



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
V E N E Z U E L A

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Caracterización del comportamiento sincronizado en
sistemas maestro-esclavo mediante teoría de la
información**

Trabajo presentado ante la ilustre
Universida de Los Andes

Como requisito para la obtención del título de
Licenciado en física

Br. Víctor González Avella

Tutor: Dr. Kay Tucci

*“ The scientist does not study nature because it is useful;
he studies it because he delights in it,
and he delights in it because it is beautiful.
If nature were not beautiful,
it would not be worth knowing, and if it were not worth knowing
life would not be worth living ”*
- Henri Poincaré

www.bdigital.ula.ve

Resumen

Se investigan las propiedades del flujo de información entre los elementos que componen un sistema de dos mapas caóticos acoplados en una configuración maestro-esclavo cuyas dinámicas son idénticas. Utilizando técnicas para la cuantificación de la pérdida de información en un mapa, comprobamos que es posible distinguir entre órbitas periódicas y caóticas. Además proponemos que la aparición de un comportamiento sincronizado en el sistema depende de la pérdida de información del oscilador esclavo, la transferencia de información del elemento forzador al forzado, y la cantidad de información que estos comparten; se mide el tiempo promedio que le toma a un sistema alcanzar el estado sincronizado en base a la cantidad de información compartida entre los elementos, y por último se relaciona la pérdida de información promedio del esclavo con la tasa de crecimiento de la información que comparte con su forzador, obteniendo que cuando este crecimiento supera la pérdida se logra alcanzar el estado sincronizado.

Índice general

Resumen	II
Agradecimientos	V
Introducción	VII
1. Sincronización	1
1.1. condiciones para la sincronización	2
1.2. sincronización de osciladores periódicos	4
1.3. sincronización caótica	5
1.4. Algunas aplicaciones de modelos de sincronización	6
2. Información	9
2.1. Medidas de Información en sistemas	11
3. Mapas Iterativos	16
3.1. Mapa Logístico	16
3.2. Mapa de Ulam	19
3.3. Mapa tienda	20
3.4. Mapa logarítmico	21

4. Información y sincronización	23
4.1. Medida de la pérdida de información	24
4.2. Medida instantáneas de información	27
4.3. Tiempo promedio de sincronización	32
Conclusiones	35
Bibliografía	38

www.bdigital.ula.ve

Agradecimientos

A Antonia, mi madre, como poder poner en palabras todo lo debo agradecerte, es por ti que soy lo que soy, siempre apoyándome y dándome consejos, siendo el pilar sobre el cual me apoyo para alcanzar mis metas, este triunfo es tan tuyo como mio porque se que sin tu ayuda no lo habría logrado, gracias mamá.

A William, papa tu siempre has estado en todo momento brindando todo el apoyo posible para ver mis metas cumplidas, espero siempre ser un motivo de orgullo.

A Tia Ana, no hay frases para agradecer todo el el calor y el amor que me has brindado, siendo una segunda madre para mi.

A Wilzart quién siempre estuvo ha estado para apoyarme y vigilar mis pasos.

A Juan Carlos, mi padrino y hermano, quien me inspiró para llevar mis pasos por el camino de la ciencia, recuerdo de pequeño ver los trabajos que hacias, ir a la facultad y ver lo maravillosa que puede ser la naturaleza, y querer comprenderla a fondo.

A Diego, Luis, William mis hermanos de quienes he aprendido esas lecciones de vida, lo indispensable que es ser buena persona, y como cada aspecto del ser humano es importante.

A mis primos Yanuilli, Ronald, Behilly, Julio, Andres, Paola, quienes siempre están ahí para brindar su apoyo.

A Eli, esa persona especial que siempre logra hacerme sonreír, que me apoya en cada una de mis ideas, me ayuda a tener paciencia cada vez que un obstáculo aparece, que escucha eternas charlas de temas científicos con una sonrisa, aportando luego grandes ideas que me ayudaban a avanzar, siempre a mi lado siendo una fuente de inspiración para mi.

A la Universidad de los Andes, esta ilustre casa de estudios que me abrió sus puertas para alcanzar esta meta

A mi tutor el profesor Kay Tucci, que no sólo me guió en el desarrollo de este trabajo, sino que dedicó su tiempo y energía a enseñarme todas las herramientas necesarias para

culminar esta meta, por inspirarme para tomar esta interesante línea de investigación, por ser no solo un profesor sino un amigo siempre dispuesto a colaborar con sus conocimientos para resolver todos los obstáculos que surgían en cada etapa este trabajo.

Al profesor Mario, quién me abrió las puertas a este magnífico grupo, por mostrarme el valor que tiene la dedicación y el espíritu humano en el ambiente científico

A mis compañeros caóticos Víctor, María, Carlos, Adrian, Karen, Rubén, Alejandro, por compartir sus experiencias y amistad, y convertir al grupo en una gran familia

A mis amigos y compañeros scouts, Darwin, Maylin, Ricardo, Felix, Pedro, Gaby, Yarim, y muchos otros, quienes siempre están ahí para brindar su apoyo y cariño en momentos difíciles.

A los jóvenes de mi tropa, que me inspiran a ser mejor cada día, a quienes dedico mis días para enseñarles a ser buenos ciudadanos, y veces creo que aprendo más de ustedes de lo que ustedes de mí.

www.bdigital.ula.ve

Introducción

Los sistemas dinámicos son aquellos que evolucionan en el tiempo y cuyo comportamiento está gobernado por leyes que pueden ser descritas mediante un modelo matemático. Los científicos han dedicado mucho tiempo a caracterizar los comportamientos de estos sistemas, alcanzando cada vez un conocimiento más profundo de la naturaleza. En años recientes se ha observado que muchos de estos sistemas exhiben comportamientos no triviales y complejos. En general, estos comportamientos surgen debido a que un gran número de elementos interactúan mediante leyes no lineales, haciendo que en ocasiones estos sistemas posean una alta dependencia a las condiciones iniciales, volviéndolos caóticos. [1]

Uno de los fenómenos que ha sido y continúa siendo ampliamente estudiado en estos sistemas es el de la sincronización caótica. Aparece cuando los elementos que componen al sistema alcanzan un estado en el cual ajustan sus ritmos y comienzan a oscilar con frecuencias coherentes. A pesar de ser un comportamiento conocido y estudiado desde hace más de 20 años, para muchos aún resulta realmente sorprendente como sistemas caóticos, con su alta sensibilidad a las condiciones iniciales, puedan exhibir este tipo de comportamientos [2]. El fenómeno de la sincronización de elementos caóticos ha sido ampliamente estudiado por un gran número de investigadores y se han desarrollado gran variedad de aplicaciones, en monitoreo y control de sistemas dinámicos y en comunicaciones. También, el fenómeno ha sido observado en sistemas de lasers caóticos, células beta del páncreas cuando reaccionan a los cambios de concentración de glucosa en la sangre actuando de manera coordinada para aumentar o disminuir la producción de insulina [3] y en las células del cerebro y la aparición de crisis de epilepsia. [4]

Las condiciones necesarias para el surgimiento del estado sincronizado también han sido objeto de gran interés. Por el ejemplo, con un modelo de mapas caóticos acoplados Orlando Álvarez-Llamoza y Mario Cosenza [5] comparan distintas formas de acoplamiento para determinar si el origen del forzamiento es fundamental para la aparición de sincronización en el sistema, si es necesario que el acoplamiento sea constante, o si debe alcanzar a todos los elementos en el sistema al mismo tiempo. La influencia que tiene la estructura del sistema en la aparición de estados sincronizados también ha sido estudiada, con un modelo de redes con enlaces asimétricos propuesto por Danny De Castro y Kay Tucci [6], con un modelo de formación de redes pequeño mundo a partir de redes coevolutivas propuesto por Alejandra

Mendez y Mario Cosenza [7], entre otros.

El presente trabajo se enfoca en el estudio de la relación que existe entre el surgimiento del estado sincronizado en un sistema conformado por elementos caóticos y la manera en la que estos intercambian información entre sí. En particular nuestro objetivo es *encontrar si al presentarse el fenómeno de sincronización caótica en un sistema de osciladores caóticos acoplados existe una relación entre la pérdida de información de la dinámica caótica con la información compartida y transferida del oscilador maestro al esclavo*. Para ello proponemos estudiar un sistema compuesto por dos osciladores caóticos con dinámicas idénticas acoplados unidireccionalmente, es decir, un sistema maestro-esclavo.

Este documento está estructurado de la siguiente manera, en el capítulo 1 se hace una breve explicación del fenómeno de la sincronización, desde sus primeros estudios hechos por Christiaan Huygens en el siglo XVII, pasando por el modelo matemático presentado por Yoshiki Kuramoto en 1975 [8] y su posterior aplicación a sistemas no lineales, hasta hacer una descripción de algunos ejemplos donde este fenómeno juega un papel importante en el comportamiento del sistema. En el capítulo 2 se presentan algunos aspectos de la teoría de la información desarrollada por Claude Edwood Shannon en 1949 [9]. Allí se explican algunas cantidades utilizadas para medir información en sistemas compuestos por varios elementos haciendo una breve revisión del concepto de *Transferencia de entropía* o *Transfer entropy* propuesto por Thomas Schreiber en el año 2000 [10] y su aplicación en sistemas de mapas acoplados unidireccionalmente. El capítulo 3 contiene conceptos relacionados con mapas caóticos. Allí se hace una reseña sobre los mapas usados en este trabajo: logístico, Ulam, tienda y logarítmico; se describen sus comportamientos y propiedades, mostrando que estos sistemas sencillos presentan comportamientos caóticos.

En el capítulo 4 se explica la técnica propuesta para medir la pérdida de información de un elemento caótico que evoluciona en el tiempo, para luego aplicarla a un oscilador. Continúa presentando el modelo del sistema maestro-esclavo al que se le mide el flujo instantáneo de información entre el par de elementos que lo conforman mediante un método propuesto en este trabajo. Con estas medidas se hace una comparación entre la información que pierde el elemento forzado y la tasa de crecimiento de la información que comportarte con su forzador, analizando como se relaciona la intensidad del acoplamiento con la rapidez en la que el sistema alcanza el estado sincronizado. Por último, en las conclusiones se discuten los resultados obtenidos y se proponen varias posibles aplicaciones de las técnicas desarrolladas para este trabajo.

Capítulo 1

Sincronización

En un sistema conformado por un conjunto de elementos que interactúan entre sí, existen ciertas condiciones para las cuales las interacciones traen como consecuencia el ajuste del ritmo de uno de los elementos del sistema en función de los demás elementos. A este fenómeno se le conoce como sincronización.

La sincronización fue estudiada por primera vez por el físico holandés Christian Hyugens en el año 1673 mientras realizaba un experimento sobre el funcionamiento de relojes de péndulo a bordo de un barco. Hyugens observó que si dos relojes se colocaban sobre la misma viga de soporte, los péndulos de los relojes comenzaban a oscilar con frecuencias idénticas, pero en fases totalmente opuestas, como se ilustra en la figura 1.1.

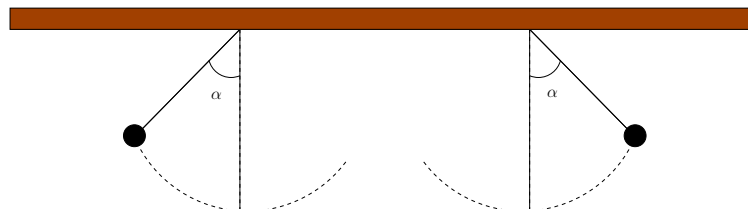


Figura 1.1: Representación del modelo de los relojes de péndulo observados por Hyugens

Al estudiar detenidamente este comportamiento Hyugens se percató de que la sincronización ocurría gracias a que las vibraciones que cada uno de los relojes se transmitían a través de la viga de soporte, y de este modo la viga actuaba como canal de comunicación entre los relojes. Para compensar la vibración del soporte los relojes ajustaban sus fases poco a poco y así lograban disminuir al mínimo las vibraciones de la viga.

1.1. condiciones para la sincronización

En un sistema se puede presentar el fenómeno de la sincronización siempre y cuando cumpla con ciertas condiciones. En primer lugar los elementos que conforman el sistema deben ser osciladores autosostenibles, es decir, que deben ser capaces de oscilar de forma independiente cuando se encuentran aislados. Además los objetos sometidos a observación deben poder separarse en subsistemas, porque dos variables que cambien de manera sincronizada no implican necesariamente sincronización, como ocurre en el caso de dos observables de un mismo elemento que pueden variar de forma aparentemente sincronizada debido a que existe alguna relación funcional entre dichos observables.

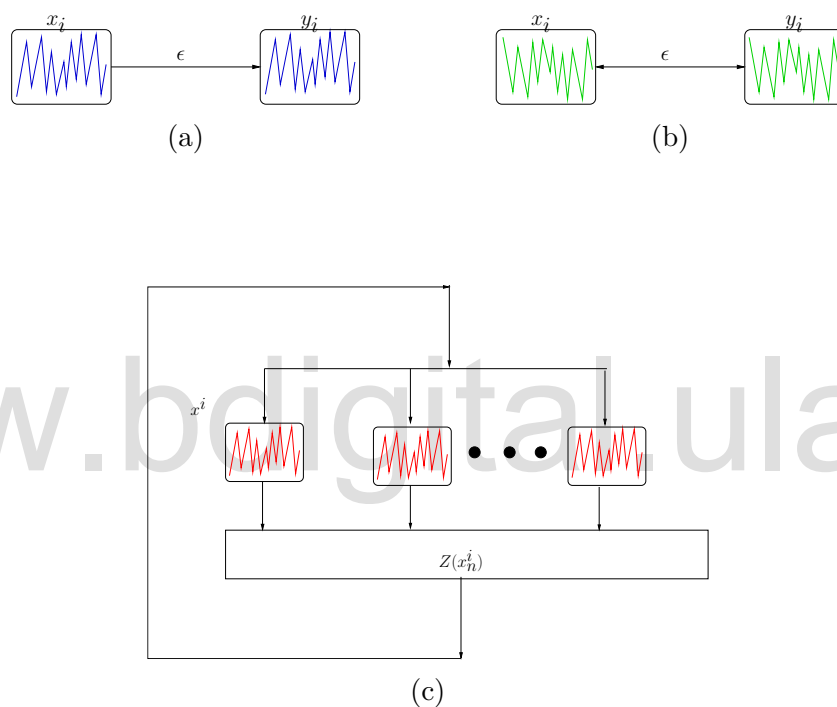


Figura 1.2: Representación de un sistema de osciladores con distintos tipos de acoplamiento, (a) unidireccional, (b) bidireccional y (c) global.

