácilmente debido a la simetría de $\partial_{\mu}\partial_{\nu}$ y antisimetría de $\epsilon^{\mu\nu}$:

$$\partial_{\mu}J^{\mu}=\epsilon^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi=0. \tag{2.4.0.9}$$

Como la corriente (2.4.0.8) se conserva automáticamente, es llamada corriente topológica. Notemos que esta se conserva gracias a los requerimientos de energía finita, sin importar, en absoluto, la dinámica de la teoría. Así, la carga topológica estará bien definida y se conservará para cualquier teoría de campo escalar en un espacio-tiempo (1+1)-dimensional [12].

De (2.4.0.5) es sencillo ver que los sectores de vacío tienen carga topológica cero. Con esto podemos establecer a Q como criterio para la existencia de solitones topológicos, ya que ellos pertenecerán a sectores con Q distinto de cero. En el modelo φ^4, los posibles valores de Q son

$$Q=2mq/g, \tag{2.4.0.10}$$

con $q = -1, 0, 1$. Los sectores $\boldsymbol{M}_{--}$ y $\boldsymbol{M}_{++}$ corresponden a $q = 0$ por ser de vacío, mientras que $\boldsymbol{M}_{+-}$ y $\boldsymbol{M}_{-+}$ tienen $q = -1$ y $q = 1$, respectivamente. Notemos que en este caso, Q y q son totalmente equivalentes, es decir, dar un valor de una fija automáticamente a la otra. Por lo anterior, es común que cuando esto pase se suela definir como carga topológica a q en vez de Q.

Para el sector $\boldsymbol{M}_{n,m}$ de la teoría sine-Gordon sin correr, la carga topológica toma el valor

$$Q = 2\pi q/\beta, \tag{2.4.0.11}$$

con $q = m - n$, donde m y n pertenecen a los enteros. Para el caso corrido, el sector $\tilde{\boldsymbol{M}}_{n,m}$ tiene la misma carga topológica Q de la expresión (2.4.0.11). Igualmente, q es equivalente a Q en estos dos modelos, por lo que no trae ningún problema tomarla como carga topológica.

Si observamos las tres teorías discutidas, notaremos que en todas su carga topológica está cuantizada, ya que sólo puede tomar valores discretos. Esta es una cuantización que ya aparece desde el nivel clásico, y se le da el nombre de cuantización topológica [12].

Capítulo 3

Solitones cuánticos en volumen infinito como estados coherentes

Ya que los solitones, como se mencionó en el capitulo anterior, son buenos candidatos para describir sistemas cuánticos extendidos, surge la necesidad de una teoría cuántica de estos. Desde los comienzos de la física de solitones se ha pensado que su versión cuántica debe ser cierto tipo de estados coherentes. Vistos como estados coherentes, los solitones cuánticos se conectan a través de valores medios con sus versiones clásicas, lo que permite usar los resultados previos en la construcción de dichos estados y justifica el trabajo realizado en la revisión de la teórica clásica. A continuación, para el caso en volumen infinito, haremos una revisión de la imagen de solitones cuánticos como estados coherentes presentada por G. Dvali, C. Gomez, L. Gruending y T. Rug [1].

3.1. Solitones cuánticos como estados coherentes

Una vez encontrado un solitón clásico, su transformación de Fourier es algo que podemos tener a nuestro alcance (ver apéndice B), al menos formalmente, ya que calcular esta puede ser bastante complicado dependiendo del caso. Para construir la imagen en estados coherentes de nuestro solitón, es necesario expresarlo como una expansión de Fourier de la siguiente forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi}\int dk\left([\varphi]^{\wedge}_{k} e^{ikx} + \overline{[\varphi]}^{\wedge}_{k} e^{-ikx}\right),\ -\infty < x < \infty, \tag{3.1.0.1}$$

donde $[\varphi]^{\wedge}_{k}$ es la transformada de Fourier de φ y $\overline{[\varphi]}^{\wedge}_{k}$ es el complejo conjugado de esta. La expansión anterior, es simplemente, la reconstrucción del campo φ a través de su información de Fourier.

Ahora, para seguir avanzado en la construcción de los estados coherentes, escribiremos la siguiente relación

$$\alpha(k) = \sqrt{\frac{\omega(k)}{4\pi R}}\ [\varphi]^{\wedge}_{k}\ , \tag{3.1.0.2}$$

con $2\pi R$ como volumen regularizado del espacio. Hemos introducido una función genérica $\omega(k)$, la cual por los momentos no fijaremos, pero la supondremos real y positiva $\left(\overline{\omega}(k) = \omega(k)\ y\ \omega(k) \geq 0\right)$. Con esto, la expansión de φ toma la forma [1, 16]

$$\varphi(x) = \sqrt{R}\int dk\ \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega(k)}}\left(\alpha(k)e^{ikx} + \overline{\alpha}(k)e^{-ikx}\right), \tag{3.1.0.3}$$

y además pediremos que los coeficientes de las expansión (3.1.0.3) cumplan

$$\overline{\alpha}(k) = \alpha(-k). \tag{3.1.0.4}$$

En los casos que estudiaremos los campos son reales, y para estos, la transformada de Fourier tiene la propiedad

$$\overline{[\varphi]}^{\wedge}_{k} = [\varphi]^{\wedge}_{-k}\,, \tag{3.1.0.5}$$

que, en combinación con (3.1.0.2) y (3.1.0.4), nos lleva a

$$\omega(-k) = \omega(k), \tag{3.1.0.6}$$

es decir, $\omega(k)$ es una función par de k.

Para escribir la energía en función de los nuevos coeficientes, podemos usar la expresión

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = V(\varphi), \tag{3.1.0.7}$$

obtenida de (2.1.0.10) con la condición para energía finita $C = 0$. Así, el funcional energía puede escribirse de la siguiente forma

$$E[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2. \tag{3.1.0.8}$$

Usando la identidad de Plancherel-Parseval (ver apéndice B) y la expresión (3.1.0.2), podemos escribir la energía del sistema, finalmente, como

$$E[\varphi] = 2R\int dk\, \frac{|k|^2}{\omega(k)}\overline{\alpha}(k)\alpha(k). \tag{3.1.0.9}$$

Hasta el momento, solamente hemos escrito nuestros resultados clásicos en función de los coeficientes $\alpha(k)$ *y* $\overline{\alpha}(k)$. Es útil notar que dichos coeficientes son adimensionales, lo que indica que pueden ser relacionados con el número de ocupación de corpúsculos de momento k a medida que nos acercamos a la teoría cuántica. A pesar de que el trabajo hecho no parezca necesario desde el punto de vista clásico, lo anterior nos muestra que podemos construir nuestros estados coherentes a partir de nuestra expansión de Fourier, usando el formalismo de operadores de creación y aniquilación.

El siguiente paso para nuestro objetivo es la construcción del operador de campo $\hat{\varphi}$. Dicho operador se puede obtener si los coeficientes $\alpha(k)$ *y* $\overline{\alpha}(k)$ en la expansión (3.1.0.3), son reemplazados por los operadores $\hat{\alpha}(k)$ *y* $\hat{\alpha}^{\dagger}(k)$, respectivamente. Estos nuevos operadores satisfacen el álgebra de creación-aniquilación

$$[\hat{\alpha}(k), \hat{\alpha}(k')] = 0 = [\hat{\alpha}^{\dagger}(k), \hat{\alpha}^{\dagger}(k')],\ [\hat{\alpha}(k), \hat{\alpha}^{\dagger}(k')] = \frac{1}{R}\delta(k-k'), \tag{3.1.0.10}$$

que es la correspondiente al caso con momento continuo. Así, nuestro operador de campo será [1, 16]

$$\hat{\varphi}(x) = \sqrt{R}\int dk\, \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega(k)}}\left(\hat{\alpha}(k)e^{ikx} + \hat{\alpha}^{\dagger}(k)e^{-ikx}\right) \tag{3.1.0.11}$$

y, basado en el álgebra (3.1.0.10), el operador momento canónico conjugado $\hat{\pi}$ se define como [1, 16]

$$\hat{\pi}(x) = -i\sqrt{\frac{R}{4\pi}}\int dk\,\sqrt{\omega(k)}\left(\hat{\alpha}(k)e^{ikx} - \hat{\alpha}^{\dagger}(k)e^{-ikx}\right), \tag{3.1.0.12}$$

tal que

$$[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(y)] = 0 = [\hat{\pi}(x),\hat{\pi}(y)],\ [\hat{\varphi}(x),\hat{\pi}(y)] = i\delta(x-y). \tag{3.1.0.13}$$

Fácilmente, $\hat{\alpha}(k)$ y $\hat{\alpha}^{\dagger}(k)$ pueden ser interpretados como los operadores de aniquilación y creación, respectivamente, de los cuantos constituyentes del estado ligado del solitón [1], $|sol\rangle$, para el cual

$$\langle sol|\hat{\varphi}(x)|sol\rangle = \varphi(x), \tag{3.1.0.14}$$

donde se ve claramente la conexión entre el valor medio del operador de campo $\hat{\varphi}$ en el estado $|sol\rangle$ y el solitón clásico φ. Notemos que el estado $|sol\rangle$ es justamente lo que se ha estado buscando. Desde el comienzo, queremos representar al solitón como un estado coherente cuántico, en el cual, el valor medio del operador $\hat{\varphi}(x)$ corresponda con el resultado clásico φ.

Podemos construir a $|sol\rangle$ mediante el uso de los estados coherentes $|\alpha(k)\rangle$, que según el formalismo de operadores de creación-aniquilación (ver apéndice A), vienen dados por

$$|\alpha(k)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha(k)|^2+\alpha(k)\hat{\alpha}^{\dagger}(k)}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha(k)|^2}\sum_{n_k=0}^{\infty}\frac{(\alpha(k))^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}|n_k\rangle \tag{3.1.0.15}$$

y cumplen

$$\hat{\alpha}(k)|\alpha(k)\rangle = \alpha(k)|\alpha(k)\rangle,\ \langle\alpha(k)|\hat{\alpha}^{\dagger}(k) = \langle\alpha(k)|\overline{\alpha}(k), \tag{3.1.0.16}$$

donde $|0\rangle$ es el vacío de Minkowski y $|n_k\rangle$ es el estado de n_k corpúsculos con momento k, tales que

$$\hat{\alpha}(k)|0\rangle = 0,\ \langle 0|\hat{\alpha}^{\dagger}(k) = 0, \tag{3.1.0.17}$$

$$\hat{\alpha}(k)|n_k\rangle = \sqrt{n_k}|n_k-1\rangle,\ \hat{\alpha}^{\dagger}(k)|n_k\rangle = \sqrt{n_k+1}|n_k+1\rangle. \tag{3.1.0.18}$$

La ecuación (3.1.0.14) pueden ser resuelta, de acuerdo a las propiedades generales de los estados coherentes (ver apéndice A), mediante el producto tensorial

$$|sol\rangle = \prod_{\otimes k}|\alpha(k)\rangle, \tag{3.1.0.19}$$

el cual, fácilmente se puede ver que cumple

$$\hat{\alpha}(k)|sol\rangle = \alpha(k)|sol\rangle,\ \langle sol|\hat{\alpha}^{\dagger}(k) = \langle sol|\overline{\alpha}(k). \tag{3.1.0.20}$$

Gracias a lo anterior, podemos introducir la cantidad $N(k)$ definida por

$$N(k) \equiv \langle sol|\hat{\alpha}^{\dagger}(k)\hat{\alpha}(k)|sol\rangle = \overline{\alpha}(k)\alpha(k), \tag{3.1.0.21}$$

la que, debido a los operadores de creación y aniquilación, se espera que sea el número de ocupación medio de cuantos con momento k en el estado coherente $|sol\rangle$ [1, 16]. Lo anterior es consecuencia de la forma estándar de definir el operador número de partículas para cada valor de k, $\hat{N}(k) \equiv \hat{\alpha}^{\dagger}(k)\hat{\alpha}(k)$, que deja claro el significado dado a la definición (3.1.0.21). Correspondientemente, el número de ocupación medio total N viene dado por la cantidad

$$N \equiv R\int dk\, N(k) = R\int dk\, \overline{\alpha}(k)\alpha(k) = R\int dk\, \langle sol|\, \hat{\alpha}^{\dagger}(k)\hat{\alpha}(k)\,|sol\rangle\,. \tag{3.1.0.22}$$

Visto como estado coherente, la energía media total en el estado $|sol\rangle$ es dada por [1, 16]

$$E = R\int dk\, \omega(k)N(k) = R\int dk\, \omega(k)\overline{\alpha}(k)\alpha(k) = R\int dk\, \omega(k)\,\langle sol|\, \hat{\alpha}^{\dagger}(k)\hat{\alpha}(k)\,|sol\rangle\,, \tag{3.1.0.23}$$

donde $\omega(k)$ desempeña el papel de relación de dispersión. Acorde al interés de obtener valores medios en la versión cuántica que coincidan con los resultados clásicos, (3.1.0.9) debe ser recuperada en la expresión (3.1.0.23). Con lo mencionado es posible determinar la relación de dispersión para nuestra teoría de solitones cuánticos como estados coherentes, obteniéndose así que

$$\omega(k) = \sqrt{2}\,|k|. \tag{3.1.0.24}$$

Hasta aquí, ya se ha logrado construir la visión del solitón como estado coherente, pero además de esto, sería de gran utilidad poder separar la información topológica de la asociada con la energía. Al nivel clásico, siguiendo la referencia [1], consideremos el caso en que $\varphi(x)$ puede ser escrito como el producto de convolución

$$\varphi(x) = T(x) * \phi_E(x), \tag{3.1.0.25}$$

el cual separa la parte topológica de la energética, estando la primera contenida en $T(x)$ y la segunda en $\phi_E(x)$. Esta descomposición se inspira en el teorema fundamental del producto de convolución (ver apéndice B), del cual sabemos que la transformada de Fourier de un producto de convolución de dos funciones es simplemente igual al producto ordinario entre las transformadas de Fourier de cada función.

