



Universidad de Los Andes
Centro de Física Fundamental
Área de Caos y Sistemas Complejos

**Surgimiento de comunidades
en un modelo de formación de opinión
Multidimensional**

www.bdigital.ula.ve

Trabajo de grado presentado ante la ilustre
Universidad de Los Andes
como requisito parcial para optar al Título de:
Licenciado en Física

Presentado por:
Br. Eyisto J. Aguilar T.

Tutor:
Dr. Kay Tucci

Mérida, Marzo de 2017

www.bdigital.ula.ve

Resumen

En este trabajo presentamos un modelo de formación de opinión bidimensional con repulsión en donde las comunidades surgen espontáneamente. Los individuos vienen dados por nodos y la conexión entre los mismos viene dada por enlaces. Los individuos poseen dos opiniones sobre dos temas diferentes las mismas cambian debido a la dinámica del sistema. En nuestro modelo se pueden dar dos tipos de interacciones entre los nodos, atracción entre las opiniones de los individuos o repulsión, estos procesos dependen de la diferencia de opiniones de ambos individuos y de los umbrales que rigen la dinámica del sistema. Estudiamos el caso $\{-1, 1, 0\}$ en ambas componentes, se fijaron los umbrales de la primera componente en $u^1 = 0.11$ y $v^1 = 0.40$, se midió el orden de la mayor componente y la modularidad para diferentes valores de u^2 y v^2 en las diferentes redes de interacción. Se encuentra que las comunidades surgen en la frontera en donde la red se fragmenta.

Agradecimientos.

Al profesor Kay Tucci, por su paciencia y por sus enseñanzas, ha sido un excelente tutor. Me brindo la posibilidad de trabajar con él sin conocerme, gracias por confiar en mi.

Al profesor Mario Cosenza, por hacer del Grupo de Caos y Sistemas Complejos un espacio de colaboración tanto científica como humana.

A todos mis compañeros y amigos, sin lugar a dudas llegar hasta acá no hubiese sido posible sin su ayuda y amistad, gracias a todos.

A mi familia, quienes me han dado todo lo que he necesitado desde el momento en que nací, además de darme la educación que me permitió realizar este trabajo, a todos ellos un millón de gracias.

Índice general

Resumen	I
Introducción	1
1. Surgimiento de comunidades.	4
1.1. Caracterización de la red.	6
1.2. Comunidades en redes.	7
1.2.1. Detección de comunidades en redes.	10
1.2.2. Método de agregación multi-nivel.	11
2. Modelos de formación de opinión.	13
2.1. Modelo de Deffuant.	14
2.2. Estructura Modular inducida por exclusión en un modelo de formación de opinión.	16
3. Surgimiento de comunidades en un modelo de formación de opinión multidimensional.	20
3.1. El modelo.	21
3.2. Resultados y discusión.	24
3.2.1. Resultados para las interacciones $\{-1,0\}$	24
3.2.2. Resultados para las interacciones $\{1,1\}$	25
3.2.3. Resultados para las interacciones $\{0,-1\}$	26
3.2.4. Resultados para las interacciones $\{-1,1\}$	27
3.2.5. Resultados para las interacciones $\{1,-1\}$	28
3.2.6. Resultados para las interacciones $\{-1,-1\}$	29
3.2.7. Resultados para las interacciones $\{1,0\}$	31

3.2.8. Resultados para las interacciones $\{0,1\}$	32
3.2.9. Comparación de los resultados de S para las redes de interacción $\{-1,0\}$, $\{1,1\}$, $\{0,-1\}$	33
3.2.10. Comparación tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S para las redes de interacción $\{-1,1\}$, $\{1,-1\}$, $\{-1,-1\}$ 34	
3.2.11. Comparación tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S para las redes de interacción $\{1,0\}$, $\{0,1\}$	35
3.2.12. Resultados para todas las interacciones posibles.	36
4. Conclusión y recomendaciones.	44
Referencias.	46

www.bdigital.ula.ve

“If you do not want to be forgotten as soon as you are dead and rotten, either write something worth reading or do things worth writing.”

Benjamin Franklin

Introducción.

Existen sistemas formados por múltiples elementos interconectados entre sí cuyas dinámicas e interacciones hacen surgir propiedades en su comportamiento que no pueden explicarse a partir del estudio de los elementos individuales que conforman al sistema. A estas propiedades se les llama emergentes y el campo de la ciencia encargado de su estudio es conocido como área de la dinámica no lineal y sistemas complejos [1], ejemplo de estos sistemas son las colonias de hormigas que presentan auto organización en sus comunidades [2] y las colonias de luciérnagas que exhiben sincronización en el destello de sus luces [3]. Al estudiar los sistemas anteriormente mencionados es imposible explicar la dinámica de los mismos si se estudia cada elemento por separado, por lo que es necesario estudiar todos los elementos de manera colectiva. Los sistemas complejos abarcan una amplia variedad de campos científicos y matemáticos en los cuales se lleva a cabo una intensa investigación para encontrar las leyes asociadas a cada fenómeno emergente observado en los diferentes tipos de sistemas [4].

En los sistemas complejos existe una rama de estudio encargada de estudiar los sistemas sociales, se le conoce como sociofísica [5] y se enfoca en estudiar las interacciones colectivas y los fenómenos sociales como propiedades emergentes de dichos sistemas. Los sistemas sociales a menudo pueden describirse en términos de redes de interacción entre individuos en las cuales pueden encontrarse propiedades interesantes como la formación de estructuras y de patrones como consecuencia de procesos de auto organización.

Existe una gran variedad de redes que se han utilizado en sociofísica comenzando por las redes regulares usadas por Schelling en sus modelos de segregación [6] hasta las redes coevolutivas usadas para explicar el surgimiento de una opinión contraria a la de una propaganda [7], pasando por redes complejas como las aleatorias Erdős-Renyi [8], las tipo pequeño mundo [9], las libre de escala [10] y la de comunidades [11]. EL origen del análisis de redes se remonta al año 1736 cuando Leonhard Euler presento una solución al conocido problema de los puentes de Königsberg [12]. Para ello Euler recurrió a una abstracción del problema original, construyendo un grafo o red siendo la primera referencia histórica sobre el estudio en redes. En la actualidad el estudio de redes es toda una área de investigación conocida como teoría de grafos. Una red social puede definirse como un conjunto de personas o grupos de personas con interacciones entre ellas. Los patrones de amistad entre individuos, las relaciones comerciales entre empresas, y la unión entre familias son ejemplos de interacciones que forman redes.

Entre las propiedades que surgen de las redes sociales recientemente ha despertado un gran interés en la comunidad científica la formación de comunidades entre los individuos del sistema [11]. Se ha visto que muchas de las redes reales incluidas las redes sociales, las redes informáticas y las redes metabólicas se agrupan naturalmente en comunidades o módulos.[13], sin embargo aún no están claros los mecanismos que subyacen en la aparición de dichas comunidades en redes de naturaleza tan diversa. Aunque existen algunos modelos de formación de comunidades en redes, estos influyen sobre el sistema para la aparición de las mismas es decir, el surgimiento de comunidades no es espontáneo si no más bien es inducido por el mismo modelo. Nuestro objetivo en este trabajo es crear un modelo de dinámica social en donde las comunidades surjan de manera completamente espontánea y estudiar como y por qué surgen. En nuestro modelo las interacciones entre los agentes vienen dadas por el intercambio de opiniones entre los mismos, para ello hemos decidido modificar el modelo de formación de opinión de Deffuant [14] en donde hemos incluido una componente de repulsión, además de trabajar con dos opiniones por agentes en lugar de sólo una como se plantea en el modelo original.

Este documento esta estructurado de la siguiente forma, comenzando por el capítulo 1 donde se hace una revisión de los conceptos básicos de redes, su definición

y se explican algunas formas de caracterizarla. Además en este capítulo se define la formación de comunidades en redes así como también se hace una breve revisión de los algoritmos utilizados para su detección. En el capítulo 2 estudiamos el modelo de deffuant como tal, y se estudia el modelo Estructura Modular inducida por exclusión [15] similar al que deseamos realizar. Por último, en el capítulo 3 se define matemáticamente nuestro modelo de formación de opinión con repulsión y múltiples estados, y se realizan simulaciones con el fin de determinar las regiones para las cuales se forman las comunidades, estudiando las redes de interacciones entre los agentes del sistema. Finalmente se dan las conclusiones y recomendaciones de este trabajo.

www.bdigital.ula.ve

“Los científicos dicen que estamos hechos de átomos, pero a mí un pajarito me contó que estamos hechos de historias.”

Eduardo Galeano.

Capítulo 1

Surgimiento de comunidades.

En general las personas poseen un concepto bastante acertado de lo que es una comunidad ya que desde que nacemos hasta el fin de nuestros días pertenecemos al menos a una comunidad localizada en algún lugar de nuestro mundo, es decir nuestra cotidianidad nos da una idea de como se define. Un concepto riguroso dado por la real academia española contempla que una comunidad es “un conjunto de personas vinculadas por características o intereses comunes”[16]. Para generalizarlo a una red de elementos cualesquiera una definición de comunidad sería, **el conjunto de elementos fuertemente conectados entre sí debido a algún criterio de semejanza o interacción entre ellos.**

Entender la forma en que los elementos interactúan dentro de una grupo es de vital importancia para determinar si efectivamente existe estructura de comunidades. Desde hace varios años es conocida la existencia de sistemas que muestran propiedades estadísticas comunes a su red de conectividad[17], ejemplo de ellos son las redes de comunicación, los sistemas económicos, los grupos sociales y los flujos metabólicos en las células[18],entre otros; las interacciones entre los elementos se representan mediante una red de conectividad.

Desde un punto de vista más riguroso una red consiste en un conjunto de ele-

mentos o nodos, conectados entre sí a través de un conjunto de enlaces, así la red se representa matemáticamente con un grafo G , el cual consiste en dos conjuntos $G = \{P, E\}$, en donde el conjunto $P = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ contiene a los N elementos del sistema que interactúan entre sí, llamados también nodos o vértices, y el conjunto $E = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ que contiene a cada enlace $E_k = (P_i, P_j)$ que conectan dos elementos P_i y P_j del conjunto P [19]. Las redes pueden ser ponderadas, siendo el peso una cantidad escalar que se le agrega a cada enlace que representa la intensidad de la interacción entre dos nodos. En una red no ponderada todos los enlaces poseen el mismo peso y por lo general está normalizado a 1 [20].

La matriz de adyacencia de una red es la matriz $N \times N$ en donde N es el número de nodos. Los términos A_{ij} representan el número de enlaces del nodo i con el nodo j , los términos de la diagonal A_{ii} representa el número de autoconexiones del nodo i . El grado k_i de un nodo i es el número total de vecinos del nodo en la red. La distribución de grado P_k en la red es la probabilidad de escoger un nodo con grado k se define como $P_k = \frac{N_k}{N}$, en donde N_k es el número de nodos con grado k en un grafo en particular.

El patrón específico de las conexiones entre los elementos define la topología de la red. Existe una gran diversidad de estudios que involucran la topología de las redes, sin embargo la mayoría de los estudios se enfocan en dos aspectos. El primero se enfoca en estudiar como evolucionan sistemas compuestos por elementos dinámicos interconectados sobre una red. Aquí los nodos que representan sistemas dinámicos, interactúan unos con otros de acuerdo a la topología de la red, así mientras el estado de cada nodo es modificado por la topología de la red, ésta se mantiene estática. Algunos de los estudios destacados en esta línea de investigación son la sincronización de sistemas dinámicos [21, 22] la formación de opinión [23] y la propagación epidemiológica[24].

