



Universidad de Los Andes
Facultad De Ciencias
Centro de Física Fundamental
Grupo de Caos y Sistemas Complejos

**Transiciones de Sincronización
en Sistemas Caóticos**

Trabajo de grado presentado por:

Br. Alejandro Vilorio Cano

Como requisito parcial para optar al título de:

Licenciado en Física

Tutor:

Dr. Mario Cosenza

Mérida, Junio 2015

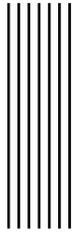
“...Somehow or other, you don't need a Creator. But perhaps a really clever Designer, what he would do, is to kind of treat the universe like a giant simulation, where you set some initial conditions and just let the whole thing spontaneously happen, in all of its wonder and all of its beauty”

ANDREA SELLA.

A Valentina y a Bruno ...

A mi abuela, Mery ...

www.bdigital.ula.ve



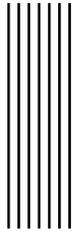
Resumen

En la presente Tesis investigamos nuevas perspectivas con el fin de comprender la naturaleza de diversos estados de sincronización en sistemas de elementos caóticos globalmente acoplados.

Reportamos la existencia de estados de sincronización generalizada en un sistema conformado por mapas idénticos. Caracterizamos, mediante el uso de exponentes de Lyapunov, la transición entre estados de sincronización generalizada y sincronización completa al variar un parámetro que expresa la intensidad del acoplamiento entre los elementos del sistema.

Encontramos el novedoso resultado de que los estados de clustering pueden ocurrir en sistemas de mapas con caos robusto globalmente acoplados, refutando previas conjeturas. Mostramos que los estados quiméricos en sistemas globalmente acoplados son muy generales; es decir, pueden ocurrir con mapas que presentan ventanas periódicas, así como también con mapas de caos robusto. Los estados quiméricos observados son caóticos, en contraste con los estados quiméricos reportados anteriormente, que son periódicos.

Nuestro trabajo revela el carácter universal y la interrelación entre estados de clustering y estados quiméricos. Nuestros resultados permiten formular una nueva conjetura sobre las condiciones necesarias para la existencia de estos estados de sincronización: los mapas locales deben ser unimodales y su derivada de Schwarz debe ser negativa, $Sf(x) < 0$.



Agradecimientos

Muchas personas han formado parte de esto, no sólo de esta tesis, también han sido parte de mi formación como físico, como investigador, y por supuesto, como persona.

Debo agradecer a mi Tutor, Prof. Mario Cosenza, que atraviesa la barrera de lo que significa ser un tutor, para convertirse en un verdadero maestro, con su excelente calidad como investigador y como persona. Muchas gracias por haber creído en mi potencial.

A Valentina, por tu apoyo incondicional, y por ser mi inspiración; de no ser por ti no habría tocado la puerta del Grupo de Caos. Te amo.

A mis padres, quienes me han dado todo; cada pequeño logro mío es también de ustedes. También toda mi familia, que siempre ha estado a mi lado.

A Liseth, Bruno y Rodrigo, mi otra pequeña familia, los extraño, gracias por todo.

A mis amigos de toda la vida, Eduardo, Edgar, Kevin, Isidro, Gonzalo; han sido mis hermanos.

A mis compañeros de la carrera: Albert, Ender, Daniel, Yonathan, Adriana; Raúl, Rubén, Víctor, y demás compañeros Caóticos; gracias por su ayuda y su amistad.

A Orlando Álvarez; tu ayuda fue fundamental para el desarrollo de este trabajo, muchísimas gracias.

A los Profesores Alberto Torres, Alejandra Melfo, Héctor Rago, Néstor Sierralta, Mayerlin Uzcátegui y Kay Tucci; a quienes agradezco su aporte en toda mi formación como estudiante.

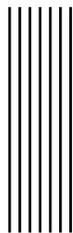


Tabla de Contenido

Resumen	III
Agradecimientos	IV
Tabla de Contenido	v
1 Introducción	1
2 Sincronización Generalizada en Sistemas Caóticos Idénticos	5
2.1. Sincronización Generalizada en mapas unimodales idénticos	6
2.2. Otros casos de Sincronización Generalizada con mapas idénticos . . .	13
3 Clustering en presencia de caos robusto	18
3.1. Clustering en un sistema de mapas de Andrecut-Ali	20
3.2. Clustering en un sistema de mapas de Aguirregabiria	22
4 Estados Quiméricos y Rutas a la Sincronización: Una Nueva Conjetura	24
4.1. Observación Temprana de Quimeras	25
4.2. Estados Quiméricos en presencia de Caos Robusto	28
4.3. Rutas a la Sincronización	31
5 Conclusiones	38
Referencias	40



1 Introducción

“He who knows the happiness of understanding has gained an infallible friend for life. Thinking is to man what flying is to birds. Don't follow the example of a chicken when you could be a lark.”

Albert Einstein.

Un sistema complejo está formado por elementos dinámicos interactivos, capaces de generar comportamientos colectivos que no son susceptibles de ser derivados a partir del conocimiento de las propiedades individuales de los elementos. El estudio de estos sistemas ha experimentado un gran crecimiento en las últimas décadas debido a su interdisciplinaridad, capturando el interés de investigadores dentro de la física, ciencias sociales, economía, biología, química, entre otras áreas.

Especial interés tiene el estudio de sistemas complejos, cuyos elementos exhiben dinámica caótica. La evolución de un sistema caótico es sensible a variaciones infinitesimales en sus condiciones iniciales. Cuando elementos caóticos interactúan entre sí, pueden exhibir diversos fenómenos colectivos no triviales, dependiendo de su dinámica local y de su acoplamiento.

En la presente Tesis, nos enfocamos en el estudio de sistemas con interacciones globales; es decir, todos los elementos del sistema están sujetos a una misma influencia, que puede ser externa (sistema forzado) o interna (sistema autónomo).

Entre los comportamientos colectivos emergentes en sistemas caóticos globalmente acoplados, consideraremos el fenómeno de sincronización (completa y generalizada), la segregación en grupos con comportamiento coherente (clustering), y la coexistencia de un grupo coherente con turbulencia (estado quimérico).

A continuación presentamos una breve descripción de estos estados colectivos de sincronización.

La sincronización es un fenómeno muy común en diversos sistemas, como relojes, neuronas, láseres acoplados, circuitos electrónicos, entre otros. Se han estudiado varios tipos de sincronización. Por un lado, está la Sincronización Completa, que consiste en la coincidencia sostenida en el tiempo, de variables dinámicas de elementos interactivos [1]. Por otra parte, cuando existe una diferencia en las unidades acopladas, y se tiene un acoplamiento suficientemente fuerte, la dinámica colectiva puede colapsar en un subespacio del espacio de fase del sistema, emergiendo una dependencia funcional específica distinta a la identidad [2], entonces existe un estado de Sincronización Generalizada.

Otro comportamiento colectivo de mucho interés en las últimas décadas es el fenómeno de Clustering, que consiste en la formación de sub-grupos distinguibles de elementos sincronizados en un sistema [3]. Su relevancia e interés práctico radica en el hecho de ser un comportamiento no trivial emergente que permite la segregación entre elementos que eran inicialmente indistinguibles. Dicho comportamiento es ampliamente observado en la naturaleza, desde reacciones bioquímicas, hasta redes neuronales y otros sistemas biológicos; la naturaleza hace uso del fenómeno de clustering para llevar a cabo distintos procesos simultáneos a partir de un sistema inicial homogéneo. La formación de clusters sincronizados ha sido reportada en una gran variedad de sistemas; en redes de mapas globalmente acoplados [4], osciladores de Rössler acoplados [5], así como también se han encontrado experimentalmente en un arreglo de osciladores electroquímicos sujetos a un acoplamiento global [6].

Por último, uno de los comportamientos colectivos emergentes de mayor interés que se investiga en la actualidad es el Estado Quimérico, o Quimera. Ocurre cuando en un sistema coexisten partes con comportamientos disímiles; es decir, una fracción del sistema se sincroniza mientras otra parte permanece incoherente y desordenada.

Estados quiméricos se han encontrado en sistemas espaciotemporales continuos, como en la ecuación en derivadas parciales de Ginzburg-Landau [7], en sistemas compuestos por dos poblaciones de osciladores dinámicos, sujetas a interacciones recíprocas [7, 8]; en modelos de dos poblaciones acopladas de agentes sociales [9], y en sistemas compuestos por dos poblaciones de osciladores de caóticos [10, 11]. Recientemente, la comunidad científica adquirió conciencia de que el primer reporte de un estado quimérico fue hecho por K. Kaneko [4], a pesar de no haber empleado el término *Quimera* [12].

En la presente Tesis exploramos nuevas perspectivas para comprender la naturaleza de estos estados de sincronización en sistemas de elementos caóticos globalmente acoplados. Como dinámica local, empleamos mapas caóticos. En particular, encontramos el novedoso resultado de que estos estados de sincronización pueden ocurrir en sistemas de mapas con caos robusto; i.e. ausencia de ventanas periódicas. Nuestro trabajo contribuye a sustentar el carácter universal y la interrelación entre estados de clustering y quimeras.

En el Capítulo 2, mostramos que un sistema de mapas forzados por un mapa idéntico a ellos puede presentar Sincronización Generalizada: los mapas forzados se sincronizan entre sí con una relación funcional que corresponde a la igualdad, pero con el forzador poseen una relación funcional no trivial distinta. Este resultado conlleva a la redefinición del concepto de sincronización generalizada, previamente usado para dinámicas de sistema forzador-forzado diferentes.

También estudiamos en el Cap. 2 la transición entre Sincronización Generalizada y Sincronización Completa en estos sistemas cuando se varía la intensidad del acoplamiento, mediante el análisis de los exponentes de Lyapunov del sistema, y de otras cantidades, como la desviación estándar asintótica, y la diferencia promedio asintótica.

El Capítulo 3 presenta el estudio de la formación de clusters en sistemas autónomos de mapas globalmente acoplados, cuya dinámica local se caracteriza por presentar caos robusto. Anteriormente se pensaba que la presencia de ventanas periódicas en la dinámica del mapa era esencial para la formación de clusters [13, 22]; dicha conjetura se fundamentaba en el hecho de que los mapas singulares (caracterizados por presentar caos robusto) no presentaban clusters al acoplarse globalmente [14]. Sin embargo, en este Capítulo mostramos contraejemplos donde mapas que carecen de ventanas periódicas, sujetos a un acoplamiento global, pueden presentar clusters.

En el Capítulo 4, encontramos que la emergencia de clusters está íntimamente ligada con la emergencia de estados quiméricos, y que ambos fenómenos son consecuencias de una misma propiedad adquirida por los mapas al acoplarse globalmente: la multi-estabilidad de su cuenca de atracción.