Es importante remarcar que aun si logramos escribir un campo según (3.1.0.25), esto no implica en general, que toda la información topológica y energética estará separada en $T(x)$ y $\phi_E(x)$, respectivamente. Con lo anterior se quiere ser claro que nuestro objetivo es lograr dicha separación, pero no es obligatorio que al tener $\varphi(x)$ como una convolución ya esté garantizada.

Al calcular la transformada de Fourier de (3.1.0.25) se obtiene (ver apéndice B)

$$\left[\varphi(x)\right]^{\wedge}_{k} = \left[T(x)\right]^{\wedge}_{k}\left[\phi_E(x)\right]^{\wedge}_{k} \tag{3.1.0.26}$$

y comparándola con (3.1.0.2), se sigue que el coeficiente $\alpha(k)$ para este caso admite la representación [1]

$$\alpha(k) = t(k)\xi(k), \tag{3.1.0.27}$$

donde

$$t(k) = \frac{\sqrt{\omega(k)}}{2}\left[T(x)\right]^{\wedge}_{k}\,,\ \xi(k) = \sqrt{\frac{1}{\pi R}}\left[\phi_E(x)\right]^{\wedge}_{k}\,. \tag{3.1.0.28}$$

La ecuación (3.1.0.26) nos otorga un criterio mínimo necesario para que $\varphi(x)$ se pueda escribir de la forma (3.1.0.25), debido a que si no podemos escribir su transformada de Fourier como un producto ordinario, φ no puede ser un producto de convolución.

Un ejemplo importante en el cual se logra la separación mencionada ocurre cuando la parte topológica viene dada por $T(x) = sgn(x)$. Entonces, $\varphi(x)$ tiene la descomposición

$$\varphi(x) = sgn(x) * \phi_E(x), \tag{3.1.0.29}$$

y los coeficientes $t(k)$ y $\xi(k)$ vienen dados por

$$t(k) = i\sqrt{\omega(k)} P_V \frac{1}{k} \, , \; \xi(k) = \sqrt{\frac{1}{\pi R}} \left[\phi_E(x)\right]^{\wedge}_{k} \, . \tag{3.1.0.30}$$

Por otro lado, es fácil verificar que la derivada de (3.1.0.29) toma el valor

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\phi_E, \tag{3.1.0.31}$$

haciendo que el funcional energía (3.1.0.8), para este caso, se pueda escribir como

$$E[\varphi] = 4\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \left(\phi_E\right)^2, \tag{3.1.0.32}$$

mostrando que la energía depende solamente de ϕ_E. Notemos que (3.1.0.32), mediante la identidad de Plancherel-Parseval (ver apéndice B), también puede ser escrita en función de $\xi(k)$ y su complejo conjugado.

En el nivel cuántico la descomposición (3.1.0.25) implica que el operador de campo $\hat{\varphi}(x)$ tiene la siguiente representación [1]

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{T}(x) * \hat{\phi}_E(x), \tag{3.1.0.33}$$

donde $\hat{T}(x)$ y $\hat{\phi}_E(x)$ definen las imágenes cuánticas de la topológia y energía, respectivamente. Dichos operadores de campo actúan en diferentes espacios de Fock y correspondientemente con la convolución (3.1.0.33), el solitón cuántico puede ser escrito como un estado coherente de la forma [1]

$$|sol\rangle = |T\rangle \otimes |E\rangle \, , \tag{3.1.0.34}$$

con $|T\rangle$ y $|E\rangle$ estados coherentes que poseen la información topológica y energética, respectivamente.

Para construir los estados coherentes de la expresión (3.1.0.34), basados en la referencia [1], definimos dos conjuntos de operadores $\hat{t}^\dagger(k)$, $\hat{t}(k)$, y $\hat{\xi}^\dagger(k)$, $\hat{\xi}(k)$, los cuales satisfacen el álgebra de creación-aniquilación estándar. Los estados coherentes de estos nuevos operadores de creación y aniquilación son

$$\hat{t}(k)\,|t(k)\rangle = t(k)\,|t(k)\rangle \, , \; \langle \, t(k)|\,\hat{t}^\dagger(k) = \langle t(k)|\,\bar{t}(k), \tag{3.1.0.35}$$

$$\hat{\xi}(k)\,|\xi(k)\rangle = \xi(k)\,|\xi(k)\rangle \, , \; \langle \, \xi(k)|\,\hat{\xi}^\dagger(k) = \langle \xi(k)|\,\bar{\xi}(k), \tag{3.1.0.36}$$

donde $t(k)$ y $\xi(k)$ se obtienen de (3.1.0.28). Así, $|T\rangle$ y $|E\rangle$ vendrán dados por [1]

$$|T\rangle = \prod_k |t(k)\rangle \, , \; |E\rangle = \prod_k |\xi(k)\rangle \, , \tag{3.1.0.37}$$

y es fácil ver que cumplen

$$\hat{t}(k)\,|T\rangle = t(k)\,|T\rangle\,,\ \langle T|\,\hat{t}^{\dagger}(k) = \langle T|\,\bar{t}(k), \tag{3.1.0.38}$$

$$\hat{\xi}(k)\,|E\rangle = \xi(k)\,|E\rangle\,,\ \langle E|\,\hat{\xi}^{\dagger}(k) = \langle E|\,\bar{\xi}(k). \tag{3.1.0.39}$$

La energía del sistema también puede ser reescrita para este último caso. Notemos que el funcional energía (3.1.0.32) de la convolución clásica (3.1.0.29), mediante la identidad de Plancherel-Parseval (ver apéndice B), puede ser escrito como

$$E[\varphi] = 2R\int dk\,\bar{\xi}(k)\xi(k), \tag{3.1.0.40}$$

lo que nos lleva a que la energía para el caso cuántico de (3.1.0.29), visto como un estado coherente del tipo (3.1.0.34), toma la forma

$$E = 2R\int dk\,\langle E|\,\hat{\xi}^{\dagger}(k)\hat{\xi}(k)\,|E\rangle = 2R\int dk\,\bar{\xi}(k)\xi(k). \tag{3.1.0.41}$$

3.2. Solitón φ^4 cuántico

La imagen como estado coherente del solitón cuántico φ^4 fue trabajada explícitamente por G. Dvali, C. Gomez, L. Gruending y T. Rug en [1].

Para la versión cuántica de la teoría φ^4 usaremos el kink localizado en el origen, $x_* = 0$, que fue obtenido en el capítulo anterior. Este kink viene dado por

$$\varphi_k(x) = \frac{m}{g}tanh(mx),\ -\infty < x < \infty, \tag{3.2.0.1}$$

y su transformada de Fourier es

$$[\varphi_k(x)]^{\wedge}_p = \frac{i\pi}{g}csch\left(\frac{\pi p}{2m}\right). \tag{3.2.0.2}$$

Si en vez de usar el kink en el origen quisiéramos usar uno localizado en cualquier x_*, no habría gran problema, ya que este es simplemente una traslación del (3.2.0.1). Según la propiedad de traslación de las transformadas de Fourier (ver apéndice B), la transformada de este sería

$$[\varphi_k(x-x_*)]^{\wedge}_p = \frac{i\pi e^{ipx_*}}{g}csch\left(\frac{\pi p}{2m}\right), \tag{3.2.0.3}$$

por lo que simplemente en los cálculos posteriores usaríamos (3.2.0.3) en lugar de (3.2.0.2) y esa seria toda la diferencia.

Usando (3.2.0.2) obtenemos de (3.1.0.2) y (3.1.0.24) que $\alpha(k)$ para este caso es

$$\alpha(k) = \frac{i}{g}\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi|k|}{4R}}csch\left(\frac{\pi k}{2m}\right), \tag{3.2.0.4}$$

con lo cual se puede construir el estado coherente $|kink\rangle$, tal que, el valor medio del operador de campo $\hat{\varphi}_k(x)$ de la teoría cuántica del kink φ^4 corresponda con (3.2.0.1)

$$\langle kink|\,\hat{\varphi}_k(x)\,|kink\rangle = \varphi_k(x). \tag{3.2.0.5}$$

Para el número de ocupación medio en el estado $|kink\rangle$, con momento k, se obtiene [1]

$$N(k) = \langle kink|\hat{\alpha}^{\dagger}(k)\hat{\alpha}(k)|kink\rangle = \overline{\alpha}(k)\alpha(k) = \frac{1}{g^2}\frac{\sqrt{2}\pi|k|}{4R}csch^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right). \tag{3.2.0.6}$$

El número de ocupación medio total se calcula mediante (3.1.0.22), que en combinación con (3.2.0.6), nos da

$$N = R\int_{-\infty}^{\infty} dk\, N(k) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4g^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, |k| csch^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right), \tag{3.2.0.7}$$

donde es fácil ver que el integrando es par, haciendo que (3.2.0.7) sea equivalente a

$$N = 2R\int_{0}^{\infty} dk\, N(k) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2g^2}\int_{0}^{\infty} dk\, k\, csch^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right), \tag{3.2.0.8}$$

y cortando la integral en $k = k_{min}$ encontramos

$$2R\int_{k_{min}}^{\infty} dk\, N(k) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2g^2}\left[-\frac{2mk}{\pi}coth\left(\frac{\pi k}{2m}\right) + \frac{4m^2}{\pi^2}ln\left(senh\left(\frac{\pi k}{2m}\right)\right)\right]\Bigg|_{k_{min}}^{\infty}, \tag{3.2.0.9}$$

la cual exhibe una divergencia logarítmica para k pequeños. Clásicamente, la carga topológica del kink está conectada con las condiciones de frontera, y estos momentos con k muy pequeño son justamente los que contienen información sobre dichas condiciones. Por otra parte, la divergencia en el número de ocupación medio total garantiza que la carga topológica no estará sujeta a fluctuaciones cuánticas, lo que asegura su conservación en la teoría cuántica [1].

La energía media total, dada por (3.1.0.23), tiene el valor

$$E = \sqrt{2}R\int_{-\infty}^{\infty} dk\, |k|\, N(k) = \frac{4m^3}{3g^2}, \tag{3.2.0.10}$$

que es igual al resultado clásico.

En los cálculos para E y N los momentos k extremadamente pequeños que contribuyen a la divergencia de N, no lo hacen en la energía E del kink, para la cual las contribuciones de los k pequeños desaparecen [1].

Notemos que la transformada (3.2.0.2) puede ser escrita como

$$[\varphi_k(x)]_p^{\wedge} = \left[2iP_V\frac{1}{p}\right]\left[\frac{\pi p}{2g}csch\left(\frac{\pi p}{2m}\right)\right], \tag{3.2.0.11}$$

que al compararla con

$$[sgn(x)]_k^{\wedge} = 2iP_V\frac{1}{k},\ \frac{m^2}{2g}[sech^2(mx)]_k^{\wedge} = \frac{\pi k}{2g}csch\left(\frac{\pi k}{2m}\right), \tag{3.2.0.12}$$

nos indica que el campo $\varphi_k(x)$ puede ser escrito como la convolución [1]

$$\varphi_k(x) = sgn(x) * \frac{m^2}{2g}sech^2(mx). \tag{3.2.0.13}$$

La descomposición (3.2.0.13) muestra que estamos en un caso del tipo (3.1.0.29). Se sigue que nuestro solitón cuántico φ^4 puede ser escrito como un estado coherente según la forma planteada en las ecuaciones (3.1.0.34, 3.1.0.35, 3.1.0.36, 3.1.0.37), con coeficientes $t(k)$ y $\xi(k)$ dados por

$$t(k) = i\sqrt{\sqrt{2}|k|}P_V\frac{1}{k}\ ,\ \xi(k) = \sqrt{\frac{\pi}{R}}\frac{k}{2g}csch\left(\frac{\pi k}{2m}\right). \tag{3.2.0.14}$$

Calculando de nuevo la energía con las ecuaciones (3.1.0.41) y (3.2.0.14) se obtiene

$$E = 2R\int dk\ \langle E|\hat{\xi}^{\dagger}(k)\hat{\xi}(k)|E\rangle = 2R\int dk\ \bar{\xi}(k)\xi(k) = \frac{4m^3}{3g^2}, \tag{3.2.0.15}$$

lo cual coincide con todo lo previo.

3.3. Solitón sine-Gordon cuántico

La imagen como estado coherente del solitón cuántico sine-Gordon corrido $\tilde{\varphi}_s(x)$ fue trabajada por B. Vargas en [5].

