UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Proyecto de Grado

Presentado ante la ilustre Universidad de Los Andes como requisito parcial para obtener el Título de Licenciado en Física

Vectores de Killing y Simetrías de Curvaturas Distribucionales

Por

Br. Juan Calles

Tutor: Nelson Pantoja

Diciembre 2015

Vectores de Killing y Simetrías de Curvaturas Distribucionales

Br. Juan Calles

Proyecto de Grado — Licenciatura en Física, 38 páginas

Resumen: Se estudian las simetrías de la métrica y de sus curvaturas en algunos espaciotiempos singulares cuyos tensores de curvatura admiten significado distribucional, empleando para ello la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones.

Palabras clave: Geometría distribucional, derivada de Lie, campos vectoriales de Killing, curvatura distribucional, ondas gravitacionales, agujero negro BTZ

Symmetry, as wide or as narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection

H. Weyl

Índice

Introducción

Desde los inicios de la teoría de relatividad general han surgido un gran número de escenarios físicamente interesantes donde la estructura del espaciotiempo es de alguna manera singular, esto es, espaciotiempos en los que las curvaturas tienen saltos abruptos o cuya métrica presenta un comportamiento patológico en alguna región. Convencionalmente, dichas singularidades se consideran esenciales si no pueden ser removidas por medio de transformaciones de coordenadas, aún en el caso en el que las mismas no estén bien definidas en la región singular. Adicionalmente, los espaciotiempos singulares han sido objeto de estudio ya que se cree que estas singularidades señalan la ruptura de la relatividad general clásica y la emergencia de fenómenos cuánticos gravitacionales [1].

Recurriendo a las geodésicas del espaciotiempo es posible tener noción de la existencia de una singularidad a pesar de que estas no se vean reflejadas en los tensores de curvatura asociados. En lo que sigue nos gustaría reflejar estas singularidades en la falta de suavidad del tensor de curvatura utilizando el marco matemático de distribuciones donde el manejo de estas singularidades es matemáticamente riguroso. Sin embargo nos encontramos con un conflicto inmediato dada la no linealidad de las ecuaciones de Einstein, ya que estas involucran productos de la métrica con sus derivadas, productos que en general no están definidos en la teoría de distribuciones. En este sentido, Geroch y Traschen [2] establecen las condiciones bajo las cuales los tensores de curvatura asociados a un tensor métrico singular tienen sentido como distribución, manifestándose de manera directa las singularidades del espaciotiempo en los tensores de curvatura. Por otro lado, Garfinkle [3] relajando algunas de estas condiciones expande la familia de métricas cuyos tensores de curvatura asociados están bien definidos como distribuciones.

Siguiendo dentro del marco provisto por la teoría de distribuciones nos gustaría continuar el estudio de las geometrías que dan lugar a singularidades y en particular como extender el concepto de simetría a los tensores métricos singulares y sus tensores de curvatura distribucionales. La importancia de este concepto en relatividad general es fundamental, toda vez que nos permite entender mejor la relación entre la geometría y la materia que está implícita en las ecuaciones de Einstein. Adicionalmente, dichas simetrías pueden dar lugar a cargas conservadas a lo largo de las geodésicas del espaciotiempo. Para ello se propone en [4] el estudio de las simetrías de geometrías distribucionales a través de una definición rigurosa de la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones.

En el presente trabajo se trataran las simetrías de Killing y de las curvaturas de espaciotiempos tipo ondas gravitacionales, motivados por el actual interés que se tiene sobre las soluciones tipo ondas gravitacionales planas de las ecuaciones no linealizadas de Einstein. En particular se estudiaran, la onda PP impulsiva cuya curvatura se encuentra confinada a una hipersuperficie plana [5], así como también el caso de una onda gravitacional que se propaga en un background magnético [6]. Por otro lado se realizará el estudio de las simetrías de Killing y de la curvatura de Ricci del agujero negro BTZ para el caso sin rotación [7]. La estructura de este trabajo es como sigue. En el primer capítulo se presenta una revisión de la estructura matemática que se empleará para el análisis de las geometrías distribucionales de los espaciotiempo que serán objeto de estudio. Los siguientes tres capítulos se dedicarán al estudio de dichos espaciotiempos, en los que se presenta una breve revisión de la geometría clásica (esto es, no distribucional) del espaciotiempo seguidamente de una revisión de la geometría distribucional, para luego realizar el estudio de las simetrías de los tensores de curvatura distribucionales asociados a cada espaciotiempo. Por último se presenta una discusión de los resultados obtenidos en esta tesis.

Capítulo 1

Simetrías y curvaturas distribucionales

En este capítulo se realizará una revisión de los conceptos generales y propiedades sobre las cuales descansa este trabajo. En lo que sigue, introduciremos el concepto de distribuciones tensoriales y definiremos el tipo de métrica cuyo tensor de curvatura asociado acepta una interpretación distribucional. Posteriormente, revisaremos la definición de derivada de Lie y otros conceptos relacionados con simetrías, para luego revisar la extensión de la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones.

1.1 Distribuciones tensoriales. Métricas regulares y semi-regulares

Siguiendo el enfoque de [8], se define una distribución regular como un funcional lineal que surge de la integral generada por una función localmente integrable con una función de prueba ϕ a través de,

$$f[\phi] = \int_{\mathcal{M}} f\phi\omega_\eta \tag{1.1}$$

Donde ω_η es el elemento de volumen asociado a un tensor métrico C^∞ endosado a la variedad $\mathcal{M}$.

La extensión a distribuciones tensoriales es directa. Sea $U^{j_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}$ un campo tensorial de prueba suave con soporte compacto sobre $\mathcal{M}$. Un campo tensorial

$T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}$ se identifica con una distribución vía,

$$T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}[U^{j_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}] \equiv \int_{\mathcal{M}} T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l} U^{j_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k} \omega_\eta \tag{1.2}$$

se dice que el campo tensorial $T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}$ esta localmente acotado siempre que la expresión $T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l} U^{j_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}$ este acotada para todo campo tensorial de prueba $U^{j_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}$.

La derivada covariante compatible con la métrica η_{ab} de un tensor distribucional $T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}$ es el tensor definido por

$$\nabla_j T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}[U^{jj_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}] \equiv -T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}[\nabla_j U^{jj_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}] \tag{1.3}$$

para cualquier campo tensorial de prueba $U^{jj_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}$.

Por último, se define la derivada débil de un campo tensorial localmente integrable $T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}$, como el campo tensorial localmente integrable $W^{i_1\cdots i_k}{}_{jj_1\cdots j_l}$ tal que

$$W^{i_1\cdots i_k}{}_{jj_1\cdots j_l}[U^{jj_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}] = \nabla_j T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}[U^{jj_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}] \tag{1.4}$$

para todo campo tensorial de prueba $U^{jj_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}$.

En particular estamos interesados en asignar significado distribucional a la curvatura de una métrica distribucional. Sea ∇_c el operador derivada compatible con cualquier métrica suave η_{ab} , entonces el tensor de Riemann de una métrica suave g_{ab} puede ser escrito en la forma,

$$R_{abc}{}^d = \tilde{R}_{abc}{}^d + 2\nabla_{[b} C^d_{a]c} + 2C^d_{m[b} C^m_{a]c} \tag{1.5}$$

donde $\tilde{R}_{abc}{}^d$ es el tensor de curvatura de η_{ab} y C^c_{ab} viene dado por,

$$C^c_{ab} \equiv \frac{1}{2}(g^{-1})^{cd}(\nabla_a g_{bd} + \nabla_b g_{ad} - \nabla_d g_{ab}) \tag{1.6}$$

Dado que (1.5) requiere operaciones no lineales de la métrica y sus derivadas, que en general no están definidas en teoría de distribuciones, no es posible en general asignarle significado distribucional a esta expresión. Sin embargo, exigiendo condiciones sobre el tensor métrico se puede asegurar que el lado derecho de $R_{abc}{}^d$ admita una interpretación distribucional. Siguiendo a [2] un campo tensorial simétrico g_{ab} definido sobre una variedad $\mathcal{M}$ puede ser definido como una distribución, que llamaremos tensores métricos regulares, si cumple:

1. g_{ab} y $(g^{-1})^{ab}$ existan en todas partes y sean localmente acotados.
2. La derivada débil de g_{ab} en alguna métrica suave η_{ab} exista y sea localmente de cuadrado integrable.

Esto es, el primer término en (1.5) por ser el tensor de curvatura de una métrica suave su interpretación distribucional es directa. El segundo término se interpreta como la derivada de una distribución que resulta ser una distribución. Y por último el tercer término es localmente integrable y por ende una distribución si C^c_{ab} es de cuadrado localmente integrable. Así ${R_{abc}}^d$ define una distribución únicamente si C^c_{ab} es localmente integrable y de cuadrado localmente integrable. Dado que los productos directos de la métrica y su inversa con el tensor de Riemann tienen sentido como distribución para métricas regulares, tiene sentido escribir las ecuaciones de campo de Einstein.

Además es posible extender la familia de tensores métricos para los cuales los tensores de curvatura admiten significado distribucional, llamados tensores métricos semi-regular [3], exigiendo condiciones mínimas para que ${R_{abc}}^d$ sea definible como distribución. Un campo tensorial simétrico g_{ab} es semi-regular siempre que:

1. g_{ab} y $(g^{-1})^{ab}$ existan en todas partes y sean localmente acotados.
2. La primera derivada débil de g_{ab} en alguna métrica suave η_{ab} exista y los tensores C^c_{ab} y $C^d_{m[b}C^m_{a]c}$ sean localmente integrables.

Puesto que la contracción de una distribución es una distribución, se sigue que el tensor de Ricci, $R_{ac} = {R_{abc}}^b$, tiene sentido como distribución tanto para métricas regulares como para métricas semi-regulares. Sin embargo, una métrica semi-regular puede no tener tensor de Einstein distribucional debido al hecho de que contracciones de la métrica con el tensor de curvatura pueden no tener sentido como distribuciones.

1.2 Derivada de Lie

En lo que sigue revisaremos algunos resultados fundamentales sobre la derivada de Lie y las simetrías que surgen a partir de esta. Para los detalles remitimos a las referencias [9] y [10].

