Correflexión Secuencial

Sequential Correflection

Rodríguez, Armando
Facultad de Ingeniería, Departamento de Cálculo Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela.
*rangosecuencial@gmail.com

Resumen

El objetivo de este artículo, aparte de mostrar la topología de la correflexión secuencial, es estudiar propiedades muy relevantes del espacio Arens y del espacio abanico secuencial. Más aún, veremos cuándo un espacio topológico $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\tau})$ tiene una copia cerrada de los dos espacios mencionados. En este artículo consideramos espacios topológicos Hausdorff.

Palabras clave: *Correflexión secuencial, espacio peine, abanico secuencial.*

Abstract

The objective of this article, apart from showing the topology of sequential coreflection, is to study very relevant properties of the Arens space and the sequential fan space. Furthermore, we will see when a topological space $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\tau})$ has a closed copy of the two mentioned spaces. In this paper we consider topological Hausdorff spaces.

Keywords: *Sequential coreflection, espacio peine, abanico secuencial.*

1. Preliminares y Notación

Definición 1.1: Un espacio topológico $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\tau})$ se llama secuencial, si dado $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{X}$ tenemos que $\boldsymbol{A}$ es cerrado si y sólo sí, para toda sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}\in\boldsymbol{A}$ con $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}\longrightarrow\boldsymbol{x}$ implica que $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$.

Proposición 1.2: Sea $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\tau})$ un espacio topológico. Si para cualquier $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{X}$ que no es cerrado, existe una sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}\in\boldsymbol{A}$ con $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}\longrightarrow\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}\setminus\boldsymbol{A}$ entonces, $\boldsymbol{X}$ es secuencial.

Demostración: Sea $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{X}$ y supongamos que $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$. Tomemos una sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}\in\boldsymbol{A}$ tal que $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}\longrightarrow\boldsymbol{x}$. Luego, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$ pues, de lo contrario, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}\setminus\overline{\boldsymbol{A}}$ y $\boldsymbol{x}$ no sería punto límite de $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$. De esta forma queda demostrada la necesidad de la definición anterior. Ahora, demostraremos el reciproco. Supongamos que toda sucesión en $\boldsymbol{A}$ que sea convergente, converge en $\boldsymbol{A}$. Requerimos verificar que $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$. Procedamos por contradicción. Así, la hipótesis nos garantiza la existencia de una sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}\in\boldsymbol{A}$, tal que $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}\longrightarrow\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}\setminus\boldsymbol{A}$, lo cual contradice nuestra suposición. De aquí que $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$ y por lo tanto $\boldsymbol{X}$ es secuencial. ■

En base a la proposición anterior, obtenemos que los espacios discretos son secuenciales. En efecto, sea $\boldsymbol{X}$ un espacio discreto. Dado que la afirmación $\overline{\boldsymbol{A}}\neq\boldsymbol{A}$ es falsa para todo $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{X}$ se satisface la hipótesis en la proposición anterior, por lo tanto, $\boldsymbol{X}$ es secuencial. Otra clase importante de espacios secuenciales son los primeros numerables. Recordemos que significa que un espacio es primero numerable.

Definición 1.3: Sea $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\tau})$ un espacio topológico. Diremos que $\boldsymbol{X}$ es primero numerable, si para cualquier punto $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ existe una colección numerable $\{\boldsymbol{U_n}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^+}$ de entornos que contienen a $\boldsymbol{x}$ tales que cualquier entorno $\boldsymbol{U}$ que contiene a $\boldsymbol{x}$, este contiene al menos uno de los conjuntos $\boldsymbol{U_n}$ $(\boldsymbol{U_n}\subseteq\boldsymbol{U})$

Proposición 1.4: Todo espacio primero numerable es secuencial.

Demostración: Sea $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{X}$ con $\boldsymbol{A}\neq\overline{\boldsymbol{A}}$. Tomemos $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}\setminus\boldsymbol{A}$ y una base numerable $\{\boldsymbol{U_n}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ en $\boldsymbol{x}$. Para cada $\boldsymbol{i}\in\mathbb{N}$, elegimos $\boldsymbol{x_i}\in\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{U_1}\cap\boldsymbol{U_2}\cap\cdots\cap\boldsymbol{U_i}$. De esta manera, obtenemos una sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}\in\boldsymbol{A}$ que por construcción converge a $\boldsymbol{x}$. Es decir, el espacio $\boldsymbol{X}$ es secuencial. ■

Corolario 1.5: Todo espacio métrico es secuencial.

Demostración: Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ un espacio métrico y $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$. Como la familia $\left\{\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\right) : \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\right\}$ es una base numerable en $\boldsymbol{x}$, de la proposición anterior deducimos que $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ es secuencial. ■

Otra manera de caracterizar los espacios secuenciales es: Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico. Recordemos que una sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}} \in \boldsymbol{X}$ está finalmente en $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$, si existe un entero positivo $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{A}$ para todo $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}$.

Definición 1.6: Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico y $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{X}$. Se dice que $\boldsymbol{U}$ es secuencialmente abierto si cualquier sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}} \in \boldsymbol{X}$ tal que $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}} \longrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$, está finalmente en $\boldsymbol{U}$.

Es claro que todo conjunto abierto (cerrado) es secuencialmente abierto (secuencialmente cerrado). El recíproco no es cierto, es decir; si un conjunto $\boldsymbol{U}$ es secuencialmente abierto no necesariamente $\boldsymbol{U}$ es abierto. Análogamente, si un conjunto $\boldsymbol{U}$ es secuencialmente cerrado no necesariamente $\boldsymbol{U}$ es cerrado. Por ejemplo, el espacio de la funciones Bolerianas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ forma un conjunto $\boldsymbol{\tau_p}$ −secuencialmente cerrado y no es cerrado en $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \boldsymbol{\tau_p}\right)$.

Teorema 1.7: Un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ es secuencial, si y sólo si, todo subconjunto secuencialmente abierto es abierto.

