Artículo de Investigación. Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 44, No. 1, pp. 37-42, diciembre-marzo,2023.
ISSN 1316-7081. ISSN Elect. 2244-8780. Universidad de Los Andes (ULA)

Interpolación de cónicas en 3D, usando cuboides.

Interpolation of conics in 3D, using cuboids.

Tovar, Francisco*; Daza, Julio; Otero, Jonnathan
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad Metropolitana, Caracas, 1073, Venezuela.
*ftovar@unimet.edu.ve

Resumen

El objetivo de esta investigación es diseñar y controlar una superficie algebraica de grado tres o cuboide que interpole dos cónicas dadas que yacen en dos planos diferentes en 3D. El antecedente de esta investigación es el estudio de ciertas superficies tubulares, diseñadas con la envolvente de una familia monoparamétrica cuadrática de esferas (Paluszny y col. 1998), (Franquiz y col. 2006) y (Boehm y col. 1997). La ecuación implícita de tales superficies tubulares tiene, en general grado algebraico 4 y en ciertos casos particulares tiene grado 3, es decir, resulta un cuboide. Dado que estas superficies tubulares constan de perfiles circulares, es posible prescribir dos círculos de interpolación para el diseño de segmentos tubulares. Nuestro estudio trata de generalizar la expresión de esta superficie tubular de grado 3, de modo que se puedan interpolar cualquier par de cónicas en el espacio, usando una sección de un cuboide. En particular, hacemos énfasis en el caso que las cónicas de interpolación dadas sean elipses y todos los perfiles del cuboide sean también elípticos, de esta forma se pueden diseñar superficies tubulares de grado tres con perfiles no necesariamente circulares, además el grado de la superficie es 3, menor al caso estudiado por los autores antes nombrados.
En (Xu y col. 2001), se construyen segmentos de superficies algebraicas, los cuales son llamados A-Patches, en esta construcción se usan segmentos de cuboides en coordenadas tetraédricas. En nuestro caso también se estudia la construcción de un cuboide interpolante en coordenadas tetraédricas, pero se controla cada perfil de la superficie.
Nótese que, si se considera el problema de interpolar dos cónicas en 3D que yacen en dos planos diferentes, con una superficie algebraica de grado dos o cuádrica, no se tienen suficientes grados de libertad para resolver el problema.

Palabras clave: *Cuboides, interpolación de cónicas, coordenadas tetraédricas, perfiles elípticos.*

Abstract

We introduce a method to design and control an algebraic surface of degree three or cuboid, that interpolates two given conics that lie in two different planes in 3D. The background of this research is the study of certain tubular surfaces, designed with the envelope of a quadratic parametric family of spheres (Paluszny et al. 1998), (Franquiz et al. 2006) and (Boehm et al. 1997). In general, the implicit equation of such tubular surfaces has algebraic degree 4 and, in certain cases it has degree 3, this is a cuboid. Since these tubular surfaces consist of circular profiles, it is possible to prescribe two interpolation circles for the design of tubular segments. Our study tries to generalize the expression of this tubular surface of degree 3, so that any pair of conics in space can be interpolated, using a section of a cuboid. We emphasize the case that the given interpolation conics are ellipses, and all the profiles of the cuboid are also elliptical. In this way, it is possible to design tubular surfaces of degree three, with profiles that are not necessarily circular. In addition, the degree of the surface is 3, lower than the case studied by the aforementioned authors.
In (Xu et al. 2001), segments of algebraic surfaces are constructed, which are called A-Patches, in this construction segments of cuboids in tetrahedral coordinates are used. In our case, the construction of an interpolating cuboid in tetrahedral coordinates is also studied, but each surface profile is controlled.
Note that, if we consider the problem of interpolating two 3D conics lying in two different planes, with an algebraic surface of degree two or quadratic surface, we do not have enough degrees of freedom to solve the problem.

