Artículo de Investigación. Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 44, No. 1 pp. 89-94, abril-julio, 2023.
ISSN 1316-7081. ISSN Elect. 2244-8780 Universidad de los Andes (ULA)

Asignación de polos a lazo cerrado empleando la programación lineal

Closed loop poles assignment using linear programming

Teppa-Garran, Pedro[1*]; Faggioni, Miguel[2]
[1]Departamento de Gestión de Proyectos y Sistemas, Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela.
[2]Departamento de Energía y Automatización, Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela.
[*]pteppa@unimet.edu.ve

Resumen

La asignación de polos es un problema frecuente de la teoría clásica de control y se han propuesto numerosos métodos para su resolución. En este artículo se considera un aporte más a esta problemática mediante un procedimiento de optimización computacional del área de la programación lineal. En particular, la programación por metas se emplea para formular y resolver el problema de asignación de polos a lazo cerrado de un sistema de control en localizaciones específicas del plano complejo y luego se considera su extensión a la resolución del problema de asignación robusta de polos en una región de interés del plano complejo. La metodología puede adaptarse tanto para sistemas de control en tiempo continuo como en tiempo discreto y se tratan varios ejemplos a fin de ilustrar los principales aspectos del método.

Palabras clave: *Sistemas lineales de control, Asignación de polos, Asignación robusta de polos, Programación lineal, Optimización.*

Abstract

Pole assignment is a typical problem in classical control theory and numerous methods have been proposed for its resolution. This article considers one more contribution to this problem through a computational optimization procedure from the area of linear programming. In particular, goal programming is used to formulate and solve the closed-loop pole assignment problem of a control system at specific locations in the complex plane, and then it is extended to solving the robust pole assignment problem in a region of interest in the complex plane. The methodology is suitable for both continuous-time and discrete-time control systems and several examples are discussed to illustrate the main aspects of the method.

Keywords: *Linear control systems, Pole assignment, Robust pole assignment, Linear programming, Optimization.*

1 Introducción

El problema de asignación de polos permite alcanzar varias especificaciones de desempeño para las respuestas transitoria y de estado estacionario mediante la adecuada localización de los polos del sistema de control a lazo cerrado en el plano complejo (Shumafov, 2019).

Chu (2001) distingue cuatro tipos de métodos en la resolución de este problema: los métodos clásicos, los directos, los basados en ecuaciones matriciales y los de autovectores. En los métodos matriciales el problema de asignación de polos se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales como es descrito en (Chen, 1999). Esta última formulación es explotada en este trabajo para expresar el problema de asignación de polos como un problema de programación por metas (Ignizio, 1985, Romero, 2014, Jones y col., 2016). La programación por metas es una extensión de la programación lineal y ha sido empleada con éxito en la resolución de numerosos problemas de optimización multicriterio (Tamiz y col., 1998). En el contexto de este trabajo, el conjunto de polos deseados, se trata en su forma de polinomio y este último se hace corresponder con una meta que debe evaluarse si es posible de alcanzar a través de un controlador de orden fijo.

El aporte fundamental de este trabajo es que el empleo de la programación por metas en la resolución del problema de asignación de polos puede extenderse a la resolución de un problema de asignación robusta de polos (Pandey y col., 2014). Esto es, permite extender la asignación de los polos en localizaciones específicas del plano complejo en una asignación en el interior de una región conveniente del plano complejo. Para lograr lo anterior, el polinomio característico se representa como un polinomio intervalo donde sus coeficientes varían dentro de cotas conocidas. Luego, el teorema del borde (Barlett y col., 1988) aporta los elementos necesarios para establecer una formulación de programación por metas considerando tan solo los polinomios extremos.

El artículo está organizado de la siguiente manera. La sección 2 describe el problema general de asignación de polos y su reducción a un sistema de ecuaciones lineales. En la sección 3 se considera la formulación del problema de asignación de polos como un problema de programación por metas. La sección 4 trata la extensión al problema de asignación robusta de polos y finalmente en la sección 5 son presentados algunos resultados numéricos.

2 Problema de asignación de polos

Se considera el sistema de control de la Figura 1, donde $y_r(t)$ es la señal de referencia, $y(t)$ la salida controlada y $u(t)$ la señal de control.