Demostración: Sea $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{X}$ secuencialmente abierto. Probemos que $\boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{U}$ es cerrado. Supongamos lo contrario, es decir; $\boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{U}$ no es cerrado. Por hipótesis, existe una sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}} \in (\boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{U})$ tal que $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}} \longrightarrow \boldsymbol{x} \in \overline{(\boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{U})} \setminus (\boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{U})$. De esta manera, obtenemos que $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}} \notin \boldsymbol{U}$, en particular $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ no está finalmente en $\boldsymbol{U}$, y además $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$. Esto contradice que $\boldsymbol{U}$ es secuencialmente abierto y por consiguiente $\boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{U}$ es cerrado. Ahora, probemos el recíproco del Teorema. Para ello, utilicemos la proposición XXX. Sea $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$ con $\boldsymbol{A} \neq \overline{\boldsymbol{A}}$. De esta manera, $\boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{A}$ no es abierto y, por hipótesis tampoco es secuencialmente abierto. De aquí se desprende que existe una sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}} \in \boldsymbol{X}$ con $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}} \longrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{A}$ y que no está finalmente en $\boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{A}$, es decir; la sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ está finalmente en $\boldsymbol{A}$. Así que, existe un $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$ tal que $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n} \geq \mathbb{N}} \in \boldsymbol{A}$. De lo anterior, concluimos que $\boldsymbol{x} \in \overline{\boldsymbol{A}} \setminus \boldsymbol{A}$ y por lo tanto, el espacio $\boldsymbol{X}$ es secuencial. ■

Para finalizar esta sesión definiré dos espacios que son secuenciales.

Definición 1.8 (Espacio Arens)
Consideremos el siguiente conjunto:

$$\boldsymbol{X} = \{\emptyset\} \cup \{\langle \boldsymbol{n} \rangle : \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \rangle : \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}\}.$$

La Fig.1. Muestra gráficamente el espacio Arens.

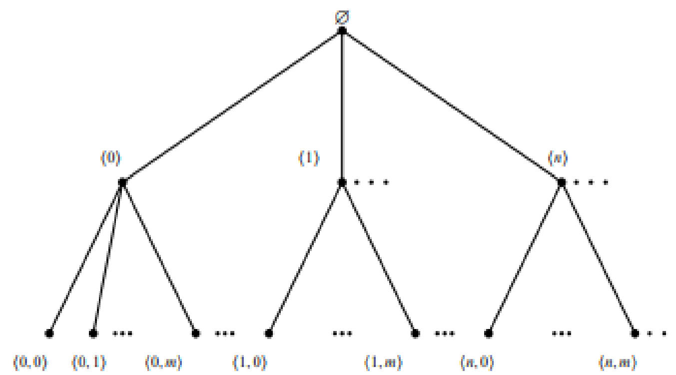

Fig. 1. Espacio Arens

Definamos la siguiente topología $\boldsymbol{\tau}$ sobre el conjunto

$\boldsymbol{X}$: Un conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$ es abierto si:

1. $\emptyset \in \boldsymbol{A}$ entonces, existe $\boldsymbol{n_0}$ tal que para todo $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}$ se tiene que $\langle \boldsymbol{n} \rangle \in \boldsymbol{A}$.
2. $\langle \boldsymbol{n} \rangle \in \boldsymbol{A}$ entonces, existe $\boldsymbol{k_0}$ tal que para todo $\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{k_0}$ se tiene que $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \rangle \in \boldsymbol{A}$.
3. Los puntos $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \rangle$ son aislados.

Llamaremos al espacio topológico $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$ espacio de Arens y lo denotaremos con $\boldsymbol{S_2}$.

Caractericemos las sucesiones convergentes de Espacio Arens. Sea $(\boldsymbol{t_l})_{\boldsymbol{l} \in \mathbb{N}} \in \boldsymbol{S_2}$ una sucesión tal que: $\boldsymbol{t_l} \longrightarrow \boldsymbol{t}$ entonces, debe ocurrir lo siguiente:

1. Si $\boldsymbol{t} = \{\emptyset\}$ entonces, existe $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{t_l} \in \{\langle \boldsymbol{n} \rangle : \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\}$ para todo $\boldsymbol{l} \geq \boldsymbol{n_0}$
2. Si $\boldsymbol{t} = \langle \boldsymbol{n} \rangle$ entonces, existe $\boldsymbol{m_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{t_l} \in \{\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \rangle : \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}\}$ para todo $\boldsymbol{l} \geq \boldsymbol{m_0}$
3. Si $\boldsymbol{t} = \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \rangle$ entonces, $\boldsymbol{t_l}$ es eventualmente constante.

Es de resaltar que $\boldsymbol{S_2}$ no es un espacio primero numerable. $\boldsymbol{S_2}$ es un espacio Hausdorff.

Definición 1.9 (Espacio Abanico secuencial)
Consideremos el siguiente conjunto: $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, es decir; los pares ordenados de números naturales junto con un punto más que llamaremos ∞.

En la Fig.2. Podemos observar gráficamente el espacio abanico secuencial:

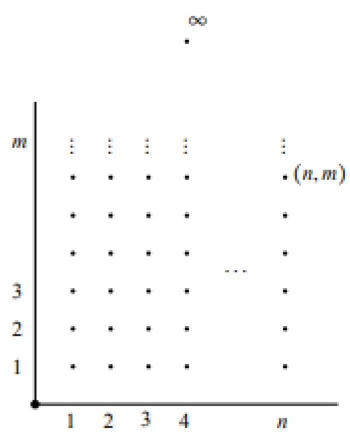

Fig. 2. Espacio Abanico secuencial

Ahora, definiremos una topología τ sobre X :

1. Los puntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son aislados.
2. Los puntos de la forma: $U_f = \{(n.m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \geq f(n)\} \cup \{\infty\}$. Donde $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ son abiertos.

En la Fig.3. Se muestra gráficamente como luce un conjunto U_f (son todos los pares ordenados que están por encima del gráfico):

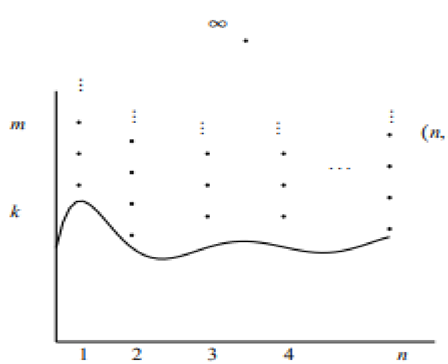

Fig. 3. Conjunto τ abierto sobre **X**.

Al par ordenado $(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \tau)$ lo llamaremos espacio abanico secuencial y lo denotaremos con $S(\omega)$.
Antes de enunciar el siguiente lema, definamos una sección en el abanico a una línea vertical, es decir; para un $n \in \mathbb{N}$ fijo consideramos los pares (n, m) para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto nos permite tener una idea más clara de una sucesión convergente en $S(\omega)$.

Lema 1.10 Sea $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. S es una sucesión convergente a $\{\infty\}$ si y solo si, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S \subseteq \{1, 2, \cdots, n\} \times \mathbb{N}$

Demostración:
Es de resaltar que: $S(\omega)$ es un espacio Hausdorff y Fréchet.