En general, dos subsistemas acoplados o no tienen cierta diferencia de fase $\Delta f = f_1 - f_2$. Medir esta diferencia sirve para determinar cómo el acoplamiento logra la sincronización del sistema luego de que los elementos comienzan a interactuar entre sí. También es necesario medir la intensidad del acoplamiento y determinar el tipo de interacción que existe entre los elementos que conforman el sistema. Por ejemplo, en la figura 1.2 se muestran tres tipos de interacciones que pueden presentarse entre los elementos de un sistema. En primer lugar, figura 1.2(a), tenemos un acoplamiento unidireccional entre dos subsistemas, que puede

expresarse mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= f(x_t) \\ y_{t+1} &= (1 - \epsilon)g(y_t) + \epsilon f(x_t) \quad ,\end{aligned}$$

donde x_n representa el estado del elemento forzador en el instante t , f es la función que describe la evolución del elemento forzador, y_n es el valor del estado del elemento forzado en el instante n , ϵ es el parámetro que controla la intensidad del acoplamiento y la función g describe la evolución del elemento forzado en ausencia de forzamiento. Este es el tipo de acoplamiento por ejemplo, es el que describe el ajuste del reloj biológico circadiano de muchas especies animales con respecto al ciclo de rotación de la Tierra. En general, el período circadiano no es de veinticuatro horas, pero este se ajusta a este valor mediante factores ambientales como la iluminación; sin embargo es obvio que el ciclo terrestre no es afectado por las acciones de los seres vivos, es decir el sistema presenta un acoplamiento unidireccional.

Cuando la interacción ocurre en ambos sentidos, como se muestra en la figura 1.2(b), se dice que el acoplamiento es bidireccional, por ejemplo un sistema compuesto por dos elementos con dinámicas idénticas dado por

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \epsilon f(x_n) + (1 - \epsilon)f(y_n) \\ y_{n+1} &= \epsilon f(y_n) + (1 - \epsilon)f(x_n) \quad .\end{aligned}$$

Nótese que en este caso el estado del primer elemento x afecta al estado del segundo elemento y en la misma forma en que el segundo afecta al primero. Un caso particular de este tipo de acoplamiento es el que observó Hyugens con los dos relojes de péndulo con soporte común mencionado al inicio del capítulo.

En la figura 1.2(c) se muestra otro tipo de acoplamiento, el global (figura 1.2c), donde cada elemento es influenciado por todos los demás elementos que componen el sistema. Por ejemplo, los N elementos de un sistema pueden verse afectados por el campo medio del mismo, esto es

$$\begin{aligned}Z &= 1/N \sum_{i=1}^N f(x_n^i) \\ x_{n+1}^i &= (1 - \epsilon)f(x_n^i) + \epsilon Z \quad ,\end{aligned}$$

donde Z es el campo medio instantáneo del sistema. Este es el caso de las poblaciones de luciérnagas en el sureste asiático que producen destellos al unísono. Cada luciérnaga puede representarse como un oscilador acoplado con todas las otras, donde cada insecto ajusta su frecuencia de encendido mediante la interacción con el resto de la población [11].

1.2. sincronización de osciladores periódicos

Una aproximación adecuada sobre el fenómeno de la sincronización de sistemas compuestos por un gran número de elementos es tomar a cada elemento de dicha población como un oscilador. La primera descripción completa acerca del fenómeno de la sincronización para un sistema de osciladores globalmente acoplados fue desarrollado en 1984 por Yoshiki Kuramoto [8]. El modelo de Kuramoto consiste en una serie de osciladores débilmente acoplados, cuyas fases varían un poco en comparación con las frecuencias intrínsecas de los elementos.

En este sistema ocurre que aquellos elementos cuyas frecuencias naturales son similares comienzan a sincronizarse mientras que aquellos osciladores cuyas frecuencias son muy distintas se oponen a que el sistema se sincronice. Como consecuencia de este comportamiento la sincronización comienza a aparecer a partir de cierta intensidad de interacción, que es determinada por las características de todos los elementos del sistema. Kuramoto observó que la transición a la sincronización es similar a la transición de fase que se observa en algunos sistemas físicos en equilibrio.

El sistema propuesto por Kuramoto está formado por N osciladores individuales, con frecuencias ω_i con $i = 1, 2, \dots, N$; distribuidas según una densidad de probabilidad $g(\omega)$. Suele utilizarse una distribución de Lorentz para asignar las frecuencias de los osciladores alrededor de un valor ω_0 ,

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \quad (1.1)$$

donde γ representa el ancho de la distribución. La dinámica de los elementos viene dada por

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N U_{ij}(\phi_i, \phi_j), \quad (1.2)$$

donde ϕ_i representa la fase del oscilador i , $\dot{\phi}_i$ la derivada con respecto al tiempo de ϕ_i y U_{ij} representa el acoplamiento entre los elementos i y j , dado por

$$U_{ij}(\phi_i, \phi_j) = \frac{\epsilon}{N} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad (1.3)$$

donde ϵ representa la intensidad del acoplamiento que es igual para todos los pares de elementos. Note que cada oscilador trata de evolucionar con su propia frecuencia ω_i , ya que en ausencia de acoplamiento, esto es cuando $U = 0$, se tiene que $\dot{\phi}_i = \omega_i$, pero el acoplamiento busca sincronizarlos a todos. Si $N \rightarrow \infty$ la ec. (1.2) puede reescribirse de la forma

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - \epsilon \sigma (\phi_i - \Psi), \quad (1.4)$$

donde σ representa un parámetro de orden y Ψ es la fase promedio del sistema. en la fig. 1.3 puede observarse la relación que existe entre σ y ϵ . Cerca del umbral de sincronización el parámetro de orden se comporta como

$$\sigma \sim \sqrt{\epsilon - \epsilon_c} \quad (1.5)$$

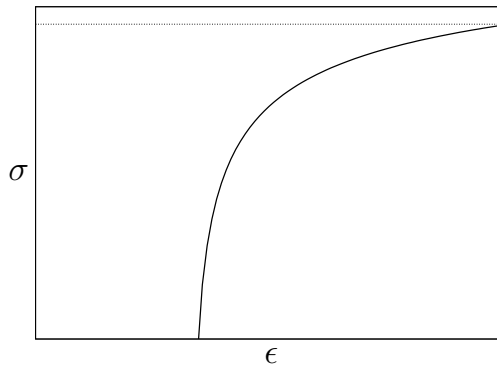


Figura 1.3: Transición de fases para el modelo de Kuramoto.

El aumento en el valor del parámetro de orden σ indica que el sistema está cada vez más sincronizado.

1.3. sincronización caótica

Cuando un oscilador caótico es forzado por idéntico al primero puede darse el caso en que se logre la supresión de las diferencias en el valor de los estados de los elementos. Esto ocurre a pesar de que en los sistemas caóticos las trayectorias divergen y rápidamente pierden relación. Fue en 1990 que Louis M. Pecora [2] logra dar una explicación completa de cómo surge el comportamiento sincronizado en sistemas con elementos caóticos, mediante un modelo donde se acoplan dos sistemas caóticos a una señal común. Partiendo de un sistema n -dimensional $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, donde las coordenadas v_i varían de acuerdo con la siguiente regla

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) . \quad (1.6)$$

Pecora divide este sistema de manera arbitraria en dos subsistemas $v = (u, w)$, cuyo comportamiento está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{aligned} , \quad (1.7)$$

donde $\mathbf{u} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (f_1(\mathbf{v}), f_2(\mathbf{v}), \dots, f_m(\mathbf{v}))$, es decir que u está compuesto por las primeras m componentes de \mathbf{v} , y $\mathbf{w} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n)$ con $\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (f_{m+1}(\mathbf{v}), \dots, f_n(\mathbf{v}))$, así \mathbf{w} representa las $n - m$ componentes restantes de \mathbf{v} . Luego se crea un subsistema \mathbf{w}' , idéntico a \mathbf{w} , pero con las variables v_i correspondientes sustituidas por un nuevo conjunto de variables v'_j en la función \mathbf{h} , obteniendo un sistema donde están presentes los tres subsistemas,

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) , \quad \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) , \quad \dot{\mathbf{w}}' = \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{w}') . \quad (1.8)$$

Evaluando la diferencia $\Delta w = w' - w$ nos permite tener una idea de cuanto difieren las trayectorias de w' y w , estos se sincronizan cuando $\Delta w \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Pecora demostró que $\Delta w \rightarrow 0$ cuando todos los exponentes de Lyapunov del subsistema w son negativos. Este modelo fue probado por Pecora en sistemas de atractores de Rössler y de Lorenz y en sistemas de circuitos caóticos acoplados con resultados exitosos.

Si el elemento forzador y el forzados no son idénticos en su dinámica nunca se podrá alcanzar trayectorias completamente iguales, pero si el acoplamiento es suficientemente fuerte, se puede llegar a obtener una relación funcional entre los estados de los elementos. Para ilustrar mejor esta idea suponga que se tiene un sistema formado por dos elementos distintos $x_{n+1} = f(x_n)$ y $y_{n+1} = g(y_n)$, los cuales se acoplan de determinada manera, por ejemplo unidireccionalmente de la forma

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ y_{n+1} &= (1 - \epsilon)g(y_n) + \epsilon f(x_n) \end{aligned} \quad ,$$

a partir de cierto valor de intensidad de acoplamiento ϵ el sistema comienza a comportarse de manera que $y_n = F(x_n)$, es decir que los estados de y pueden construirse a partir de x si F es conocida, a este tipo de relación se le conoce como sincronización generalizada.

1.4. Algunas aplicaciones de modelos de sincronización

Desde los primeros estudios del fenómeno de la sincronización llevados a cabo por Huygens, pasando por la explicación de este tipo de comportamiento a través del modelo de Kuramoto, y la aplicación a sistemas no lineales propuesta por Pecora, la sincronización ha sido ampliamente observada y estudiada en gran diversidad de sistemas.

Uno de ellos es el estudio sobre la sincronización de un conjunto de osciladores de Rössler globalmente acoplados llevado a cabo por Miguel Escalona y Mario Cosenza [4] donde se demuestra que para determinados valores del parámetro de acoplamiento ϵ los osciladores comienzan a agruparse en clusters, hasta que una vez superado un valor crítico ϵ_c , todos los elementos se agrupan dentro de un solo cluster. Además en su trabajo se analiza la influencia que tiene la introducción de una señal externa, en forma de ruido, en el proceso de formación de estos clusters. Una vez comprobada la eficacia de esta técnica para determinar el grado de sincronización de un sistema los autores la aplican a un conjunto de señales de electroencefalogramas (EEG) provenientes de pacientes sanos y epilépticos, encontrando que en promedio las señales del EEG de los pacientes que sufren de epilepsia presentan un mayor grado de sincronización que los paciente sano, siendo el grado de sincronización máximo justo antes de producirse una crisis epiléptica generalizada.

Otra aplicación del estudio de sincronización de sistemas puede verse en el atrabajo realizado por Alejandra Méndez y Mario Cosenza [7] con un sistema dinámico coevolutivo.

Utilizando redes aleatorias, y permitiendo que el sistema evolucione se encuentra que bajo ciertas condiciones los elementos comienzan a sincronizarse, agrupándose por su nivel de coherencia, convirtiendo a la red en una de tipo pequeño mundo, donde existen conexiones de largo alcance entre elementos, de modo que la distancia promedio entre dos elementos i y j de la red es mucho menor que el número de total elementos que conforman el sistema.

Un modelo igualmente interesante sobre redes coevolutivas donde la sincronización ejerce una gran influencia en el comportamiento del sistema es el estudiado por Victor Marquez y Mario Cosenza [12], donde se toma un conjunto de mapas con condiciones iniciales uniformemente distribuidas, distribuidos en una red regular y globalmente acoplada, se aplica un estímulo externo constante a uno de los elementos del sistema, obteniendo que para ciertos valores de este estímulo, la red comienza a organizarse en una estructura jerárquica de capas, donde casi todos los elementos de una capa están conectados con los de las capas contiguas. Esta estructura, que permite que la información viaje a través de todo el sistema, se presenta cuando el grado de sincronización del sistema es bajo.

El surgimiento de la sincronización parece depender la forma en la que los elementos se conectan entre sí. Danny De Castro y Kay Tucci [13] estudian un modelo que evidencia como la estructura del sistema puede llevar a la aparición de estados sincronizados, utilizando redes de elementos caóticos acoplados, donde una fracción de los enlaces de la red son asimétricos encuentran que a medida que se aumenta esta fracción de enlaces asimétricos es necesaria una menor intensidad de acoplamiento para que los elementos se sincronicen entre sí.

Un sistema forzado puede sincronizarse con la señal a la cual se encuentra acoplado. Para comprobar si el origen de este forzamiento es relevante, Orlando Álvarez-Llamoza, Mario Cosenza y Gilberto Paredes [5] [14] [15] [16] comparan el comportamiento de sistemas de mapas acoplados a un forzamiento externo con sistemas autónomos. En estos sistemas estudian las condiciones mínimas para el surgimiento de la sincronización, comparando entre acoplamientos intermitentes, donde el forzamiento no ocurre en cada instante de tiempo, y acoplamientos heterogéneos, en los cuales no todos los elementos son forzados al mismo tiempo. Los resultados obtenidos por los autores demuestran que el origen de la señal no es relevante para la aparición del comportamiento sincronizado en el sistema, al igual que demuestran que no es necesario que la señal actúe sobre todos los elementos al mismo tiempo. Plantean además que solamente es necesario que los elementos compartan una cantidad mínima de información con el forzamiento para lograr alcanzar un estado sincronizado. Basándose en el principio de aproximación auxiliar [17], que dice que un mapa forzado puede sincronizarse con otro mapa idéntico forzado por la misma señal, encuentran que un mapa sometido a forzamiento intermitente logra alcanzar un estado sincronizado estable para ciertos valores de la intensidad de acoplamiento, esto ocurre de manera análoga para un sistema extendido, donde cada mapa posee la misma dinámica y es sometido al mismo forzamiento. Este resultado muestra además que bajo ciertas circunstancias el comportamiento colectivo de un sistema puede ser descrito a partir de un elemento individual.