La segunda línea de investigación está relacionada con la dinámica de la red. En este caso la topología de la red es considerada como parte de la dinámica, por lo que los cambios en el tiempo de las interconexiones se dan de acuerdo a normas específicas que modifican la topología de red. Diversos estudios en esta área han demostrado que ciertas reglas de evolución en el tiempo dan como resultados la formación de topologías peculiares, siendo los dos ejemplos más notables el de la formación de redes de pequeño mundo y el del crecimiento de redes libres de escala[24].

Recientemente se ha creado una tercera línea de investigación con redes coevolutivas [25, 26] en las cuales el estado de los nodos es afectado por la topología de la red y simultáneamente la topología de la red se ven modificada por la evolución de los estados del sistema. En estas redes existe un intercambio de información entre la topología y la dinámica de los nodos[24], como lo muestra la figura 1.1. En ella los elementos del sistema son las circunferencias y sus estados vienen dados por el color. Nótese que el estado afecta la topología del sistema haciendo cambiar las conexiones entre los elementos lo que determina la forma que posee la red, a su vez el cambio en la topología propicia un cambio en la dinámica de los elementos cambiando sus estados, por lo que nuevamente comienza el ciclo de intercambio de información entre los elementos y la topología de la red.

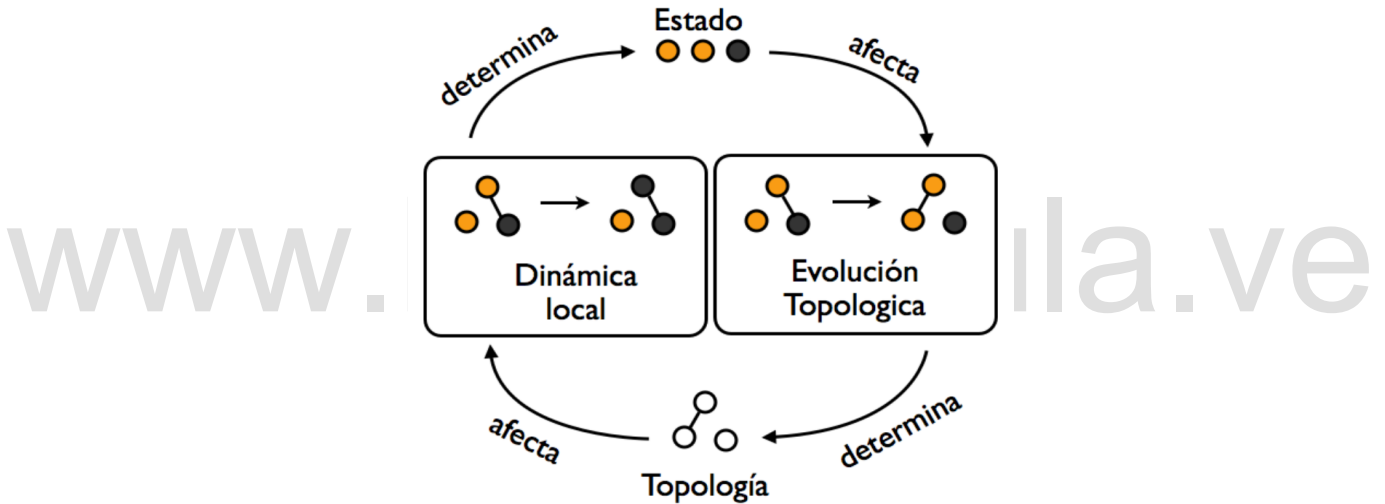


Figura 1.1: Representación de la evolución de tres nodos en una red coevolutiva[24].

1.1. Caracterización de la red.

Para caracterizar una red existen muchas mediciones que se pueden hacer sobre ella entre las cuales tenemos, el grado de la red y su distribución, el diámetro de la red, el coeficiente de agrupamiento, la eficiencia, entre otros[27]. En este trabajo usaremos dos medidas. La primera es el orden normalizado de la componente mayor que viene dada por

$$S = \frac{C_{max}}{N}, \quad (1.1)$$

donde C_{max} es el orden del componente mayor del grafo, es decir el número de nodos del subgrafo conexo con mayor cantidad de nodos, y N es el orden de todo el subgrafo, es decir el número total de nodos que la red posee.

La segunda medida es la modularidad que nos permite cuantificar si existen comunidades de nodos en una red. Ya hemos dado una idea bastante general de lo que es una comunidad, y en el contexto de redes el concepto no es muy diferente. Se dice que una red posee estructura de comunidades si existen subgrafos cuyos nodos están altamente conectados entre sí, en comparación con el número de enlaces entre dichos nodos y nodos pertenecientes a otros subgrafos. Si esto sucede se dice que la red tiene estructura modular o estructura de comunidades. La estructura de comunidades puede ser cuantificada midiendo la modularidad Q de la red [13] que se define como

$$Q = \frac{1}{m} \sum_{ij} \left[A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right] \delta(c_i, c_j) , \quad (1.2)$$

en donde m es el tamaño, es decir el número de enlaces totales en la red; A_{ij} es el elemento (i, j) de la matriz de adyacencia de A ; k_i y k_j representan el grado de los nodos i y j respectivamente; c_i y c_j son etiquetas que identifican a las comunidades a las que pertenecen los nodos i y j , $\delta(c_i, c_j)$ es el delta de Kronecker que es una función de dos variables, que vale 1 si ambas variables son iguales, que en nuestro caso significa que pertenecen a la misma comunidad y vale cero cuando son diferentes, es decir cuando cada nodo pertenecen a una comunidad distinta. El valor de Q está en el rango de $[-1, 1]$; siendo un el valor positivo de Q un indicador de la presencia de estructura modular en la red, es decir los nodos se agrupan en comunidades. Cuando el valor de modularidad es $Q \approx 0$ se dice que no hay estructura de comunidades en la red, la distribución de los nodos en este caso se asemeja a los nodos sobre una red aleatoria.

1.2. Comunidades en redes.

Existen múltiples representaciones de redes con estructura modular, a continuación hablaremos de dos redes de colaboración científica en la cuales existe estructura de comunidades. La primera es la Red de colaboración científica en el instituto San-

ta Fe en Nuevo México que fue estudiada por Girvan y Newman [28]. El estudio consistió en estudiar la formación de comunidades en la red de colaboración entre los científicos en dicho instituto compuesta por 271 científicos de diferentes grupos de investigación. La representación de dicha red se muestra en la figura 1.2.

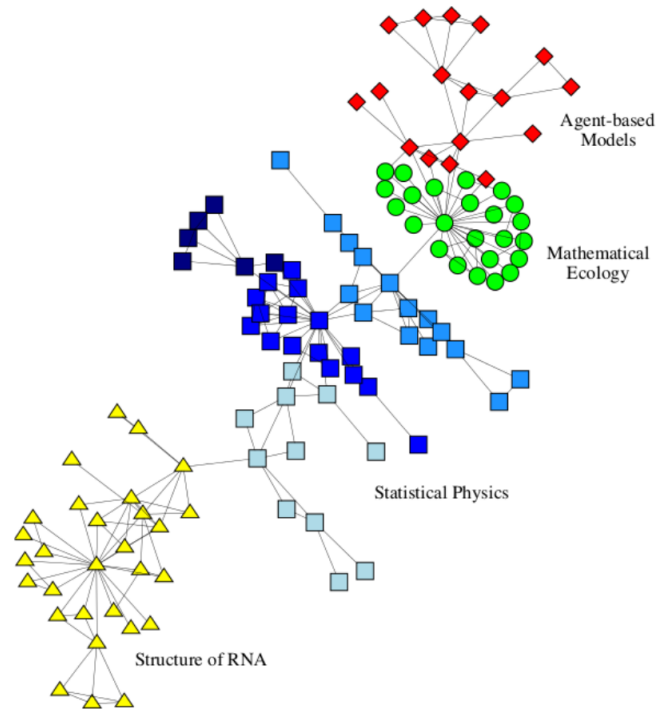


Figura 1.2: Red de colaboración científica en el instituto Santa Fe en Nuevo México, Estados Unidos [28].

En la figura cada nodo representa a un investigador, su forma corresponde al grupo de investigación al que pertenecen, los enlaces entre pares de nodos se dan si son coautores en uno o más artículos de investigación entre los años de 1999 y 2000. La comunidad con nodos triangulares amarillos es la que estudia la estructura del ARN. Se aprecia que esta comunidad puede a su vez agruparse en subcomunidades más pequeñas. La comunidad representada por los nodos cuadrados realizan estudios en física estadística, es la comunidad más grande de la red. Las diferentes tonalidades de azul en este grupo representan subcomunidades formadas en el grupo, como consecuencia de estudios específicos en el área de la física estadística. La comunidad de nodos con círculos verdes representa a los científicos que estudian

modelos matemáticos en ecología, es la comunidad más cohesionada de la red. Por último tenemos el grupo de nodos con forma de diamantes, que es el grupo más disperso de la red, donde se estudian modelos basados en agentes.

Un segundo ejemplo es la red de colaboración científica del grupo de caos y sistemas complejos del Centro de Física Fundamental de la Universidad de Los Andes. En esta red también se utilizó como nodo a cada investigador que ha realizado una publicación con algún estudiante o profesor del Grupo[19]. Las conexiones entre nodos se dan entonces cuando ambos investigadores hayan publicado juntos al menos un artículo.

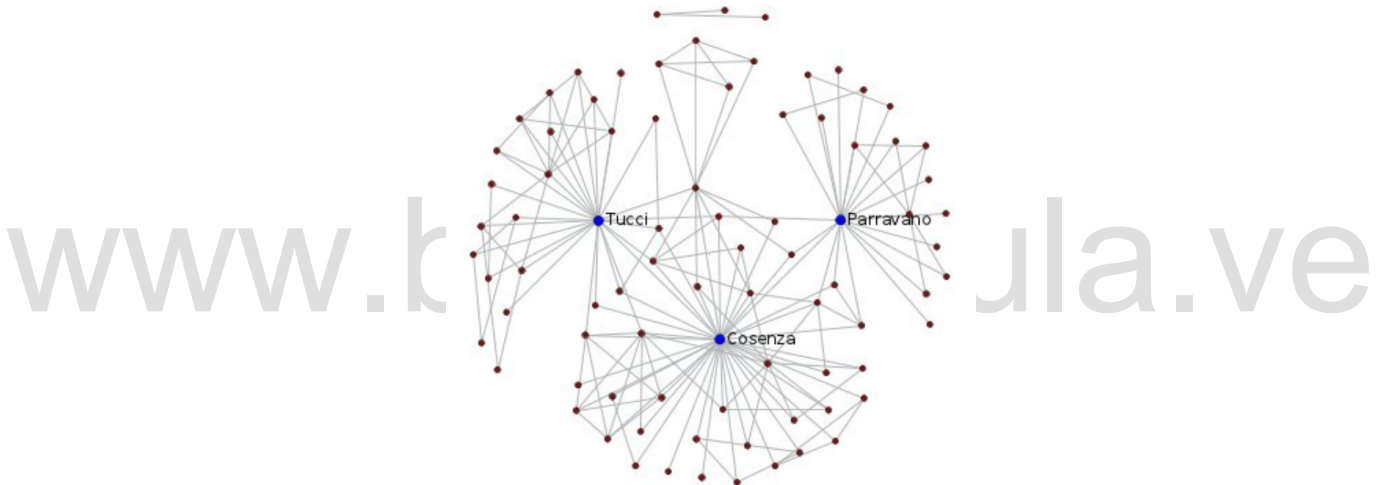


Figura 1.3: Red de colaboración científica en el Grupo de Caos y Sistemas Complejos de la Universidad de los Andes en Mérida - Venezuela [19].