2 Topología de la Correflexión Secuencial
Definición 2.1 Sea (X, τ) un espacio topológico, consideremos σ_τ la colección de todos los conjuntos $\tau-$secuencialmente abiertos.

Lema 2.2 σ_τ es una topología.

<u>Demostración:</u>

1. $\emptyset$ y X están en σ_τ. Como $\emptyset$ y X son $\tau-$abiertos entonces, $\emptyset$ y X son $\tau-$secuencialmente abiertos (Todo abierto es secuencialmente abierto).

2. Sea $\{U_\alpha\}$ una familia indizada de elementos de σ_τ. Probemos que $\cup U_\alpha$ pertenece a σ_τ. Consideremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que: $x_n \to x$ y $x \in \cup U_\alpha$. Probaremos que hay una cola de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\cup U_\alpha$. En efecto, puesto que $x \in \cup U_\alpha$ entonces $x \in U_i$, para algún $i \in \mathbb{N}$. Por hipótesis tenemos que U_i es secuencialmente abierto, así existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n) \in U_i$, para todo $n \geq n_0$. En consecuencia $x_n \in \cup U_\alpha$, para todo $n \geq n_0$. Por tanto, se tiene que $\cup U_\alpha \in \sigma_\tau$.

3. Sean $U_1, \cdots, U_m$ elementos de σ_τ. Probemos que $\cap U_i$ está en σ_τ. Lo cual es equivalente a probar que $\cap U_i$ es $\tau-$secuencialmente abierto. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$ y $x \in \cap U_i$. Como $x \in \cap U_i$ entonces, x está en cada uno de los U_i, para $i = 1, \cdots, m$. Además, cada U_i es $\tau-$secuencialmente abierto, en consecuencia existen $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n) \in U_i$, para todo $n \geq n_i$ con $i = 1, \cdots, m$. Consideremos $n_0 = m\acute{a}x\{n_i: i = 1, \cdots, m\}$, luego $(x_n) \in U_i$ para todo $n \geq n_0$ e $i = 1, \cdots, m$. Por ende, $(x_n) \in \cap U_i$ para todo $n \geq n_0$ y por lo tanto $\cap U_i$ es $\tau-$secuencialmente abierto. ■

A σ_τ la llamaremos la topología de la correflexión secuencial y (X, σ_τ) lo llamaremos espacio topológico de la correflexión secuencial. Muchas veces al espacio

(X, σ_τ) lo denotaremos con σX, siempre y cuando esto no se preste a confusión.
Podemos observar que la topología σ_τ es más fina que la topología τ, es decir $\tau \subseteq \sigma_\tau$. El siguiente lema muestra que las dos topologías τ y σ_τ tienen las mismas sucesiones convergentes.

Lema 2.3 (X, τ) y (X, σ_τ) poseen las mismas sucesiones convergentes.

Demostración:

1. Puesto que $\tau \subseteq \sigma_\tau$ entonces, toda sucesión σ_τ −convergente es τ −convergente.

2. Ahora, probemos que toda sucesión τ −convergente es σ_τ −convergente. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión τ −convergente a $x \in X$ y consideremos $U \in \sigma_\tau$ tal que $x \in U$. Puesto que U es τ −secuencialmente abierto entonces, cualquier sucesión en X que converja a $x \in U$ se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión está en U a partir de n_0, es decir $(x_n) \in U$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto, (x_n) es una sucesión σ_τ −convergente. ■

Si una topología es más fina que otra, es decir $\tau \subseteq \rho$ entonces, sus respectivas correflexiones σ_τ y σ_ρ mantiene la inclusión ($\sigma_\tau \subseteq \sigma_\rho$). Lo cual implica que σ_ρ es más fina σ_τ.

Lema 2.4 Sean τ y ρ dos topologías sobre el conjunto X. Si $\tau \subseteq \rho$ entonces, $\sigma_\tau \subseteq \sigma_\rho$

Demostración: Sea $A \in \sigma_\tau$, lo cual significa que A es τ −secuencialmente abierto. Probemos que A es ρ −secuencialmente abierto. Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρ −convergente a $x \in A$, por el lema 2.3 se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τ −convergente a $x \in A$. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ para todo $n > n_0$. Esto muestra que A es ρ −secuencialmente abierto. Por lo tanto, $A \in \sigma_\rho$. ■

Teorema 2.5 (X, σ_τ) es un espacio secuencial.

Demostración: Sea U un conjunto σ_τ −secuencialmente abierto, probemos que $U \in \sigma_\tau$. En efecto, sea $x \in U$. Como U es un conjunto σ_τ −secuencialmente abierto entonces, cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ perteneciente a X que es σ_τ −convergente a $x \in U$ se tiene que existe una cola de la sucesión en U. Por el lema 2.3 se tiene que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ −convergente a x, en consecuencia existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n\geq n_0}$ está en U. Acabamos de probar que U es un conjunto τ −secuencialmente abierto. Por otro lado, recordemos que los conjuntos τ −secuencialmente abiertos son los abiertos de σ_τ. Por lo tanto $U \in \sigma_\tau$. ■

Otra manera de probar que un espacio topológico es secuencial es la siguiente:

Corolario 2.6 Sea τ una topología sobre X. τ es secuencial si y sólo si $\tau = \sigma_\tau$.

Demostración:

1. Supongamos que τ es secuencial. Probemos que $\tau = \sigma_\tau$. Claramente $\tau \subseteq \sigma_\tau$. Ahora nos hace falta probar que $\sigma_\tau \subseteq \tau$. Sea $U \in \sigma_\tau$, en consecuencia U es τ −secuencialmente abierto. Ahora bien, como τ es secuencial y U es τ −secuencialmente abierto entonces, $U \in \tau$. Por lo tanto $\sigma_\tau \subseteq \tau$.
2. La prueba del reciproco se desprende del teorema 2.5. Pues, σ_τ es secuencial y $\tau = \sigma_\tau$. ■

La topología de la correflexión secuencial es la menor topología secuencial que contiene a τ.