Para la versión cuántica del solitón sine-Gordon corrido usaremos este localizado en el origen, $x_* = 0$, que por el capítulo anterior viene dado por

$$\tilde{\varphi}_s(x) = \frac{2}{\beta}arctan\left[senh\{\alpha^{1/2}x\}\right],\ -\infty < x < \infty, \tag{3.3.0.1}$$

cuya transformada de Fourier es

$$[\tilde{\varphi}_s(x)]^{\wedge}_k = \frac{2i\pi}{\beta k}sech\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right). \tag{3.3.0.2}$$

En el caso del solitón corrido localizado en cualquier x_*, la transformada de Fourier sería simplemente

$$[\tilde{\varphi}_s(x-x_*)]^{\wedge}_k = \frac{2i\pi e^{ikx_*}}{\beta k}sech\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right). \tag{3.3.0.3}$$

Con (3.3.0.2) obtenemos de (3.1.0.2) y (3.1.0.24) que $\tilde{\alpha}(k)$ es

$$\tilde{\alpha}(k) = \frac{2i}{\beta k}\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi|k|}{4R}}sech\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right), \tag{3.3.0.4}$$

con lo cual se puede construir el estado coherente $\left|\tilde{sol}\right\rangle$, tal que, el valor medio del operador de campo $\hat{\tilde{\varphi}}_s(x)$ de la teoría cuántica del solitón sine-Gordon corrido corresponda con (3.3.0.1)

$$\langle\tilde{sol}\left|\hat{\tilde{\varphi}}_s(x)\right|\tilde{sol}\rangle = \tilde{\varphi}_s(x). \tag{3.3.0.5}$$

Se obtiene que el número de ocupación medio en el estado $|\tilde{sol}\rangle$, con momento k, es [5]

$$\tilde{N}(k) = \langle\tilde{sol}|\,\hat{\tilde{a}}^{\dagger}(k)\hat{\tilde{a}}(k)\,|\tilde{sol}\rangle = \bar{\tilde{a}}(k)\tilde{a}(k) = \frac{1}{\beta^2}\frac{\sqrt{2}\pi|k|}{Rk^2}sech^2\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right). \tag{3.3.0.6}$$

El número de ocupación medio total se calcula mediante (3.1.0.22), que en combinación con (3.3.0.6), nos da

$$\tilde{N} = R\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\tilde{N}(k) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{|k|}{k^2}sech^2\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right), \tag{3.3.0.7}$$

donde es fácil ver que el integrando es par, haciendo que (3.3.0.7) sea equivalente a

$$\tilde{N} = 2R\int_{0}^{\infty} dk\,\tilde{N}(k) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\beta^2}\int_{0}^{\infty} dk\,\frac{1}{k}sech^2\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right), \tag{3.3.0.8}$$

y cortando la integral en $k = k_{min}$ y $k = k_{max}$ encontramos

$$\begin{aligned} 2R\int_{k_{min}}^{k_{max}} dk\,\tilde{N}(k) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\beta^2}\Bigg[\frac{2\alpha^{1/2}}{\pi k}tanh\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right) + 6B_2 ln\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right) + \dots \\ \dots + \frac{4\alpha}{\pi^2k^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{(2n-2)(2n)!}\left(\frac{\pi k}{\alpha^{1/2}}\right)^{2n}\Bigg]\Bigg|_{k_{min}}^{k_{max}}, \quad \left|\frac{k_{max}}{\alpha^{1/2}}\right| < 1, \end{aligned} \tag{3.3.0.9}$$

donde $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, ..., son los números de Bernoulli. De (3.3.0.9) se ve que $\tilde{N}$ exhibe una divergencia logarítmica para k pequeños. Clásicamente, la carga topológica del solitón viene determinada por las condiciones de frontera, y los momentos con k muy pequeño son los que precisamente contienen información sobre esas condiciones. Por otra parte, la divergencia en el número de ocupación medio total garantiza que la carga topológica no estará sujeta a fluctuaciones cuánticas, lo que asegura su conservación en la teoría cuántica [1].

La energía media total, dada por (3.1.0.23), tiene el valor

$$\tilde{E} = \sqrt{2}R\int_{-\infty}^{\infty} dk\,|k|\,\tilde{N}(k) = \frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2}, \tag{3.3.0.10}$$

que es igual al resultado clásico.

En los cálculos para $\tilde{E}$ y $\tilde{N}$ los momentos k extremadamente pequeños que contribuyen a la divergencia de $\tilde{N}$, no lo hacen en la energía $\tilde{E}$ del solitón, para la cual las contribuciones de los k pequeños desaparecen [1].

Por otro lado, podemos reescribir la transformada (3.3.0.2) como

$$[\tilde{\varphi}_s(x)]_k^{\wedge} = \left[2iP_V\frac{1}{k}\right]\left[\frac{\pi}{\beta}sech\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right)\right], \tag{3.3.0.11}$$

que al compararla con

$$[sgn(x)]_k^{\wedge} = 2iP_V\frac{1}{k},\quad \frac{\alpha^{1/2}}{\beta}[sech(\alpha^{1/2}x)]_k^{\wedge} = \frac{\pi}{\beta}sech\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right), \tag{3.3.0.12}$$

nos indica que el campo $\tilde{\varphi}_s(x)$ puede ser escrito como la convolución [5]

$$\tilde{\varphi}_s(x) = sgn(x) * \frac{\alpha^{1/2}}{\beta} sech(\alpha^{1/2}x). \tag{3.3.0.13}$$

La descomposición (3.3.0.13) muestra que nuevamente estamos en un caso del tipo (3.1.0.29). Se sigue que nuestro solitón sine-Gordon corrido cuántico puede ser escrito como un estado coherente según la forma planteada en las ecuaciones (3.1.0.34, 3.1.0.35, 3.1.0.36, 3.1.0.37), con coeficientes $\tilde{t}(k)$ y $\tilde{\xi}(k)$ dados por

$$\tilde{t}(k) = i\sqrt{\sqrt{2}|k|}P_V\frac{1}{k}\,,\ \tilde{\xi}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{R}}\frac{1}{\beta}sech\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right). \tag{3.3.0.14}$$

Calculando nuevamente la energía, pero con las ecuaciones (3.1.0.41) y (3.3.0.14), obtenemos

$$\tilde{E} = 2R\int dk\ \langle\tilde{E}\big|\hat{\tilde{\xi}}^{\dagger}(k)\hat{\tilde{\xi}}(k)\big|\tilde{E}\rangle = 2R\int dk\ \overline{\tilde{\xi}}(k)\tilde{\xi}(k) = \frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2}, \tag{3.3.0.15}$$

lo cual coincide con todo lo anterior.

Hasta aquí, sólo hemos trabajado con el sine-Gordon corrido y seria lógico pensar que ahora sigue hacer el desarrollo de su versión convencional. Sin embargo, el sine-Gordon sin correr trae algunos problemas en su imagen como estado coherente, por esto le dimos prioridad al corrido. Para ilustrar lo anterior mejor, a continuación haremos un desarrollo análogo a los dos casos previos con el sine-Gordon convencional $\varphi_s(x)$.

Para la versión cuántica del solitón sine-Gordon sin correr usaremos igualmente este localizado en el origen $x_* = 0$, que es dado por

$$\varphi_s(x) = \frac{4}{\beta}arctan\left[exp\{\alpha^{1/2}x\}\right],\ -\infty < x < \infty, \tag{3.3.0.16}$$

cuya transformada de Fourier es

$$[\varphi_s(x)]^\wedge_k = \frac{2i\pi}{\beta k}sech\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right) + \frac{2\pi^2}{\beta}\delta(k). \tag{3.3.0.17}$$

En el caso del solitón localizado en cualquier x_*, la transformada de Fourier sería simplemente

$$[\varphi_s(x-x_*)]^\wedge_k = \frac{2i\pi e^{ikx_*}}{\beta k}sech\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right) + \frac{2\pi^2 e^{ikx_*}}{\beta}\delta(k). \tag{3.3.0.18}$$

De (3.3.0.17) podemos ver que el término proporcional a $\delta(k)$ introduce ciertos problemas a la hora de construir las expansiones (3.1.0.1) y (3.1.0.3). Al aparecer $\delta(k)$ en los coeficientes de estas, surgen productos de distribuciones, que como es sabido, en general no están bien definidos [9, 10, 15]. Esto hace, por ejemplo, que al efectuar los cálculos los resultados dependan del orden en que se realizaron, lo que obviamente es bastante ambiguo y no deseable. Lo anterior es justamente la razón por la que no se trabajó en encontrar la imagen como estado coherente del solitón sine-Gordon convencional y en vez de esto se buscó la de su versión corrida.

Por otra parte, es interesante ver que el campo $\varphi_s(x)$ puede ser escrito como la convolución

$$\varphi_s(x) = 2\Theta(x) * \frac{\alpha^{1/2}}{\beta} sech(\alpha^{1/2} x), \tag{3.3.0.19}$$

que al usar

$$2[\Theta(x)]^{\wedge}_k = \frac{2i}{k} + 2\pi\delta(k), \ \frac{\alpha^{1/2}}{\beta}[sech(\alpha^{1/2}x)]^{\wedge}_k = \frac{\pi}{\beta} sech\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right), \tag{3.3.0.20}$$

nos permite encontrar que su transformada de Fourier es

$$[\varphi_s(x)]^{\wedge}_k = \left[\frac{2i}{k} + 2\pi\delta(k)\right]\left[\frac{\pi}{\beta} sech\left(\frac{\pi k}{2\alpha^{1/2}}\right)\right], \tag{3.3.0.21}$$

la cual al realizar el producto y usando las propiedades de la delta de Dirac, nos devuelve la expresión (3.3.0.17).

Notemos que la descomposición (3.3.0.19) no es del tipo (3.1.0.29). Sin embargo, aun en este caso la energía puede ser separada de la topología. Escribamos la descomposición genérica

$$\varphi(x) = 2\Theta(x) * \phi_E(x), \tag{3.3.0.22}$$

cuya derivada es

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\phi_E, \tag{3.3.0.23}$$

por lo que el funcional energía para este caso también se puede escribir como (3.1.0.32), dejando claro que la energía depende solamente de ϕ_E.

La energía que se obtiene para la descomposición (3.3.0.19) mediante (3.1.0.32), con

$$\phi_E(x) = \frac{\alpha^{1/2}}{\beta} sech(\alpha^{1/2}x), \tag{3.3.0.24}$$

es dada por

$$E[\varphi_s] = 4\int_{-\infty}^{\infty} dx\ (\phi_E)^2 = \frac{4\alpha}{\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ sech^2(\alpha^{\frac{1}{2}}x) = \frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2}, \tag{3.3.0.25}$$

la cual, nuevamente, coincide con el valor ya conocido para el solitón sine-Gordon sin correr.

Capítulo 4

Solitones en volumen finito

Hasta el momento, para el caso de volumen infinito, hemos visto que en la imagen como estado coherente de un solitón cuántico la carga topológica aparece ligada a los momentos k extremadamente pequeños, los cuales a su vez son responsables de la divergencia del número de ocupación medio total. Dicha divergencia asegura que la carga topológica no está sujeta a fluctuaciones cuánticas. A pesar de lo anterior, la contribución de estos modos pequeños k a la energía total se desvanece y esta permanece finita.

Debido al importante papel que juegan los momentos k pequeños en el origen cuántico de la carga topológica en volumen infinito, es deseable considerar también los efectos que aparecen al trabajar en tamaño finito. Esto puede darnos información adicional para comprender el significado cuántico de la carga topológica. Además, entender las teorías cuánticas de campos en volumen finito es un problema de gran importancia tanto para los intereses teóricos como para posibles aplicaciones. Un ejemplo de esto es que para interpretar correctamente los resultados obtenidos en simulaciones numéricas, que obviamente son realizadas en volumen finito, es necesario entender bien desde el punto de vista teórico los efectos debidos al tamaño finito. Por otra parte, puesto que los efectos de volumen finito aparecen al probar sistemas a distancias grandes en comparación con el espaciamiento de sus redes, son por tanto universales y suelen contener información relevante del sistema a volumen infinito.

Todo lo mencionado nos muestra lo necesario que es comprender mejor los efectos de tamaño finito y aumentar nuestra capacidad para tratar con ellos. Por esto a continuación trabajaremos la imagen como estados coherentes para solitones en volumen finito, dando especial importancia al kink φ^4, para posteriormente realizar una comparación con sus versiones, ya conocidas, en volumen infinito.

4.1. Solitones clásicos en volumen finito

Ahora nuestro objetivo es encontrar el equivalente de los solitones clásicos pero en volumen finito. Para esto partiremos de la ecuación de campo

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \tag{4.1.0.1}$$

que fue encontrada en el capítulo 2 y tiene como primera integral

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = V(\varphi) + C. \tag{4.1.0.2}$$

Es fácil ver que seguimos trabajando en el caso estático, pero la diferencia es que resolveremos (4.1.0.2) en un volumen finito, lo que hará a la constante de integración C distinta de cero. Lo anterior debido a que el funcional energía tendrá la forma

$$E[\varphi] = \int_{-\pi R}^{\pi R} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + V(\varphi)\right], \tag{4.1.0.3}$$

con $2\pi R$ como volumen regularizado del espacio. Como se ve de (4.1.0.3), no es necesario para mantener la energía finita que C valga cero. Adicionalmente C estará relacionada al tamaño del sistema.

4.1.1. Solitón φ^4 clásico en volumen finito

Los resultados mostrados en esta parte del solitón φ^4 en volumen finito fueron trabajados por G. Mussardo, V. Riva y G. Sotkov en [6].