Sea x^n coordenadas n-dimensionales cartesianas y sea ξ^i un campo vectorial definido sobre la variedad $\mathcal{M}$, tal que, se le asocian el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}^i = \xi^i\left(x^1(t), ..., x^n(t)\right), \qquad i = 1, ..., n \tag{1.7}$$

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{xt}. \tag{1.8}$$

cuya soluciones son llamadas las curvas integrales del campo vectorial ξ^i, y que denotaremos

$$F_t^i(x_0^1, ..., x_0^n) = x^i = x^i(t, x_0^1, ..., x_0^n) \tag{1.9}$$

que satisfacen $x_0^i = x^i \mid_{t=t_0}$ condiciones iniciales sobre las coordenadas. Usando el teorema de Taylor para t pequeño se encuentra la forma más explícita de este mapeo, encontrándose:

$$x^i(t, x_0^1, ..., x_0^n) = x_0^i + t\xi^i(x_0^1, ..., x_0^n) + 0(t) \tag{1.10}$$

Dado un grupo local uniparamétrico de difeomorfismos $F_t = (F_t^1, ..., F_t^n)$, se define un campo vectorial tangente como,

$$\xi^i = \left(\frac{d}{dt}F_t^i\right)_{t=0}, \quad i = 1, ..., n \tag{1.11}$$

Sea $T^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l}$ un campo tensorial. Entonces F_t induce una transformación sobre las componentes del campo tensorial como sigue,

$$(F_t T)^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l} = T^{p_1 \cdots p_k}{}_{q_1 \cdots q_l} \frac{\partial x^{q_1}}{\partial x_0^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{q_l}}{\partial x_0^{j_l}} \frac{\partial x_0^{i_1}}{\partial x^{p_1}} \cdots \frac{\partial x_0^{i_k}}{\partial x^{p_k}} \tag{1.12}$$

a partir de la cual se define la derivada de Lie de un campo tensorial $T^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l}$ con respecto al campo vectorial ξ^i a través del tensor

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} T^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l} = \left[\frac{d}{dt}\left(F_t T\right)^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l}\right]_{t=0} \tag{1.13}$$

esta derivada nos da el "cambio infinitesimal del campo tensorial $T^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l}$ a lo largo del campo vectorial ξ^i".

A continuación obtendremos una fórmula más explícita para la derivada de Lie. En particular considérese la derivada de Lie de un campo tensorial $T_a{}^b$ de rango 2,

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} T_a{}^b = \left[\frac{d}{dt}\left(F_t T\right)_a{}^b\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}\left(T_c{}^d \frac{\partial x^c}{\partial x_0^a} \frac{\partial x_0^b}{\partial x^d}\right)\right]_{t=0} \tag{1.14}$$

usando (1.10) en (1.12) se desprende,

$$(F_t T)_a{}^b = T_c{}^d \left(\delta_a^c + t\frac{\partial \xi^c}{\partial x_0^a}\right)\left(\delta_d^b - t\frac{\partial \xi^b}{\partial x_0^d}\right) \tag{1.15}$$

se sigue,

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} T_a{}^b = \left[\frac{d}{dt}\left(T_a^b - tT_a^d\frac{\partial \xi^b}{\partial x_0^d} + tT_c^b\frac{\partial \xi^c}{\partial x_0^a} + 0(t)\right)\right]_{t=0} \tag{1.16}$$

con lo que se encuentra,

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} T_a{}^b = \xi^c \nabla_c T_a{}^b - T_a{}^c \nabla_c \xi^b + T_c{}^b \nabla_a \xi^c \tag{1.17}$$

donde ∇_a es el operador derivada compatible con una métrica suave g_{ab}. La derivada de Lie satisface las siguientes propiedades básicas:

- Es lineal sobre los objetos geométricos;

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda Y_a + \mu Z_a) = \lambda \pounds_{\boldsymbol{\xi}} Y_a + \mu \pounds_{\boldsymbol{\xi}} Z_a \tag{1.18}$$

- Es lineal en los campos vectoriales;

$$\pounds_{(\lambda \boldsymbol{Y} + \mu \boldsymbol{Z})} P = \lambda \pounds_Y P + \mu \pounds_Z P \tag{1.19}$$

- Sigue la regla de Leibniz;

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}}(Y^a Z_{bc}) = Y^a(\pounds_{\boldsymbol{\xi}} Z_{bc}) + (\pounds_{\boldsymbol{\xi}} Y^a) Z_{bc} \tag{1.20}$$

Un caso particular de (1.13) ocurre cuando,

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} T^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l} = 0 \tag{1.21}$$

así, el campo tensorial $T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}$ es invariante en forma o simétrico bajo la transformación generada por el campo vectorial ξ^a y se dice que ξ^a es una simetría del campo tensorial $T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}$.

Consideremos ahora las simetrías que posee un tensor métrico g_{ab} asociado a una variedad $\mathcal{M}$ a lo largo de un campo vectorial ξ^a, esto implica,

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} g_{ab} = \xi^c \nabla_c g_{ab} + g_{ca} \nabla_b \xi^c + g_{cb} \nabla_a \xi^c = 0$$

dado que el operador derivada ∇_c es el compatible con la métrica g_{ab}, se sigue $\nabla_c g_{ab} = 0$ y obtenemos

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \tag{1.22}$$

que se conoce como las ecuaciones de Killing y cualquier campo vectorial ξ^a solución a ésta se denomina campo vectorial de Killing o isometría de la métrica g_{ab}.

Un resultado importante de las ecuaciones de Killing, relaciona la segunda derivada de un campo vectorial de Killing con el tensor de curvatura de Riemann. Por definición el tensor de Riemann viene dado por

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_b \nabla_a \xi_c = -R_{abc}{}^d \xi_d \tag{1.23}$$

utilizando las ecuaciones de Killing, escribiendo la misma ecuación con permutaciones cíclicas en los índices y sumando éstas, se obtiene

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{bca}{}^d \xi_d \tag{1.24}$$

esto implica que un campo vectorial de Killing ξ^a, está completamente determinando por los valores de ξ^a y $\nabla_a \xi_b$ en un punto $p \in \mathcal{M}$. Además, para una variedad n dimensional, el número máximo de campos vectoriales de Killing linealmente independientes es de

$$\frac{n(n+1)}{2} \tag{1.25}$$

correspondiente a n vectores de Killing asociados a traslaciones como consecuencia de la homogeneidad del espaciotiempo, $\frac{n(n-1)}{2}$ vectores de Killing asociados a rotaciones especiales y boost de Lorentz como consecuencia de la isotropía del espaciotiempo. En particular un espaciotiempo n-dimensional que acepte el número máximo permitido de campos vectoriales de Killing se conoce como un espacio máximamente simétrico.

1.3 La derivada de Lie en el sentido de las distribuciones

En esta sección se revisará la generalización del concepto de derivada de Lie para campos tensoriales en el sentido de distribuciones presentada en [4], lo que nos permitirá extender la noción de simetrías para distribuciones tensoriales.

Sea $T_a{}^b$ un campo tensorial localmente integrable y ξ^a un campo vectorial C^∞ definido sobre una variedad $\mathcal{M}$. La derivada de Lie del campo tensorial $T_a{}^b$ viene dada por (1.17) que se puede escribir como,

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} T_a{}^b = \nabla_c(T_a{}^b \xi^c) - T_a{}^b(\nabla_c \xi^c) + T_c{}^b \nabla_a \xi^c - T_a{}^c \nabla_c \xi^b \tag{1.26}$$

La extensión de la derivada de Lie a distribuciones tensoriales es directa. Sea $U^a{}_b$ un campo tensorial de prueba suave con soporte compacto sobre $\mathcal{M}$, se tiene

$$\pounds_\xi T_a{}^b[U^a{}_b] = \int_{U_\mathcal{M}} (-T_a{}^b \xi^c \nabla_c U^a{}_b - T_a{}^b(\nabla_c \xi^c) U^a{}_b + T_c{}^b \nabla_a \xi^c U^a{}_b - T_a{}^c \nabla_c \xi^b U^a{}_b)\omega_\eta \tag{1.27}$$

donde $U_\mathcal{M}$ es el dominio coordenado correspondiente a $\mathcal{M}$ y ω_η el elemento de volumen asociado a una métrica suave η_{ab}. Dado que,

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} U^a{}_b = \xi^c \nabla_c U^a{}_b + U^a{}_c \nabla_b \xi^c - U^c{}_b \nabla_c \xi^a$$

podemos reescribir (1.27) como sigue,

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} T_a{}^b[U^a{}_b] = -\int_\mathcal{M} (T_a{}^b \pounds_{\boldsymbol{\xi}} U^a{}_b + T_a{}^b \nabla_c \xi^c U^a{}_b)\omega_\eta \tag{1.28}$$

A partir de este resultado se define en general la derivada de Lie para un tensor distribucional $T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}$ a lo largo de un campo vectorial ξ^a suave definido sobre la variedad $\mathcal{M}$, a través de

$$\pounds_\xi T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}[U^{j_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}] \equiv -T^{i_1\cdots i_k}{}_{j_1\cdots j_l}[\pounds_\xi U^{j_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k} + \nabla_j \xi^j U^{j_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k}] \tag{1.29}$$

el cual admite una interpretación distribucional bien definida ya que ambos términos del lado derecho de (1.29) son tensores distribucionales bien definidos siempre que el campo vectorial ξ^a sea suave.

Capítulo 2

Agujero negro en dimensión reducida

El modelo de agujero negro en dimensión reducida, $(2+1)-$dimensional, descrito por Bañados, Teitelboim, y Zanelli (BTZ) [11] [7], comparte muchas de las propiedades clásicas y cuánticas del agujero negro de Kerr $(3+1)-$dimensional [12]. A pesar de que difiere de la solución de Kerr, al ser asintóticamente anti-de Sitter en vez de ser asintóticamente plano, éste representa un agujero negro en gravedad reducida. Más aún, para el caso sin rotación, esta geometría describe una singularidad en el origen escondida por un horizonte de evento en $r_+ = \sqrt{m}l$ [7]. Por consiguiente este tipo de solución plantea un estudio interesante en el marco de la teoría de distribuciones tensoriales. En lo que sigue se realizará una revisión de la geometría distribucional del agujero negro BTZ para el caso sin rotación, para luego realizar un estudio distribucional de las simetrías de este espaciotiempo. Así, se estarán dando los primeros resultados obtenidos en esta tesis.

2.1 Agujero negro BTZ

Revisaremos en lo que sigue la geometría del agujero negro BTZ para el caso sin rotación en el sentido no distribucional [7] [12].

Considérese la solución agujero negro BTZ AdS_3 para el caso sin rotación, cuya geometría viene descrita por el tensor métrico en la forma de Kerr-Schild,

$$g_{ab} = \eta_{ab} + f k_a k_b \tag{2.1}$$

con η_{ab} la métrica de Minkowski en $\mathcal{R}^3$ y

$$f = \left(1 + m - \frac{r^2}{l^2}\right), \quad k_a = dt_a + \frac{1}{r}(x dx_a + y dy_a) \tag{2.2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nótese que el punto con energía igual a cero se ha ajustado de tal manera que el término de masa sea cero cuando el tamaño del horizonte tienda a cero, siendo el horizonte $r = \sqrt{m}l$.

El tensor métrico (2.1,2.2) es solución al sistema de ecuaciones de campo de Einstein, $(2+1)-$dimensional, en el vacío,

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = 0 \tag{2.3}$$

con constate cosmológica $\Lambda = -1/l^2$. Así, el tensor de Ricci asociado a la geometría provista por (2.1) viene dado por,

$$R_{ab} = -\frac{2}{l^2} g_{ab} \tag{2.4}$$

Dado que la curvatura de esta geometría está definida en todo el espaciotiempo y es constante, se ha afirmado [7] que el tipo de "singularidad" que se encuentra en $r = 0$ no es en la curvatura. Cabe destacar que esta declaración significa que $r = 0$ no es una singularidad cónica. Una singularidad cónica se obtiene al tomar un espaciotiempo plano, cortar una región con forma de cuña e identificar los bordes del corte.