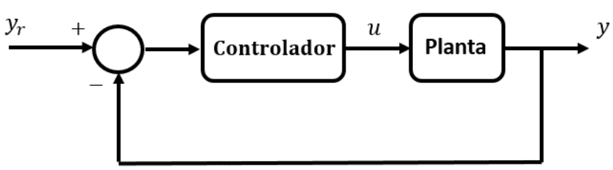

Fig. 1. Sistema de control realimentado.

La planta es descrita por la función de transferencia

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \tag{1}$$

Con

$$D(p) = \alpha_1 p^n + \alpha_2 p^{n-1} + \cdots + \alpha_n p + \alpha_{n+1}$$
$$N(p) = \beta_1 p^n + \beta_2 p^{n-1} + \cdots + \beta_n p + \beta_{n+1}$$

Donde el operador p corresponde a la variable $s \in \mathbb{C}$ de la transformada de Laplace o a la variable $z \in \mathbb{C}$ de la transformada z cuando la planta es descrita por un modelo continuo o discreto en el tiempo, respectivamente.

Comentario 1: En el caso de un sistema de control en tiempo discreto se supone como es usual que la planta $G(s)$ se conecta en cascada con un dispositivo de retención de orden cero (Ogata, 1995). De manera que $G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\{G(s)/s\}$ con $\mathcal{Z}$ el operador transformada z.

A su vez, el controlador de orden q se modela mediante la función de transferencia

$$C(p) = \frac{M(p)}{L(p)} \tag{2}$$

donde

$$L(p) = l_1 p^q + l_2 p^{q-1} + \cdots + l_q p + l_{q+1}$$
$$M(p) = m_1 p^q + x_2 p^{q-1} + \cdots + x_q p + x_{q+1}$$

Una forma de garantizar condiciones de desempeño a lazo cerrado consiste en fijar las localizaciones de los polos de la función de transferencia a lazo cerrado del sistema de control (Ogata, 1995, Dorf y col., 2017).

$$\frac{Y(p)}{Y_r(p)} = \frac{N(p)M(p)}{D(p)L(p) + N(p)M(p)} \tag{3}$$

Lo anterior puede formularse mediante el siguiente problema de asignación de polos.

Problema 1: Dados los polinomios $N(p)$ y $D(p)$ en (1) y un conjunto de polos a lazo cerrado deseados $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+q}\}$. Determine los polinomios $L(p)$ y $M(p)$ en (2) tal que:

$$D(p)L(p) + N(p)M(p) = B(p) \tag{4}$$

Donde $B(p)$ corresponde al polinomio construido a partir de los polos a lazo cerrado deseados

$$\begin{aligned} B(p) = (p - \rho_1)(p - \rho_2) \dots (p - \rho_{n+q}) \\ = b_1 p^{n+q} + b_2 p^{n+q-1} + \cdots \\ + b_{n+q} p + b_{n+q+1} \end{aligned} \tag{5}$$

Comentario 2: En los sistemas de control en tiempo continuo la región de asignación de polos se localiza en el semiplano izquierdo del plano complejo, mientras que en el caso discreto, en el interior del círculo unitario del plano complejo (Dorf y col., 2017, Ogata, 1995).

Comentario 3: Si $q \geq n - 1$ y los polinomios $N(p)$ y $D(p)$ en (1) son coprimos (Chen, 1999), la ecuación (4) se puede resolver para cualquier polinomio deseado $B(p)$. Si $q < n - 1$ no es posible asegurar que (4) tendrá una solución para cualquier conjunto de coeficientes $b_i, i = 1, \dots, n + q + 1$ en (5).

Es muy conocido que la ecuación polinómica (4) puede formularse como un sistema de ecuaciones algebraicas lineales (Chen, 1999) de la forma

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

El vector $\boldsymbol{x}$ corresponde a los coeficientes de los polinomios $L(p)$ y $M(p)$ en (2) definido como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r]^T \\ &= [l_1 \quad \dots \quad l_{q+1} \quad m_1 \quad \dots \quad m_{q+1}]^T \end{aligned} \tag{7}$$

con $r = 2q + 2$ y el vector $\boldsymbol{b}$ está asociado al polinomio a lazo cerrado $B(p)$ y se representa a través de sus coeficientes

$$\boldsymbol{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_t]^T \tag{8}$$

con $t = n + q + 1$ en (5).

La matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{t\,x\,r}$ es una matriz de Sylvester, una matriz por bandas dependiente de los coeficientes de los polinomios $N(p)$ y $D(p)$ en (1) y es invertible si estos polinomios son coprimos y $q = n - 1$ (Goodwin y col., 2001). Se puede expresar como:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \alpha_1 & \dots & 0 & \vdots & \beta_1 & \dots & 0 \\ \alpha_{n+1} & \vdots & \ddots & 0 & \beta_{n+1} & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \alpha_{n+1} & \ddots & \alpha_1 & 0 & \beta_{n+1} & \ddots & \beta_1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n+1} & 0 & 0 & \dots & \beta_{n+1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

3 Formulación del problema de asignación de polos como un problema de programación lineal

En esta sección se desarrolla una formulación del Problema 1 en la forma de la ecuación (6) como un problema de Programación por Metas. Para ese propósito, el polinomio deseado se interpreta como una meta que debe evaluarse si es posible alcanzar mediante un controlador (2) de orden q. A ese fin, se define el vector de variables de desviación negativas

$$\boldsymbol{n} = [n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_t]^T \quad (10)$$

y el vector de variables de desviación positivas

$$\boldsymbol{p} = [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_t]^T \quad (11)$$

con respecto a la meta representada por el polinomio deseado

$$\boldsymbol{b^d} = [b_1^d \quad b_2^d \quad \dots \quad b_t^d]^T \quad (12)$$

Las variables de desviación satisfacen la propiedad (Romero, 2014).

$$n_i p_i = 0, \qquad i = 1, \dots, t \quad (13)$$

De esta manera, se define el siguiente problema de programación por metas.

Problema 2:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \; z(\boldsymbol{b^d}) = \sum_{i=1}^{t} (n_i + p_i)$$

$$Sujeto\ a \quad \begin{cases} \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{n} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b^d} \\ n_i \geq 0, p_i \geq 0 \end{cases}$$

Teorema 1: Si el valor de la función objetivo del problema 2 para un controlador solución $\boldsymbol{x}^*$ (7) es $z(\boldsymbol{b^d}) = 0$ entonces la meta $\boldsymbol{b^d}$ se cumple y en ese caso existe un controlador (2) de orden q que asigna el polinomio característico en $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b^d}$.

Prueba: Si las soluciones del problema 2 son los vectores $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{n}^*$ y $\boldsymbol{p}^*$ y sea $\boldsymbol{Ax}^* = \boldsymbol{b^d}^*$. Si $z(\boldsymbol{b^d}) = 0$ entonces $\boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{p}^* = 0$ y resulta $\boldsymbol{b^d}^* = \boldsymbol{b^d}$. Si $z(\boldsymbol{b^d}) > 0$ entonces por (13), al menos una de las variables de desviación será positiva y la solución $\boldsymbol{x}^*$ asignará para $i = 1,2, \dots, t$ cada $b_i^{d^*}$ por debajo (encima) de b_i^d si $\boldsymbol{p}^* = 0$ (si $\boldsymbol{n}^* = 0$).

4 Asignación de polos en una región del plano complejo usando la programación lineal

En el problema 2 se busca determinar el controlador (2) de orden q que asigna un polinomio característico específico (meta). Ahora se pretende asignar los polos en una región del plano complejo.