El Capítulo 5 contiene las Conclusiones del presente trabajo y sugiere algunas ideas para extensiones futuras.

2

Sincronización Generalizada en Sistemas Caóticos Idénticos

"Physicists like to think that all you have to do is say, these are the conditions, now what happens next?"

Richard P. Feynman.

Este Capítulo consiste en el estudio de la sincronización generalizada y de la sincronización completa en una red de mapas acoplados a través de un campo externo que comparte la misma dinámica de los mapas forzados. La dinámica del sistema se define como

$$\begin{aligned} x_{t+1}^i &= (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \epsilon f(y_t) \\ y_{t+1} &= f(y_t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Las variables y_t y x_t^i representan los estados del elemento forzador externo y del elemento i forzado en un tiempo discreto t . La intensidad del acoplamiento entre el campo externo y los elementos se describe por el parámetro ϵ .

En la Figura 2.1 se muestra una representación esquemática del sistema. La señal del campo forzador actúa sobre todos los elementos del sistema de manera unidireccional.

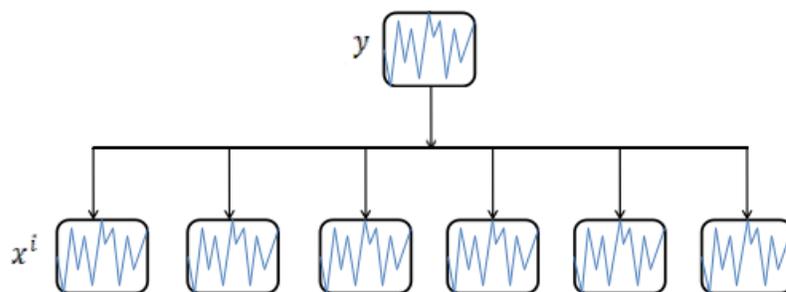


Figura 2.1: Representación esquemática del sistema (2.1).

2.1. Sincronización Generalizada en mapas unimodales idénticos

Los mapas unimodales son aquellos que poseen un solo máximo o mínimo en algún intervalo real, y han sido ampliamente estudiados tanto en sus propiedades intrínsecas [19], como en las propiedades que exhiben al acoplarse en una red [4]. Uno de los mapas unimodales más conocidos es el Mapa Logístico $f(x) = rx(1-x)$ (Figura 2.2), mediante el cual Feigenbaum descubrió la ruta al caos por duplicación de períodos y sus famosas constantes α y δ .

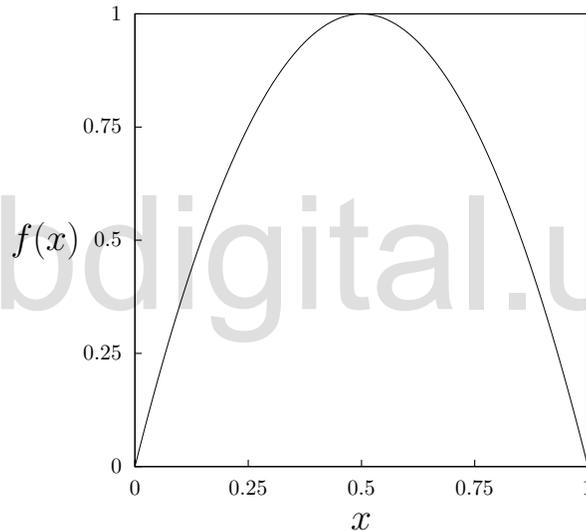


Figura 2.2: Mapa Logístico $f(x) = rx(1-x)$ con $r = 4$.

Consideremos el sistema globalmente acoplado de la Ecuación (2.1), donde

$$x_{t+1} = 1 - ax_t^2, \quad (2.2)$$

es conocido como mapa de Ulam, es una variación del mapa Logístico que cubre el intervalo $[-1,1]$ y con su máximo en $x = 0$. Tomando en cuenta el hecho de que en este sistema no aplica el concepto de vecindad espacial, podemos interpretar el sistema (2.1) como N realizaciones de un solo mapa forzado.

De esta manera obtenemos un mapa bidimensional de la forma

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= (1 - \epsilon)f(x_t) + \epsilon f(y_t) \\ y_{t+1} &= f(y_t).\end{aligned}\tag{2.3}$$

En la Figura 2.3, se muestra un esquema del sistema forzado reducido a un mapa bidimensional.

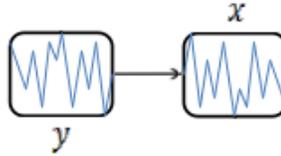


Figura 2.3: Representación esquemática del sistema reducido (Ec. 2.3).

A partir de este mapa bidimensional, podemos estudiar los exponentes de Lyapunov para caracterizar el atractor del sistema. Denominamos λ_{\parallel} al exponente de Lyapunov paralelo a la dirección de expansión de la recta $y_n = x_n$, definido como

$$\lambda_{\parallel} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f'(y_t)|.\tag{2.4}$$

El exponente λ_{\parallel} coincide directamente con el exponente de Lyapunov del mapa forzado y_t .

De igual forma, denotamos por λ_{\perp} al exponente de Lyapunov transversal, que va en dirección perpendicular a la recta $y_n = x_n$, y el cual depende del exponente de Lyapunov del mapa forzado x_t y de ϵ ,

$$\lambda_{\perp} = \ln |1 - \epsilon| + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f'(x_t)|.\tag{2.5}$$

Estos exponentes de Lyapunov son obtenidos numéricamente a partir de los autovalores de la matriz Jacobiana del sistema (2.3).

Un estado sincronizado ocurre cuando uno de los exponentes de Lyapunov es negativo mientras que el otro es positivo, indicando la presencia de un atractor en el espacio de fase del sistema bidimensional (x_t, y_t) (Ec. 2.3).

En la Figura 2.4 se muestran los exponentes de Lyapunov paralelo y transversal, en función del parámetro de acoplamiento ϵ

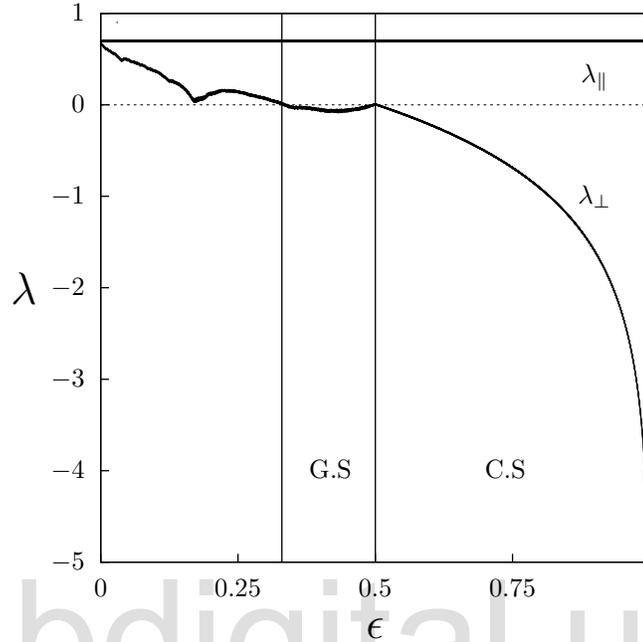


Figura 2.4: Exponentes de Lyapunov del sistema (2.3) usando el mapa (2.2) con $a = 2$, en función del parámetro de acoplamiento ϵ . Aquí $\lambda_{\parallel} = \ln 2$.

Hemos etiquetado la región de Sincronización Completa (C.S), donde el exponente de Lyapunov transversal se hace negativo, y existe una compresión del atractor del sistema en esa dirección, generando la forma funcional $y_n = x_n$. Por otra parte, la región (G.S) muestra un exponente de Lyapunov negativo, pero muy cercano a cero, hemos conjeturado que en esta región puede existir un estado de sincronización generalizada, donde la relación funcional entre las variables es distinta a la igualdad. De confirmarse nuestra idea, podríamos demostrar que la G.S no sólo se da en sistemas en los cuales el elemento forzador y el elemento forzado tienen dinámicas descritas por funciones distintas, como se pensaba hasta ahora [2].

Haremos uso de ciertas herramientas estadísticas, para caracterizar ambos estados de sincronización.

Vamos a estudiar directamente el sistema de N mapas acoplados globalmente a través de un elemento forzador,

$$\begin{aligned}x_{t+1}^i &= (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon f(y_t) \\y_{t+1} &= f(y_t).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Para caracterizar los estados de sincronización, usamos la desviación estándar asintótica $\langle\sigma\rangle$, definida como

$$\langle\sigma\rangle = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^T \sigma_t,\tag{2.7}$$

donde σ_t es la desviación estándar instantánea dada por

$$\sigma_t = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_t^i - \langle x_t \rangle)^2 \right]^{1/2},\tag{2.8}$$

y $\langle x_t \rangle$ es el valor medio de los estados x_t^i . Por otra parte, usamos también la diferencia promedio asintótica $\langle\delta\rangle$ definida como

$$\langle\delta\rangle = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^T \delta_t,\tag{2.9}$$

donde δ_t es la diferencia promedio instantánea dada por

$$\delta_t = |y_t - \langle x_t \rangle|.\tag{2.10}$$

El estado de sincronización completa ocurre cuando $\langle\sigma\rangle = 0$ y $\langle\delta\rangle = 0$, es decir, todos los N elementos forzados están sincronizados entre sí, y a su vez con el forzador. El estado de sincronización generalizada ocurre cuando $\langle\sigma\rangle = 0$ y $\langle\delta\rangle \neq 0$; los N elementos forzados están en sincronía entre ellos mas no con el elemento forzador. En la práctica, empleamos el criterio numérico de una diferencia menor a 10^{-6} para considerar la sincronización.

En la Figura 2.5 se muestran la diferencia promedio asintótica $\langle\delta\rangle$ (línea punteada), y la desviación estándar asintótica $\langle\sigma\rangle$ (línea continua), en función del parámetro de acoplamiento ϵ , usando $N = 5000$ mapas acoplados, $T = 5000$ iteraciones y despreciando $\tau = 4000$ transientes.