Las simetrías de esta geometría, vienen descritas por los campos vectoriales de Killing,

$$K_1 = \boldsymbol{\partial}_t \tag{2.5}$$

$$K_2 = x \boldsymbol{\partial}_y - y \boldsymbol{\partial}_x \tag{2.6}$$

los cuales corresponden a un sistema estacionario y una simetría axial, debido a invariancias bajo desplazamientos temporales y bajo rotaciones respectivamente.

2.2 Agujero negro BTZ y distribuciones

A continuación se realizará una revisión de la geometría distribucional provista por el tensor métrico (2.1). De acuerdo a [3] y siguiendo el procedimiento en [13], se puede demostrar que la solución agujero negro BTZ, para el caso sin rotación en coordenadas de Kerr-Schild, es una métrica semi-regular $\forall m$. Por consiguiente, el estudio de esta geometría en el sentido de las distribuciones está garantizado.

Se encuentra que el tensor de Christoffel (1.6) asociado a la geometría descrita por (2.1) viene dado por,

$$\begin{aligned} C^c{}_{ab} &= \frac{r}{l^2}[dr_a(dt_b+dr_b)+dr_b(dt_a+dr_a)](\partial_t^c-\partial_r^c) \\ &- \frac{1}{r}\left(1+m-\frac{r^2}{l^2}\right)r^2 d\varphi_a d\varphi_b(\partial_t^c-\partial_r^c)+\frac{r}{l^2}(dt_a+dr_a)(dt_b+dr_b)\partial_r^c \\ &+ \frac{r}{l^2}\left(1+m-\frac{r^2}{l^2}\right)(dt_a+dr_a)(dt_b+dr_b)(\partial_t^c-\partial_r^c) \end{aligned} \tag{2.7}$$

que es localmente integrable $\forall m$ y se sobrentiende que todas las componentes del tensor son cartesianas como funciones de coordenadas cartesianas. Notamos además que $C^b{}_{ab}=0$.

Partiendo del tensor de Riemman(1.5), se encuentra la siguiente expresión para el tensor de Ricci distribucional,

$$R_{ac}[U^{ac}] = -\int_{\mathcal{R}^3-B_\epsilon} C^b{}_{ac}\nabla_b U^{ac}\omega_\eta - \int_{\mathcal{R}^3-B_\epsilon} C^b{}_{ma}C^m{}_{bc}U^{ac}\omega_\eta \tag{2.8}$$

con ω_η el elemento de volumen asociado a la métrica de Minkowski en $\mathcal{R}^3$ y B_ϵ el circulo alrededor del origen con $\epsilon\to 0$. Así,

$$R_{ac}[U^{ac}] = \int_{\Sigma_\epsilon} C^b{}_{ac}dr_b U^{ac}\omega_\sigma + \int_{\mathcal{R}^3-B_\epsilon}(\nabla_c C^c_{ab}-\frac{2r^2}{l^4}k_a k_c)U^{ac}\omega_\eta \tag{2.9}$$

donde se usó el teorema de la divergencia, siendo ω_σ es el elemento volumen inducido sobre la superficie $r=constante$ por la métrica de Minkowski y $-dr_b$ la normal externa a esta superficie. Resolviendo para la primera integral, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\epsilon} C^b{}_{ac}dr_b U^{ac}\omega_\sigma &= \int\left[-\frac{r}{l^2}(dr_a dr_c)-\frac{r}{l^2}(1+m-\frac{r^2}{l^2})dr_a dr_c\right. \\ &+ \left.\frac{1}{r}(1+m-\frac{r^2}{l^2})r^2 d\varphi_a d\varphi_c\right]U^{ac}\epsilon d\varphi dt \end{aligned} \tag{2.10}$$

Es claro con $r = \epsilon$, $\epsilon \to 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\int_{\Sigma_\epsilon} C^b{}_{ac} dr_b U^{ac} \omega_\sigma &= \int (1+m)(sen^2\varphi U^{xx} - sen\varphi cos\varphi (U^{xy} + U^{yx}) \\
&+ cos^2\varphi U^{yy}) d\varphi dt \\
&= \pi(1+m) \int \delta^{(2)}_{(0)} (dx_a dx_c + dy_a dy_c) U^{ac} dt \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Con este resultado y resolviendo la segunda integral en (2.9) se encuentra para el tensor de Ricci,

$$R_{ac} = \pi(1+m)\delta^{(2)}_{(0)}(dx_a dx_c + dy_a dy_c) - \frac{2}{l^2} g_{ac} \qquad (2.12)$$

Notamos que la geometría distribucional del agujero negro BTZ estático, para $\forall m > -1$, es una singularidad de curvatura proporcional a una distribución δ con soporte en el origen. Como es de esperarse, para $m = -1$, la singularidad desaparece debido a que el espaciotiempo es AdS_3. Puesto que no hay horizonte de eventos, para $-1 < m < 0$, tenemos una singularidad desnuda en $r = 0$. Para $m > 0$ tenemos una singularidad en el origen escondida por un horizonte de evento en $r_+ = \sqrt{m}l$.

2.3 Simetrías del agujero negro BTZ distribucional

En esta sección obtendremos la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones del tensor de curvatura distribucional (2.12) a lo largo de los campos vectoriales de Killing (2.5,2.6), obtenidos en el análisis no distribucional, a fin de determinar si estos son simetrías del tensor de curvatura distribucional.

Consideremos la derivada de Lie distribucional, para el tensor de Ricci distribucional,

$$\pounds_K R_{ac}[U^{ac}] = -R_{ac}[\pounds_K U^{ac} + (\nabla_b K^b) U^{ac}] \qquad (2.13)$$

donde en la evaluación del miembro derecho se emplea el elemento de volumen asociado a la métrica de Minkowski en $\mathcal{R}^3$, con $\pounds_K U^{ac}$ dado por

$$\pounds_K U^{ac} = K^b(\nabla_b U^{ac}) - (\nabla_b K^a) U^{bc} - (\nabla_b K^c) U^{ab} \qquad (2.14)$$

Calculemos para $K_1 = \boldsymbol{\partial}_t$,

$$\pounds_{K_1} R_{ac}[U^{ac}] = -\int_{\mathcal{R}^3} R_{ac} \left\{ \boldsymbol{\partial}_t^b (\nabla_b U^{ac}) - (\nabla_b \boldsymbol{\partial}_t^a) U^{bc} - (\nabla_b \boldsymbol{\partial}_t^c) U^{ab} + (\nabla_b \boldsymbol{\partial}_t^b) U^{ac} \right\} \omega_\eta \qquad (2.15)$$

dado que K_1 es constante en todo el espaciotiempo tanto sus derivadas como su divergencia son cero, nuestro problema se resume a calcular

$$\pounds_{K_1} R_{ac}[U^{ac}] = -\int_{\mathcal{R}^3} R_{ac}\boldsymbol{\partial}_t^b(\nabla_b U^{ac})dtdxdy \tag{2.16}$$

Es claro que el término proporcional a la métrica en el tensor de curvatura (2.12) es cero por definición de K_1, esto es $\pounds_{K_1} g_{ac}[U^{ac}] = 0$. Así, nos interesa calcular

$$\pounds_{K_1} R_{ac}[U^{ac}] = -\int_{\mathcal{R}^3} \pi(1+m)\delta^{(2)}_{(0)}(dx_a dx_c + dy_a dy_c)\partial_t U^{ac} dtdxdy \tag{2.17}$$

de donde se deprende

$$\begin{aligned} \pounds_{K_1} R_{ac}[U^{ac}] &= -\pi(1+m)\int (dx_a dx_c + dy_a dy_c)\partial_t U^{ac}(t,\vec{o})dt \\ &= -\pi(1+m)\int \partial_t(U^{xx}(t,\vec{o}) + U^{yy}(t,\vec{o}))dt = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde se usó el hecho que U^{ac} es de soporte acotado.

Calculemos a continuación la derivada de Lie de R_{ac} a lo largo de $K_2 = x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x$. Se tiene

$$\begin{aligned} \pounds_{K_2} R_{ac}[U^{ac}] &= -\int_{\mathcal{R}^3} R_{ac}\left\{(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^b(\nabla_b U^{ac}) - (\nabla_b(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^a)U^{bc}\right. \\ &- \left.(\nabla_b(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^c)U^{ab} + (\nabla_b(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^b)U^{ac}\right\}\omega_\eta \end{aligned} \tag{2.19}$$

dado que la divergencia de K_2 es cero y sabiendo que $\pounds_{K_2} g_{ac}[U^{ac}] = 0$. Se desprende

$$\begin{aligned} \pounds_{K_2} R_{ac}[U^{ac}] &= -\pi(1+m)\int_{\mathcal{R}^3} \delta^{(2)}_{(0)} T_{ac}\left\{(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^b(\nabla_b U^{ac})\right. \qquad (2.20) \\ &- \left.(\nabla_b(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^a)U^{bc} - (\nabla_b(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^c)U^{ab}\right\}\omega_\eta \end{aligned}$$

siendo $T_{ac} = (dx_a dx_c + dy_a dy_c)$, la estructura tensorial de la parte proporcional a delta en R_{ac}. Por simplicidad calculemos término a término. Para el primero término de la integral tenemos,

$$-\int_{\mathcal{R}^3} \delta^{(2)}_{(0)} T_{ac}(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^b(\nabla_b U^{ac})\omega_\eta = -\int_{\mathcal{R}^3} \delta^{(2)}_{(0)} T_{ac}(x\partial_y U^{ac} - y\partial_x U^{ac})\omega_\eta = 0 \tag{2.21}$$

para el segundo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}^3} \delta^{(2)}_{(0)} T_{ac}(\nabla_b(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^a)U^{bc}\omega_\eta &= \int_{\mathcal{R}^3} \delta^{(2)}_{(0)}(T_{yc}\partial_x x U^{xc} - T_{xc}\partial_y y U^{yc})dtdxdy \\ &= \int (U^{xy}(t,\vec{o}) - U^{yx}(t,\vec{o}))dt \end{aligned} \tag{2.22}$$

por último,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{R}^3} \delta_{(0)}^{(2)} T_{ac}(\nabla_b(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^c)U^{ab}\omega_\eta &= \int_{\mathcal{R}^3} \delta_{(0)}^{(2)}(T_{ay}\partial_x x U^{ax} - T_{ax}\partial_y y U^{ay})dtdxdy \\ &= \int (U^{yx}(t,\vec{o}) - U^{xy}(t,\vec{o}))dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

Juntando todos estos resultados obtenemos,

$$\pounds_{K_2} R_{ac}[U^{ac}] = \pi(1+m)\int (U^{xy}(t,\vec{o}) - U^{yx}(t,\vec{o}) + U^{yx}(t,\vec{o}) - U^{xy}(t,\vec{o}))dt = 0 \quad (2.24)$$

A partir de estos resultados (2.18, 2.24) hemos encontrado entonces que las simetrías clásicas de la geometría del agujero negro BTZ son también simetrías de la descripción distribucional del mismo. De lo anterior se desprende que, en este caso, la inclusión de la singularidad de curvatura no destruye las invariancias clásicas.