Utilizando mapas caóticos que presentan dos bandas simétricas de caos robusto Orlando Álvarez-Llamoza y Mario Cosenza [18] estudian como se manifiesta el fenómeno de la sincronización en un conjunto de estos mapas globalmente acoplados, utilizando las dos bandas de estabilidad se etiqueta a los elementos de acuerdo a la banda a la cual son asignados inicialmente, luego se permite que el sistema evolucione, encontrando que para valores bajos de acoplamiento, cada elemento tiende a quedarse en su banda inicial, pero no se producen clusters, es otras palabras, se presenta un estado desincronizado, cuando el parámetro de acoplamiento supera cierto valor crítico los elementos comienzan a saltar de una región a otra agrupándose pero aún no forman clusters, es decir, comienza a presentarse un estado ordenado pero todavía desincronizado, a medida que el acoplamiento sigue aumentando los estados de los elementos comienzan a hacerse coherentes entre sí, alcanzándose un estado sincronizado, y por último para valores muy altos de acoplamiento el sistema vuelve a caer en un estado totalmente desincronizado. La naturaleza de los elementos que interaccionan puede llevar a diferentes comportamientos para una misma topología.

En esta sección se han mostrado varios aspectos del fenómeno de la sincronización, resaltando cual es su influencia en el comportamiento de los elementos que componen un sistema. Como existen sistemas donde el comportamiento sincronizado es deseable pero en otros es mejor evitar que surja este tipo de comportamiento, consideramos que es necesario entender todos los aspectos posibles de la sincronización, por lo que con este trabajo se propone analizar la relación que existe entre la forma en que los elementos se acoplan en un sistema y el intercambio de información entre ellos mientras alcanzan un estado sincronizado. Para ello se estudia un sistema Maestro-esclavo de mapas con dinámicas caóticas idénticas midiendo los flujos de información presentes en el sistema.

Capítulo 2

Información

El término información puede definirse como la cantidad de *sorpresas* que recibe un observador al estudiar un sistema mientras evoluciona en el tiempo, es decir que se refiere a la incertidumbre que se tiene cuando el sistema observado pasa de un estado conocido x_t a un nuevo estado $x_{t+\Delta t}$ perteneciente al conjunto de posibles estados. Si cada una de las transiciones al nuevo estado tiene una probabilidad p_i de ocurrir, la cantidad de información producida por este cambio dependerá de que tan probable es el estado que adopta el sistema en el tiempo $t + \Delta t$.

En el año 1949 Claude Edwood Shannon [9] publicó su teoría de la comunicación, donde propuso un método para medir esta información utilizando probabilidades. Shannon planteó que si se tiene un sistema con un conjunto de n estados posibles cuyas probabilidades de ocurrir son p_1, p_2, \dots, p_n ; todas ellas conocidas, existe una cantidad H que mide que tan seguro se está del siguiente estado del sistema. Esta cantidad llamada entropía de Shannon viene dada por

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i) , \quad (2.1)$$

Note que H es continua en p_i , y alcanza su máximo cuando $p_i = 1/n$. Esto último quiere decir que cuando todos los estados son igualmente probables es más difícil anticipar cual de ellos será el próximo.

También, partiendo de la ec. (2.1) se cumple que si uno de los posibles estados puede ser dividido en dos estados sucesivos, entonces el valor original de H debe ser igual a la suma ponderada de los valores individuales de cada nuevo cálculo de entropía H_A y H_B de los dos eventos sucesivos, donde A representa el primer evento, y B el segundo. Por ejemplo, si se tiene una situación con tres posibles estados cuyas probabilidades son $p_1 = 1/2, p_2 = 1/3, p_3 = 1/6$, como se muestra en el lado izquierdo de la figura 2.1, H depende de los tres eventos directamente. Pero en el lado derecho se muestra que primero se elige entre dos posibles

estados con probabilidades $p_1 = p_2 = 1/2$ representados en la región A en la fig. 2.1, si se escoge la segunda opción aparece un nuevo cambio a otro par de estados en la región B con probabilidades $p_{2,1} = 2/3$ y $p_{2,2} = 1/3$, si se observa detenidamente se puede apreciar que la distribución final de probabilidades en ambos casos es igual, por lo tanto la entropía en ambas situaciones es la misma, esto es

$$H = H_A + \frac{1}{2}H_B ,$$

donde el coeficiente $1/2$ que acompaña a H_B , indica que la segunda opción ocurre solo en la mitad de los casos.

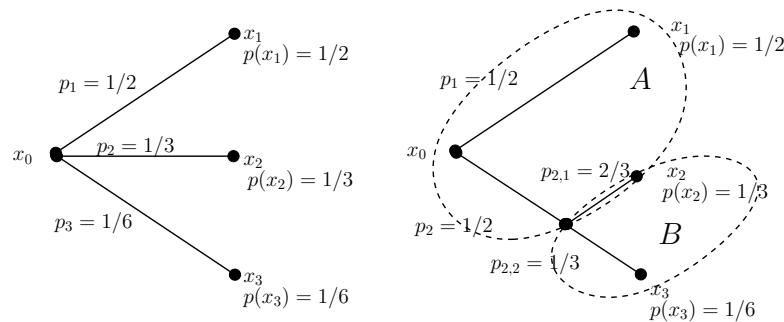


Figura 2.1: Árboles de decisión para diferentes combinaciones de eventos sucesivos. A la izquierda se observa una situación donde se pasa del estado inicial al final directamente, a la derecha se puede apreciar la decisión entre dos eventos, el primero A y el segundo B . Note que la distribución final de probabilidades en ambos es igual.

Es fácil observar que la expresión de H se asemeja a la definición de entropía utilizada en algunas formulaciones de mecánica estadística, donde p_i es la probabilidad de que el sistema se encuentre en estado i . Una diferencia es que la base utilizada para el cálculo del logaritmo en la entropía de Shannon es 2. Esto hace que la entropía venga expresada en bits, que son la unidad básica de información.

Cuando se tienen dos eventos, x y y , con probabilidades $p(x)$ y $p(y)$ respectivamente, y sea $p(x, y)$ la probabilidad conjunta de que ocurra x y luego y , entonces la entropía conjunta de dicho evento viene dada por

$$H(x, y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log_2(p(x, y)) , \quad (2.2)$$

mientras que la entropía de x uno de los eventos cuando no se conoce el valor del otro

$$\begin{aligned} H(x) &= - \sum_{x,y} p(x, y) \sum_y \log_2(p(x, y)) \\ H(y) &= - \sum_{x,y} p(x, y) \sum_x \log_2(p(x, y)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

A partir de las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) es posible demostrar que

$$H(x, y) \leq H(x) + H(y) . \quad (2.4)$$

Esta última inecuación indica que mientras más se conozca acerca de la estructura del sistema, menor será la información necesaria para construir los sucesivos estados del mismo. En la ec. (2.4) la igualdad se cumple solamente cuando x y y son independientes entre sí. En caso de no lo sean, existe una probabilidad condicional de que ocurra un evento x , sabiendo que también sucede otro evento y . LA probabilidad condicional se escribe $p(x|y)$ y se lee la “probabilidad de x dado y ”. Dicha probabilidad es dada por

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{\sum_y p(x, y)} , \quad (2.5)$$

de allí se define la cantidad entropía condicional como la entropía de y para cada valor de x , ponderada de acuerdo a la probabilidad de obtener un x particular, esta cantidad viene dada por

$$H(x|y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log(p(x|y)) , \quad (2.6)$$

esta cantidad mide que tanta incertidumbre tenemos acerca del valor de y cuando el valor de x es conocido. Finalmente de las ecuaciones (2.4) y (2.6) se obtiene la desigualdad

$$H(y) \geq H(x|y) . \quad (2.7)$$

La última inecuación indica que la existencia de dependencia entre los estados de un sistema reduce la cantidad de información generada por el mismo, ya que conociendo una parte del sistema es más fácil predecir la evolución del resto.

2.1. Medidas de Información en sistemas

Al estudiar sistemas compuestos por varios elementos, cabe preguntarse cuál de los componentes del sistema produce más información y a que velocidad se produce el intercambio de información entre las partes del sistema. Para dos procesos I y J con probabilidad conjunta $p(i, j)$ existe una forma de medir la cantidad de información que comparten utilizando la medida de información mutua media, que viene dada por

$$M_{IJ} = \sum_{i,j} p(i, j) \log \left(\frac{p(i, j)}{p(i)p(j)} \right) , \quad (2.8)$$

Se puede demostrar que

$$M_{IJ} = H_I + H_J - H_{IJ} \geq 0 , \quad (2.9)$$

y de esta última ecuación se puede ver que M_{IJ} no varía si se intercambian I y J , es decir, que esta cantidad no expresa en que dirección se transmite la información, en otras palabras M_{IJ} no distingue cuanta información es transmitida de una parte del sistema a la otra.

Para agregar estructura dinámica al problema se puede estudiar las probabilidades de transición en lugar de las probabilidades estáticas, y considerando que el sistema puede ser aproximado mediante un proceso de Markov estacionario de orden k . De esta forma tenemos que la probabilidad de encontrar al proceso I en el estado i_{n+1} al tiempo $n+1$ es independiente del estado i_{n-k} , es decir que $p(i_{n+1}|i_n^{(k-1)}) = p(i_{n+1}|i_n^{(k)})$, donde $i_n^{(k)} = i_n, \dots, i_{n-k-1}$.

Para estudiar la dinámica de la información entre dos elementos de un sistema, el primero en un proceso I y el segundo con un proceso J , Thomas Schreiber [10] propuso estudiar la desviación con respecto a la propiedad generalizada de Markov $p(i_{n+1}|i_n^{(k)}) = p(i_{n+1}|i_n^{(k)}, j_n^{(l)})$ mediante la cantidad *Transferencia de entropía* o *Transfer entropy*, que viene dada por

$$T_{J \rightarrow I} = \sum p(i_{n+1}, i_n^{(k)}, j_n^{(l)}) \log \left(\frac{p(i_{n+1}|i_n^{(k)}, j_n^{(l)})}{p(i_{n+1}|i_n^{(k)})} \right). \quad (2.10)$$

Según Schreiber, por razones computacionales, los valores ideales de k y l son $k = l$ o $l = 1$. Nótese que la transferencia de entropía no es simétrica al permutar los procesos I y J , ya que mide el grado de dependencia de un proceso respecto al otro.

Para mostrar la manera en que $T_{J \rightarrow I}$ trabaja, aplicamos esta medida a los mismos dos ejemplos propuestos y estudiados por Schreiber. El primero consiste en un conjunto unidimensional de mapas acoplados formando un anillo unidireccional, utilizando mapas tipo tienda con parámetro de control $r = 2$, cuya dinámica viene dada por la función

$$f(x) = \begin{cases} rx & \text{si } x < 0,5 \\ r - rx & \text{si } x \geq 0,5 \end{cases}. \quad (2.11)$$

Los elementos del sistema son acoplados de la siguiente manera

$$x_{n+1}^m = \epsilon f(x_n^{m-1}) + (1 - \epsilon) f(x_n^m), \quad (2.12)$$

donde x_n^m representa el estado del elemento m -ésimo en el instante n y ϵ representa la intensidad del acoplamiento. Nótese que en este sistema el estado del elemento m -ésimo además de depender de su estado en el instante anterior también del estado del elemento $m - 1$ pero el estado de este no depende del elemento m . El anillo de elementos se cierra cuando el primer elemento es acoplado con el último. La figura 2.2(a) muestra la transferencia de entropía promedio del elemento anterior al siguiente y viceversa en función de ϵ para un conjunto de 100 mapas acoplados que iteran durante $n = 10^5$ pasos. También muestra la desviación estándar promedio $\langle \sigma \rangle$ de los estados de los elementos en función de la intensidad del acoplamiento

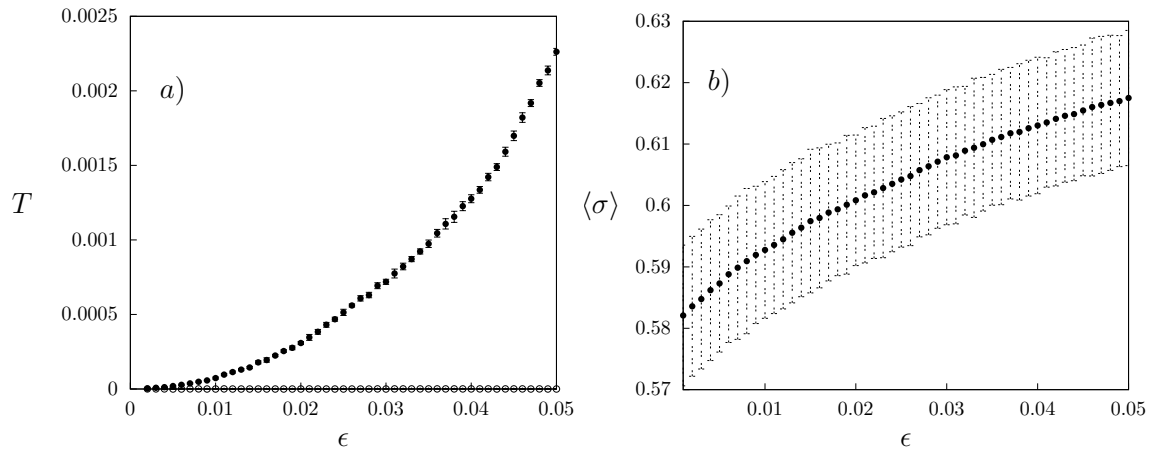


Figura 2.2: a) Transferencia de entropía del elemento m al $m + 1$ representada en círculos y del m al $m - 1$ en cuadrados para un conjunto de cien mapas tienda acoplados unidireccionalmente sobre un anillo. Este gráfico es una reproducción de los resultados obtenidos por Schreiber [10] utilizando los algoritmos desarrollados para este trabajo. b) Desviación estándar promedio entre los elementos.

En la fig. 2.2(a) se puede observar que a medida que crece la intensidad del acoplamiento la transferencia de entropía del elemento m al $m + 1$ $T_{m \rightarrow m+1}$ (círculos) aumenta. En cambio la transferencia de entropía en sentido contrario $T_{m \rightarrow m-1}$ permanece en cero, reflejando el hecho de que los elementos están acoplados unidireccionalmente. En la figura 2.2(b) se puede observar que el promedio de la desviación estándar de los estados de los elementos del sistema no refleja el cambio en la transferencia de entropía a medida que el parámetro ϵ aumenta, lo que indica que $T_{m \rightarrow m+1}$ puede mostrar algunos aspectos de la dinámica del sistema que escapan a otras formas de observar el sistema.