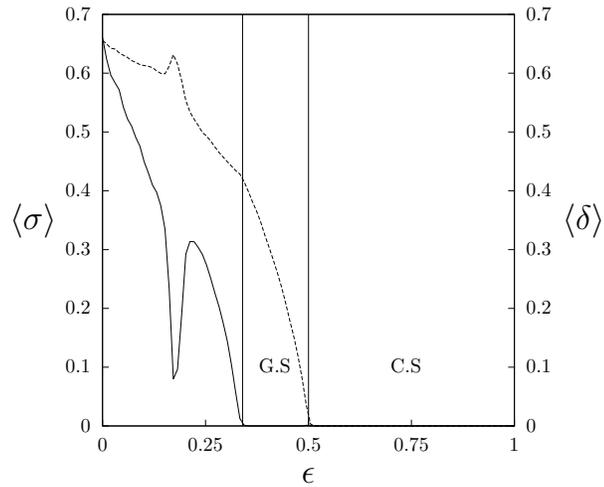


Figura 2.5: Desviación estándar asintótica $\langle \sigma \rangle$ y diferencia promedio asintótica $\langle \delta \rangle$ del sistema (2.6) en función del parámetro de acoplamiento ϵ . Usando el mapa (2.2) con $a = 2$, $N = 5000$, $T = 5000$ y $\tau = 4000$.

Podemos observar cómo la región de G.S coincide con lo observado en el análisis de los exponentes de Lyapunov. En la Figura 2.6, se muestra el atractor del sistema (2.6) correspondiente al estado G.S en el espacio de fases (x_t, y_t) .

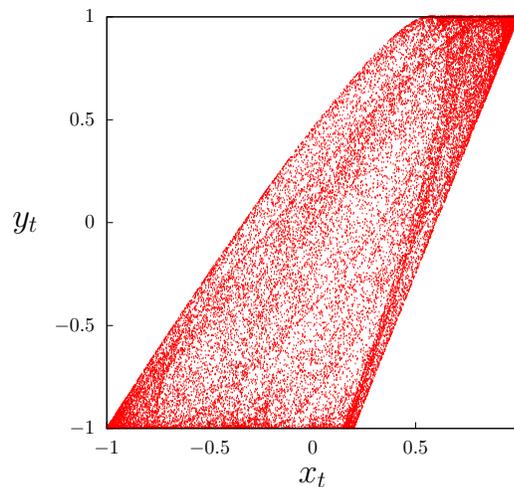


Figura 2.6: Atractor del sistema (2.6) en el espacio de fases de y_t con uno de los elementos forzados x_t . Usando el mapa (2.2) para $\epsilon = 0.4$.

Este interesante resultado nos lleva a replantearnos la definición de la sincronización generalizada expuesta en varios textos [1, 2]. En tal sentido exploraremos la generalidad del fenómeno que hemos reportado.

Consideremos el sistema (2.6) usando el mapa propuesto en [17] por Andreucut y Ali, de la forma

$$f(x) = \frac{1 - b^{(1-x)x}}{1 - \sqrt[4]{b}}. \quad (2.11)$$

Este mapa es unimodal y posee caos robusto en todo el rango de valores que puede tomar el parámetro $b > 0$. En la Figura 2.7 mostramos los exponentes de Lyapunov en función del parámetro de acoplamiento ϵ para el sistema reducido (2.3) usando el mapa (2.11)

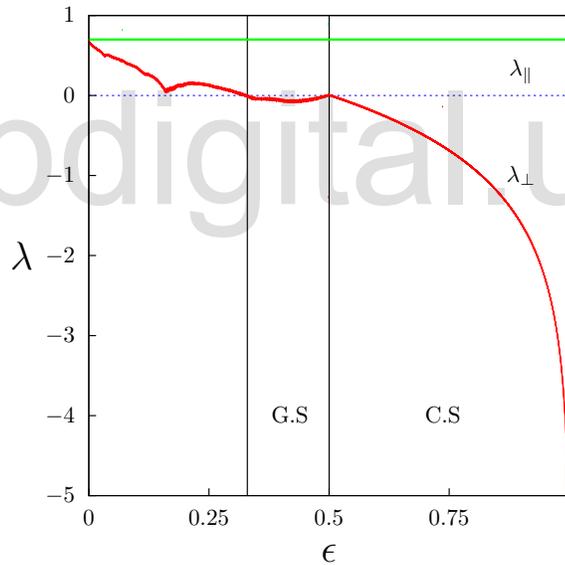


Figura 2.7: Exponentes de Lyapunov del sistema (2.3) usando el mapa (2.11) para $b = 0.5$, en función del parámetro de acoplamiento ϵ . Aquí $\lambda_{||} = \ln 2$.

Podemos ver un comportamiento de los exponentes de Lyapunov bastante similar al de la Figura 2.4. De hecho, hemos encontrado este fenómeno en diversos mapas unimodales; lo que nos permite inferir que la forma funcional de la dinámica local es determinante para este tipo de transición entre sincronización generalizada y sincronización completa.

En la Figura 2.8 se muestran la diferencia promedio asintótica $\langle \delta \rangle$ (línea punteada), y la desviación estándar asintótica $\langle \sigma \rangle$ (línea continua), en función del parámetro de acoplamiento ϵ , usando $N = 5000$ mapas acoplados, $T = 5000$ iteraciones y despreciando $\tau = 4000$ transientes.

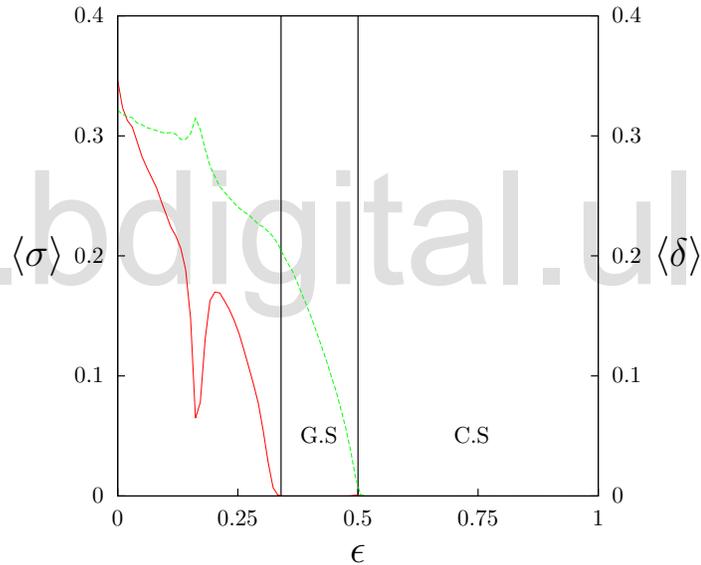


Figura 2.8: Desviación estándar asintótica $\langle \sigma \rangle$ y diferencia promedio asintótica $\langle \delta \rangle$ del sistema (2.6) en función del parámetro de acoplamiento ϵ . Usando el mapa (2.11) con $b = 0.5$, $N = 5000$, $T = 5000$ y $\tau = 4000$.

2.2. Otros casos de Sincronización Generalizada con mapas idénticos

En esta sección empleamos las herramientas usadas anteriormente, para analizar sistemas de mapas globalmente acoplados, cuyos elementos están descritos en su dinámica local por mapas caóticos que permiten aumentar la intensidad del acoplamiento ϵ hasta valores mayores a 1.

Consideremos el sistema globalmente acoplado reducido a un mapa bidimensional de la forma

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (1 - \epsilon)f(x_t) + \epsilon f(y_t) \\ y_{t+1} &= f(y_t), \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde la dinámica local está descrita por el mapa de Pikovsky [15]

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = x^{0.1} + bx - 1 & \text{si } x > 0 \\ -g(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Podemos apreciar en la Figura 2.9 los exponentes de Lyapunov del sistema reducido (2.12) en función del parámetro de acoplamiento ϵ usando el mapa (2.13).

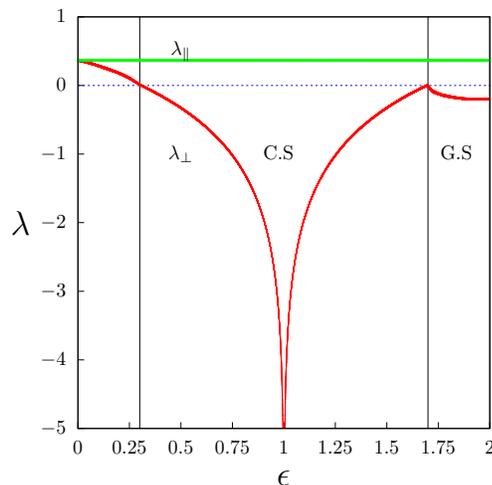


Figura 2.9: Exponentes de Lyapunov del sistema (2.12) usando el mapa (2.13) para $b = 0.5$, en función del parámetro de acoplamiento ϵ .

En la Figura 2.10 se muestran la diferencia promedio asintótica $\langle \delta \rangle$ (línea punteada), y la desviación estándar asintótica $\langle \sigma \rangle$ (línea continua), en función del parámetro de acoplamiento ϵ , usando $N = 5000$ mapas acoplados, $T = 5000$ iteraciones y despreciando $\tau = 4000$ transientes.

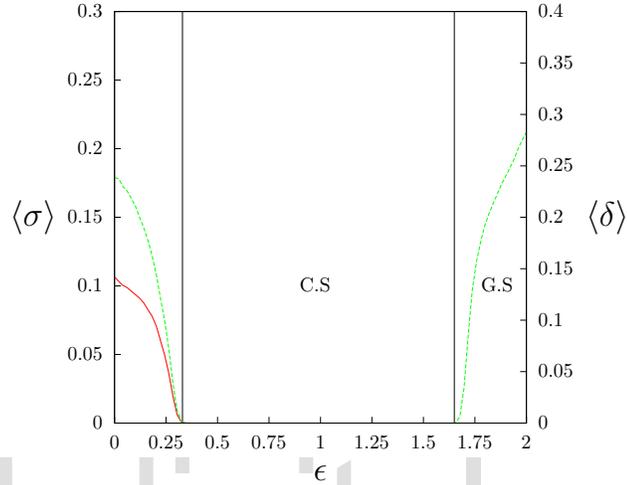


Figura 2.10: Desviación estándar asintótica $\langle \sigma \rangle$ y diferencia promedio asintótica $\langle \delta \rangle$ del sistema (2.6) en función del parámetro de acoplamiento ϵ . Usando el mapa (2.13) con $b = 0.5$, $N = 5000$, $T = 5000$ y $\tau = 4000$.

Un resultado interesante es que al aumentar suficientemente el parámetro de acoplamiento, el sistema puede abandonar el estado de sincronización completa de tal manera que emerge una relación funcional distinta a la igualdad entre los elementos forzados y el forzador.

Esta relación funcional la podemos apreciar en la Figura 2.11, corresponde al atractor del sistema en el espacio de fases de y_t con uno de los elementos forzados x_t .