Key words*:* *Cuboids, conics interpolation, tetrahedric coordinates, elliptic profiles.*

1 Superficie algebraica de grado tres o cuboide.
La expresión general de un cuboide en coordenadas tetraédricas (s,t,u,v) (Montes de Oca 2000) está dada por:

$$C(s,t,u,v)=\sum_{i=1}^{20}a_is^lt^mu^nv^k\,,l+m+n+k=3$$

$$a_i\in\mathbb{R},i=1,..,20 \qquad (1)$$

si la superficie $C(s,t,u,v)=0$ contiene a la recta

$$\begin{cases}s=0\\u=0\end{cases}$$

la expresión se reduce a:

$$C(s,t,u,v)=uC_s(t,u,v)+sC_u(s,t,v)+suP(s,t,u,v) \qquad (2)$$

donde:

$$C_s(t,u,v)=a_1u^2+a_2tu+a_3t^2+a_4uv+a_5v^2+a_6tv \qquad (3)$$

$$C_u(s,t,v)=a_7s^2+a_8ts+a_9t^2+a_{10}sv+a_{11}v^2+a_{12}tv \qquad (4)$$

$$P(s,t,u,v)=a_{13}s+a_{14}t+a_{15}u+a_{16}v \qquad (5)$$

Al interceptar el cuboide dado por (2) con el plano $s=0$, resulta la cúbica reducible $uC_s(t,u,v)=0$.
Análogamente, resulta con la cúbica reducible $sC_u(s,t,v)=0$, en el plano $u=0$.

Los coeficientes que definen el plano dado en (5) son libres para cambiar la forma del cuboide el cual interpola las cónicas preestablecidas por $C_s(t,u,v)=0$, en el plano $s=0$ y $C_u(s,t,v)=0$, en el plano $u=0$ respectivamente.

Nótese que las cónicas de interpolación inicial y final del cuboide, se prescriben con los coeficientes de las cónicas (3) y (4). Aquí se evidencia que, si se pretende hacer este procedimiento usando superficies de grado 2, no se tienen suficientes parámetros libres para definir las cónicas de interpolación en forma independiente. En la Figura 1 se muestra un cuboide que contine la recta $\begin{cases}s=0\\u=0\end{cases}$.

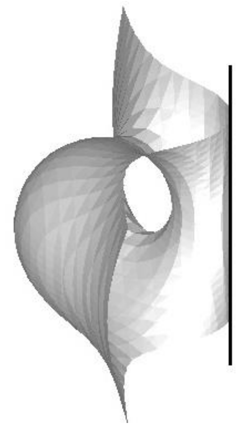


Fig. 1. Ejemplo de un cuboide que contiene una recta.

En la Figura 2, se muestra un ejemplo de un cuboide que interpola dos cónicas, en este caso particular son dos parábola.

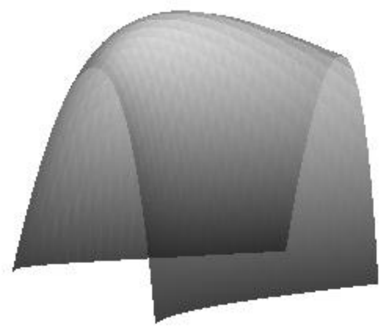


Fig. 2. Cuboide que interpola dos parábolas en 3D.

2 Cuboide con perfiles elípticos.

En el caso de superficies tubulares, tales como las cíclides, sus perfiles son círculos (Paluszny y col. 1998, Franquiz y col. 2006). Para un cuboide dado por (2), los perfiles que resultan de interceptar con planos que contienen la recta $\{s=0\ \&\ u=0\}$ son cónicas en general. En particular, para la construcción de superficies tubulares usando cuboides, vamos a utilizar perfiles elípticos. Un cuboide tendrá perfiles elípticos si satisface las siguientes condiciones:

1) La cúbica en el infinito del cuboide debe ser reducible, esto es, el producto de una cónica con una recta.