Capítulo 3

Onda PP impulsiva

Una clase muy conocida de soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein son las llamadas ondas gravitacionales planas. Un caso particular de estas, es la onda PP impulsiva, la cual se define como una solución cuya curvatura se encuentra confinada en una hipersuperficie plana donde fuera de esta región acotada la solución es cero. Físicamente este tipo de espaciotiempo describe un impulso gravitacional localizado sobre la hipersuperficie nula $u = 0$ producida por una partícula sin masa, moviéndose a la velocidad de la luz. Geometrías de este tipo, se cree que son relevantes en la descripción de procesos de dispersión a la escala de Planck [14]. Clásicamente en relatividad general, este tipo de idealización no es permisible debido a que su curvatura no es proporcional a una función suave, si no que resulta ser proporcional a una distribución delta. Por consiguiente el estudio de este tipo de solución en el sentido de las distribuciones plantea un problema interesante.

3.1 Onda de choque

Las ondas PP u ondas gravitacionales plano-frontales con rayos paralelos, son soluciones tipo onda plana de las ecuaciones no linealizadas de Einstein [15]. El tensor métrico de las ondas PP puede ser escrito como,

$$\bar{g}_{ab} = H(U, X, Y)dU_a dU_b - dU_a dV_b - dV_a dU_b + dX_a dX_b + dY_a dY_b \tag{3.1}$$

que es conocida como la forma de Brinkmann, donde $H(U,X,Y)$ es el perfil de la onda, siendo $\mathcal{R}^4$ la variedad del espaciotiempo, con $U = T - Z$, $V = T + Z$ coordenadas nulas y X, Y coordenadas cartesianas transversas.

En particular con $H = \rho(U)f(X,Y)$ la onda se denomina onda PP sándwich si $\rho \neq 0$ en alguna región finita $U_0 < U < U_1$ del espaciotiempo. Penrose introduce las ondas PP impulsivas como una idealización cuando $\rho(U) = \delta(U)$ [16], con lo que obtenemos el siguiente tensor métrico

$$\bar{g}_{ab} = \delta(U)f(X,Y)dU_a dU_b - dU_a dV_b - dV_a dU_b + dX_a dX_b + dY_a dY_b \tag{3.2}$$

A pesar de que esta métrica posee una componente tipo delta, es posible relacionar (3.2) con una métrica continua a través de una transformación de coordenadas [16], que claramente debe ser discontinua y que de manera general viene dada por [17],

$$\begin{aligned} U &= u \\ V &= v + \Theta^+_{(u)} f(x,y) + u\Theta^+_{(u)}\frac{1}{4}(\partial f)^2 \\ X &= x + u\Theta^+_{(u)}\frac{1}{2}\partial f \\ Y &= y + u\Theta^+_{(u)}\frac{1}{2}\partial f \end{aligned} \tag{3.3}$$

con $\Theta^+_{(u)}$ la función escalón de Heaviside definida en la región positiva de u. Encontrándose para el tensor métrico de la onda PP

$$g_{ab} = -du_a dv_b - dv_a du_b + \left(\delta_{ij} + \frac{1}{2}u\Theta^+_{(u)}\partial_i\partial_j f\right)^2 dx^i_a dx^j_b \tag{3.4}$$

con $i, j = x, y$. En particular estamos interesados en el perfil,

$$f = x^2 - y^2 \tag{3.5}$$

en cuyo caso la métrica (3.4) toma la forma,

$$g_{ab} = (1 + u\Theta^+_{(u)})^2 dx_a dx_b + (1 - u\Theta^+_{(u)})^2 dy_a dy_b - du_a dv_b - dv_a du_b \tag{3.6}$$

tomando la llamada forma de Rosen,

$$g_{ab} = -du_a dv_b - dv_a du_b + P^2(u) dx_a dx_b + Q^2(u) dy_a dy_b \tag{3.7}$$

con,

$$P(u) = 1 + u\Theta^{+}_{(u)} \quad ; \quad Q(u) = 1 - u\Theta^{+}_{(u)} \tag{3.8}$$

la cual es llamada onda PP impulsiva u onda de choque. A pesar de que el tensor métrico (3.6) tiene componentes que no son funciones ordinarias, es continuo en todo el espaciotiempo y es posible calcular el tensor de curvatura sin teoría de distribuciones. Partiendo de la forma de Rosen (3.7) podemos calcular las componentes del tensor de Riemman y del tensor de Ricci, cuyas componentes no nulas resultan ser [18],

$$R^{v}{}_{xux} = PP'', \quad R^{v}{}_{yuy} = QQ'', \quad R^{x}{}_{uux} = \frac{P''}{P}, \quad R^{y}{}_{uuy} = \frac{Q''}{Q} \tag{3.9}$$

$$R_{uu} = \frac{P''}{P} + \frac{Q''}{Q} \tag{3.10}$$

Usando (3.9) con (3.8) se encuentra

$$R^{v}{}_{xux} = \delta(u), \quad R^{v}{}_{yuy} = -\delta(u), \quad R^{x}{}_{uux} = \delta(u), \quad R^{y}{}_{uuy} = -\delta(u) \tag{3.11}$$

por lo que la geometría que describe (3.6), es plana en casi todas partes con curvatura que solo tiene soporte sobre el hiperplano $u = 0$. De (3.10,3.8) se desprende que el tensor de Ricci es cero, en consecuencia el tensor de Einstein resulta ser cero y de aquí que el tensor de Riemman es equivalente al tensor de Weyl.

Las simetrías de la geometría descrita por (3.6), vienen dadas por los campos vectoriales de Killing

$$K_1 = \boldsymbol{\partial}_v \tag{3.12}$$

$$K_2 = \boldsymbol{\partial}_y \tag{3.13}$$

$$K_3 = \boldsymbol{\partial}_x \tag{3.14}$$

los cuales corresponden a simetrías traslacionales en las direcciones transversas a la onda y traslaciones en la coordenada nula v, ya que (3.6) representa un impulso moviéndose en la dirección z. Adicionalmente, la existencia de vectores de Killing no suaves, dados por

$$K_4 = x\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_x - u^2\Theta^{+}_{(u)}\left(\frac{1}{1+u}\right)\boldsymbol{\partial}_x \tag{3.15}$$

$$K_5 = y\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_y + u^2\Theta^+_{(u)}\left(\frac{1}{1-u}\right)\boldsymbol{\partial}_y \tag{3.16}$$

ha sido adelantada en [17], obtenidos al resolver las ecuaciones de Killing para (3.2), tal que sean solución para el perfil (3.5) y aplicando la transformación (3.3).

Todas las métricas planas en la forma de Brinkmann (3.1) poseen una simetría traslacional a lo largo de la coordenada nula v, debido a la independencia de esta en la métrica tipo onda PP [19]. Además todas las ondas PP impulsivas posen n simetrías traslacionales a lo largo de las n coordenadas transversas a la onda, hecho que se hace explícito en la forma de Rosen (3.6). Se sabe que el grupo de simetrías generado por estos campos vectoriales de Killing corresponde al álgebra de traslaciones abeliana, el cual actúa transitivamente sobre la hipersuperficie de u constante, exponiendo la existencia de campos vectoriales de Killing que dependen exclusivamente del perfil de la onda. Todos los Killing son generadores de la denominada álgebra de Heisenberg.

3.2 Onda de choque y distribuciones

En lo que sigue se realizará una revisión de la geometría distribucional descrita por la onda PP impulsiva. Siguiendo [2] y [5], se puede demostrar que el tensor métrico (3.6) pertenece a la familia de métricas regulares, y podemos asegurar que el tensor de curvatura tendrá sentido como distribución.

Siguiendo el procedimiento en [5], y usando (1.6), se sigue que el tensor de Christoffel viene dado por

$$\begin{aligned} C^c{}_{ab} &= \frac{\Theta^+_{(u)}}{1+u}(\partial^c_x dx_a du_b + \partial^c_x du_a dx_b) - \frac{\Theta^+_{(u)}}{1-u}(\partial^c_y dy_a du_b + \partial^c_y du_a dy_b) \\ &+ (1+u)\Theta^+_{(u)}\partial^c_v dx_a dx_b - (1-u)\Theta^+_{(u)}\partial^c_v dy_a dy_b \end{aligned} \tag{3.17}$$

Así, podemos calcular el tensor de Riemman (1.5) asociado a la geometría provista por (3.6), en el sentido de las distribuciones , el cual viene dado por,

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^d[U^{abc}{}_d] &= -\int_0^1 du \int dvdxdy(\nabla_b(C^d{}_{ac}U^{abc}{}_d) - \nabla_a(C^d{}_{bc}U^{abc}{}_d)) \\ &\quad + \int_0^1 du \int dvdxdy\left(2\nabla_{[b}C^d_{a]c} + 2C^d_{m[b}C^m_{a]c}\right)U^{abc}{}_d \end{aligned} \tag{3.18}$$

para todo campo tensorial de prueba $U^{abc}{}_{d}$ con soporte compacto sobre $-1 < u < 1$, donde se ha escogido el elemento de volumen $\omega_\eta = dudvdxdy$ asociado a la métrica plana en coordenadas nulas

$$\eta_{ab} = dx_a dx_b + dy_a dy_b - du_a dv_b - dv_a du_b \tag{3.19}$$

Evaluando los términos de la segunda integral en (3.18) a partir de (3.17), se encuentra

$$\begin{aligned} \nabla_b C^d{}_{ac} &= -\frac{du_b}{(1+u)^2}(\partial_x^d dx_a du_c + \partial_x^d du_a dx_c) - \frac{du_b}{(1-u)^2}(\partial_y^d dy_a du_c \\ &+ \partial_y^d du_a dy_c) + \partial_v^d dx_a du_b dx_c + \partial_v^d dy_a du_b dy_c \end{aligned} \tag{3.20}$$

y un término semejante para $\nabla_a C^d{}_{bc}$. Por otro lado se encuentra,

$$\begin{aligned} 2C^d_{m[b}C^m_{a]c} &= -\frac{du_c}{(1+u)^2}(\partial_x^d dx_b du_a - \partial_x^d du_b dx_a) - \frac{du_c}{(1-u)^2}(\partial_y^d dy_b du_a \\ &- \partial_y^d du_b dy_a) + \partial_v^d du_a(dx_b dx_c + dy_b dy_c) \\ &- \partial_v^d du_b(dx_a dx_c + dy_a dy_c) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Al realizar la suma se encuentra

$$\nabla_b C^d{}_{ac} - \nabla_a C^d{}_{bc} + 2C^d_{m[b}C^m_{a]c} = 0 \tag{3.22}$$

y de aquí que

$$R_{abc}{}^d[U^{abc}{}_d] = \int_{u=0} dvdxdy(C^d{}_{ac}du_b - C^d{}_{bc}du_a)U^{abc}{}_d \tag{3.23}$$

donde se ha aplicado el teorema de la divergencia, siendo $-du_b$ la normal externa a la superficie $u = 0$. Sustituyendo los $C^c{}_{ab}$ y evaluando en $u = 0$ se encuentra,

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^d &= \delta(u)\big(dx_a du_b du_c \partial_x^d - dy_a du_b du_c \partial_y^d + dx_a du_b dx_c \partial_v^d \\ &\quad -dy_a du_b dy_c \partial_v^d - du_a dx_b du_c \partial_x^d + du_a dy_b du_c \partial_y^d \\ &\quad -du_a dx_b dx_c \partial_v^d + du_a dy_b dy_c \partial_v^d\big) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Como es de esperarse el tensor de curvatura de Riemman es proporcional a una distribución δ. Además contrayendo el primer y tercer índice obtenemos el tensor de Ricci

$$R_{abc}{}^b \equiv R_{ac} = 0 \tag{3.25}$$

Con lo que se ha recuperado el resultado obtenido en la sección anterior para el tensor de Riemann y Ricci pero ahora de forma matemáticamente rigurosa.