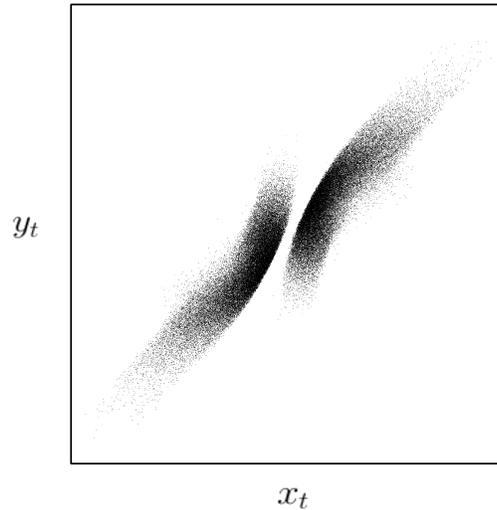


Figura 2.11: Atractor del sistema (2.6) en el espacio de fases de y_t con uno de los elementos forzados x_t . Usando el mapa (2.13) para $\epsilon = 1.82$ y $b = 0.5$.

Como ejemplo adicional, encontramos otro mapa que posee esta notable propiedad de emergencia de sincronización generalizada para valores en la intensidad del acoplamiento mayores a 1.

Consideremos el sistema (2.12) donde la dinámica local viene dada por

$$f(x) = |\tanh(s(x - c))|. \quad (2.14)$$

Este mapa fue introducido por Potapov y Ali en [16], como un modelo para dinámica neuronal. En la Figura 2.12 se muestran la diferencia promedio asintótica $\langle \delta \rangle$ (línea punteada), y la desviación estándar asintótica $\langle \sigma \rangle$ (línea continua), en función del parámetro de acoplamiento ϵ , usando $N = 5000$ mapas acoplados, $T = 5000$ iteraciones y despreciando $\tau = 4000$ transientes.

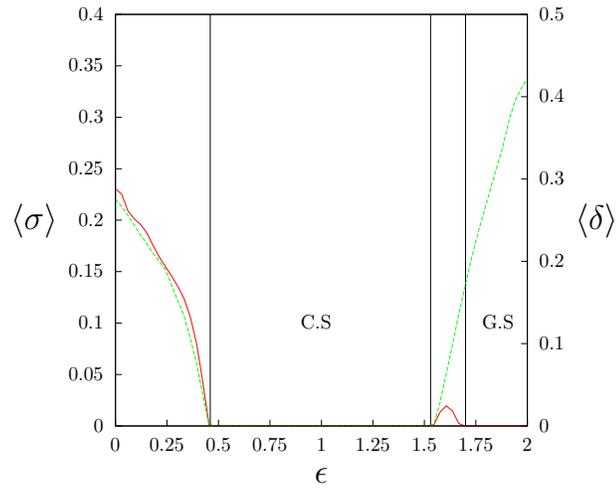


Figura 2.12: Desviación estándar asintótica $\langle \sigma \rangle$ y diferencia promedio asintótica $\langle \delta \rangle$ del sistema (2.6) en función del parámetro de acoplamiento ϵ . Usando el mapa (2.14) con $s = 2.7$, $c = 0.5$, $N = 5000$, $T = 5000$ y $\tau = 4000$.

El atractor correspondiente al estado de sincronización generalizada se muestra en la Figura 2.13.

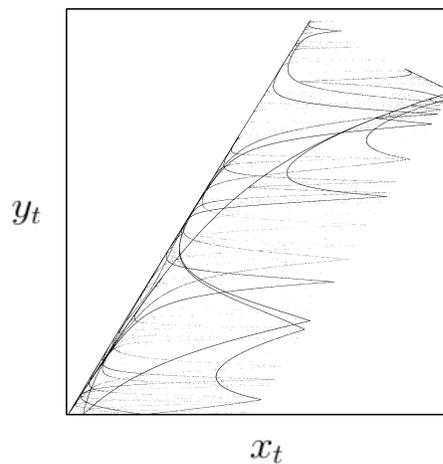


Figura 2.13: Atractor del sistema (2.6) en el espacio de fases de y_t con uno de los elementos forzados x_t . Usando el mapa (2.14) para $\epsilon = 1.944$, $s = 2.7$ y $c = 0.5$.

Consideramos que los resultados de este Capítulo permiten extender la definición de la sincronización generalizada para sistemas de mapas forzador-forzado idénticos. Adicionalmente, podemos proponer la existencia del exponente de Lyapunov transversal marginalmente negativo como condición para la ocurrencia de este fenómeno.

www.bdigital.ula.ve

3

Clustering en presencia de caos robusto

"Chaos is inherent in all compounded things ..."

Buddha.

A continuación presentamos nuestro estudio sobre la emergencia de clusters en un sistema de mapas que poseen caos robusto, acoplados globalmente. Los resultados de este Capítulo también son novedosos.

Consideramos el sistema de mapas con acoplamiento global propuesto por Kaneko [4]

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon) f(x_t^i) + \epsilon H(x_t^j), \quad (3.1)$$

donde x_t^i describe el estado del mapa i en el tiempo discreto t , la intensidad del acoplamiento se representa con el parámetro ϵ , y la función de acoplamiento global posee la forma

$$H(x_t^j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j). \quad (3.2)$$

En la Figura 3.1, se muestra la representación del sistema autónomo (3.1).

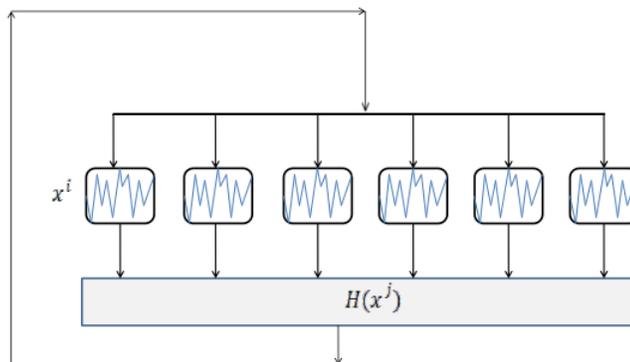


Figura 3.1: Representación esquemática del sistema (3.1).

Kaneko fue uno de los pioneros en el estudio de clustering en sistema de mapas caóticos globalmente acoplados. En su artículo [4], estudió la segregación de los elementos del sistema en grupos coherentes, es decir, a pesar de ser elementos con dinámica caótica, al acoplarse globalmente mediante una función dependiente del estado de los elementos, éstos se autoorganizaban.

Usando el sistema (3.1), y la dinámica de los elementos descrita por el mapa cuadrático de la forma

$$f(x) = 1 - ax^2 \quad (3.3)$$

Mostramos en la Figura 3.2, la serie temporal de los x^i elementos, agrupados en 3 clusters de período 2.

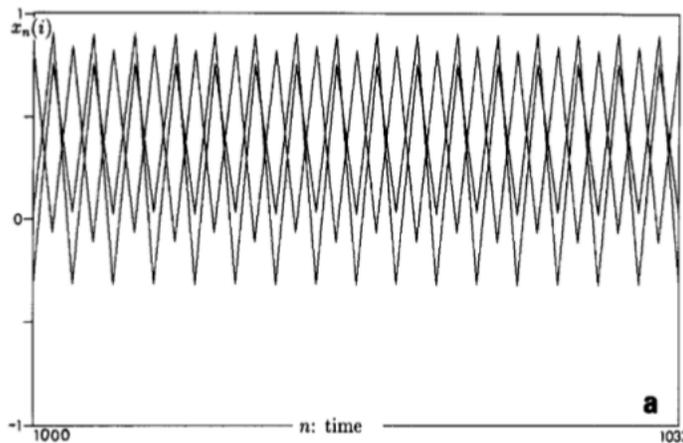


Figura 3.2: Serie temporal de los x^i elementos, agrupados en 3 clusters de período 2, para $N = 50$, $\epsilon = 0.2$ y $a = 1.8$ [4].

Kaneko, estudió los estados de clustering variando el parámetro local del mapa a y el parámetro de acoplamiento ϵ , En la Figura 3.3 mostramos el número de clusters en función de estos parámetros [4].

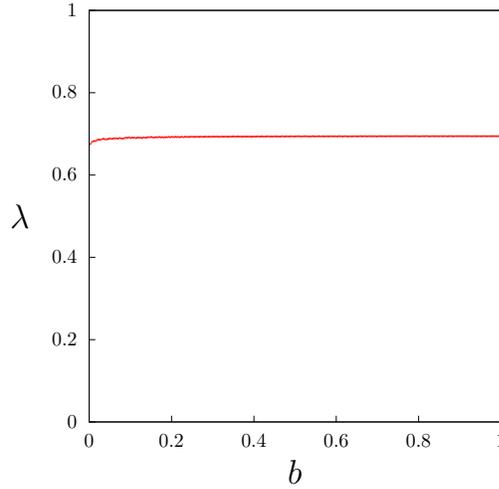


Figura 3.4: Exponente de Lyapunov del mapa (3.2) en función de b , $\lambda = \ln 2$.

Por otra parte, $H(x_t^j)$ es el campo medio que actúa sobre los elementos del sistema, y viene dado por

$$H(x_t^j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j). \quad (3.5)$$

A pesar de no poseer ventanas periódicas en su dinámica local, este sistema globalmente acoplado es capaz de presentar clusters, como muestra la Figura 3.5.

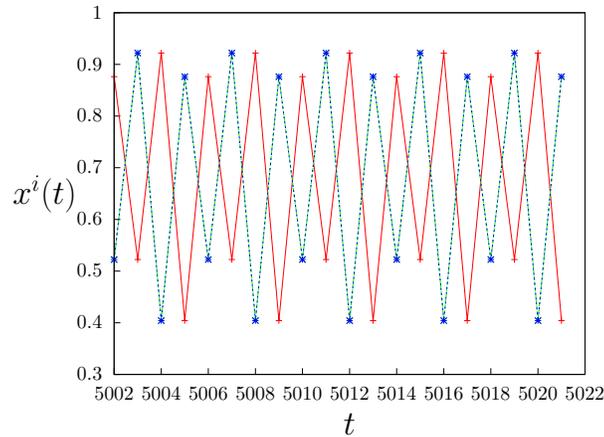


Figura 3.5: Serie temporal de los x^i elementos formando 2 clusters de periodo 4, para $\epsilon = 0.41$, $b = 0.5$ y $N = 5000$.

Este resultado constituye un contraejemplo para la llamada conjetura Cosenza-Parravano, que consideraba como condición necesaria para la aparición de clusters en sistemas globalmente acoplados, la existencia de ventanas periódicas en la dinámica local [13, 22].

3.2. Clustering en un sistema de mapas de Aguirregabiria

Para mostrar la generalidad de la existencia de clusters en sistema de mapas con caos robusto acoplados globalmente, consideremos el mapa

$$f(x) = \sin^2(r \arcsin(\sqrt{x})), \quad (3.6)$$

propuesto por Aguirregabiria en [21].