Corolario 2.7 Sean τ y ρ dos topologías sobre el conjunto X. Si $\tau \subseteq \rho$ y ρ es secuencial entonces, $\sigma_\tau \subseteq \rho$

Demostración: Consideremos τ y ρ dos topologías sobre el conjunto X tales que $\tau \subseteq \rho$ y ρ es secuencial. Puesto que la topología ρ es más fina que la topología τ, es decir; $\tau \subseteq \rho$ entonces, por el lema 2.4 tenemos que $\sigma_\tau \subseteq \sigma_\rho$. Por otro lado, sabemos que la topología ρ es secuencial así, por el corolario 1.6 tenemos que $\sigma_\rho = \rho$. Finalmente, se tiene que $\sigma_\tau \subseteq \sigma_\rho = \rho$. Por lo tanto, $\sigma_\tau \subseteq \rho$. ■

3 Espacio Peine

Definición 3.1 Sea (X, τ) un espacio topológico. Consideremos el subespacio de X formado por:

$$P = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

Donde $(x_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en (X, τ) tales que $\lim_{m\to\infty} x_{nm} = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $x_{n\,m} \neq x_n$. Además, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión convergente a $x \in X$ con $x_n \neq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Al subespacio P lo llamaremos espacio peine:

En la fig. 4 se muestra gráficamente como luce un espacio peine.

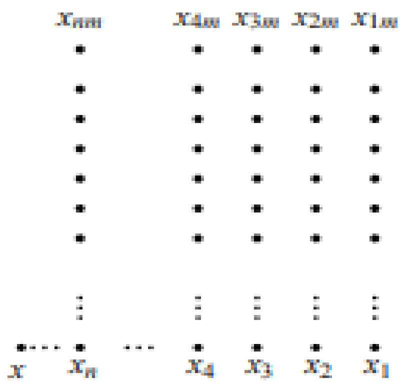

Fig.4. Espacio Peine.

Llamaremos una diagonal en un peine $P \subseteq X$, a una sucesión $(x_{n_i m})$ que converge a x, con n_i estrictamente creciente. Dicha sucesión de puntos puede lucir como los puntos "marcados" con color azul en la Fig5 siguiente.

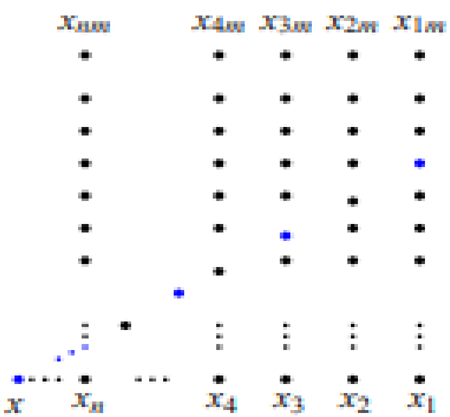

Fig.5. Diagonal de un espacio peine.

Ejemplo 3.2 El espacio Arens (S_2) es un peine sin diagonales.

Lema 3.3 Dado un espacio X, σX es homeomorfo a S_2 si y sólo si, X es un peine sin diagonales.

Demostración: Supongamos que σX es homeomorfo a S_2. Como σX y X tienen las mismas sucesiones convergentes y S_2 es un peine sin diagonales entonces, X es un peine sin diagonales.

Ahora, supongamos que $X = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ es un peine sin diagonales, bajo las mismas condiciones presentadas en la definición 3.1. Puesto que X y σX poseen las mismas sucesiones convergentes entonces, σX también es un peine sin diagonales. Por otro lado, sabemos que σX es secuencial y S_2 es un peine secuencial sin diagonales. Por ende, podemos definir el siguiente homeomorfismo $F: \sigma X \to S_2$

$$\begin{cases} F(x_{nm}) = \langle n, m \rangle \\ F(x_n) = \langle n \rangle \\ F(x) = \emptyset \end{cases}$$

Claramente F es inyectiva. Además, F envía sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. Por tanto, F es continua. Por último, sucesiones convergentes en S_2 provienen de sucesiones convergentes en σX, por tanto F^{-1}es continua. ■

Definición 3.4 Consideremos un espacio topológico (X, τ) y $A \subseteq X$. Definimos el operador secuencial como:

$$A^{(0)} = A \qquad (1)$$

$$A^{(1)} = \left\{x \in X : x = \lim_n x_n \ \wedge \ x_n \in A\right\} \qquad (2)$$

Y para β ordinal limite

$$A^{(\beta)} = \cup_{\alpha<\beta} A^{(\alpha)} \qquad (3)$$

Cuando este operador secuencial se estabiliza, es decir; el menor ordinal β tal que $A^{(\beta+1)} = A^{(\beta)}$ diremos que la clausura secuencial de A en X es:

$$Cl_s(A) = \cup_{\alpha<\beta} A^{(\alpha)} \qquad (4)$$

La clausura de A en (X, σ_τ) la denotaremos como $Cl_{\sigma X}(A)$ o con $Cl_\sigma(A)$ siempre y cuando no se preste a confusión. Además, denotaremos con $Cl^S_{\sigma X}(A)$ a la clausura secuencial del conjunto A con la topología de la correflexión secuencial.

Sabemos que un espacio X es Fréchet si, para cualquier $x \in Cl_X(A)$ existe una sucesión en A convergiendo a x. El espacio de Arens (S_2) no es Fréchet, en consecuencia ningún espacio Fréchet contiene una copia de S_2. Analizaremos este hecho con detenimiento. Un espacio X contiene una copia de Y, si existe $Z \subseteq X$ tal que Z es homeomorfo a Y.

Lema 3.5 Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. σX es un espacio Fréchet,

2. $\boldsymbol{Cl_\sigma(A) = A^{(1)}}$ para cada $\boldsymbol{A \subseteq X}$,
3. $\boldsymbol{A^{(1)}}$ es secuencialmente cerrado en $\boldsymbol{X}$ para cada $\boldsymbol{A \subseteq X}$.

Demostración:
$(\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2})$Supongamos que $\boldsymbol{\sigma X}$ es un espacio Fréchet y consideremos $\boldsymbol{A \subseteq X}$. Verifiquemos que $\boldsymbol{Cl_\sigma(A) \subseteq A^{(1)}}$. En efecto, sea $\boldsymbol{x \in Cl_\sigma(A)}$, puesto que $\boldsymbol{\sigma X}$ es Fréchet entonces, existe una sucesión $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A}$ tal que $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ es $\boldsymbol{\sigma_\tau}$ convergente a $\boldsymbol{x}$. Por el Lema 2.3 se tiene que $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ es $\boldsymbol{\tau}$ convergente a $\boldsymbol{x}$. En consecuencia $\boldsymbol{x \in A^{(1)}}$. Ahora verifiquemos que $\boldsymbol{A^{(1)} \subseteq Cl_\sigma(A)}$. Sea $\boldsymbol{x \in A^{(1)}}$, así existe una sucesión $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A}$ tal que $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ es $\boldsymbol{\tau}$ convergente a $\boldsymbol{x}$. En consecuencia la sucesión $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ es $\boldsymbol{\sigma_\tau}$ convergente a $\boldsymbol{x}$. Por tanto, $\boldsymbol{x \in Cl_\sigma(A)}$.