Para el potencial de la teoría φ^4,

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}g^2\left(\frac{m^2}{g^2} - \varphi^2\right)^2, \; 0 < m < \infty, \; 0 < g < \infty, \tag{4.1.1.1}$$

la solución a la ecuación (4.1.0.2) viene dada por [6]

$$\varphi_{kink}(x) = \frac{m}{g}\bar{\varphi}_{kink}(x), \; -\pi R < x < \pi R, \tag{4.1.1.2}$$

con

$$\bar{\varphi}_{kink}(x) = \sqrt{2 - \bar{\varphi}_0^2}\, sn(\bar{\varphi}_0 m x, k^2), \tag{4.1.1.3}$$

donde $sn(x,k^2)$ es la función elíptica de Jacobi seno de la amplitud (ver apéndice C). Al parámetro k se le conoce como el módulo de las funciones elípticas y su cuadrado toma valores entre 0 y 1, $0 \leq k^2 \leq 1$. Para (4.1.1.3) se tiene

$$k^2 = \frac{2}{\bar{\varphi}_0^2} - 1, \tag{4.1.1.4}$$

con $1 \leq \bar{\varphi}_0 \leq \sqrt{2}$ (debido a los posibles valores de k^2), pero el caso $\bar{\varphi}_0 = \sqrt{2}$ nos lleva a una solución $\varphi_{kink}(x)$ nula y $\bar{\varphi}_0 = 1$ será discutido como un caso particular más adelante, por lo que limitaremos $\bar{\varphi}_0$ al intervalo $1 < \bar{\varphi}_0 < \sqrt{2}$. Además $\bar{\varphi}_0$ es totalmente análogo a (4.1.1.2), $\bar{\varphi}_0 = (g/m)\varphi_0$, y mediante el potencial, φ_0 se relaciona con la constante C de (4.1.0.2) por la expresión

$$V(\varphi_0) = \frac{1}{2}g^2\left(\frac{m^2}{g^2} - \varphi_0^2\right)^2 = -C, \tag{4.1.1.5}$$

notemos que C debe ser menor o igual que cero, $C \leq 0$, para que $V(\varphi_0) \geq 0$.

Al campo (4.1.1.3) le pediremos las condiciones de frontera

$$\bar{\varphi}_{kink}(\pm\pi R) = \pm\sqrt{2-\bar{\varphi}_0^2}\,, \tag{4.1.1.6}$$

lo que se consigue con un período real de la función elíptica $\bar{\varphi}_{kink}(x)$ igual a $4\pi R$, es decir,

$$\bar{\varphi}_{kink}(x+4\pi R) = \bar{\varphi}_{kink}(x), \tag{4.1.1.7}$$

con

$$4\pi R = \frac{4\mathbf{K}(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}, \tag{4.1.1.8}$$

donde $\mathbf{K}(k^2)$ es la integral elíptica completa de primera especie (ver apéndice C). La solución $\bar{\varphi}_{kink}(x)$ oscila entre los valores $\pm\sqrt{2-\bar{\varphi}_0^2}$ a medida que $x \longrightarrow \pm\pi R$ y posee la propiedad

$$\bar{\varphi}_{kink}(x+2\pi R) = -\bar{\varphi}_{kink}(x). \tag{4.1.1.9}$$

Por otro lado, cuando $k^2 \longrightarrow 1$ la integral completa $\mathbf{K}(k^2)$ tiende a infinito, lo que también hace tender R a infinito. Todo lo anterior es equivalente y se obtiene de $\bar{\varphi}_0 \longrightarrow 1$, haciendo así tender el volumen del espacio a infinito en este caso. Cuando el parámetro k^2 es lo suficientemente cercano a la unidad los términos $(1-k^2)^2$ y de orden superior se vuelven despreciables, obteniéndose la aproximación [4]

$$sn(x,k^2) \approx tanh(x) + \frac{1}{4}(1-k^2)\left(senh(x)cosh(x) - x\right)sech^2(x) + \mathcal{O}\left((1-k^2)^2\right), \tag{4.1.1.10}$$

que para (4.1.1.2) toma la forma

$$\varphi_{kink}(x) \approx \frac{m}{g}\sqrt{2-\bar{\varphi}_0^2}\left[tanh(\bar{\varphi}_0 mx) + (1/4)(1-k^2)\left(senh(\bar{\varphi}_0 mx)cosh(\bar{\varphi}_0 mx) - \bar{\varphi}_0 mx\right)sech^2(\bar{\varphi}_0 mx) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \mathcal{O}\left((1-k^2)^2\right)\right], \tag{4.1.1.11}$$

de donde se ve fácilmente que en el limite $\bar{\varphi}_0 \longrightarrow 1$, o equivalentemente cuando $R \longrightarrow \infty$, la solución $\varphi_{kink}(x)$ tiende al kink localizado en el origen ($x_* = 0$) de la teoría φ^4 en volumen infinito. También se puede verificar que $-\varphi_{kink}(x)$ es solución de la ecuación (4.1.0.2) para el potencial (4.1.1.1) con constante (4.1.1.5), el cual igualmente tiende al antikink localizado en el origen de la teoría φ^4 en volumen infinito cuando $R \longrightarrow \infty$.

La energía (4.1.0.3) para la solución (4.1.1.2) es [6]

$$E[\varphi_{kink}] = \frac{2m^3}{g^2\bar{\varphi}_0}\left(-\frac{1}{6}\bar{\varphi}_0^4\mathbf{K}(k^2) + \frac{1}{3}\bar{\varphi}_0^2\left[2\mathbf{E}(k^2) - \mathbf{K}(k^2)\right] + \frac{1}{2}\mathbf{K}(k^2)\right), \tag{4.1.1.12}$$

donde $\mathbf{E}(k^2)$ es la integral elíptica completa de segunda especie (ver apéndice C). Para $k^2 \longrightarrow 1$ las expansiones de $\mathbf{K}(k^2)$ y $\mathbf{E}(k^2)$ en combinación con (4.1.1.8), nos llevan a la expansión asintótica de $E[\varphi_{kink}]$ para valores de R grandes [6]

$$E[\varphi_{kink}] = \frac{4m^3}{3g^2}\left(1 - 12e^{-2\pi mR} + \mathcal{O}\left(e^{-4\pi mR}\right)\right), \tag{4.1.1.13}$$

la cual para $R \longrightarrow \infty$ nos da la energía del kink clásico φ^4 en volumen infinito.

4.1.2. Solitón sine-Gordon clásico en volumen finito

Los resultados mostrados a continuación del solitón sine-Gordon corrido en volumen finito están basados en el trabajo realizado por G. Mussardo, V. Riva y G. Sotkov en [7].

El potencial de la de la teoría sine-Gordon corrido,

$$V(\varphi) = \frac{\alpha}{\beta^2}\left[1 + cos(\beta\varphi)\right],\ 0 < \alpha < \infty,\ \ 0 < \beta < \infty, \tag{4.1.2.1}$$

tiene como solución a la ecuación (4.1.0.2) [7]

$$\tilde{\varphi}_s(x) = \frac{2}{\beta} am\left(\frac{\alpha^{1/2}x}{k}, k^2\right),\ -\pi R < x < \pi R, \tag{4.1.2.2}$$

con

$$k^2 = \frac{2}{2 + \frac{\beta^2 C}{\alpha}}, \tag{4.1.2.3}$$

donde $am(x, k^2)$ es la función amplitud elíptica de Jacobi (ver apéndice C). Como k^2 toma valores entre 0 y 1, $0 \leq k^2 \leq 1$, C será mayor o igual que cero, $C \geq 0$. El caso especial $C = 0$ se discutirá más adelante, por lo que limitaremos al valor de C mayor a cero, $C > 0$.

Le pediremos a la solución (4.1.2.2) que cumpla las condiciones de frontera

$$\tilde{\varphi}_s(\pm\pi R) = \pm\frac{\pi}{\beta}, \tag{4.1.2.4}$$

lo cual se logra cuando

$$\pi R = \frac{k\mathbf{K}(k^2)}{\alpha^{1/2}}, \tag{4.1.2.5}$$

y además $\tilde{\varphi}_s(x)$ tendrá la propiedad

$$\tilde{\varphi}_s(x + 2\pi R) = \frac{2\pi}{\beta} + \tilde{\varphi}_s(x). \tag{4.1.2.6}$$

Igualmente, cuando $k^2 \longrightarrow 1$ la integral completa $\mathbf{K}(k^2)$ y R tenderán a infinito, lo que es equivalente a $C \longrightarrow 0$ y nos lleva al caso de volumen infinito. Si el parámetro k^2 es lo suficientemente cercano a la unidad los términos $(1-k^2)^2$ y de orden superior se vuelven despreciables, obteniéndose la aproximación [4]

$$am(x, k^2) \approx gd(x) + \frac{1}{4}(1-k^2)\left(senh(x)cosh(x) - x\right)sech(x) + \mathcal{O}\left((1-k^2)^2\right), \tag{4.1.2.7}$$

que para (4.1.2.2) toma la forma

$$\tilde{\varphi}_s(x) \approx \frac{2}{\beta}\left[gd(\alpha^{1/2}x/k) + (1/4)(1-k^2)\left(senh(\alpha^{1/2}x/k)cosh(\alpha^{1/2}x/k) - \alpha^{1/2}x/k\right)sech(\alpha^{1/2}x/k) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \mathcal{O}\left((1-k^2)^2\right)\right], \tag{4.1.2.8}$$

de donde se ve fácilmente que en limite $R \longrightarrow \infty$ la solución $\tilde{\varphi}_s(x)$ tiende al solitón sine-Gordon corrido en volumen infinito localizado en el origen ($x_* = 0$). También se puede verificar que $-\tilde{\varphi}_s(x)$ es solución de la ecuación (4.1.0.2) para el potencial (4.1.2.1) con constante (4.1.2.3), el cual tiende al antisolitón sine-Gordon corrido en volumen infinito localizado en el origen para el limite anterior.

La energía (4.1.0.3) para la solución (4.1.2.2) es [7]

$$E[\tilde{\varphi}_s] = \frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2}\left(\frac{1}{k}\mathbf{E}(k^2) + \frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\mathbf{K}(k^2)\right), \tag{4.1.2.9}$$

de la cual, mediante las expansiones de $\mathbf{K}(k^2)$ y $\mathbf{E}(k^2)$ para $k^2 \longrightarrow 1$ y en combinación con (4.1.2.5), se obtiene la expansión asintótica de la energía para valores grandes de R [7]

$$E[\tilde{\varphi}_s] = \frac{8\alpha^{1/2}}{\beta^2}\left(1 + 4e^{-\alpha^{1/2}\pi R} + \mathcal{O}\left(e^{-2\alpha^{1/2}\pi R}\right)\right), \tag{4.1.2.10}$$

que en $R \longrightarrow \infty$ nos da la energía del solitón clásico sine-Gordon corrido en volumen infinito.

4.2. Solitones cuánticos en volumen finito como estados coherentes

En el siguiente desarrollo encerraremos al campo en un volumen finito de $2\pi R$ con condiciones periódicas de frontera en $\pm\pi R$, es decir, la variable espacial x es compactada en una circunferencia de radio R. Gracias a lo anterior el vector de onda k se vuelve discreto,

$$k = \frac{n}{R}\ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{4.2.0.1}$$

haciendo que las integrales sean reemplazadas por

$$\frac{1}{2\pi}\int dk \ldots \longrightarrow \frac{1}{2\pi R}\sum_k \ldots\ , \tag{4.2.0.2}$$

$$\int dx \ldots \longrightarrow \frac{1}{R}\int_{-\pi R}^{\pi R} dx \ldots\ , \tag{4.2.0.3}$$

y la delta de Dirac cambie por una de Kronecker

$$\frac{1}{R}\delta(k-k') \longrightarrow \delta_{k,k'}. \tag{4.2.0.4}$$

Para encontrar la imagen en estados coherentes de nuestras soluciones en volumen finito es necesario construir la expansión en series de Fourier de estas. Lo anterior lo haremos en un volumen de $4\pi R$, en vez de $2\pi R$, con condiciones periódicas de frontera en $\pm 2\pi R$. Esto es conveniente y necesario, por ejemplo, en la teoría φ^4 en volumen finito, ya que la solución $\varphi_{kink}(x)$ tiene período $4\pi R$. El vector de onda k para este caso será

$$k = \frac{n}{2R}\ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{4.2.0.5}$$

Así la serie de Fourier del campo $\varphi(x)$ en volumen finito vendrá dada por (ver apéndice B)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_p \left(c_p e^{ipx} + \overline{c}_p e^{-ipx}\right),\ -2\pi R < x < 2\pi R, \tag{4.2.0.6}$$

donde $p = n/2R$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$) y $\overline{c}_p$ es el complejo conjugado de c_p, los cuales se obtienen de

$$c_p = c_p(\varphi) = \frac{1}{4\pi R}\int_{-2\pi R}^{2\pi R} dx\, \varphi(x) e^{-ipx}, \tag{4.2.0.7}$$

$$\overline{c}_p = \overline{c}_p(\varphi) = \frac{1}{4\pi R}\int_{-2\pi R}^{2\pi R} dx\, \varphi(x) e^{ipx}, \tag{4.2.0.8}$$

y cumplen con la propiedad $\overline{c}_p = c_{-p}$.

Mediante la relación

$$\alpha_p = \sqrt{\pi R\left|p\right|}c_p\ , \tag{4.2.0.9}$$

(4.2.0.6) puede ser reescrita como

$$\varphi(x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{4\pi R\left|p\right|}}\left(\alpha_p e^{ipx} + \overline{\alpha}_p e^{-ipx}\right), \tag{4.2.0.10}$$

donde $\overline{\alpha}_p = \alpha_{-p}$. El operador de campo para el caso de volumen finito se puede obtener de (4.2.0.10) remplazando los coeficientes α_p y $\overline{\alpha}_p$ por los operadores $\hat{\alpha}_p$ y $\hat{\alpha}_p^\dagger$, respectivamente, que satisfacen el álgebra de creación-aniquilación

$$[\hat{\alpha}_p, \hat{\alpha}_{p'}] = 0 = [\hat{\alpha}_p^\dagger, \hat{\alpha}_{p'}^\dagger],\ [\hat{\alpha}_p, \hat{\alpha}_{p'}^\dagger] = \delta_{p,p'}, \tag{4.2.0.11}$$

correspondiente para momentos discretos.

