

Mapas cualitativos globales del comportamiento del convertidor de potencia tipo Buck-Boost en lazo cerrado

Global qualitative maps of the behavior of the Buck-Boost power converter in closed loop

Sosa, Keiver^{1*}; Spinetti, Mario²;

¹ Doctorado en Ciencias Aplicadas, Facultad de Ingeniería,
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

² Departamento de Sistema de Control, Escuela de Sistemas,
Facultad de Ingeniería, Mérida, Venezuela.

*keiversosa@gmail.com

Resumen

En este trabajo se muestra el análisis del comportamiento global y local del convertidor de potencia tipo Buck-Boost en lazo cerrado usando como controlador la técnica de Realimentación del Vector de Estados. Las ecuaciones diferenciales que modelan el convertidor son no lineales y no tienen solución explícita por lo que se aborda el estudio desde el punto de vista cualitativo, de manera tal que se puedan obtener los diferentes comportamientos que ocurren en el sistema dinámico en lazo cerrado, es decir, se busca información cualitativa que defina cuantos puntos de equilibrio existen, lo que ocurre cuando existe una bifurcación de esos puntos de equilibrio, el tipo de comportamiento local puede tener cada uno, desde donde vienen y hacia dónde van las soluciones o trayectorias, la forma que tienen las separatrices, existencia o no de ciclos límite. Usando la teoría de sistemas dinámicos, se demuestra que el convertidor Buck-Boost en lazo cerrado puede tener uno, dos o tres puntos de equilibrio y es un sistema cuadrático acotado. Así mismo, se obtienen los mapas cualitativos globales en términos de diagramas de fase y los rangos globales en función de los parámetros cuando el sistema tiene uno, dos o tres puntos de equilibrio. Se complementa la información del comportamiento del sistema con un análisis cualitativo local en los puntos de equilibrio donde pueden existir sillares, atractores, repulsores, centros, silla-nodo y se obtienen los rangos de operación locales en función de los parámetros del sistema.

Palabras claves: Convertidor Buck-Boost, Análisis Cualitativo, Sistema Cuadrático Acotado, Bifurcación de los puntos de equilibrio, Realimentación del Vector de Estados.

Abstract

This work shows an analysis of the global and local behavior of the Buck-Boost power converter in closed loop using the State Vector Feedback technique as controller. The differential equations that model the converter are nonlinear without explicit solution, so the study is approached from a qualitative point of view, so that the different behaviors that occur in the closed-loop dynamic system can be obtained, that is, qualitative information is sought that defines how many equilibrium points exist, what happens when there is a bifurcation of these equilibrium points, the type of local behavior each one can have, from where the solutions or trajectories come and go, the form that the separatrices have, the existence or not of limit cycles. Using dynamical systems theory, it is shown that the closed-loop Buck-Boost converter has one, two, or three equilibrium points and is a bounded quadratic system. Likewise, the global qualitative maps are obtained in terms of phase diagrams and the global ranges based on the parameters when the system has one, two or three equilibrium points. The information on the behavior of the system is complemented with a local qualitative analysis at the equilibrium points where there may be saddle, attractors, repulsors, centers, saddle-node and the local operating ranges are obtained based on the system parameters.

Keywords: Buck-Boost Converter, Qualitative Analysis, Bounded Quadratic System, Bifurcation of equilibrium points, State Vector Feedback.

1 Introducción

Los sistemas no lineales cuadráticos han sido ampliamente estudiados comenzando por Hilber (1902) donde plantea la interrogante de cuál es el número máximo de ciclos límite que pueden existir en dichos sistemas. Uno de los primeros en abordar este problema es Coppel (1966) donde intenta determinar todos los posibles diagramas de fase para sistemas cuadráticos y clasificarlos por medio de inequaciones algebraicas de los parámetros. Así mismo, Dickson y Perko (1970) estudiaron los sistemas cuadráticos acotados (*BQS: Bounded Quadratic System*) donde logran obtener una clasificación del comportamiento global a través de Teoremas y Lemas. Otro trabajo que abordó el estudio de sistemas cuadráticos fue el de Coll et al. (1987), donde obtienen una clasificación de acuerdo al número de ciclos límite corriendo un error referente al máximo número de ciclos límite en Dickson y Perko (1970). Todos estos resultados se resumen en el libro de Perko (2000) haciendo una clasificación más detallada de los *BQS* donde se muestran los mapas cualitativos del comportamiento global para estos sistemas.

Estas técnicas cualitativas ya han sido utilizadas en Spinetti-Rivera (2011) y Llibre et al (2015) donde se estudia la acotabilidad y el comportamiento cualitativo del convertidor Boost en lazo cerrado. Así mismo, el convertidor Buck-Boost ha sido estudiado en Sosa (2015) y Sosa et al (2018) donde se demuestra que en lazo cerrado es acotado, obteniendo el comportamiento cualitativo completo cuando existe un único punto de equilibrio y el comportamiento parcial cuando existen tres puntos de equilibrio.

En este sentido, este trabajo completa el estudio del comportamiento cualitativo, global y local, del convertidor Buck-Boost en lazo cerrado con Realimentación del Vector de Estado cuando existen múltiples puntos de equilibrio.

2 Marco Teórico

2.1 Convertidor Buck-Boost en Lazo Cerrado.

El convertidor Buck-Boost se caracteriza porque puede ser elevador y reductor, es decir, la tensión de salida puede ser menor o mayor que el de la fuente de alimentación (Sira-Ramírez y col., 2006). El diagrama circuital del sistema se muestra en la Fig. 1.

En el trabajo de Sira-Ramírez (1988) se demuestra como el comportamiento discreto del circuito de la Fig. 1 puede ser representado por un modelo continuo, este se denomina promedio y se obtiene aplicando las leyes de Kirchhoff y de Ohm al circuito de la Fig. 1, cuya dinámica queda representada por las ecuaciones (1).

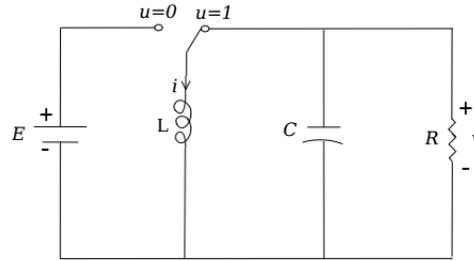


Fig. 1. Modelo del Convertidor Buck-Boost.