La Figura 3.6 muestra el diagrama de bifurcación de este mapa en función de su parámetro local r , donde se puede observar la ausencia de ventanas periódicas.

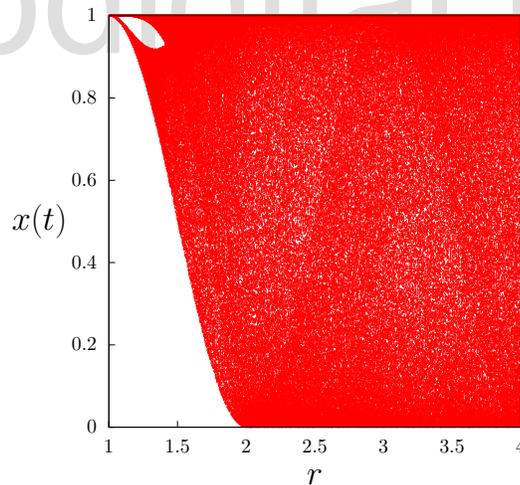


Figura 3.6: Diagrama de bifurcación en función de r

Usamos $r = 2.5$, y una función de acoplamiento dada por el campo medio (3.3) en el sistema globalmente acoplado (3.1). La Figura 3.7 muestra la serie temporal de los x^i elementos formando 2 clusters caóticos.

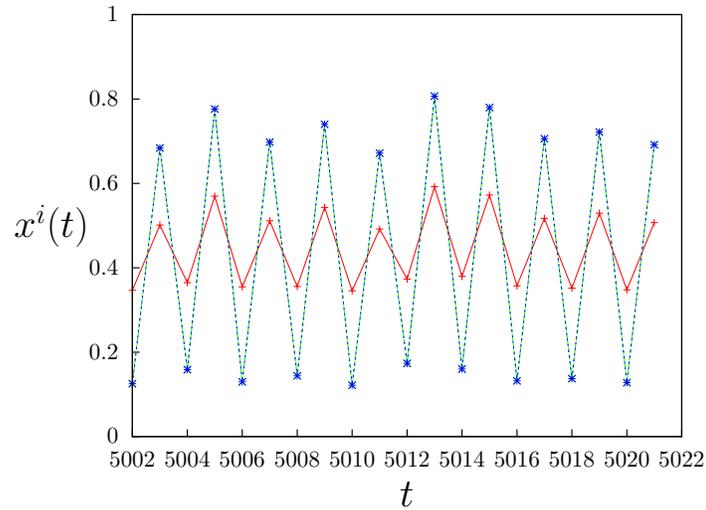


Figura 3.7: Serie temporal de los x^i elementos formando 2 clusters caóticos, para el parámetro $\epsilon = 0.32$ y $N = 4500$.

Podemos observar cómo los x^i elementos inicialmente distintos se dividen en dos grupos sincronizados. Como hemos dicho, se pensaba que el fenómeno de clustering estaba relacionado con las ventanas periódicas en la dinámica local del mapa [22], pero hemos mostrado que mapas que carecen de estas ventanas pueden presentar clusters al acoplarse globalmente.

En el próximo capítulo planteamos un enfoque nuevo que permite entender la formación de clusters en sistemas de mapas acoplados, y veremos la estrecha relación entre clusters y quimeras.



4

Estados Quiméricos y Rutas a la Sincronización: Una Nueva Conjetura

“In science one tries to tell people, in such a way as to be understood by everyone, something that no one ever knew before. But in poetry, it’s the exact opposite.”

Paul Dirac.

En este Capítulo estudiamos la emergencia de Estados Quiméricos en sistemas de mapas caóticos globalmente acoplados. Damos reconocimiento a K. Kaneko por haber encontrado este fenómeno en primer lugar, a pesar de no haber empleado el término *Quimera* [4], y planteamos nuevas perspectivas para explicar la emergencia de clusters y quimeras en sistemas de mapas globalmente acoplados.

En un sistema inicialmente homogéneo de elementos dinámicos acoplados, un estado quimérico ocurre cuando una región de sincronía coexiste con una región desincronizada o incoherente en el sistema. Tales estados fueron reportados por Kuramoto y Battogtokh [23] en arreglos de osciladores no lineales acoplados local y globalmente. El término *Quimera* fue introducido por Abrams y Strogatz [27], para describir este fenómeno. Se han descubierto estados quiméricos en experimentos con dos poblaciones de osciladores químicos mutuamente acopladas mediante interacciones globales [24]. También experimentos recientes han demostrado la existencia de estados quiméricos en dispositivos de elementos electrónicos que simulan mapas acoplados [25], y en sistemas mecánicos [26]. La observación experimental de dichos estados en diversos contextos ha desatado una gran actividad de investigación de este fenómeno.

Muy recientemente, la revista *Chaos* publicó un número especial, en conmemoración de sus 25 aniversario. En este número, K. Kaneko presentó una revisión del

tema de sistemas dinámicos globalmente acoplados [12]. En dicha revisión, Kaneko reconoce la observación temprana de un estado quimérico en un artículo suyo de 1990 [4].

4.1. Observación Temprana de Quimeras

En 1990, Kaneko investigó mapas caóticos globalmente acoplados [4]. Específicamente, propuso el siguiente sistema con acoplamiento global,

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon H(x_t^j), \quad (4.1)$$

donde x_t^i describe el estado del mapa i en el tiempo discreto t , la intensidad del acoplamiento se representa con el parámetro ϵ , y la función de acoplamiento global posee la forma

$$H(x_t^j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j), \quad (4.2)$$

la cual corresponde al campo medio del sistema. La dinámica local empleada por Kaneko está dada por un mapa cuadrático de la forma

$$f(x) = 1 - ax^2. \quad (4.3)$$

Como hemos señalado en el Capítulo anterior, en este artículo Kaneko reporta el descubrimiento de los estados de clustering, los cuales fueron posteriormente verificados experimentalmente. En una de las figuras de este artículo, Kaneko mostró la evolución temporal de un estado particular del sistema (4.1), que describió como un *cluster grande en presencia de una nube de elementos dispersos* (Figura 4.1) [4]. Hasta donde tenemos conocimiento, éste ha sido el primer reporte de un Estado Quimérico.

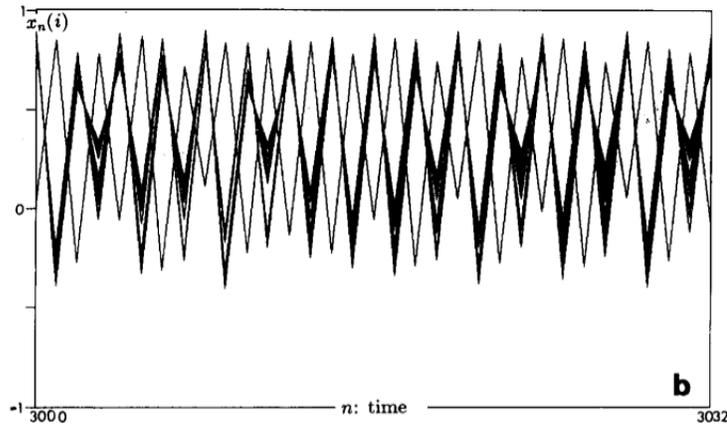


Figura 4.1: Evolución temporal asintótica del sistema (4.2) $c = 27$, $a = 1.95$, $\epsilon = 0.2$; $k = 24$ y $d = 26$. El número de elementos que conforman la quimera es k , y d es el número de elementos fuera de ella [4].

En la Figura 4.2, tenemos una representación esquemática de los distintos estados de clusters en el sistema, presentada por Kaneko en su reciente artículo [12]. Nótese que Kaneko hace referencia explícita al estado quimérico (figura central).

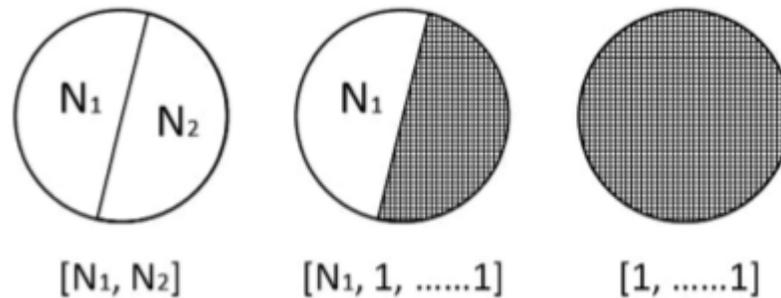


Figura 4.2: Representación esquemática del sistema para distintos estados de sincronización. En la izquierda el estado con 2 clusters, en el centro el estado quimérico, y en la derecha el estado turbulento o desincronizado [12].

Para investigar el estado quimérico encontrado por Kaneko en el sistema (4.1) en 1990, hemos calculado la probabilidad de aparición de una quimera en función

del parámetro de acoplamiento ϵ para m realizaciones usando condiciones iniciales aleatorias y uniformemente distribuidas para los valores de x_o^i .

Como criterio para la aparición de la quimera, consideramos que un Estado Quimérico surge cuando se forma al menos un cluster con un tamaño mínimo de 5% del total de los elementos del sistema N , y a su vez hay al menos un 5% de N en un estado desincronizado. Adicionalmente, dicho estado debe ser estable en el tiempo durante al menos 1000 iteraciones, luego de despreciar 4000 transientes.

En la Fig. 4.3, se muestra la probabilidad P para la aparición de un estado quimérico así definido, en función del parámetro de acoplamiento ϵ .

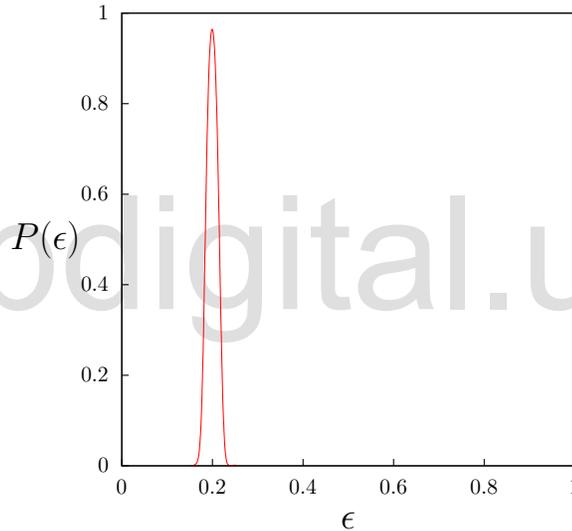


Figura 4.3: Probabilidad de aparición de quimeras $P(\epsilon)$ en función de ϵ para el sistema (4.1), usando $a = 1.95$, $m = 10^3$ y $N = 5000$.