Gracias a lo anterior el operador de campo será

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{R}}\sum_p \frac{1}{\sqrt{4\pi\left|p\right|}}\left(\hat{\alpha}_p e^{ipx} + \hat{\alpha}_p^\dagger e^{-ipx}\right) \tag{4.2.0.12}$$

y basado en el álgebra (4.2.0.11) el operador momento canónico conjugado se define como

$$\hat{\pi}(x) = \frac{-i}{\sqrt{4\pi R}}\sum_p \sqrt{\left|p\right|}\left(\hat{\alpha}_p e^{ipx} - \hat{\alpha}_p^\dagger e^{-ipx}\right), \tag{4.2.0.13}$$

tal que

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)] = 0 = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)],\ [\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\delta(x-y). \tag{4.2.0.14}$$

Fácilmente, $\hat{\alpha}_p$ *y* $\hat{\alpha}_p^\dagger$ son interpretados como los operadores de aniquilación y creación, respectivamente, de los cuantos constituyentes del estado ligado del solitón, $|sol\rangle$, para el cual

$$\langle sol|\,\hat{\varphi}(x)\,|sol\rangle = \varphi(x), \tag{4.2.0.15}$$

donde se ve claramente la conexión entre el valor medio del operador de campo $\hat{\varphi}$ en el estado $|sol\rangle$ y el solitón clásico φ en volumen finito.

Podemos construir a $|sol\rangle$ mediante el uso de estados coherentes $\left|\alpha_p\right\rangle$, que según el formalismo de operadores de creación-aniquilación (ver apéndice A), vienen dados por

$$\left|\alpha_p\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_p|^2+\alpha_p\hat{\alpha}_p^\dagger}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_p|^2}\sum_{n_p=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha_p\right)^{n_p}}{\sqrt{n_p!}}\left|n_p\right\rangle \tag{4.2.0.16}$$

y cumplen

$$\hat{\alpha}_p\left|\alpha_p\right\rangle = \alpha_p\left|\alpha_p\right\rangle, \ \left\langle\alpha_p\right|\hat{\alpha}_p^\dagger = \left\langle\alpha_p\right|\overline{\alpha}_p, \tag{4.2.0.17}$$

donde $|0\rangle$ es el vacío de Minkowski y $\left|n_p\right\rangle$ es el estado de n_p corpúsculos con momento p, tales que

$$\hat{\alpha}_p|0\rangle = 0, \ \langle 0|\hat{\alpha}_p^\dagger = 0, \tag{4.2.0.18}$$

$$\hat{\alpha}_p\left|n_p\right\rangle = \sqrt{n_p}\left|n_p-1\right\rangle, \ \hat{\alpha}_p^\dagger\left|n_p\right\rangle = \sqrt{n_p+1}\left|n_p+1\right\rangle. \tag{4.2.0.19}$$

La ecuación (4.2.0.15) pueden ser resuelta de acuerdo a las propiedades generales de los estados coherentes (ver apéndice A), mediante el producto tensorial

$$|sol\rangle = \prod_{\otimes p}\left|\alpha_p\right\rangle, \tag{4.2.0.20}$$

para el cual es fácil ver que cumple

$$\hat{\alpha}_p|sol\rangle = \alpha_p|sol\rangle, \ \langle sol|\hat{\alpha}_p^\dagger = \langle sol|\overline{\alpha}_p. \tag{4.2.0.21}$$

Con lo anterior podemos introducir la cantidad N_p definida por

$$N_p \equiv \langle sol|\hat{\alpha}_p^\dagger\hat{\alpha}_p|sol\rangle = \overline{\alpha}_p\alpha_p, \tag{4.2.0.22}$$

la cual, debido a los operadores de creación y aniquilación, se espera que sea el número de ocupación medio de cuantos con momento p en el estado coherente $|sol\rangle$. Lo anterior es consecuencia de la forma estándar de definir el operador número de partículas para cada valor de p, $\hat{N}_p \equiv \hat{\alpha}_p^\dagger\hat{\alpha}_p$, que deja claro el significado dado a la definición (4.2.0.22). Correspondientemente, el número de ocupación medio total N se obtiene de

$$N \equiv \sum_p N_p = \sum_p \overline{\alpha}_p\alpha_p = \sum_p \langle sol|\hat{\alpha}_p^\dagger\hat{\alpha}_p|sol\rangle. \tag{4.2.0.23}$$

Ahora consideremos el caso en que $\varphi(x)$ puede ser escrito como el producto de convolución

$$\varphi(x) = T(x) * \phi_E(x), \tag{4.2.0.24}$$

para el cual, de forma análoga al capítulo anterior, se separa la parte topológica de la energética, estando la primera contenida en $T(x)$ y la segunda en $\phi_E(x)$.

Al calcular los coeficientes de la serie de Fourier de (4.2.0.24), gracias a las propiedades de la convolución circular (ver apéndice B), se obtiene

$$c_p(\varphi) = 4\pi R c_p(T) c_p(\phi_E), \tag{4.2.0.25}$$

y comparándolos con (4.2.0.9), se sigue que el coeficiente α_p para este caso admite la representación

$$\alpha_p = t_p \xi_p, \tag{4.2.0.26}$$

donde

$$t_p = 4\sqrt{|p|}c_p(T),\ \xi_p = \pi R\sqrt{\pi R}c_p(\phi_E). \tag{4.2.0.27}$$

Un ejemplo importante ocurre cuando la parte topológica viene dada por $T(x) = sgn(x)$, es decir, $\varphi(x)$ tiene la descomposición

$$\varphi(x) = sgn(x) * \phi_E(x), \tag{4.2.0.28}$$

con coeficientes t_p y ξ_p dados por

$$t_0 = 0, \tag{4.2.0.29}$$

$$t_p = \frac{2i\sqrt{|p|}}{\pi R}\frac{\left((-1)^{n(p)}-1\right)}{p} = \frac{4i}{\pi}\sqrt{\frac{|n|}{2R}}\frac{((-1)^n-1)}{n}, \tag{4.2.0.30}$$

$$\xi_p = \pi R\sqrt{\pi R}c_p(\phi_E), \tag{4.2.0.31}$$

donde $n(p) = 2Rp$.

Por otro lado, es fácil verificar que la derivada de (4.2.0.28) toma el valor

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\phi_E, \tag{4.2.0.32}$$

haciendo que el funcional energía (4.1.0.3), para este caso, se pueda escribir como

$$E[\varphi] = \int_{-\pi R}^{\pi R} dx \left[4\left(\phi_E\right)^2 - C\right], \tag{4.2.0.33}$$

lo cual muestra que la energía depende solamente de ϕ_E.

Al igual que antes, en el nivel cuántico la descomposición (4.2.0.28) implica que el operador de campo $\hat{\varphi}(x)$ tiene la siguiente representación

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{T}(x) * \hat{\phi}_E(x), \tag{4.2.0.34}$$

donde $\hat{T}(x)$ y $\hat{\phi}_E(x)$ definen las imágenes cuánticas de la topológia y energía, respectivamente. Dichos operados de campo actúan en diferentes espacios de Fock y correspondientemente con la convolución (4.2.0.34), el solitón cuántico puede ser escrito como un estado coherente de la forma

$$|sol\rangle = |T\rangle \otimes |E\rangle, \tag{4.2.0.35}$$

con $|T\rangle$ y $|E\rangle$ estados coherentes que poseen la información topológica y energética, respectivamente.

Para construir los estados de la expresión (4.2.0.35) definimos dos conjuntos de operadores $\hat{t}_p^\dagger$, $\hat{t}_p$, y $\hat{\xi}_p^\dagger$, $\hat{\xi}_p$, los cuales satisfacen el álgebra de creación-aniquilación estándar. Los estados coherentes de estos nuevos operadores de creación y aniquilación son

$$\hat{t}_p\left|t_p\right\rangle = t_p\left|t_p\right\rangle,\ \langle\, t_p\right|\hat{t}_p^\dagger = \langle t_p\right|\bar{t}_p, \tag{4.2.0.36}$$

$$\hat{\xi}_p \left|\xi_p\right\rangle = \xi_p \left|\xi_p\right\rangle, \langle \xi_p \right| \hat{\xi}_p^\dagger = \langle \xi_p \right| \bar{\xi}_p, \tag{4.2.0.37}$$

donde t_p y ξ_p se obtienen de (4.2.0.27). Así, $|T\rangle$ y $|E\rangle$ vendrán dados por

$$|T\rangle = \prod_p \left|t_p\right\rangle, \ |E\rangle = \prod_p \left|\xi_p\right\rangle, \tag{4.2.0.38}$$

y es fácil ver que cumplen

$$\hat{t}_p |T\rangle = t_p |T\rangle, \ \langle T| \hat{t}_p^\dagger = \langle T| \bar{t}_p, \tag{4.2.0.39}$$

$$\hat{\xi}_p |E\rangle = \xi_p |E\rangle, \ \langle E| \hat{\xi}_p^\dagger = \langle E| \bar{\xi}_p. \tag{4.2.0.40}$$

4.2.1. Solitón φ^4 cuántico en volumen finito

Para la solución en volumen finito (4.1.1.2),

$$\varphi_{kink}(x) = \frac{m\sqrt{2-\bar{\varphi}_0^2}}{g} sn(\bar{\varphi}_0 mx, k^2), \tag{4.2.1.1}$$

podemos calcular los coeficientes $c_k(\varphi_k)$ y $\bar{c}_k(\varphi_k)$ y con estos obtener α_k y $\bar{\alpha}_k$, para así llegar a la serie de Fourier de $\varphi_{kink}(x)$. Sin embargo, este procedimiento es bastante complicado debido a que las integrales que surgen pueden ser difíciles de resolver. Por esto encontraremos la expansión en series de Fourier de una forma alternativa, como mostraremos en lo siguiente.

La función elíptica $sn(x,k^2)$ es impar y tiene período $4\mathbf{K}(k^2)$, por lo que su serie de Fourier en el intervalo $\left(-2\mathbf{K}(k^2), 2\mathbf{K}(k^2)\right)$ sólo tendrá términos con funciones senos del tipo

$$sen\left(\frac{m\pi}{2\mathbf{K}(k^2)}x\right), \tag{4.2.1.2}$$

donde m es un entero positivo y debido a la propiedad $sn\left(x+2\mathbf{K}(k^2),k^2\right) = -sn(x,k^2)$, todos los valores de m serán impares. Lo anterior se puede ver de la serie [4, 8]

$$sn(x,k^2) = \frac{\pi}{k\mathbf{K}(k^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\left[\frac{(2n-1)\pi}{2\mathbf{K}(k^2)}x\right]}{senh\left[\frac{(2n-1)\pi}{2\mathbf{K}(k^2)}\mathbf{K}'(k^2)\right]}, \tag{4.2.1.3}$$

con $\mathbf{K}'(k^2) = \mathbf{K}(1-k^2)$ (ver apéndice C).

Usando (4.2.1.3) en combinación de (4.1.1.4) y (4.1.1.8) obtenemos

$$\varphi_{kink}(x) = \frac{1}{gR} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\left[\frac{(2n-1)}{2R}x\right]}{senh\left[\frac{(2n-1)}{2m\bar{\varphi}_0 R}\mathbf{K}'(k^2)\right]}, \tag{4.2.1.4}$$

la cual es la serie de Fourier de $\varphi_{kink}(x)$ para el intervalo $(-2\pi R, 2\pi R)$. Esta puede ser escrita en la forma (4.2.0.10) mediante la expresión en exponenciales complejas del $sen(x)$, consiguiendo así la serie

$$\varphi_{kink}(x) = \frac{1}{gR} \sum_p \frac{\left(e^{ipx} - e^{-ipx}\right)}{2isenh\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}p\right]}, \tag{4.2.1.5}$$

donde $p = \frac{2n-1}{2R}$ (n= 1,2,3,...).

Al comparar (4.2.1.5) con (4.2.0.10) encontramos que los coeficientes α_p y $\overline{\alpha}_p$ vienen dados por

$$\alpha_p = \frac{\sqrt{\pi R |p|}}{2gRisenh\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}p\right]}, \tag{4.2.1.6}$$

$$\overline{\alpha}_p = -\frac{\sqrt{\pi R |p|}}{2gRisenh\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}p\right]}, \tag{4.2.1.7}$$

de donde se ve fácilmente que $\overline{\alpha}_p = \alpha_{-p}$. Con lo anterior podemos construir el estado coherente $|kink\rangle$, tal que, el valor medio del operador de campo $\hat{\varphi}_{kink}(x)$ de la teoría cuántica φ^4 en volumen finito corresponda con (4.2.1.1)

$$\langle kink|\,\hat{\varphi}_{kink}(x)\,|kink\rangle = \varphi_{kink}(x). \tag{4.2.1.8}$$

Para el número de ocupación medio en el estado coherente $|kink\rangle$, con momento p, se obtiene

$$N_p = \langle kink|\,\hat{\alpha}_p^\dagger \hat{\alpha}_p\,|kink\rangle = \overline{\alpha}_p \alpha_p = \frac{\pi|p|}{4g^2Rsenh^2\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}p\right]}, \tag{4.2.1.9}$$

lo que nos lleva a un número de ocupación medio total igual a

$$N = \sum_p N_p = \frac{\pi}{4g^2R}\sum_p \frac{|p|}{senh^2\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}p\right]} = \frac{\pi}{4g^2R}\sum_p \frac{p}{senh^2\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}p\right]}, \tag{4.2.1.10}$$

notemos que p siempre es positivo debido a los valores posibles de n.