En la red existe evidencia de formación de comunidades. Al medir la modularidad se encuentra que posee un valor de $Q = 0.510$, mayor que la modularidad de una red sin estructura modular. En la figura 1.3 se destacan 3 nodos que son los que mantienen conectados varios grupos. El nodo del profesor Tucci mantiene conectada toda la parte de ingeniería con el resto del Grupo. El nodo del profesor Parravano, mantiene conectado al grupo de astrofísica con el grupo de caos y por último se encuentra el nodo del Profesor Cosenza mantiene una alta conectividad con el resto de nodos en la red.

1.2.1. Detección de comunidades en redes.

En la actualidad existen diversos algoritmos para la detección de comunidades en redes, entre los cuales tenemos a los:

Algoritmos divisivos: detectan enlaces entre las comunidades y los eliminan progresivamente de la red[15]. El algoritmo *Edge Betweenness Method* creado por M.Girvan y M.E.Newman[29] es una ejemplo de algoritmo divisivo, el mismo detecta comunidades mediante la supresión gradual de los enlaces de la red original. En él los enlaces son eliminados en función del número de caminos más cortos entre pares de nodos o intermediación, los nodos que poseen la intermediación más alta son eliminados de la red, el proceso de eliminación de enlaces termina cuando se alcanza la modularidad más alta.

Algoritmos aglomerativos: como su nombre lo indica son algoritmos que agrupan los nodos similares y los fusiona. Un ejemplo de este tipo de algoritmos es *Fast greedy modularity optimization*, propuesto por A. Clauset, M.E. Newman, y C. Moore[30], que se enfoca en encontrar la partición de la red con mayor modularidad. En principio considera a cada nodo como una comunidad y posteriormente agrega los enlaces de la red original aumentando así la modularidad.

Algoritmos de optimización: buscan mejorar los valores de funciones que miden la calidad de las particiones[15]. Los más conocidos son los de optimización de modularidad, que utilizan la función de modularidad para encontrar la partición de red que posea mayor modularidad. Ejemplos de estos algoritmos son: *Optimal compression of network topology information* y el algoritmo *Compression of the information of random walks on the network* ambos propuestos por M. Rosvall and C.T. Bergstrom[31][32]. Existe otro algoritmo de optimización llamado *Método de Agregación Multi-nivel* [33] que sera desarrollado a continuación.

1.2.2. Método de agregación multi-nivel.

En este trabajo usaremos el algoritmo de agregación multi-nivel propuesto por Blondel Vincent, Guillaume Jean-Loup y colaboradores que es un método de optimización de la modularidad[33]. El algoritmo, que consta de dos fases, inicia suponiendo que se parte de una red ponderada con N nodos. La primera fase del algoritmo consiste en asignar una comunidad diferente a cada nodo en la red, por lo que en el instante inicial hay tantas comunidades como nodos. Luego para cada nodo i se consideran todos sus vecinos midiendo la ganancia en modularidad que tendrá lugar al eliminar i de su comunidad y colocarlo en la comunidad de cada uno. El nodo i se asocia entonces a la comunidad para la cual la ganancia en modularidad es máxima, siempre y cuando ésta sea positiva. Si no es posible una ganancia positiva el nodo i es colocado en la comunidad que tenía originalmente. Esta fase del algoritmo se aplica iterativamente para todos los nodos en la red, se detiene cuando se alcanzan los máximos locales de modularidad, es decir, cuando ninguna asociación individual a alguna comunidad mejora la modularidad. La segunda fase del algoritmo consiste en construir una nueva red en donde los nodos estén agrupados de acuerdo a las comunidades encontradas en la primera fase. En este caso los pesos están dados por la suma de peso de los enlaces entre nodos de las nuevas comunidades creadas. La figura 1.4 muestra una representación de los pasos del algoritmo pasando por la asignación de comunidades a cada nodo, optimizando la modularidad y por último creando la nueva red.

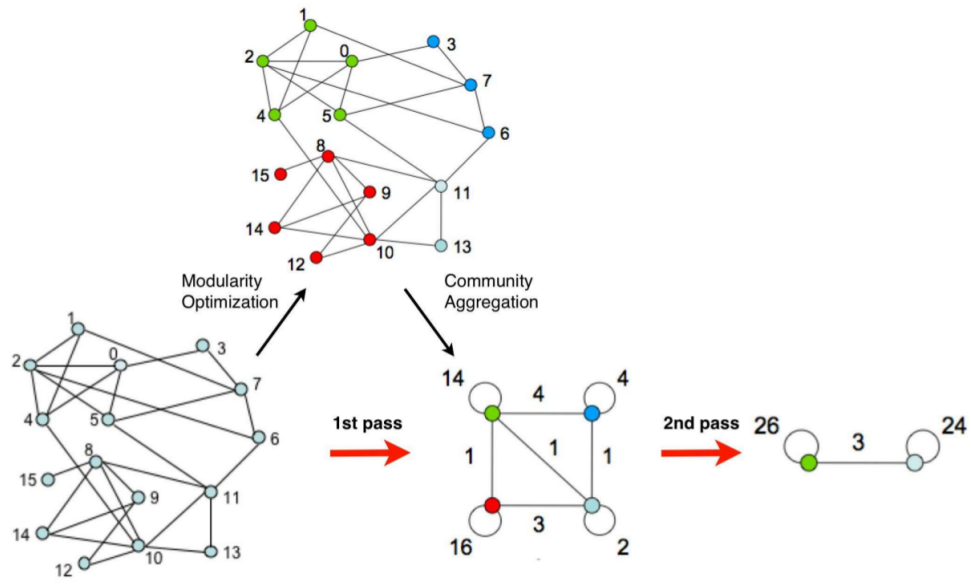


Figura 1.4: Visualización de los procesos que se dan en el algoritmo de agregación multi-nivel. En la primera fase la modularidad es maximizada al cambiar localmente la ubicación de los nodos en las comunidades, la segunda fase consiste en crear una red cuando la modularidad ya está maximizada[33].

www.bdigital.ula.ve

“I, a universe of atoms.

An atom in the universe.”

Richard P. Feynman

Capítulo 2

Modelos de formación de opinión.

Sabemos que las comunidades poseen una dinámica mediante la cual los agentes interactúan, pero ¿cuál es la mejor dinámica para representar la interacción entre las poblaciones?, al hacernos esta pregunta debemos tomar en cuenta varios aspectos. El primero de ellos está relacionado con el tipo de comunidad a la que nos estamos refiriendo ya que, en nuestro mundo existen miles de comunidades de diferente raza, creencia, religión y gustos. El segundo aspecto a tomar en cuenta es a que característica de la población está asociada la dinámica, porque existen numerosas formas de describir las poblaciones. Si vamos a lo más elemental que conocemos sobre las comunidades, nos podemos dar cuenta que las interacciones más básicas se dan cuando hay intercambio de información entre integrantes de la población. Si nos referimos exclusivamente a comunidades humanas, observamos que el intercambio de información se da al intercambiar opiniones sobre algún tema que se tenga en común entre los integrantes de las comunidades. En base a esto entendemos entonces que los modelos de dinámica social en donde los agentes interactúan a través de sus opiniones pudiesen formar comunidades. En lo que resta de este capítulo hablaremos sobre el modelo de dinámica social de Deffuant y una de sus variantes en los cuales los agentes poseen y comparten opiniones sobre algún tema.

2.1. Modelo de Deffuant.

El modelo de Deffuant fue propuesto en el 2000 por Guillaume Deffuant y colaboradores en un artículo llamado "Mixing beliefs among interacting agents"[14]. Este es un modelo de dinámica social en donde un grupo de N agentes ajustan sus opiniones sobre algún tema específico. Dichos agentes poseen una opinión codificada con un número real entre cero y uno, así el tema de opinión podrá ser de cualquier índole. La interacción entre los agentes vendrá determinada por un parámetro llamado tolerancia o umbral d . A cada paso de tiempo se eligen dos agentes al azar i , j con opiniones x_i y x_j respectivamente, si la diferencia entre las opiniones $|x_j - x_i|$ es menor a la tolerancia d entonces los agentes reajustaran sus opiniones de acuerdo a las ecuaciones

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \mu(x_j(t) - x_i(t)) \quad (2.1)$$

$$x_j(t+1) = x_j(t) + \mu(x_i(t) - x_j(t)) \quad (2.2)$$

en donde $x_i(t)$, $x_j(t)$ son las opiniones de los agentes i , j en el instante t y μ es conocido como el parámetro de convergencia.

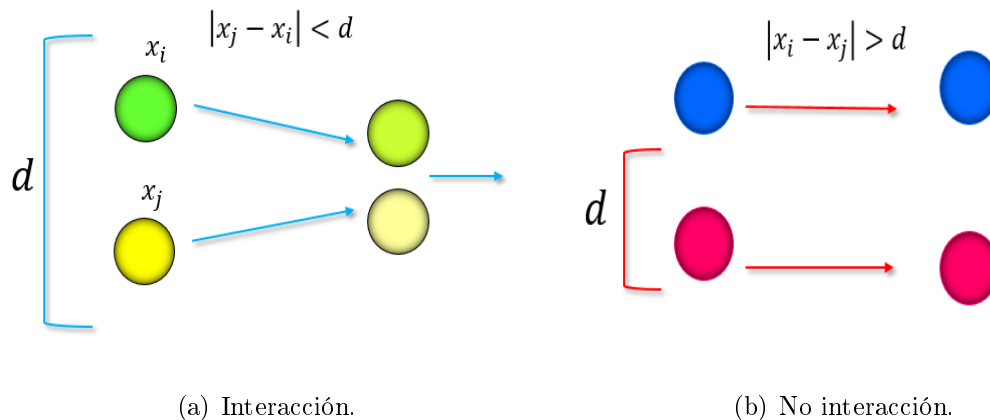


Figura 2.1: Posibles interacciones entre los agentes i , j con opiniones x_i , x_j .

En la figura 2.1a se observa una representación de la interacción entre dos agentes, la diferencia de las opiniones entre los dos es tal que la tolerancia d del sistema permite que los agentes modifiquen sus opiniones, dicha interacción acerca las opiniones de ambos.

Si la diferencia de opiniones es mayor a la tolerancia d los agentes no interactúan y mantienen su opinión en ese instante de tiempo.

En la figura 2.1b se muestran los dos agentes con opiniones x_i y x_j cuya diferencia de opiniones es tal que la tolerancia del sistema no permite interacción entre los agentes, por lo tanto en ese instante de tiempo los agentes mantienen sus opiniones.

