



Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Centro de Física Fundamental

**Ecuaciones Efectivas del Modelo Cosmológico
Cuántico FRW con Radiación**

Br. Jesús A. Rodríguez S.
Tutor: Dr. Aureliano Skirzewski

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar
al grado académico de Licenciado en Física

Julio de 2014

www.bdigital.ula.ve

*Para mi madre,
con todo el amor del mundo.*

www.bdigital.ula.ve

Agradecimientos

Se me hace inevitable dirigir las primeras palabras de agradecimiento a otras personas que no sean mis padres. A ellos, que sembraron en mi valores indispensables como el respeto y el trabajo duro junto a una cantidad infinita de amor, les debo mi agradecimiento eterno y estoy seguro que siempre cuidarán de mí, desde el lugar en el que estén.

A Edimar, mi compañera de ruta, por ser mi apoyo total en cada uno de los momentos que hemos pasado juntos.

A Toto, Nayi y Zhandrita, porque más que hermanos son el vivo ejemplo de amistad incondicional y además, por los 7 motivos de felicidad que han dado a la familia.

A la familia González Rivas, por abrirme las puertas de su hogar y considerarme uno más de ellos.

Al profesor Aureliano Skirzewski, un gran amigo con quien comparto el gusto por la música y la física. Sin duda su amistad junto a una impecable dirección académica, hicieron de la realización de este trabajo una experiencia de crecimiento personal invaluable para mí.

A la Universidad de los Andes y muy particularmente al Centro de Física Fundamental, por brindar formación de calidad a cargo de personas excepcionales.

En definitiva, a toda la gente que estuvo alrededor desde el comienzo. Algunos siguen hasta hoy... Gracias totales!!!

Resumen

Empleando métodos provistos por la formulación geométrica de la mecánica cuántica, se calcularon las ecuaciones efectivas a primer orden en \hbar del modelo cosmológico cuántico Friedmann-Robertson-Walker plano con radiación, formulado en términos de las Variables de Ashtekar. Las ecuaciones efectivas calculadas presentan términos de corrección a las ecuaciones clásicas producto de la cuantización del modelo. La consideración de dichos términos de corrección permite eliminar la singularidad inicial del modelo cosmológico clásico (Big Bang), dando lugar a un rebote cuántico en el origen del universo.

www.bdigital.ula.ve

Índice general

Resumen	4
Introducción	7
1. Teorías Efectivas	10
1.1. Teorías Efectivas	10
1.2. Mecánica Cuántica Geométrica	11
1.2.1. Relación entre Mecánica Clásica y Mecánica Cuántica .	12
1.2.2. Variables Clásicas y Cuánticas	14
1.2.3. Evolución de las Variables	16
1.3. Ecuaciones Efectivas de Modelos Mecánico-Cuánticos	18
1.3.1. Correcciones Cuánticas	20
1.3.2. Dinámica Efectiva	22
1.3.3. Ejemplo: El Oscilador Anarmónico	23
2. Relatividad General	30
2.1. La Acción de Einstein-Hilbert	30
2.2. El Formalismo ADM	31
2.2.1. El Espacio-Tiempo en el Formalismo ADM	31
2.2.2. Formulación Hamiltoniana	32
2.2.3. Cuantización del Formalismo ADM	34
2.3. La Acción de Palatini y la Acción de Holst	35
2.3.1. Tétradas y Conexiones	35
2.3.2. La Acción de Palatini	37
2.3.3. La Acción de Holst	37
2.4. Formulación de Ashtekar	38
2.4.1. Gravedad Cuántica en Variables de Ashtekar	40
3. Cosmología	42
3.1. El Principio Cosmológico y los Modelos de Friedmann-Robertson-Walker	42

3.2.	Variables de Ashtekar en Cosmología	44
3.3.	El Modelo FRW Plano con Radiación	44
3.3.1.	Eras del Universo	45
3.3.2.	El Modelo FRW Plano con Radiación	46
3.3.3.	El Modelo en Variables de Ashtekar	46
4.	Ecuaciones Efectivas del Modelo Cosmológico Cuántico FRW Plano con Radiación	50
4.1.	El Problema del Tiempo	50
4.1.1.	Tiempo Interno en el Modelo FRW Plano con Radiación	51
4.1.2.	Relación entre el Tiempo Interno y el Tiempo Coordinado	52
4.1.3.	Solución Clásica en función del Tiempo Interno	53
4.2.	Ecuaciones Efectivas del Modelo Cosmológico Cuántico FRW Plano con Radiación	55
4.2.1.	Condiciones: La Identidad de Jacobi y el Principio de Incertidumbre	58
4.2.2.	Ecuaciones Efectivas	59
4.2.3.	Correcciones al Vínculo. La Acción Efectiva	62
	Discusión y Conclusiones	64
	Bibliografía	66

Introducción

Los modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) proporcionan una descripción exitosa de la evolución del universo a gran escala, partiendo de la teoría general de la relatividad. Sin embargo, la cosmología FRW presenta graves problemas técnicos y conceptuales al considerar un universo cada vez más joven y pequeño, conduciendo a singularidades no deseadas en la explicación del origen del universo.

De cualquier forma, a pequeñas escalas es de esperar que los efectos cuánticos de la gravitación cobren mayor importancia, con lo cual la descripción provista por los modelos FRW debe ser modificada.

Los modelos FRW establecen que, a lo largo de la evolución del universo, se han sucedido diferentes etapas (eras de dominio) caracterizadas por el contenido material predominante en el universo, además de presentar una dinámica particular en cada una de ellas.

La primera de dichas etapas es la denominada *era de dominio de la radiación*, durante la cual la densidad de energía de la radiación era superior a la densidad de materia en el universo. La era de dominio de la radiación está asociada a la descripción del universo temprano, por lo cual resulta interesante considerar los efectos cuánticos que puedan surgir en dicha etapa como una primera mirada a la acción de estos efectos en los primeros instantes de la evolución del universo.

En este trabajo de investigación se estudian las modificaciones que surgen en el modelo cosmológico FRW para un universo plano durante la era de dominio de la radiación al considerar su cuantización. Dichas modificaciones se obtendrán a través de las *ecuaciones efectivas* del modelo.

En la descripción del modelo se emplearán aspectos generales de la Formulaci3n Can3nica de la Relatividad General propuesta por Ashtekar [1] en

1986. En esta formulación, Ashtekar introduce un nuevo par de variables canónicas en términos de las cuales reformula la Relatividad General como una teoría Hamiltoniana. Esta formulación ofrece ventajas importantes en la búsqueda de una teoría cuántica para la gravedad puesto que es invariante bajo difeomorfismos e independiente de la métrica de fondo de la variedad.

En general, las ecuaciones efectivas de un sistema son las ecuaciones de movimiento correspondientes a una teoría efectiva, *i.e.* una teoría que considera ciertas características del sistema general y no su totalidad, ofreciendo de esta forma una descripción simplificada del sistema. Desde el enfoque considerado en este trabajo, las ecuaciones efectivas [2] son ecuaciones de movimiento de tipo clásico (Hamiltonianas) para los grados de libertad del sistema cuántico. Esta definición emerge naturalmente haciendo uso de la formulación geométrica de la mecánica cuántica [2][3].

Entonces, el proceso para calcular las ecuaciones efectivas del modelo cosmológico cuántico FRW plano con radiación consistirá en estudiar la dinámica de los valores medios de los operadores asociados a las variables de Ashtekar en cosmología, así como sus fluctuaciones. Esto proporcionará un conjunto de ecuaciones de movimiento que permiten analizar cómo varía el comportamiento clásico del modelo producto de la interacción cuántica.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se introduce el concepto de teorías efectivas. Se presenta la formulación geométrica de la mecánica cuántica y basados en esta, se llega a las ecuaciones efectivas de modelos mecánico-cuánticos.

El capítulo 2 abarca aspectos relacionados con la Relatividad General. En este capítulo se hace especial énfasis en las formulaciones canónicas de la Relatividad General (formalismo ADM y formulación de Ashtekar) como punto de partida para una teoría cuántica de la gravedad y se dan las razones para utilizar la formulación en variables de Ashtekar por sobre formulaciones en variables métricas.

En el tercer capítulo se tratan nociones básicas de cosmología clásica, se presenta la forma que toman las variables de Ashtekar al considerar las simetrías de los modelos FRW y se introduce el modelo cosmológico FRW plano con radiación a nivel clásico tanto en variables métricas como en variables de Ashtekar.

En el capítulo 4 se procede a buscar soluciones del modelo cosmológico

cuántico. Se toman en cuenta para la solución del modelo aspectos importantes que surgen en la cuantización de modelos cosmológicos, como por ejemplo el problema del tiempo. Finalmente, se calculan las ecuaciones efectivas siguiendo los aspectos presentados en los capítulos precedentes y se hace un análisis de los resultados obtenidos.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 1

Teorías Efectivas

En este capítulo se introduce el concepto de teorías efectivas y se desarrolla el método utilizado en este trabajo para obtener ecuaciones efectivas, basado en la formulación geométrica de la mecánica cuántica.

1.1. Teorías Efectivas

La concepción tradicional de la mecánica cuántica [4] presenta el concepto de estado de un sistema sustituyendo la definición clásica de trayectoria. La evolución temporal de un estado cuántico queda determinada a partir de la ecuación de Schrödinger

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = \hat{H} \Psi(t) \quad (1.1)$$

Determinando, a través de la aplicación de (1.1) el estado cuántico (y por ende, la función de onda asociada a dicho estado), se obtiene entonces toda la información posible respecto al sistema en cuestión, expresada en cantidades como el valor de expectación de los operadores fundamentales, dispersiones y potencias superiores de estas, funciones de correlación cuántica, entre otras [5].

Sin embargo, en muchas situaciones [6][7], la estructura y las propiedades cuánticas del sistema generan complicaciones de carácter técnico y/o conceptual en su tratamiento, dificultando en gran medida la determinación del estado del sistema mediante la aplicación de (1.1).

Producto de esta situación surge el concepto de *Teorías Efectivas*. En una teoría efectiva, se hacen consideraciones de diversa índole a través de

las cuales se busca simplificar el tratamiento matemático de la teoría y la interpretación física de los resultados obtenidos. Como un ejemplo se puede mencionar el estudio del movimiento de los cuerpos rígidos, en el cual no se estudia el movimiento individual de cada partícula sino que se consideran las cantidades cinemáticas asociadas al centro de masas del sistema para describir el movimiento del sistema total.

En sistemas cuánticos tales consideraciones aparecen por medio de aproximaciones (semiclásica, perturbativa, entre otras) entre otras herramientas de cálculo.

1.2. Mecánica Cuántica Geométrica

El estado cuántico de un sistema se puede describir asignando grados de libertad a las infinitas cantidades asociadas a éste (valores de expectación, etc.) [6] en sustitución de la función de onda. Como se verá posteriormente, es posible derivar ecuaciones de movimiento para estos infinitos grados de libertad a partir del operador Hamiltoniano, evitando recurrir a la ecuación de Schrödinger, aunque en su mayoría estas son ecuaciones acopladas que presentan suma dificultad al intentar resolverlas.

De cualquier forma, en ocasiones, el sistema cuántico presenta un comportamiento cercano al clásico, lo cual hace deseable obtener ecuaciones de tipo clásico que logren describir propiedades cuánticas del sistema mediante la interacción de un número finito de grados de libertad [5].

Las ecuaciones efectivas [6][7] permiten reducir las infinitas ecuaciones derivadas a partir del operador Hamiltoniano a sistemas de ecuaciones de movimiento de tipo clásico para un número finito de grados de libertad, las cuales presentan términos de corrección respecto a las ecuaciones clásicas del sistema debido a la interacción con grados de libertad cuánticos, es decir, correlaciones cuánticas entre los grados de libertad.

A continuación se presentarán aspectos básicos para la obtención de ecuaciones efectivas partiendo de la formulación geométrica de la mecánica cuántica. Una introducción sencilla a dicha formulación puede conseguirse en [2] mientras que para un estudio a profundidad se recomienda dirigirse a [3].

1.2.1. Relación entre Mecánica Clásica y Mecánica Cuántica

La mecánica Hamiltoniana desde el punto de vista de la geometría diferencial [8], está caracterizada por una variedad denominada *espacio de fase*. El espacio de fase de la mecánica clásica está equipado con una 2-forma cerrada, no degenerada, denotada como $\Omega(., .)$ y conocida como *estructura simpléctica*.

Se definen los *campos vectoriales simplécticos* X_F asociados a funciones F del espacio de fase a través de la relación $dF(\eta) = \Omega(X_F, \eta)$ donde η es un campo vectorial arbitrario. Los campos vectoriales simplécticos representan las simetrías de $\Omega(., .)$, mejor conocidas como transformaciones canónicas. En términos de las coordenadas del espacio de fase, los campos vectoriales simplécticos se escriben de la forma

$$X_F = \epsilon^{ij}(\partial_j F)\partial_i$$

Se introduce la relación de identidad $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$. A continuación se define el *corchete de Poisson* entre dos funciones del espacio de fase como la acción de la estructura simpléctica sobre los vectores simplécticos asociados a dichas funciones, esto es:

$$\begin{aligned}\Omega(X_F, X_K) &= dF(X_G) \\ &= \epsilon^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial K}{\partial x^j} dx^l(\partial_i) \\ &= \epsilon^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial K}{\partial x^j} \\ &= \{F, K\}\end{aligned}$$

En definitiva se obtiene:

$$\Omega(X_F, X_K) = \{F, K\} \quad (1.2)$$

Desde este punto de vista, queda claro que la evolución temporal de un sistema está determinada por la acción de Ω sobre el campo vectorial X_H asociado al Hamiltoniano.