Para lograr mantenerse dentro del marco de la programación por metas, el polinomio característico deseado se especifica como un polinomio tipo intervalo. Para eso se supone que cada coeficiente del polinomio $\boldsymbol{b}$ en (8) es definido dentro de un intervalo donde las diferentes cotas inferiores b_i^- y superiores b_i^+ son conocidas. Esto es,

$$\begin{gathered} \boldsymbol{b_{int}} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_t]^T \\ b_i \in [b_i^-, b_i^+], b_i^- < b_i^+ \end{gathered} \quad (14)$$

Usando las cotas inferiores se define el polinomio característico inferior

$$\boldsymbol{b_{int}^-} = [b_1^- \quad b_2^- \quad \dots \quad b_t^-]^T \quad (15)$$

y empleando las cotas superiores, el polinomio característico superior

$$\boldsymbol{b_{int}^+} = [b_1^+ \quad b_2^+ \quad \dots \quad b_t^+]^T \quad (16)$$

Entre los polinomios $\boldsymbol{b_{int}^-}$ y $\boldsymbol{b_{int}^+}$ hay toda una familia de polinomios característicos y se está interesado en asignar los polos a lazo cerrado del sistema de control en el lugar de las raíces generado por esta familia de polinomios. El teorema del borde (Barlett y col., 1988) permite inferir la estabilidad de un politopo de polinomios a partir de sus polinomios extremos.

Teorema 2: (Teorema del borde). En un polinomio intervalo

$$B(p) = b_1 p^{t-1} + b_2 p^{t-2} + \cdots + b_{t-1} p + b_t \quad (17)$$

con $b_i \in [b_i^-, b_i^+]$, $b_i^- < b_i^+$, para $i = 1, \dots, t$, el lugar de raíces de $B(p)$, denotado por $\mathcal{S}(B(p))$, se define como el conjunto de raíces de la ecuación $B(p) = 0$, cuando los coeficientes de $B(p)$ varían dentro del intervalo $b_i \in [b_i^-, b_i^+]$ y está acotado por las raíces de sus extremos.

Prueba: (Barlett y col., 1988).

En nuestro caso, el Teorema 2 nos permite asegurar que el lugar de las raíces generado por la familia de polinomios es contenido dentro de las raíces de los polinomios extremos (15) y (16).

Ahora la meta es asignar el polinomio característico del sistema de control en el interior del intervalo $[\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{-}, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{+}]$. A ese fin, se definen variables de desviación inferiores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}^{-} &= [n_1^{-} \quad n_2^{-} \quad \dots \quad n_t^{-}]^T \\ \boldsymbol{p}^{-} &= [n_1^{+} \quad n_2^{+} \quad \dots \quad n_t^{+}]^T \end{aligned} \tag{18}$$

con respecto al polinomio (15) y variables de desviación superiores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}^{+} &= [p_1^{-} \quad p_2^{-} \quad \dots \quad p_t^{-}]^T \\ \boldsymbol{p}^{+} &= [p_1^{+} \quad p_2^{+} \quad \dots \quad p_t^{+}]^T \end{aligned} \tag{19}$$

con respecto al polinomio (16).

Esto permite reescribir el problema 2 como un problema de programación por metas tipo intervalo (Inuiguchi y col., 1991, Vitoriano y col., 1999).

Problema 3:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \; z(\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}) = \sum_{i=1}^{t} (n_i^{-} + p_i^{+})$$

$$Sujeto\ a \; \begin{cases} \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{n}^{-} - \boldsymbol{p}^{-} = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{-} \\ \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{n}^{+} - \boldsymbol{p}^{+} = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{+} \\ \boldsymbol{n}^{-} \geq 0, \boldsymbol{n}^{+} \geq 0, \boldsymbol{p}^{-} \geq 0, \boldsymbol{p}^{+} \geq 0 \end{cases}$$

Comentario 4: Minimizar las variables n_i^{-} en la función objetivo del Problema 3 reduce las desviaciones por debajo del polinomio característico inferior (15). Por otra parte, minimizar las variables p_i^{+} reduce las desviaciones por encima del polinomio característico superior (16). El efecto global es asignar el polinomio característico del sistema de control en el interior del intervalo $[\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{-}, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{+}]$.

Teorema 3: Si el valor de la función objetivo del problema 3 para un controlador solución $\boldsymbol{x}^{*}$ (7) es $z(\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}) = 0$ entonces la meta $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}$ se cumple y en ese caso existe un controlador C de orden q que asigna el polinomio característico del sistema de control en el interior de $[\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{-}, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{+}]$.