$(\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3})$ Sea $\boldsymbol{A \subseteq X}$, probemos que $\boldsymbol{A^{(1)}}$ es secuencialmente cerrado en $\boldsymbol{X}$. En efecto, sea $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{(1)}}$ tal que $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ es $\boldsymbol{\tau}$ convergente a $\boldsymbol{x}$, en consecuencia $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ es $\boldsymbol{\sigma_\tau}$ convergente a $\boldsymbol{x}$. De la hipótesis se tiene que $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Cl_\sigma(A)}$ por ende $\boldsymbol{x \in Cl_\sigma(A)}$. Por tanto, $\boldsymbol{x \in A^{(1)}}$
$(\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1})$ Afirmamos que $\boldsymbol{A^{(1)} = Cl^s_{\sigma X}(A)}$, para todo $\boldsymbol{A \subseteq X}$ con $\boldsymbol{A^{(1)}}$ secuencialmente cerrado. La afirmación permite demostrar que $\boldsymbol{\sigma X}$ es un espacio Fréchet. En efecto, sea $\boldsymbol{A \subseteq X}$ y $\boldsymbol{x \in Cl_{\sigma X}(A)}$. Puesto que $\boldsymbol{\sigma X}$ es un espacio secuencial entonces, se tiene que $\boldsymbol{Cl_{\sigma X}(A) = Cl^s_{\sigma X}(A)}$. Así, se tiene que $\boldsymbol{x \in Cl_{\sigma X}(A) = Cl^s_{\sigma X}(A) = A^{(1)}}$. Por ende, existe una sucesión $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A}$ tal que $\boldsymbol{x_n \longrightarrow x}$. Por tanto, $\boldsymbol{\sigma X}$ es un espacio Fréchet.

Ahora, demostraremos la afirmación ($\boldsymbol{A^{(1)} = Cl^s_{\sigma X}(A)}$, para todo $\boldsymbol{A \subseteq X}$ con $\boldsymbol{A^{(1)}}$ secuencialmente cerrado).
Verifiquemos que $\boldsymbol{A^{(1)} \subseteq Cl^s_{\sigma X}(A)}$, para todo $\boldsymbol{A \subseteq X}$. Sea $\boldsymbol{x \in A^{(1)}}$, así existe una sucesión $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A}$ $\boldsymbol{\tau}$ convergente a $\boldsymbol{x}$. Por ende, la sucesión $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A}$ $\boldsymbol{\sigma_\tau}$ convergente a $\boldsymbol{x}$. Puesto que $\boldsymbol{x}$ es el límite de una sucesión $\boldsymbol{\sigma_\tau}$ convergente en $\boldsymbol{A}$ entonces, se tiene que $\boldsymbol{x \in Cl^s_{\sigma X}(A)}$.

Seguidamente, demostraremos que $\boldsymbol{Cl^s_{\sigma X}(A) \subseteq A^{(1)}}$, para todo $\boldsymbol{A \subseteq X}$. Puesto que $\boldsymbol{Cl^s_{\sigma X}(A) = \bigcap\{B : A \subseteq B \text{ y } B \text{ secuencialmente cerrado}\}}$, $\boldsymbol{A \subseteq A^{(1)}}$ y $\boldsymbol{A^{(1)}}$ es secuencialmente cerrado entonces, se tiene claramente la inclusión. ■

El siguiente Teorema (Lin 1997), solo presenta la prueba $(\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1})$, presentaremos la demostración completa.

Teorema 3.6 Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\boldsymbol{\sigma X}$ es un espacio Fréchet,
2. Cualquier peine de $\boldsymbol{X}$ tiene una diagonal,
3. $\boldsymbol{X}$ no contiene ningún subespacio que tiene a $\boldsymbol{S_2}$ como su correflexión secuencial.

Demostración:
$(\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2})$ Sea $\boldsymbol{P = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq \sigma X}$ un peine, probemos que $\boldsymbol{P}$ tiene una diagonal. En efecto, tomemos $\boldsymbol{A \subseteq P}$ tal que $\boldsymbol{A = \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}}$ Luego, tenemos que $\boldsymbol{x \in Cl_\sigma(A)}$. Por otro lado, de la hipótesis tenemos que $\boldsymbol{\sigma X}$ es Fréchet, así existe una sucesión $\boldsymbol{(y_i)_{i\in\mathbb{N}}}$ en $\boldsymbol{A}$ tal que: $\boldsymbol{y_i \to x}$. Esto implica que la sucesión $\boldsymbol{(y_i)}$ intersecta a cada sucesión $\boldsymbol{(x_{nm})_m}$ en una cantidad finita de puntos, pues de lo contrario la sucesión $\boldsymbol{(y_i)}$ estaría, para un $\boldsymbol{n}$ fijo, en la sucesión $\boldsymbol{(x_{nm})_m}$. Esto no puede ocurrir ya que $\boldsymbol{x_{nm} \to x_n}$ y acabamos de decir que $\boldsymbol{y_i \to x}$. En consecuencia, podemos construir una subsucesión $\boldsymbol{\left(x_{n_i m}\right)}$ de la sucesión $\boldsymbol{(y_i)}$ con $\boldsymbol{n_i}$ estrictamente creciente, tal que $\boldsymbol{x_{n_i m} \to x}$. Por lo tanto, $\boldsymbol{P}$ tiene una diagonal.

$(\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3})$ La prueba la haremos por reducción al absurdo.

Sea $\boldsymbol{P}$ un subespacio de $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{\sigma P}$ es homeomorfo a $\boldsymbol{S_2}$. Puesto que $\boldsymbol{S_2}$ es un peine sin diagonales y $\boldsymbol{\sigma P}$ es homeomorfo a $\boldsymbol{S_2}$ entonces, $\boldsymbol{\sigma P}$ es un peine sin diagonales. Así, esta suposición trae como consecuencia, una contradicción con la hipótesis, ya que todo peine de $\boldsymbol{X}$ tiene una diagonal.