Por otra parte, la mecánica cuántica está formulada bajo un marco matemático que difiere notablemente de la descripción clásica. Mientras que en la mecánica clásica, el estado del sistema está caracterizado por puntos en el espacio de fase, en la mecánica cuántica se caracteriza por vectores del

espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Sin embargo, el verdadero espacio de estados de la mecánica cuántica es aquel en el cual dos estados del espacio de Hilbert relacionados por $\psi = c\phi$ donde $c \in \mathbb{C}$ corresponden al mismo punto. Este es el denominado *espacio proyectivo de Hilbert* \mathcal{P} , en el cual los estados son representados por puntos y no por vectores.

El producto interno entre dos vectores en el espacio proyectivo de Hilbert está dado por

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \frac{1}{2\hbar} G(\eta_1, \eta_2) + \frac{i}{2\hbar} \Omega(\eta_1, \eta_2) \quad (1.3)$$

donde G se conoce como la estructura métrica, asociada a la parte simétrica del producto interno, y Ω es la estructura simpléctica.

Ahora, definamos las funciones $F = \langle \Psi, \hat{F}\Psi \rangle$ en \mathcal{P} asociadas a operadores en \mathcal{H} . Se definen entonces los campos vectoriales simplécticos asociados a las funciones F en el punto Ψ como

$$X_F(\Psi) = \frac{1}{i\hbar} \hat{F}\Psi \quad (1.4)$$

Utilizando esta definición y considerando el campo vectorial $X_H = d/dt$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}\Psi = \frac{1}{i\hbar} \hat{H}\Psi$$

la ecuación de Schrödinger.

La acción de la estructura simpléctica sobre los campos vectoriales X_F del espacio de fase cuántico proporciona la relación

$$\Omega(X_F, X_K) = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{F}, \hat{K}] \rangle \quad (1.5)$$

Como se puede observar, gracias a que el espacio proyectivo de Hilbert está dotado de una estructura simpléctica similar a la del espacio de fase clásico, se puede determinar la evolución de los valores medios de operadores definidos en \mathcal{H} a través de un corchete de Poisson definido como

$$\{F, K\} = \Omega(X_F, X_K) = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{F}, \hat{K}] \rangle \quad (1.6)$$

La cual nos proporciona una alternativa para obtener las soluciones asociadas a modelos mecánico-cuánticos sin recurrir a la ecuación de Schrödinger [3].

1.2.2. Variables Clásicas y Cuánticas

Como se mencionó previamente, se buscarán términos de corrección a teorías clásicas. Para tal fin, se deben definir variables que describan la parte clásica de la teoría, así como variables para los términos cuánticos.

Los valores de expectación asociados a los operadores fundamentales en el espacio cuántico serán las variables clásicas de la descripción

$$x^i = \langle \hat{x}^i \rangle$$

Donde las cantidades x^i pueden tomar cualquier valor q^i o p^i y satisfacen la relación

$$\{x^i, x^j\} = \epsilon^{ij} \quad (1.7)$$

Introducimos ahora los *Momentos Centrales* [2]. Estas cantidades están asociadas a las fluctuaciones cuánticas de los operadores \hat{x}^i y se definen como

$$\Delta x^{i_1 \dots i_n} := G^{i_1 \dots i_n} = \langle (\hat{x}^{i_1} - x^{i_1}) \dots (\hat{x}^{i_n} - x^{i_n}) \rangle \quad (1.8)$$

Alternativamente se tiene

$$G^{i_1 \dots i_n} := \sum_{k=0}^n (-)^k \binom{n}{k} x^{i_1} \dots x^{i_k} H^{i_{k+1} \dots i_n} \quad (1.9)$$

donde se han introducido los *momentos de Hamburgo*, definidos [2] como el valor medio del producto totalmente simétrico de operadores fundamentales x^i . Esto es:

$$H^{i_1 \dots i_n} := \langle \hat{x}^{i_1} \dots \hat{x}^{i_n} \rangle \quad (1.10)$$

Los momentos centrales cumplirán el papel de variables cuánticas de la descripción y a través de ellos se representarán las correcciones cuánticas de los modelos clásicos planteados.

El Corchete de Poisson

Se puede calcular el corchete de Poisson entre las variables clásicas y cuánticas utilizando las relaciones (1.8), (1.9) y (1.10), con lo cual, se tiene que dicho corchete de Poisson está dado por

$$\begin{aligned}
 \{x^i, G^{i_1 \dots i_n}\} &= \sum_{k=0}^n (-)^k \binom{n}{k} [\{x^j, x^{(i_1 \dots i_k)}\} H^{i_{k+1} \dots i_n}] \\
 &\quad + x^{(i_1 \dots i_k)} \{x^j, H^{i_{k+1} \dots i_n}\}] \\
 &= \sum_{k=0}^n (-)^k \binom{n}{k} [k e^{j(i_n x^{i_1} \dots x^{i_{k-1}})} H^{i_k \dots i_{n-1}}] \\
 &\quad + (n-k) e^{j(i_n x^{i_1} \dots x^{i_k})} H^{i_{k+1} \dots i_{n-1}}] \\
 &= \sum_{l=0}^{n-1} (-)^{l+1} \binom{n}{l} (n-l) e^{j(i_n x^{i_1} \dots x^{i_l})} \langle \hat{x}^{i_{l+1}} \dots \hat{x}^{i_{n-1}} \rangle \\
 &\quad + \sum_{k=0}^n (-)^k \binom{n}{k} (n-k) e^{j(i_n x^{i_1} \dots x^{i_k})} \langle \hat{x}^{i_{k+1}} \dots \hat{x}^{i_{n-1}} \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

El corchete de Poisson entre las variables cuánticas $G^{i_1 \dots i_n}$ y G^{kl} se obtiene utilizando las definiciones empleadas en el cálculo anterior, además de la misma relación (1.11). El resultado obtenido es

$$\{G^{i_1 \dots i_n}, G^{kl}\} = \sum_{r=1}^n (\epsilon^{i_r k} G^{i_1 \dots i_{r-1} l i_{r+1} \dots i_n} + \epsilon^{i_r l} G^{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_n}) \tag{1.12}$$

En particular para el caso $n = 2$ (donde $i_1 = i$ e $i_2 = j$) se tiene

$$\{G^{ij}, G^{kl}\} = \epsilon^{ik} G^{jl} + \epsilon^{il} G^{jk} + \epsilon^{jl} G^{ik} + \epsilon^{jk} G^{il} \tag{1.13}$$

Se introduce la notación $G^{a,n}$ para las variables cuánticas, donde $a = \#p$ y $n = \#p + \#q$. En [2] se presenta la relación general para el corchete de Poisson entre variables cuánticas con un grado de libertad, la cual tiene la forma

$$\begin{aligned} \{G^{a,n}, G^{b,m}\} &= \sum_{r,s} \binom{a}{r} \binom{n}{s} \binom{b}{s} \binom{m}{r} r! s! \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{r+s-1} \\ &\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}(r-s)\right) G^{a+b-r-s, n+m-r-s} \\ &\quad - amG^{a-1, n} G^{b, m-1} + nbG^{a, n-1} G^{b-1, m} \end{aligned}$$

con $0 \leq r \leq \min(a, m)$ y $0 \leq s \leq \min(b, n)$.

El Principio de Incertidumbre

Las variables cuánticas están sujetas a condiciones (producto de su naturaleza cuántica) que establecen límites en los valores que pueden tener dichas variables para ser cantidades asociadas a estados físicos. Estos límites son establecidos por las relaciones de incertidumbre [2]

$$(\Delta q^i)^2 (\Delta p^i)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} + (\langle \hat{q}^i \hat{p}^i + \hat{p}^i \hat{q}^i \rangle / 2 - q^i p^i)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

que con las definiciones proporcionadas para las variables clásicas y las variables cuánticas, se puede reescribir como

$$G^{q^i q^i} G^{p^i p^i} - (G^{q^i p^i})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (1.14)$$

1.2.3. Evolución de las Variables

Como se puede observar en la ecuación de Schrödinger, la evolución temporal de un sistema cuántico es generada por el operador Hamiltoniano \hat{H} . Ahora, en la formulación geométrica de la mecánica cuántica se define el *Hamiltoniano cuántico* H_Q como el valor medio del operador Hamiltoniano

$$H_Q := \langle \hat{H} \rangle \quad (1.15)$$

En términos de las variables del sistema, el Hamiltoniano Cuántico es la expansión en serie de Taylor del valor medio del operador Hamiltoniano, considerando la definición de las variables cuánticas dada en la ecuación (1.8) se tiene entonces

$$H_Q = \sum_n \frac{1}{n!} H_{,i_1 \dots i_n} G^{i_1 \dots i_n} \quad (1.16)$$

donde H es el Hamiltoniano del modelo clásico. A continuación, considérense los operadores \hat{A} y \hat{B} del espacio de Hilbert. Asociados a ellos están los valores de expectación $A = \langle \hat{A} \rangle$ y $B = \langle \hat{B} \rangle$ en determinado estado Ψ . La evolución temporal de A está dada por [3]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle \quad (1.17)$$

en donde asumimos que A no depende explícitamente del tiempo. Ahora, las operaciones de conmutación entre operadores del espacio cuántico así como entre sus valores medios en el espacio de fase clásico se relacionan producto de la estructura simpléctica con la cual están dotados ambos espacios [2]. Esta característica se puede expresar mediante la relación

$$\{A, B\} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \quad (1.18)$$

Considerando las relaciones (1.17) y (1.18) se observa que la evolución temporal del valor de expectación de un operador \hat{A} es de la forma

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H_Q\} \quad (1.19)$$

Estas son ecuaciones de movimiento Hamiltonianas, generadas por el Hamiltoniano Cuántico H_Q . Aplicadas a las variables del modelo [2], se tiene

$$\dot{x}^i = \{x^i, H_Q\} \quad (1.20)$$

$$\dot{G}^{i_1 \dots i_n} = \{G^{i_1 \dots i_n}, H_Q\} \quad (1.21)$$

Como se puede observar, el Hamiltoniano Cuántico es el generador de la evolución temporal de las variables del modelo, vía ecuaciones de Hamilton. Estas ecuaciones (1.20 y 1.21) son equivalentes a la ecuación de Schrödinger generada por el operador \hat{H} .

En definitiva, se muestra que la descripción geométrica de la mecánica cuántica es, en efecto, una descripción alternativa de la dinámica cuántica que se apoya en la estructura matemática de la mecánica clásica y en la cual, los factores cuánticos se pueden interpretar como factores de corrección a la teoría clásica.

De cualquier modo, aunque la forma en la que se describe el sistema cuántico es diferente, la situación es básicamente la misma. En la descripción analítica de la mecánica cuántica existen infinitos grados de libertad

asociados a la función de onda que dificultan la descripción del sistema. Por otra parte, en el marco geométrico, surgen infinitas ecuaciones de movimiento para las infinitas variables (valores de expectación de los operadores fundamentales, dispersiones y sus potencias de orden superior) utilizadas en la descripción del sistema.

Sin embargo, la formulación geométrica permite analizar el límite clásico de una teoría cuántica de una forma directa, a través de ecuaciones efectivas para un número finito de grados de libertad. Esto se hace a través de lo que se denomina *aproximación semiclásica* la cual es una expansión en serie de potencias de \hbar , en la cual la reducción de una cantidad infinita a una cantidad finita de grados de libertad se lleva a cabo tomando en cuenta los factores de la serie de potencias a determinado orden en \hbar .

La Identidad de Jacobi

Con anterioridad se mostró que las variables cuánticas estaban sujetas a relaciones de incertidumbre. De igual forma, existe otra condición que deben cumplir las variables del sistema, a saber, la *identidad de Jacobi*. Sean f , g y h funciones de un espacio simpléctico, estas satisfacen la identidad de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

De esta forma, tanto las variables clásicas como las cuánticas (a través del Hamiltoniano cuántico) de la descripción deben satisfacer la identidad de Jacobi. Se tiene entonces

$$\{x^i, \{x^j, H_Q\}\} + \{x^j, \{H_Q, x^i\}\} + \{H_Q, \{x^i, x^j\}\} = 0$$

Utilizando la ecuación (1.20) y la antisimetría del corchete de Poisson, se tiene que la condición que deben satisfacer las variables de la descripción producto de la identidad de Jacobi viene dada por

$$\{x^i, \dot{x}^j\} - \{x^j, \dot{x}^i\} + \{H_Q, \{x^i, x^j\}\} = 0 \quad (1.22)$$

1.3. Ecuaciones Efectivas de Modelos Mecánico-Cuánticos

Tal como se mencionó anteriormente, se pueden obtener las ecuaciones efectivas de un sistema cuántico considerando primero el límite semiclásico

de esta a cierto orden en \hbar .

De la relación de incertidumbre se puede observar que las variables $G^{i_1 \dots i_n}$ son cantidades proporcionales a $\hbar^{\frac{n}{2}}$. Considérese entonces la definición (1.16) para el Hamiltoniano cuántico

$$H_Q = \sum_n \frac{1}{n!} H_{,i_1 \dots i_n} G^{i_1 \dots i_n}$$

Queda claro que el Hamiltoniano cuántico definido por esta vía es una expansión en serie de potencias de $\hbar^{\frac{n}{2}}$. La reducción de grados de libertad (de una cantidad infinita a un número finito de estos) se llevará a cabo cortando la serie para determinado valor de n .

A continuación se presenta el método para la obtención de ecuaciones efectivas a primer orden en \hbar ($n = 2$). En este caso, los términos de corrección cuántica son de la forma G^{ij} . El Hamiltoniano cuántico se reduce a

$$H_Q = H + \frac{1}{2} H_{,ij} G^{ij} \quad (1.23)$$

Como se puede observar en la ecuación (1.23), los términos de corrección a este orden en la expansión son de la forma G^{ij} , donde los índices (i, j) toman como valores las coordenadas (q, p), y son proporcionales a \hbar . Esta proporcionalidad se puede mostrar a través de la relación de incertidumbre.