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= (1-u)v + (u)E, \\ C \frac{dv}{dt} &= -(1-u)i - \frac{v}{R}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde i es la corriente de la bobina, v es la tensión en el capacitor, R la resistencia de la carga, L la inductancia de la bobina, C la capacitancia del condensador, E la fuente de alimentación y u la entrada de control continua definida en el rango $[0,1]$.

Con el propósito de facilitar los cálculos se definen $\tau = t/\sqrt{LC}$ y $Q = R\sqrt{C/L}$, y aplicando la transformación lineal (2)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}, \quad (2)$$

al sistema (1) se obtiene el sistema normalizado (3).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \dot{x} = (1-u)y + u, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \dot{y} = -(1-u)x - \frac{y}{Q}, \end{aligned} \quad (3)$$

El sistema (3) tiene las variables normalizadas $x(\tau) = x$ definida como la corriente en la bobina, $y(\tau) = y$ es la tensión en el condensador, Q es un parámetro definido positivo y $u \in [0,1]$ es la entrada de control. Los puntos de equilibrio del sistema en lazo abierto (3) son definidos como

$$\bar{x} = \frac{\bar{y}(\bar{y}-1)}{Q}, \quad \bar{u} = \frac{\bar{y}}{\bar{y}-1}, \quad (4)$$

donde el valor deseado de la tensión de salida del condensador V_d es el valor en equilibrio del sistema, es decir, $\bar{y} = V_d < 0$. Trasladando el sistema (3) al origen, se utiliza

el cambio de coordenadas $e_1 = x - \bar{x}$, $e_2 = y - \bar{y}$, $e_u = u - \bar{u}$ y el sistema (5) es obtenido.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (1 - e_u - \bar{u})e_2 + \bar{y}(1 - e_u - \bar{u}) + e_u + \bar{u}, \\ \dot{e}_2 &= (e_u + \bar{u} - 1)e_1 - \frac{e_2}{Q} - \bar{x}(1 - e_u - \bar{u}) - \frac{\bar{y}}{Q}. \end{aligned} \quad (5)$$

Para aplicar el análisis cualitativo, se cierra el lazo de control substituyendo el controlador de Realimentación del Vector de Estado $e_u = -(\alpha e_1 + \beta e_2)$, donde α, β son las ganancias, y los valores de equilibrio \bar{x}, \bar{u} definidos en (4), se obtiene el sistema en lazo cerrado (6).

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \alpha(\bar{y} - 1)e_1 + \frac{(\beta(\bar{y} - 1)^2 - 1)}{\bar{y} - 1}e_2 + \alpha e_1 e_2 + \beta e_2^2, \\ \dot{e}_2 &= \frac{(Q - \alpha\bar{y}(\bar{y} - 1)^2)}{(\bar{y} - 1)Q}e_1 - \frac{\beta\bar{y}(\bar{y} - 1) + 1}{Q}e_2 - \beta e_1 e_2 - \alpha e_1^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Al hacer cero los términos derivativos en (6), se obtiene la ecuación de equilibrio en función de \bar{e}_2 dada por

$$\begin{aligned} p(\bar{e}_2) &= \bar{e}_2^3 + \left(\frac{\beta}{\alpha}Q + 3\bar{y} - 2\right)\bar{e}_2^2 \\ &+ \frac{Q(\beta(\bar{y} - 1)^2 - 1) + \alpha(\bar{y} - 1)^2(2\bar{y} - 1)}{\alpha(\bar{y} - 1)}\bar{e}_2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Dado que (7) es un polinomio de grado tres, se usa el Método de Cardano para caracterizar el número de raíces reales usando el Discriminante de Cardano definido por

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \left(Q(\beta(\bar{y} - 1)^2 - 1) + \alpha(\bar{y} - 1)^2(2\bar{y} - 1)\right)^2 \\ &+ (Q^2(\bar{y} - 1)\beta^2 + 2\alpha Q(\bar{y} - 1)\bar{y}\beta + \alpha^2(\bar{y} - 1)\bar{y}^2 + 4Q\alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

- Si $\Delta_C > 0$, existirá una raíz real y dos raíces imaginarias.
- Si $\Delta_C = 0$, existirán dos raíces, una raíz real doble y una raíz sencilla real.
- Si $\Delta_C < 0$, existirán tres raíces reales.

Proposición 1: El Método Directo de Lyapunov no puede ser aplicado si $\Delta_C = 0$ o $\Delta_C < 0$ para obtener información de la estabilidad global del sistema.

Prueba. Para aplicar el concepto de estabilidad global en el sentido de Lyapunov, es necesario que exista un único punto de equilibrio en el origen $(0, 0)$. Dado que las ecuaciones del discriminante de Cardano $\Delta_C = 0$ y $\Delta_C < 0$ establecen la existencia de dos y tres puntos de equilibrio respectivamente, entonces no se puede aplicar el Método

Directo de Lyapunov para obtener información de la estabilidad global para estos casos. \square

2.2 Teoremas y Lemas de Dickson y Perko.

Los sistemas dinámicos cuadráticos han sido ampliamente estudiados en Dickson y Perko (1970), Perko (2000) y en específico se utilizarán los Teoremas y Lemas que clasifican y caracterizan los BQS donde las trayectorias salen de los puntos de equilibrio del infinito y convergen al finito del sistema.

Teorema 1: Cualquier BQS es afínmente equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + xy \end{aligned} \quad (9)$$

con $a_{11} < 0$ y $a_{22} \leq 0$, o

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + y^2 \\ \dot{y} &= a_{22}y \end{aligned} \quad (10)$$

con $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$ y $a_{11} + a_{22} < 0$, o

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + y^2 \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y - xy + cy^2 \end{aligned} \quad (11)$$

con $|c| < 2$ y también (i) $a_{11} < 0$; (ii) $a_{11} = 0$, $a_{21} = 0$ o (iii) $a_{11} = 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{12} + a_{21} = 0$ y $ca_{21} + a_{22} \leq 0$.