3.3 Simetrías de la onda PP de choque distribucional

En lo que sigue calcularemos la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones del tensor de curvatura distribucional (3.24) a lo largo de los campos vectoriales de Killing (3.12-3.16), con el fin de determinar si estos son simetrías del tensor de curvatura distribucional.

Consideremos la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones para el tensor de curvatura (3.24),

$$\pounds_K R_{abc}{}^d[U^{abc}{}_d] = -R_{abc}{}^d[\pounds_K U^{abc}{}_d + (\nabla_j K^j)U^{abc}{}_d] \tag{3.26}$$

donde en la evaluación del miembro derecho se emplea el elemento de volumen asociado a la métrica plana (3.19), con $\pounds_K U^{abc}{}_d$ dado por,

$$\pounds_K U^{abc}{}_d = K^j(\nabla_j U^{abc}{}_d) + (\nabla_d K^j)U^{abc}{}_j - (\nabla_j K^a)U^{jbc}{}_d - (\nabla_j K^b)U^{ajc}{}_d - (\nabla_j K^c)U^{abj}{}_d \tag{3.27}$$

Evaluemos (3.26) para $K_1 = \boldsymbol{\partial}_v$,

$$\begin{aligned}\pounds_{K_1} R_{abc}{}^d[U^{abc}{}_d] &= -\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d \left\{\boldsymbol{\partial}_v^j(\nabla_j U^{abc}{}_d) + (\nabla_d \boldsymbol{\partial}_v^j)U^{abc}{}_j - (\nabla_j \boldsymbol{\partial}_v^a)U^{jbc}{}_d\right.\\ &- \left.(\nabla_j \boldsymbol{\partial}_v^b)U^{ajc}{}_d - (\nabla_j \boldsymbol{\partial}_v^c)U^{abj}{}_d + (\nabla_j \boldsymbol{\partial}_v^j)U^{abc}{}_d\right\}\omega_\eta\end{aligned} \tag{3.28}$$

Es claro que el campo vectorial de Killing es constante en toda la variedad, de tal manera que sus derivadas son cero. Además la divergencia de éste es cero ($\nabla_j \boldsymbol{\partial}_v^j = 0$), por lo que obtenemos

$$\pounds_{K_1} R_{abc}{}^d[U^{abc}{}_d] = -\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d \boldsymbol{\partial}_v^j \nabla_j U^{abc}{}_d \omega_\eta \tag{3.29}$$

Escribiendo $R_{abc}{}^d = \delta(u)T_{abc}{}^d$, donde $T_{abc}{}^d$ es la estructura tensorial de (3.24), tenemos

$$\begin{aligned}\pounds_{K_1} R_{abc}{}^d[U^{abc}{}_d] &= -\int_{\mathcal{R}^4} \delta(u)T_{abc}{}^d(\partial_v U^{abc}{}_d)dxdydudv\\ &= -\int_{u=0} \partial_v(T_{abc}{}^d U^{abc}{}_d)dxdydv = 0\end{aligned} \tag{3.30}$$

donde se usó el teorema de la divergencia y el hecho que $U^{abc}{}_d$ es de soporte acotado. Con un procedimiento análogo podemos calcular la derivada de Lie del tensor de

Riemann distribucional a lo largo de K_2 y K_3.

Para $K_2 = \boldsymbol{\partial}_y$ se encuentra,

$$\begin{aligned} \pounds_{K_2} R_{abc}{}^{d}[U^{abc}{}_{d}] &= -\int_{\mathcal{R}^4} \delta(u) T_{abc}{}^{d}(\partial_y U^{abc}{}_{d}) dxdydudv \\ &= -\int_{u=0} \partial_y (T_{abc}{}^{d} U^{abc}{}_{d}) dxdydv = 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

y para $K_3 = \boldsymbol{\partial}_x$,

$$\begin{aligned} \pounds_{K_3} R_{abc}{}^{d}[U^{abc}{}_{d}] &= -\int_{\mathcal{R}^4} \delta(u) T_{abc}{}^{d}(\partial_x U^{abc}{}_{d}) dxdydudv \\ &= -\int_{u=0} \partial_x (T_{abc}{}^{d} U^{abc}{}_{d}) dxdydv = 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

De los resultados anteriores se desprende que los campos vectoriales de Killing suaves (K_1, K_2, K_3) son también simetrías de la curvatura de Riemann distribucional.

Antes de continuar con nuestro cálculo de las simetrías del Riemann nos podríamos preguntar si los campos vectoriales de Killing no suaves (3.15, 3.16) son isometrías de la métrica en el sentido de las distribuciones, a pesar de no ser campos vectoriales suaves, para ello consideremos la derivada de Lie distribucional del tensor métrico (3.6) dada por,

$$\pounds_K g_{ab}[U^{ab}] = -g_{ab}[\pounds_K U^{ab} + (\nabla_c K^c) U^{ab}] \tag{3.33}$$

de manera explícita,

$$\pounds_K g_{ab}[U^{ab}] = -\int_{\mathcal{R}^4} g_{ab} K^c \nabla_c U^{ab} \omega_\eta + \int_{\mathcal{R}^4} \left(2 g_{c(b} \nabla_{a)} K^c - g_{ab} \nabla_c K^c\right) U^{ab} \omega_\eta \tag{3.34}$$

Calculemos para el campo vectorial de Killing no suave $K_4 = x\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_x - \Theta^{+}_{(u)}\left(\frac{u^2}{1+u}\right)\boldsymbol{\partial}_x$ si este es una isometría en el sentido de las distribuciones. Para la primera integral en (3.34), al igual que la divergencia de K_4, estos términos son cero y por lo tanto la derivada de Lie distribucional se reduce a calcular,

$$\begin{aligned} \pounds_{K_4} g_{ab}[U^{ab}] &= \int_{\mathcal{R}^4} 2 g_{c(b} \nabla_{a)} \left(x\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_x - \Theta^{+}_{(u)} \left(\frac{u^2}{1+u}\right) \boldsymbol{\partial}_x \right)^c U^{ab} \omega_\eta \\ &= \int_{\mathcal{R}^4} \left\{ g_{vb} \partial_a x + g_{xb} \partial_a \left(u - \Theta^{+}_{(u)} \left(\frac{u^2}{1+u} \right) \right) \right\} U^{ab} \omega_\eta \\ &+ \int_{\mathcal{R}^4} \left\{ g_{av} \partial_b x + g_{ax} \partial_b \left(u - \Theta^{+}_{(u)} \left(\frac{u^2}{1+u} \right) \right) \right\} U^{ab} \omega_\eta \end{aligned} \tag{3.35}$$

y de aquí,

$$\begin{aligned}
\pounds_{K_4} g_{ab}[U^{ab}] &= \int_{\mathcal{R}^4} \left\{ -U^{xu} + (1+u\Theta^+_{(u)})^2 \partial_u \left(u - \Theta^+_{(u)} \frac{u^2}{1+u} \right) U^{ux} \right\} \omega_\eta \\
&+ \int_{\mathcal{R}^4} \left\{ -U^{ux} + (1+u\Theta^+_{(u)})^2 \partial_u \left(u - \Theta^+_{(u)} \frac{u^2}{1+u} \right) U^{xu} \right\} \omega_\eta \quad (3.36)
\end{aligned}$$

resolviendo para la primera integral,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathcal{R}^4} \left\{ -U^{xu} + (1+u\Theta^+_{(u)})^2 \partial_u \left(u - \Theta^+_{(u)} \frac{u^2}{1+u} \right) U^{ux} \right\} \omega_\eta \quad (3.37) \\
&= -\int_{\mathcal{R}^4} U^{xu}\omega_\eta + \int_{u>0} (1+u)^2 \partial_u \left(u - \frac{u^2}{1+u} \right) U^{ux}\omega_\eta + \int_{u<0} \partial_u u U^{ux} \omega_\eta \\
&= -\int_{\mathcal{R}^4} U^{xu}\omega_\eta + \int_{u>0} \left((1+u)^2 - 2u(1+u) + u^2 \right) U^{ux}\omega_\eta + \int_{u<0} U^{ux}\omega_\eta \\
&= -\int_{\mathcal{R}^4} U^{xu}\omega_\eta + \int_{u>0} U^{ux}\omega_\eta + \int_{u<0} U^{ux}\omega_\eta = \int_{\mathcal{R}^4} \left(-U^{xu} + U^{ux} \right) \omega_\eta \quad (3.38)
\end{aligned}$$

para la segunda integral se encuentra un término semejante y se sigue,

$$\pounds_{K_4} g_{ab}[U^{ab}] = \int_{\mathcal{R}^4} \left(-U^{xu} + U^{ux} \right) \omega_\eta + \int_{\mathcal{R}^4} \left(-U^{ux} + U^{xu} \right) \omega_\eta = 0 \quad (3.39)$$

Hemos verificado entonces que el campo vectorial de Killing (3.15) es una isometría en el tratamiento distribucional, a pesar de no ser un campo vectorial suave. Por otro lado, siguiendo un procedimiento análogo al anterior se encuentra para la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones, dado en (3.34), del tensor métrico (3.6) a lo largo del campo vectorial de Killing no suave $K_5 = y\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_y + \Theta^+_{(u)} \left(\frac{u^2}{1-u} \right) \boldsymbol{\partial}_y$,

$$\pounds_{K_5} g_{ab}[U^{ab}] = \int_{\mathcal{R}^4} \left(-U^{yu} + U^{uy} \right) \omega_\eta + \int_{\mathcal{R}^4} \left(-U^{uy} + U^{yu} \right) \omega_\eta = 0 \quad (3.40)$$

se desprende de lo anterior que el campo vectorial de Killing (3.16) es también una isometría de la métrica en el sentido de las distribuciones. Por lo tanto los campos vectoriales no suaves (3.15,3.16) son campos vectoriales de Killing de la métrica distribucional y por lo tanto isometrías del mismo en el sentido de las distribuciones.

A continuación consideremos las derivadas de Lie del tensor de Riemann a lo largo de los vectores (3.15) y (3.16). Nótese que la derivada de Lie de un tensor suave a lo largo de vectores que no son suaves no es necesariamente un tensor suave. De aquí que no haya garantía alguna de que la derivada de Lie de la curvatura de Riemann esté bien definida como distribución a lo largo de esos vectores.