La ecuación (1.14) proporciona la relación de incertidumbre a nivel general. Para la aproximación semiclásica a primer orden en \hbar y considerando los valores coordenados, se tiene

$$G^{qq} G^{pp} - (G^{qp})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (1.24)$$

Tal como se mencionó con anterioridad, el Hamiltoniano cuántico es el generador de la evolución temporal del sistema, lo cual se plasma en las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas (1.20) y (1.21) para las variables clásicas y cuánticas de la teoría. Al considerar la aproximación semiclásica a primer orden en \hbar , estas ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\} + \frac{1}{2} \{x^i, H_{,jk}\} G^{jk} \quad (1.25)$$

$$\dot{G}^{ij} = \frac{1}{2} H_{,kl} \{G^{ij}, G^{kl}\} \quad (1.26)$$

Las ecuaciones (1.25) son las denominadas *ecuaciones efectivas*. En ellas se puede observar la aparición de las ecuaciones de movimiento clásicas (correspondientes al primer término) junto con términos de corrección producto de la interacción cuántica, proporcionales a las variables G^{ij} . Por otra parte, las ecuaciones (1.26) proporcionan relaciones por medio de las cuales se podrá determinar el valor de las variables cuánticas y de esta forma, obtener la solución definitiva del sistema de ecuaciones efectivas.

1.3.1. Correcciones Cuánticas

La ecuación (1.26) determina la evolución temporal de los términos de corrección cuántica. Ahora, en la sección (1.2.2) se obtuvo el valor del corchete de Poisson entre variables cuánticas, específicamente el corchete de Poisson que aparece en la ecuación (1.26), el cual está dado por la ecuación (1.13) y es de la forma

$$\{G^{ij}, G^{kl}\} = \epsilon^{ik}G^{jl} + \epsilon^{il}G^{jk} + \epsilon^{jl}G^{ik} + \epsilon^{jk}G^{il}$$

Entonces, al sustituir la ecuación (1.13) en la ecuación (1.26) se obtiene

$$\dot{G}^{ij} = H_{,kl}(\epsilon^{ik}G^{jl} + \epsilon^{jk}G^{il}) \quad (1.27)$$

Por otra parte, podemos escribir un campo vectorial simpléctico asociado a determinada función F del espacio de fase como

$$X_F = \{x^k, F\} \partial_k \quad (1.28)$$

y alternativamente

$$X_F = \epsilon^{kl}(\partial_l F) \partial_k \quad (1.29)$$

Considerando dichas definiciones, se puede reformular la evolución temporal de las variables cuánticas de la forma

$$X_H^k \partial_k G^{ij} = X_{H,l}^i G^{jl} + X_{H,l}^j G^{il}$$

la cual, al ordenar los términos se convierte en

$$X_H^k \partial_k G^{ij} - X_{H,l}^i G^{jl} - X_{H,l}^j G^{il} = 0 \quad (1.30)$$

La ecuación (1.30) corresponde a la derivada de Lie de las variables G^{ij} en la dirección del campo vectorial (simpléctico) X_H , por lo tanto, de la ecuación (1.26) se pasa a

$$\mathcal{L}_{X_H} G^{ij} = 0 \quad (1.31)$$

La solución a esta ecuación proporcionará el valor correspondiente a los términos de corrección cuántica restringidos al sub-espacio efectivo.

Para resolver la ecuación (1.31) se propone que las variables cuánticas se escriban de la forma

$$G^{ij} = \sum_{A,B} X_{F^A}^i X_{F^B}^j G_{AB} \quad (1.32)$$

donde $A, B = 1 \dots N$ con N el número de grados de libertad del sistema. Las cantidades G_{AB} , elementos de una matriz simétrica $N \times N$, son funciones que dependen de las constantes de movimiento del sistema. También aparecen en esta definición los vectores simplécticos asociados a las funciones F^A y F^B , las cuales son funciones del espacio de fase.

Para que las variables cuánticas definidas según (1.32) sean solución a la ecuación (1.31), se requiere que las funciones F^A (igualmente las funciones F^B) satisfagan

$$\{F^A, H\} = k \quad (1.33)$$

donde k es una constante.

En resumen, para la construcción de los términos de corrección cuántica el proceso consiste en hallar las $2N$ funciones F^A y F^B que satisfacen (1.33), calcular los vectores simplécticos asociados a cada una de ellas por medio de la definición (1.29) e introducir las cantidades obtenidas en la definición (1.32).

Considérese por ejemplo, un sistema con un grado de libertad descrito por variables (q, p) . Para este sistema existen 2 funciones que satisfacen la relación (1.33). Para la función F^A se escoge el Hamiltoniano del sistema H que cumple

$$\{H, H\} = 0$$

La función F^B será una función F del espacio de fase que cumpla

$$\{F, H\} = 1$$

Para cada una de estas funciones se tienen los vectores simplécticos

$$X_H = X_H^q \partial_q + X_H^p \partial_p$$

$$X_F = X_F^q \partial_q + X_F^p \partial_p$$

con lo cual, los términos de corrección cuántica serán de la forma

$$G^{qq} = G_{HH} (X_H^q)^2 + 2G_{HF} X_H^q X_F^q + G_{FF} (X_F^q)^2 \quad (1.34)$$

$$G^{qp} = G_{HH} X_H^q X_H^p + G_{HF} (X_H^q X_F^p + X_H^p X_F^q) + G_{FF} X_F^q X_F^p \quad (1.35)$$

$$G^{pp} = G_{HH} (X_H^p)^2 + 2G_{HF} X_H^p X_F^p + G_{FF} (X_F^p)^2 \quad (1.36)$$

1.3.2. Dinámica Efectiva

Hasta este punto se han hecho deducciones correspondientes al sub-espacio cuántico (espacio proyectivo de Hilbert). Sin embargo se deben considerar también aspectos asociados al sub-espacio efectivo *i.e.* el espacio en el cual los términos de corrección cuántica son funciones de las variables clásicas de la teoría.

En el sub-espacio efectivo, la dinámica está determinada por el Hamiltoniano efectivo, definido de la siguiente forma

$$H_{eff} = H_Q|_{G=G(x^i)} \quad (1.37)$$

El cual debe generar ecuaciones efectivas que sean equivalentes a las ecuaciones (1.25) y (1.26). Sin embargo, en trabajos previos [2] ha sido demostrada la aparición de términos de corrección a la estructura simpléctica en el sub-espacio efectivo, lo cual afecta al corchete de Poisson entre variables clásicas, de forma tal que cumple con

$$\{x^i, x^j\}_{eff} = \epsilon^{ij}(1 + \kappa) \quad (1.38)$$

donde κ es una función del espacio de fase, proporcional a \hbar .

Ahora, como se mencionó anteriormente, se requiere imponer que las ecuaciones de movimiento generadas por el Hamiltoniano cuántico H_Q evaluadas en las variables clásicas sean iguales a las ecuaciones generadas por el Hamiltoniano efectivo H_{eff} . Esto queda expresado de la forma

$$\{x^i, H_Q\}|_{G=G(x^i)} = \{x^i, H_{eff}\}_{eff} \quad (1.39)$$

y de esta relación se obtiene

$$\kappa\epsilon^{ij}H_{,j} + \frac{1}{2}H_{,jk}\{x^i, G^{jk}\} = 0 \quad (1.40)$$

condición a través de la cual se puede determinar la función κ , la cual aparece en el cálculo de la identidad de Jacobi en el sub-espacio efectivo. Se tiene entonces

$$\{x^i, \dot{x}^j\} - \{x^j, \dot{x}^i\} + \{H_{eff}, \{x^i, x^j\}_{eff}\} = 0$$

y en definitiva

$$\{x^i, \dot{x}^j\} - \{x^j, \dot{x}^i\} + \{H_{eff}, \kappa\epsilon^{ij}\} = 0 \quad (1.41)$$

1.3.3. Ejemplo: El Oscilador Anarmónico

A manera de ejemplo se aplicará el método a un sistema con un grado de libertad, descrito clásicamente por un Hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 + \lambda V(q) \quad (1.42)$$

Este Hamiltoniano describe un oscilador armónico modificado por un término perturbativo $\lambda V(q)$. Sobre este sistema no pesa ningún tipo de restricción salvo que la dependencia del potencial V sea respecto a la coordenada q . Las ecuaciones de movimiento clásicas generadas por H son

$$\dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -m\omega^2q - \lambda V'$$

A partir de este Hamiltoniano se puede obtener el Hamiltoniano cuántico utilizando la ecuación (1.23). Se obtiene entonces

$$H_Q = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 + \lambda V + \frac{1}{2}m\omega^2G^{qq} + \frac{\lambda V''}{2}G^{qq} + \frac{1}{2m}G^{pp} \quad (1.43)$$

de donde se generan, vía ecuación (1.25), las ecuaciones corregidas

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad (1.44)$$

$$\dot{p} = -m\omega^2q - \lambda V' - \frac{\lambda V'''}{2}G^{qq} \quad (1.45)$$

Como se puede observar, no aparecen términos de corrección producto de la interacción cuántica en la ecuación de movimiento correspondiente a

la variable q . Sin embargo, la ecuación asociada a la variable p si presenta términos de corrección a la ecuación clásica, asociados a fluctuaciones del operador \hat{q} .

Para construir los términos de corrección, se utilizará la definición (1.32), la cual requiere calcular los vectores simplécticos asociados a funciones F^A y F^B que satisfagan la relación (1.33). Como se mencionó en la sección (1.3.1), en sistemas con un grado de libertad es necesaria la búsqueda de dos de dichas funciones. La primera de ellas es, por si mismo, el Hamiltoniano H . La segunda será una función F del espacio de fases que satisfaga

$$\{F, H\} = 1$$

Este corchete de Poisson arroja la siguiente ecuación diferencial

$$\left(\frac{p}{m}\partial_q - (m\omega^2q + \lambda V')\partial_p\right) F(q, p) = 1 \quad (1.46)$$

Para resolver dicha ecuación, se hace un cambio de las variables (q, p) a variables (q, H) , con lo cual la variable p pasa a ser función de las nuevas variables a través de

$$p := p(q, H) = \left(2m\left(H - \frac{1}{2}m\omega^2q^2 - \lambda V\right)\right)^{1/2}$$

Considerando

$$\partial_q F(q, p)|_p = \partial_q F(q, H)|_H + (m\omega^2q + \lambda V')\partial_H F(q, H)|_q$$

$$\partial_p F(q, p)|_q = \frac{p}{m}\partial_H F(q, H)|_q$$

la ecuación (1.46) se convierte en

$$\partial_q F(q, H) = \frac{m}{p} \quad (1.47)$$

cuya solución es

$$F(q, H) = \int dq \frac{m}{p} \quad (1.48)$$

donde es importante recalcar que dentro de la integral aparece la función $p := p(q, H)$ y no la variable p .

Ahora que se tienen las funciones H y F , se pueden calcular los vectores simplécticos asociados a ellas para construir los términos de corrección cuántica. Partiendo de la definición (1.29) se tiene para la función H

$$\begin{aligned}
X_H &= \epsilon^{ij} \partial_j H \partial_i \\
&= \epsilon^{qp} \partial_p H \partial_q + \epsilon^{pq} \partial_q H \partial_p \\
&= \frac{p}{m} \partial_q - (m\omega^2 q + \lambda V') \partial_p
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Para calcular el vector X_F es importante recordar que la función F (ecuación 1.48) es función de (q, H) , entonces se tiene

$$\begin{aligned}
X_F &= \epsilon^{ij} \partial_j F(q, p) \partial_i \\
&= \epsilon^{ij} (\partial_j H) (\partial_H F(q, H)) \partial_i + \epsilon^{iq} \partial_q F(q, H) \partial_i \\
&= -pmf \partial_q + \left((m\omega^2 q + \lambda V') m^2 f - \frac{m}{p} \right) \partial_p
\end{aligned} \tag{1.50}$$

En esta última ecuación aparece la función f definida como

$$f := f(q, H) = \int \frac{dq}{p^3}$$

Los términos de corrección serán entonces

$$\begin{aligned}
G^{qq} &= G_{HH} (X_H^q)^2 + 2G_{HF} X_H^q X_F^q + G_{FF} (X_F^q)^2 \\
&= G_{HH} \frac{p^2}{2m} - 2G_{HF} p^2 f + G_{FF} p^2 m^2 f^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{qp} &= G_{HH} X_H^q X_H^p + G_{HF} (X_H^q X_F^p + X_H^p X_F^q) + G_{FF} X_F^q X_F^p \\
&= -G_{HH} \frac{(m\omega^2 q + \lambda V') p}{m} \\
&\quad + 2G_{HF} \left(m(m\omega^2 q + \lambda V') p f - \frac{1}{2} \right) \\
&\quad + G_{FF} (m^2 f - m^3 p (m\omega^2 q + \lambda V') f^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{pp} &= G_{HH} (X_H^p)^2 + 2G_{HF} X_H^p X_F^p + G_{FF} (X_F^p)^2 \\
&= G_{HH} ((m\omega^2 q + \lambda V'))^2 \\
&\quad + 2G_{HF} \left(\frac{m(m\omega^2 q + \lambda V')}{p} - m^2 ((m\omega^2 q + \lambda V'))^2 f \right) \\
&\quad + G_{FF} \left((m\omega^2 q + \lambda V') m^2 f - \frac{m}{p} \right)^2
\end{aligned}$$

Para determinar totalmente el valor de las variables cuánticas es necesario imponer condiciones sobre el sistema cuántico. Estas son, el principio de incertidumbre y la identidad de Jacobi.