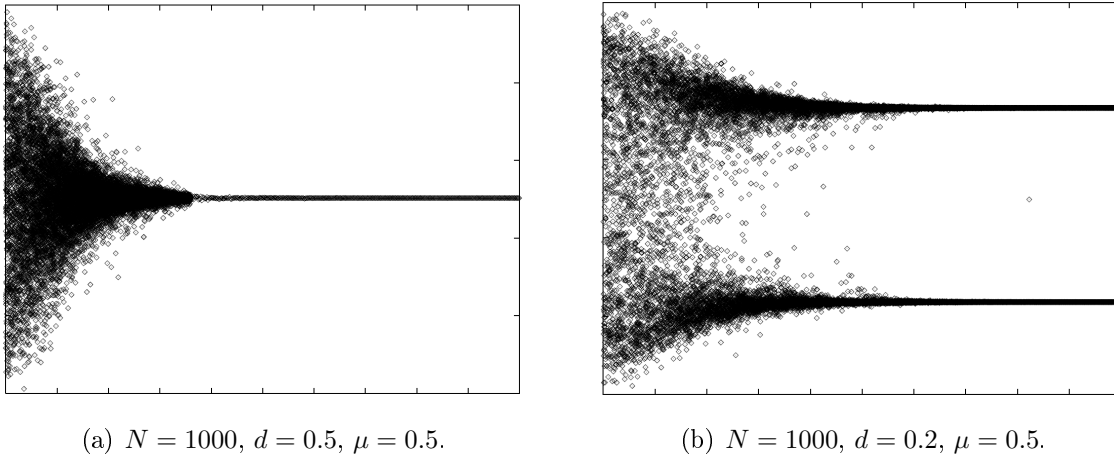


Figura 2.2: Resultados del modelo de Deffuant para $N = 1000, d = 0.5, \mu = 0.5$ y $N = 1000, d = 0.2, \mu = 0.5$. [14].

En la figura 2.2a se muestran los resultados obtenidos por Deffuant et al. cuando realizaron simulaciones variando el valor de la tolerancia d en un sistema con $N = 1000$ agentes y fijando el parámetro de convergencia $\mu = 0.5$. Nótese que en este caso las opiniones de los agentes, que inicialmente están distribuidas aleatoriamente, conforme evolucionan se acercan tanto que llegan a un consenso, esto gracias a que la tolerancia del sistema es lo suficientemente alta como para que inclusive agentes con diferencias de opinión grandes interactúen.

En cambio, en la figura 2.2b se muestra la evolución de las opiniones de los agentes para una tolerancia menor, $d = 0.2$. Nuevamente se aprecia en $t = 0$ una distribución aleatoria de las opiniones, sin embargo conforme el sistema evoluciona en el tiempo se observa como surgen dos corrientes de opinión, los agentes ubicados en dichos grupos de opinión no modifican más sus opiniones. Deffuant et al. encuentra que la formación de dos o más grupos es producto de la baja tolerancia en el sistema, los agentes con opiniones muy diferentes simplemente no interactúan. Con-

cluyendo entonces que el número de picos o corrientes de opinión aumenta conforme la tolerancia d disminuye.

Se han realizado múltiples trabajos y modificaciones sobre el modelo de Deffuant, entre los que queremos mencionar el modelo de Deffuant sobre redes aleatorias [34] en la cual se restringe el intercambio de información entre personas a que ellos sean vecinos en la red, produciendo de este modo que el número de opiniones finales sea proporcional al número de personas. Otro ejemplo que hemos considerado interesante para nuestro trabajo es el estudio de puntos de vista extremos en la sociedades, en el que se modifica el modelo de Deffuant para estudiar el extremismo de los agentes[35]. El modelo establece una relación entre la opinión y la tolerancia de cada agente definiendo dos grupos de agentes, extremistas y conservadores. En condiciones de tolerancias bajas, se encuentra que las opiniones de todos los agentes podrían tender al extremismo, sin importar que tan conservadores fueron inicialmente.

Un tercer trabajo que extiende el modelo de Deffuant, y sobre el que se basa este trabajo, es el presentado por Fuenmayor en 2014 [15] que explicaremos en la sección siguiente.

2.2. Estructura Modular inducida por exclusión en un modelo de formación de opinión.

El modelo de Deffuant da una idea muy general de cómo podría una población modificar sus opiniones hasta llegar a un consenso, esto gracias a dos tipos de relaciones entre los agentes, atracción o no interacción.

El intercambio de opiniones en la sociedad por lo general no se da de esa manera, los agentes dentro de una sociedad pueden también sentir repulsión a alguna opinión o idea. ¿Cómo podría representarse este comportamiento?. Fuenmayor, en su trabajo llamado *Estructura modular inducida por exclusión en un modelo de formación de opinión* en el 2014, propone un modelo con estas características.

Para agregar esta nueva interacción Fuenmayor modifica el modelo de Deffuant original, haciendo que la interacción entre los agentes dependa de dos umbrales u

y v , en lugar de sólo uno. La figura 2.3 representa cómo es la interacción entre dos agentes con estos dos nuevos umbrales. Dependiendo de la diferencia entre las opiniones de los agentes la interacción podrá ser repulsiva, atractiva o de reconexión.



Figura 2.3: Representación de los tres tipos de interacciones en el modelo de Fuenmayor.

El modelo consta de un sistema que está compuesto por N agentes con opiniones aleatorias entre 0 y 1 que interactúan sobre una red que inicialmente es aleatoria tipo **Erdos-Réngi**[8]. A cada paso de tiempo se seleccionan al azar dos individuos $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ y j perteneciente al conjunto de vecinos de i ν_i con opiniones x_i, x_j respectivamente. Las nuevas opiniones de los agentes se calculan de acuerdo a la expresión

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \mu p(d_{ij})(x_j(t) - x_i(t)) \quad (2.3)$$

$$x_j(t+1) = x_j(t) + \mu p(d_{ij})(x_i(t) - x_j(t)) \quad (2.4)$$

donde μ es el parámetro de plasticidad, $d_{ij} = |x_i(t) - x_j(t)|$ representa a la distancia o el desacuerdo entre las opiniones de los agentes i y j , y determina el valor de $p(d_{ij})$ que representa el tipo de interacción que pueden tener los agentes y toma valores de acuerdo a

$$p(d_{ij}) = \begin{cases} s_1 & \text{si } d_{ij} \in [0, u) \\ s_2 & \text{si } d_{ij} \in [u, v) ; \\ s_3 & \text{si } d_{ij} \in [v, 1] \end{cases}$$

donde $s_1, s_2, s_3 \in \{-1, 0, 1\}$ con $s_1 \neq s_2 \neq s_3$. Cuando el valor de $p(d_{ij}) = 1$ el valor del desacuerdo d_{ij} disminuye, es decir la interacción es de atracción, cuando por el contrario el valor de $p(d_{ij}) = -1$ la diferencia de creencias o de opiniones aumenta, existe repulsión. En el ultimo caso cuando $p(d_{ij}) = 0$ no ocurre cambio en las opiniones de los agentes, en este caso los agentes i, j se desconectan e i se conecta con otro agente j' para el cual $p(d_{ij}) \neq 0$, a este proceso se le llama reconexión.

Se tienen entonces 6 combinaciones posibles de s_1, s_2, s_3 que se muestran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Combinaciones de los tipos posibles de interacción en el modelo de Fuenmayor, en donde $s = -1$ representa repulsión, $s = 1$ representa atracción y $s = 0$ representa reconexión.

Caso	$[0, u)$	$[u, v)$	$[v, 1]$
1	Repulsión ($s_1 = -1$)	Atracción ($s_2 = 1$)	Reconexión ($s_3 = 0$)
2	Atracción ($s_1 = 1$)	Repulsión ($s_2 = -1$)	Reconexión ($s_3 = 0$)
3	Repulsión ($s_1 = -1$)	Reconexión ($s_2 = 0$)	Atracción ($s_3 = 1$)
4	Atracción ($s_1 = 1$)	Reconexión ($s_2 = 0$)	Repulsión ($s_3 = -1$)
5	Reconexión ($s_1 = 0$)	Repulsión ($s_2 = -1$)	Atracción ($s_3 = 1$)
6	Reconexión ($s_1 = 0$)	Atracción ($s_2 = 1$)	Repulsión ($s_3 = -1$)

En este trabajo se encontró que existen regiones en el espacio de parámetros (u, v) en las cuales se formaban comunidades conexas para cada uno de los casos. Para ello realizaron simulaciones con el parámetro de convergencia $\mu = 0.1$, el tamaño del sistema $N = 1000$ y el grado promedio de la red $\langle k \rangle = 10$. Note que este es un sistema coevolutivo, donde el estado de los elementos altera la topología de la red y a su vez la topología de la red afecta a los estados de los elementos que componen al sistema. Para caracterizar la estructura de red se calcula el tamaño normalizado en la comunidad mayor M , el tamaño normalizado o fracción de individuos en la mayor componente del sistema S y ΔQ que se define como $\Delta Q = Q(t) - Q(0)$, representa el cambio de modularidad, en donde $Q(0)$ es la modularidad en la red inicial y $Q(t)$ es la modularidad en el tiempo t , dichas cantidades son medidas para cada uno de los casos de la tabla 2.1. Es necesario mencionar que el autor considera que las comunidades conexas se forman cuando $S > 0.9$ y $\Delta Q > 0.1$, en el caso en que $S > 0.9$ y $\Delta Q < 0.1$ la red no presenta estructura modular, y por ultimo en el caso en donde $S < 0.9$ la red termina fragmentándose.

En la figura 2.4 se muestran dos redes conexas para los casos 1 y 4, con sus respectivos umbrales u, v . Los colores de los agentes representan sus estados. En la figura 2.4a se aprecia una red alargada, la posibilidad de repulsión se da cuando los agentes son muy parecidos entre si, es decir a corta distancia, la posibilidad de atracción se da cuando los agentes no son muy parecidos ni muy diferentes, a media

distancia, por ultimo cuando los agentes son muy diferentes es decir, a gran distancia se da la reconexión. En la figura 2.4b se aprecian dos comunidades de agentes en los extremos, un grupo rojo y un grupo azul, conectados en el centro por agentes con una opinión intermedia entre los grupos rojos y azules, en este caso a corta distancia la interacción entre los agentes es atractiva, a media distancia existe reconexión y a gran distancia existe repulsión.

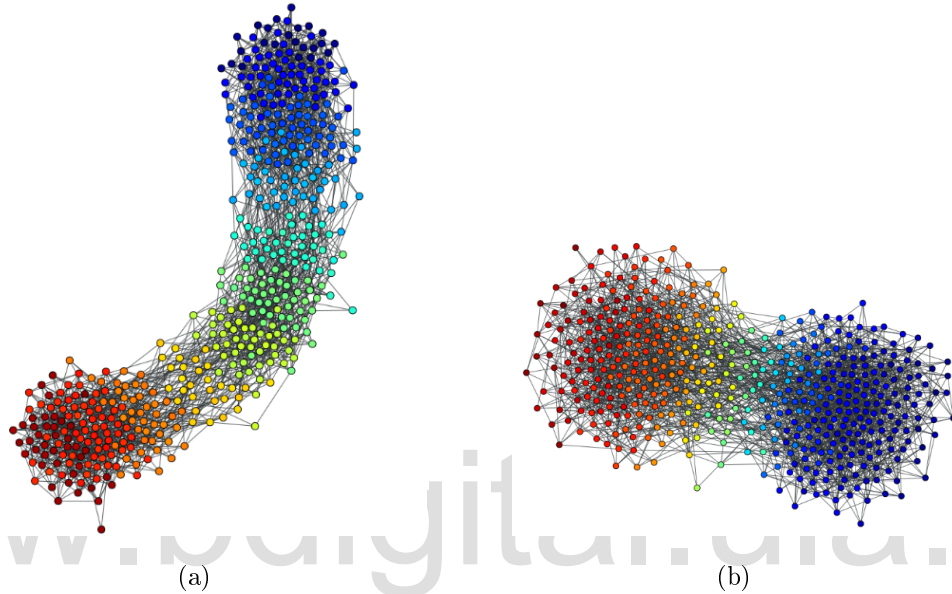


Figura 2.4: Redes conexas para los casos 1 y 2, en la imagen *a* los valores de los umbrales son $u = 0.08, v = 0.16$ y corresponde al caso $s_1 = -1, s_2 = 1, s_3 = 0$, en la imagen *b* los umbrales tienen valores de $u = 0.30, v = 0.90$ y corresponde al $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = -1$.