$(\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1})$ Probemos $(\neg \mathbf{1} \Rightarrow \neg \mathbf{3})$

Supongamos que $\boldsymbol{\sigma X}$ no es Fréchet. Por el Lema 3.5 existe un subconjunto $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{X}$ tal que: $\boldsymbol{A^{(1)}}$ no es cerrado en $\boldsymbol{\sigma X}$. En vista que $\boldsymbol{\sigma X}$ es secuencial, existe una sucesión $\boldsymbol{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ en $\boldsymbol{A^{(1)}}$ convergiendo a $\boldsymbol{x \in X \backslash A^{(1)}}$. Podemos asumir que los $\boldsymbol{x_n}$ son todos distintos y $\boldsymbol{x_n \notin A}$. Por otro lado, como $\boldsymbol{X}$ es $\boldsymbol{T_2}$ entonces, podemos considerar $\boldsymbol{\{V_n\}}$ una sucesión de subconjuntos abiertos dos a dos disjuntos de $\boldsymbol{X}$ tal que: $\boldsymbol{x_n \in V_n}$, para todo $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$. Ahora bien, para cada $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$ existe una sucesión $\boldsymbol{(x_{nm})_m \in A \cap V_n}$ convergiendo a $\boldsymbol{x_n}$.

Sea

$$C = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

Claramente C es un peine de x en X. Por el ítem (3) se tiene que σC no es homeomorfo a S_2. Así, por el lema 3.3, C tiene una diagonal. Sea $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una diagonal en C que converge a $y \in C$. Si $y \neq x$ entonces, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que: $y \in V_i$. Así, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $y_k \in V_i$ para todo $k \geq k_0$, el cual es una contradicción. Luego, C tiene una diagonal convergiendo a x, por ende $x \in A^{(1)}$, el cual también es una contradicción. Por lo tanto, σX es Fréchet. ■

La siguiente terminología proviene del alemán. "G" viene de Gebiet que significa conjunto abierto y la "δ" de Durchschnitt que significa intersección.

Definición 3.7 Un punto x de un espacio X es llamado G_δ regular, si existe una sucesión de vecindades de x en X tal que la intersección de sus clausuras es $\{x\}$.

Teorema 3.8 Sea (X, τ) un espacio topológico. Si (X, τ) es Hausdorsff y numerable entonces, cada punto del espacio X es G_δ regular.

Demostración: Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de (X, τ). Consideremos $x \in X$, probemos que x es G_δ regular. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x = x_0$. Puesto que (X, τ) es Hausdorff entonces, existen abiertos U_0 y V_0 de x_0 y x_1, respectivamente, tal que $U_0 \cap V_0 = \emptyset$. Así, separamos x_0 de x_1. Ahora bien, si $x_2 \in V_0$. Tenemos que ya existen los abiertos disjuntos de x_0 y x_2 que separan a los puntos mencionados. En caso contrario, si $x_2 \notin V_0$ entonces, como (X, τ) es Hausdorff, existen abiertos U_1 y V_1 de x_0 y x_2, respectivamente, tal que $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Consideremos $W_0 = U_0$ y $W_1 = U_0 \cap U_1$ abiertos de x_0 tales que x_1 y x_2 no están en W_0 ni en W_1. Además, cabe destacar que x_1 y x_2 no están en $\overline{W_0}$, ni en $\overline{W_1}$, pues si $x_1 \in \overline{W_0}$ entonces, $V_0 \cap W_0 \neq \emptyset$, esto produce una contradicción. Por otro lado, si $x_1 \in \overline{W_1}$ entonces, $V_1 \cap W_1 \neq \emptyset$, lo cual también nos lleva a una contradicción. Análogamente, se demuestra que x_2 no está en $\overline{W_0}$ ni en $\overline{W_1}$.

Ahora bien, supongamos que para los primeros $(n-1)$ puntos del espacio X, según la enumeración antes mencionada, hemos encontrado abiertos tales que $x_0 \in W_{n-1}$, $x_i \in V_i$ y $x_i \notin \overline{W_{n-1}}$ para todo $i = 1, \ldots, (n-1)$. Consideremos x_0 y x_n, sin pérdida de generalidad supondremos que $x_n \notin V_n$ para todo $n = 0, 1, \ldots, n-1$. Como (X, τ) es Hausdorff, se tiene que existen abiertos disjuntos U_n y V_n de x_0 y x_n respectivamente. Luego, consideremos $x_0 \in W_n = U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$, el cual es una vecidad de x_0. Además, ningún x_i con $i = 1, 2, \cdots, n$ está en $\overline{W_n}$. Finalmente, hemos encontrado una sucesión $\{W_n\}$ de vecindades de x_0, con $W_{n+1} \subset W_n$ y tal que $\{x_0\} = \{\overline{W_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto, x_0 es G_δ regular. ■

El teorema anterior permite demostrar que los siguientes ejemplos son espacios en los cuales cada punto es G_δ regular.

Ejemplo 3.9 Todos los puntos del espacio de Arens S_2 son G_δ regular. Pues, S_2 es Hausdorff y numerable.

Ejemplo 3.10 Todos los puntos del espacio abanico secuencial $S(\omega)$ son G_δ regular. Pues, $S(\omega)$ es Hausdorff y numerable.

Ejemplo 3.11 Todos los puntos del espacio Arkhangel'ski-Franklin son G_δ regular.

No conozco un espacio topológico X en el cual un punto no sea G_δ regular. Sospecho que el espacio formado por las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es G_δ regular. Por ende, dejo abierta esta pregunta.

Lema 3.12 (Lin 1997) Sea X un espacio en el cual cada punto es G_δ regular. Si X no contiene ningún subespacio cerrado Y tal que σY es homeomorfo a S_2 entonces, σX es un espacio Fréchet.

Demostración: Por el teorema 3.6 solo necesitamos probar: Si X contiene un subespacio S tal que σS es homeomorfo a S_2 entonces, S contiene un subespacio cerrado T de X tal que σT es homeomorfo a S_2.

Sea

$$S = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

Consideremos una sucesión $\{G_\delta\}$ de vecindades abiertas de x en X tal que $G_{k+1} \subset G_k$ y $\{x\} = \cap\{Cl(G_k) : k \in \mathbb{N}\}$. Puesto que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \in G_k$. Ahora bien, la sucesión $\{x_{n_k m}\}_m$ converge a x_{n_k} para todo $m \in \mathbb{N}$, así existe un $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k m_k} \in G_k$ para $m \geq m_k$.