Condiciones Sobre el Sistema

Las variables cuánticas (1.51), (1.51) y (1.51) no pueden tomar cualquier valor en el sub-espacio efectivo. Estas variables están sujetas a la relación de incertidumbre (1.24).

$$G^{qq}G^{pp} - (G^{qp})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Utilizando la expresión de dichas variables en términos de las variables q y p , y saturando la relación de incertidumbre, se obtiene

$$G_{HH}G_{FF} - (G_{HF})^2 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (1.51)$$

En la sección (1.3.2) se obtuvo la expresión definitiva para la identidad de Jacobi, producto de las correcciones que aparecen en la estructura simpléctica. Dicha expresión se presenta en la ecuación (1.41). Como se puede observar, es necesario calcular el valor de la función κ , para lo cual se dispone de la condición impuesta en la relación (1.40). Se tiene entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa \epsilon^{ij} H_{,j} + \frac{1}{2} H_{,jk} \{x^i, G^{jk}\}_{eff} \\ &= \kappa \frac{p}{m} + \frac{1}{2} (m\omega^2 + \lambda V'') \{q, G^{qq}\}_{eff} + \frac{1}{2m} \{q, G^{pp}\}_{eff} \end{aligned}$$

de donde se obtiene el valor de la función κ

$$\kappa = -\frac{m}{2p} (m\omega^2 + \lambda V'') \{q, G^{qq}\}_{eff} - \frac{1}{2p} \{q, G^{pp}\}_{eff} \quad (1.52)$$

De esta forma, la identidad de Jacobi queda de la forma

$$\begin{aligned} 0 &= \{q, \dot{p}\}_{eff} - \{p, \dot{q}\}_{eff} + \{H_{eff}, \kappa\}_{eff} \\ &= \lambda V''' \{q, G^{qq}\}_{eff} + \left\{ H_{eff}, \frac{m(m\omega^2 + \lambda V'')}{p} \{q, G^{qq}\}_{eff} + \frac{1}{p} \{q, G^{pp}\}_{eff} \right\}_{eff} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Con la aplicación de estas condiciones, se determina el valor de las funciones G_{HH} , G_{HF} y G_{FF} para completar la información correspondiente a

los términos de corrección cuántica, y de esta forma, las ecuaciones efectivas en su totalidad.

Sin embargo, para el caso que se acaba de exponer no se deduce el resultado definitivo debido a la dificultad inmersa en el tratamiento de los muchos términos que aparecen en el tratamiento detallado de la identidad de Jacobi, así como también en el hecho de que surgen términos asociados a la integral del potencial perturbativo $V(q)$ a través de la función f .

Se propone entonces hacer una expansión en la perturbación para tratar de obtener resultados de interés. De este modo se tendrá

$$f = \sum_n f_n \lambda^n$$

con

$$f_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial \lambda^n} \right|_{\lambda=0}$$

Los términos de corrección serán de la forma

$$G^{ij} = \sum_n G_{(n)}^{ij} \lambda^n$$

$$G_{AB} = \sum_n G_{(n)AB} \lambda^n$$

y

$$\kappa = \sum_n \kappa_{(n)} \lambda^n$$

Exigiendo que a orden cero en la perturbación el corchete de Poisson cuántico y el efectivo coincidan, se sigue que $\kappa_0 = 0$.

A orden cero en la expansión perturbativa se tiene el oscilador armónico con Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

la función f toma la forma

$$f_0 = \frac{1}{2mH} \frac{q}{p}$$

y la identidad de Jacobi a orden cero es

$$-\frac{1}{2} \lambda V''' \{q, G_0^{qq}\} + \{H_{eff}, k_0\} = 0$$

pero debido a que $K_0 = 0$ se obtiene como condición

$$\{q, G_0^{qq}\} = 0 \rightarrow \partial_H G_0^{qq} = 0$$

La aplicación de la identidad de Jacobi proporciona

$$\begin{aligned} \{q, G^{qq}\} &= \frac{2p}{m^2} (G'_{HH} H + G_{HH}) \\ &\quad - \frac{q}{mH} \left(G'_{HF} H - \frac{G_{HF}}{2} \right) + \frac{q^3 \omega^2}{2H^2} (G'_{HF} H - G_{HF}) \\ &\quad + \frac{pq^2}{4mH^2} \left(G'_{FF} - \frac{2G_{FF}}{H} - 4G'_{HH} \omega^2 H^2 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ecuaciones linealmente independientes de donde se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales para G_{HH} , G_{HF} y G_{FF} . De este sistema se deduce que

$$\begin{aligned} G_{HH} &= \frac{a}{H} \\ G_{HF} &= 0 \\ G_{FF} &= 4\omega^2 H a + bH^2 \end{aligned}$$

con a y b constantes.

Evaluando en el principio de incertidumbre

$$\left(\frac{a}{H} \right) (4\omega^2 H a + bH^2) = \frac{\hbar^2}{4}$$

se obtiene que $a = \frac{\hbar}{4\omega}$ y $b = 0$. Sustituyendo estos valores en las funciones G_{HH} y G_{FF} se obtienen las funciones

$$\begin{aligned} G_{HH} &= \frac{\hbar}{4\omega H} \\ G_{FF} &= \hbar\omega H \end{aligned}$$

En definitiva, a orden cero en la perturbación se tiene que los términos de corrección cuántica son de la forma

$$\begin{aligned} G_0^{qq} &= \frac{\hbar}{2m\omega} \\ G_0^{qp} &= 0 \end{aligned}$$

$$G_0^{pp} = \frac{\hbar m \omega}{2}$$

El Hamiltoniano corregido está dado por

$$H_Q = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

donde se observa que la corrección al sistema clásico está dada por el valor de la energía del estado base del oscilador armónico cuántico. Estos resultados son los mismos resultados obtenidos para el oscilador armónico con otras formulaciones de la mecánica cuántica [2].

A primer orden en la perturbación la función f toma la forma

$$f = f_0 + f_1 \lambda$$

con f_0 el obtenido para el oscilador armónico y f_1 dado por

$$f_1 = 3m \int \frac{V(q) dq}{(2m (H - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2))^{5/2}}$$

Los términos de corrección serán de la forma

$$G^{ij} = G_0^{ij} + G_1^{ij} \lambda$$

y las funciones G_{AB}

$$G_{AB} = G_{AB(0)} + G_{AB(1)} \lambda$$

La relación de incertidumbre toma ahora la forma

$$\frac{1}{2m} G_1^{pp} + \frac{1}{2} m \omega^2 G_1^{qq} = 0$$

y la identidad de Jacobi

$$-\frac{1}{2} \lambda V''' \{q, G_1^{qq}\} + \{H_{eff}, \kappa_1\} = 0$$

involucra el término $\kappa_1(q, H)$. En este término aparecen cantidades asociadas a la integral f_1 cuya dependencia en términos de las variables (q, H) no tiene una forma definida hasta tanto no se especifique V , por lo cual el cálculo de los términos de corrección a orden uno en la expansión se dificulta y debido a esta razón, dicho cálculo no se lleva a cabo en el presente ejemplo.

Capítulo 2

Relatividad General

En este capítulo se presentan una serie de formulaciones clásicas que toman como punto de partida la acción de Einstein-Hilbert para obtener una formulación canónica de la Relatividad General. Posteriormente se verá como dichas formulaciones canónicas son la base de diferentes alternativas para obtener una teoría cuántica de la gravedad.

A medida que se introducen diferentes formulaciones, se presentan herramientas necesarias para su desarrollo, como es el caso de las tétradas, las cuales juegan un papel fundamental en la formulación de Ashtekar, formulación que servirá como base en el estudio del modelo planteado en este trabajo.

2.1. La Acción de Einstein-Hilbert

En relatividad General, las ecuaciones de Einstein en el vacío pueden ser obtenidas a través de métodos variacionales a partir de la acción

$$S_{EH} = \int \sqrt{g} d^4x R(g) \quad (2.1)$$

Donde g es el determinante de la métrica y $R(g)$ es el escalar de Ricci, a saber, el escalar más sencillo que se puede construir con la métrica y sus derivadas (hasta segundo orden). Dicha acción es la denominada acción de Einstein-Hilbert.

Haciendo variaciones de la acción respecto a la métrica, se obtienen las ecuaciones de Einstein en el vacío.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (2.2)$$

2.2. El Formalismo ADM

El formalismo ADM, desarrollado en 1959 por Richard Arnowitt, Stanley Deser y Charles W. Misner es una formulación Hamiltoniana de la Relatividad General. Esta formulación ha servido como punto de partida para diversos intentos de construir una teoría cuántica de la gravedad.

El formalismo ADM se fundamenta en la idea de que el espacio-tiempo es una foliación de hipersuperficies espaciales Σ_t etiquetadas por un parámetro t y descritas por el tensor métrico tridimensional $q_{ij}(t, x^k)$.

Las variables dinámicas de la teoría son el tensor métrico tridimensional $q_{ij}(t, x^k)$ y sus momentos conjugados $\pi^{ij}(t, x^k)$. Usando estas variables es posible definir un Hamiltoniano y obtener las ecuaciones de movimiento de la Relatividad General.

2.2.1. El Espacio-Tiempo en el Formalismo ADM

Como se pudo observar, la acción de Einstein-Hilbert provee una formulación Lagrangiana de la Relatividad General. En dicha formulación, las variables dinámicas son las diez componentes de la métrica 4-dimensional $g_{\mu\nu}$.

Sin embargo, en la búsqueda de la formulación Hamiltoniana de una teoría a partir de su formulación Lagrangiana es necesario el cálculo de los momentos canónicamente conjugados a las variables dinámicas. Ahora, dicho cálculo hace necesario privilegiar alguna de las coordenadas como el *tiempo* para poder definir las velocidades.

Arnowitt, Deser y Misner resolvieron este problema considerando rebanadas del espacio-tiempo, de manera que cada rebanada sea una hipersuperficie de 3 dimensiones espaciales con una métrica positiva definida y que no se intercepta con otras hipersuperficies del mismo tipo [9]. Luego, el espacio-tiempo como un todo está formado por la colección de dichas hipersuperficies Σ_t etiquetadas por un parámetro t (dicho parámetro no necesariamente es el tiempo, solo una etiqueta). El cambio de dichas superficies respecto al parámetro t representa la evolución del espacio-tiempo para de esta manera

cubrirlo en su totalidad.

Como se mencionó anteriormente, cada hipersuperficie está dotada de una métrica tridimensional $q_{ij}(t, x^k)$ (que depende del parámetro de evolución y de las coordenadas de la hipersuperficie x^k), la cual se considerará como una de las variables dinámicas de la formulación.

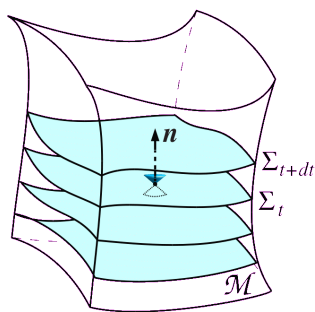


Figura 2.1: El espacio-tiempo en el formalismo ADM

El tensor métrico tridimensional proporciona entonces seis de las diez variables dinámicas necesarias para hacer la formulación compatible con la formulación de Einstein-Hilbert. Las otras cuatro se definen naturalmente producto de la foliación del espacio-tiempo. Estas nuevas variables son la función *Lapso* denotada por N y las tres componentes del vector *Shift*, denotada por N^i . La función Lapso está asociada a intervalos en el parámetro de evolución, es decir, a la separación entre cada hipersuperficie. Por su parte vector Shift se relaciona con el movimiento de un punto al pasar de una a otra hipersuperficie. Estas cuatro componentes describen la forma en que las hipersuperficies se acoplan para darle forma a la variedad espacio-temporal.

2.2.2. Formulación Hamiltoniana

El punto de partida para construir una formulación Hamiltoniana de la Relatividad General será escribir la acción gravitacional (Einstein-Hilbert) en función de las nuevas variables para luego, a través de una transformación de Legendre, obtener la densidad Hamiltoniana. Considerando las variables definidas, la métrica 4-dimensional se puede escribir de la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) \quad (2.3)$$

Se introduce también el concepto de curvatura extrínseca a la hipersuperficie, definida como

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (N_{i;j} + N_{j;i} - \dot{q}_{ij})$$

Por medio de este objeto se logra escribir el tensor de Riemann, y por lo tanto el escalar de Ricci [9], con lo cual, la acción de Einstein-Hilbert toma la forma

$$S = \int dt \int d^3x \sqrt{q} N (K^{ij} K_{ij} - K^2 + {}^{(3)}R) \quad (2.4)$$

Donde q es el determinante de la métrica tridimensional, $\sqrt{q}N = \sqrt{g}$ y ${}^{(3)}R$ es el escalar de Ricci tridimensional. Se puede observar que la acción no depende de las derivadas temporales de N y N^i . Este hecho sugiere que dichas variables juegan el papel de multiplicadores de Lagrange en la acción y deja como variables dinámicas a las seis componentes de la métrica espacial q_{ij} .