“No great discovery was ever made without a bold guess.”

Isaac Newton

Capítulo 3

Surgimiento de comunidades en un modelo de formación de opinión multidimensional.

www.bdigital.ula.ve

En nuestro trabajo nos enfocamos en implementar y estudiar un modelo de formación de comunidades lo más neutral posible que, dada la dinámica de los agentes y los parámetros que rigen la misma permita estudiar la formación de comunidades. Para ello proponemos un modelo de formación de opinión, similar al modelo de Fuenmayor utilizado en su trabajo de “Estructura modular inducida por exclusión” [15], que presentamos en la sección 2.2, con la diferencia de que en nuestro modelo los agentes no están sobre una red, por lo que no existe la interacción del tipo reconexión entre los agentes. Pensamos que con esta interacción se introduce un ruido que favorece en el sistema la formación de comunidades. Para evitar este efecto, en nuestro caso los agentes al estar en esta situación simplemente no interactúan como ocurre en el modelo original de Deffuant [14]. Otra diferencia de nuestro modelo de los modelos de Deffuant y Fuenmayor es que nuestros agentes tienen opiniones sobre diversos temas es decir, es multi-dimensional.

3.1. El modelo.

Nuestro modelo está compuesto por N agentes que tienen opiniones sobre F temas distintos, es decir que forma $\mathbf{x}_i = \{\mathbf{x}_i^1, \mathbf{x}_i^2, \dots, \mathbf{x}_i^F$ en donde el subíndice i es la etiqueta o identificación del agente o nodo y el superíndice $f = 1, 2, \dots, F$ representa la componente del vector de estado e identifica a cual de las opiniones se hace referencia. En el instante inicial se les da a cada opinión de cada agente un valor aleatorio entre 0 y 1. A cada paso de tiempo se eligen dos agentes al azar i, j y se mide la diferencia o desacuerdo d_{ij} entre estos dos agentes que viene dado por

$$d_{ij} = \sum_{f=1}^F (x_i^f - x_j^f)^2 \quad (3.1)$$

y con este valor los agentes modifican su opinión de acuerdo a las expresiones

$$\begin{aligned} x_i^f(t+1) &= x_i^f(t) + \mu p^f(d_{ij})(x_j^f(t) - x_i^f(t)) \\ x_j^f(t+1) &= x_j^f(t) + \mu p^f(d_{ij})(x_i^f(t) - x_j^f(t)) \end{aligned} \quad \forall f, \quad (3.2)$$

donde $x_i^f(t)$ y $x_j^f(t)$ representan la opinión de los agentes i y j respectivamente, sobre el tema f en el instante t ; μ representa el parámetro de plasticidad, y $p^f(d_{ij})$ representa el proceso o el tipo de interacción que actuará para cambiar la opinión sobre el tema f de los agentes i y j . Como vemos, el valor de $p^f(d_{ij})$ depende tanto del desacuerdo entre los agentes como del tema al que estemos haciendo referencia, por lo que para $f = 1$ puede tener un valor diferente al que tiene para $f = 2$. Los valores de $p^f(d_{ij})$ depende de los umbrales u^f y v^f , toma valores según la expresión

$$p^f(d_{ij}) = \begin{cases} q^f & \text{si } d_{ij} \in [0, u^f) \\ r^f & \text{si } d_{ij} \in [u^f, v^f); \\ s^f & \text{si } d_{ij} \in [v^f, 1] \end{cases}$$

donde q^f, r^f y $s^f \in \{-1, 1, 0\}$, con $q^f \neq r^f \neq s^f$, son los parámetros que determinan el tipo de interacción entre los agentes i y j . Tanto q^f, r^f, s^f como u^f, v^f dependen de la componente f , pudiendo tener valores diferentes para componentes diferentes. En el caso bidimensional, con $F = 2$, se tienen dos umbrales y dos reglas de interacción, una para cada componente.

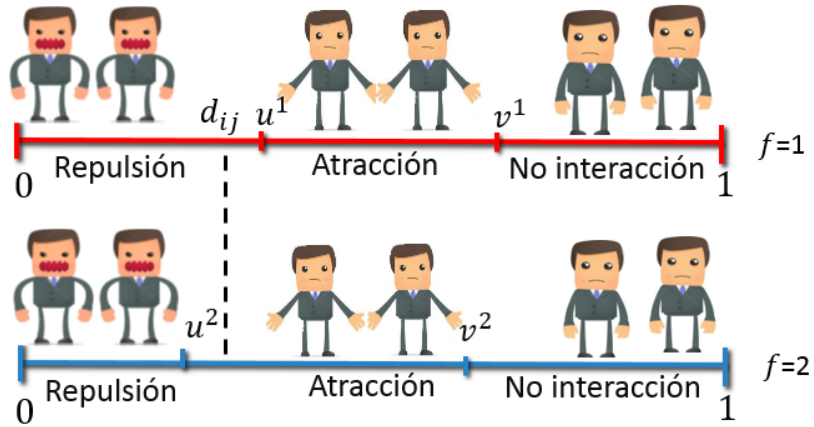


Figura 3.1: Representación de la interacción en nuestro modelo, para la regla $\{-1, 1, 0\}$ en ambas componentes.

Existen 3 posibilidades de interacción para cada tema en función del desacuerdo d_{ij} de los agentes. En caso de que $p^1(d_{ij}) = 1$ y $p^2(d_{ij}) = 1$ la interacción sobre cada componente sera atractiva, es decir las opiniones de los agentes se acercaran, en el supuesto de que $p^1(d_{ij}) = -1$ y $p^2(d_{ij}) = -1$ la interacción sera repulsiva y las opiniones en las componente respectivas se alejaran y en el caso en que $p^1(d_{ij}) = 0$ y $p^2(d_{ij}) = 0$ los agentes en ese instante de tiempo mantienen sus opiniones, es decir no se modifica el desacuerdo entre los agentes sin embargo, existe la posibilidad que haya para un mismo nivel de desacuerdo interacciones distintas, como se muestra en la figura 3.1 donde se representa el modelo con $F = 2$, usando la regla de interacción $q^f = -1, r^f = 1, s^f = 0\}$ para ambas componentes. En la figura vemos como existen rangos de valores de d_{ij} para los cuales hay interacciones diferentes para cada componente, la interacción entre los agentes depende entonces de dos cosas, del desacuerdo d_{ij} entre los agentes y de los umbrales. Para el caso que se resalta en la figura en la primera componente el desacuerdo d_{ij} está entre $[0, u^1)$ por lo que la interacción entre los agentes sera repulsiva y las opiniones de los agentes en este tema se alejaran. En cambio, en la segunda componente la diferencia de opiniones d_{ij} esta entre $[u^2, v^2)$ por lo que la interacción para los agentes es atractiva y sus opiniones sobre el segundo tema se acercarán. Situaciones similares se pueden presentar para otras reglas e inclusive cuando los dos agentes que interactúan no comparten la misma regla.

Como el modelo no define a priori una red de interacciones podemos construir

las redes de interacción entre los elementos a posteriori de acuerdo al tipo de interacción que tengan los agentes. Como hemos dicho, en los casos $p^1(d_{ij}) = 0$ ó $p^2(d_{ij}) = 0$ los elementos no modifican su opinión, por lo tanto no existe interacción entre ellos, por lo que las interacciones de la forma $[0, 0]$ no son consideradas a la hora de construir las redes. De esta forma, y como lo muestra la tabla 3.1, quedan 8 tipos de interacción para construir las redes en nuestro modelo.

Tabla 3.1: Posibles tipos de interacción entre los elementos que permiten construir las redes de elementos del sistema a posteriori.

f	$f=1$	$f=2$	Interacción
$p^f(d_{ij})$	1	1	Completamente atractiva
$p^f(d_{ij})$	1	0	Atractiva en el primer tema
$p^f(d_{ij})$	1	-1	Cruzada (atractiva - repulsiva)
$p^f(d_{ij})$	-1	1	Cruzada (repulsiva - atractiva)
$p^f(d_{ij})$	-1	0	Repulsiva en el primer tema
$p^f(d_{ij})$	-1	-1	Completamente repulsivo
$p^f(d_{ij})$	0	1	Atractiva en el segundo tema
$p^f(d_{ij})$	0	-1	Repulsiva en el segundo tema

Dentro del amplio espectro de posibilidades que brinda el modelo, en este trabajo nos centramos en sistemas donde ambos agentes tengan la misma regla de interacción para todos los temas, $\{q^f = -1; r^f = 1, s^f = 0\}$; analizando las ocho redes que se pueden construir. El estado de los agentes será bidimensional, $F = 2$; y el sistema compuesto por $N = 1000$ agentes que evolucionarán por $t = 3000$ pasos de Montecarlos, con una plasticidad fija de $\mu = 0.10$. Para caracterizar el sistema primero buscamos los valores de los umbrales u^1 y v^1 para los cuales se tiene una población conexas, encontrando que $u^1 = 0.11$ y $v^1 = 0.40$ cumplen con esta condición. Posteriormente, dejando éstos valores fijos, se barre sobre los posibles valores de los umbrales u^2, v^2 midiendo el tamaño normalizado o fracción de individuos en la mayor componente del sistema S . Luego se seleccionan todos los umbrales u^2, v^2 para los cuales $S > 0.9$, es decir, que la componente mayor tiene aproximadamente

el mismo orden que la red. Para estos casos se mide la modularidad Q de la red que se forma luego de las $t = 3000$ iteraciones.

3.2. Resultados y discusión.

3.2.1. Resultados para las interacciones $\{-1,0\}$

A continuación se muestran los resultados para $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$ en donde solo se consideran la red de interacciones $\{-1,0\}$.

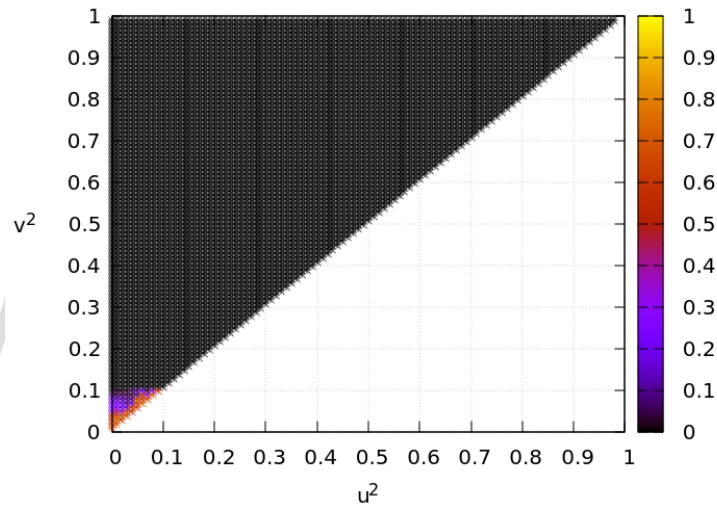


Figura 3.2: Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S para el caso $\{-1, 1, 0\}$ en ambas componentes y considerando las interacciones $\{-1,0\}$. En todos los casos $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$.