2) La cónica, factor de la cúbica en el infinito, debe ser imaginaria.

Nótese que al interceptar el cuboide con planos que contienen la recta $\{s=0\ \&\ u=0\}$, resultan cúbicas reducibles, estos perfiles cúbicos pueden tener dos tipos de intersecciones con el plano en el infinito: una intersección real y dos complejas o tres intersecciones reales (independientes de la multiplicidad de intersección). Si el perfil cúbico tiene solo una intersección real con el plano en el infinito, esta ocurre con la recta $\{s = 0 \,\&\, u = 0\}$ entonces, el factor cónico no intercepta al plano en el infinito, por tanto, la cónica es una elipse. Por esta razón las condiciones (1) y (2) garantizan que los perfiles del cuboide sean elípticos.

Para calcular la cúbica en el infinito del cuboide dado en (2), éste se interseca con el plano en el infinito

$$s + t + u + v = 0$$

de donde resulta una cúbica general. Para que esta cúbica sea reducible y se conserven las propiedades de interpolación en las cónicas extremas, se definen convenientemente los coeficientes de $P(s,t,u,v)$ dados en (5) sin cambiar las cónicas de interpolación extremas. A continuación, mostraremos como se definen estos coeficientes:

Si la cúbica en el infinito del cuboide es reducible, entonces, está dada por el producto de una recta con una cónica y su expresión es:

$$C_i(s,t,u) = (As^2 + Bsu + Cu^2 + Dst + Etu + Ft^2)(Hs + Jt + Ku)$$
(12)

Donde los coeficientes de la expresión (12) dependen de los coeficientes del cuboide. El factor cuadrático dado en (12) no tiene puntos reales si se satisface la condición:

$$(B^2 - 4AC) < 0 \,\&\, (4ACF - AE^2 - B^2F + BDE - CD^2)A > 0 \qquad (13)$$

Cada una de las inecuaciones dadas en (13) se usarán más adelante para garantizar que los perfiles del cuboide sean elípticos. Estas inecuaciones son el resultado de calcular el discriminante de la cónica dada en (12).

Al sustituir $v = -s - t - u$, en la expresión (2), se obtiene la expresión de la cúbica en el infinito en términos de los coeficientes a_i. Al comparar con los coeficientes de la expresión (12), se obtiene un sistema de ecuaciones no lineales entre los coeficientes a_i y los coeficientes de $C_i(s,t,u)$. Al resolver este sistema, se deben tener en cuenta las condiciones de interpolación que satisface el cuboide, por tanto, solo se pueden establecer condiciones sobre la expresión lineal $P(s,t,u,v)$ dado en (5). La solución del sistema se plantea en dos casos, J=0 o F=0. Para el primer caso $F \neq 0$, $H \neq 0, K \neq 0$, resultan las ecuaciones

$$H = \frac{a_{11} - a_{12} + a_9}{F} \qquad K = \frac{a_3 + a_5 - a_6}{F}$$

$$A = \frac{a_{10} - a_{11} - a_7}{H} \qquad C = \frac{a_1 - a_4 + a_5}{K}$$

$$D = \frac{-a_{10} + 2a_{11} - a_{12} + a_8}{H}$$

$$E = \frac{a_2 - a_4 + 2a_5 - a_6}{K}$$

$$a_{13} = AK + BH + a_{10} - 2a_{11} + a_{16} - a_5$$

$$a_{14} = DK + EH - 2a_{11} + a_{12} + a_{16} - 2a_5 + a_6$$

$$a_{15} = BK + CH - a_{11} + a_{16} + a_4 - 2a_5$$

Donde $B, F\ y\ a_{16}$ son parámetros libres que se usan para modificar la forma del cuboide de interpolación. La cúbica en el infinito se define en función de las dos cónicas de interpolación y los parámetros B, F y a_{16} .