Se definen [11] los momentos canónicamente conjugados a q_{ij} como

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{ij}} = \sqrt{q} (K^{ij} - K q^{ij}) \quad (2.5)$$

Y haciendo la transformada de Legendre se obtiene la densidad Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^{ij} \dot{q}_{ij} - \mathcal{L} \\ &= \sqrt{q} (K^{ij} - K q^{ij}) \dot{q}_{ij} - \sqrt{q} N (K^{ij} K_{ij} - K^2 + {}^{(3)}R) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Escribiendo la curvatura extrínseca en términos de los momentos conjugados

$$K_{ij} = q^{-1/2} \left(\frac{1}{2} \pi_{kl} q^{kl} q_{ij} - \pi_{ij} \right)$$

la densidad Hamiltoniana toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sqrt{q} N \left(-{}^{(3)}R + q^{-1} \pi_{ij} \pi^{ij} - \frac{1}{2} q^{-1} \pi^2 \right) \\ &\quad - 2N_j q^{-1/2} \pi_{;i}^{ij} + 2\partial_i \left(\pi^{ij} N_j - \frac{1}{2} N^i \pi + \nabla^i N \sqrt{q} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

El último término constituye un término de frontera al integrar la densidad para obtener el Hamiltoniano y puede ser ignorado. A partir de la

ecuación (2.7) se pueden obtener los vínculos asociados a los multiplicadores de Lagrange presentes en la acción, la función Lapso N y las componentes del vector Shift N^i . De este modo se obtienen el *vínculo Hamiltoniano*

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N} \\
 &= -{}^{(3)}R + q^{-1} \pi_{ij} \pi^{ij} - \frac{1}{2} q^{-1} \pi^2 \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

y el *vínculo de Difeomorfismos*

$$\begin{aligned}
 D_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N^i} \\
 &= 2q^{-1/2} \pi_{;j}^{ij} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Uno de los primeros intentos de cuantización de la Relatividad General toma como base el formalismo ADM, derivando en la denominada ecuación de Wheeler-deWitt, la cual se tratará posteriormente.

2.2.3. Cuantización del Formalismo ADM

La principal motivación para el desarrollo de una formulación Hamiltoniana de la Relatividad General es la cuantización de la teoría. Para esto, hay que considerar las variables dinámicas del formalismo como operadores de la forma

$$q_{ij}(t, x^k) \rightarrow \hat{q}_{ij}(t, x^k) \tag{2.10}$$

$$\pi^{ij}(t, x^k) \rightarrow \hat{\pi}^{ij}(t, x^k) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta q_{ij}(t, x^k)} \tag{2.11}$$

De esta forma, los vínculos definidos por medio de (2.8) y (2.9) se convierten en operadores cuánticos que, tal como sucede en sistemas con vínculos, actúan sobre estados físicos. Más precisamente, los estados cuánticos que satisfagan los vínculos serán los únicos estados físicos válidos del sistema.

Para el caso del vínculo Hamiltoniano se tiene

$$\hat{H}\Psi = 0 \tag{2.12}$$

que es la denominada ecuación de Wheeler-deWitt. En esta ecuación, Ψ (que se conoce como la ecuación de onda del espacio-tiempo) es un funcional que depende de la configuración de los campos dinámicos en cada punto del espacio-tiempo. Como podemos observar, en esta ecuación no aparece el término $\partial_t \Psi$ de la ecuación de Schrödinger. Esto es producto de la definición misma del vínculo, y nos muestra que el tiempo no cumple ningún rol en la determinación de Ψ , lo cual nos conduce al llamado Problema del Tiempo, el cual será tratado con más detalle en el próximo capítulo.

Aparte del problema del tiempo, la cuantización del formalismo ADM arrastra una amplia gama de problemas e inconsistencias que hacen necesaria una formulación diferente. Entre estas podemos mencionar sin entrar en detalle los problemas asociados a la definición de la signatura de la métrica al convertirse en operador, el ordenamiento de los operadores en el vínculo Hamiltoniano, el acoplamiento de materia al campo gravitacional, entre otros.

2.3. La Acción de Palatini y la Acción de Holst

En secciones anteriores se estudió la acción de Einstein-Hilbert como generadora de las ecuaciones de movimiento de la Relatividad General. Como se pudo observar, dicha formulación está planteada en términos de la métrica y sus derivadas y partiendo de dicha acción se formula Relatividad General como una teoría Hamiltoniana en el formalismo ADM.

A continuación se presentarán dos formulaciones de la Relatividad General escritas en términos de variables diferentes a las métricas, a saber, tétradas y conexiones. Para eso, se introducirá el formalismo de tétradas y se mostrará que las formulaciones de Palatini y de Holst en términos de dichas variables son equivalentes a la acción de Einstein-Hilbert. Dichas formulaciones son el punto de arranque de la formulación de Ashtekar de la Relatividad General (de manera análoga a la formulación Einstein-Hilbert para el formalismo ADM).

2.3.1. Tétradas y Conexiones

Las tétradas, denotadas como e_μ^α son bases vectoriales no coordenadas, ortonormales, en términos de las cuales la métrica del espacio-tiempo luce localmente plana, esto es

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} e_{\mu}^{\alpha} e_{\nu}^{\beta} \quad (2.13)$$

Donde las letras del inicio del alfabeto griego (α, β, γ) representan índices asociados al grupo de simetría bajo el que la tétrada es invariante, mientras que las letras de la parte intermedia del alfabeto (μ, ν, λ) representan índices de espacio-tiempo.

Ahora, para operar sobre objetos con índices internos, es necesario definir la derivada de manera adecuada. De forma equivalente a como se define la derivada covariante en una variedad espacio-temporal, se tiene

$$D_{\mu} V_{\alpha} = \partial_{\mu} V_{\alpha} + \omega_{\mu\alpha}^{\beta} V_{\beta} \quad (2.14)$$

Donde se introduce la *conexión de spin* $\omega_{\mu\alpha}^{\beta}$. Más aún, para objetos que presentan combinaciones de índices espacio-temporales con índices internos se tiene

$$D_{\mu} V_{\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu} V_{\nu}^{\alpha} - \omega_{\mu\beta}^{\alpha} V_{\nu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V_{\lambda}^{\alpha} \quad (2.15)$$

Donde $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ es la conexión de Levi-Civita utilizada al derivar covariantemente tensores en un espacio-tiempo curvo. Ahora que se ha definido apropiadamente la derivada covariante para objetos con índices internos, se define la curvatura como

$$\Omega_{\mu\nu\alpha}^{\beta} V_{\beta} = (D_{\mu} D_{\nu} - D_{\nu} D_{\mu}) V_{\alpha} \quad (2.16)$$

de donde se obtiene

$$\Omega_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \partial_{\mu} \omega_{\nu}^{\alpha\beta} - \partial_{\nu} \omega_{\mu}^{\alpha\beta} + \omega_{\mu\alpha}^{\gamma} \omega_{\nu\gamma}^{\beta} - \omega_{\nu\alpha}^{\gamma} \omega_{\mu\gamma}^{\beta} \quad (2.17)$$

Tal como la conexión Γ es compatible con la métrica ($\nabla_{\mu} g_{\nu\lambda} = 0$), se exige que la conexión de spin ω_{μ} sea compatible con la tétrada, esto es $D_{\mu} e_{\nu}^{\alpha} = 0$. Se tiene entonces

$$D_{\mu} e_{\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu} e_{\nu}^{\alpha} - \omega_{\mu\beta}^{\alpha} e_{\nu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} e_{\lambda}^{\alpha} = 0 \quad (2.18)$$

Por definición, el tensor de curvatura de Riemann tiene la forma

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\rho} V_{\rho} = (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}) V_{\lambda} \quad (2.19)$$

Si se sustituye $V_{\lambda} = V_{\alpha} e_{\lambda}^{\alpha}$, entonces las cantidades tensoriales de relevancia en Relatividad General se pueden escribir en términos de tétradas. Se obtienen así el tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = e_\lambda^\alpha \Omega_{\mu\nu\alpha}{}^\beta e_\beta^\rho \quad (2.20)$$

el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\lambda\alpha}{}^\beta e_\nu^\alpha e_\beta^\lambda \quad (2.21)$$

y el escalar de curvatura de Ricci

$$R = \Omega_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \quad (2.22)$$

2.3.2. La Acción de Palatini

El método de Palatini parte de la acción de Einstein-Hilbert formulada en términos de tétradas con la salvedad de que propone tratar las tétradas y la conexión de spin como variables independientes. La acción de Palatini está dada entonces por

$$S_P = \int d^4x e e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \Omega_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \quad (2.23)$$

donde $e = \sqrt{g}$ es el determinante de la tétrada y $\Omega_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$ depende solo de la conexión de spin como se puede ver en la ecuación (2.17). Partiendo de esta acción, Palatini propone hacer variaciones respecto a la tétrada y a la conexión de spin para obtener las ecuaciones de movimiento.

Las variaciones respecto a la conexión de spin indican que, sobre las ecuaciones de movimiento, la conexión es compatible con la tétrada y por lo tanto, el tensor de Riemann se puede escribir según lo indica la ecuación (2.20).

Para hacer las variaciones respecto a la tétrada es importante considerar las variaciones del determinante como $\delta e = -e e_\mu^\alpha \delta e_\alpha^\mu$. Se obtienen entonces

$$\left(\Omega_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} e_\beta^\nu - \frac{1}{2} \Omega_{\lambda\nu}{}^{\gamma\beta} e_\gamma^\lambda e_\beta^\nu e_\mu^\alpha \right) \eta_{\alpha\delta} e_\rho^\delta = 0 \quad (2.24)$$

las ecuaciones de Einstein en términos de tétradas.

2.3.3. La Acción de Holst

La acción de Holst es otra formulación de la Relatividad General planteada en términos de tétradas. De hecho, la acción de Holst simplemente

modifica la acción de Palatini al añadir un término que no altera las ecuaciones de movimiento siempre y cuando la conexión de spin sea compatible con la métrica. La acción tiene la forma

$$S_H = \frac{1}{2} \int d^4x e e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \left(\Omega_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\gamma} \epsilon^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \Omega_{\mu\nu}{}^{\gamma\delta} \right) \quad (2.25)$$

donde γ es un factor complejo denominado el parámetro de Barbero-Immirzi. Tal como en la acción de Palatini, la tétrada y la conexión de spin serán tratados como variables independientes. Nuevamente las variaciones de la acción respecto a la conexión implican que la curvatura está asociada al tensor de Riemann vía ecuación (2.20).

Las variaciones del primer término de la acción respecto a la tétrada proporcionan las ecuaciones de Einstein tal como en la acción de Palatini. Las variaciones del segundo término se obtiene una cantidad que se anula debido a las simetrías del tensor de Riemann y la presencia del término $\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$.

La acción de Holst es de particular importancia puesto que es el punto de partida para la formulación Hamiltoniana de la Relatividad General llevada a cabo por Ashtekar, la cual es la base del desarrollo de teorías cuánticas de la gravedad como la *Gravedad Cuántica de Lazos*.

2.4. Formulación de Ashtekar

La formulación Hamiltoniana de la Relatividad General planteada por Ashtekar parte de la descomposición del espacio-tiempo, del mismo modo que en el formalismo ADM, para escribir la acción de Holst en función de variables canónicas. Sin embargo, Ashtekar descarta el uso de variables métricas (q_{ij}, K^{ij}) e introduce un nuevo conjunto de variables en términos de las cuales formula la acción gravitacional, éstas son el campo de calibre de $SO(3)$ A_i^a y su momento conjugado E_a^i .

Antes de definir las nuevas variables, es indispensable aclarar detalles respecto a la notación. Tal como en el formalismo de tétradas, en este caso se trabajará con objetos equipados con simetrías internas. De este modo, las letras del inicio del alfabeto latino (a,b,c) harán referencia a índices internos mientras que las letras de la parte intermedia del alfabeto (i,j,k) representarán índices de mundo (espaciales).

Así pues, iniciamos la definición de las nuevas variables introduciendo un grupo de tres campos vectoriales e_a^i denominados triadas, ortogonales entre ellos, esto es

$$\delta_{ab} = q_{ij} e_a^i e_b^j$$

Se define también la triada dual $e_i^a = q_{ij} e_a^j$ con la cual se llega a

$$\delta_{ab} = q^{ij} e_i^a e_j^b$$

Utilizando ambas definiciones se obtiene una expresión para la inversa de la métrica dada por

$$q^{ij} = \sum_{a=1}^3 e_a^i e_a^j \quad (2.26)$$

Se define ahora la triada *densitizada* como

$$E_a^i = \sqrt{\det(q)} e_a^i$$

Con lo cual la ecuación (2.26) para la inversa de la métrica tridimensional toma la forma

$$q^{ij} = \sum_{a=1}^3 \frac{E_a^i E_a^j}{\det(q)} \quad (2.27)$$

La triada densitizada contiene la misma información que la triada, pero absorbe el término asociado al determinante de la métrica al momento de escribir la acción en términos de las nuevas variables. De cualquier modo, vemos que existen nueve componentes asociadas a la triada densitizada mientras que la métrica tridimensional tiene solo seis. Esto no representa un problema puesto que los tres grados de libertad sobrantes corresponden a la libertad al escoger marcos de referencia debido a la acción de $SO(3)$ [11]. Entonces, asociado a esta simetría debe aparecer un nuevo vínculo en la acción gravitacional.

Ahora definimos la variable de configuración A_i^a como

$$A_i^a = \Gamma_i^a + \gamma K_i^a \quad (2.28)$$

con $\Gamma_i^a = \omega_{ibc} \epsilon^{bca}$, $K_i^a = K_{ij} E_a^j / \sqrt{\det(q)}$ y el parámetro de Barbero-Immirzi γ . La conexión definida a través de la ecuación (2.28) contiene la información que permite reconstruir la curvatura extrínseca K^{ij} .