Prueba: Si las soluciones del problema 2 son los vectores $\boldsymbol{x}^{*}, \boldsymbol{n}^{-*}, \boldsymbol{p}^{-*}, \boldsymbol{n}^{+^{*}}$ y $\boldsymbol{p}^{+^{*}}$ y sea $\boldsymbol{Ax}^{*} = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{*}$. Si $z(\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}) = 0$ entonces $\boldsymbol{n}^{-*} = \boldsymbol{p}^{+^{*}} = 0$ y resulta $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{*} \in [\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{-}, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{+}]$. Si $z(\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}) > 0$ entonces por (13), al menos una de las variables de desviación será positiva y la solución $\boldsymbol{x}^{*}$ asignará para $i = 1,2, \dots, t$ cada $b_{int_i}^{*}$ por debajo (encima) de $b_{int_i}^{-}$ $\left(b_{int_i}^{+}\right)$ si $\boldsymbol{p}^{+^{*}} = 0$ (si $\boldsymbol{n}^{-*} = 0$).

Comentario 5: Si $z(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{d}}) > 0$ en el Problema 2 o si $z(\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}) > 0$ en el Problema 3, solo se puede concluir que las metas no se cumplen. En otras palabras, no se está en capacidad de asegurar nada sobre el desempeño a lazo cerrado del sistema de control de utilizarse el controlador resultante.

5 Resultados numéricos

Comentario 6: Todos los problemas de programación por metas que aparecen en esta sección son resueltos empleando el complemento *Solver* de *Excel.*

Se considera la misma planta tratada en (Chen, 1987) donde la función de transferencia se escoge como

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s-2)} \tag{19}$$

Se aprecia que es de fase no mínima e inestable (Goodwin y col., 2001). Dado que $n = 2$ y los polinomios numerador y denominador son coprimos; si se selecciona el orden del controlador como $q = n - 1 = 1$ resultará que la matriz (9) es no singular. Si se escogen los polos a lazo cerrado en las posiciones $\{-2, -2, -2\}$, el polinomio característico deseado es $B(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$. Por lo que $\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{d}} = [1 \quad 6 \quad 12 \quad 8]^T$ y de esta manera, el Problema 2 se puede formular como:

$$\min_{\boldsymbol{x}} z\left(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{d}}\right) = n_1 + p_1 + n_2 + p_2 + n_3 + p_3 + n_4 + p_4$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} x_1 + n_1 - p_1 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + n_2 - p_2 = 6 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 + n_3 - p_3 = 12 \\ -x_4 + n_4 - p_4 = 8 \\ n_1, p_1, n_2, p_2, n_3, p_3, n_4, p_4 \geq 0 \end{cases}$$

Al resolver el problema anterior se obtiene el valor de la función objetivo $z\left(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{d}}\right) = 0$ y el vector solución $\boldsymbol{x} = [1 \quad -28 \quad 36 \quad -8]^T$. Por lo que la meta se cumple y el controlador resultante se implementa a través de la función de transferencia

$$C(s) = \frac{36s - 8}{s - 28}$$

Cabe destacar que es la misma solución encontrada en (Chen, 1987) usando un método algebraico de asignación de polos.

A continuación se estudia si los polos a lazo cerrado $\{-1 + j2, -1 - j2\}$ pueden ser asignados usando un controlador de orden 0 (Proporcional). Esto es, $C(s) = l_0/m_0$. Ahora se tiene $\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{d}} = [1 \quad 2 \quad 5]^T$ y el Problema 2 resulta en

$$\min_{\boldsymbol{x}} z\left(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{d}}\right) = n_1 + p_1 + n_2 + p_2 + n_3 + p_3$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} x_1 + n_1 - p_1 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + n_2 - p_2 = 2 \\ -x_2 + n_3 - p_3 = 5 \\ n_1, p_1, n_2, p_2, n_3, p_3 \geq 0 \end{cases}$$

Su solución es $z\left(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{d}}\right) = 4.5$, $\boldsymbol{x}^{*} = [-3.5 \quad -5]^T, \boldsymbol{n}^{*} = [4.5 \quad 0 \quad 0]^T$ y $\boldsymbol{p}^{*} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ lo que significa que la meta no se cumple. El controlador resultante $C(s) = -3.5/-5$ asigna los polos del sistema en las raíces de la ecuación $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}}^{*}=0$. Donde el polinomio $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}}^{*}$ se obtiene haciendo $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}}^{*}=\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{p}^{*}-\boldsymbol{n}^{*}=[-3.5 \quad 2 \quad 5]^{T}$ $\left(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{d}} \neq \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}}^{*}\right)$. El lugar de las raíces de (19) (ver Figura 2) permite apreciar que no existe un controlador constante que coloque los polos a lazo cerrado en las localizaciones deseadas por lo que el resultado obtenido por el método es coherente.