Estamos especialmente interesados en estudiar la convergencia de N, para esto empezaremos por reescribir este de la forma

$$N = \frac{\pi}{4g^2R}\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \tag{4.2.1.11}$$

con

$$f(n) = \frac{p(n)}{senh^2\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}p(n)\right]} \tag{4.2.1.12}$$

y

$$p(n) = \frac{2n-1}{2R}. \tag{4.2.1.13}$$

Estudiaremos la convergencia de N usando el criterio de la integral. Para poder aplicarlo necesitamos que $f(x)$ sea positiva, continua y decreciente en el intervalo $[1,\infty)$. Copiando $f(x)$ de forma explícita

$$f(x) = \frac{(2x-1)}{2Rsenh^2\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{2m\bar{\varphi}_0R}(2x-1)\right]}, \tag{4.2.1.14}$$

vemos que el dominio de esta función es $(-\infty,1/2)\cup(1/2,\infty)$, por lo que es continua en todo x, excepto en $x=1/2$. Además, $f(x)$ es positiva para $x>1/2$ y negativa para $x<1/2$. Gracias a lo anterior, las dos primeras condiciones se cumplen en la región deseada y soló faltaría verificar la última. Para ver si $f(x)$ es decreciente analicemos su primera derivada

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{senh\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{2m\bar{\varphi}_0R}(2x-1)\right]-2\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{2m\bar{\varphi}_0R}(2x-1)cosh\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{2m\bar{\varphi}_0R}(2x-1)\right]}{Rsenh^3\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{2m\bar{\varphi}_0R}(2x-1)\right]},\tag{4.2.1.15}$$

que con el cambio de variable

$$y=\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{2m\bar{\varphi}_0R}(2x-1),\tag{4.2.1.16}$$

nos permite estudiar su signo a través de la función

$$g(y)=\frac{senh(y)-2ycosh(y)}{senh^3(y)},\tag{4.2.1.17}$$

la cual es negativa en todo su dominio, $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Comparando $g(y)$ con (4.2.1.15) es fácil ver que la derivada es simplemente una versión traslada de esta en $1/2$ hacia la derecha (obviamente también sufre cierta compresión o alargamiento, tanto horizontal como vertical debido a las constantes). Así, se verifica que la derivada de $f(x)$ es negativa en todo su dominio (los reales menos el $1/2$), lo que garantiza que $f(x)$ es decreciente en el intervalo de interés y en combinación con las otras condiciones nos permite aplicar el criterio de la integral.

El criterio de la integral nos garantiza que $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ converge, sí y sólo si, $\int_1^{\infty}dxf(x)$ converge. Calculando dicha integral obtenemos

$$\int_1^{\infty}dxf(x)=\frac{m^2\bar{\varphi}_0^2R}{\mathbf{K}'(k^2)}\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{2m\bar{\varphi}_0R}coth\left(\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{2m\bar{\varphi}_0R}\right)-ln\left(senh\left(\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{2m\bar{\varphi}_0R}\right)\right)-ln(2)\right],\tag{4.2.1.18}$$

cuya convergencia dependerá de los valores de $\mathbf{K}'(k^2)$. La integral elíptica completa

$$\mathbf{K}'(k^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-(1-k^2)sen^2(\alpha)}},\tag{4.2.1.19}$$

toma valores mayores o iguales a $\pi/2$, es decir, $\frac{\pi}{2}\leq\mathbf{K}'(k^2)<\infty$. Esta integral converge cuando $0<k^2<1$, vale $\pi/2$ si $k^2=1$ y diverge para $k^2=0$. Pero desde el caso clásico en volumen finito los valores de k^2 estaban limitados a $0<k^2<1$, lo que es equivalente a $1<\bar{\varphi}_0<\sqrt{2}$. Lo anterior debido a que $\bar{\varphi}_0\longrightarrow 1(k^2\longrightarrow 1)$ nos devolvía a la teoría φ^4 en volumen infinito y $\bar{\varphi}_0=\sqrt{2}$ $(k^2=0)$ nos llevaba a una solución nula para el campo $\varphi_{kink}(x)$. Por esto la integral (4.2.1.18) converge para todos los valores de k^2 de interés en volumen finito.

Debido a todo lo mencionado, el criterio de la integral garantiza que $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ converge. Notemos también que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(n)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}f(n),\tag{4.2.1.20}$$

lo que implica que la serie es, en realidad, absolutamente convergente. Así queda demostrado que el número de ocupación medio total N converge absolutamente y esto muestra la mayor diferencia diferencia entre el caso de volumen finito e infinito.

Por otro lado, podemos escribir la solución $\varphi_{kink}(x)$ como el producto de convolución

$$\varphi_{kink}(x) = sgn(x) * \frac{1}{2}\frac{d\varphi_{kink}(x)}{dx}, \tag{4.2.1.21}$$

la cual mediante la derivada

$$\frac{dsn(x)}{dx} = cn(x)dn(x), \tag{4.2.1.22}$$

puede ser escrita como

$$\varphi_{kink}(x) = sgn(x) * \frac{m^2\bar{\varphi}_0\sqrt{2-\bar{\varphi}_0^2}}{2g} cn(\bar{\varphi}_0 mx, k^2) dn(\bar{\varphi}_0 mx, k^2), \tag{4.2.1.23}$$

donde $cn(x,k^2)$ y $dn(x,k^2)$ son las funciones elípticas de Jacobi coseno de la amplitud y delta amplitud (ver apéndice C), respectivamente.

Ahora, usando la expansión [14]

$$sgn(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} sen\left(\frac{(2n-1)x}{2R}\right) = \frac{1}{2}\sum_p \frac{2}{\pi R p i}\left(e^{ipx} - e^{-ipx}\right), \; -2\pi R < x < 2\pi R, \tag{4.2.1.24}$$

obtenemos

$$c_p(sgn) = -\frac{i}{\pi R p}, \tag{4.2.1.25}$$

esto también se puede encontrar de (4.2.0.29) y (4.2.0.30) en combinación con (4.2.0.27). Además, con

$$\phi_E(x) = \frac{1}{2}\frac{d\varphi_{kink}(x)}{dx} = \frac{1}{2}\sum_p \frac{p\left(e^{ipx} + e^{-ipx}\right)}{2gRsenh\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}p\right]}, \tag{4.2.1.26}$$

encontramos que

$$c_p(\phi_E) = \frac{p}{4gRsenh\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}p\right]}. \tag{4.2.1.27}$$

La descomposición (4.2.1.23) implica que nuestro solitón cuántico φ^4 en volumen finito puede ser escrito como un estado coherente según la forma planteada en las ecuaciones (4.2.0.35, 4.2.0.36, 4.2.0.37, 4.2.0.38), con coeficientes t_p y ξ_p dados por

$$t_p = \frac{-4i\sqrt{|p|}}{\pi R p} = \frac{-4i\sqrt{p}}{\pi R p} = \frac{-4i}{\pi R\sqrt{p}}, \; \xi_p = \frac{\pi\sqrt{\pi R}p}{4gsenh\left[\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{m\bar{\varphi}_0}p\right]}. \tag{4.2.1.28}$$

4.2.2. Solitón sine-Gordon cuántico en volumen finito

Con el fin de obtener la imagen como estado coherente del solitón sine-Gordon corrido en volumen finito (4.1.2.2),

$$\tilde{\varphi}_s(x) = \frac{2}{\beta} am\left(\frac{\alpha^{1/2}x}{k}, k^2\right), \tag{4.2.2.1}$$

podríamos usar la serie de Fourier [8]

$$am(x,k^2)=\frac{\pi x}{2\mathbf{K}(k^2)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}sech\left(n\pi\frac{\mathbf{K}'(k^2)}{\mathbf{K}(k^2)}\right)sen\left(\frac{n\pi x}{\mathbf{K}(k^2)}\right), \tag{4.2.2.2}$$

con

$$\frac{\pi x}{2\mathbf{K}(k^2)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}sen\left(\frac{n\pi x}{\mathbf{K}(k^2)}\right), \tag{4.2.2.3}$$

pero no es de utilidad ya que el lado derecho de (4.2.2.3) no converge a las condiciones de frontera deseadas $\pm\pi/2$ en $x=\pm\mathbf{K}(k^2)$. Por otra parte, $am(x,k^2)$ dada por (4.2.2.2) no puede ser reescrita como una convolución con $sgn(x)$, cuya serie de Fourier viene dada solamente en términos senos de orden impar.

Podemos considerar prolongar la función $am(x,k^2)$ fuera del rango $-\mathbf{K}(k^2)<x<+\mathbf{K}(k^2)$, para hacer que su expansión en series de Fourier sea compatible con las condiciones de contorno. Como es bien sabido, esta prolongación debe ser continua en los puntos extremos para garantizar la convergencia en ellos al valor requerido. En el caso presente, este requisito reduce la elección a una extensión periódica con periodo $4\mathbf{K}(k^2)$, lo cual también es sugerido por el estudio anterior de la imagen como estado coherente del solitón φ^4.

Consideremos la prolongación $f(x)$ de $am(x)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} am(x), & si \quad -\mathbf{K}<x<\mathbf{K};\\ am(2\mathbf{K}-x), & si \quad \mathbf{K}<x<3\mathbf{K};\\ am(x-4\mathbf{K}), & si \quad 3\mathbf{K}<x<4\mathbf{K}.\end{cases} \tag{4.2.2.4}$$

La extensión de $f(x)$ es dada por $am(x)$ para $-\mathbf{K}<x<\mathbf{K}$. Esta se prolonga en $\mathbf{K}<x<3\mathbf{K}$ de tal forma que sea simétrica respecto $x=\mathbf{K}$. Por último, la prolongación (4.2.2.4) está hecha para que $f(x)$ sea una función periódica de periodo $4\mathbf{K}$ y posee la propiedad $f(x+2\mathbf{K})=-f(x)$, lo que hace a su serie de Fourier tener sólo términos senos impares.

La serie de Fourier de $f(x)$ viene dada por

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\, sen\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\mathbf{K}}\right), \tag{4.2.2.5}$$

donde

$$f_n=\frac{1}{\mathbf{K}}\int_{-\mathbf{K}}^{\mathbf{K}}du\, am(u)sen\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2\mathbf{K}}\right)=\ldots$$

$$\ldots-\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2^2}{(2n-1)^2}\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2-4m^2}sech\left(\frac{m\pi\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}\right)\right], \tag{4.2.2.6}$$

de la cual obtenemos

$$am(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\, sen\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\mathbf{K}}\right),\ -\mathbf{K}<x<\mathbf{K}. \tag{4.2.2.7}$$

Usando (4.2.2.7) en combinación con (4.1.2.5) encontramos que

$$\tilde{\varphi}_s(x) = \frac{2}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\, sen\left(\frac{(2n-1)x}{2R}\right), \; -\pi R < x < \pi R, \tag{4.2.2.8}$$

donde f_n viene dado por (4.2.2.6). Nuevamente, usando la expresión en exponenciales complejas del $sen(x)$ y tomando $p = \frac{2n-1}{2R}$ $(n = 1,2,3,...)$, llegamos a

$$\tilde{\varphi}_s(x) = \frac{1}{\beta}\sum_p \frac{f_p}{i}\left(e^{ipx} - e^{-ipx}\right), \tag{4.2.2.9}$$

con

$$f_p = -\frac{(-1)^{n(p)}}{\pi}\frac{1}{R^2p^2}\left[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{R^2p^2}{R^2p^2 - m^2} sech\left(\frac{m\pi\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}\right)\right], \tag{4.2.2.10}$$

donde $n(p) = Rp + 1/2$. Es fácil demostrar que f_p cumple con $f_{-p} = -f_p$.

Ahora, comparando (4.2.2.9) con (4.2.0.10) obtenemos

$$\tilde{\alpha}_p = \frac{\sqrt{\pi R|p|}f_p}{\beta i}, \tag{4.2.2.11}$$

$$\bar{\tilde{\alpha}}_p = -\frac{\sqrt{\pi R|p|}f_p}{\beta i}, \tag{4.2.2.12}$$

de donde se ve que $\bar{\tilde{\alpha}}_p = \tilde{\alpha}_{-p}$. Con lo anterior podemos construir el estado coherente $|\tilde{sol}\rangle$, tal que, el valor medio del operador de campo $\hat{\tilde{\varphi}}_s(x)$ de la teoría cuántica del sine-Gordon corrido en volumen finito coincida con (4.2.2.1)

$$\langle\tilde{sol}|\,\hat{\tilde{\varphi}}_s(x)\,|\tilde{sol}\rangle = \tilde{\varphi}_s(x). \tag{4.2.2.13}$$

Para el número de ocupación medio en el estado coherente $|\tilde{sol}\rangle$, con momento p, se obtiene

$$\tilde{N}_p = \langle\tilde{sol}|\,\hat{\tilde{\alpha}}_p^{\dagger}\hat{\tilde{\alpha}}_p\,|\tilde{sol}\rangle = \bar{\tilde{\alpha}}_p\tilde{\alpha}_p = \frac{\pi R|p|f_p^2}{\beta^2}, \tag{4.2.2.14}$$

lo que nos lleva a un número de ocupación medio total igual a

$$\tilde{N} = \sum_p \tilde{N}_p = \frac{\pi R}{\beta^2}\sum_p |p|f_p^2 = \frac{\pi R}{\beta^2}\sum_p p f_p^2\,, \tag{4.2.2.15}$$

notemos que p siempre es positivo debido a los valores posibles de n.

En el caso del solitón sine-Gordon corrido en volumen finito no estudiaremos la convergencia de su número de ocupación medio total $\tilde{N}$, ya que plantea problemas técnicamente desafiantes que están más allá del alcance de este trabajo. Lo anterior se puede ver de la expresión (4.2.2.15), la cual es una serie que a su vez tiene términos que en si mismos son proporcionales a series al cuadrado, como se ve de (4.2.2.10).