Finalmente, la expresión de cuboide de interpolación que se obtiene es:

$$C(s,t,u,v) = uC_s(t,u,v) + sC_u(s,t,v) + suP(s,t,u,v)$$

Donde:

$$\begin{aligned}P(s,t,u,v) = {} & (AK + BH + a_{10} - 2a_{11} + a_{16} - a_5)s \\ & + (DK + EH - 2a_{11} + a_{12} + a_{16} - 2a_5 \\ & + a_6)t + (BK + CH - a_{11} + a_{16} + a_4 \\ & - 2a_5)u + a_{16}v\end{aligned}$$

Usando el hecho que las cónicas de interpolación prescritas son elipses, se puede garantizar que los perfiles del cuboide son también elipses, para ciertos valores de B. El discriminante del polinomio:

$P(B) = 4ACF - AE^2 - B^2F + BDE - CD^2$ de grado 2 en la variable B, está dado por la expresión:

$\Delta(P(B)) = (E^2 - 4CF)(D^2 - 4AF)$, al sustituir las expresiones encontradas (A, D, E, a_{13}, a_{14} y a_{15}) se transforma en la expresión $\Delta(P(B)) = K^2H^2\Delta(C_s)\Delta(C_u)$. Los dos últimos factores son los discriminantes de las cónicas extremas. Por ser elipses el polinomio $P(B)$ tiene raíces reales y es suficiente escoger el valor de B entre ambas raíces si F>0 y en el caso F<0, se escoge B fuera de las raíces del polinomio.

Ahora se estudia el caso, F=0 y $J \neq 0$. La ecuación de la cúbica en el infinito se expresa:

$C_i(s,t,u) = (As^2 + Bsu + Cu^2 + Dst + Etu)(Hs + Jt + Ku)$. Similar al caso J=0, $F \neq 0$, al sustituir v=-s-t-u en la ecuación (2), resultan ecuaciones no lineales para los coeficientes $A, B, C, D, E, H, J, \& K$, están son:

$$A = -\frac{a_{10} - a_{11} - a_7}{H}, \qquad C = \frac{a_1 - a_4 + a_5}{K}$$

$$D = \frac{a_{11} - a_{12} + a_9}{J}, \qquad E = \frac{a_3 + a_5 - a_6}{J}$$

$$a_{13} = AK + BH + a_{10} - 2a_{11} + a_{16} - a_5$$

$$a_{14} = BJ + DK + EH - 2a_{11} + a_{12} + a_{16} - 2a_5 + a_6$$

$$a_{15} = BK + CH - a_{11} + a_{16} + a_4 - 2a_5$$

$$H = -\frac{AJ + a_{10} - 2a_{11} + a_{12} - a_8}{D}$$

$$K = -\frac{CJ - a_2 + a_4 - 2a_5 + a_6}{E}$$

Las expresiones de los coeficientes A y H, están relacionadas. Para que ambas ecuaciones se satisfagan es necesario calcular los ceros de un polinomio de grado dos en [H, J], dado por:

$$P[H,J] = (a_{12} - a_{11} - a_9)H^2 - (a_{10} - 2a_{11} + a_{12} - a_8)HJ + (a_{10} - a_{11} - a_7)J^2$$

El determinante del polinomio $P[H,J]$ es $\Delta(C_u)$ el cual es positivo por ser la cónica C_u una elipse, por lo tanto, tiene solución y se pueden calcular sus dos raíces.

Un hecho similar ocurre con las expresiones de los coeficientes de C y K, de ambas expresiones resulta el polinomio

$$P[K,J] = (-a_3 - a_5 + a_6)K^2 + (a_2 - a_4 + 2a_5 + a_6)KJ - J^2(a_1 - a_4 + a_5) .$$

El determinante del polinomio $P[K,J]$ es $\Delta(C_s)$ el cual es positivo por ser la cónica C_s una elipse, por lo tanto, tiene solución y se pueden calcular sus dos raíces.

Al calcular los valores para H y K a partir de los polinomios anteriores, se pueden calcular el resto de los coeficientes, quedando libres los coeficientes B, J y a_{16}.