Ahora, sea

$$\boldsymbol{T} = \{x\} \bigcup \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x_{n_k m} : k \in \mathbb{N}, m \geq m_k\}$$

Claramente $\boldsymbol{T}$ es un peine sin diagonales, además $\boldsymbol{T}$ es cerrado. En efecto, si $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{T}$ entonces, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{Cl}(\boldsymbol{G_\delta})$, para algún $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$. Ahora bien, consideramos

$$\boldsymbol{F} = \{x_{n_i} : i < k\} \bigcup \{x_{n_i m} : i < k, m > m_i\}$$

El cual es compacto en $\boldsymbol{X}$. Luego, existe una vecindad $\boldsymbol{W}$ que contiene a $\boldsymbol{p}$ tal que $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{F} = \emptyset$, así $\boldsymbol{W} \cap \left(\boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{Cl}(\boldsymbol{G_k})\right) \cap \boldsymbol{T} = \emptyset$. En consecuencia, $\boldsymbol{T}$ es cerrado en $\boldsymbol{X}$. Por el lema 3.3 se tiene que $\boldsymbol{\sigma T}$ es homeomorfo a $\boldsymbol{S_2}$, pues $\boldsymbol{T}$ es un abanico sin diagonales. ■

Cabe destacar que el siguiente corolario no presenta demostración en (Lin 1997), ya que el autor dice antes de mencionar el corolario que la demostración se desprende del hecho que: todo subespacio cerrado de un espacio secuencial es secuencial. En este artículo hago la siguiente observación, me parece que en la hipótesis del corolario hace falta pedirle al espacio $\boldsymbol{X}$ que sea secuencial pues, sino no tiene sentido la observación que hace S. Lin antes de enunciar el corolario. Presentare el enunciado del corolario como pienso es correcto.

Corolario 3.13 Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio topologico secuencial en el cual cada punto es $\boldsymbol{G_\delta}$ regular. Si $\boldsymbol{X}$ contiene una copia de $\boldsymbol{S_2}$ entonces, $\boldsymbol{X}$ contiene una copia cerrada de $\boldsymbol{S_2}$.

Demostración: Supongamos que $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico secuencial en el cual cada punto es $\boldsymbol{G_\delta}$ regular y $\boldsymbol{X}$ tiene una copia de $\boldsymbol{S_2}$, probemos que la copia de $\boldsymbol{S_2}$ es cerrada. Puesto que $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{\sigma X}$ poseen las misma sucesiones convergentes entonces, se tiene que $\boldsymbol{\sigma X}$ tiene una copia de $\boldsymbol{S_2}$. Esto implica a la vez que $\boldsymbol{\sigma X}$ no es Fréchet. Por el contra reciproco del Lema 3.12, existe $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$ cerrado tal que $\boldsymbol{\sigma Y} \approx \boldsymbol{S_2}$. Por otro lado, sabemos que $\boldsymbol{X}$ es secuencial y $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$ cerrado entonces, tenemos que $\boldsymbol{Y}$ es secuencial. Finalmente, por el corolario 2.6 se tiene que $\boldsymbol{\sigma Y} = \boldsymbol{Y}$. Por lo tanto, la copia de $\boldsymbol{S_2}$ es cerrada. ■

No conozco un ejemplo de un espacio que contenga copias de $\boldsymbol{S_2}$, pero, no contenga copias cerradas. Presentare, sin mucho detalle, dos ejemplos que muestran lo dicho anteriormente. Un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ es completamente metrizable, si este admite una métrica $\boldsymbol{d}$ tal que $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ es completo. Además, un espacio completamente metrizable separable es llamado polaco. $\mathbb{R}$ es un espacio polaco y $\mathbb{Q}$ es un ejemplo de un espacio que no es polaco.
En (Alexander 1994) muestran lo siguiente: Si $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}$ polaco e $\boldsymbol{Y}$ cerrado entonces, $\boldsymbol{Y}$ es polaco. Así, el primer ejemplo es:

Ejemplo 3.14 Todo espacio polaco no numerable contiene una copia de $\mathbb{Q}$, pero no contiene una copia cerrada de $\mathbb{Q}$. Consideremos, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ polaco. Si suponemos que $\mathbb{R}$ posee una copia cerrada de $\mathbb{Q}$ entonces, la copia de $\mathbb{Q}$ es un polaco. Esto genera una contradicción pues, $\mathbb{Q}$ no es un polaco.
Para construir el otro ejemplo debemos recordar el Teorema de Hurewiez (Alexander 1994)

Teorema 3.15 (Teorema de Hurewiez) Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio polaco. $\boldsymbol{X}$ Contiene una copia cerrada de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si y sólo si, $\boldsymbol{X}$ no es unión numerable de compactos.

Ejemplo 3.16 $\mathbb{R} = \bigcup_{\boldsymbol{n}} [-\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}]$, por el Teorema de Hurewiez se tiene que $\mathbb{R}$ no contiene una copia cerrada de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4 Espacio Abanico

Definición 4.1 Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$ un espacio topológico. Consideremos el subespacio de $\boldsymbol{X}$ formado por:

$$\boldsymbol{S} = \{x\} \bigcup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

Donde $(\boldsymbol{x_{nm}})_{m \in \mathbb{N}}$ son sucesiones en $\boldsymbol{X}$ convergentes a $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, para todo $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Además, $\boldsymbol{x_{nm}} \neq \boldsymbol{x_{lk}}$ para todo $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{l} \in \mathbb{N}$. Al subespacio $\boldsymbol{S}$ lo llamaremos espacio abanico.

En la fig. 6 se muestra gráficamente como luce el espacio abanico:

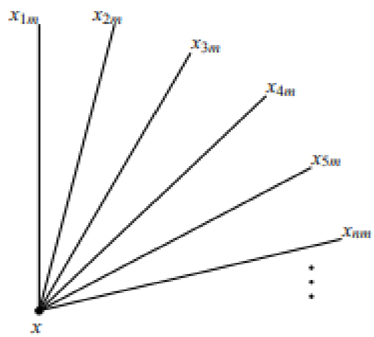

Fig.6. Espacio Abanico.

Una **diagonal en un espacio abanico S** es una sucesión $(x_{n_i m_i}) \in S$ que converge a $x \in S$ y tal que n_i es estrictamente creciente para todo $n_i \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.2 $S(\omega)$ es un abanico sin diagonales. Por el lema 1.10 no se puede construir una sucesión que intersecte infinitas secciones verticales y que converja al punto ∞ , por lo tanto, $S(\omega)$ es un abanico sin diagonales.

Lema 4.3 Sea (X, τ) un espacio topológico. σX es homeomorfo a $S(\omega)$ si y sólo si, X es un abanico sin diagonales.

Demostración: Primero supongamos que σX es homeomorfo a $S(\omega)$. Puesto que X y σX posee las mismas sucesiones convergentes y $S(\omega)$ es un abanico sin diagonales entonces, X es un abanico sin diagonales.