El último ejemplo que se va a tratar es la asignación robusta de polos de (19) en la región definida entre los polinomios extremos

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{-}=[1 \quad 2 \quad 2 \quad 0]^{T}, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{+}=[1 \quad 4 \quad 8 \quad 0]^{T}$$

La región se ilustra en la Figura 3 y el Problema 3 se formula a través del siguiente problema de optimización.

$$\min_{\boldsymbol{x}} z(\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}})=n_1^-+n_2^-+n_3^-+n_4^-+p_1^++p_2^++p_3^++p_4^+$$

$$Sujeto\ a\left\{\begin{aligned} x_1+n_1^--p_1^-&=1\\ -2x_1+x_2+x_3+n_2^--p_2^-&=2\\ -2x_2-x_3+x_4+n_3^--p_3^-&=2\\ -x_4+n_4^--p_4^-&=0\\ x_1+n_1^+-p_1^+&=1\\ -2x_1+x_2+x_3+n_2^+-p_2^+&=4\\ -2x_2-x_3+x_4+n_3^+-p_3^+&=8\\ -x_4+p_4^+-p_4^+&=0\\ n_1^-,n_2^-,n_3^-,n_4^-,p_1^-,p_2^-,p_3^-,p_4^-&\geq 0\\ n_1^+,n_2^+,n_3^+,n_4^+,p_1^+,p_2^+,p_3^+,p_4^+&\geq 0 \end{aligned}\right.$$

La solución del Problema 3 es $z(\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}})=0$ con $\boldsymbol{x}^{*}=[1 \quad -12 \quad 16 \quad 0]^{T}$ que corresponde al controlador $C(s)=16s/(s-12)$. Las variables de desviación óptimas resultan en

$$\boldsymbol{n}^{-*}=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{T}$$

$$\boldsymbol{p}^{-*}=[0 \quad 0 \quad 6 \quad 0]^{T}$$

$$\boldsymbol{n}^{+*}=[0 \quad 2 \quad 0 \quad 0]^{T}$$

$$\boldsymbol{p}^{+*}=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{T}$$

El polinomio resultante $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}$ se obtiene haciendo $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}=\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{-}+\boldsymbol{p}^{-*}-\boldsymbol{n}^{-*}=\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{+}+\boldsymbol{p}^{+*}-\boldsymbol{n}^{+*}$. Los polos a lazo cerrado en $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}=[1 \quad 2 \quad 8 \quad 0]^{T}$ cuyas raíces se encuentran en el interior de la región de la Fig. 3 confirmando que se alcanzó la meta.

Conclusiones

Se propone una formulación simple que conecta la teoría clásica de control con la investigación de operaciones. De manera particular, el problema de asignación de polos del polinomio característico de un sistema de control a lazo cerrado en tiempo continuo o discreto se interpreta y resuelve como un problema de programación por metas. La formulación también se extiende con éxito para considerar el caso de asignación robusta de polos.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo brindado por el Programa de Investigación de la Universidad Metropolitana en Caracas, Venezuela a través del proyecto número PI-A-20-21-22.

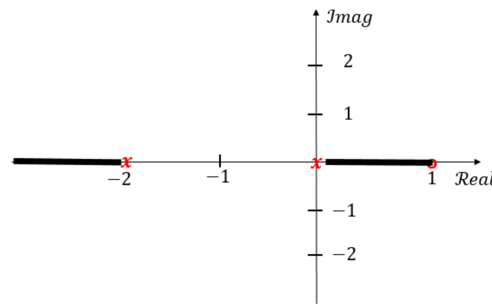

Fig. 2. Lugar de las raíces de (19).