Los diagramas de fase de los Lemas 1, 2, 3 y 4 incluyen el comportamiento en el infinito (circulo de radio unitario), la configuración de la separatrix del punto de equilibrio silla-nodo en el origen para el caso BQS2 (sistema cuadrático acotado con dos puntos de equilibrio) o la separatrix del punto de equilibrio silla en el origen para el caso BQS3 (sistema cuadrático acotado con tres puntos de equilibrio) y los comportamientos de los otros puntos de equilibrio, que pueden ser focos, nodos o centro, además de fuentes (repulsores) o sumideros (atractores).

Lema 1: La configuración de las separatrices para el sistema (11) con $|c| < 2$, $a_{11} < 0$, $a_{21} = a_{22} = 0$ y (i) $ca_{11} + a_{12} < 0$ es homeomórfico a una de las configuraciones mostradas en la Fig. 2(a); (ii) $ca_{11} + a_{12} > 0$ es homeomórfico a una de las configuraciones mostradas en la Fig. 2(b).

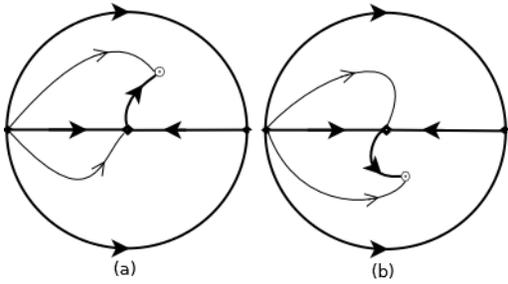


Fig. 2. Configuraciones del Lema 1 para el sistema BQS2.

Lema 2: La configuración de las separatrices para el sistema (11) con $|c| < 2$, $a_{11} < 0$, $a_{21} < 0$, $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$, $a_{11} + a_{22} \neq 0$ y (i) $a_{12} - a_{21} + ca_{11} < 0$ es homeomórfico a una de las configuraciones mostradas en la Fig. 3; (ii) $a_{12} - a_{21} + ca_{11} > 0$ es homeomórfico a una de las configuraciones mostradas en la Fig. 4.

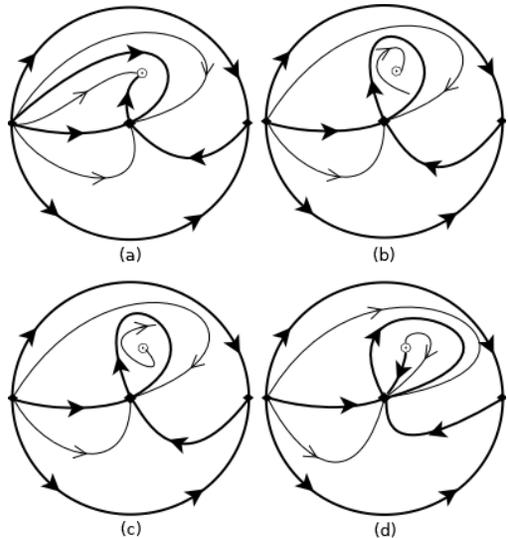


Fig. 3. Configuraciones del Lema 2 para el caso (i).

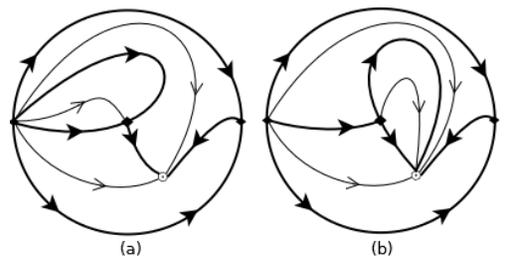


Fig. 4. Configuraciones del Lema 2 para el caso (ii).

Lema 3: La configuración de las separatrices para el sistema (11) con $|c| < 2$, $a_{11} < 0$, $a_{21} = 0$ y $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$ es homeomórfico a la configuración mostrada en la Fig. 5.

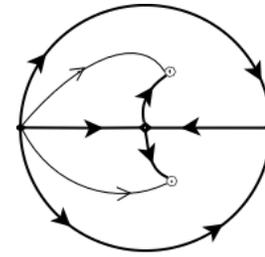


Fig. 5. Configuración del Lema 3 para el sistema BQS3.

Lema 4: La configuración de las separatrices para el sistema (11) con $|c| < 2$, $a_{11} < 0$, $a_{21} < 0$ y $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$ es homeomórfico a una de las configuraciones mostradas en la Fig. 6.

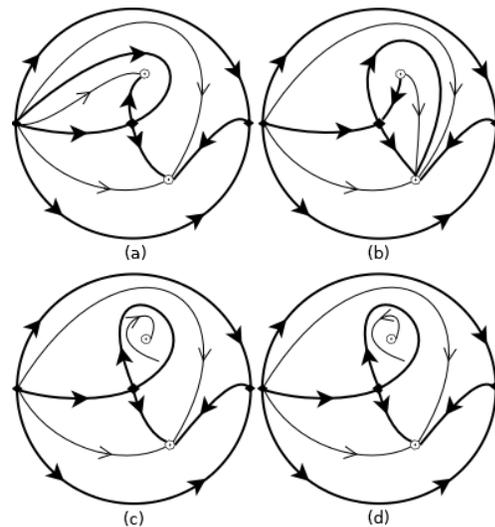


Fig. 6. Configuraciones del Lema 4 para el sistema BQS3.

En las Fig. 2, 3, 4, 5 y 6 se hace uso de los símbolos $\rightarrow \square$ y $\leftarrow \square$ donde el primer símbolo denota un nodo o foco estable, o un foco estable o inestable en el interior de uno o más ciclos límite donde el más externo es externamente estable, mientras que el segundo símbolo denota un nodo o foco inestable, o un foco inestable o estable en el interior de uno o más ciclos límite donde el más externo es externamente inestable.

3 Análisis Cualitativo del Convertidor Buck-Boost en Lazo Cerrado.

3.1 Análisis Global vía Teoremas y Lemas de Dickson y Perko

De acuerdo al Teorema 1, para que el sistema (6) sea acotado debe ser afínmente equivalente a alguno de los sistemas (9), (10) o (11) luego de aplicar una transformación lineal.