Para el segundo ejemplo usaremos mapas Ulam cuya función viene dada por

$$f(x) = 1 - ax^2, \quad (2.13)$$

donde el parámetro $a = 2$. Los elementos se acoplan también según la ec (2.12). En este caso se estudia el comportamiento de la transferencia de entropía en un rango más amplio de valores de ϵ . En la figura 2.3(a) se observan un par caídas repentinas en la cantidad $T_{m-1 \rightarrow m}$, que tienen que ver con valores críticos del parámetro de acoplamiento para los cuales el sistema presenta una transición entre un estado desordenado a uno más ordenado. Note que para este caso la desviación estándar mostrada en la fig. 2.3(b) posee dos picos en los valores del parámetro para las cuales se producen los mínimos de la transferencia de entropía.

Además de los dos sistemas propuestos por Schreiber, nosotros estudiamos el comportamiento de la transferencia de entropía para un sistema de osciladores caóticos que no

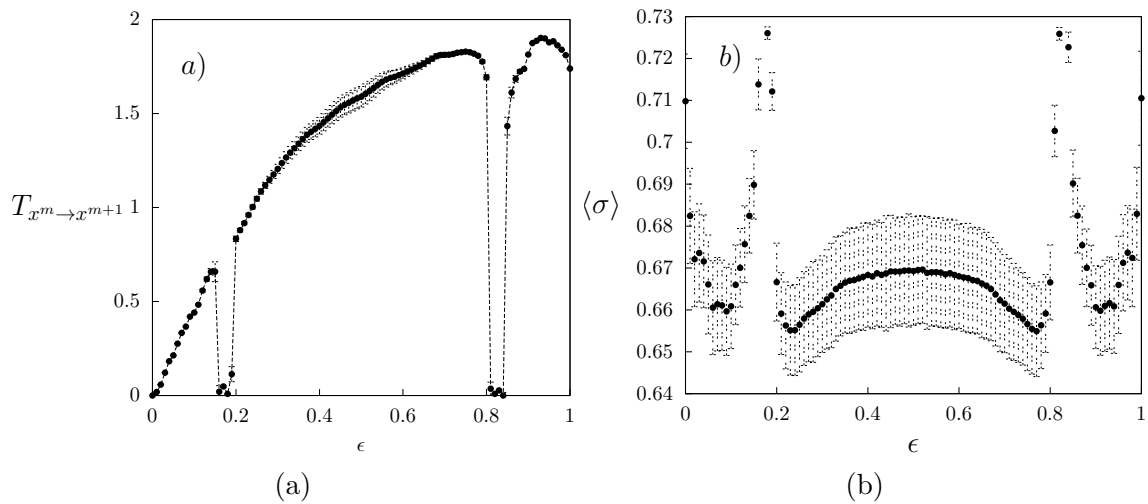


Figura 2.3: a) Transferencia de entropía del elemento m al $m + 1$ para un conjunto de cien mapas de Ulam acoplados unidireccionalmente sobre un anillo. b) Desviación estándar promedio de los estados de los elementos.

presentan ventanas de periodicidad. Para ello usaremos mapas logarítmicos cuyas funciones vienen dadas por

$$f(x) = b + \ln|x|, \quad (2.14)$$

donde el parámetro lo fijamos en $b = 0,75$ para que estén en la región caótica. En este caso los mapas también se conectan de acuerdo a la ec. (2.12) en un anillo unidireccional. La figura 2.4(a) muestra el comportamiento de la transferencia de entropía de este sistema. En ella se observa que para valores bajos del parámetro de acoplamiento la transferencia es muy baja, y a medida que crece ϵ comienzan a aparecer un comportamiento errático pero con tendencia creciente. La desviación estándar, fig. 2.4(b), entre los elementos no refleja este comportamiento de tendencia creciente de la transferencia de entropía entre los elementos.

El estudio de los sistemas en terminos de información permite olvidarse del contexto mediante el cual los datos son producidos y centrar la atención en solamente en los cambios que experimentan los elementos, lo que permite trabajar con una gran variedad de sistemas bajo el mismo punto de vista.

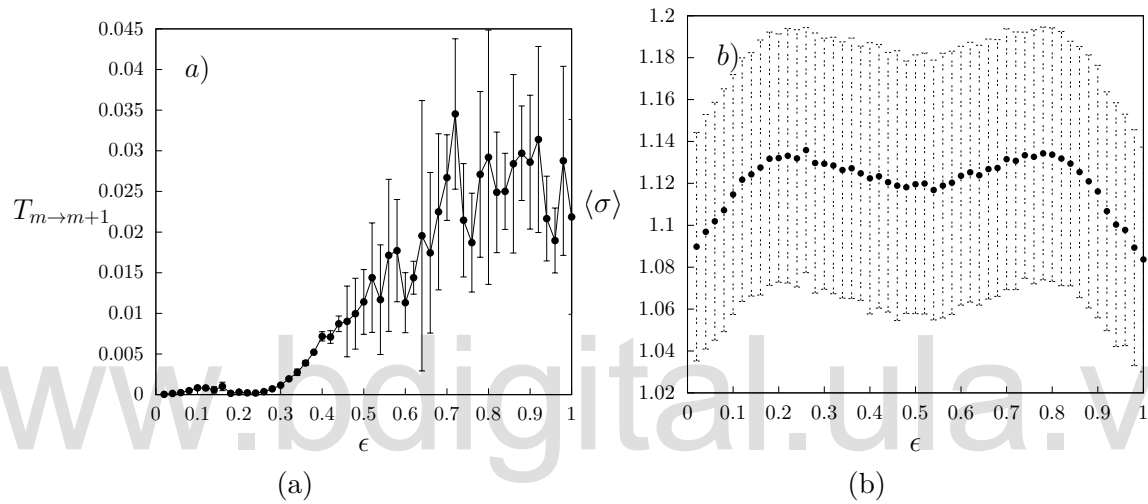


Figura 2.4: a) Transferencia de entropía del elemento m al $m + 1$ para un conjunto de cien mapas logarítmicos acoplados unidireccionalmente sobre un anillo. b) Desviación estándar promedio estados de los elementos.

Capítulo 3

Mapas Iterativos

El comportamiento caótico es ubicuo, se ha observado en en sistemas biológicos, redes neuronales, sistemas sociales, la bolsa de valores, circuitos eléctricos, entre otros; y muestra características universales, es decir, independientes del origen del sistema. Esta universalidad permite encontrar información clave acerca de su comportamiento estudiando modelos sencillos, como es el caso de los mapas, que constituyen sistemas dinámicos con tiempo discreto, donde se toma el estado actual del sistema y aplicándole ciertas reglas establecidas con anterioridad se construye el siguiente estado del mismo [19].

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (3.1)$$

donde x_t representa el estado del sistema en el instante t y f es una función que contiene las reglas de la dinámica del sistema. En particular en este trabajo se utilizan los mapas logístico, Ulam, tienda y logarítmico; debido a que en sistemas compuestos estos mapas el intercambio de información entre sus elementos muestra aspectos que permiten analizar el comportamiento individual de cada elemento y estudiar la sincronización entre ellos usando un enfoque basado en el concepto de información.

3.1. Mapa Logístico

La ecuación logística propuesta por Pierre François Verhulst alrededor del año 1838, fue popularizada por Robert May en 1976, como parte de un estudio de un modelo demográfico con tiempo discreto. La dinámica de este sistema está dada por

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t), \quad x \in [0, 1], \quad r \in [0, 4], \quad (3.2)$$

donde la variable x_t representa la fracción total de la población viva en el instante t , y r es el parámetro de control del sistema, que para el contexto de May, tendría relación con

las tasas de natalidad y de mortalidad, la cantidad de alimento y enfermedades, entre otros aspectos que afecten la supervivencia de una especie.

El mapa logístico es del tipo cuadrático unimodal, es decir que posee un máximo. El diagrama de retorno de este mapa tiene la forma de una parábola con el máximo en $x = 1/2$, como se muestra en la figura 3.1.

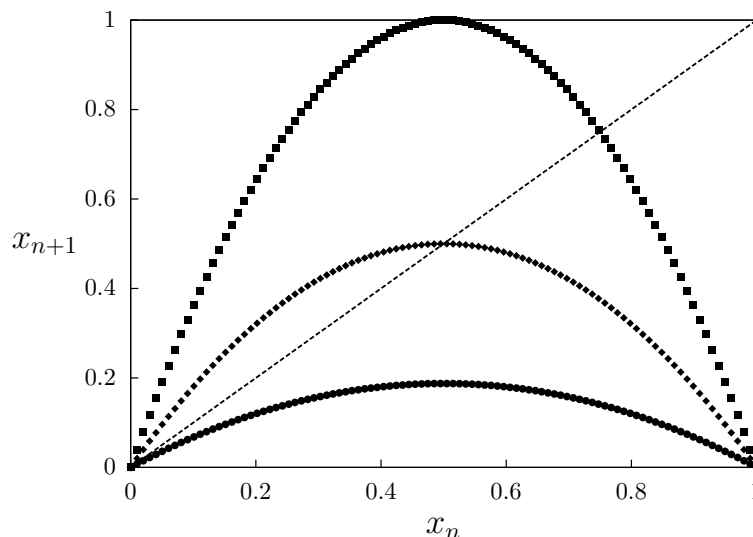


Figura 3.1: Diagrama de retorno del mapa logístico para tres valores diferentes del parámetro r . Rombos $r = 0,75$, círculos $r = 2,0$ t cuadrados $r = 4,0$.

Al aplicar esta dinámica usando $r < 1$, la población inevitablemente llegara a la extinción, es decir, $x_t \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para el intervalo $1 < r < 3$, x toma un valor fijo distinto de cero. A partir de $r = 3$ comienza un fenómeno de duplicación de períodos, es decir que x comienza a oscilar entre varios valores. Entre $r = 3$ y $r \approx 3,449$, x se encuentra en una órbita de período dos. Cuando $3,449 < r < 3,54409\dots$, el periodo es cuatro, y así sucesivamente hasta alcanzar un punto en que el periodo de x se hace infinito, esto ocurre para $r_\infty \approx 3,569946$. A partir de este valor se dice que el mapa se encuentra en una región caótica. A este tipo de comportamiento se le conoce como transición al caos por duplicación del periodo. Este comportamiento se puede apreciar en el diagrama de bifurcación de la fig. 3.2.

A medida que r sigue creciendo, cabría suponer que el sistema se hace cada vez más caótico, pero existen intervalos del parámetro de control dentro de esta región donde si se observa con cuidado puede apreciarse una mezcla de orden y caos, en otras palabras, se ven ventanas periódicas en medio de nubes de caos.

La figura 3.2 muestra el comportamiento del mapa logístico en función del parámetro de control del sistema, indicando todos los posibles valores que puede adquirir x para cada valor del parámetro r , permitiendo observar cualitativamente los cambios que presenta la

dinámica del mapa a medida que este último varía [20].

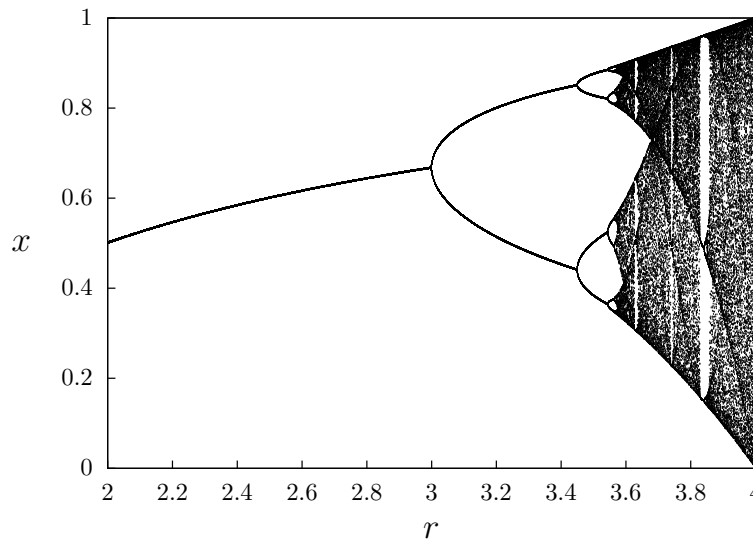


Figura 3.2: Diagrama de bifurcaciones para un mapa logístico

Una de las ventanas más visibles ocurre para $r \approx 3,83$. Allí comienza una zona con un periodo tres estable, que al aumentar r termina con otro proceso de duplicación de periodos hasta alcanzar de nuevo un comportamiento caótico.

Para caracterizar cuantitativamente el comportamiento caótico se recurre al exponente de Lyapunov que es una cantidad que indica el grado de separación de dos trayectorias muy cercanas. Viene dado por,

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_t^{N-1} \ln |f'(x_t)|, \quad (3.3)$$

donde f' representa la derivada de la función f respecto a x . Cuando esta cantidad es negativa toda perturbación tiende a ser reducida, es decir dos órbitas muy cercanas tienden acercarse más, volviendo al sistema estable en cambio si el exponente es positivo, las perturbaciones en las condiciones iniciales del sistema serán amplificadas y el sistema será caótico.

Para el caso del mapa logístico, el exponente se mantiene negativo para los valores por debajo de r_∞ , como se muestra en la figura 3.3. Luego pasa a ser positivo, con picos negativos que evidencian la presencia de ventanas periódicas para $r_\infty \leq r \leq 4$.

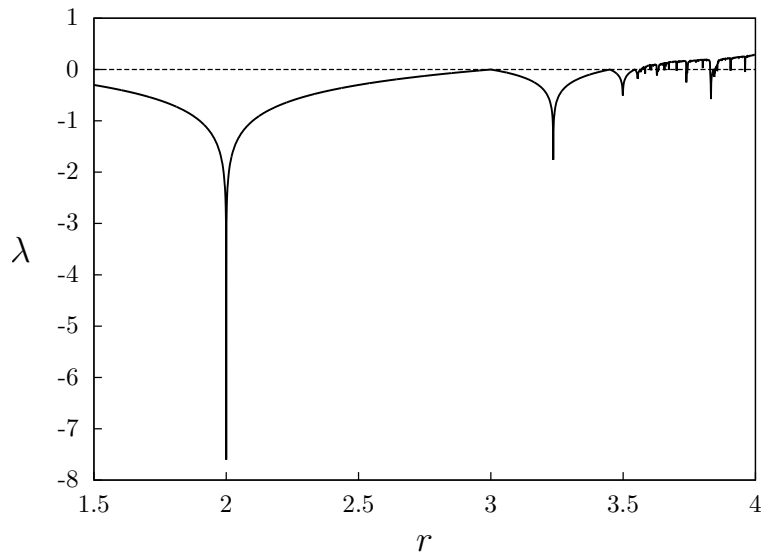


Figura 3.3: Exponente de Lyapunov para el mapa logístico.