En su artículo [4], Kaneko reporta la quimera solamente para $\epsilon = 0.2$. Podemos observar en la Figura 4.3 que este valor de ϵ corresponde a una alta probabilidad de emergencia del estado quimérico.

Podemos visualizar directamente los estados colectivos a través de un gráfico de colores (Figura 4.4) que muestra la evolución temporal de los elementos, luego de haber despreciado 5000 transientes. Esta visualización del estado quimérico reportado por Kaneko es novedosa.

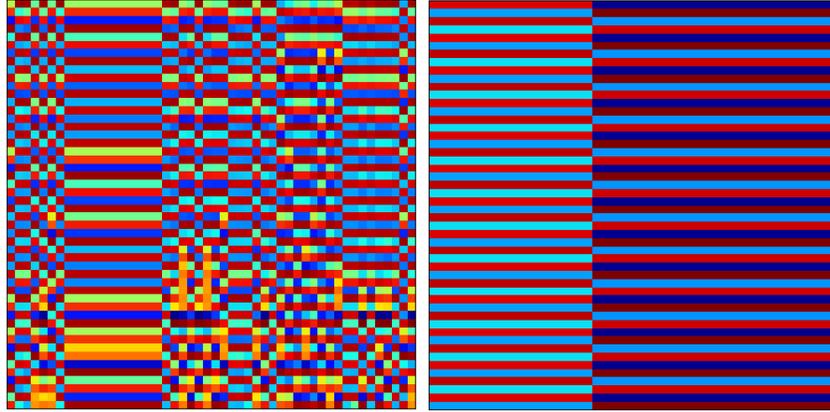


Figura 4.4: Estados asintóticos de las variables x^i (eje horizontal) para $N = 50$, en función del tiempo (eje vertical) del sistema (4.1) usando el mapa (4.3). La figura de la izquierda indica el Estado Quimérico para $\epsilon = 0.2$ y $a = 1.95$. La figura de la derecha muestra la formación de dos clusters de período 4 para $\epsilon = 0.3$ y $a = 1.95$.

4.2. Estados Quiméricos en presencia de Caos Robusto

Otro de los principales resultados de nuestra investigación es la observación de estados quiméricos en mapas que carecen de ventanas periódicas acoplados globalmente. Consideramos nuevamente un sistema autónomo globalmente acoplado de la forma

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \epsilon H(x_t^j). \quad (4.4)$$

La dinámica local está descrita por el mapa de Aguirregabiria [21], el cual, como mostramos en el Capítulo anterior, carece de ventanas periódicas en todo el rango de su parámetro local (Figura 3.6),

$$f(x) = \sin^2(r \arcsin(\sqrt{x})). \quad (4.5)$$

La función de acoplamiento global viene dada por

$$H(x_t^j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j). \quad (4.6)$$

En la Figura 4.5 podemos visualizar los estados colectivos del sistema con esta dinámica local a través de un gráfico de colores.

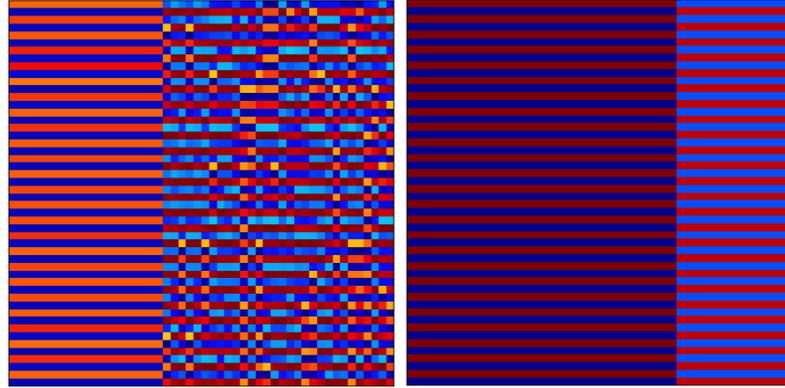


Figura 4.5: Estados asintóticos de la variable x^i (eje horizontal) para $N = 50$, en función del tiempo (eje vertical) para el sistema (4.4) usando el mapa (4.5) con $r = 3.0$. La figura de la izquierda indica el Estado Quimérico para $\epsilon = 0.238$. La figura de la derecha muestra la formación de dos clusters de período 2 para $\epsilon = 0.45$.

La Figura 4.5 revela la existencia de un estado quimérico en presencia de caos robusto local. Este resultado es novedoso, hasta donde tenemos conocimiento. Al igual que los estados quiméricos descubiertos por Kaneko, la evolución temporal del estado quimérico mostrado en la figura 4.5 es caótica.

Para mostrar la generalidad del fenómeno de emergencia de quimeras en presencia de caos robusto, consideramos otra dinámica local con esa propiedad, dada por

$$f(x) = \frac{1 - b^{(1-x)x}}{1 - \sqrt[4]{b}}. \quad (4.7)$$

Este mapa fue propuesto por Andrecut y Ali [17]. En el Capítulo anterior (Figura 3.4), mostramos que este mapa presenta caos robusto en todo su intervalo de parámetro local b . Usando una función de acoplamiento global de la forma

$$H(x_t^j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_t^j, \quad (4.8)$$

estudiamos los estados de sincronización del sistema.

De manera similar a los casos anteriores, podemos visualizar los estados colectivos a través de un gráfico de colores (Figura 4.6).

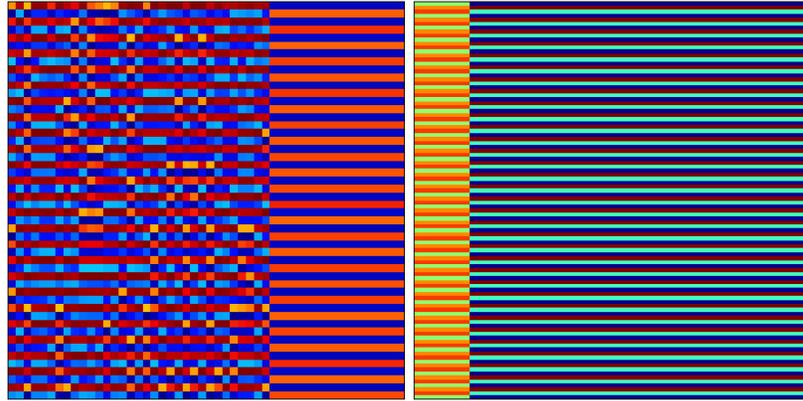


Figura 4.6: Estados asintóticos de la variable x^i (eje horizontal) para $N = 50$, en función del tiempo (eje vertical) para el sistema (4.4) usando el mapa (4.7) con $b = 0.6$, y la función global (4.8). La figura de la izquierda indica el Estado Quimérico para $\epsilon = 0.198$. La figura de la derecha muestra la formación de dos clusters de período 3 para $\epsilon = 0.32$.

La Figura 4.6 permite inferir la generalidad de la ocurrencia del estado quimérico en sistemas globalmente acoplados. La emergencia de estos estados de sincronización no depende de la presencia de ventanas periódicas en la dinámica local, tampoco en la forma funcional del acoplamiento global $H(x_t^j)$.

4.3. Rutas a la Sincronización

Con la finalidad de entender el origen de los estados quiméricos y de clusters en sistemas globalmente acoplados, proponemos un análisis basado en la analogía entre un mapa forzado y un sistema de mapas globalmente acoplados, introducido por Cosenza y Parravano [13].

Consideremos un mapa $f(x)$ en su régimen caótico, siendo forzado por una señal constante ϕ en la forma

$$x_{t+1} = (1 - \epsilon)f(x_t) + \epsilon\phi. \quad (4.9)$$

El acoplamiento con la señal ϕ cambia la dinámica del mapa $f(x)$, surgiendo un nuevo mapa con nuevas propiedades. Podemos analizar la dinámica de este nuevo mapa en función del parámetro ϵ .

Por ejemplo, usando el mapa cuadrático $f(x) = 1 - ax^2$ en su parámetro local $a = 2.0$ donde la banda caótica cubre todo el intervalo $(-1, 1)$, podemos apreciar la emergencia de ventanas periódicas debido al acoplamiento.

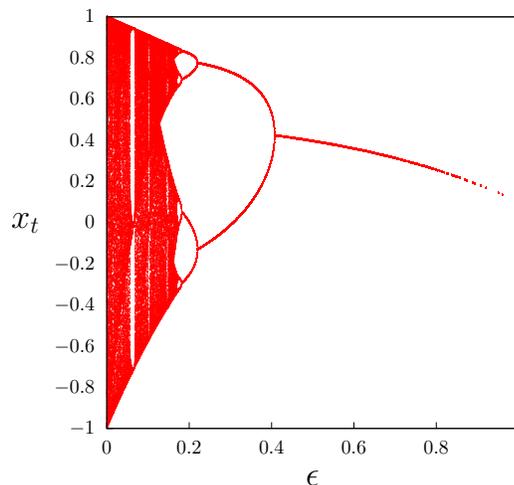


Figura 4.7: Diagrama de bifurcación del sistema (4.9) en función del parámetro de acoplamiento ϵ con $f(x) = 1 - 2x^2$, $\phi = 0.1$.

Hemos encontrado que, incluso mapas que sólo poseen caos robusto, pueden presentar esta emergencia de ventanas periódicas producto del acoplamiento. En la Figura 4.8 se muestra el diagrama de bifurcación en función de ϵ del sistema (4.9), para los mapas de Aguirregabiria [21], y de Andrecut y Ali [17], respectivamente.

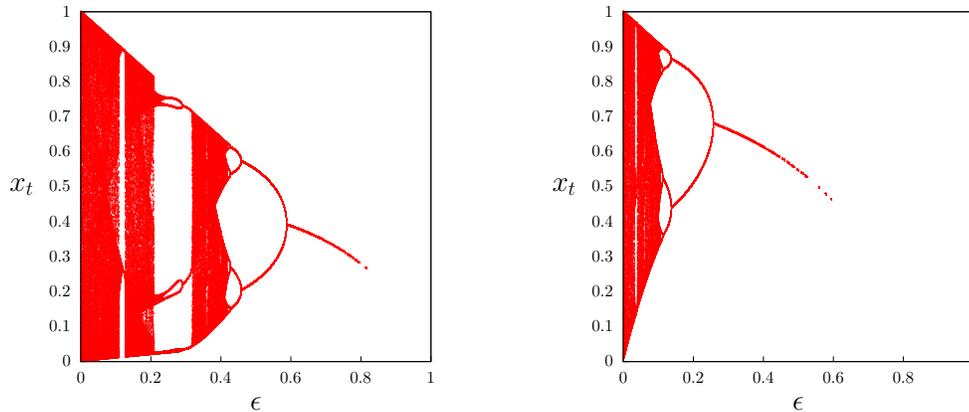


Figura 4.8: Diagramas de bifurcación en función de ϵ , para el mapa de Aguirregabiria [21] (izquierda) con $r = 3.0$, y el mapa de Andrecut y Ali [17] (derecha) con $b = 0.5$. Usando una señal constante $\phi = 0.1$.