Teorema 2: *El sistema cuadrático (6) es acotado.*

Prueba. Dado el sistema (6) y la transformación lineal matricial $e = \theta z$ definida por

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

donde $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}$ y θ_{22} son constantes. Sustituyendo (12) en (6) se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \Theta_1 z_1^2 + \Theta_2 z_1 z_2 + \Theta_3 z_2^2 + \Theta_4 z_1 + \Theta_5 z_2 \\ \dot{z}_2 &= \Theta_6 z_1^2 + \Theta_7 z_1 z_2 + \Theta_8 z_2^2 + \Theta_9 z_1 + \Theta_{10} z_2, \end{aligned} \quad (13)$$

donde $\Theta_1, \dots, \Theta_{10}$ son parámetros que dependen de $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}, Q, \bar{y}, \alpha$ y β . El sistema (13) se puede reescribir en la forma del sistema (11) en términos de la variable z , esto es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + z_2^2 \\ \dot{z}_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 - z_1 z_2 + c z_2^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Para cumplir con la transformación, es necesario seleccionar $\Theta_1 = 0, \Theta_2 = 0, \Theta_3 = 1, \Theta_6 = 0, \Theta_7 = -1$ y resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas se obtiene

$$\theta_{11} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \theta_{12} = \theta_{21} = \frac{-\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \theta_{22} = \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (15)$$

Evaluando los parámetros (15) en el sistema (13), los parámetros del sistema (14) son

$$\begin{aligned} a_{11} &= \Theta_4 = -\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)Q}, \\ a_{12} &= \Theta_5 = \frac{1}{\bar{y}-1} + \beta - \bar{y}\beta + \frac{\alpha\left(\bar{y} - \bar{y}^2 - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right)}{Q}, \\ a_{21} &= \Theta_9 = -\frac{(Q(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(\bar{y}-1))}{(\alpha^2 + \beta^2)(\bar{y}-1)Q}, \\ a_{22} &= \Theta_{10} = (\bar{y}-1)\alpha + \frac{\beta}{Q}\left(\bar{y} - \bar{y}^2 - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right), \\ c &= \Theta_8 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Dado que $Q > 0$, entonces $a_{11} < 0$ si $\alpha \neq 0$, por lo tanto, de acuerdo al Teorema 1, los sistemas (6) y (14) son afínmente equivalentes y por lo tanto, (6) es acotado. \square

Se hace notar que el Teorema 1 asegura que el sistema (6) es acotado para cualquier configuración de los puntos de equilibrio finitos e infinitos. La Fig. 7 muestra los puntos de

equilibrio en el infinito en una configuración silla-nodo donde la circunferencia representa el infinito del sistema.

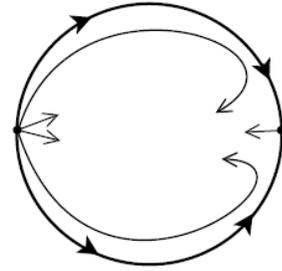


Fig. 7. Diagrama de fase de un Sistema Cuadrático Acotado (BQS).

Teorema 3: *El sistema (6) con dos puntos de equilibrio tiene la configuración (a) de la Fig. 2 y no tiene la configuración (b) de la Fig. 2.*

Prueba. Sustituyendo las ecuaciones (16) en las condiciones del Lema 1 para el caso (i)

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)Q} < 0, \\ a_{21} &= -\frac{(Q(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(\bar{y}-1))}{(\alpha^2 + \beta^2)(\bar{y}-1)Q} = 0, \\ a_{22} &= (\bar{y}-1)\alpha + \frac{\beta}{Q}\left(\bar{y} - \bar{y}^2 - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = 0, \\ a_{12} &= \frac{1}{\bar{y}-1} + \beta - \bar{y}\beta + \frac{\alpha\left(\bar{y} - \bar{y}^2 - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right)}{Q} < 0, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $Q > 0, \bar{y} < 0, \alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$ entonces se puede verificar que las condiciones anteriores se cumplen en el rango (17) en función de los parámetros.

$$\begin{aligned} \alpha < 0, \beta < -\alpha^2, Q &= \frac{-\alpha\beta + \bar{y}\alpha\beta}{-\alpha^2 - \beta^2}, \\ \bar{y} &= \frac{3\alpha^2 + \beta^2}{2(2\alpha^2 + \beta^2)} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^4 - 8\alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4}{(2\alpha^2 + \beta^2)^2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Por lo tanto, si los parámetros cumplen con las restricciones anteriores el sistema (6) tiene la configuración (a) de la Fig. 2.

Ahora, realizando el procedimiento anterior para las condiciones del Lema 1 caso (ii) se tiene que para a_{11}, a_{21} y a_{22} son las mismas restricciones mientras que

$$a_{12} = \frac{1}{\bar{y}-1} + \beta - \bar{y}\beta + \frac{\alpha \left(\bar{y} - \bar{y}^2 - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)}{Q} > 0.$$

Se puede verificar que no existe un rango de solución en función de los parámetros para las condiciones del caso (ii). Finalmente, el sistema (6) no tiene la configuración (b) de la Fig. 2. □

Teorema 4: *El sistema (6) con dos puntos de equilibrio puede tener una de las configuraciones de la Fig. 3 y no tiene las configuraciones de la Fig. 4.*

Prueba. Sustituyendo las ecuaciones (16) en las condiciones del Lema 2 para el caso (i)

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)Q} < 0, \\ a_{21} &= -\frac{Q(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(\bar{y}-1)}{(\alpha^2 + \beta^2)(\bar{y}-1)Q} < 0, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= \frac{(\bar{y}-1)^2(2\bar{y}-1)\alpha + Q((\bar{y}-1)^2\beta - 1)}{Q(\bar{y}-1)} = 0, \\ a_{11} + a_{22} &= \frac{(\bar{y}-1)(Q\alpha - \bar{y}\beta) - 1}{Q} \neq 0, \\ a_{12} - a_{21} &= -\frac{(\bar{y}-1)^2\bar{y}\alpha + Q((\bar{y}-1)^2\beta - 2)}{Q(\bar{y}-1)} < 0. \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $Q > 0$, $\bar{y} < 0$, $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$, entonces se puede verificar que las condiciones anteriores se cumplen en el siguiente rango en función de los parámetros

$$\begin{aligned} \alpha < 0, \beta < -\alpha^2, Q &= \frac{-\alpha + 4\bar{y}\alpha - 5\bar{y}^2\alpha + 2\bar{y}^3\alpha}{1 - \beta + 2\bar{y}\beta - \bar{y}^2\beta}, \\ \bar{y} &= \frac{3\alpha^2 + \beta^2}{2(2\alpha^2 + \beta^2)} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^4 - 8\alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4}{(2\alpha^2 + \beta^2)^2}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto, si los parámetros cumplen con las restricciones (18) el sistema (6) tiene una de las configuraciones de la Fig. 3.