3.2. Mapa de Ulam

Existen muchos sistemas que comparten las características principales del mapa logístico, un caso de particular interés es el mapa de Ulam, introducido por Stanislaw Ulam y Jonh von Neumann en 1947, como un generador de números aleatorios para computadoras. El mapa de Ulam viene dado por

$$x_{t+1} = 1 - ax_t^2, \quad x \in [-1, 1], \quad a \in [0, 2], \quad (3.4)$$

donde x_t es el estado del sistema en el instante t y a es el parámetro del mapa. La figura 3.4

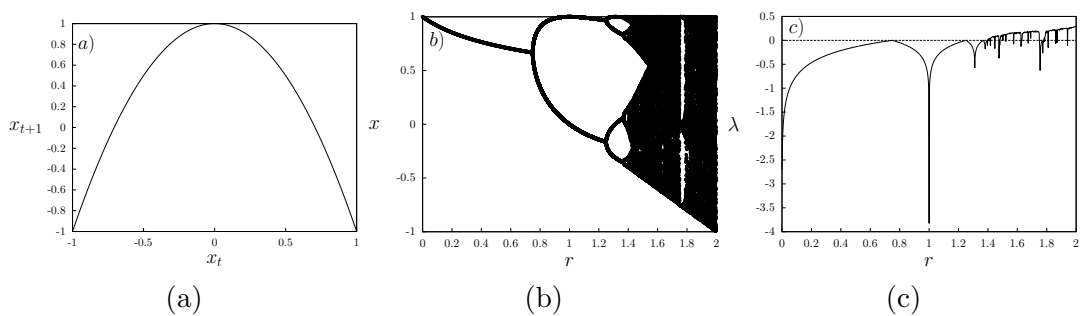


Figura 3.4: Comportamiento del mapa de Ulam. a) Diagrama de retorno para $a = 2$, b) Diagrama de bifurcación. c) Exponente de Lyapunov.

describe el comportamiento de este mapa, donde tenemos que si $0 < a < 0,75$, el mapa tiene

un valor fijo, en $a \approx 0,75$ ocurre la primera división del periodo y se mantiene en periodo dos hasta $a \approx 1,25$, allí pasa a una orbita estable de periodo cuatro, alcanzando un valor de periodo infinito $a_\infty \approx 1,401155$. Al igual que el mapa logístico, el de Ulam presenta una ventana de periodo tres para el valor del parámetro de control $a \approx 1,75$. Cuando $a = 2$, este sistema se comporta de manera totalmente idéntica que el mapa logístico con $r = 4$ [21].

3.3. Mapa tienda

Este mapa debe su nombre a la forma de tienda de acampar que tiene la gráfica de la función. Su dinámica viene dada por

$$x_{t+1} = \begin{cases} rx_t & \text{si } x_t < 0,5 \\ r(1 - x_t) & \text{si } x_t \geq 0,5 \end{cases} \quad x \in [0, 1], \quad r \in [0, 2] . \quad (3.5)$$

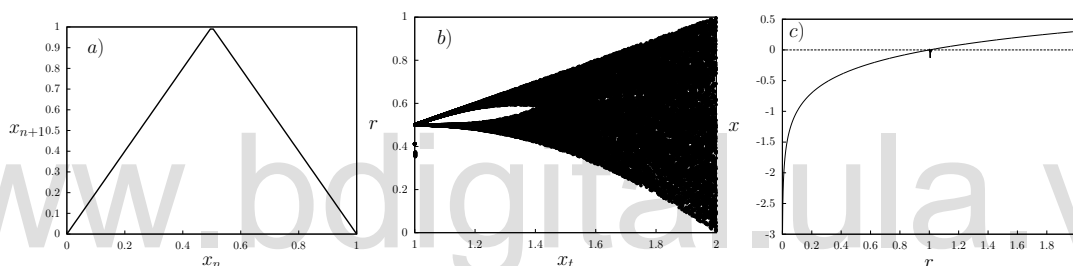


Figura 3.5: Comportamiento del mapa tienda. a) Diagrama de retorno para $r = 2$. b) Diagrama de bifurcación. c) Exponente de Lyapunov.

Fue junto al mapa logístico uno de los primeros ejemplos donde se evidenció que el comportamiento caótico puede surgir de sistemas simples. Cuando el parámetro $r < 1$, se tiene que el mapa presenta un punto fijo único en $x = 0$. Si $r = 1$ se tiene que para $x \in [0, 1/2]$ $f(x) = rx = x$, es decir que todos los punto dentro de este intervalo son puntos fijos, y si $x \in (1/2, 1]$

$$f(x) = r(1 - x) = 1 - x \leq \frac{1}{2}$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = r(f(x)) = f(x) , \quad (3.6)$$

donde $f^2(x)$ representa la segunda iteración de x_t , la ec. (3.6) muestra que el primer iterado de cualquier valor dentro del intervalo $(1/2, 1]$ es también un punto fijo. Cuando el parámetro se encuentra en la región $1 < r < 2$ se presentan dos puntos fijos uno $x = 0$ y otro dado por

$x = r/1 + r$, pero dichos puntos no son estables. Como se aprecia en la figura 3.5 el mapa tienda no tiene ventanas periódicas y su ruta de transición al caos pasa desde órbitas con un punto fijo en cero, directo a una región caótica [22, 23].

3.4. Mapa logarítmico

Este modelo fue caracterizado por T. Kawabe y Y. Kondo en 1991 [24], tiene la forma

$$x_{t+1} = b + \ln|x_t|, \quad (3.7)$$

donde b es el parámetro de control. Este mapa no es unimodal, no tiene máximos ni mínimos y destaca el hecho de que ni el parámetro b ni el estado x se encuentran acotados, es decir $-\infty < b < \infty$ y $-\infty < x < \infty$. La figura 3.6 muestra el comportamiento del mapa logarítmico. Cuando el parámetro b se encuentra en el intervalo $(-\infty, -1)$, el mapa se encuentra en una

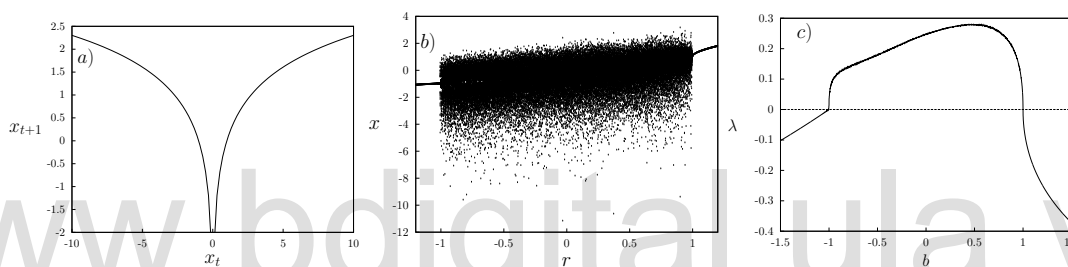


Figura 3.6: Comportamiento del mapa logarítmico. a) Diagrama de retorno para $b = 0,75$. b) Diagrama de bifurcación. c) Exponentes de Lyapunov.

región estable, donde para cualquier posible condición inicial la dinámica converge a un punto fijo cuyo valor depende del parámetro. Para $-1 < b < 1$ existen dos puntos fijos de una órbita de periodo dos inestables, que a medida $b \rightarrow -1$ ocurre una bifurcación de periodo doble inversa, donde los puntos inestables se acercan a un punto estable, en el momento en que $b = -1$ los dos puntos inestables se superponen con el punto estable, de modo que cuando el parámetro $b = -1$ solo existe un punto inestable, y alrededor de ese punto se forman regiones con numerosas iteraciones que parecen ser regulares, pero van alejándose del punto fijo, produciendo órbitas irregulares durante unas pocas iteraciones, hasta que vuelven a acercarse al punto fijo y se mantienen en su vecindad durante determinado período. Este tipo de comportamiento es denominado intermitencia de tipo III. En el caso en que $b \in (1, \infty)$, la órbita posee dos puntos fijos, uno estable y otro inestable, y por tanto las trayectorias convergen al punto estable. Cuando el parámetro $b = 1$ se llega a una región crítica donde ocurre una transición al caos por bifurcación de tangente inversa, este tipo de transición es

conocida como intermitencia tipo I. Dentro del intervalo $(-1, 1)$ el mapa logarítmico posee una dinámica caótica [6].

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 4

Información y sincronización

Un oscilador caótico pierde información en cada iteración. Pero si éste se somete a un forzamiento externo, convirtiendo al sistema en un modelo maestro-esclavo como el de la figura 4.1 donde el elemento forzado además recibe información del maestro. Sabemos que cuando el acoplamiento es lo suficientemente fuerte el sistema alcanza un estado sincronizado que, si la dinámica del maestro y el esclavo es idéntica, puede llegar a ser completa. Esto hace pensar que debe existir cierta relación entre la información que el maestro transmite al esclavo y la que este último pierde para lograr sincronización.

En este capítulo en primer lugar nos proponemos medir cuánta información pierde el esclavo en ausencia del maestro como consecuencia de su evolución temporal. También se cuantifica que tanta información transmite el maestro al esclavo en cada iteración. Con estas dos cantidades ya medidas se establece una relación entre los valores del parámetro de acoplamiento ϵ para los cuales ocurre la sincronización, la información perdida por el esclavo y la transmitida del maestro al esclavo. Utilizando la cantidad de información que comparten los elementos que conforman el sistema se puede también establecer un criterio para determinar el tiempo promedio que le toma al sistema alcanzar un estado sincronizado.

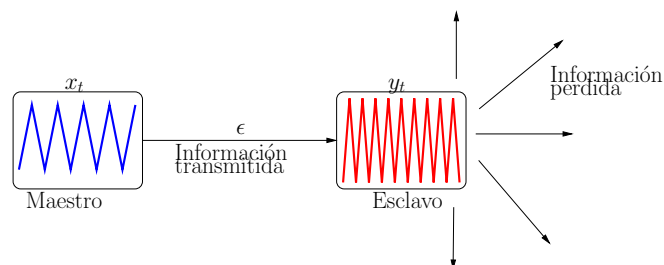


Figura 4.1: Representación de un sistema maestro-esclavo como el descrito por la ec. (4.1).

Para establecer la relación que existe entre el flujo de información que entra en un sistema y la pérdida que dicho sistema tiene de ésta utilizaremos un par osciladores caóticos acoplados como se muestra en la figura 4.1. Este sistema maestro-esclavo viene dado por

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= f(x_t) \\y_{t+1} &= \epsilon f(x_t) + (1 - \epsilon)f(y_t) \quad ,\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde x_t y y_t , representan los estados del maestro y el esclavo en el instante t , respectivamente; f es la función que representa la dinámica de ambos osciladores y ϵ es la intensidad del acoplamiento entre ellos.

4.1. Medida de la pérdida de información

Cuando un elemento caótico evoluciona en el tiempo pierde información acerca de su pasado, esto se debe a que su dinámica no lineal no permite determinar unívocamente el estado anterior a partir de un estado actual conocido. Para cuantificar esta pérdida proponemos utilizar una cantidad que llamaremos entropía autotransferida, que no es más que la transferencia de entropía descrita en la ecuación (2.10) de la serie a sí misma y que viene dada por

$$T_{X \rightarrow X'} = - \sum_{x_t, x'_t} p(x_{t+1}, x_t, x'_t) \log_2 \left(\frac{p(x_{t+1}, x_t, x'_t)p(x_t)}{p(x_t, x'_t)p(x_{t+1}, x_t)} \right), \tag{4.2}$$

donde $X = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ es la serie temporal del estado del mapa, x_t es el estado del mapa, $X' = (x'_0, x'_1, x'_2, \dots)$ es la serie temporal de los valores que toma el estado del mapa desplazados una unidad de tiempo, es decir $x'_t = x_{t+1}$; $p(x)$ es la probabilidad de que x ocurra mientras que $p(x, y)$ y $p(x, y, z)$ representa la probabilidad conjunta de que ocurra (x, y) y (x, y, z) respectivamente. Esta cantidad permite conocer el número promedio de bits necesarios para construir el siguiente estado del sistema conocido el estado actual. La figura 4.2 muestra como varía $T_{X \rightarrow X'}$ en el mapa logístico $x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$ al variar el parámetro. Las medidas se realizaron con dos resoluciones diferentes: un bit, es decir dos divisiones, en la fig. 4.2(a) y dos bits, es decir, cuatro divisiones en la fig 4.2(b).

En primer lugar se puede observar al comparar los gráficos que la medida de la entropía autotransferida varía con a la resolución, es decir depende de la cantidad de divisiones o bits tomados en cuenta. También se puede observar que mientras aumenta la cantidad de bits tomados en cuenta para hacer la medición, la entropía autotransferida aporta más información sobre el comportamiento del sistema, por ejemplo en la figura 4.2(a) no es posible identificar la órbita de período tres en $r \approx 3,835$, mientras que la figura 4.2(b) se puede apreciar claramente que para este valor del parámetro la entropía autotransferida cae a cero producto de la existencia para este valor del parámetro de una ventana de período tres entre dos regiones caóticas. A medida que se aumenta la cantidad de bits es posible

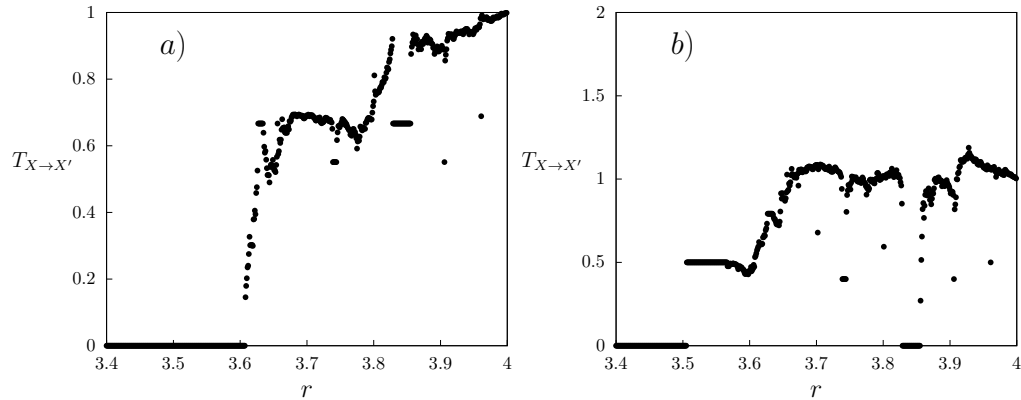


Figura 4.2: Entropía autotransferida para el mapa logístico. (a) Para 2 divisiones, es decir un bit de resolución. (b) Para 4 divisiones, es decir dos bits de resolución.

capturar otras ventanas periódicas. La información autotransferida permite de esta manera hacer una distinción entre las regiones donde hay órbitas periódicas y donde son caóticas. Además se aprecia que en la región caótica la información autotransferida no es constante lo que hace pensar que la pérdida de información depende del valor de su parámetro r .