Hemos denominado este fenómeno como *Ruta a la Sincronización por Duplicación de Períodos de Feigenbaum*.

La presencia de esta característica será fundamental para la principal condición para la emergencia de clusters y quimeras: la multi-estabilidad en la cuenca de atracción del sistema.

Ya que un sistema globalmente acoplado como el que hemos estudiado hasta ahora carece de la noción de vecindad, podemos considerar los N mapas acoplados como N mapas con condiciones iniciales distintas, siendo forzadas por una función ϕ particular.

De esta manera, escogiendo ϕ tal que su evolución temporal sea similar al de una función global $H(x_t^j)$, por ejemplo,

$$H(x_t^j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j), \quad (4.10)$$

podemos estudiar la multi-estabilidad de la cuenca de atracción. Para que exista un estado quimérico para cierto parámetro de acoplamiento ϵ , deben existir uno o más conjuntos de condiciones iniciales que se sincronizan entre sí.

En la Figura 4.9 mostramos la cuenca de atracción instantánea para el mapa de caos robusto (4.5), en el estado asintótico para 20000 condiciones iniciales uniformemente distribuidas entre $(0,1)$, despreciando 1500 transientes.

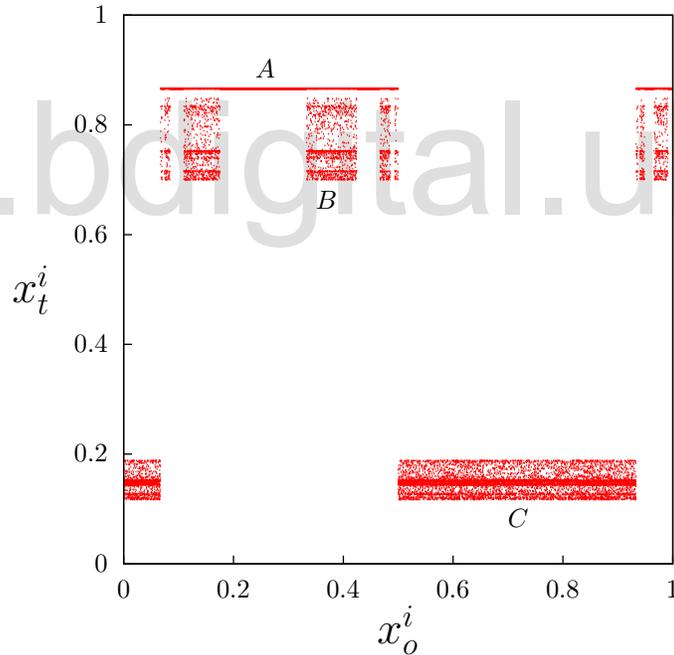


Figura 4.9: Cuenca de atracción del sistema (4.4) para el mapa (4.5) con los parámetros $r = 3.0$ y $\epsilon = 0.238$.

Cabe destacar, que la cuenca de atracción puede variar dependiendo de las condiciones iniciales del sistema, así como también de la función de acoplamiento $H(x_t^j)$.

Sin embargo, nuestro propósito es resaltar las propiedades de multi-estabilidad y de fractalidad de la cuenca de atracción. En la Figura 4.9, podemos apreciar tres grupos distinguibles en los valores asintóticos de los mapas, uno de ellos coherente, que se superpone con otro grupo fractal, y otro grupo incoherente bien definido $(0, 0.07) \cup (0.5, 0.94)$; llamaremos a estos tres grupos A , B y C respectivamente.

Sean x_0^1 y $x_0^2 \in A$, $x_0^3 \in C$ y $x_0^4 \in B$, cuatro condiciones iniciales distintas en el intervalo $(0, 1)$, correspondiente a cuatro mapas de un sistema de mapas de Aguirregabiria [21] globalmente acoplados, con $N = 5000$. En la Figura 4.10 mostramos los atractores del estado quimérico resultante.

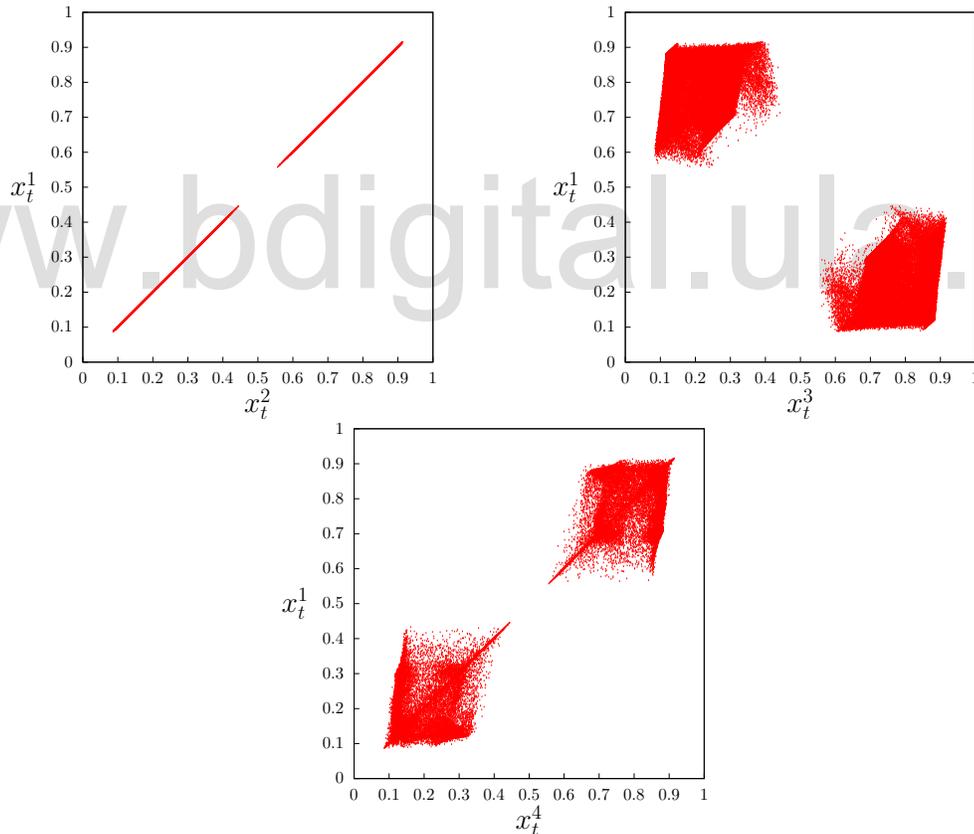


Figura 4.10: Atractores del sistema (4.4) en el estado quimérico para el mapa (4.5) con $\epsilon = 0.238$, $N = 5000$, $x_0^1 = 0.25$, $x_0^2 = 0.96$, $x_0^3 = 0.64$ y $x_0^4 = 0.48$.

Es muy interesante la relación de fase entre los grupos A y C (Figura 4.10 derecha), ya que de manera similar, un estado formado por 2 clusters caóticos mantienen una relación de fase entre ellos, tal como se muestra en la Figura 4.11.

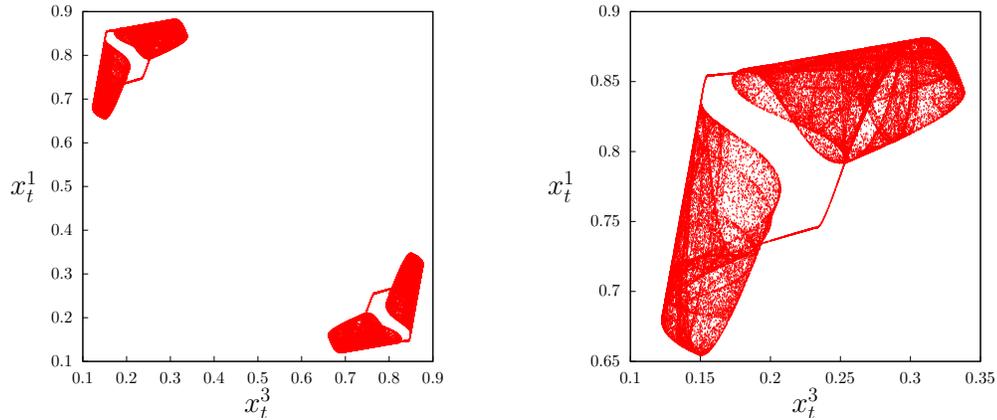


Figura 4.11: Atractor del sistema (4.4) en el estado de 2 clusters caóticos para el mapa (4.5) con $\epsilon = 0.3$, $N = 5000$, $x_1 = 0.25$, $x_3 = 0.64$ y $r = 3.0$. Con sus respectiva magnificación.

Además, estos atractores van comprimiendo su volumen en el espacio de fases a medida que aumenta la intensidad del acoplamiento ϵ , hasta alcanzar puntos fijos en el estado de 2 clusters periódicos.

Por otra parte, la cuenca de atracción posee una interesante característica, posee geometría fractal en su multi-estabilidad. En la Figura 4.12, mostramos distintas cuencas de atracción variando la intensidad del acoplamiento ϵ .