Ahora, realizando el procedimiento anterior para las condiciones del Lema 2 caso (ii) se tiene que las primeras cuatro restricciones son las mismas y la única que cambia es

$$a_{12} - a_{21} = -\frac{(\bar{y}-1)^2\bar{y}\alpha + Q((\bar{y}-1)^2\beta - 2)}{Q(\bar{y}-1)} > 0.$$

Se puede verificar que no existe un rango de solución en función de los parámetros para las condiciones del caso (ii). Finalmente, el sistema (6) no tiene las configuraciones de la Fig. 4. □

Teorema 5: *El sistema (6) con tres puntos de equilibrio tiene la configuración de la Fig. 5.*

Prueba. Sustituyendo las ecuaciones (16) en las condiciones del Lema 3 se tiene

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)Q} < 0, \\ a_{21} &= -\frac{Q(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(\bar{y}-1)}{(\alpha^2 + \beta^2)(\bar{y}-1)Q} = 0, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= \frac{(\bar{y}-1)^2(2\bar{y}-1)\alpha + Q((\bar{y}-1)^2\beta - 1)}{Q(\bar{y}-1)} < 0, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $Q > 0$, $\bar{y} < 0$, $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$, entonces se puede verificar que las condiciones anteriores se cumplen en el siguiente rango en función de los parámetros

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{(\bar{y}-1)\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \text{ y} \\ &\left(\bar{y} < 0, \beta < 0, \left(\begin{aligned} &(\alpha^2 + \beta \geq 0, -3.1488 \leq \alpha < 0) \parallel \\ &(\alpha^2 + \beta > 0, \alpha < -3.1488) \end{aligned} \right) \parallel \right) \\ &\left(\bar{y} < \frac{1}{2} \left(\frac{3\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\frac{\alpha^4 + 2\alpha^2(\beta-4)\beta + (\beta-4)\beta^3}{(2\alpha^2 + \beta^2)^2}} \right), \right. \\ &\left. \left(\begin{aligned} &(-3.1488 \leq \alpha < 0, \alpha^2 + \beta < 0) \parallel \\ &(\alpha < -3.1488, \alpha^2 + \beta \leq 0) \end{aligned} \right) \right) \end{aligned} \tag{19}$$

donde el símbolo \parallel denota "o". Por lo tanto, si los parámetros cumplen con las restricciones (19) entonces el sistema (6) tiene la configuración de la Fig. 5. □

Teorema 6: *El sistema (6) con tres puntos de equilibrio tiene una de las configuraciones de la Fig. 6.*

Prueba. Sustituyendo las ecuaciones (16) en las condiciones del Lema 4, es decir,

$$a_{11} = -\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)Q} < 0,$$

$$a_{21} = -\frac{Q(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(\bar{y} - 1)}{(\alpha^2 + \beta^2)(\bar{y} - 1)Q} < 0, \tag{21}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{(\bar{y} - 1)^2(2\bar{y} - 1)\alpha + Q((\bar{y} - 1)^2\beta - 1)}{Q(\bar{y} - 1)} < 0,$$

y teniendo en cuenta que $Q > 0$, $\bar{y} < 0$, $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$, entonces se puede verificar que las condiciones anteriores se cumplen en el siguiente rango en función de los parámetros

$$\left(\begin{array}{l} \alpha < -3.1488, \beta < -\alpha^2, 0 < Q < \frac{\alpha\beta - \bar{y}\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \bar{y} \leq \frac{(3\alpha^2 + \beta^2)}{4\alpha^2 + 2\beta^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^4 - 8\alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4}{(2\alpha^2 + \beta^2)^2}} \end{array} \right)$$

o

$$\left(\begin{array}{l} \alpha < -3.1488, \beta < -\alpha^2, 0 < Q < \frac{\alpha - 4\bar{y}\alpha + 5\bar{y}^2\alpha - 2\bar{y}^3\alpha}{-1 + \beta - 2\bar{y}\beta + \bar{y}^2\beta}, \\ \frac{(3\alpha^2 + \beta^2)}{4\alpha^2 + 2\beta^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^4 - 8\alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4}{(2\alpha^2 + \beta^2)^2}} < \bar{y} < 0 \end{array} \right) \text{ o}$$

$$\left(\alpha < -3.1488, -\alpha^2 \leq \beta < 0, \bar{y} < 0, 0 < Q < \frac{\alpha\beta - \bar{y}\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right). \tag{20}$$

Por lo tanto, si los parámetros cumplen con las restricciones (20) el sistema (6) tiene una de las configuraciones de la Fig. 6. □

3.1 Análisis alrededor de los puntos de equilibrio finitos.

El sistema (14) será analizado localmente con respecto a sus puntos de equilibrio finitos a través del método de Linealización para los casos donde existen dos y tres puntos de equilibrio. Esta técnica se encuentra descrita en el libro de Dumortier et al. (2006), en la sección 1.5.