Otra cantidad cuyo análisis puede aportar información acerca del comportamiento del sistema es la información mutua (ver ec. (2.8)) del sistema con su pasado inmediato, la cual se denominará información autocompartida y viene dada por

$$M_{X \rightarrow X'} = - \sum_{x_t, x'_t} p(x_t, x'_t) \log_2 \left(\frac{p(x_t, x'_t)}{p(x_t)p(x'_t)} \right). \quad (4.3)$$

Esta cantidad puede ser interpretada como la cantidad de información que el estado en $t+1$, x_{t+1} conserva del estado anterior x_t .

Podemos ver en la figura 4.3, que esta cantidad al igual que la entropía autotransferida, permite determinar la diferencia entre regiones periódicas y caóticas. Para valores del parámetro r donde el sistema tiene un atractor que es un punto fijo, $M_{x \rightarrow x'} = 0$, ya que el sistema se encuentra en un único estado, por lo que la información que posee el sistema es cero, y no tiene nada que compartir. También se puede apreciar que $T_{x \rightarrow x'} = 0$ para estos mismos valores de r debido a que el estado del sistema está totalmente definido y no es necesario transmitir ningún bit del estado x_t al siguiente. Cuando se producen las duplicaciones del período se observa un cambio en las gráficas de la figura 4.3, por ejemplo cuando el sistema se encuentra en la región de período dos, la información compartida entre el presente y el futuro inmediato de la serie temporal es un bit, esto se debe a que solo existen dos estados posibles, el de la rama superior y el de la inferior, y basta saber en cuál de los dos estados se encuentra el sistema para predecir su valor futuro. En el caso en que se mide un solo bit

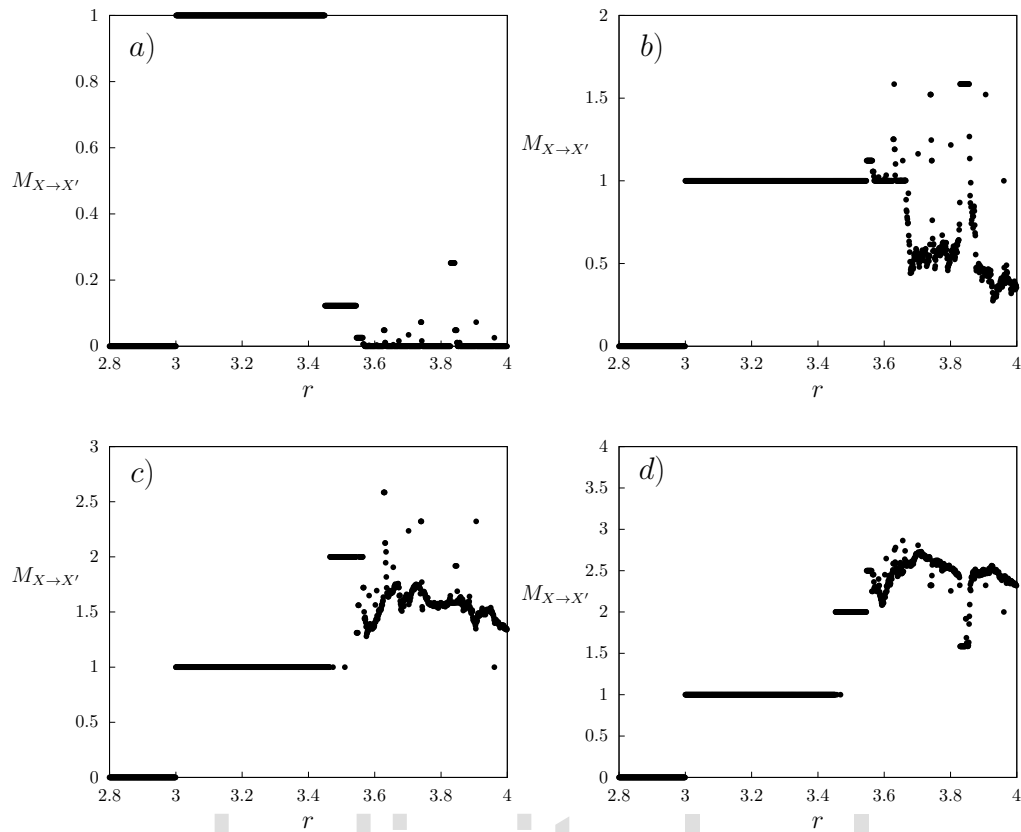


Figura 4.3: Información autotransferida para el mapa logístico. (a) Para 2 divisiones, es decir un bit de resolución. (b) Para 4 divisiones, es decir dos bit de resolución. (c) Para 8 divisiones, es decir tres bit de resolución. (d) Para 16 divisiones, es decir cuatro bit de resolución.

de información como se observa en figura 4.3(a), puede verse el salto dentro de la región de período dos, pero en este caso no capturan con tanta claridad las regiones con períodos mayores ya que hacen falta más bits de resolución para detectarlas. A medida que se aumenta el número de bits tomados en cuenta puede obtenerse más información de como se comporta el sistema para distintos valores de r . Como en la figura 4.3(b), donde se toman en cuenta dos bits se ven regiones donde la información autocompartida supera un bit, lo que indica que se detectó en estas regiones la presencia de más de dos estados. Cuando se toman en cuenta tres bits, como muestra la figura 4.3(c), se puede observar una región donde el estado del sistema comparte dos bits de información mostrando que existe una región de período cuatro. En el caso en que se toman en cuenta cuatro bits, figura 4.3(d), se pueden apreciar varias ventanas periódicas, en especial la de período tres. A pesar de que para un mayor número de bits tanto la información autocompartida como la autotransferida muestran de forma más precisa el comportamiento del sistema, realizar los cálculos tomando un mayor número de bits tiene un alto costo en tiempo de computo, lo cual generalmente limita la

cantidad de información en base a la que se puede trabajar.

Aplicando esta técnica a un sistema cuya transición al caos no se da por duplicación de período, como el caso del mapa logarítmico $x_{t+1} = b + |\log x_t|$, se puede apreciar fácilmente el límite entre la región periódica y la caótica. La figura 4.4(a) muestra como se comporta la entropía autotransferida con respecto al valor del parámetro b del mapa, con una resolución de dos bits de información para la medida de $T_{X \rightarrow X'}$.

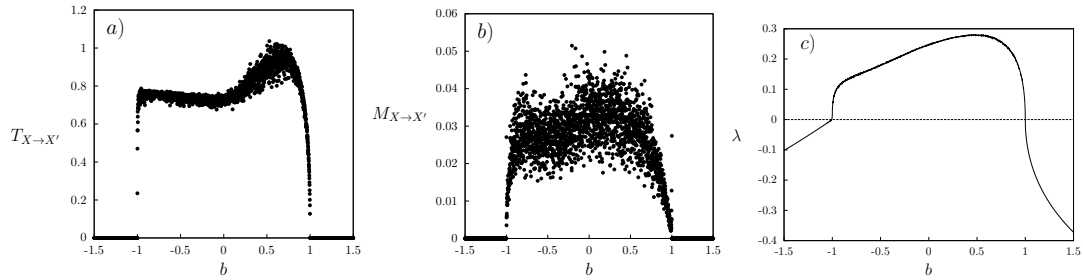


Figura 4.4: Comportamiento del mapa logarítmico con respecto al parámetro b , (a) Información autotransferida. (b) Información autocompartida. (c) Exponente de Lyapunov.

En toda la región donde el mapa logarítmico tiene un comportamiento regular, el valor de la entropía autotransferida y de la información autocompartida es cero, como puede verse en las figuras 4.4(a) y 4.4(b). Esto es consecuencia de que el sistema, para estos valores de b , se encuentra en un atractor que es un punto fijo. Cuando el mapa entra en la región caótica, tanto $T_{X \rightarrow X'}$ como $M_{X \rightarrow X'}$ comienzan a variar, en particular en este caso los gráficos generado tanto por la información autotransferida como por la autocompartida son similares al que se obtiene al graficar el exponente de Lyapunov 4.4(c).

4.2. Medida instantáneas de información

En esta sección, utilizamos el modelo de la ecuación (4.1) variando la intensidad del acoplamiento para estudiar el flujo de información entre el maestro y el esclavo de manera instantánea. Para ello proponemos medir la información compartida entre el maestro y el esclavo para cada instante de tiempo mediante la expresión

$$M_{X \rightarrow Y}^t = \sum_{x_t, y_t} p(x_t, y_t) \log \left(\frac{p(x_t, y_t)}{p(x_t)p(y_t)} \right), \quad (4.4)$$

donde x_t y y_t representan los estados del maestro y el esclavo en el instante t respectivamente, $p(x_t)$ y $p(y_t)$ son las probabilidades de encontrar al maestro en el estado x_t y al esclavo

en el estado y_t ; y $p(x_t, y_t)$ es la probabilidad de encontrar al maestro en el estado x_t al mismo tiempo que el esclavo se encuentra en el estado y_t . Para estimar las probabilidades instantáneas necesarias para el cálculo de $M_{X \rightarrow Y}^t$ se realizan $N = 10^5$ simulaciones de pares maestro esclavo con diferentes condiciones iniciales. En particular, usaremos mapas de Ulam $x_{t+1} = 2 - ax^2$ acoplados unidireccionalmente según la ec. (4.1), en la figura 4.5 se puede muestra $M_{x \rightarrow y}^t$ versus t para el sistema maestro-esclavo. Si el valor del acoplamiento $\epsilon = 0$ se tiene que $M_{X \rightarrow Y}^t = 0$ ya que los elementos del sistemas son independientes entre sí y por lo tanto no comparten información. Para intensidades bajas del acoplamiento $\epsilon = 0,35$, la

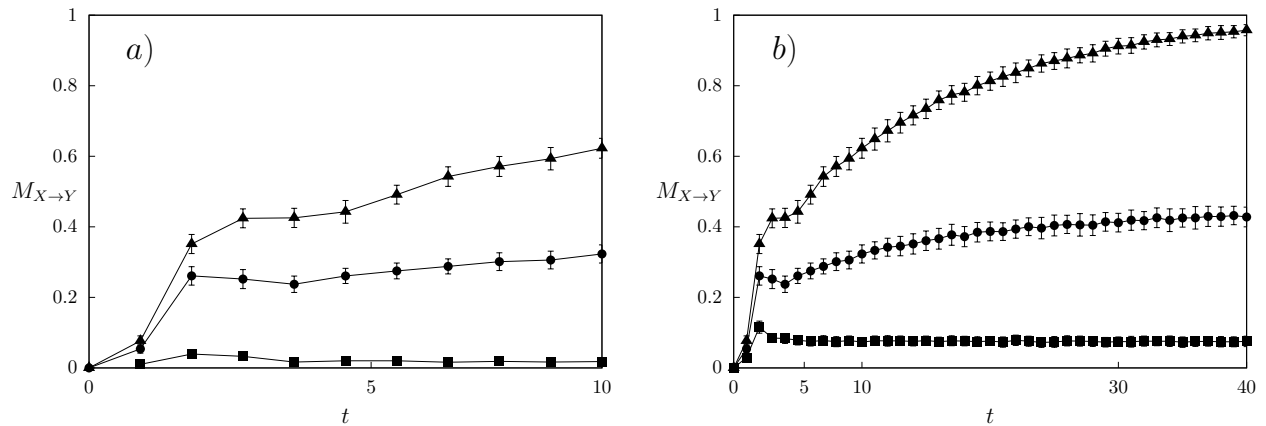


Figura 4.5: Información compartida instantánea para el sistema maestro-esclavo de mapas de Ulam para distintos valores de ϵ y dos divisiones de resolución. $\epsilon = 0,25$ en cuadrados, $\epsilon = 0,47$ círculos, $\epsilon = 0,55$ triángulos. (a) Para las primeras diez iteraciones. (b) Para las primeras cuarenta iteraciones.

información mutua instantánea, luego de algunas iteraciones, se mantiene constante a medida que el sistema evoluciona en el tiempo como se aprecia en las líneas con cuadrados de la figura 4.5, esto indica que el esclavo comparte una fracción que es relativamente pequeña de información con el maestro. A medida que el acoplamiento se hace mayor, por ejemplo para $\epsilon = 0,47$, la fracción de información que comparten aumenta, como puede observarse en las líneas con círculos de la figura, reflejando que la interacción entre los elementos es cada vez más fuerte. En este caso se aprecia que la información que comparten los elementos tarda más iteraciones en llegar a un valor estable, siendo este valor menor que un bit lo que indica que los estados de los elementos son cada vez más próximos entre sí, hasta llegar a un punto antes de volverse idénticos, donde el crecimiento de $M_{X \rightarrow Y}^t$ se detiene.

Si el parámetro $\epsilon = 0,55$ la información que comparten los elementos aumenta aún más rápidamente hasta alcanzar el valor máximo medible, 1 bit como se puede apreciar en las líneas con triángulos de la figura 4.5. Esto significa que los elementos comparten toda su información indicando que los estados de los elementos son idénticos y el sistema se encuentra completamente sincronizado.

La información compartida instantánea permite conocer que tan cerca se encuentran las trayectorias de los elementos, pero para poder analizar la dinámica del flujo de información entre el maestro y el esclavo se propone medir la transferencia de entropía de manera instantánea entre los elementos, cuya expresión viene dada por

$$T_{X \rightarrow Y}^t = - \sum_{x_t, y_t} p(x_{t+1}, x_t, y_t) \log \left(\frac{p(x_{t+1}, x_t, y_t) p(x_t)}{p(x_t, y_t) p(x_{t+1}, x_t)} \right), \quad (4.5)$$

donde $p(x, y, z)$ es la probabilidad conjunta de que ocurran x , y y z .