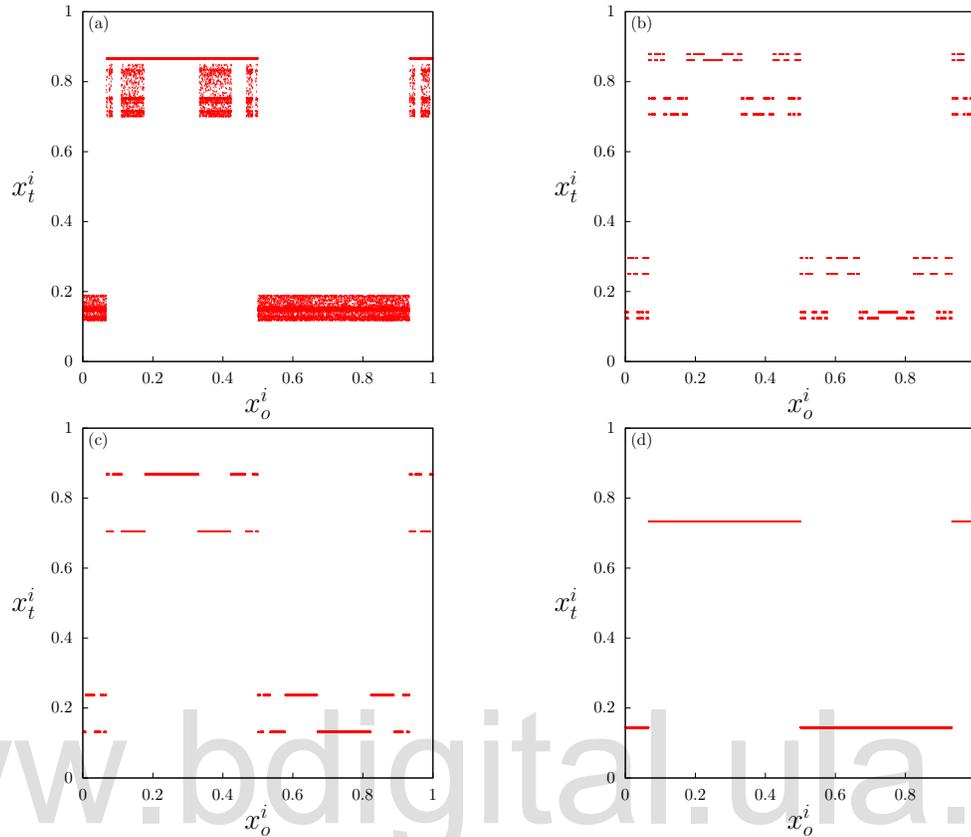


Figura 4.12: Cuenca de atracción del sistema (4.4) para distintos valores de ϵ , para el mapa (4.5) usando $r = 3.0$. (a) $\epsilon = 0.238$, (b) $\epsilon = 0.245$, (c) $\epsilon = 0.251$, (d) $\epsilon = 0.3$.

Esta notable propiedad de auto-organización, gracias a la multi-estabilidad en la cuenca de atracción, se presenta en todos los mapas unimodales con derivada de Schwarz negativa, donde la derivada de Schwarz se define como

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2. \quad (4.11)$$

Existen otros mapas, donde $Sf(x) \geq 0$, como los mapas singulares o el mapa tienda, que no presentan bandas separadas en su cuenca de atracción, de modo que, cualquier condición inicial termina en un único atractor. Por ejemplo, el mapa logarítmico, forzado con una señal ϕ constante, no presenta bifurcación de período doble al variar ϵ , sino una *Ruta a la Sincronización por Intermitencia*.

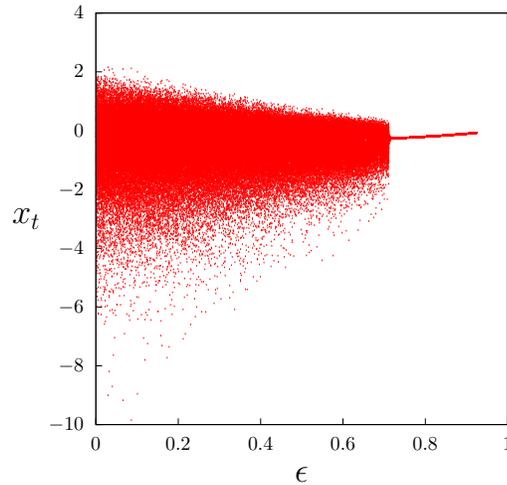


Figura 4.13: Diagrama de bifurcación en función de ϵ para $f(x) = \log|x|$.

Los resultados de este capítulo muestran que, efectivamente, los estados quiméricos pueden aparecer en sistemas globalmente acoplados, reivindicando el hallazgo temprano de Kaneko [4]. Adicionalmente, hemos encontrado varios resultados novedosos:

- Los estados quiméricos en sistemas globalmente acoplados son muy generales; es decir, pueden ocurrir con mapas que presentan ventanas periódicas (como el mapa cuadrático usado por Kaneko [4]), así como también con mapas de caos robusto.

- Sin embargo, no todos los mapas con caos robusto globalmente acoplados presentan quimeras o clusters, tales como los mapas singulares o el mapa tienda. Nuestros resultados nos permiten inferir la conjetura de que la aparición de estos estados requieren como condiciones necesarias la unimodalidad y la existencia de una derivada de Schwarz negativa en su dinámica local $Sf(x) < 0$.

- Los estados quiméricos preceden a los estados de clustering, en sistemas globalmente acoplados.

- Los estados quiméricos que hemos observado son caóticos, en contraste con los estados quiméricos observados mayormente hasta ahora, que son periódicos.



5 Conclusiones

"It is paradoxical, yet true, to say, that the more we know, the more ignorant we become in the absolute sense, for it is only through enlightenment that we become conscious of our limitations. Precisely one of the most gratifying results of intellectual evolution is the continuous opening up of new and greater prospects."

Nikola Tesla.

En la presente Tesis hemos investigado la naturaleza de diversos estados de sincronización en sistemas de elementos caóticos globalmente acoplados, mediante nuevas perspectivas.

Hemos mostrado que un sistema de mapas forzados por un mapa idéntico a ellos, puede presentar sincronización generalizada: los mapas forzados se sincronizan entre sí, pero no con el forzador. Este resultado conlleva a la extensión del concepto de sincronización generalizada, previamente usado cuando la dinámica del elemento forzador difiere de la dinámica del elemento forzado.

Hemos caracterizado la transición entre sincronización generalizada y sincronización completa en estos sistemas cuando se varía la intensidad del acoplamiento, mediante el análisis de los exponentes de Lyapunov del sistema, y de otras cantidades, como la desviación estándar asintótica, y la diferencia promedio asintótica. En particular, la sincronización generalizada se distingue porque el exponente de Lyapunov es marginalmente negativo.

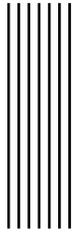
Anteriormente se pensaba que la presencia de ventanas periódicas en la dinámica del mapa era esencial para la formación de clusters [13, 22]; dicha conjetura se fundamenta en el hecho de que los mapas singulares (caracterizados por presentar caos robusto) no exhiben clusters al acoplarse globalmente [14]. Sin embargo, en

esta Tesis hemos propuesto contraejemplos donde mapas que carecen de ventanas periódicas, sujetos a un acoplamiento global, pueden presentar clusters.

Mostramos que los estados quiméricos en sistemas globalmente acoplados son muy generales; es decir, pueden ocurrir con mapas que presentan ventanas periódicas, así como también con mapas de caos robusto. Los estados quiméricos observados son caóticos, en contraste con los estados quiméricos reportados anteriormente, que son periódicos.

Finalmente, hemos encontrado que la formación de clusters está íntimamente ligada con los estados quiméricos, y que ambos fenómenos son consecuencias de una misma propiedad adquirida por los mapas al acoplarse globalmente: la multiestabilidad de su cuenca de atracción. Esta propiedad es característica de los mapas unimodales que poseen derivada de Schwarz negativa, $Sf(x) < 0$. Proponemos esta conjetura como condición necesaria para la existencia de estados de clustering y estados quiméricos en sistemas de mapas globalmente acoplados.

Diversas extensiones de este trabajo surgen como futuros problemas de investigación. Una extensión inmediata consiste en emplear dinámicas locales continuas, tales como osciladores de Rössler o de Lorenz, para explorar la formación de estados quiméricos en sistemas globalmente acoplados. Un problema de mucho interés sería el estudio de la información transferida y de la información mutua entre la función de acoplamiento y la dinámica local en un estado quimérico de un sistema globalmente acoplado. Adicionalmente, nos proponemos investigar la ocurrencia de estados quiméricos inducidos por un forzamiento global; lo cual resultaría de mucha relevancia puesto que las quimeras hasta ahora han sido observadas exclusivamente en sistemas autónomos.



Referencias

- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, and R. C. Hilborn, *American Journal of Physics* **70**, 655 (2002).
- [2] Boccaletti, S. (2008). *The synchronized dynamics of complex systems* (Vol. 6). Elsevier.
- [3] K. Kaneko, *Physica D* **86**, 158 (1995).
- [4] K. Kaneko, *Physica D* **41**, 137 (1990).
- [5] D.H. Zanette and A.S. Mikhailov, *Phys. Rev. E* **57**, 276 (1998).
- [6] W. Wang, I.Z. Kiss, and J.L. Hudson, *Chaos* **10**, 248 (2000).
- [7] G. C. Sethia, A. Sen, and G. L. Johnston, *Phys. Rev. E* **88**, 042917 (2013).
- [8] I. Omelchenko, Y. Maistrenko, P. Hövel, and E. Schöll, *Physical Review Letters* **106**, 234102 (2011), 1102.4709.
- [9] J. C. González-Avella, M. G. Cosenza, and M. San Miguel, *Physica A*, **399**, 24 (2014).
- [10] M. Palazzi, *Estados quiméricos en poblaciones interactivas de osciladores caóticos*, MSc tesis, Universidad de los Andes. Mérida-Venezuela, 2013.
- [11] V. Márquez, *Estados quiméricos en dinámica neuronal*, MSc tesis, Universidad de los Andes. Mérida-Venezuela, 2015.

- [12] K. Kaneko, *Chaos* **25**, 9 (2015).
- [13] M.G. Cosenza and A. Parravano, *Phys. Rev. E* **64**, 036224 (2001).
- [14] M.G. Cosenza and J. Gonzalez, *Prog. Theor. Phys.* **100**, 21 (1998).
- [15] A. Pikovsky, *J. Phys. A.* **16**, L109 (1983).
- [16] A. Potapov and M. K. Ali, *Physics Letters A.* **277**, 310 (2000).
- [17] M. Andrecut and M. K. Ali, *Phys. Rev. E* **64**, 025203 (2001).
- [18] E. Barreto, B. Hunt, and C. Grebogi, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4561 (1997).
- [19] M. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978)
- [20] H. G. Schuster, "Deterministic Chaos, an Introduccion", VCH (1995).
- [21] Aguirregabiria, J. M. (2009). arXiv preprint arXiv:0907.3790.
- [22] S. Manrubia, A. Mikhailov, D. Zanette, "Emergence of Dynamical Order", *World Scientific* (2004).
- [23] Y. Kuramoto, D. Battogtokh, *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* **5**, 380 (2002).
- [24] M. R. Tinsley, S. Nkomo, K. Showalter, *Nature Physics* **8**, 662 (2012).
- [25] A. M. Hagerstrom, T. E. Murphy, R. Roy, P. Hövel, I. Omelchenko, Eckehard Schöll. *Nature Physics* **8**, 658 (2012).
- [26] E. A. Martens, S. Thutupalli, A. Fourrière, and O. Hallatschek, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **110**, 10563 (2013).
- [27] D. M. Abrams and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 174102 (2004).