En la figura 3.2 se puede observar el análisis S en el espacio de parámetros u^2 y v^2 considerando solo interacciones repulsivas en la primera componente. Se aprecia una pequeña zona en donde la modularidad alcanza valores mayores a cero sin llegar a ser mayores a 0.9, lo que indica que la red se rompe en su totalidad si solo se consideran interacciones repulsivas en la primera componente. La zona negra del gráfico representa la ruptura total de la red, el valor de la mayor componente del sistema es de $S = \frac{1}{1000}$ lo cual es aproximadamente cero, indicando que los subgrafos de mayor tamaño en esta región están compuestos en su totalidad por 1 elemento.

Ya que $S < 0.9$ no se realizó el cálculo de la modularidad pues en este caso en todas las regiones la red se encuentra fragmentada.

3.2.2. Resultados para las interacciones $\{1,1\}$

A continuación se muestran los resultados para $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$ en donde solo se consideran la red de interacciones $\{1,1\}$.

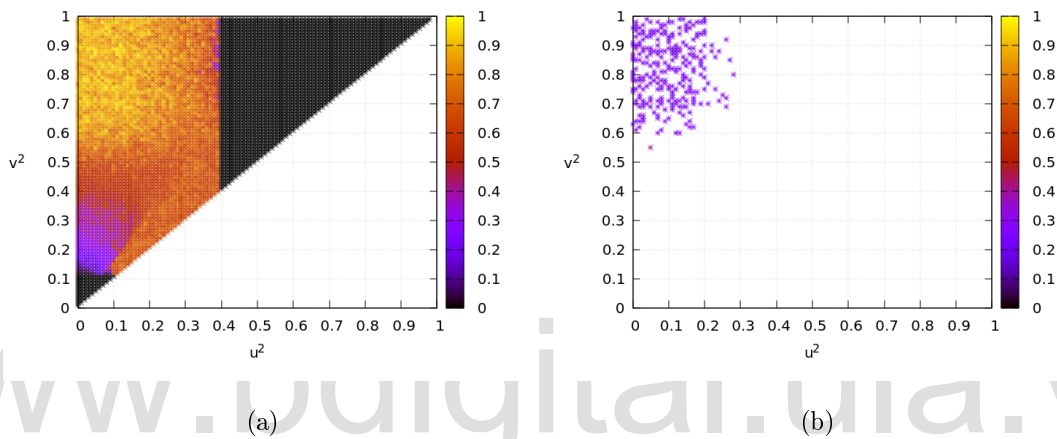


Figura 3.3: Caracterización de la estructura de la red para el caso $\{-1, 1, 0\}$ en ambas componentes y considerando las interacciones $\{1,1\}$. En todos los casos $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$. a) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S . b) Modularidad Q para los valores de $S > 0.9$.

En la figura 3.3a se puede observar el análisis de S en el espacio de parámetros u^2 y v^2 considerando interacciones atractivas en ambas componentes. En el gráfico se puede ver como existe una región en la cual el valor de S es mayor a cero, en dicha región los valores para los cuales $S > 0.9$ no están distribuidos de una manera uniforme en el espacio de parámetros lo que indica ruido o inestabilidad en las red de interacciones. En efecto la dinámica del sistema propicia el rápido cambio en las conexiones entre nodos, recordemos que la dinámica en la red esta dada por la regla $\{-1, 1, 0\}$, a corta distancia las opiniones de los elementos sienten repulsión, es decir se alejan por lo que si la interacción entre los individuos del sistema es atractiva los elementos empezaran a estar tan cerca unos de otros hasta que entran en la región

repulsiva lo que hace que las opiniones vuelvan a alejarse y a estar en la región en donde la interacción es atractiva, hasta que se repita nuevamente el proceso, esta es la razón por la cual el estado conexo de la red es inestable. Nótese que el valor de los umbrales en la primera componente influyen sobre la fragmentación en la red, en $u^2 = 0.10$ y $v^2 = 0.10$ el valor de S pasa a ser mayor que cero, mientras que a partir de $v^2 = 0.40$ el valor de S nuevamente pasa a ser cero, recordemos que justamente los valores de los umbrales fijos en el sistema son $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$.

En la figura 3.3b se analiza la modularidad Q en el espacio de parámetros u^2 y v^2 para todos los valores en donde $S > 0.9$. Como se aprecia las regiones en donde la modularidad es mayor a cero no representa una zona bien definida, por lo que no se puede afirmar la existencia de comunidades conexas en dicha región.

3.2.3. Resultados para las interacciones $\{0,-1\}$

A continuación se muestran los resultados para $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$ en donde solo se consideran la red de interacciones $\{0,-1\}$.

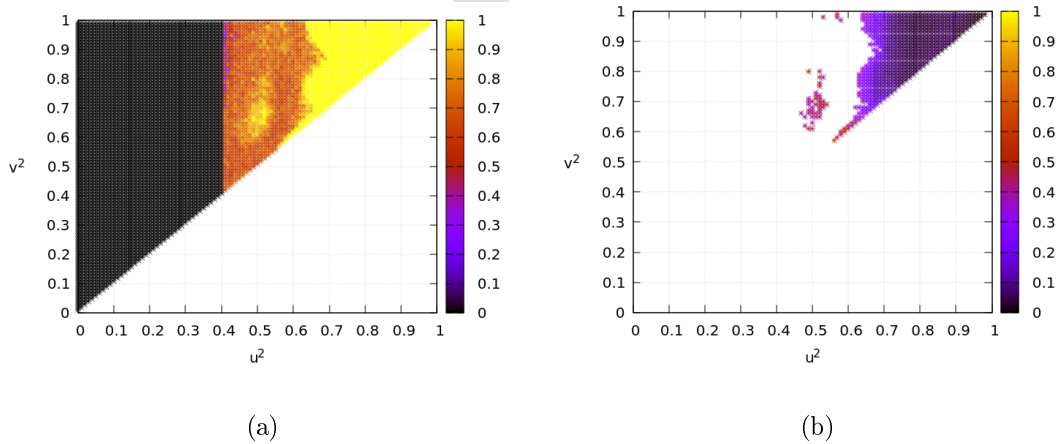


Figura 3.4: Caracterización de la estructura de la red para el caso $\{-1,1,0\}$ en ambas componentes y considerando las interacciones $\{0,-1\}$. En todos los casos $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$. a) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S . b) Modularidad Q para los valores de $S > 0.9$.

En la figura 3.4a se puede observar el análisis de S en el espacio de parámetros

u^2 y v^2 considerando las interacciones repulsivas en la segunda componente. Existe una región bien delimitada en color negro en donde $S \approx 0$ lo que indica el rompimiento total de la red. Justamente en $u^2 = 0.40$; $v^2 = 0.40$ la modularidad empieza a tomar valores positivos, para esta región se observa lugares en donde $S < 0.9$ valores en los cuales la red se fragmenta, y lugares en donde $S > 0.9$ en donde la red se mantiene conexas, es decir los elementos se mantienen conectados. Nuevamente la fragmentación de la red depende de los valores de los umbrales para la primera componente, nótese que la modularidad toma valores positivos justamente en $u^2 = 0.40$; $v^2 = 0.40$ coincidiendo con el valor de umbral u^1 para la primera componente. En la figura 3.4b se analiza la modularidad Q en el espacio de parámetros u^2 y v^2 para todos los valores en donde $S > 0.9$, claramente se observa una región en donde la modularidad toma valores positivos, concordando con la región en donde la modularidad es mayor a 0.9. Para la región en donde $Q > 0$ la red posee estructura de comunidades.

3.2.4. Resultados para las interacciones $\{-1,1\}$

A continuación se muestran los resultados para $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$ en donde solo se consideran la red de interacciones $\{-1,1\}$.

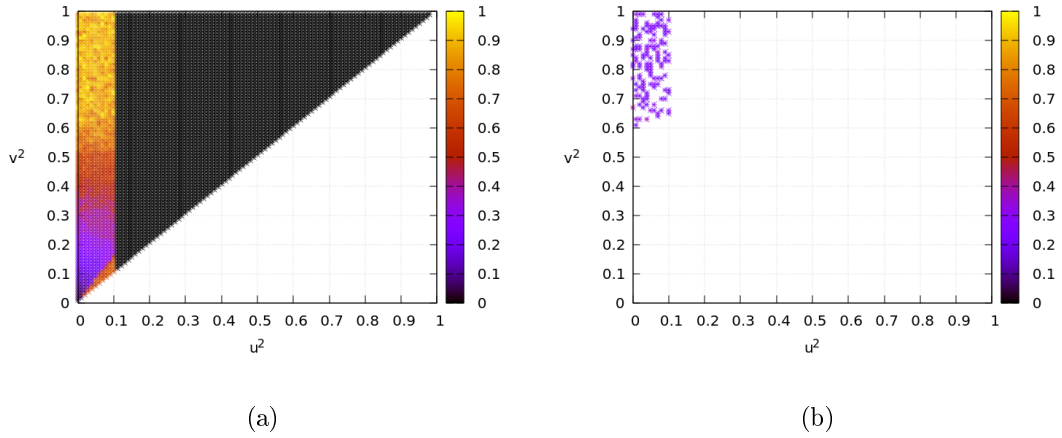


Figura 3.5: Caracterización de la estructura de la red para el caso $\{-1, 1, 0\}$ en ambas componentes y considerando las interacciones $\{-1, 1\}$. En todos los casos $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$. a) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S . b) Modularidad Q para los valores de $S > 0.9$.

En la figura 3.5a se puede observar el análisis de S en el espacio de parámetros u^2 y v^2 considerando interacciones repulsivas en la primera componente $f = 1$ e interacciones atractivas en la segunda $f = 2$. Se aprecia como el valor de S toma valores positivos en una franja del gráfico. Para valores en los cuales $S < 0.9$ la red de interacciones se fragmenta por lo que en estas zonas no habrán comunidades conexas. Se observa como la región en donde la red se mantiene conexas es inestable, ya que no se es una zona bien delimitada. En este caso vemos como el valor del umbral $u^1 = 0.11$ en la primera componente influye en la fragmentación de la red, pues justo en este valor S pasa a valer cero. En la figura 3.4b se analiza la modularidad Q en el espacio de parámetros u^2 y v^2 para todos los valores en donde $S > 0.9$. Similar a los casos anteriores se observa una región en donde la modularidad es positiva, sin embargo no se aprecia una región bien delimitada en donde esto suceda, esto debido claramente a la fragmentación de la red en esta región.

3.2.5. Resultados para las interacciones $\{1, -1\}$

A continuación se muestran los resultados para $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$ en donde solo se consideran la red de interacciones $\{1, -1\}$.

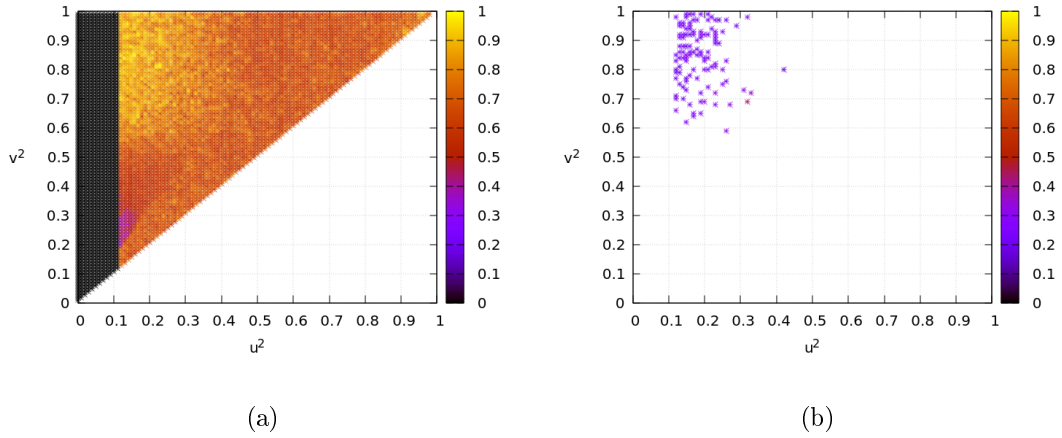


Figura 3.6: Caracterización de la estructura de la red para el caso $\{-1, 1, 0\}$ en ambas componentes y considerando las interacciones $\{1, -1\}$. En todos los casos $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$. a) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S . b) Modularidad Q para los valores de $S > 0.9$.