Por otro lado, se puede escribir la solución $\tilde{\varphi}_s(x)$ como la convolución

$$\tilde{\varphi}_s(x) = sgn(x) * \frac{1}{2}\frac{d\tilde{\varphi}_s(x)}{dx}, \tag{4.2.2.16}$$

la cual mediante la derivada

$$\frac{dam(x)}{dx} = dn(x), \tag{4.2.2.17}$$

puede ser escrita como

$$\tilde{\varphi}_s(x) = sgn(x) * \frac{\alpha^{1/2}}{\beta k} dn\left(\frac{\alpha^{1/2} x}{k}, k^2\right). \tag{4.2.2.18}$$

Podemos ver que

$$\phi_E(x) = \frac{1}{2}\frac{d\tilde{\varphi}_s(x)}{dx} = \frac{1}{2}\sum_p \frac{p f_p}{\beta}\left(e^{ipx} + e^{-ipx}\right), \tag{4.2.2.19}$$

de donde se obtiene

$$c_p(\phi_E) = \frac{p f_p}{2\beta} \tag{4.2.2.20}$$

y de (4.2.1.25) ya se habían encontrado los coeficientes

$$c_p(sgn) = -\frac{i}{\pi R p}. \tag{4.2.2.21}$$

La descomposición (4.2.2.18) implica que nuestro solitón cuántico sine-Gordon corrido en volumen finito puede ser escrito como un estado coherente según la forma planteada en las ecuaciones (4.2.0.35, 4.2.0.36, 4.2.0.37, 4.2.0.38), con coeficientes t_p y ξ_p dados por

$$t_p = \frac{-4i\sqrt{|p|}}{\pi R p} = \frac{-4i\sqrt{p}}{\pi R p} = \frac{-4i}{\pi R\sqrt{p}}, \; \xi_p = \frac{\pi R\sqrt{\pi R} p f_p}{2\beta}. \tag{4.2.2.22}$$

Capítulo 5

Conclusiones

A continuación, antes de pasar a enunciar las conclusiones del presente trabajo, creemos conveniente resumir muy brevemente los antecedentes.

La imagen de un solitón cuántico como un estado ligado coherente de número infinito de constituyentes no es nueva, la misma fue adelantada hace ya algún tiempo por J. G. Taylor [25], quien muestra que la existencia de un número cuántico topológico conservado corresponde a un número de constituyentes infinito.

Como ha sido comentado con anterioridad, clásicamente la carga topológica proviene de la diferencia de los valores que toma el campo en la frontera y de aquí que en la teoría cuántica se espere que dicha carga venga determinada por los constituyentes de longitudes de onda muy largas, que son los que capturan el comportamiento a gran escala. Así, los constituyentes del solitón cuántico que contribuyen a la energía de la configuración solitónica llevan también información de la carga topológica.

En la referencia [1] G. Dvali, C. Gomez, L. Gruending y T. Rug construyen el estado del solitón topológico de la teoría φ^4 (en (1+1) dimensiones con la dimensión espacial infinita) como un estado ligado coherente de un número infinito de constituyentes. En dicho trabajo se muestran explícitamente que el número medio de ocupación es una cantidad divergente (en el infrarrojo) y que por lo tanto la carga topológica del solitón no recibe correcciones cuánticas. Adicionalmente los autores muestran que dicho estado puede ser descompuesto como un estado producto tensorial en el cual una parte lleva la información sobre la topología y otra lleva la información de la energía del solitón.

En el presente trabajo, interesados en el origen cuántico de la carga topológica de los solitones y con miras a profundizar sobre el papel determinante que juegan los cuantos constituyentes de longitud de onda infinita en el mismo, consideramos el caso de solitones definidos en un volumen finito. Así, luego de una revisión de la descripción vía estados ligados coherentes tanto del solitón topológico φ^4 [1] como del solitón sine-Gordon [5], en (1+1) dimensiones con la dimensión espacial infinita, nos avocamos al caso de dimensión espacial finita. Siguiendo la referencia [1], proponemos que el estado del solitón topológico cuántico definido en un volumen finito para el caso particular de la teoría φ^4, estará descrito por el estado coherente en el cual el valor esperado del correspondiente operador de campo coincide con el campo clásico asociado al solitón. Para el solitón topológico clásico φ^4 tomamos el encontrado en la referencia [6], definido sobre la circunferencia $2\pi R$ de un cilindro y por lo tanto con una energía finita, el cual es obtenido imponiendo condiciones de contorno orientadas solo a encontrar una solución a la ecuación de campo con el perfil apropiado [6]. Esta configuración clásica reproduce en el límite $R \longrightarrow \infty$ las propiedades del solitón topológico clásico de la teoría φ^4 en volumen infinito.

Encontramos que los operadores asociados con el estado del solitón como objeto extendido, para el solitón topológico de la teoría φ^4 en volumen finito, aparecen en la teoría cuántica de manera natural, sustituidas las transformadas de Fourier para volumen infinito por series de Fourier en el caso de volumen finito. En forma análoga al caso de volumen infinito, construimos el estado del solitón topológico como un estado ligado coherente de un número infinito de constituyentes. Encontramos aquí que el número medio de ocupación es una cantidad finita que solo diverge en el límite $R \longrightarrow \infty$, esto es para volumen infinito, recuperando solo en este límite el resultado obtenido en la referencia [1].

También encontramos que el estado coherente del solitón topológico de la teoría φ^4 en volumen finito, es descomponible como un estado producto tensorial en el cual una parte contiene información sobre la topología y la otra lleva la información de la energía, tal y como ocurre también en volumen infinito.

Ahora bien, el número de ocupación finito obtenido para el solitón φ^4 definido sobre una dimensión espacial acotada, nos dice que la carga topológica en este caso puede llegar a admitir correcciones cuánticas (si se incluyen interacciones). En este punto es conveniente señalar:

- En lo que concierne al estado cuántico de un solitón en volumen finito, se deberá tener en cuenta que en general la superficie borde de un sistema finito, cuando no está soportada por una fuerza externa, tendrá que mantenerse de manera auto-consistente. De aquí que la estabilidad de un sistema finito implica que su superficie borde debe ser mantenida por ciertas correlaciones de largo alcance o modos colectivos.

- El solitón cuántico φ^4 definido sobre un cilindro de circunferencia $2\pi R$, también podría ser interpretado como un cristal de solitones y antisolitones en la teoría φ^4 en volumen infinito (para un cristal de solitones y antisolitones sine-Gordon véase la referencia [26]). Es claro que en un volumen finito con condiciones de contorno periódicas, el solitón interactuará con sus propias copias y/o con el antisolitón y sus copias.

- En general, en las teorías cuánticas de campo con sectores topológicos, considerar la restricción a solo un sector topológico conlleva típicamente a fuertes efectos de volumen finito, los cuales están suprimidos por potencias del inverso del volumen. Comúnmente se acepta que los resultados con significado físico corresponden a volumen infinito y/o topología sin fijar.

Dichas cuestiones son sumamente interesantes y profundas, de las que no sabe mucho y que requieren más investigación.

En el corto plazo, entre las posibles extensiones del presente trabajo está la construcción del estado ligado coherente para el solitón topológico sine-Gordon definido en un volumen finito, el cual planteó serios problemas técnicos cuya solución estaba más allá del alcance pretendido en esta tesis. Adicionalmente, sería deseable profundizar sobre el significado cuántico de la interacción solitón-antisolitón usando el lenguaje de estados coherentes [1] y estudiar la misma en el caso de volumen finito.

Nos gustaría concluir con un par de comentarios[1]: *Aún se desconoce dónde descansa la frontera entre objetos macroscópicos y objetos microscópicos. De hecho, como teoría para objetos macroscópicos la Teoría Cuántica de Campos se encuentra todavía en un temprano estado de desarrollo.*

[1]Tomado del libro Thermo Field Dynamics and Condensed States de H. Umezawa, H. Matsumoto y M. Tachiki (North-Holland, Amsterdam, 1982).

Apéndice A

Representación en estados coherentes de los espacios de Hilbert

A continuación recopilamos algunos resultados importantes de la representación en estados coherentes de un espacio de Hilbert (ver la referencia [19]).

En las siguientes expresiones los operadores de creación y aniquilación, $\hat{a}_k^\dagger$ y $\hat{a}_k$, respectivamente, con $k = 1, 2, 3, ..., K$, aparecerán en orden normal. Para una expresión ordenada normal todos los operadores de creación están a la izquierda de todos los operadores de aniquilación. Esto también es conocido como el orden de Wick y es denotado por el símbolo de doble punto

$$: \frac{1}{2}(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger) : \equiv \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \tag{A.0.0.1}$$

Dado el álgebra de creación-aniquilación

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0 = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger],\ [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'},\ k, k' = 1, 2, 3, ..., K, \tag{A.0.0.2}$$

los elementos diagonales de una función ordenada normal, en la representación en estados coherentes del espacio de Hilbert, vienen dados por

$$F =: F :,\ \langle \{\alpha_k\} | F(\{\hat{a}_k^\dagger\}, \{\hat{a}_k\}) | \{\alpha_k\} \rangle = F(\{\bar{\alpha}_k\}, \{\alpha_k\}), \tag{A.0.0.3}$$

donde

$$|\{\alpha_k\}\rangle \equiv \prod_{\otimes k=1}^{K} |\alpha_k\rangle\,,\ \hat{a}_k |\alpha_k\rangle = \alpha_k |\alpha_k\rangle\,,\ \langle \alpha_k | \hat{a}_k^\dagger = \langle \alpha_k | \bar{\alpha}_k, \tag{A.0.0.4}$$

con los autovectores $|\alpha_k\rangle$ del operador de aniquilación $\hat{a}_k$ dados por

$$|\alpha_k\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_k|^2} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |n_k\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_k|^2 + \alpha_k \hat{a}_k^\dagger} |0\rangle\,. \tag{A.0.0.5}$$

Los estados $|\{\alpha_k\}\rangle$ satisfacen la relación de cierre

$$\int d^2\alpha\, |\{\alpha_k\}\rangle \langle \{\alpha_k\}| = 1, \tag{A.0.0.6}$$

con

$$d^2\alpha = \prod_{k=1}^{K} \frac{d\,(Re\ \alpha_k)\, d\,(Im\ \alpha_k)}{\pi}. \tag{A.0.0.7}$$

Una forma equivalente de $|\{\alpha_k\}\rangle$ es dada por

$$|\{\alpha_k\}\rangle = U_K(\bar{\alpha},\alpha)\,|0\rangle\,,\; U_K(\bar{\alpha},\alpha) \equiv exp\left\{\sum_{k=1}^{K}\left(\alpha_k \hat{a}_k^{\dagger} - \bar{\alpha}_k \hat{a}_k\right)\right\}, \qquad \text{(A.0.0.8)}$$

donde U_K es unitario. Este último resultado se mantiene para $K \longrightarrow \infty$ siempre que $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 < \infty$, lo cual implica que el espacio de representación expandido por el conjunto de estados $\left\{\prod_{\otimes k=1}^{K}|\alpha_k\rangle\right\}$ es unitariamente equivalente al correspondiente espacio de Fock F_∞.

Apéndice B

Distribuciones atemperadas, productos de convolución, transformadas de Fourier y series de Fourier

Nos limitaremos a simplemente citar una breve lista de resultados aquí, cuyas referencias estándar son los libros de L. Schwartz [9, 10].

1. Denotamos por $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{S}^{'}(\mathbb{R})$ a los espacios de las funciones $\phi(x)$ clase $\boldsymbol{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ de decrecimiento rápido en ∞ y de las distribuciones atemperadas T_x definidas sobre $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$, respectivamente.

(a) Se puede demostrar que toda distribución $T_x \in \boldsymbol{S}^{'}(\mathbb{R})$ puede ser escrita como

$$\langle T_x, \phi(x) \rangle_x = \sum_{0 \leqslant k \leqslant s} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, F_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \phi(x), \tag{B.0.0.1}$$

donde las F_k son funciones continuas acotadas de la siguiente manera

$$|F_k(x)| \le C_k \left(1 + |x|^j\right), \tag{B.0.0.2}$$

para algún C_k y j dependientes de k.

(b) La convolución de dos elementos $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ de $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ está definida por

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \phi_1(x-y)\phi_2(y). \tag{B.0.0.3}$$

Se tiene:

I. $\phi_1(x) * \phi_2(x) \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R})$.

II. $\phi_1(x) * \phi_2(x) = \phi_2(x) * \phi_1(x)$.

III. La operación $*$ puede ser extendida a $\phi * T$ para $\phi \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ y $T \in \boldsymbol{S}^{'}(\mathbb{R})$, siendo el resultado una función infinitamente diferenciable. En este caso $\phi * T$ es llamada la regularización de T provista por ϕ.

(c) Sea $\left[\phi(x)\right]^{\wedge}_{p}$ la transformada de Fourier de $\phi(x) \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R})$, la cual viene dada por

$$\left[\phi(x)\right]^{\wedge}_{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ipx}\phi(x). \tag{B.0.0.4}$$

La transformada de Fourier de $T_x \in \boldsymbol{S}^{'}(\mathbb{R})$ está definida por

$$\langle [T_x]^{\wedge}_{p}, \phi(p)\rangle_{p} = \langle T_x, \left[\phi(p)\right]^{\wedge}_{x}\rangle_{x},\ \forall \phi(x) \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R}), \tag{B.0.0.5}$$

donde la normalización se elige de modo que $[\delta(x)]^{\wedge}_{p} = 1$, siendo 1 la unidad multiplicativa en el sistema de números complejos y $\delta(x)$ la unidad multiplicativa en el álgebra de convolución.