Calcularemos ahora para $K_4 = x\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_x - \Theta^+_{(u)}\left(\frac{u^2}{1+u}\right)\boldsymbol{\partial}_x$ la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones dada en (3.26), y que por claridad calcularemos cada uno de los términos del miembro derecho de manera explícita. Para el primer término se tiene

$$-\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d K_4^j \nabla_j U^{abc}{}_d \omega\eta = -\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d \left\{x\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_x - \Theta^+_{(u)}\left(\frac{u^2}{1+u}\right)\boldsymbol{\partial}_x\right\}^j \nabla_j U^{abc}{}_d \omega\eta$$

esto es

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d K_4^j \nabla_j U^{abc}{}_d \omega\eta = \\
-\int_{\mathcal{R}^4} \delta(u) T_{abc}{}^d \left\{x\partial_v U^{abc}{}_d + u\partial_x U^{abc}{}_d - \Theta^+_{(u)}\left(\frac{u^2}{1+u}\right)\partial_x U^{abc}{}_d\right\}\omega_\eta \\
= \; -\int_{u=0} T_{abc}{}^d x\partial_v U^{abc}{}_d dvdxdy + \int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d \Theta^+_{(u)}\left(\frac{u^2}{1+u}\right)\partial_x U^{abc}{}_d \omega_\eta \\
= \; -\int_{u=0} \partial_v\left(xT_{abc}{}^d U^{abc}{}_d\right) dvdxdy + \int_{\mathcal{R}^4} \partial_x R_{abc}{}^d \Theta^+_{(u)}\left(\frac{u^2}{1+u}\right) U^{abc}{}_d \omega_\eta \\
= \; 0
\end{aligned} \tag{3.41}$$

donde se usó el hecho de que $U^{abc}{}_d$ es de soporte acotado.

Para el segundo término, encontramos

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d \left(\nabla_d K_4^j\right) U^{abc}{}_j \omega\eta &= -\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d \nabla_d \left(x\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_x - \Theta^+_{(u)}\left(\frac{u^2}{1+u}\right)\boldsymbol{\partial}_x\right)^j U^{abc}{}_j \omega\eta \\
&= -\int_{u=0} \left(T_{abc}{}^x U^{abc}{}_v\right) dxdydv
\end{aligned} \tag{3.42}$$

donde se usó el hecho que $R_{abc}{}^u = 0 \quad \forall a,b,c$. El siguiente término arroja el resultado

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d (\nabla_j K_4^a) U^{jbc}{}_d \omega\eta &= \int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d \left\{\nabla_j \left(x\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_x - \Theta^+_{(u)}\left(\frac{u^2}{1+u}\right)\boldsymbol{\partial}_x\right)^a\right\} U^{jbc}{}_d \omega\eta \\
&= \int_{u=0} (T_{xbc}{}^d U^{ubc}{}_d) dxdydv - \int_{\mathcal{R}^4} R_{xbc}{}^d U^{ubc}{}_d \Theta^+_{(u)} u\frac{(u+2)}{(1+u)^2}\omega_\eta
\end{aligned} \tag{3.43}$$

donde se usó el hecho que $R_{vbc}{}^d = 0 \quad \forall d,b,c$. Para el cuarto término encontramos el resultado

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^d (\nabla_j K_4^b) U^{ajc}{}_d \omega\eta &= \int_{u=0} T_{axc}{}^d U^{auc}{}_d dxdydv \\
&\quad - \int_{\mathcal{R}^4} R_{axc}{}^d U^{auc}{}_d \Theta^+_{(u)} u\frac{(u+2)}{(1+u)^2}\omega_\eta
\end{aligned} \tag{3.44}$$

donde se usó el hecho que $R_{avc}{}^{d} = 0 \quad \forall d, a, c$. El siguiente término,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^{d}(\nabla_j K_4^c) U^{abj}{}_{d}\omega\eta &= \int_{u=0} T_{abx}{}^{d} U^{abu}{}_{d} dxdydv \\ &- \int_{\mathcal{R}^4} R_{abx}{}^{d} U^{abu}{}_{d} \Theta^{+}_{(u)} u \frac{(u+2)}{(1+u)^2}\omega_\eta \end{aligned} \qquad (3.45)$$

donde se usó el hecho que $R_{abv}{}^{d} = 0 \quad \forall d, a, b$. El último término es cero dado que la divergencia de K_4 es cero, esto es $(\nabla_j K_4^j = 0)$. Uniendo los resultados anteriores, se tiene

$$\begin{aligned}\pounds_{K_4} R_{abc}{}^{d}[U^{abc}{}_{d}] &= \int_{u=0}(-T_{abc}{}^{x} U^{abc}{}_{v} + T_{xbc}{}^{d} U^{ubc}{}_{d} + T_{axc}{}^{d} U^{auc}{}_{d} + T_{abx}{}^{d} U^{abu}{}_{d}) dxdydv \\ &- \int_{\mathcal{R}^4}(R_{xbc}{}^{d} U^{ubc}{}_{d} + R_{axc}{}^{d} U^{auc}{}_{d} + R_{abx}{}^{d} U^{abu}{}_{d})\Theta^{+}_{(u)} u \frac{(u+2)}{(1+u)^2}\omega_\eta \end{aligned} \qquad (3.46)$$

donde los únicos términos diferentes de cero en la contracción de los índices son,

$$\begin{aligned}&\pounds_{K_4} R_{abc}{}^{d}[U^{abc}{}_{d}] = \\ &\int_{u=0}(U^{uxu}{}_{v} - U^{xuu}{}_{v} + U^{uuu}{}_{x} + U^{uux}{}_{v} - U^{uuu}{}_{x} - U^{uux}{}_{v} + U^{xuu}{}_{v} - U^{uxu}{}_{v}) dxdydv \\ &\quad - \int_{\mathcal{R}^4}(U^{uuu}{}_{x} + U^{uux}{}_{v} - U^{uuu}{}_{x} - U^{uux}{}_{v} + R_{abx}{}^{d} U^{abu}{}_{d})\Theta^{+}_{(u)} u \frac{(u+2)}{(1+u)^2}\omega_\eta \end{aligned} \qquad (3.47)$$

cancelando términos semejantes se encuentra,

$$\pounds_{K_4} R_{abc}{}^{d}[U^{abc}{}_{d}] = -\int_{\mathcal{R}^4} u\Theta^{+}_{(u)} \frac{(u+2)}{(1+u)^2} R_{abx}{}^{d} U^{abu}{}_{d}\omega_\eta \qquad (3.48)$$

Este resultado muestra, de manera explícita, que los términos que aparecen en la derivada de Lie de la curvatura de Riemann a lo largo del vector no suave K_4 y que están mal definidos como distribución no se cancelan entre sí. Por lo tanto no es posible, dentro del marco empleado, afirmar que dicho vector es una simetría del tensor de Riemann.

Calculemos para $K_5 = y\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_y + \Theta^{+}_{(u)}\left(\frac{u^2}{1-u}\right)\boldsymbol{\partial}_y$, la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones dada por (3.26), con un procedimiento análogo al anterior se encuentran de manera explícita los siguientes términos del miembro derecho, para el primer término,

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^{d} K_5^j \nabla_j U^{abc}{}_{d} \omega\eta &= -\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^{d} (y\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_y + \Theta^+_{(u)} \left(\frac{u^2}{1-u}\right) \boldsymbol{\partial}_y)^j \nabla_j U^{abc}{}_{d} \omega\eta \\
&= -\int_{u=0} \partial_v (y T^d_{abc} U^{abc}{}_{d}) dvdxdy \\
&\quad -\int_{\mathcal{R}^4} \partial_y \left(R_{abc}{}^{d} \Theta^+_{(u)} \left(\frac{u^2}{1-u}\right) U^{abc}{}_{d} \right) \omega_\eta \\
&= 0 \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

donde se usó el hecho de que $U^{abc}{}_{d}$ es de soporte acotado.

Para el siguiente término,

$$-\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^{d} (\nabla_d K_5^j) U^{abc}{}_{j} \omega\eta = -\int_{u=0} T_{abc}{}^{y} U^{abc}{}_{v} dxdydv \qquad (3.50)$$

donde se usó el hecho que $R_{abc}{}^{u} = 0 \quad \forall a, b, c$. Para el siguiente término,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^{d} (\nabla_j K_5^a) U^{jbc}{}_{d} \omega\eta &= \int_{u=0} T_{ybc}{}^{d} U^{ubc}{}_{d} dxdydv \\
&+ \int_{\mathcal{R}^4} R_{ybc}{}^{d} U^{ubc}{}_{d} \Theta^+_{(u)} u \frac{(u-2)}{(1-u)^2} \omega_\eta \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

donde se usó el hecho que $R_{vbc}{}^{d} = 0 \quad \forall d, b, c$. Para el siguiente término,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^{d} (\nabla_j K_5^b) U^{ajc}{}_{d} \omega\eta &= \int_{u=0} T_{ayc}{}^{d} U^{auc}{}_{d} dxdydv \\
&+ \int_{\mathcal{R}^4} R_{ayc}{}^{d} U^{auc}{}_{d} \Theta^+_{(u)} u \frac{(u-2)}{(1-u)^2} \omega_\eta \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

donde se usó el hecho que $R_{avc}{}^{d} = 0 \quad \forall d, a, c$. Para el siguiente término,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}^4} R_{abc}{}^{d} (\nabla_j K_5^c) U^{abj}{}_{d} \omega\eta &= \int_{u=0} T_{aby}{}^{d} U^{abu}{}_{d} dxdydv \\
&+ \int_{\mathcal{R}^4} R_{aby}{}^{d} U^{abu}{}_{d} \Theta^+_{(u)} u \frac{(u-2)}{(1-u)^2} \omega_\eta \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

donde se usó el hecho que $R_{abv}{}^{d} = 0 \quad \forall d, a, b$. Y el último resultado es cero dado que la divergencia de K_5 es cero, esto es $(\nabla_j K_5^j = 0)$. Uniendo los resultados anteriores, se tiene

$$\begin{aligned}
\pounds_{K_5} R_{abc}{}^{d}[U^{abc}{}_{d}] &= \int_{u=0} (-T_{abc}{}^{y} U^{abc}{}_{v} + T_{ybc}{}^{d} U^{ubc}{}_{d} + T_{ayc}{}^{d} U^{auc}{}_{d} + T_{aby}{}^{d} U^{abu}{}_{d}) dxdydv \\
&+ \int_{\mathcal{R}^4} \Theta^+_{(u)} u \frac{(u-2)}{(1-u)^2} (R_{ybc}{}^{d} U^{ubc}{}_{d} + R_{ayc}{}^{d} U^{auc}{}_{d} + R_{aby}{}^{d} U^{abu}{}_{d}) \omega_\eta \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

donde los únicos términos diferente de cero en la contracción de los índices son,

$$\pounds_{K_5} R_{abc}{}^{d}[U^{abc}{}_{d}] =$$

$$\int_{u=0} (U^{yuu}{}_{v} - U^{uyu}{}_{v} - U^{uuu}{}_{y} - U^{uuy}{}_{v} + U^{uuu}{}_{y} + U^{uuy}{}_{v} - U^{yuu}{}_{v} + U^{uyu}{}_{v}) dxdydv$$
$$+ \int_{\mathcal{R}^4} \Theta^{+}_{(u)} u \frac{(u-2)}{(1-u)^2} (-U^{uuu}{}_{y} - U^{uuy}{}_{v} + U^{uuu}{}_{y} + U^{uuy}{}_{v} + R_{aby}{}^{d} U^{abu}{}_{d}) \omega_\eta \quad (3.55)$$

cancelando términos semejantes se encuentra,

$$\pounds_{K_5} R_{abc}{}^{d}[U^{abc}{}_{d}] = \int_{\mathcal{R}^4} u \Theta^{+}_{(u)} \frac{(u-2)}{(1-u)^2} R_{aby}{}^{d} U^{abu}{}_{d} \omega_\eta \quad (3.56)$$

De lo anterior se desprende que los campos vectoriales de Killing (K_4, K_5) no son simetrías del tensor de curvatura distribucional, como se muestran en los resultados (3.48, 3.56), encontrándose un producto distribucional que no esta definido en la teoría de distribuciones. Por supuesto, de su expresión explícita se puede inferir que la definición de derivada de Lie que se adoptó en este trabajo no permite considerar campos vectoriales de Killing que no sean suaves, como se sigue del hecho de que la derivada de Lie de un tensor de prueba a lo largo de un vector no suave no es necesariamente un tensor de prueba. Sin embargo, los cálculos anteriores muestran claramente que no hay además ninguna cancelación de términos mal definidos como distribuciones que arroje un resultado que sea una distribución. En cualquier caso, dentro del marco empleado en este trabajo, no es posible demostrar que los campos vectoriales no suaves (3.15) y (3.16) son simetrías de la curvatura de Riemann (3.24).