En la figura 3.6a se puede observar el análisis de S en el espacio de parámetros u^2 y v^2 considerando interacciones atractivas en la primera componente $f = 1$ e interacciones repulsivas en la segunda $f = 2$. Vemos como en este caso la región en donde S toma valores positivos corresponde en el gráfico del caso anterior a la región en donde $S = 0$. Nuevamente observamos como los valores en donde $S > 0.9$ no están ubicados sobre una región bien delimitada, si no que parecen puntos en el gráfico. Este comportamiento se debe nuevamente a la dinámica del sistema. Cuando los agentes están en la región atractiva sus opiniones se acercan hasta que entran en la región repulsiva y nuevamente se alejan, contribuyendo a la inestabilidad de las interacciones y por supuesto al rompimiento o fragmentación de la red. En la figura 3.6b se analiza la modularidad Q en el espacio de parámetros u^2 y v^2 para todos los valores en donde $S > 0.9$. Se aprecia una pequeña región no muy bien definida en donde la modularidad es positiva, sin embargo debido a la inestabilidad de las interacciones es difícil decir exactamente si se crean comunidades conexas.

3.2.6. Resultados para las interacciones $\{-1, -1\}$

A continuación se muestran los resultados para $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$ en donde solo se consideran la red de interacciones $\{-1, -1\}$.

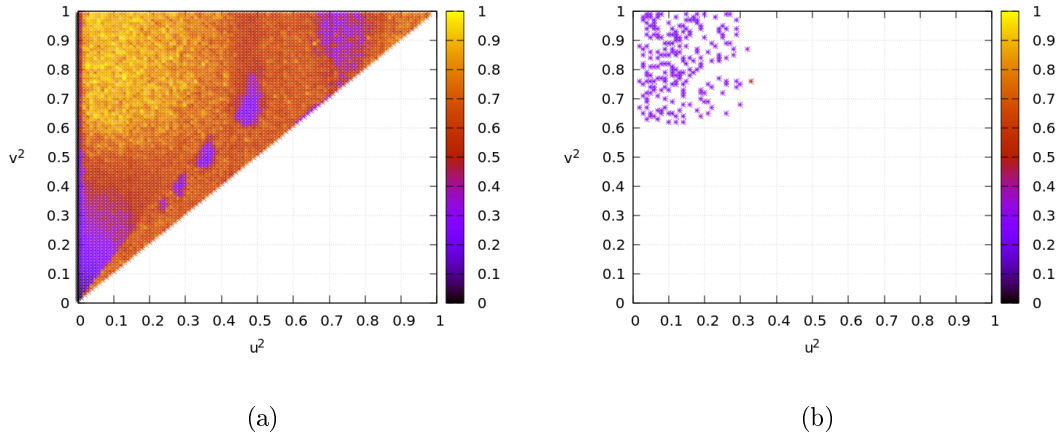


Figura 3.7: Caracterización de la estructura de la red para el caso $\{-1, 1, 0\}$ en ambas componentes y considerando las interacciones $\{-1, -1\}$. En todos los casos $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$. a) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S . b) Modularidad Q para los valores de $S > 0.9$.

En la figura 3.7a se puede observar el análisis de S en el espacio de parámetros u^2 y v^2 considerando interacciones repulsivas en ambas componentes $f = 1$ y $f = 2$. En la imagen se aprecian ventanas en morado en donde el valor de S está entre 0.10 y 0.40 en estas regiones la red se fragmenta en muchos más subgrafos que en el resto de la red. En el resto de las regiones $S > 0.4$ se aprecia en su mayoría puntos en los cuales $S > 0.9$ sin embargo nuevamente estos valores no corresponden a una región bien delimitada por lo que la red de interacciones no es estable y por lo tanto se fragmenta en casi todo el espacio de parámetros. Nótese que en este caso consideramos solo las interacciones repulsivas, lo que explica la inestabilidad de la red. Recordemos que la dinámica del sistema es $\{-1, 1, 0\}$, es decir que a corta distancia las opiniones de los agentes se alejan, por lo que los agentes rápidamente vuelven a la región en donde las interacciones son atractivas. En la figura 3.7b se analiza la modularidad Q en el espacio de parámetros u^2 y v^2 para todos los valores en donde $S > 0.9$. Se aprecia una pequeña región en donde la modularidad es positiva, sin embargo dicha región no está bien delimitada por lo que no es posible afirmar que en esos puntos existan comunidades conexas.

3.2.7. Resultados para las interacciones $\{1,0\}$

A continuación se muestran los resultados para $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$ en donde solo se consideran la red de interacciones $\{1,-1\}$.

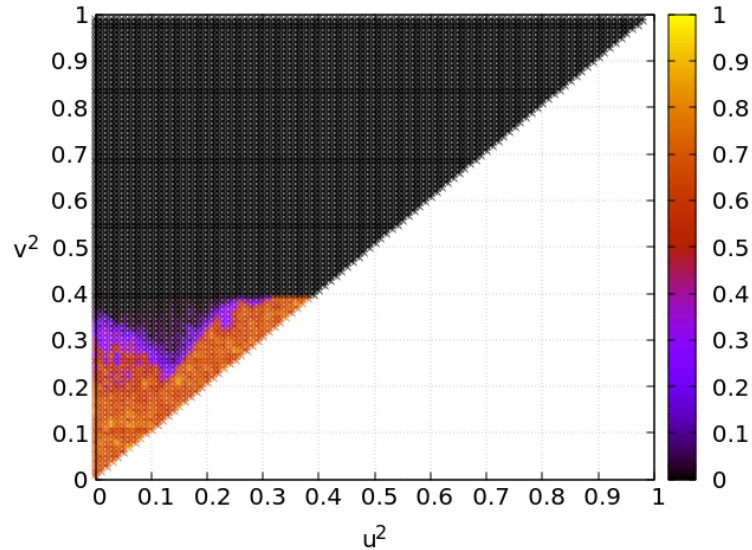


Figura 3.8: Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S para el caso $\{-1, 1, 0\}$ en ambas componentes y considerando las interacciones $\{1,0\}$. En todos los casos $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0, 10$, $u^1 = 0, 11$, $v^1 = 0, 40$.

En la figura 3.8 se puede observar el análisis S en el espacio de parámetros u^2 y v^2 considerando solo interacciones atractivas para la primera componente $f = 1$. Notamos una pequeña región en donde el valor de S es positivo, sin embargo los valores no superan el valor de 0.9, por lo que en todas las regiones del espacio de parámetros la red se fragmenta. Vemos entonces como la repulsión en la segunda componente influye claramente sobre la formación de comunidades conexas, ya que al no estar este tipo de interacción no es posible mantener los elementos o agentes del sistema unidos, con este resultado es posible concluir que la formación de comunidades conexas no es posible en una dinámica en donde la única interacción posible sea la atractiva. Ya que todos los valores de S son menores a 0.9. La modularidad en el sistema no se midió.

3.2.8. Resultados para las interacciones $\{0,1\}$

A continuación se muestran los resultados para $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$ en donde solo se consideran la red de interacciones $\{0,1\}$.

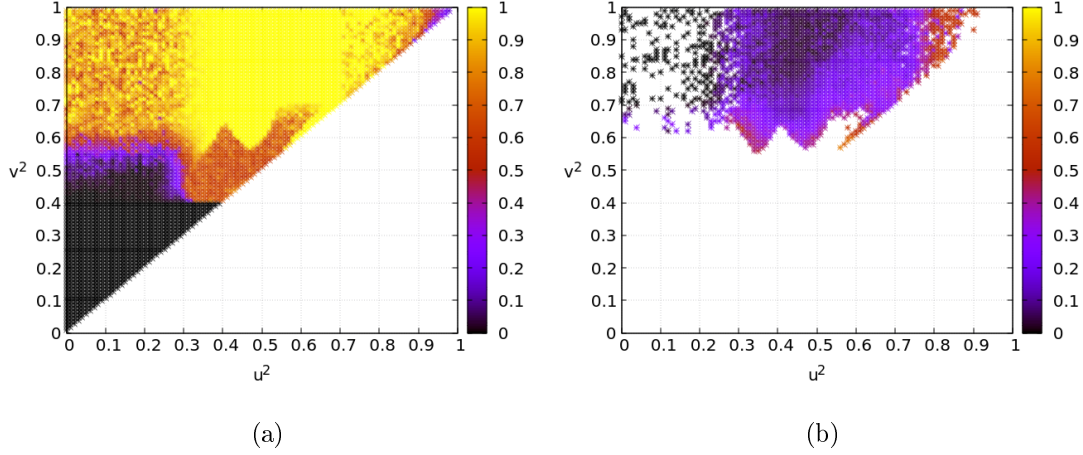


Figura 3.9: Caracterización de la estructura de la red para el caso $\{-1, 1, 0\}$ en ambas componentes y considerando las interacciones $\{0,1\}$. En todos los casos $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$. a) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S . b) Modularidad Q para los valores de $S > 0.9$.

En la figura 3.9a se puede observar el análisis S en el espacio de parámetros u^2 y v^2 considerando solo interacciones atractivas para la segunda componente $f = 2$. Se aprecia como la región negra en donde $S = 0$ coincide con la región en donde la modularidad es positiva en el caso anterior, lo que implica algún tipo de relación entre las redes de interacción $\{1, 0\}$ y $\{0, 1\}$. Se observa como en la frontera inferior la modularidad comienza muy lentamente a tomar valores mayores a cero hasta llegar a valores máximos en donde $S = 1$. Entre los valores $u^2 = 0$ y $u^2 = 0.3$ existe una región bastante inestable en la red en donde vemos algunos puntos en donde la modularidad alcanza a tomar valores máximos, sin embargo no es una región bien delimitada. Entre $u^2 = 0.3$ y $u^2 = 0.7$ existe una región bien delimitada en donde los valores de S son máximos, es decir $S = 1$, donde la red no se fragmenta, mientras que en el resto de la red si. A partir de $u^2 = 0.7$ el valor de S nuevamente decae. En la figura 3.9b se analiza la modularidad Q en el espacio de parámetros u^2 y v^2 para todos los valores en donde $S > 0.9$. Se aprecia claramente una región

en donde la modularidad es positiva y en la frontera inferior se observa como la modularidad aumenta significativamente. Las comunidades conexas se encuentran entonces en aquellas regiones en donde la modularidad es positiva.

3.2.9. Comparación de los resultados de S para las redes de interacción $\{-1,0\}$, $\{1,1\}$, $\{0,-1\}$

Hemos visto el análisis de S para cada uno de los casos de interacciones posibles, ahora bien ¿existe alguna relación entre cada una de las redes vistas anteriormente?, es evidente que si, dichas relaciones serán expuestas a continuación.