En términos de las nuevas variables, la acción de Holst toma la forma

$$S = \frac{1}{8\pi G\gamma} \int dt \int d^3x \left(E_a^i \dot{A}_i^a - N^i P_i - NH - N^a G_a \right) \quad (2.29)$$

donde se define el *vínculo de difeomorfismos*

$$D_j = E_b^i F_{ij} - (1 + \gamma^2) K_i^a G_a = 0 \quad (2.30)$$

el *vínculo de Gauss*

$$G_a = D_i E_a^i = 0 \quad (2.31)$$

y el *vínculo Hamiltoniano*

$$H = \frac{E_a^i E_b^j}{\sqrt{\det(E)}} \left(\epsilon^{ab} {}_c F_{ij}^c - 2(1 + \gamma^2) K_i^a K_j^b \right) = 0 \quad (2.32)$$

En definitiva, las variables de Ashtekar son el campo de calibre de $SO(3)$ tridimensional A_i^a y su momento conjugado, E_b^j . Estas nuevas variables satisfacen la relación de conmutación dada por

$$\{A_i^a(x), E_b^j(y)\} = 8\pi G\gamma \delta_j^i \delta_b^a \delta^3(x - y) \quad (2.33)$$

2.4.1. Gravedad Cuántica en Variables de Ashtekar

Cuando se quiere formular una teoría cuántica gravitacional, es indispensable que dicha formulación no dependa del sistema de coordenadas escogido, en otras palabras, se desea una teoría independiente de la métrica de fondo. Esta característica la proporciona la formulación de Ashtekar de la Relatividad General, puesto que las variables de la teoría son invariantes bajo difeomorfismos.

Sin embargo, como se puede observar en la ecuación (2.33), el corchete de Poisson entre las variables de Ashtekar contiene una delta de Dirac, lo que conlleva serias dificultades en la cuantización directa de las variables A_i^a y E_b^j . Sin embargo, dichas variables pueden ser regularizadas proporcionando un álgebra bien comportada entre las regularizaciones. La conexión A_i^a es naturalmente integrable sobre una curva del espacio, dando lugar a las denominadas *holonomías*

$$h_\Gamma(A) = P e^{\int_\Gamma ds \dot{\gamma}^i A_i^a \tau_a} \quad (2.34)$$

donde Γ es la curva a través de la cual se integra, P es el producto ordenado de camino sobre la curva y $\tau_a = -\frac{1}{2}i\sigma_a$ es la representación del grupo $SU(2)$ en términos de las matrices de Pauli. Por otra parte, la triada densitizada E_a^i es naturalmente integrable sobre superficies $2 - D$ dando paso a los *flujos*

$$F_S(E) = \int_S \tau_a E_a^i n_i d^2y \quad (2.35)$$

donde n_i son co-normales a la superficie de integración S . Las holonomías y los flujos reproducen exactamente la misma información contenida en la conexión de Ashtekar y en la triada densitizada.

La cuantización de holonomias y flujos es el punto de partida de la Gravedad Cuántica a Lazos como alternativa para una teoría cuántica de la gravitación, la cual tiene implicaciones importantes en la percepción de la geometría del espacio.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 3

Cosmología

La cosmología como campo de estudio se encarga de la descripción del universo como un todo. Trata con cuestiones tales como el origen, la evolución y el destino del universo, empleando como base para esto la Teoría de la Relatividad General.

En este capítulo presentaremos nociones básicas de la cosmología clásica además de adaptar las variables de Ashtekar, definidas en el capítulo anterior, a la descripción de modelos cosmológicos. Se finaliza el capítulo presentando aspectos fundamentales del estudio cuántico de la cosmología, los cuales se emplearán en el tratamiento del modelo a trabajar.

3.1. El Principio Cosmológico y los Modelos de Friedmann-Robertson-Walker

En principio es razonable pensar en la dificultad que conlleva encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein que describan el universo como un todo. Sin embargo, esta dificultad se reduce considerando los siguientes aspectos:

- A grandes escalas, no existe una posición privilegiada en el universo *i.e.* el universo luce igual desde cualquier punto. En otras palabras, el universo es *homogéneo*.
- Se asume también que el universo luce igual en cualquier dirección y por lo tanto, el universo debe ser *isótropo*.

En resumen, que el universo a grandes escalas sea homogéneo e isótropo es lo que se conoce como el *principio cosmológico* y es la base fundamental en

el desarrollo de diversos modelos del universo, en particular los denominados modelos de Friedmann-Robertson-Walker, o simplemente modelos FRW.

En dichos modelos, se consideran simetrías traslacionales (asociadas a la homogeneidad) y simetrías rotacionales (asociadas a la isotropía) para construir la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (3.1)$$

Donde $k = 0, \pm 1$ establece la geometría del espacio, a saber: plano ($k = 0$), esférico ($k = 1$) e hiperbólico ($k = -1$). La función $a(t)$ es la única función desconocida que aparece en la métrica. Esta función se denomina *factor de escala cósmico* y quedará determinada por medio de las ecuaciones de Einstein, considerando el contenido de materia del universo.

Desde un punto de vista físico se puede argumentar, basándose en el principio cosmológico, que las galaxias (e incluso cúmulos de galaxias) deben ser tratadas como partículas no interactuantes de un fluido perfecto. De esta forma, el tensor de energía-momentum del universo es, en términos de sus componentes de la forma

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho(t) \\ T_{0i} &= 0 \\ T_{ij} &= p(t)g_{ij} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde $\rho(t)$ es la densidad y $p(t)$ es la presión del fluido. Ahora que se ha determinado el contenido material del universo, se pueden calcular las ecuaciones de Einstein, utilizando el tensor de Ricci y el escalar de Ricci asociados a la métrica FRW [12]. A partir de aquí se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales para el factor de escala cósmico, las denominadas *ecuaciones de Friedmann*

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) - \Lambda \quad (3.4)$$

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} \quad (3.5)$$

Las ecuaciones de Friedmann describen todos los aspectos relacionados a la evolución del universo en los modelos FRW. En particular la ecuación (3.3) describe la dinámica del sistema y a partir de ella se puede definir un Hamiltoniano [13] apropiado para obtener el factor de escala vía ecuaciones canónicas.

3.2. Variables de Ashtekar en Cosmología

En la sección (2.4) se definieron las variables de Ashtekar, utilizadas en su formulación Hamiltoniana. Estas variables como se recordará son el campo de calibre de $SO(3)$ A_i^a y la triada densitizada E_a^i .

Ahora, para modelos cosmológicos espacialmente planos en los que se considera homogeneidad e isotropía, las variables de Ashtekar toman la forma [13][14]

$$A_i^a = c\delta_i^a \quad (3.6)$$

$$E_a^i = p\delta_a^i \quad (3.7)$$

Donde c y p aparecen como variables dinámicas y están relacionadas a la métrica FRW a través de

$$c = \gamma\dot{a} \quad (3.8)$$

$$p = a^2 \quad (3.9)$$

El corchete de Poisson entre estas variables es de la forma [13][14]

$$\{c, p\} = \frac{8\pi\gamma G}{3} \quad (3.10)$$

Donde γ como se recordará es el parámetro de Barbero-Inmirzi. Habiendo mostrado la forma que toman las variables de Ashtekar en cosmología, se buscará determinar el factor de escala vía ecuaciones de Hamilton para un Hamiltoniano definido apropiadamente [15].

3.3. El Modelo FRW Plano con Radiación

En esta sección se presenta el modelo para el cual se quieren calcular las ecuaciones efectivas desde un punto de vista clásico. Posteriormente se

planteará el modelo en variables de Ashtekar para mostrar que ambas formulaciones proporcionan resultados equivalentes a nivel clásico.

3.3.1. Eras del Universo

Para resolver las ecuaciones de Friedmann se hace necesario especificar la ecuación de estado para el contenido material del universo. Considerando que la ecuación de estado para radiación es $p = \rho/3$ y para materia no interactuante se tiene $p = 0$, la ecuación (3.5) proporciona las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\rho_m a^3 &= C_m \\ \rho_r a^4 &= C_r\end{aligned}$$

donde C_m y C_r son constantes asociadas a materia y radiación respectivamente. Considerando este resultado, la ecuación (3.3) se puede escribir [12] como

$$\dot{a}^2 = \frac{C_m}{a} + \frac{C_r}{a^2} - k + \frac{\Lambda}{3}a^2 \quad (3.11)$$

A partir de esta ecuación se pueden caracterizar distintas eras en la evolución del universo, dependientes del contenido material que domine cada etapa. Tenemos entonces:

- Para valores suficientemente pequeños del factor de escala a , el término asociado a C_r será dominante en la ecuación, es lo que se conoce como era de dominio de la radiación. De aquí vemos que durante la primera etapa del universo la radiación predominaba como contenido material.
- Luego, para valores de a más grandes, el universo entra en la era de dominio de materia. El universo presente se encuentra en esta era de dominio.
- Para valores muy grandes de a , no importa cuan pequeña sea la constante cosmológica Λ , dicho término será el dominante a medida que el resto de contenido material del universo se diluye en un universo cada vez mayor.
- Solo en el caso $\Lambda = 0$ la curvatura dominará para grandes valores de a , obteniendo un universo en expansión con velocidad constante.

3.3.2. El Modelo FRW Plano con Radiación

Como acabamos de observar, cuando se hace referencia a la era de dominio de la radiación en cosmología, se habla del periodo durante el cual la radiación constituía el contenido material del universo.

Ahora bien, el modelo FRW estudia dicha era de dominio para un universo cuya curvatura es nula, esto es $k = 0$. En este caso consideraremos el modelo sin constante cosmológica. Por otro lado se sabe que la relación entre la densidad de energía y el factor de escala para la radiación es de la forma $\rho \propto a^{-4}$. Más precisamente

$$\rho = \frac{E^2}{a^4} \quad (3.12)$$

Donde E es la magnitud del campo eléctrico, la cual se asume lo suficientemente pequeña como para no generar anisotropía. Partiendo de estas consideraciones, la ecuación de Friedmann (3.3) se convierte en

$$a^2 \dot{a}^2 = E^2 \quad (3.13)$$

La solución a esta ecuación diferencial es

$$a(t) = \sqrt{2Et} \quad (3.14)$$

donde se ilustra el comportamiento a largo plazo del universo plano, esto es, cuando $t \rightarrow \infty$ entonces $a(t) \rightarrow \infty$. Derivando respecto al tiempo la ecuación (3.14) se obtiene

$$\dot{a}(t) = \left(\frac{E}{2t} \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

de donde se deduce que cuando $t \rightarrow \infty$ la velocidad del universo se comporta como $\dot{a}(t) \rightarrow 0$, comportamiento esperado en los modelos FRW para un universo plano. En este caso, y de ahora en adelante, se consideran unidades tal que el factor $8\pi G/3 = 1$.

3.3.3. El Modelo en Variables de Ashtekar

El vínculo Hamiltoniano para el modelo FRW plano con radiación definido en [17] es

$$H = -c^2 \sqrt{p} + \frac{E^2}{\sqrt{p}} = 0 \quad (3.16)$$

definido en términos de las variables canónicas $E_a^i = p\delta_a^i$ y $A_i^a = c\delta_i^a$ que satisfacen el corchete de Poisson

$$\{c, p\} = 1 \quad (3.17)$$

El factor de escala se determinará por medio de ecuaciones de Hamilton de la forma

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H\} = 2c\sqrt{p} \quad (3.18)$$

$$\frac{dc}{dt} = \{c, H\} = -\frac{c^2}{2\sqrt{p}} - \frac{1}{2} \frac{E^2}{p^{\frac{3}{2}}} \quad (3.19)$$

Este sistema de ecuaciones proporciona las siguientes soluciones

$$p = 2Et$$

$$c = \left(\frac{E}{2t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

De la definición de la variable p , se tiene entonces que el factor de escala está dado por

$$a(t) = \sqrt{2Et} \quad (3.20)$$

expresión que coincide con la solución (3.14). Queda demostrado que la formulación Hamiltoniana en términos de las variables de Ashtekar es equivalente a la formulación tradicional de la relatividad general.

Capítulo 4

Ecuaciones Efectivas del Modelo Cosmológico Cuántico FRW Plano con Radiación

En la sección (3.3) se presentó el modelo FRW plano con radiación en variables de Ashtekar, y se mostró que la solución clásica obtenida es igual a la obtenida por medio de la formulación métrica. Partiendo de ese punto se estudiará cómo se describe cuánticamente el modelo y la forma en que difiere del modelo clásico.

Para tal fin, en este capítulo se obtendrán las ecuaciones efectivas del Modelo Cosmológico Cuántico FRW Plano con Radiación considerando la descripción del modelo en términos de los valores de expectación de los operadores \hat{c} y \hat{p} asociados a las variables de Ashtekar en cosmología.

El método empleado para calcular las ecuaciones efectivas será el desarrollado en el capítulo 1, para un Hamiltoniano que genere ecuaciones de movimiento en términos de un parámetro capaz de señalar la evolución del sistema y que sea compatible con la aparición del problema del tiempo en cosmología cuántica.

4.1. El Problema del Tiempo

La incompatibilidad existente en el papel que juega el tiempo tanto en Mecánica Cuántica así como en Relatividad General conduce a lo que se denomina como el Problema del Tiempo en Gravedad Cuántica.

En la mecánica cuántica, el tiempo no es un observable, es decir, no está representado por un operador sino que aparece como un parámetro fijo que mide la evolución del sistema. Por otra parte, en Relatividad General debemos considerar que no existe una variable temporal global que permita medir la evolución de las demás variables, esto se debe a que el tiempo es una de las coordenadas del espacio-tiempo.

Una manera usual de evadir el problema del tiempo es identificar un *tiempo interno* [16] definido en términos de la estructura del sistema, es decir, a través del campo gravitacional, cantidades asociadas al contenido de materia del universo, entre otras características.

Posterior a dicha elección se resuelve clásicamente el vínculo Hamiltoniano para los momentos conjugados asociados al tiempo interno, cuyo resultado será considerado como el generador de evolución del sistema respecto al tiempo interno, el cual podrá ser cuantizado sin problemas.