La figura 4.6 muestra como varía el comportamiento de la transferencia de entropía instantánea con respecto al tiempo en este sistema maestro-esclavo de mapas de Ulam para diversos valores del parámetro de acoplamiento. Cuando el acoplamiento $\epsilon = 0$ también $T_{X \rightarrow Y}^t = 0$, esto debido a que los elementos que componen el sistema son independientes entre sí y por tanto no intercambian información. Si la intensidad de acoplamiento es pequeña,

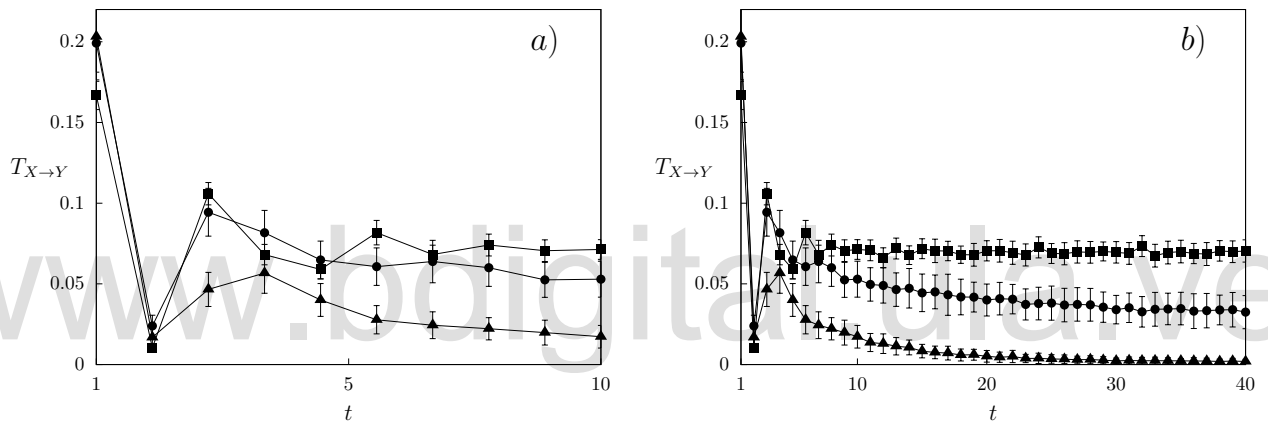


Figura 4.6: Transferencia de entropía instantánea para un sistema maestro-esclavo de mapas de Ulam para distintos valores de ϵ y dos divisiones de resolución. $\epsilon = 0, 25$ en cuadrados, $\epsilon = 0, 47$ círculos, $\epsilon = 0, 55$ triángulos. (a) Para las primeras diez iteraciones. (b) Para las primeras cuarenta iteraciones.

por ejemplo $\epsilon = 0,35$ se observa que $T_{X \rightarrow Y}^t$ oscila en torno a un valor constante, como se observa las líneas con cuadrados en la figura 4.6. Este comportamiento de $T_{X \rightarrow Y}^t$ indica que el maestro envía información al esclavo pero esta no es conservada por el elemento forzado, lo que hace que se mantenga una tasa alta de transferencia. Así que, para valores bajos del parámetro ϵ , el sistema no logra alcanzar un estado sincronizado, ya que la información que el maestro envía al esclavo no es conservada por este. Cuando la intensidad del acoplamiento aumenta alcanzando un valor de $\epsilon = 0,47$ la transferencia de entropía aumenta durante las primeras iteraciones y luego comienza a decrecer hasta alcanzar un valor estable. Este efecto se muestra en las líneas con círculos de la figura. Aquí ocurre que parte de la información que es transferida del maestro al esclavo es conservada por este y pasa a ser información

compartida entre ambos. Como consecuencia de esto la transferencia de entropía comienza a bajar, pero no alcanza a ser cero, lo que indica que los elementos aún no son idénticos, es decir que no se alcanza un estado completamente sincronizado.

Al superar un valor crítico de la intensidad de acoplamiento, como puede observarse en las líneas con triángulos de la figura 4.6 para $\epsilon = 0,55$, la transferencia de entropía instantánea experimenta un nuevo cambio en su comportamiento. En esta región $T_{X \rightarrow Y}^t$ comienza teniendo un valor alto del flujo de información desde el maestro al esclavo, cayendo rápidamente a cero, lo que indica que la información que va del elemento forzador al forzado supera la que este pierde como producto de su dinámica caótica, trayendo como consecuencia que el esclavo comparta para cada instante mayor cantidad de información con su forzador hasta que las trayectorias de los elementos se hacen idénticas y el sistema alcanza un estado completamente sincronizado.

Ahora para entender la manera como se relacionan las medidas de información entre los elementos del sistema maestro-esclavo $T_{X \rightarrow Y}^t$ y $M_{X \rightarrow Y}^t$, haremos una comparación entre ellas para varios valores del parámetro de acoplamiento. La figura 4.7 muestra que para valores bajos de ϵ y luego de unas pocas oscilaciones iniciales, tanto la transferencia de entropía como la información mutua entre el maestro y el esclavo se mantienen constantes y relativamente bajas a medida que el sistema evoluciona en el tiempo. Este comportamiento surge como

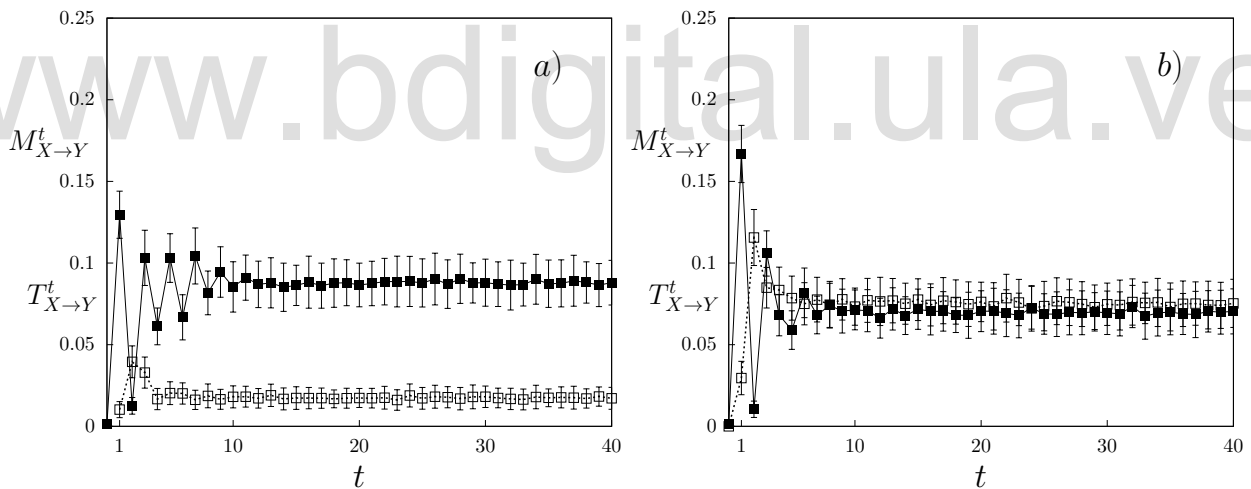


Figura 4.7: Información compartida en cuadrados vacíos y transferida en cuadrados sólidos para un sistema maestro-esclavo con mapas de Ulam para intensidades bajas de acoplamiento. (a) $\epsilon = 0,25$. (b) $\epsilon = 0,35$.

consecuencia de que el maestro transfiere información al esclavo debido su acoplamiento, sin embargo, parte de esta se pierde como consecuencia de la evolución del elemento forzado, manteniendo constante la cantidad de información que comparte con su forzador, lo que

permite mantener una alta tasa de transferencia entre los elementos. A medida que el acoplamiento se hace más intenso la cantidad de información compartida entre los elementos se hace mayor, mientras que $T_{X \rightarrow Y}^t$ tiene valores cada vez más bajos, como puede observarse al comparar las figuras figura 4.7(a) y 4.7(b), lo que indica que mientras más intenso es el acoplamiento mayor será la información que los elementos comparten entre sí por lo cual se tiene una menor transferencia de entropía.

Cuando la intensidad del acoplamiento $\epsilon \approx 0,46$ el maestro transmite información al esclavo en cantidades cada vez menores para cada instante de tiempo hasta alcanzar un valor estable, a la vez que la información compartida entre los elementos se hace cada vez mayor como se muestra en la figura 4.8. Esto indica que parte de la información transferida en el instante t por el maestro es conservada por el esclavo y por lo tanto compartida entre ambos elementos, lo que trae como consecuencia que dicha parte de la información no vuelva a ser transferida en el siguiente instante $t + 1$ reduciendo así la cantidad de información transferida. Sin embargo para valores de acoplamiento en el intervalo $(0,46; 0,50)$ la información compartida no llega a ser total y por lo tanto no se alcanza un estado de sincronización completa, sino lo que se conoce como sincronización generalizada.

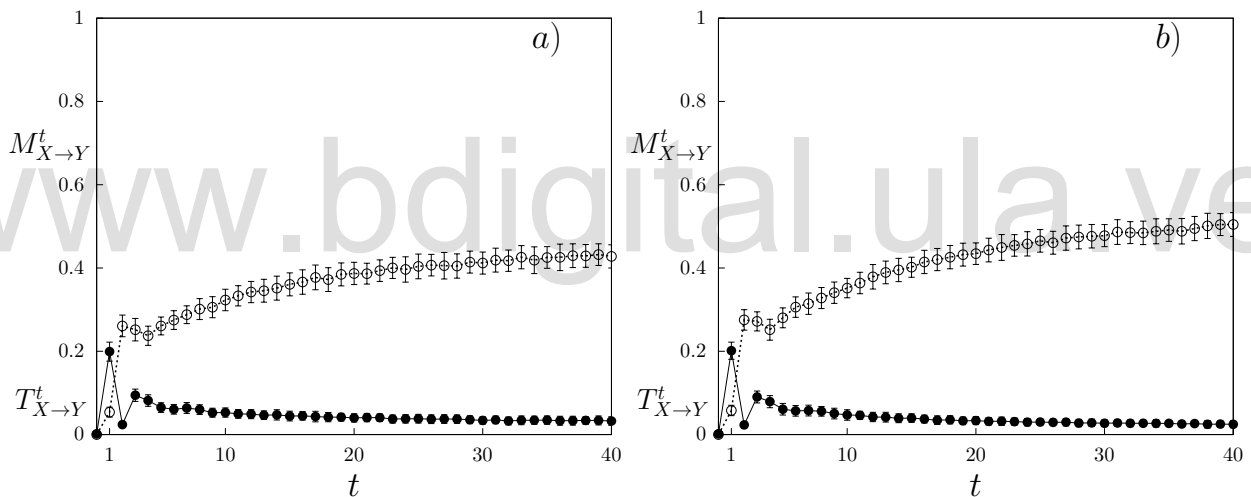


Figura 4.8: Información compartida en círculos vacíos y transferida en círculos sólidos para un sistema maestro-esclavo con mapas de Ulam para intensidades bajas de acoplamiento. (a) $\epsilon = 0,47$. (b) $\epsilon = 0,48$.

Si la intensidad del acoplamiento es alta, la información compartida por los elementos llega a ser total, como se muestra en la figura 4.9(a) para $\epsilon = 0,55$ y en la figura 4.9(b) para $\epsilon = 0,70$, a la vez que la transferencia de entropía instantánea disminuye hasta ser despreciable después de un tiempo finito al que denominaremos t_s . Al igual que en el caso anterior, para estos valores del parámetro ϵ parte de la información transferida desde el

maestro al esclavo es conservada y convertida en información mutua, haciendo que cada vez sea menor la transferencia de entropía. Pero en este caso el sistema si alcanza un estado completamente sincronizado, siendo el tiempo que tarda el sistema en alcanzar este estado cada vez menor.

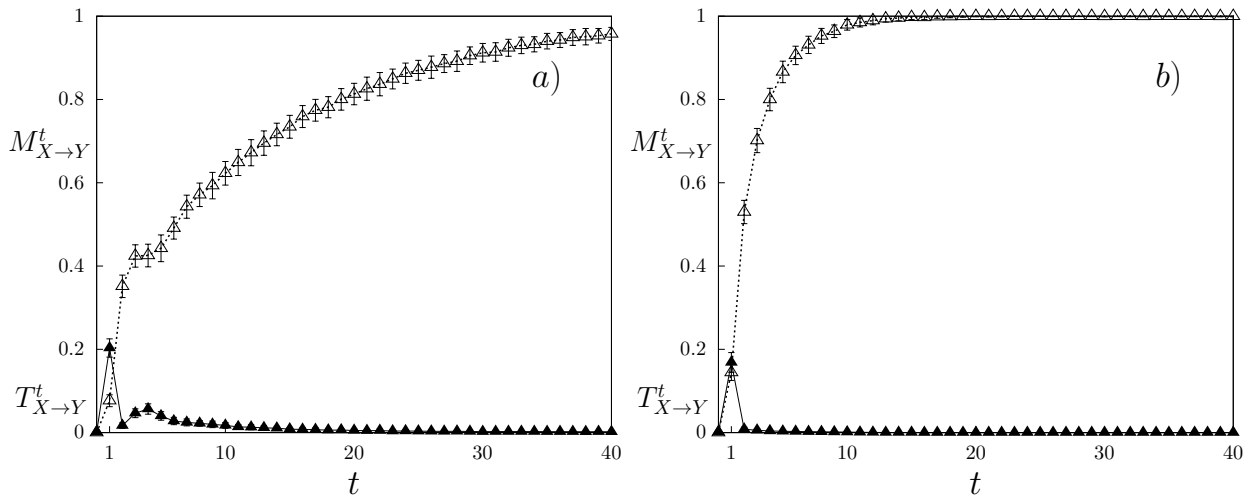


Figura 4.9: Información compartida en triángulos vacíos y transferida en triángulos sólidos para un sistema maestro-esclavo con mapas de Ulam para intensidades bajas de acoplamiento. (a) $\epsilon = 0,55$. (b) $\epsilon = 0,70$.

4.3. Tiempo promedio de sincronización

Es posible cuantificar el tiempo promedio $\langle t_s \rangle$ en el cual el sistema maestro-esclavo logra alcanzar el estado completamente sincronizado, para calcularlo se hace uso de la información compartida instantánea entre los elementos que conforman el sistema, se mide el número de iteraciones necesarias para que la información compartida entre los elementos sea máxima. Se ha encontrado que el tiempo de sincronización t_s disminuye al aumentar la intensidad del acoplamiento, como se muestra en la figura 4.10. Nótese que al observar el comportamiento de la transferencia de entropía en la región de sincronización completa, no se aprecian grandes cambios en el máximo de la transferencia inicial, pero si en la velocidad con la que cae al valor mínimo a medida que ϵ aumenta. Lo mismo ocurre con la información compartida entre los elementos $M_{X \rightarrow Y}^t$ que alcanza su máximo en tiempos cada vez menores.