Por otro lado las partes suaves de los campos vectoriales de Killing (3.15) y (3.16), esto es,

$$\hat{K}_4 = x\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_x \quad (3.57)$$

$$\hat{K}_5 = y\boldsymbol{\partial}_v + u\boldsymbol{\partial}_y \quad (3.58)$$

son ahora simetrías del tensor de curvatura distribucional (3.24), este resultado se puede observar directamente en los resultados (3.47, 3.55) dado que que la integral evaluada en $u = 0$ corresponde a las partes suaves dadas por $\hat{K}_4$ y $\hat{K}_5$ que resultan ser cero para ambos casos respectivamente. Por otro lado, los campos vectoriales (3.57 y 3.58) no son isometrías de la métrica ya que al calcular (3.33) para $\hat{K}_4$ y $\hat{K}_5$ respectivamente se encuentra,

$$\pounds_{\hat{K}_4} g_{ab}[U^{ab}] = \int_{\mathcal{R}^4} \Theta^+_{(u)} u(u+2)(U^{ux} + U^{xu})\omega_\eta \tag{3.59}$$

$$\pounds_{\hat{K}_5} g_{ab}[U^{ab}] = \int_{\mathcal{R}^4} \Theta^+_{(u)} u(u-2)(U^{uy} + U^{yu})\omega_\eta \tag{3.60}$$

y por lo tanto no son campos vectoriales de Killing. De aquí que éstos campos vectoriales son simetrías propias del tensor de Riemman distribucional.

Capítulo 4

Ondas gravitacionales sobre un universo magnético

Existen otros espaciotiempo tipo onda gravitacional cuyo tensor de curvatura asociado resulta tener partes singulares proporcionales a una distribución tipo delta de Dirac. En este capítulo consideraremos un espaciotiempo que representa una onda gravitacional que se propaga en un universo magnético [5][20]. Físicamente este espaciotiempo describe un impulso gravitacional localizado que posee una singularidad tipo delta que se propaga sobre un background magnético. En lo que sigue, luego de una revisión de la geometría distribucional del mismo realizaremos el estudio de sus simetrías en el sentido de las distribuciones.

4.1 Ondas sobre universo magnético

Consideremos un espaciotiempo $(\mathcal{R}^4, g)$, donde el tensor métrico es solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell y representa ondas viajeras cuyo fondo es el denominado universo magnético cilíndrico [20], que escrito en una base coordenada particular viene dado por

$$\begin{aligned} g_{ab} &= \eta_{ab} + 2\,(H-1)\,du_{(a}dv_{b)} + (H-1)\,d\rho_a d\rho_b + \left(H^{-1}-1\right)\rho^2 d\theta_a d\theta_b \\ &+ H^{-1} f(u) \ln\frac{B^2\rho^2}{4} du_a du_b \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $H = (1 + \frac{1}{4}B^2\rho^2)^2$, B es un campo magnético constante y $f(u)$ es alguna función suave, que puede ser libremente especificada y que interpretaremos como el perfil de la onda, tal que en la región donde $f = 0$ el tensor métrico es solo el del universo magnético. En (4.1), $u = (z-t)/\sqrt{2}$, $v = (z+t)/\sqrt{2}$ son coordenadas nulas y t, z, ρ, θ coordenadas tiempo y cilíndricas respectivamente.

El tensor de curvatura asociado a la geometría provista por (4.1) viene dado por el tensor de Ricci de índices mixtos [5],

$$\begin{aligned} \hat{R}^a{}_b &= -\frac{256B^2}{(4+B^2\rho^2)^4}\left(\partial_u^a du_b + \partial_v^a dv_b - \partial_\rho^a d\rho_b - \partial_\theta^a d\theta_b\right) \\ &- \frac{65536 f(u) B^2 \left(-4 - B^2\rho^2 + 2\ln\frac{B^2\rho^2}{4}B^2\rho^2 - 2\ln\frac{B^2\rho^2}{4}\right)}{(4+B^2\rho^2)^8}\partial_v^a du_b \end{aligned} \tag{4.2}$$

El cual denotaremos como $\hat{R}^a{}_b$ asociado a la parte suave del tensor de curvatura. Es claro que el tensor de energía impulso asociado a esta geometría es proporcional al Ricci dado que la traza de este es cero. El estudio de las geodésicas de este espaciotiempo [20], muestra la existencia de una singularidad en la región donde $f \neq 0$, de forma tal que sí f es de soporte compacto entonces el espaciotiempo es una onda viajera singular con una singularidad de un ancho finito que se propaga con la onda.

Las simetrías asociadas a esta geometría vienen descritas por los campos vectoriales de Killing

$$K_1 = \boldsymbol{\partial}_v \tag{4.3}$$

$$K_2 = x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x \tag{4.4}$$

correspondientes a traslaciones a lo largo de la coordenada nula y a rotaciones en el plano transverso a la dirección de propagación de la onda.

4.2 Ondas sobre universo magnético y distribuciones

Siguiendo [3] y [6], se puede demostrar que el tensor métrico (4.1) pertenece a la familia de métricas semi-regulares, con lo que se asegura que el tensor de curvatura tendrá sentido como distribución.

De (1.6), el tensor de Christoffel en este caso viene dado por [6]

$$
\begin{aligned}
C^c_{ab} &= \frac{1}{8}(4+B^2\rho^2)B^2\rho\partial^c_u(d\rho_a du_b + du_a d\rho_b) \\
&+ 128(4+B^2\rho^2)^{-4}f'(u)\ln\frac{B^2\rho^2}{4}\partial^c_v du_a du_b \\
&+ 128(4+B^2\rho^2)^{-5}f(u)\left(\frac{2}{\rho}(4+B^2\rho^2) - 8\ln\frac{B^2\rho^2}{4}B^2\rho\right)\partial^c_v(d\theta_a du_b + du_a d\theta_b) \\
&- 128(4+B^2\rho^2)^{-5}f(u)\left(\frac{2}{\rho}(4+B^2\rho^2) - 4\ln\frac{B^2\rho^2}{4}B^2\rho\right)\partial^c_v du_a du_b \\
&+ 2(4+B^2\rho^2)^{-1}B^2\rho\left(\partial^c_\rho(d\rho_a d\rho_b - du_a dv_b - dv_a du_b) - \partial^c_\rho(d\theta_a d\rho_b + d\rho_a d\theta_b)\right) \\
&+ 2(4+B^2\rho^2)^{-1}B^2\rho\partial^c_v(d\rho_a dv_b + dv_a d\rho b) \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

y de (1.5) se encuentra para el tensor de Ricci

$$
R^a{}_b = \left(g^{-1}\right)^{ac}\tilde{R}_{cb} + 2\nabla_{[c}\left(C^c{}_{d]b}(g^{-1})^{ad}\right) + 2C^c{}_{b[c}\nabla_{d]}(g^{-1})^{ad} + 2(g^{-1})^{ad}C^c{}_{m[c}C^m{}_{d]b}
$$

A continuación, usando el hecho de que $\tilde{R}_{cb} = 0$ y $2C^c{}_{b[c}\nabla_{d]}(g^{-1})^{ad} = 0$, se encuentra para el tensor de curvatura distribucional

$$
\begin{aligned}
R^a{}_b[U_a{}^b] &= -\int_{\mathcal{R}^4 - B_\epsilon}\left(C^c{}_{db}(g^{-1})^{ad}\nabla_c U_a{}^b - C^c{}_{cb}(g^{-1})^{ad}\nabla_d U_a{}^b\right)\omega_\eta \\
&+ \int_{\mathcal{R}^4} 2(g^{-1})^{ad}C^c{}_{m[c}C^m{}_{d]b}U_a{}^b\omega_\eta \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

donde $\omega_\eta = \rho du dv d\rho d\theta$ es el elemento de volumen asociado a η_{ab}, $U_a{}^b$ un campo tensorial de prueba sobre $\mathcal{R}^4$ y B_ϵ la esfera de radio ϵ alrededor del origen con $\epsilon \to 0$. Usando el Teorema de la divergencia, se encuentra

$$
\begin{aligned}
R^a{}_b[U_a{}^b] &= \int_{\Sigma_\epsilon}\left(C^c{}_{db}(g^{-1})^{ad}d\rho_c - C^c{}_{cb}(g^{-1})^{ad}d\rho_d\right)U_a{}^b\omega_\sigma \\
&+ \int_{\mathcal{R}^4 - B_\epsilon}\left(\nabla_c\left(C^c{}_{db}(g^{-1})^{ad}U_a{}^b\right) - \nabla_d\left(C^c{}_{cb}(g^{-1})^{ad}U_a{}^b\right)\right)\omega_\eta \\
&+ \int_{\mathcal{R}^4} 2(g^{-1})^{ad}C^c{}_{m[c}C^m{}_{d]b}U_a{}^b\omega_\eta \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

donde ω_σ es el elemento de volumen inducido sobre la superficie ρ constante y $-d\rho_c$ la normal externa a esta superficie. Para la primera integral del miembro derecho de

(4.7) se tiene,

$$\int_{\Sigma_\epsilon} \left(C^c{}_{db}(g^{-1})^{ad} d\rho_c - C^c{}_{cb}(g^{-1})^{ad} d\rho_d \right) U_a{}^b \omega_\sigma =$$
$$\int_{\Sigma_\epsilon} dudvd\theta \frac{4096 f(u)\epsilon \left(-4 - B^2\epsilon^2 + \ln \frac{B^2\epsilon^2}{4} B^2\epsilon^2\right)}{(4 + B^2\epsilon^2)^7 \epsilon} U_v{}^u(u, v, \epsilon\cos\theta, \epsilon\sin\theta) \quad (4.8)$$

y para $\epsilon \to 0$

$$\int_{\Sigma_\epsilon} \left(C^c{}_{db}(g^{-1})^{ad} d\rho_c - C^c{}_{cb}(g^{-1})^{ad} d\rho_d \right) U_a{}^b \omega_\sigma =$$
$$-2 \quad \pi \quad \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv f(u) \partial_v^a du_b U_a{}^b(u, v, 0, 0) \quad (4.9)$$

Por otro lado, los términos siguientes proporcionarán el tensor de Ricci "tradicional" que denotaremos por $\hat{R}^a{}_b$ y que viene dado por (4.2). Así el tensor de curvatura distribucional viene dado por

$$R^a{}_b = -2\pi f(u) \delta^{(2)}_{(0)} \partial_v^a du_b + \hat{R}^a{}_b \quad (4.10)$$

de donde se desprende que la singularidad encontrada en este espaciotiempo es una en la curvatura, sí $f(u)$ tiene soporte compacto, el espaciotiempo (R^4, g) con g dado por (4.1) se puede asociar a una onda viajera con una singularidad tipo δ que se propaga con la onda.