4.1.1. Tiempo Interno en el Modelo FRW Plano con Radiación

Considérese nuevamente el vínculo Hamiltoniano (3.16) definido en [17]

$$H = -c^2\sqrt{p} + \frac{E^2}{\sqrt{p}}$$

El campo eléctrico E satisface

$$\{A, E\} = 1 \quad (4.1)$$

donde A es el potencial vector electromagnético. Puesto que el campo eléctrico está canónicamente conjugado al potencial vector, el cual no aparece en (3.16), entonces E es constante y A puede ser usado como tiempo interno.

Para obtener la evolución respecto a A , se resuelve el vínculo Hamiltoniano para el momento conjugado asociado a dicho campo, a saber, $p_A = E$. Se obtiene entonces

$$E(c, p) = \pm c\sqrt{p} \quad (4.2)$$

La función de las variables canónicas $E(c, p)$ proveerá las ecuaciones de movimiento clásicas para las variables $p(A)$ y $c(A)$.

4.1.2. Relación entre el Tiempo Interno y el Tiempo Coordinado

Resulta necesario conocer la relación existente entre nuestra elección de tiempo interno y el tiempo coordinado, en principio para determinar si es una escogencia adecuada (se busca una función que sirva como parametro de evolución, preferentemente creciente respecto al tiempo coordinado) y también con la finalidad de facilitar la interpretación de los resultados obtenidos en función del tiempo interno.

La evolución temporal de una función es generada por el vínculo Hamiltoniano, a través del corchete de Poisson. En el caso del potencial vector A se tiene

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} = \frac{2E}{\sqrt{p(t)}}$$

La solución a esta ecuación diferencial es

$$A(t) = \sqrt{8Et} \quad (4.3)$$

donde se observa que el comportamiento de A es creciente respecto al tiempo coordinado, confirmando que la elección del potencial vector como tiempo interno es acertada.

4.1.3. Solución Clásica en función del Tiempo Interno

En la ecuación (4.2) existen dos elecciones posibles. Puesto que el tiempo interno A es una función creciente respecto al tiempo coordinado, se escoge la raíz negativa de $E(c, p)$, con lo cual, el Hamiltoniano clásico del sistema está dado por

$$E = -c\sqrt{p} \quad (4.4)$$

Como se mencionó en la sección anterior, la función $E(c, p)$ (de aquí en adelante se hará referencia a esta función como el Hamiltoniano del sistema) proveerá las ecuaciones de movimiento clásicas para las variables $p(A)$ y $c(A)$, como funciones del tiempo interno, las cuales satisfacen la relación (3.17).

Las ecuaciones Hamiltonianas de movimiento serán de la forma

$$\frac{dp}{dA} = \{p, E\} = \sqrt{p} \quad (4.5)$$

$$\frac{dc}{dA} = \{c, E\} = -\frac{c}{2\sqrt{p}} \quad (4.6)$$

Este sistema de ecuaciones tiene como soluciones

$$p(A) = \frac{1}{4}A^2 \quad (4.7)$$

$$c(A) = -\frac{2E}{A} \quad (4.8)$$

con lo cual, a partir de la definición $p = a^2$ se obtiene el factor de escala como función del tiempo interno, esto es

$$a(A) = \frac{1}{2}A \quad (4.9)$$

Ahora, tomando en cuenta la forma en que se relacionan el tiempo interno y el tiempo coordinado a través de la ecuación (4.3), se observa que las funciones $a(t)$ y $a(A)$ son equivalentes, con lo cual se puede afirmar que la elección del vector potencial A como tiempo interno es adecuada para describir el modelo.

4.2. Ecuaciones Efectivas del Modelo Cosmológico Cuántico FRW Plano con Radiación

Como se mostró a nivel clásico, la elección del potencial vector A como tiempo interno proporciona una descripción equivalente del modelo cosmológico FRW plano con radiación. Ahora, existe interés en describir los efectos cuánticos que pueden afectar el modelo, para lo cual se obtendrán las ecuaciones efectivas del sistema.

La evolución de las variables canónicas $p(A) = \langle \hat{p}(A) \rangle$ y $c(A) = \langle \hat{c}(A) \rangle$ será generada por el Hamiltoniano Cuántico, el cual se obtendrá a través de (1.16). Para el Hamiltoniano definido por (4.4) se tiene

$$E_Q = -c\sqrt{p} - \frac{1}{2\sqrt{p}}G^{cp} + \frac{1}{8}\frac{c}{p^{\frac{3}{2}}}G^{pp} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (4.10)$$

en donde se consideró la aproximación semiclásica a orden uno en \hbar . Empleando el Hamiltoniano cuántico E_Q como generador de evolución se obtienen las ecuaciones de movimiento corregidas

$$\frac{dp}{dA} = \{p, E_Q\} = \sqrt{p} - \frac{1}{8p^{\frac{3}{2}}} G^{pp} \quad (4.11)$$

$$\frac{dc}{dA} = \{c, E_Q\} = -\frac{c}{2\sqrt{p}} + \frac{1}{4p^{3/2}} G^{cp} - \frac{3}{16} \frac{c}{p^{5/2}} G^{pp} \quad (4.12)$$

Es conveniente comentar algunas características del sistema de ecuaciones (4.11) y (4.12). En primer lugar, se observa que aparecen en las ecuaciones efectivas las ecuaciones clásicas y adicional a estas, términos de corrección en los que están involucradas las cantidades G^{ij} , asociadas a las fluctuaciones de las variables canónicas [7].

Adicional a este sistema de ecuaciones, se debe considerar también el conjunto

$$\frac{dG^{ij}}{dA} = \{G^{ij}, E_Q\}$$

para determinar los términos de corrección. En la sección (1.3.1) se desarrolló un método para construir dichas correcciones considerando su evolución en el sub-espacio efectivo.

Para construir los términos de corrección es necesario recordar la definición dada por la ecuación (1.32) para los grados de libertad cuánticos

$$G^{ij} = \sum_{A,B} X_{FA}^i X_{FB}^j G_{AB} \quad (4.13)$$

donde los X_{FA} son vectores simplécticos asociados a funciones F^A que satisfacen la condición (1.33). Para el modelo en estudio, se requieren dos funciones que satisfagan dicha condición. La primera de ellas es el Hamiltoniano (4.4), que satisface:

$$\{E, E\} = 0 \quad (4.14)$$

La segunda es una función $F(c, p)$ que debe cumplir con

$$\{F, E\} = 1 \quad (4.15)$$

De este corchete de Poisson surge la ecuación diferencial

$$\left(-\frac{c}{2\sqrt{p}} \partial_c + \sqrt{p} \partial_p \right) F = 1$$

la cual tiene como solución

$$F(c, p) = 2\sqrt{p} \quad (4.16)$$

Siguiendo el procedimiento expuesto para la construcción de los grados de libertad cuánticos, se calculan los vectores simplécticos asociados a las funciones E y F utilizando la definición (1.29). Así se tiene

$$X_E = (\partial_p E)\partial_c - (\partial_c E)\partial_p = -\frac{c}{2\sqrt{p}}\partial_c + \sqrt{p}\partial_p \quad (4.17)$$

$$X_F = (\partial_p F)\partial_c - (\partial_c F)\partial_p = \frac{1}{\sqrt{p}}\partial_c \quad (4.18)$$

con lo que se pueden construir los términos de corrección G^{cc} , G^{cp} y G^{pp} , dados por

$$\begin{aligned} G^{cc} &= G_{EE}(X_E^c)^2 + 2G_{EF}X_E^cX_F^c + G_{FF}(X_F^c)^2 \\ &= G_{EE}\frac{c^2}{4p} - G_{EF}\frac{c}{p} + G_{FF}\frac{1}{p} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} G^{cp} &= G_{EE}X_E^cX_E^p + G_{EF}(X_E^cX_F^p + X_E^pX_F^c) + G_{FF}X_F^cX_F^p \\ &= -G_{EE}\frac{c}{2} + G_{EF} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} G^{pp} &= G_{EE}(X_E^p)^2 + 2G_{EF}X_E^pX_F^p + G_{FF}(X_F^p)^2 \\ &= G_{EE}p \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ahora, como se mencionó en la sección (1.3.2), la construcción de los términos de corrección cuántica mediante la ecuación (1.32) restringe dichos términos al sub-espacio efectivo, esto es, se consideran los grados de libertad cuánticos evaluados en las coordenadas de este espacio, a saber, las variables $c(A)$ y $p(A)$. Se tiene entonces

$$G^{ij} = G^{ij}(c, p) \quad (4.22)$$

Es decir, el corchete de Poisson entre las variables canónicas y las cuánticas definidas en el sub-espacio efectivo puede tener un valor distinto de cero. Además, la evolución en este sub-espacio es generada por el Hamiltoniano Efectivo dado por la ecuación (1.37).

Como se mostró con anterioridad, la dinámica efectiva proporciona un ingrediente adicional en la figura de las correcciones al corchete de Poisson, lo cual desemboca en la condición (1.40). Para el modelo bajo estudio dicha condición se convierte en el par de ecuaciones

$$\kappa E_{,p} + E_{,cp} \{c, G^{cp}\} + \frac{1}{2} E_{,pp} \{c, G^{pp}\} = 0 \quad (4.23)$$

$$-\kappa E_{,c} + E_{,cp} \{p, G^{cp}\} + \frac{1}{2} E_{,pp} \{p, G^{pp}\} = 0 \quad (4.24)$$

y por medio de cualquiera de ellas se obtiene κ como función de las variables canónicas, esto es

$$\kappa(c, p) = \frac{3E}{8p} G'_{EE} + \frac{1}{4p} G_{EE} + \frac{1}{2\sqrt{p}} G'_{EF} \quad (4.25)$$

Al imponer que por consistencia las ecuaciones generadas por el Hamiltoniano cuántico evaluadas en el sub-espacio efectivo sean iguales a las ecuaciones generadas por el Hamiltoniano efectivo

$$\begin{aligned} \{c, E_Q\}|_{G=G(c,p)} &= \{c, E_{eff}\}_{eff} \\ \{p, E_Q\}|_{G=G(c,p)} &= \{p, E_{eff}\}_{eff} \end{aligned}$$

se obtiene

$$\frac{3E}{8p} G'_{EE} + \frac{1}{4p} G_{EE} + \frac{1}{2\sqrt{p}} G'_{EF} = 0$$

y comparando con la ecuación (4.25) se deduce que

$$\kappa(c, p) = 0 \quad (4.26)$$

esto es, la corrección al corchete de Poisson a nivel efectivo para el modelo cosmológico cuántico FRW plano con radiación es nula.

4.2.1. Condiciones: La Identidad de Jacobi y el Principio de Incertidumbre

En el punto anterior, se obtuvieron expresiones funcionales de los términos cuánticos de corrección que aparecen en las ecuaciones efectivas, así como la expresión correspondiente a la corrección del corchete de Poisson en el sub-espacio efectivo. Imponiendo que dichos términos satisfagan la relación de incertidumbre y la identidad de Jacobi, se buscará determinar las funciones

$G_{EE}(E)$, $G_{EF}(E)$ y $G_{FF}(E)$.

La identidad de Jacobi corregida a nivel efectivo está dada por la ecuación (1.41). Para el sistema descrito por el Hamiltoniano (4.10) se tiene

$$\begin{aligned} \{c, \dot{p}\} - \{p, \dot{c}\} + \{E_{eff}, \kappa(c, p)\} &= 0 & (4.27) \\ \frac{1}{2} \{c, G^{pp}\} + \{p, G^{cp}\} - \frac{3}{4} \frac{c}{p} \{p, G^{pp}\} &= 0 \\ \left(\frac{3E}{2} G'_{EE} - G_{EE} \right) + \sqrt{p} G'_{EF} &= 0 \end{aligned}$$

esto es, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias por medio del cual se determinará G_{EE} y G_{EF} . Este sistema de ecuaciones tiene soluciones

$$G_{EE} = \alpha E^{2/3} \quad (4.28)$$

$$G_{EF} = \beta \quad (4.29)$$

con α y β constantes de integración a determinar a través de la relación de incertidumbre.

Utilizando las expresiones obtenidas para las correcciones cuánticas en función de las variables canónicas y saturando la relación de incertidumbre, se obtiene

$$G^{cc}G^{pp} - (G^{cp})^2 = G_{EE}G_{FF} - (G_{EF})^2 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (4.30)$$

Vemos que la relación de incertidumbre define una superficie constante en el sub-espacio efectivo, la cual depende de los valores de G_{EE} , G_{EF} y G_{FF} . En definitiva, al sustituir las funciones (4.28) y (4.29) en la relación (4.30) resulta

$$\alpha E^{2/3} G_{FF} - \beta^2 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (4.31)$$

Puesto que las funciones G_{EE} , G_{EF} y G_{FF} son reales por definición (y por lo tanto α y β), entonces las funciones G_{EE} y G_{FF} deben ser no nulas. A pesar de evaluar en la relación de incertidumbre, no hay forma de determinar el valor definitivo de las constantes α y β , de las cuales lo único que se puede asegurar es que son proporcionales a \hbar y que $\alpha \neq 0$.