El procedimiento tiene dos pasos, primero se obtienen los puntos de equilibrio finitos y después se aplica la matriz Jacobiana en dichos puntos. Los puntos de equilibrio del sistema (14) están definidos por

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1 = (0, 0),$$

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2 = \left(\frac{-a_{12}a_{21} - a_{21}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{21}\delta}{2a_{11}}, \frac{1}{2}(-a_{12} + a_{21} - \delta) \right),$$

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3 = \left(\frac{-a_{12}a_{21} - a_{21}^2 + 2a_{11}a_{22} - a_{21}\delta}{2a_{11}}, \frac{1}{2}(-a_{12} + a_{21} + \delta) \right),$$

donde $\delta = \sqrt{(a_{12} + a_{21})^2 - 4a_{11}a_{22}}$.

La matriz Jacobiana del sistema (14) está definida por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + 2\bar{z}_2 \\ a_{21} - \bar{z}_2 & a_{22} - \bar{z}_1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Evaluando $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ en (22), se obtiene

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

donde los autovalores de (23) están definidos por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right). \tag{24}$$

Evaluando el punto de equilibrio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ y $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ en (22), respectivamente, se obtienen las matrices

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \mp \gamma \\ a_{21} + \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21} \pm \gamma) & a_{22} - \frac{2a_{11}a_{22} - a_{21}(a_{12} + a_{21} \mp \gamma)}{2a_{11}} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

donde los autovalores de ambas matrices de (25) están definidos por (26) y (27).

$$\lambda_{5,4} = \frac{2a_{11}^2 + a_{21}(a_{12} + a_{21}) - a_{21}\gamma}{4a_{11}} \pm \frac{1}{4a_{11}} \sqrt{8a_{11}^2(4a_{11}a_{22} - (a_{12} + a_{21})^2 + \gamma(a_{21} - a_{12})) + (2a_{11}^2 + a_{21}(a_{12} + a_{21} - \gamma))^2}, \tag{26}$$

y

$$\lambda_{5,6} = \frac{2a_{11}^2 + a_{21}(a_{12} + a_{21}) + a_{21}\gamma}{4a_{11}} \pm \frac{1}{4a_{11}} \sqrt{8a_{11}^2(4a_{11}a_{22} - (a_{12} + a_{21})^2 + \gamma(a_{21} - a_{12})) + (2a_{11}^2 + a_{21}(a_{12} + a_{21} + \gamma))^2}, \tag{27}$$

3.1.1 Análisis local del comportamiento de los puntos de equilibrio para el sistema tipo BQS2.

En los Teoremas que se presentan a continuación se omiten los rangos de solución obtenidos por su extensión. El lector puede obtener dichos rangos siguiendo la metodología que se presenta en este trabajo.

Teorema 7: Cuando existen dos puntos de equilibrio en el sistema (14), uno de ellos es un punto de equilibrio formado por $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ y $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ siendo una silla-nodo y el punto de equilibrio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ es un atractor.

Prueba. Para que el punto de equilibrio formado por $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ y $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ sea una silla-nodo y el punto de equi-

librio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ sea un atractor, se debe cumplir con (1) $\Delta_c = 0$, (2) $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, (3) $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, (4) $\lambda_3 \lambda_4 = 0$, (5) $\lambda_3 + \lambda_4 \neq 0$, (6) $\lambda_5 \lambda_6 > 0$, (7) $\lambda_5 + \lambda_6 < 0$.

Al usar el programa *Mathematica* y ejecutar el comando *Reduce*[(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7), $a_{11} < 0$], y luego sustituyendo las ecuaciones (16) en lo obtenido, resulta que existe un rango en función de los parámetros del sistema (6) donde la premisa del Teorema 7 se cumple. \square

Corolario 1: Dado que el punto de equilibrio formado por $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ y $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ es una silla-nodo, el punto de equilibrio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ no tiene los siguientes comportamientos:

- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ es una silla, o
- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ es una repulsor, o
- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ es un centro, o
- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ es una silla-nodo.

Prueba. Para verificar las premisas del Corolario 1, se aplican los siguientes comandos del programa de *Mathematica*

Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \lambda_4 = 0, \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \lambda_6 < 0, a_{11} < 0$)],
Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \lambda_4 = 0, \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \lambda_6 > 0, \lambda_5 + \lambda_6 > 0, a_{11} < 0$)],
Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \lambda_4 = 0, \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \lambda_6 > 0, \lambda_5 + \lambda_6 = 0, a_{11} < 0$)],
Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \lambda_4 = 0, \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \lambda_6 = 0, \lambda_5 + \lambda_6 \neq 0, a_{11} < 0$)],
 donde se obtiene que todas son falsas. \square

Teorema 8: Cuando existen dos puntos de equilibrio en el sistema (14), uno de ellos es un punto de equilibrio formado por $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ y $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ siendo una silla-nodo y el punto de equilibrio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ es un atractor.

Prueba. Para que el punto de equilibrio formado por $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ y $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ sea una silla-nodo y el punto de equilibrio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ sea un atractor, se debe cumplir con (1) $\Delta_c = 0$, (2) $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, (3) $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, (4) $\lambda_5 \lambda_6 = 0$, (5) $\lambda_5 + \lambda_6 \neq 0$, (6) $\lambda_3 \lambda_4 > 0$, (7) $\lambda_3 + \lambda_4 < 0$.

Al usar el programa *Mathematica* y ejecutar el comando *Reduce*[(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7), $a_{11} < 0$], y luego sustituyendo las ecuaciones (16) en lo obtenido, resulta que existe un rango en función de los parámetros del sistema (6) donde la premisa del Teorema 8 se cumple. \square

Corolario 2: Dado que el punto de equilibrio formado por $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ y $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ es una silla-nodo, el punto de equi-

librio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ no tiene los siguientes comportamientos:

- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ es una silla, o
- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ es una repulsor, o
- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ es un centro, o
- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ es una silla-nodo.

Prueba. Para verificar las premisas del Corolario 2, se aplican los siguientes comandos del programa de *Mathematica*:

Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \lambda_4 < 0, \lambda_5 \lambda_6 = 0, \lambda_5 + \lambda_6 \neq 0, a_{11} < 0$)],
Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \lambda_4 > 0, \lambda_3 + \lambda_4 > 0, \lambda_5 \lambda_6 = 0, \lambda_5 + \lambda_6 \neq 0, a_{11} < 0$)],
Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \lambda_4 > 0, \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \lambda_5 \lambda_6 = 0, \lambda_5 + \lambda_6 \neq 0, a_{11} < 0$)],
Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \lambda_4 = 0, \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \lambda_6 = 0, \lambda_5 + \lambda_6 \neq 0, a_{11} < 0$)],
 donde se obtiene que todas son falsas. \square

Teorema 9: Cuando existen dos puntos de equilibrio en el sistema (14), uno de ellos es una silla-nodo formada por $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ y $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ y el punto de equilibrio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ es un atractor.