Estos perfiles elípticos pueden ser reales o imaginarios. En el caso de elipses imaginarias aparece una desconexión del cuboide, esto se controla con los coeficientes libres del cuboide. Para el cuboide dado por (17) los parámetros libres, permiten controlar la forma de la superficie. La Figura 3, muestra un cuboide que interpola dos elipses y además todos los perfiles que se producen al abatir con los planos, también son elípticos.

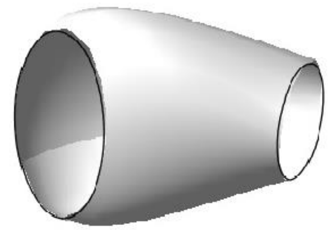
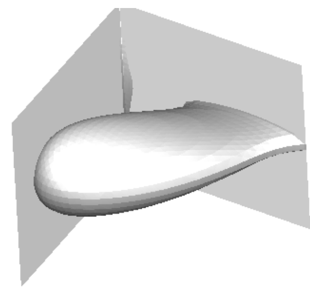
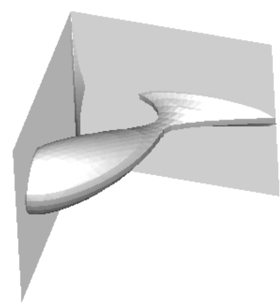


Fig. 3. Cuboide formado de perfiles elípticos.

La Figura 4 muestra como cambia la forma del cuboide, al variar los parámetros libres, manteniendo las cónicas de interpolación.



(a)



(b)

Fig. 4. (a) $a_{16} = -40$, (b) $a_{16} = -32$.

3 Conclusiones

El análisis realizado sobre superficies algebraicas de grado 3, nos permitió construir y controlar segmentos de superficies algebraicas que interpolan dos cónicas en el espacio. En el análisis de estos cuboides se utilizó la propiedad que tienen estas superficies algebraicas de contener rectas. En particular, trabajamos en el caso que el cuboide contiene una sola recta. Se usó dicha recta, para abanicar una familia de planos, que al interceptar al cuboide resulta una familia de cónicas en 3D, similar a las superficies tubulares descritas en (Paluszny y col. 1998) llamadas cíclides. De esta forma se construye un segmento de superficie algebraica cuyos perfiles son cónicas y además interpola dos cónicas prescritas.

Usando los parámetros libres (B, J y a_{16}) se puede cambiar localmente la forma del cuboide, sin cambiar las cónicas extremas de interpolación.

Referencias.

Boehm W., Paluszny M. (1997). General cyclides as joining pipes. Technical Report.

Franquiz J., Paluszny M., Tovar, F. (2006). Cyclides and the guiding circle. Mathematics and Computers in Simulation 73 (1), 168-174.

Montes de Oca, A. (2000). Geometría Métrica y Proyectiva en el Plano con Coordenadas Baricéntricas. Algunos Tópicos, Versión 2.181231712.

Paluszny M, Boehm W, (1998). General cyclides. Computer Aided Geometric Design 15 (7), 699-710

Recibido: *01 de septiembre de 2022*.

Aceptado: *22 de noviembre de 2022*.

Tovar, Francisco: *Doctor en Ciencias, mención Matemática. Profesor Titular Jubilado de la Universidad Central de Venezuela. Profesor Titular de la Universidad Metropolitana.*
https://orcid.org/0000-0002-5662-5160.

Daza, Julio: *MSC en Ciencias, mención Matemática. Profesor Asociado de la Universidad Metropolitana, Correo electrónico: jdaza@unimet.edu.ve*. *https://orcid.org/0000-0003-0685-988X*.

Otero, Jonnathan: *MSC en Ciencias, mención Matemática. Profesor Agregado de la Universidad Metropolitana, Correo electrónico: jotero@unimet.edu.ve*.
https://orcid.org/0000-0003-1332-7259