I. Para $\phi_1, \phi_2 \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ se tiene

$$\left[\phi_1(x) * \phi_2(x)\right]^{\wedge}_{p} = \left[\phi_1(x)\right]^{\wedge}_{p}\left[\phi_2(x)\right]^{\wedge}_{p}. \tag{B.0.0.6}$$

II. Para $\phi(x) \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ y $T_x \in \boldsymbol{S}^{'}(\mathbb{R})$ se tiene

$$\left[\phi(x) * T_x\right]^{\wedge}_{p} = \left[\phi(x)\right]^{\wedge}_{p}[T_x]^{\wedge}_{p}. \tag{B.0.0.7}$$

III. Propiedad de traslación. Para $\phi(x) \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ y $T_x \in \boldsymbol{S}^{'}(\mathbb{R})$ se tiene

$$\left[\phi(x-a)\right]^{\wedge}_{p} = e^{ipa}\left[\phi(x)\right]^{\wedge}_{p},\ [T_{x-a}]^{\wedge}_{p} = e^{ipa}[T_x]^{\wedge}_{p}. \tag{B.0.0.8}$$

IV. Una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ define una distribución atemperada y por lo tanto tiene transformada de Fourier $\left[f(x)\right]^{\wedge}_{p}$ en el sentido de distribuciones.

Teorema de Plancherel-Parseval: Si $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\left[f(x)\right]^{\wedge}_{p} \in L^2(\mathbb{R})$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left|f(x)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \left|[f(x)]^{\wedge}_{p}\right|^2. \tag{B.0.0.9}$$

2. Sea Γ la circunferencia de radio R centrada en el origen. Denotamos por $\boldsymbol{D}(\Gamma)$ y $\boldsymbol{D}^{'}(\Gamma)$ a los espacios de las funciones $\phi(x)$ clase $\boldsymbol{C}^{\infty}(\Gamma)$ $(-\pi R < x < \pi R)$ y de las distribuciones T_x definidas sobre $\boldsymbol{D}(\Gamma)$, respectivamente.

(a) La serie de Fourier para $T_x \in \boldsymbol{D}^{'}(\Gamma)$ es

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(T)e^{\frac{ikx}{R}},\ c_k(T) = \frac{1}{2\pi R}\langle T_x, e^{-\frac{ikx}{R}}\rangle. \tag{B.0.0.10}$$

La serie de Fourier para $\phi(x) \in \boldsymbol{D}(\Gamma)$ es

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(\phi)e^{\frac{ikx}{R}},\ c_k(\phi) = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi R}^{\pi R} dx\, \phi(x)e^{-\frac{ikx}{R}}. \tag{B.0.0.11}$$

(b) El producto de convolución de dos elementos T y S de $\boldsymbol{D}^{'}(\Gamma)$ está definido por

$$\langle T * S, \phi\rangle = \langle T_\xi \otimes S_\eta, \phi(\xi+\eta)\rangle\,, \tag{B.0.0.12}$$

el cual siempre existe ya que cualquier distribución en Γ tiene soporte acotado. En particular se tiene:

I. $\delta(x) * T = T$, con $T \in \boldsymbol{D}^{'}(\Gamma)$.

II. $\delta^{'}(x) * T = T^{'}$, con $T \in \boldsymbol{D}^{'}(\Gamma)$.

III. $D(T * S) = DT * S = T * DS$, con T y $S \in \boldsymbol{D}^{'}(\Gamma)$ y D un operador diferencial con coeficientes constantes en Γ.

Los coeficientes $c_k(T * S)$ vienen dados por

$$c_k(T * S) = 2\pi R c_k(T) c_k(S). \tag{B.0.0.13}$$

El producto de convolución de dos elementos $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ de $\boldsymbol{D}(\Gamma)$ es dado por la ecuación

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) = \int_{-\pi R}^{\pi R} dy\, \phi_1(x-y)\phi_2(y). \tag{B.0.0.14}$$

Los coeficientes $c_k(\phi_1 * \phi_2)$ son dados por

$$c_k(\phi_1 * \phi_2) = 2\pi R c_k(\phi_1) c_k(\phi_2). \tag{B.0.0.15}$$

Apéndice C

Integrales elípticas y funciones elípticas de Jacobi

A continuación, mostramos algunas definiciones y resultados importantes acerca de las integrales elípticas y las funciones elípticas de Jacobi (ver las referencias [4, 6, 7, 8, 14]).

1. Denotamos por $F(\varphi, k^2)$ y $E(\varphi, k^2)$ a las integrales elípticas de primera y segunda especie, respectivamente. El parámetro k es conocido como el módulo de las integrales elípticas, el cual se asumirá como un número real y sin perder generalidad podemos suponer que $0 \le k^2 \le 1$. Además, introducimos el parámetro $k^{'}$, conocido como módulo complementario de las integrales elípticas y dado por la ecuación $k^2 + k^{'2} = 1$.

I. Integral elíptica de primera especie:

$$F(\varphi, k^2) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 sen^2(\alpha)}} = \int_0^{sen(\varphi)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \,. \tag{C.0.0.1}$$

II. Integral elíptica de segunda especie:

$$E(\varphi, k^2) = \int_0^{\varphi} d\alpha \, \sqrt{1 - k^2 sen^2(\alpha)} = \int_0^{sen(\varphi)} dx \, \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \,. \tag{C.0.0.2}$$

III. Integral elíptica completa de primera especie:

$$\mathbf{K}(k^2) = F\left(\frac{\pi}{2}, k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 sen^2(\alpha)}} \,. \tag{C.0.0.3}$$

IV. Integral elíptica completa de segunda especie:

$$\mathbf{E}(k^2) = E\left(\frac{\pi}{2}, k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \, \sqrt{1 - k^2 sen^2(\alpha)} \,. \tag{C.0.0.4}$$

V. Integral elíptica complementaria completa de primera especie:

$$\mathbf{K}^{'}(k^2) = F\left(\frac{\pi}{2}, k^{'2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^{'2} sen^2(\alpha)}} \,. \tag{C.0.0.5}$$

VI. Integral elíptica complementaria completa de segunda especie:

$$\mathbf{E}^{'}(k^2) = E\left(\frac{\pi}{2}, k^{'2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\, \sqrt{1-k^{'2}sen^2(\alpha)}\,. \tag{C.0.0.6}$$

Es fácil ver que se cumplen las relaciones: $\mathbf{K}(k^2) = \mathbf{K}^{'}(k^{'2})$, $\mathbf{K}^{'}(k^2) = \mathbf{K}(k^{'2})$, $\mathbf{E}(k^2) = \mathbf{E}^{'}(k^{'2})$ y $\mathbf{E}^{'}(k^2) = \mathbf{E}(k^{'2})$.

2. Consideremos el límite superior φ de la integral

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 sen^2(\alpha)}}\,, \tag{C.0.0.7}$$

como una función de u. Usando la notación

$$\varphi = am(u) = am(u, k^2), \tag{C.0.0.8}$$

llamaremos a este limite superior la amplitud elíptica de Jacobi. La cantidad u es llamada el argumento elíptico de Jacobi y su dependencia en φ se escribe como

$$u = arg(\varphi) = arg(\varphi, k^2). \tag{C.0.0.9}$$

Las siguientes funciones

$$sn(u) = sn(u, k^2) = sen(\varphi) = sen(am(u)), \tag{C.0.0.10}$$

$$cn(u) = cn(u, k^2) = cos(\varphi) = cos(am(u)), \tag{C.0.0.11}$$

$$dn(u) = dn(u, k^2) = \sqrt{1-k^2 sen^2(\varphi)} = \sqrt{1-k^2 sen^2(am(u))}, \tag{C.0.0.12}$$

son conocidas como las funciones elípticas de Jacobi seno-amplitud, coseno-amplitud y delta-amplitud, respectivamente. Estas satisfacen:

I. $sn^2(u) + cn^2(u) = 1$.

II. $dn^2(u) + k^2 sn^2(u) = 1$.

III. $dn^2(u) - k^2 cn^2(u) = 1 - k^2$.

IV. $\frac{d}{du}\varphi = dn(u)$.

V. $\frac{d}{du} sn(u) = cn(u)dn(u)$.

VI. $\frac{d}{du} cn(u) = -sn(u)dn(u)$.

VII. $\frac{d}{du} dn(u) = -k^2 sn(u)cn(u)$.

VIII. $sn\left(u + 4m\mathbf{K} + 2n\mathbf{K}^{'} i\right) = sn(u)$.

IX. $cn\left(u+4m\mathbf{K}+2n\left(\mathbf{K}+\mathbf{K}^{'}i\right)\right)=cn(u)$.

X. $dn\left(u+2m\mathbf{K}+4n\mathbf{K}^{'}i\right)=dn(u)$.

XI. $sn\left(u+2\mathbf{K}+2\mathbf{K}^{'}i\right)=-sn(u)$.

XII. $cn\left(u+2\mathbf{K}+2\mathbf{K}^{'}i\right)=cn(u)$.

XIII. $dn\left(u+2\mathbf{K}+2\mathbf{K}^{'}i\right)=-dn(u)$.

Otras propiedades de posible interés son:

I. $sn\left(u+2\mathbf{K}\right)=-sn(u)$.

II. $sn\left(u+2\mathbf{K}^{'}i\right)=sn(u)$.

III. $cn\left(u+2\mathbf{K}\right)=-cn(u)$.

IV. $cn\left(u+2\mathbf{K}^{'}i\right)=-cn(u)$.

V. $dn\left(u+2\mathbf{K}\right)=dn(u)$.

VI. $dn\left(u+2\mathbf{K}^{'}i\right)=-dn(u)$.

VII. $sn(-u)=-sn(u)$.

VIII. $cn(-u)=cn(u)$.

IX. $dn(-u)=dn(u)$.

X. $am(-u)=-am(u)$.

XI. $am\left(u+2n\mathbf{K}+2m\mathbf{K}^{'}i\right)=n\pi+am(u)$.

En las expresiones anteriores se ha supuesto $\mathbf{K}=\mathbf{K}(k^2)$ y $\mathbf{K}^{'}=\mathbf{K}^{'}(k^2)$. Además, m y n son números enteros.

Bibliografía

[1] G. DVALI, C. GOMEZ, L. GRUENDING and T. RUG, Nucl. Phys. B 901 (2015) 338 doi:10.1016/j.nuclphysb.2015.10.017 [arXiv:1508.03074 [hep-th]].

[2] R. RAJARAMAN, Solitons and Instantons, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[3] N. S. MANTON and P. M. SUTCLIFFE, Topological Solitons, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[4] M. ABRAMOWITZ and I. A. STEGUN, “Handbook of mathematical functions”, Dover, New York, 1972.

[5] B. VARGAS, “Solitones Topológicos Cuánticos 2D”, Tesis de Grado, Universidad de Los Andes, octubre 2019. Tutor: Nelson Pantoja.

[6] G. MUSSARDO, V. RIVA and G. SOTKOV, Nucl. Phys. B 670 (2003) 464 doi:10.1016/j.nuclphysb.2003.08.017 [hepth/0307125].

[7] G. MUSSARDO, V. RIVA and G. SOTKOV, Nucl. Phys. B 699 (2004) 545 doi:10.1016/j.nuclphysb.2004.08.004 [hep-th/0405139].

[8] I. S. GRADSHTEIN and I. M. RYZHIK, “Table of integrals, series, and products", Academic Press, New York, 1980.

[9] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann, París, Part I, 1957, Part II, 1959.

[10] L. SCHWARTZ, Mathematics for the Physical Sciences, ADDISON-WESLEY, París, 1966.

[11] S. COLEMAN, Aspects of symmetry, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[12] B. FELSAGER, Geometry, Particles and Fields, Springer, New York, 1998.

[13] E. J. WEINBERG, Solitons and Instantons in High Energy Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[14] M. R. SPIEGEL, S. LIPSCHUTZ and J. LIU, “Mathematical Handbook of Formulas and Tables”, McGraw-Hill, New York, 2009.

[15] N. PANTOJA, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Universidad de los Andes, Mérida-Venezuela, 2005.

[16] C. ITZYKSON and J-B. ZUBER, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York, 1980.

[17] E. B. BOGOMOL’NYI, Sov. J. Nucl. Phys. 24 (1976) 449.

[18] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU and F. LALOË, Quantum Mechanics,volume 1, WILEY-VCH, 1991.

[19] J. M. JAUCH and F. ROHRLICH, "The theory of photons and electrons. The relativistic quantum field theory of charged particles with spin one-half", Springer-Verlag, Berlin, 1976, 2nd corr. pr. 1980. Second expanded edition doi:10.1007/978- 3-642-80951-4.

[20] J. C. KIMBALL, "Kinks, solitons and nonlinear transport in solids", Phys. Rev. B 21(6) (1980) 2104.

[21] C. CHAMON, "Solitons in carbon nanotubes", Phys. Rev. B 62(4) (2000) 2806.

[22] G. W. SEMENOFF, V. SEMENOFF and F. ZHOU, "Domain walls in gapped graphene", Phys. Rev. Lett. 101(8) (2008) 087204.

[23] M. GREMM, "Four-dimensional gravity on a thick domain wall", Phys. Lett. B478 (2000) 434-438. [hep-th/9912060].

[24] O. CASTILLO-FELISOLA, A. MELFO, N. PANTOJA and A. RAMIREZ, "Localizing gravity on exotic thick 3-branes", Phys. Rev. D 70 (2004) 104029 [arXiv:hep-th/0404083].

[25] J. G. TAYLOR, "Solitons as infinite-constituent Bound States", Annals of Physics 115 (1978) 153.

[26] K. TAKAYAMA and M. OKA, Nucl. Phys. A 551 (1993) 637.