Prueba. Para que el punto de equilibrio formado por $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ y $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ sea una silla-nodo y el punto de equilibrio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ sea un atractor, se debe cumplir con

(1) $\Delta_c = 0$, (2) $\lambda_3 \lambda_4 = 0$, (3) $\lambda_3 + \lambda_4 \neq 0$, (4) $\lambda_5 \lambda_6 = 0$, (5) $\lambda_5 + \lambda_6 \neq 0$, (6) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, (7) $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$.

Al usar el programa *Mathematica* y ejecutar el comando *Reduce*[(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7), $a_{11} < 0$], y luego sustituyendo las ecuaciones (16) en lo obtenido, resulta que existe un rango en función de los parámetros del sistema (6) donde la premisa del Teorema 9 se cumple. \square

Corolario 3: Dado que el punto de equilibrio formado por $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$ y $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$ es una silla-nodo, el punto de equilibrio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ no tiene los siguientes comportamientos:

- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ es una silla, o
- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ es una repulsor, o
- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ es un centro, o
- $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$ es una silla-nodo.

Prueba. Para verificar las premisas del Corolario 2, se aplican los siguientes comandos del programa de *Mathematica*:

Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 < 0, \lambda_3 \lambda_4 = 0, \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \lambda_6 = 0, \lambda_5 + \lambda_6 \neq 0, a_{11} < 0$)],
Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 > 0, \lambda_3 \lambda_4 = 0, \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \lambda_6 = 0, \lambda_5 + \lambda_6 \neq 0, a_{11} < 0$)],
Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \lambda_3 \lambda_4 = 0, \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \lambda_6 = 0, \lambda_5 + \lambda_6 \neq 0, a_{11} < 0$)],
Reduce[($\Delta_c = 0, \lambda_1 \lambda_2 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \lambda_4 = 0, \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \lambda_6 = 0, \lambda_5 + \lambda_6 \neq 0, a_{11} < 0$)],
 donde se obtiene que todas son falsas. \square

donde se obtiene que todas son falsas. \square

3.1.2 Análisis local del comportamiento de los puntos de equilibrio para el sistema tipo BQS3.

El análisis del comportamiento local cuando el sistema (6) es tipo BQS3 fue desarrollado en Sosa (2015), donde se demuestran todos los comportamientos locales de los puntos de equilibrio para este caso. Por su extensión, se omiten los teoremas, las demostraciones y las zonas en función de los parámetros. Sin embargo, en la Tabla 1 se presenta un resumen de las combinaciones de los comportamientos obtenidos en dicho estudio que tienen los tres puntos de equilibrio.

Zona	$(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_1$	$(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_2$	$(\bar{z}_1, \bar{z}_2)_3$
1	Silla	Atractor	Atractor
2	Silla	Repulsor	Atractor
3	Silla	Atractor	Repulsor
4	Silla	Centro	Atractor
5	Silla	Atractor	Centro
6	Atractor	Silla	Atractor
7	Repulsor	Silla	Atractor
8	Atractor	Silla	Repulsor
9	Centro	Silla	Atractor
10	Atractor	Silla	Centro
11	Atractor	Atractor	Silla
12	Repulsor	Atractor	Silla
13	Centro	Atractor	Silla

Tabla 1: Comportamientos de los puntos de equilibrio del sistema tipo BQS3.

4 Discusión y Resultados

El comportamiento del sistema es analizado cuando existen múltiples puntos de equilibrio y, en este caso, la técnica del Método Directo de Lyapunov no se puede aplicar por la existencia de más de un punto de equilibrio.

Se demuestra a través del Teorema 2 que el sistema (6) es acotado siempre que se cumpla que $\alpha \neq 0$.

A través de los Teoremas 3, 4 y 5 se demuestra el comportamiento global del sistema con dos puntos de equilibrio, se obtienen rangos en función de los parámetros donde el sistema puede tener la configuración de la Fig. 2(a), la Fig. 3 y una de las configuraciones de la Fig. 5. En estos casos, existe una silla-nodo en el origen y un nodo o foco atractor o repulsor en el otro punto de equilibrio con posi-

bles ciclos límite. Sin embargo, no se tiene la información local del comportamiento de los puntos de equilibrio ni la existencia de ciclos límite.

Así mismo, a través del Teorema 6 se demuestra que existe un rango de operación para el sistema (6) donde existen tres puntos de equilibrio, con la existencia de una silla en el origen y un nodo o foco atractor o repulsor en los otros dos puntos de equilibrio donde pueden tener ciclos límite.

En este caso, el sistema (6) tiene cualesquiera de las configuraciones de la Fig. 6, donde se observa el comportamiento de los puntos de equilibrio en el infinito, la configuración de las separatrices y el comportamiento de las trayectorias. Sin embargo, tampoco se tiene información del comportamiento local ni la existencia de ciclos límite.

Los resultados de los Teoremas 7, 8 y 9 junto con los Corolarios 1, 2 y 3 permiten demostrar el comportamiento local del sistema tipo BQS2 donde solo pueden existir una silla-nodo con la combinación de dos puntos de equilibrio cualquiera y el tercero siempre es un atractor local.

Ahora, para el caso BQS3 se tienen 13 posibles comportamientos locales que pueden tener los puntos de equilibrio donde uno de los puntos siempre es una silla y los otros dos pueden ser focos o nodos atractores, repulsores o centros, tal como se detallan en la Tabla 1.