Tampoco se puede obtener la función G_{FF} , la cual a lo sumo se puede determinar en función de las constantes de integración como

$$G_{FF} = \frac{E^{-2/3}}{\alpha} \left(\frac{\hbar^2}{4} + \beta^2 \right)$$

De cualquier forma, se pueden escribir las correcciones cuánticas (4.19), (4.20) y (4.21) en términos de las constantes de integración con lo cual se tiene

$$G^{cc} = \frac{E^{2/3}\alpha c^2}{4p} - \beta \frac{c}{p} + \frac{E^{-2/3}}{\alpha p} \left(\frac{\hbar^2}{4} + \beta^2 \right) \quad (4.32)$$

$$G^{cp} = -\frac{E^{2/3}\alpha c}{2} + \beta \quad (4.33)$$

$$G^{pp} = E^{2/3}\alpha p \quad (4.34)$$

4.2.2. Ecuaciones Efectivas

Las ecuaciones efectivas del modelo cosmológico cuántico FRW plano con radiación se obtendrán evaluando las ecuaciones de movimiento corregidas (4.11) y (4.12) en los grados de libertad cuánticos dados por (4.32), (4.33) y (4.34). El sistema de ecuaciones de movimiento efectivas resulta

$$\frac{dp}{dA} = \sqrt{p} - \frac{E^{2/3}}{8\sqrt{p}}\alpha \quad (4.35)$$

$$\frac{dc}{dA} = -\frac{c}{2\sqrt{p}} - \frac{5cE^{2/3}}{16p^{3/2}}\alpha + \frac{1}{4p^{3/2}}\beta \quad (4.36)$$

Nos enfocaremos en la ecuación (4.35) puesto que a través de ella esperamos determinar el factor de escala corregido, que es la cantidad en la que tenemos interés en este estudio. Para resolver dicha ecuación, se propone que $p(A)$ se escriba como una serie de potencias de \hbar , y debido a que α es lineal en \hbar , se hace una expansión de la solución en α a primer orden

$$p(A) = \sum_n p_n(A)\alpha^n \quad (4.37)$$

con coeficientes $p_n(A) = (n!)^{-1} \partial_\alpha^n p(A)|_{\alpha=0}$. A orden cero se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dp_0}{dA} &= \sqrt{p_0} \\ p_0 &= \frac{A^2}{4}\end{aligned}\tag{4.38}$$

solución que coincide con la solución clásica del modelo obtenida en la sección (4.1.3). A primer orden en α (\hbar) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dA} &= \frac{p_1}{2\sqrt{p_0}} - \frac{E^{2/3}}{8\sqrt{p_0}} \\ &= \frac{p_1}{A} - \frac{E^{2/3}}{4A} \\ p_1 &= A\lambda + \frac{E^{2/3}}{4}\end{aligned}\tag{4.39}$$

con λ una constante de integración. Se tiene entonces que la solución a la variable p es de la forma

$$p(A) = \frac{A^2}{4} + A\lambda\alpha + \frac{E^{2/3}}{4}\alpha\tag{4.40}$$

Completando el cuadrado en la ecuación (4.40), obtenemos la forma definitiva de $p(A)$

$$p(A) = \left(\frac{A}{2} + \lambda\alpha\right)^2 + \frac{E^{2/3}}{4}\alpha\tag{4.41}$$

donde no se considera el término $(\lambda\alpha)^2$ que aparece al completar el cuadrado puesto que es de orden \hbar^2 .

Esta solución es compatible con el modelo clásicamente, pero además contiene correcciones al factor de escala producto de la cuantización, las cuales modifican la dinámica del modelo clásico a pequeñas escalas.

Para mostrar la compatibilidad de la solución (4.41) con el modelo clásico, basta con considerar el caso en que $\alpha \propto \hbar \rightarrow 0$ obteniendo entonces la solución (4.7). Ahora, consideremos la solución a pequeñas escalas, esto es, valores pequeños del tiempo interno A . En este punto los términos cuánticos de la solución juegan un papel fundamental, particularmente al considerar $A = 0$ se tiene

$$p(0) = \frac{E^{2/3}}{4}\alpha$$

Donde se observa la aparición de un rebote que elimina la singularidad existente en el origen a nivel clásico.

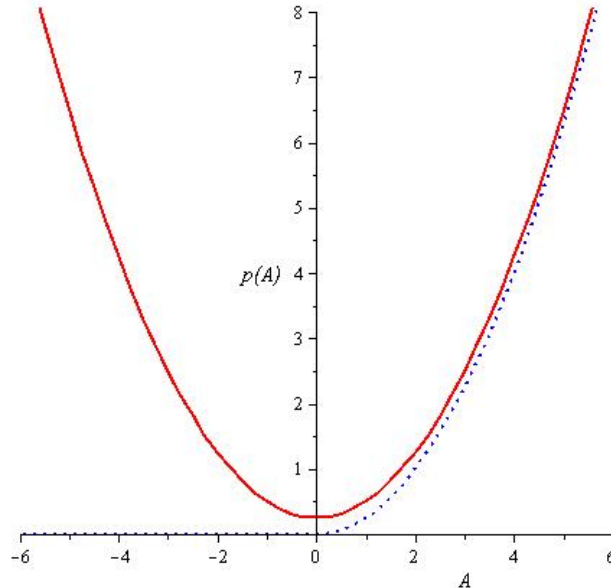


Figura 4.1: Evolución de a^2 corregido respecto al tiempo interno

La figura (4.5) muestra la comparación entre la solución clásica y la solución cuántica para $p(A)$. La línea sólida representa el comportamiento cuántico, mientras que la línea punteada representa la evolución clásica. Se observa como los comportamientos difieren cerca del origen y su convergencia a medida que crece el parámetro A .

4.2.3. Correcciones al Vínculo. La Acción Efectiva

Las ecuaciones de movimiento presentadas en la sección anterior fueron obtenidas partiendo del Hamiltoniano cuántico E_Q dado por la ecuación (4.10), para posteriormente evaluarlas en las variables cuánticas (4.32),(4.33) y (4.34). Sin embargo, dichas ecuaciones pueden generarse directamente desde un *Hamiltoniano Efectivo*, el cual estará dado por la ecuación (4.10) evaluado en las variables cuánticas. Procediendo de esta manera, se deduce el Hamiltoniano Efectivo dado por

$$E_{eff} = -c\sqrt{p} + \frac{1}{2\sqrt{p}} \left(\frac{3}{4}c^{5/3}p^{1/3}\alpha - \beta \right) \quad (4.42)$$

Si en esta ecuación consideramos el límite $\hbar \rightarrow 0$, se obtiene la ecuación (4.4), la cual proporciona el Hamiltoniano clásico para el modelo FRW plano con radiación. De manera similar, el vínculo Hamiltoniano dado por la ecuación (3.16) también presenta modificaciones en el sub-espacio efectivo. El vínculo corregido viene dado por

$$H_{eff} = \frac{E_{eff}^2}{\sqrt{p}} - c^2 \sqrt{p} + \frac{c}{\sqrt{p}} \left(\frac{3}{4} c^{5/3} p^{1/3} \alpha - \beta \right) \quad (4.43)$$

Nuevamente considerando el límite $\hbar \rightarrow 0$, se recupera la descripción clásica provista por la ecuación (3.16). A partir de este vínculo se puede obtener la variable c corregida en términos del factor de escala, esto es

$$c = \dot{a} + \frac{1}{a^2} \left(\dot{a}^{5/3} a^{2/3} \alpha - \frac{\beta}{2} \right) \quad (4.44)$$

Sustituyendo esta expresión junto con $p = a^2$ en la ecuación (4.43) se tiene el vínculo Hamiltoniano efectivo en términos del factor de escala:

$$H_{eff} = \frac{E_{eff}^2}{a} - \dot{a}^2 a - \frac{2\dot{a}}{a} \left(\dot{a}^{5/3} a^{2/3} \alpha - \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{3}{4} \dot{a}^{5/3} a^{2/3} \alpha - \beta \right) \quad (4.45)$$

Podemos calcular entonces el Lagrangiano efectivo del modelo a través de la relación

$$\mathcal{L}_{eff} = p\dot{c} - H_{eff}$$

de donde obtenemos

$$\mathcal{L} = a^2 \left(\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} \right) - \frac{E_{eff}^2}{a} + \frac{a^{2/3} \dot{a}^{2/3}}{3} \left(5\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{4a} \right) \alpha + \frac{\dot{a}}{a} \beta \quad (4.46)$$

y en la que reconocemos el primer término del miembro derecho como $\sqrt{g}R$ para la métrica (3.1) con $k = 0$.

Discusión y Conclusiones

Con la finalidad de estudiar modificaciones a la descripción clásica del universo dictada por los modelos FRW nos propusimos calcular las ecuaciones efectivas para un modelo cosmológico determinado. En particular consideramos un modelo en el cual el contenido material del universo es exclusivamente radiación, con la finalidad de asociar los resultados con posibles efectos cuánticos que tengan significado importante en la descripción del universo temprano.

Es de destacar que si bien la descripción del modelo se llevó a cabo en términos de las variables de Ashtekar $p = a^2$ y $c = \dot{a}$, dicha descripción no incluye aspectos asociados a la Cosmología Cuántica a Lazos, es decir, las ecuaciones efectivas del modelo cosmológico cuántico FRW plano con radiación fueron calculadas para los valores medios de los operadores asociados a las variables de Ashtekar \hat{p} y \hat{c} y no para las holonomías y flujos asociados a dichas variables.

Otro aspecto que surge de la cuantización de modelos cosmológicos y cuya consideración fue necesaria es el denominado problema del tiempo, el cual fue solucionado en este trabajo escogiendo el campo A , asociado al vector potencial electromagnético, como parámetro de evolución temporal monotonamente creciente, respecto al cual se obtuvo la evolución de las variables consideradas.

Las ecuaciones efectivas del modelo se obtuvieron tomando en cuenta métodos provistos por la formulación geométrica de la mecánica cuántica. Por esa vía se determinaron grados de libertad cuánticos que aparecen como términos de corrección de orden \hbar a las ecuaciones del modelo clásico. La determinación de dichos grados de libertad permitió restringir las ecuaciones de movimiento corregidas a un sub-espacio efectivo en el cual se pudo definir un Hamiltoniano efectivo a partir del cual se pueden obtener directamente las ecuaciones de movimiento. A nivel más fundamental, también se pudo

determinar un Lagrangiano efectivo para el modelo.

Al considerar las soluciones obtenidas en el modelo cuántico, en particular para el factor de escala corregido, y compararlas con las soluciones del modelo clásico, se obtienen diferencias importantes a pequeñas escalas. Mientras en el modelo clásico surge una singularidad en el origen del universo (Big Bang), el universo descrito por el modelo cuántico presenta un rebote en el origen, eliminando de manera natural la singularidad inicial. A grandes escalas ($\hbar \rightarrow 0$), el comportamiento de ambos modelos es similar. Si bien este tipo de soluciones aparece en la cuantización de otros modelos cosmológicos [15], es de destacar que no era de esperarse sin hacer cuantización a lazos.

Como se mencionó anteriormente, se pudo determinar el Lagrangiano efectivo del modelo. En este aparecen términos de orden \hbar asociados a las correcciones producto de la interacción cuántica. Sin embargo, dichos términos no se pueden expresar en términos del escalar de curvatura y son en general cantidades no covariantes. De cualquier forma, no es de extrañar la pérdida de la covariancia del modelo puesto que la formulación de Ashtekar obliga a establecer una dirección preferente al hacer la foliación del espacio-tiempo. Otro detalle asociado al Lagrangiano efectivo consiste en que en el límite clásico se recupera la acción de Einstein-Hilbert.

En aras de obtener resultados más completos se sugiere para investigaciones futuras estudiar las soluciones para diferentes modelos cosmológicos tales como [15] sin hacer la cuantización a lazos. Se propone también el estudio del modelo cosmológico FRW plano con radiación considerando las correcciones de LQC y comparar los resultados con el presente trabajo. Además, con la intención de tratar de interpretar los términos de corrección que aparecen en la acción efectiva, se sugiere considerar espacios-tiempos con conexión no compatible con la métrica.

Bibliografía

- [1] A. Ashtekar, “New Hamiltonian Formulation of General Relativity”, *Phys. Rev. D*, 36(6), 1587-1602, (1987).
- [2] A. Skirzewski, *Effective Equations of Motion for Quantum Systems*, PhD thesis, Humboldt-Universität at Berlin, 2006.
- [3] A. Ashtekar and T. A. Schilling. *Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*, Springer, New York, 1999. arXiv:gr-qc/9706069.
- [4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. I (John Wiley & Sons, 1977)
- [5] M. Bojowald, Loop quantum gravity as an effective theory, [arxiv:1208.1463]
- [6] M. Bojowald, H. Hernández, and A. Skirzewski, Effective equations for isotropic quantum cosmology including matter, *Phys. Rev. D* 76 (2007) 063511, [arXiv:0706.1057]
- [7] M. Bojowald and A. Skirzewski, Effective Equations of Motion for Quantum Systems *Rev. Math. Phys.* 18(2006) 713-745, [math-ph/0511043]
- [8] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Second Edition, Springer-Verlag, 1989.
- [9] A. Corichi y D. Nuñez, *Introducción al Formalismo ADM*, Revista Mexicana de Física 37 No.4 (1991) 720-747.
- [10] S. Winitzki, *Advanced General Relativity*, Lecture Notes, DRAFT September 28, 2007, version 1.1, available on <http://www.theorie.physik.uni-muenchen.de/~serge/>.
- [11] A. Pérez, *Introduction to Loop Quantum Gravity and Spin Foams*, [arXiv:gr-qc/0409061v3]

- [12] M. Blau, *Lecture Notes on General Relativity*, disponible en <http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>, Versión: January 6, 2012.
- [13] M. Bojowald, *Quantum Cosmology: Effective Theory*, 2012, [arXiv:1209.3403v1]
- [14] Martin Bojowald, “Loop Quantum Cosmology”, *Living Rev. Relativity*, 11, (2008), 4, [arxiv:1101.5592v1]
- [15] N. Villarreal, *Ecuaciones Efectivas del Modelo Cosmológico LQC-Campo Escalar*, Tesis de Licenciatura, Universidad de los Andes, 2014.
- [16] J.C. Isham, *Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time*, [arxiv:gr-qc/9210011v1]
- [17] S. Alexander, M. Bojowald, A. Marciano and D. Simpson, Electric Time in Quantum Cosmology, 2012, [arxiv:1212.2204]

www.bdigital.ula.ve