Como se demostró anteriormente es posible cuantificar la pérdida de información que sufre un mapa caótico como consecuencia de su evolución utilizando la ecuación (4.3). Aplicando

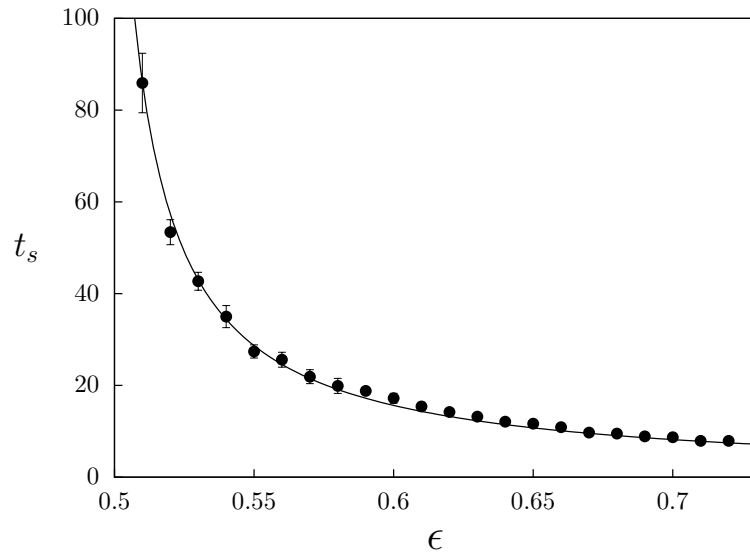


Figura 4.10: Tiempo promedio de sincronización

esta técnica en el modelo maestro-esclavo es posible hallar la tasa de pérdida de información instantánea para el elemento forzado $T_{Y \rightarrow Y'}$, donde $Y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_t)$ representa la serie de estados del esclavo y $Y' = (y'_0, y'_1, y'_2, \dots, y'_t)$ representa el conjunto de estados del esclavo desplazados una iteración, en otras palabras, $y'_t = y_{t+1}$. En la figura 4.11 se compara esta cantidad con la tasa de crecimiento de la información compartida con el forzador que viene dada por

$$\Delta M_{X \rightarrow Y}^t = M_{X \rightarrow Y}^t - M_{X \rightarrow Y}^{t-1} \quad (4.6)$$

La figura 4.11(a) muestra que para valores bajos del acoplamiento, $\epsilon = 0,35$ la tasa de crecimiento de la información mutua es menor que la cantidad de información que pierde el esclavo debido a su dinámica, por lo tanto el sistema no logra alcanzar un estado sincronizado. Cuando el parámetro de acoplamiento aumenta la tasa de crecimiento de $\Delta M_{x \rightarrow y}^t$ comienza a igualar la pérdida de información como se muestra en la figura 4.11(b), hasta que al alcanzar un valor crítico en el que el crecimiento de la información mutua entre los elementos supera la pérdida de información del esclavo como se observa en la figura 4.11(c) y el sistema logra sincronizarse.

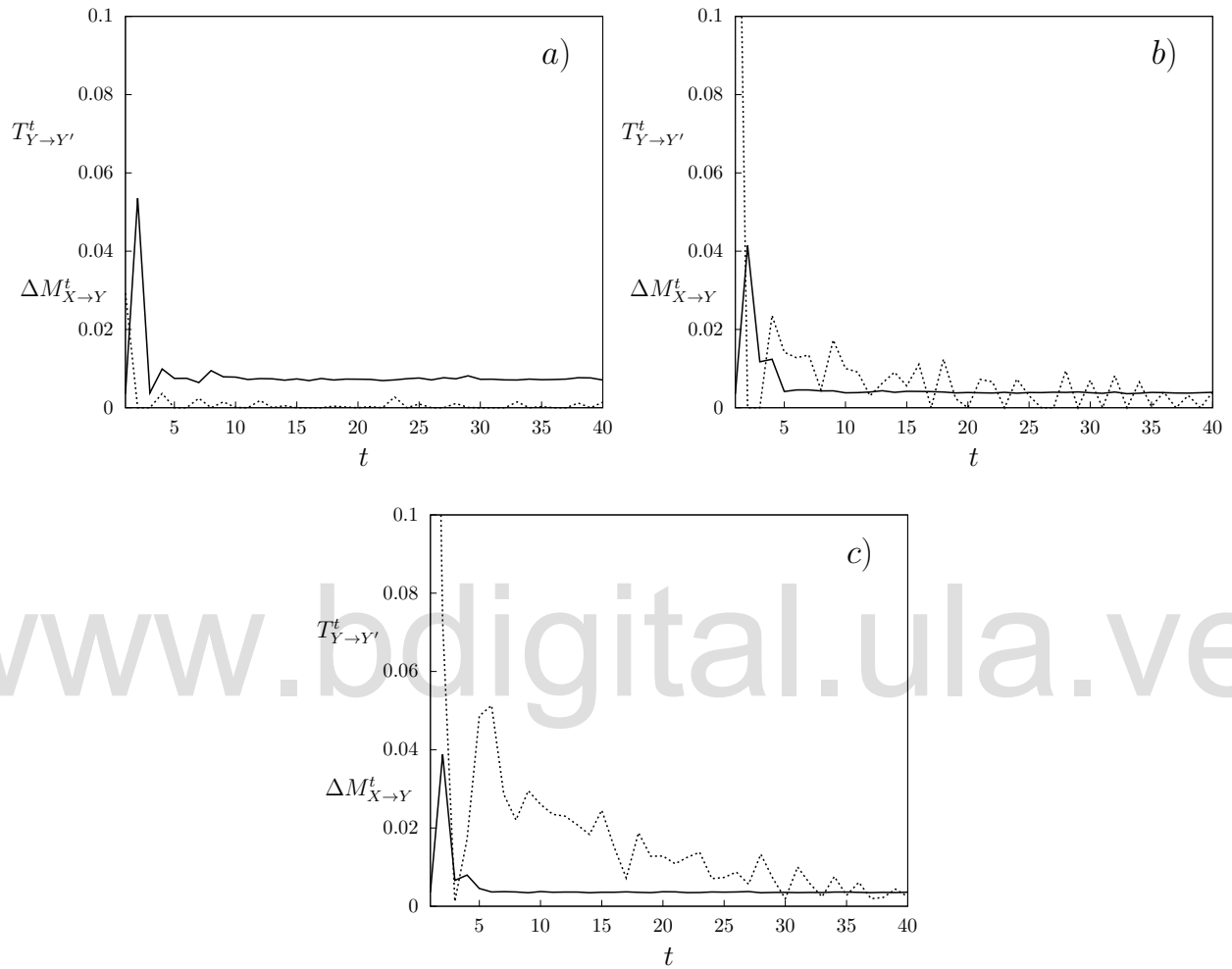


Figura 4.11: Pérdida de información promedio (sólido), tasa de crecimiento de información mutua entre los elementos (abierto) para varios valores del parámetro de acoplamiento. (a) $\epsilon = 0,25$. (b) $\epsilon = 0,47$. (c) $\epsilon = 0,55$

Conclusiones

Partiendo de un sistema aislado, compuesto por un mapa cuyo comportamiento puede ser caótico para ciertos valores de un parámetro de control, se propuso una técnica para cuantificar el flujo de información del sistema a medida que éste evoluciona en el tiempo mediante dos cantidades que llamamos información autotransferida e información autocompartida. Es sabido que un sistema en régimen caótico pierde información a medida que evoluciona, mediante esta técnica se demostró que es posible cuantificar la pérdida midiendo en cada instante de tiempo la información que dicho sistema conserva y pierde a medida que cambia de estado. Cuando el sistema se encuentra en una órbita periódica no se transfiere entropía del estado en el instante t al $t + 1$, debido a que el sistema no pierde información. En cambio en caso de encontrarse en una órbita caótica si existe cierta transferencia para cada paso temporal. Utilizando esta técnica es posible distinguir entonces entre regiones periódicas y caóticas de manera similar a como se hace al usar los exponentes de Lyapunov del sistema. También se pueden distinguir las regiones periódicas y caóticas si midiendo la información que comparte el estado x_t con el x_{t+1} del sistema en dos instantes sucesivos, determinando los períodos específicos de algunas de ellas. Ambas medidas dependen de una elección apropiada del número de bits a considerar para el estudio para obtener suficiente información acerca del comportamiento del sistema. Además se ha observado que la información compartida y la transferencia de entropía permiten estudiar las interacciones de los elementos que conforman un sistema desde un punto de vista que solo toma en cuenta que existan cambios en los estados de los elementos a medida que estos evolucionan en el tiempo, sin importar la dinámica que genera dichos cambios, esto permite elegir sistemas de orígenes muy variados.

Un sistema con acoplamiento unidireccional sencillo como lo es el maestro-esclavo permite de manera sencilla estudiar en profundidad las características de la dinámica que relaciona al par de elementos que interactúan. A medida que la intensidad del acoplamiento entre los elementos aumenta, estos comenzarán a acercar sus trayectorias, hasta que para cierto valor crítico se hacen indistinguibles una de otra, este fenómeno de sincronización es bastante conocido. En este trabajo hemos propuesto un método para estudiar la sincronización en términos del flujo de información entre el elemento forzador y el forzado, midiendo la transferencia instantánea de entropía y la información mutua instantánea entre el par de elementos, se han hallado pautas que permiten distinguir las distintas fases del sistema. En

caso de que los elementos no alcancen a sincronizarse se crea un flujo constante de entropía entre los elementos, que se encuentran ciertamente relacionados pero no llegan a igualar sus trayectorias. Una vez superado cierto valor de intensidad de acoplamiento, el sistema alcanza el estado sincronizado entre los elementos, el flujo de entropía se reduce a cero, y los elementos comparten toda la información posible.

Se encontró que mientras mayor la intensidad del acoplamiento entre los elementos, más rápidamente se alcanza el estado sincronizado, pero al contrario de lo esperado el flujo de información luego de presentar un pico en la primera iteración decae rápidamente, mientras que la coherencia entre el maestro y el esclavo crece cada vez con mayor velocidad. Por esto se comparó esta tasa de crecimiento con la pérdida promedio de información del elemento forzado encontrando que el estado sincronizado se alcanza cuando la tasa crecimiento de la información mutua instantánea supera la cantidad de entropía autotransferida cada instante de tiempo.

Proponemos que el empleo de estas técnica puede ser aplicado a sistemas con otros tipos de interacciones, para comprobar como varia el flujo de información entre los elementos, por ejemplo la presencia de una transferencia inicial fuerte, y luego una rápida caída a valores despreciables podría ser verificada aplicando al sistema un acoplamiento intermitente. También puede obtenerse información de interés al estudiar sistemas donde se relacionen un mayor número de elementos y observar el flujo de información instantáneo entre las variables microscópicas y macroscópicas del sistema, como en un modelo de mapas globalmente acoplados.

A pesar del alto costo computacional de utilizar las medidas de información para analizar el comportamiento de sistemas, este punto de vista que solo toma en cuenta las series temporales que produce el sistema a medida que evoluciona, sin importar la dinámica que la produce, lo que permite trabajar con un gran número de sistemas con contextos diferentes.

Bibliografía

- [1] K. T. Aligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, Nueva York, 2000.
- [2] L. M. Pecora and T. L. Carroll. *Phys. Rev. Lett.*, 64: 821–824, 1990.
- [3] E. Monsekilde, Y. Maistrenko, and D. Postnov. *Chaotic synchronization applications to living systems*. World Scientific publishing Co., Nueva Jersey, 2002.
- [4] M.A. Escalona. *Análisis de la dinámica no-lineal de señales electroencefalográficas (EGG)*. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2004.
- [5] O. Álvarez-Llamoza and M.G. Cosenza. Synchronization induced by intermittent versus partial drives in chaotic spatiotemporal systems. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 20: 323, 2010.
- [6] D. J. De Castro. *Sincronización de elementos caóticos en redes asimétricas*. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2008.
- [7] A. Méndez. *Emergencia de redes de pequeño mundo en sistemas coevolutivos de mapas caóticos*. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2007.
- [8] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer, Berlin Heidelberg, 1984.
- [9] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 1949.
- [10] T. Schreiber. Measuring information transfer. *Phys. Rev. Lett.*, 85: 461–464, 2000.
- [11] J. Kurths, A. Pikovsky, and M. Rosenblum. *Synchronization A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [12] V. Marquez. *Estructuras jerárquicas inducidas por estímulo externo en redes dinámicas adaptativas*. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2009.

- [13] D.J. DeCastro and K. Tucci. Chaotic synchronization on directed networks. *Journal of physics: Conference series* 246, 012010:246, 2010.
- [14] M.G. Cosenza, O. Álvarez-Llamoza, and G. Paredes. Equivalent synchronization of chaos in driven and in autonomous systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 012009: 246, 2010.
- [15] G. Paredes, O. Álvarez-Llamoza, and M.G. Cosenza. Global interactions, information flow, and chaos synchronization. *Physical Review E.*, page 88, 2013.
- [16] G. Paredes. *Información, Sincronización y complejidad en sistemas dinámicos con interacciones globales*. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.
- [17] Henry D. I. Abarbanel, Nikolai F. Rulkov, and Mikhail M. Sushchik. *Physical Review E.*, 53: 4528, 1996.
- [18] O. Álvarez-Llamoza and M.G. Cosenza. Synchronization and phase ordering in globally coupled chaotic maps. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 227: 112, 2015.
- [19] R. C. Hilborn. *Chaos and nonlinear Dynamics*. Oxford University Press, Nueva York, 2000.
- [20] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Perseus books publishing, New York, 1994.
- [21] J. C. Sprott. *Chaos and time-series analysis*. Oxford University Press, Nueva York, 2003.
- [22] G. R. Goodson. *Chaotic Dynamics: Fractals, tilings and substitutions*. Towson University Mathematics Department, 2015.
- [23] W.F. Hassan Al-shameri and Abdulkawi Mahiub. *Int. Journal of Math. Analysis*, 7: 1433–1449, 2013.
- [24] T. Kawabe and Y. Kondo. Fractal transformation of the one-dimensional chaos produced by logarithmic map. *Prog. Theor. Phys.*, 85: 759–769, 1991.