4.3 Simetrías de la onda gravitacional sobre universo magnético distribucional

A continuación calcularemos la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones del tensor de curvatura distribucional (4.10) a lo largo de los campos vectoriales de Killing (4.3,4.4), con la finalidad de determinar si estos son simetrías del tensor de curvatura distribucional.

Consideremos la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones para el tensor de curvatura distribucional (4.10)

$$\pounds_K R^a{}_b[U_a{}^b] = -R^a{}_b[\pounds_K U_a{}^b + (\nabla_c K^c) U_a{}^b] \quad (4.11)$$

con

$$\pounds_K U_a{}^b = K^c \nabla_c U_a{}^b - U_a{}^c \nabla_c K^b + U_c{}^b \nabla_a K^c \tag{4.12}$$

Para $K_1 = \boldsymbol{\partial}_v$, se tiene

$$\pounds_{K_1} R^a{}_b[U_a{}^b] = -\int_{\mathcal{R}^4} R^a{}_b \left\{ K_1^c \nabla_c U_a{}^b - U_a{}^c \nabla_c K_1^b + U_c{}^b \nabla_a K_1^c + (\nabla_c K_1^c) U_a{}^b \right\} \omega_\eta \tag{4.13}$$

Dado que K_1 es constante sobre toda la variedad sus derivadas y divergencia son nulas,

$$\begin{aligned} \pounds_{K_1} R^a{}_b[U_a{}^b] &= -\int_{\mathcal{R}^4} R^a{}_b K^c \nabla_c U_a{}^b \omega_\eta \\ &= 2\pi \int_{\mathcal{R}^4} f(u) \delta^{(2)}_{(0)} \partial_v^a du_b \boldsymbol{\partial}_v^c \nabla_c U_a{}^b + \pounds_{K_1} \hat{R}^a{}_b[U_a{}^b] \end{aligned} \tag{4.14}$$

y puesto que $\pounds_{K_1} \hat{R}^a{}_b[U_a{}^b] = 0$,

$$\begin{aligned} \pounds_{K_1} R^a{}_b[U_a{}^b] &= 2\pi \int_{\mathcal{R}^4} f(u) \delta^{(2)}_{(0)} \partial_v U_v{}^u \omega_\eta \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \quad \partial_v \left(f(u) U^u_{v\,(u,v,\vec{\sigma})} \right) = 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

de donde se desprende que K_1 es una simetría del tensor distribucional.

Calculemos ahora a lo largo de $K_2 = x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x$ la derivada de Lie en el sentido de las distribuciones del tensor distribucional (4.10). Se tiene

$$\pounds_{K_2} R^a{}_b[U_a{}^b] = -\int_{\mathcal{R}^4} R^a{}_b \left\{ K_2^c \nabla_c U_a{}^b - U_a{}^c \nabla_c K_2^b + U_c{}^b \nabla_a K_2^c + (\nabla_b K_2^b) U_a{}^b \right\} \omega_\eta \tag{4.16}$$

por simplicidad calcularemos cada término por separado, para el primer término del miembro derecho de (4.16) se tiene,

$$-\int_{\mathcal{R}^4} R^a{}_b K_2^c \nabla_c U_a{}^b \omega_\eta = 2\pi \int_{\mathcal{R}^4} f(u) \delta^{(2)}_{(0)} \partial_v^a du_b \left(x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x \right)^c \nabla_c U_a{}^b \omega_\eta + \pounds_{K_2} \hat{R}^a{}_b[U_a{}^b] \tag{4.17}$$

Dado que $\pounds_{K_2} \hat{R}^a{}_b[U_a{}^b] = 0$, se tiene entonces que

$$-\int_{\mathcal{R}^4} R^a{}_b K_2^c \nabla_c U_a{}^b \omega_\eta = 2\pi \int_{\mathcal{R}^4} f(u) \delta^{(2)}_{(0)} \left(x\partial_y U_v{}^u - y\partial_x U_v{}^u \right) \omega_\eta = 0 \tag{4.18}$$

Para el segundo término se encuentra,

$$\int_{\mathcal{R}^4} R^a{}_b U_a{}^c \nabla_c K_2^b \omega_\eta = -2\pi \int_{\mathcal{R}^4} f(u) \delta^{(2)}_{(0)} \partial_v^a du_b U_a^c \nabla_c (x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^b \omega_\eta = 0 \tag{4.19}$$

donde hemos usado $du_b K_2^b = 0$.

A continuación, para el tercer término, se encuentra

$$-\int_{\mathcal{R}^4} R^a{}_b U_c{}^b \nabla_a K_2^c \omega_\eta = 2\pi \int_{\mathcal{R}^4} f(u)\delta^{(2)}_{(0)} \partial_v^a du_b U_c^b \nabla_a (x\boldsymbol{\partial}_y - y\boldsymbol{\partial}_x)^c \omega_\eta = 0 \tag{4.20}$$

dado que $\nabla_v K_2 = 0$.

Por último, dado que la divergencia de K_2 es cero, el último término del miembro derecho de (4.16) es cero. Juntando estos resultados obtenemos

$$\pounds_{K_2} R^a{}_b [U_a{}^b] = 0 \tag{4.21}$$

y por lo tanto el campo vectorial de Killing K_2 dado en (4.4) es una simetría del tensor de curvatura de Ricci distribucional.

Conclusiones

Partiendo de la definición de derivada de Lie en el sentido de las distribuciones adoptada en [4] hemos estudiado de manera rigurosa las simetrías de los tensores de curvatura distribucionales asociados a algunos espaciotiempos singulares físicamente interesantes, siendo estos, el agujero negro BTZ estático [7], la onda gravitacional PP impulsiva [5] y el espaciotiempo asociado a una onda gravitacional sobre un background magnético [6].

Hemos demostrado que los campos vectoriales de Killing asociados a los espaciotiempos agujero negro BTZ estático y la onda gravitacional sobre el universo magnético son simetrías de sus tensores de curvatura distribucionales respectivamente. Para el caso de la onda PP impulsiva encontramos que los campos vectoriales de Killing suaves, asociados a las simetrías traslacionales, son simetrías del tensor de curvatura distribucional. Por otro lado, para este espaciotiempo, los campos vectoriales de Killing no suaves, propuestos en [17], y que denotamos como K_4 y K_5 ((3.15) y (3.16)), aunque probamos son en efecto vectores de Killing, no se puede probar dentro del marco de la teoría de distribuciones que sean simetrías del tensor de curvatura distribucional, encontrándose resultados que involucran productos de distribuciones mal definidos. Por supuesto, de la expresión explícita de derivada de Lie adoptada en este trabajo es claro que considerar campos vectoriales de Killing que no sean suaves, puede dar lugar a expresiones mal definidas como se sigue del hecho de la derivada de Lie de un tensor de prueba a lo largo de un vector no suave no es necesariamente un tensor de prueba. Sin embargo, cabe resaltar, en las expresiones que prueban que dichos campos vectoriales no suaves son vectores de Killing no se encontraron productos mal definidos. Lo anterior posiblemente sea una indicación de que estamos en el borde de la aplicación de la teoría de distribuciones en una teoría no-lineal como lo es la gravitación

Einsteniana. Por otro lado , del análisis de las simetrías de la curvatura de Riemann distribucional del espaciotiempo onda PP, se desprende que que los campos vectoriales suaves $\hat{K}_4, \hat{K}_5$ ((3.57) y (3.58)), son simetrías de dicho tensor de curvatura. Estas simetrías, al no ser isometrías de la métrica, no son campos vectoriales de Killing, lo que significa que son simetrías propias del tensor de Riemann, afirmación que es claro imposible de sostener fuera del marco distribucional.

Bibliografía

[1] N. Pantoja. Geometría Distribucional en Relatividad General. *Tésis Doctoral, Universidad de Los Andes, Merida, Venezuela.*, 2002.

[2] R. Geroch and J. Traschen. Strings and Other Distributional Sources in General Relativity. *Phys.Rev.*, D36:1017, 1987.

[3] D. Garfinkle. Metrics with distributional curvature. *Class.Quant.Grav.*, 16:4101–4109, 1999.

[4] N. Pantoja and A. Sanoja. Symmetries of distributional domain wall geometries. *J.Math.Phys.*, 46:033509, 2005.

[5] F. Ramirez. Ondas Gravitacionales y Curvatura Distribucional. *Tésis de Grado para obtener el titulo de Licenciado en Fisica, Universidad de Los Andes, Merida, Venezuela.*, 2003.

[6] F. Pantoja, N. y Ramirez. Ondas PP y Curvatura Distribucional. *Revista Mexicana de Fisica*, 2006.

[7] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli. Geometry of the (2+1) black hole. *Phys.Rev.*, D48(6):1506–1525, 1993.

[8] Yvonne Choquet-Bruhat, Cécile DeWitt-Morette, and Margaret Dillard Bleick. *Analysis, manifolds, and physics.* Gulf Professional Publishing, 1982.

[9] B.A. Dubrovin, R.G. Burns, A.T. Fomenko, and S.P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications: Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1992.

[10] R. Wald. *General relativity.* University of Chicago press, 1984.

[11] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli. The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys.Rev.Lett.*, 69:1849–1851, 1992.

[12] S. Carlip. The (2+1)-Dimensional black hole. *Class.Quant.Grav.*, 12:2853–2880, 1995.

[13] N. Pantoja, H. Rago, and R. Rodriguez. Curvature singularity of the distributional BTZ black hole geometry. *J.Math.Phys.*, 45:1994–2002, 2004.

[14] H. Verlinde, E.and Verlinde. High-energy scattering in quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 10(S):S175, 1993.

[15] H. Brinkmann. On Riemann spaces conformal to Euclidean spaces. *Proc.Nat.Acad.Sci.,9,1*, 1923.

[16] R. Penrose. *In, General relativity; papers in honour of J. L. Synge edited by L. O'Raifeartaigh.* Clarendon Press, 1972.

[17] P. Aichelburg and H. Balasin. Generalized symmetries of impulsive gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, 14:A31–A42, 1997.

[18] Ray d'Inverno. *Introducing Einstein's Relatvity.* Oxford University Press, USA, 1992.

[19] M. Blau. *Lecture notes on general relativity.* Albert Einstein Center for Fundamental Physics, 2011.

[20] D. Garfinkle and M. Melvin. Traveling waves on a magnetic universe. *Phys. Rev.*, D45:1188–1191, 1992.