Por otro lado, cuando el sistema (6) tiene un único punto de equilibrio en el origen es tipo BQS1 y el comportamiento cualitativo en este caso fue estudiado en Sosa, K. et al (2018), obteniendo que el sistema es asintóticamente y globalmente (y localmente) estable donde no existen ciclos límite. Además, se demuestra que el sistema BQS1 tiene el mapa cualitativo de la Fig. 8 si los parámetros cumplen con el rango (28).

$$Q > 0, \bar{y} < 0, \alpha > 0, \\ -\frac{\alpha \bar{y}}{Q} - 2\sqrt{\frac{-\alpha}{Q(\bar{y}-1)}} < \beta < -\frac{\alpha \bar{y}}{Q} + 2\sqrt{\frac{-\alpha}{Q(\bar{y}-1)}} \quad (28)$$

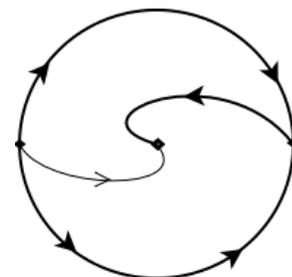


Fig. 8. Mapa Cualitativo del sistema con un único punto de equilibrio (BQS1).

En base a los resultados obtenidos, se resumen en la Tabla 2 todos los comportamientos cualitativos del convertidor Buck-Boost en lazo cerrado con Realimentación del Vector de Estados.

La siguiente nomenclatura es usada en la Tabla 2 para especificar la información obtenida por cada una de las téc-

nicas: A: Acotado, GE: Globalmente Estable, RG: Rango de operación Global, LE: Localmente Estable, RL: Rango de operación Local, MCG: Mapas Cualitativos Globales, NA: No Aplica.

Técnica de Análisis Cualitativo	Acotado (BQS)	Sistema tipo BQS1	Sistema tipo BQS2	Sistema tipo BQS3
Lyapunov	NA	GE	NA	NA
Dickson y Perko	A	MCG + GE+RG	MCG + RG	MCG + RG
Linealización	NA	LE + RL	RL	RL
Dickson y Perko con Linealización	A	MCG + RG + RL.	MCG + RG + RL.	MCG + RG + RL.

Tabla 2: Resultados del análisis cualitativo para el sistema (6) con diferentes técnicas.

5 Conclusiones

Un análisis completo del comportamiento cualitativo global y local del convertidor Buck-Boost en lazo cerrado con Realimentación del Vector de Estado es presentado en este trabajo.

El sistema en lazo cerrado puede tener uno, dos o tres puntos de equilibrio finitos y se demuestra que todas las trayectorias o soluciones convergen al finito del sistema, es decir, el sistema en lazo cerrado es acotado (BQS) para cualquier configuración de los puntos de equilibrio.

Usando los Lemas de Dickson y Perko (1972) se demuestra que existen rangos globales en función de los parámetros donde el sistema puede ser tipo BQS1, BQS2 y BQS3 donde en cada caso se tienen los mapas cualitativos y demostrando que para el sistema BQS1 no existen ciclos límite.

Con un análisis local del comportamiento de los puntos de equilibrio se demuestra que el sistema tipo BQS1 tiene un atractor local, el sistema tipo BQS2 tiene siempre una silla-nodo y un atractor local, mientras que en el sistema tipo BQS3 pueden existir localmente atractores, repulsores, sillas y centros.

Al combinar la información cualitativa global y local del comportamiento del convertidor Buck-Boost en lazo cerrado, se tiene gran parte del comportamiento del sistema donde falta demostrar la existencia o no de ciclos límite en el caso de múltiples puntos de equilibrio (BQS2 y BQS3).

Referencias

- Coll, B., Gasull, A., y Llibre, J. (1987). *Some theorems on the existence uniqueness and nonexistence of limit cycles for quadratic systems*. Journal of Differential Equations, 67:372-399.
- Coppel, W. A. (1966). *A survey of quadratic systems*. Jour-

nal of Differential Equations. 2 (3), 293–304.

Dickson, R. J. and Perko, L. M. (1970). *Bounded quadratic systems in the plane*. Journal of Differential Equations. 7 (2), 251-273.

Dumortier, F., Llibre, J. and Artés, J.C. (2006). *Qualitative theory of planar differential systems*, Springer, Verlag. New York. ISBN-10 3-540-32893-9.

Llibre, J., Spinetti-Rivera, M. and Colina-Morles, E. (2015) *Dynamic systems behaviour analysis and design based on the qualitative theory of differential equations: The Boost power converter case*. International Journal of Control, Volume 88, Issue 6, 1103-1111.

Perko, L. M. (2000) *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York. Third Edition. ISBN 0-387-95116-4.

Sira-Ramírez, H. (1988). *Sliding-mode control on slow manifolds of dc-to-dc power converters*, International Journal of Control, 47 (5), 1323-1340.

Sira-Ramirez, H. y Silva-Ortigoza, R. (2006). *Control Design Techniques in Power Electronics Devices*. Power Systems. Springer London.

Sosa, K. (2015). *Análisis Cualitativo del Comportamiento del Convertidor Buck-Boost en Lazo Cerrado*. [Proyecto Especial de Grado]. Universidad de Los Andes.

Sosa, K. Llibre, J., Spinetti-Rivera, M., Colina-Morles, E. (2018). *Qualitative Behaviour Analysis of Feedback-Controlled Buck-Boost Power Converters Thru Three Different Techniques*. Revista Politécnica - octubre 2018, Vol. 42, No. 1, pp.7-16. ISSN 2477-8990.

Spinetti-Rivera, M. (2011). *Puentes entre la Teoría y la Práctica*, EAE Editorial Academia Española. In spanish. Spain. ISBN-10: 3846570508.

Recibido: 13 de julio de 2022

Aceptado: 12 de octubre de 2022

Sosa, Keiver: Ingeniero de Sistemas y profesor asistente en la Universidad de Los Andes. Estudiante de doctorado en Ciencias Aplicadas e investiga en el área de sistemas de control, convertidores de potencia no lineales y aplicaciones prácticas.  <https://orcid.org/0000-0002-3194-7059>

Spinetti, Mario: Ingeniero eléctrico, Doctor en Automatización Avanzada y Robótica. Profesor titular en la Universidad de Los Andes. Autor de artículos en el área de sistemas de control y convertidores de potencia no lineales. Correo electrónico: spinettimarios@gmail.com  <https://orcid.org/0000-0002-2464-421X>