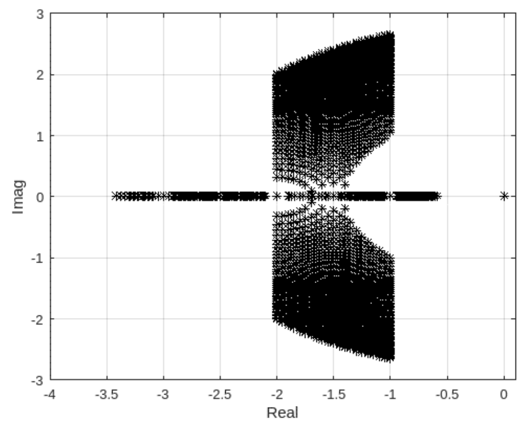

Fig. 3. Lugar de las raíces en el interior de $[\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{-}, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{int}}^{+}]$.

Referencias

Bartlett, A. C., Hollot, C. V., Lin, H., (1988). Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. Mathematics of Control, Signals and Systems, 1(11), pp. 61-71. https://doi.org/10.1007/BF02551236

Chen, C.T., (1987). Introduction to the linear algebraic method for control system design. IEEE Control Systems Magazine, 7(5), pp. 36-42. doi: 10.1109/MCS.1987.1105378

Chen, C., (1999). Linear System: Theory and Design. Oxford University Press.

Chu, E.K., (2001). Optimization and pole assignment in control system design. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 11(5), pp. 1035-1053.

Dorf, R., Bishop, R., (2017). Modern control systems. Pearson Prentice Hall.

Goodwin, G., Graebe, S., Salgado, M., (2001). Control System Design. Pearson Prentice Hall.

Ignizio, J., (1985). Introduction to linear goal programming. Beverly Hills, CA: Sage.

Inuiguchi, M., & Kume, Y., (1991). Goal programming problems with interval coefficients and target intervals. European journal of operational research, 52(3), pp. 345-360. https://doi.org/10.1016/0377-2217(91)90169-V

Jones, D.,Tamiz, M., (2016). A review of goal programming. Multiple criteria decision analysis, pp. 903-926. doi:10.1007/978-1-4939-3094-4_21

Ogata, K., (1995). Discrete-time control systems. Prentice-Hall, Inc.

Pandey, A., Schmid, R., Nguyen, T., Yang, Y., Sima, V., Tits, A.L., (2014). Performance survey of robust pole placement methods. In 53rd IEEE Conference on Decision and Control (pp. 3186-3191). doi:10.1109/CDC.2014.7039881

Romero, C., (2014). Handbook of critical issues in goal programming. Elsevier.

Shumafov, M.M., (2019). Stabilization of Linear Control Systems and Pole Assignment Problem: A Survey. Vestnik St.Petersb. Univ.Math. 52, pp. 349–367. doi:10.21638/11701/spbu01.2019.404

Tamiz, M., Jones, D., Romero, C., (1998). Goal programming for decision making: An overview of the current state-of-the-art. European Journal of operational research, 111(3), pp. 569-581. 10.1016/S0377-2217(97)00317-2

Vitoriano, B., Romero, C., (1999). Extended interval goal programming. Journal of the Operational Research Society, 50(12), pp.1280-1283. https://doi.org/10.2307/3010638

Recibido: *5 de enero de 2023*

Aceptado: *8 de marzo de 2023*

Pedro Teppa-Garrán*; Ingeniero Electricista UNIMET, MSc Ingeniería Electrónica, USB. MSc Matemáticas, USB. PhD Sistemas de Control, Université Paul Sabatier, Francia. Postdoctorado en Sistemas de Control, LAAS – CNRS, Francia. Profesor Titular jubilado USB, Profesor Titular UNIMET.*

https://orcid.org/ 0000-0001-6384-3185

Miguel Faggioni*: Ingeniero Electricista UNIMET, Ingeniero de Sistemas UNIMET, Estudiante MSc Ingeniería de Sistemas USB. Profesor Asistente UNIMET*

mfaggioni@unimet.edu.ve

https://orcid.org/ 0000-0003-4567-2348