Ahora, supongamos que $X = \{x\} \cup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ es un abanico sin diagonales como en la definición 4.1. Puesto que, X y σX posee las mismas sucesiones convergentes y X es un abanico sin diagonales entonces, σX es un abanico sin diagonales. Además, sabemos que σX es secuencial y $S(\omega)$ es un abanico sin diagonales entonces, podemos considerar el siguiente homeomosfismo

$$G : \sigma X \to S(\omega)$$

Definido por:

$$\begin{cases} G(x_{nm}) = (n, m) \\ G(x) = \infty \end{cases}$$

Claramente, se tiene que G es inyectiva. Además, es continua aplicando el Lema XXX. Nos resta demostrar que G^{-1} es continua. En efecto, las sucesiones convergentes en $S(\omega)$ provienen de sucesiones convergentes en σX. Por tanto, σX es homeomorfo a $S(\omega)$. ■

Lema 4.4 Supongamos que X contiene un abanico S en un punto x sin diagonales que converjan a x. Si x es G_δ regular en X entonces, S contiene un subespacio cerrado T de X tal que σT es homeomorfo a $S(\omega)$.

Demostración: Sea $S = \{x\} \cup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ donde las sucesiones $\{x_{nm}\}_m$ convergen a x , para cada $n \in \mathbb{N}$. Como x es G_δ regular entonces, existe una sucesión $\{W_n\}$ de vecindades abiertas de x en X tal que $\{x\} = \cap\{Cl(W_n)\}$. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m(1, n) \in \mathbb{N}$ con $x_{n\, m(1,n)} \in W_{n+1}$. Consideremos $D_1 = \{x_{n\, m(1,n)} : n \in \mathbb{N}\}$ y $V_1 = X \setminus D_1$ entonces, cualquier subsucesión de D_1 no converge a x . Así, V_1 es un conjunto secuencialmente abierto que contiene a x . Por inducción construiremos $D_i = \{x_{nm(i,n)} : n \in \mathbb{N}\}$ y $V_i = X \setminus (D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_i)$ tal que $x_{n\, m(i+1,n)} \in W_{n+i+1} \cap V_i$ y $m(i, n) < m(i+1, n)$; para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión $\{x_{nm(i,n)} : i \in \mathbb{N}\}$ converge a x para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x_{nm(i,n)} \in W_k$, si $n + i \geq k$.

Sea

$$T = \{x\} \bigcup \{x_{n\, m(i,n)} : i, n \in \mathbb{N}\}$$

Por construcción T es un abanico sin diagonales. Además, T es cerrado.En efecto, $T \setminus W_k$ es finito para cada $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $p \in Cl(W_k)$ con p un punto de acumulación de T en X. Por lo tanto, $p = x$, es decir; x es el único punto de acumulación de T. Por el Lema 3.3 σT es homeomorfo a $S(\omega)$ pues, T es un abanico sin diagonales. ■

Finalizaremos este artículo presentando la demostración del siguiente corolario:

Corolario 4.5 Sea (X, τ) un espacio topológico en el cual cada punto es G_δ regular. Si (X, τ) contiene una copia de $S(\omega)$ entonces, X contiene una copia cerrada de $S(\omega)$.

Demostración: Sea (X, τ) un espacio topológico en el cual cada punto es G_δ regular. Supongamos que (X, τ) contiene un subespacio S tal que $S \approx S(\omega)$. Como $S \approx S(\omega)$ y $S(\omega)$ es un abanico sin diagonales entonces, S es un abanico sin diagonales, además por hipótesis cada punto es $\boldsymbol{G_\delta}$ regular. Por el Lema 4.4, $\boldsymbol{S}$ contiene un subespacio cerrado $\boldsymbol{T}$ de $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{\sigma T} \approx \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})$. Por otro lado, ya que $\boldsymbol{S}$ es secuencial y $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{S}$ cerrado entonces, $\boldsymbol{T}$ es secuencial. En consecuencia, por el corolario 2.6 tenemos que $\boldsymbol{\sigma T} \approx \boldsymbol{T}$. Así se obtiene que $\boldsymbol{\sigma T}$ es cerrado. Por lo tanto, $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$ contiene una copia cerrada de $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})$. ■

Preguntas:

1. ¿Cada punto de $\boldsymbol{C_p}(\boldsymbol{X})$ es $\boldsymbol{G_\delta}$ −regular?
2. ¿El cuadrado de $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})$ es secuencial?

Referencias

Armando, R. (2018). Rango secuencial de $\boldsymbol{C_p}(\boldsymbol{X})$. Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 39. No .1. Pp 97-106.

Arkhangel'skii, AV. (1992). Topological function space. Mathematics and its applications. Soviet serie, vol.78.

Arkhangel'skii, AV., & Franklin, S. (1968). Ordinal invariants for topological space. Mich.Math.J., 15:313-320.

Arkhangel'skii, AV., & Bella, A. (1996). Coutable fan-tightness versus contable tightness. Comment. Math. Univ.Carolinae, Vol 37, pp:567-578.

Baber, S. & Boone, J.R.(1982). Topology and its applications. Test space for infinite sequential order, Vol 14,pp 229-240.

Gerardo,D., & Miguel, L. (2009). Espacios de Fréchet Urysohn. Revista de ciencias básicas UJAT. Vol 8. Pp: 29-56.

James, M. (2002). Topologia. Prentice Hall.

Kechris Alexander, S. (1994). Classical Descriptive Set Theory. Springer-Verlag.

Lin, S. (1997). Topology and its Applications. A note on the Arens space and sequential fan. Pp: 185-196.

Stevo, T & Carlos, U. (2001) Analytic topologies over countable sets. Topology and its applications. Vol 111. Pp 299-326.

Stevo, T & Carlos, U. (2002) Analytic k-spaces. Topology and its applications. Vol 111. Pp 299-326.

Stevo, T. (1997) Topics in topology. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Srivastava, S. (1998) A course On Borel sets. Springer-Verlag.

Vaughan, J. (2001) Two spaces homeomorphic to $\boldsymbol{Seq}(\boldsymbol{p})$. Comment. Math. Univ. Carolinae pp 209-218.

Recibido: *15 de enero de 2024*

Aceptado: *20 de mayo de 2024*

Rodríguez Rodríguez, Armando: *MSc en Matemática (2013), Universidad de Los Andes. Profesor Agregado del Departamento de Cálculo de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes.*
https://orcid.org/0009-0008-1544-9288.