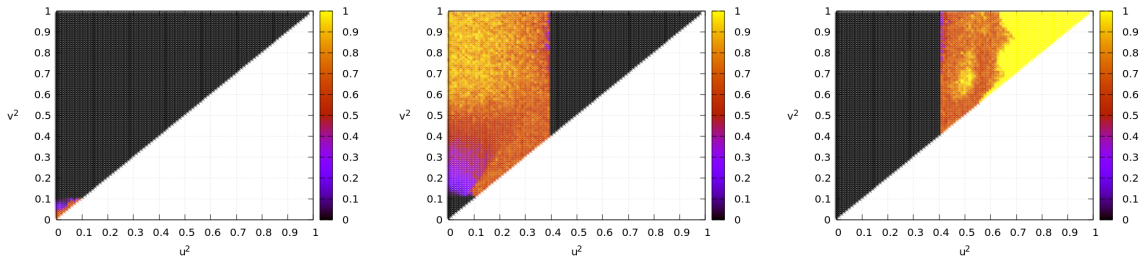


Figura 3.10: a) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S considerando las interacciones $\{-1,0\}$. b) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S considerando las interacciones $\{1,1\}$. c) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S considerando las interacciones $\{0,-1\}$.

En la figura 3.10 se visualizan los resultados de S para las interacciones $\{-1,0\}$, $\{1,1\}$, $\{0,-1\}$ expuestas en los casos anteriores. Al observar cada uno de los gráficos se aprecia como uno es continuación del otro lo que implica un cambio en el tipo de interacciones que forma la red. En la figura 3.10a la interacción es de la forma $\{-1,0\}$ es decir, solo se consideran interacciones repulsivas en la primera componente, como se aprecia las interacciones de este tipo no son demasiado representativas pues en casi la totalidad del gráfico los valores de S son nulos. Si ahora consideramos las interacciones $\{1,1\}$ es decir atracción en ambas componentes 3.10b, se observa como existe una región mucho más grande en donde S toma valores positivos, sin embargo en el límite inferior se observa una pequeña zona en donde $S = 0$ que corresponde en la figura 3.10a a la región en donde $S > 0$. Este resultado implica un cambio en las

interacciones que forman la red, es decir a medida que u^2 y v^2 aumentan los subgrafos pasan de ser formados por interacciones $\{-1,0\}$ a ser formados por interacciones de la forma $\{1,1\}$. De manera análoga sucede en el caso de comparar el análisis de S considerando las interacciones $\{1,1\}$ y $\{0,-1\}$. Al observar las figuras 3.10b y 3.10c se aprecia un cambio en la red de interacción, para el caso en donde $\{1,1\}$ los subgrafos son formados por interacciones atractivas, hasta que los umbrales llegan a valer $u^2 = 0.40$ y $v^2 = 0.40$, a partir de allí $S = 0$, sin embargo si consideramos las interacciones $\{0,-1\}$ vemos que para valores mayores a $u^2 = 0.40$ y $v^2 = 0.40$ nuevamente el valor de S es positivo 3.10c, lo que implica que en este caso los subgrafos son formados por interacciones repulsivas en la segunda componente. Nótese además que el cambio en el tipo de red se da en los valores 0.11 y 0.40 que coinciden con los valores de los umbrales para la primera componente $u^1 = 0.11$ y $v^1 = 0.40$, por lo tanto influyen en el cambio de las interacciones en la red.

3.2.10. Comparación tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S para las redes de interacción $\{-1,1\}$, $\{1,-1\}$, $\{-1,-1\}$

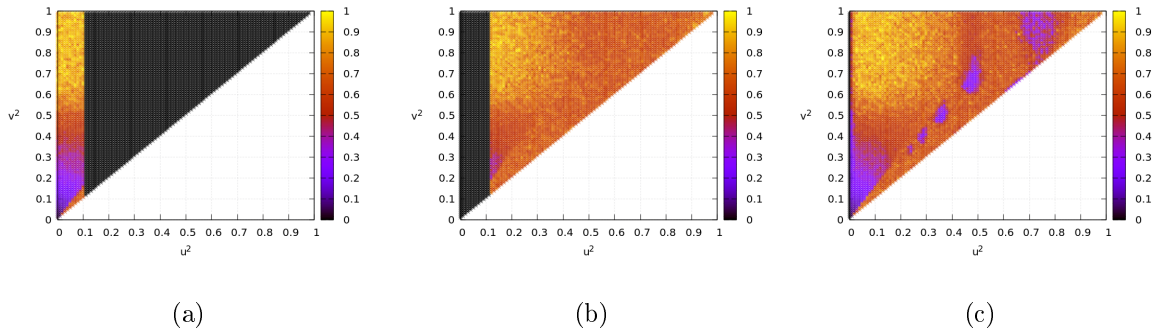


Figura 3.11: a) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S considerando las interacciones $\{-1,1\}$. b) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S considerando las interacciones $\{1,-1\}$. c) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S considerando las interacciones $\{-1,-1\}$.

En la figura 3.11 se visualizan los resultados de S para las interacciones $\{-1,1\}$, $\{1,-1\}$, $\{-1,-1\}$ expuestas en los casos anteriores. En este caso observamos como las figuras 3.11a y 3.11b son continuación una de otra, mientras que la figura 3.11c es la

composición de las figuras a y b. Al analizar el valor de S en la figura 3.11a vemos claramente un corte en $u^2 = 0.10$ en donde el valor de S pasa de ser positivo a cero, lo que implica que los subgrafos en la región en donde $S > 0$ están formados por la repulsión en la primera opinión y la atracción en la segunda. Al analizar la figura 3.11b vemos nuevamente un corte en $u^2 = 0.10$, pero esta vez la zona en donde $S > 0$ comienza justo en dicho valor, por lo que los subgrafos en este caso están formados por la interacción $\{1,-1\}$. Esta observación indica claramente un cambio en la red de interacción en el sistema pasando de una red en donde las interacciones son de la forma $\{-1,1\}$ a una en donde las interacciones son $\{1,-1\}$, dicho cambio se da en $u^2 = 0.10$. Analizando la figura 3.11c vemos como es la composición de las figuras 3.11a y 3.11b, sin embargo vemos algunas ventanas moradas en donde S toma valores entre 0.10 y 0.40, la aparición de estas regiones son debidas a la desaparición de la atracción en la red de interacción, recordemos que para dicha figura se consideran solo interacciones de la forma $\{-1,-1\}$.

3.2.11. Comparación tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S para las redes de interacción $\{1,0\}$, $\{0,1\}$.

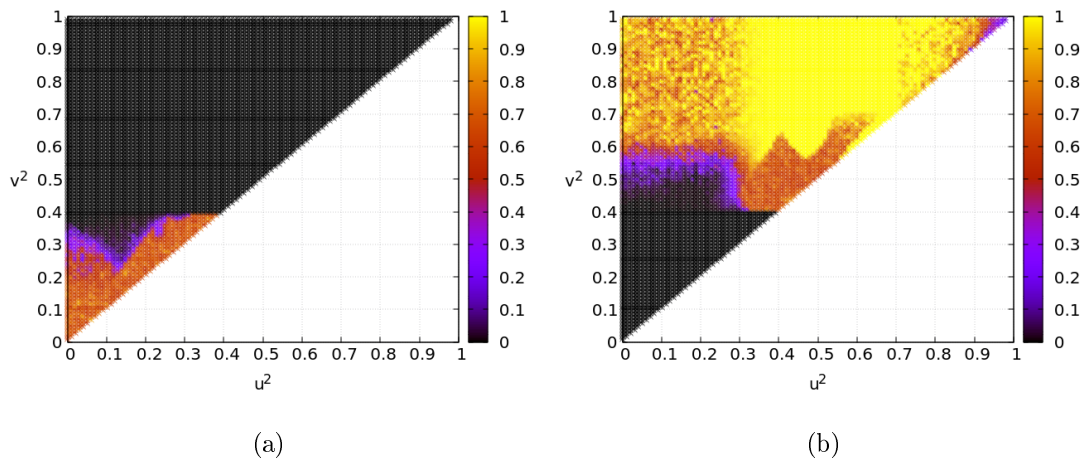


Figura 3.12: a) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S considerando las interacciones $\{1,0\}$. b) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S considerando las interacciones $\{0,1\}$.

En la figura 3.12 se visualizan los resultados de S para las interacciones $\{1,0\}$, $\{0,1\}$ expuestas en los casos anteriores. Se aprecia como las dos figuras son continuación una de otra. Analizando el valor de S en la figura 3.12a se aprecia como los valores positivos se dan en las regiones para las cuales $u^2 < 0.40$ y $v^2 < 0.40$, los subgrafos en este caso están formados por interacciones atractivas solo en la primera componente. Realizando un análisis similar al de casos anteriores observamos como la siguiente figura 3.12b representa el cambio en la red de interacciones, las regiones para las cuales $S > 0$ en la figura 3.12b corresponde a $S = 0$ en la figura 3.12a. Este resultado indica un cambio en la formación de los subgrafos, para valores de $u^2 < 0.40$ y $v^2 < 0.40$ los subgrafos se forman por la interacción $\{1,0\}$ mientras que para valores $u^2 > 0.40$ y $v^2 > 0.40$ los subgrafos se forman por las interacciones $\{0,1\}$.

3.2.12. Resultados para todas las interacciones posibles.

A continuación se muestran los resultados para $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$ en donde se consideran todas las interacciones posibles vistas en las secciones anteriores.

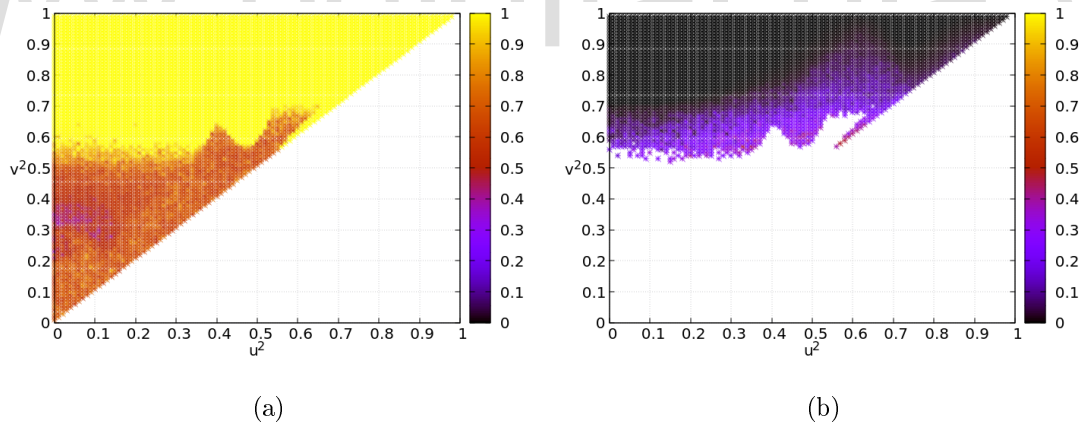


Figura 3.13: Caracterización de la estructura de la red para el caso $\{-1, 1, 0\}$ en ambas componentes. En todos los casos $F = 2$, $N = 1000$, $t = 3000$, $\mu = 0.10$, $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$. a) Tamaño normalizado de la mayor componente del sistema S . b) Modularidad Q para los valores de $S > 0.9$.

En la figura 3.13a se aprecia el análisis de S en el espacio de parámetros u^2 y v^2 . Existe una gran región con $S \approx 1$ en donde se encuentra la mayoría de los agentes, en esta región la red no se encuentra fragmentada, es decir los agentes se mantienen conectados entre si. A medida que el valor de S disminuye la red se fragmenta,

por lo que para valores bajos de u^2 , v^2 el valor de S disminuye, en este caso las comunidades comienzan a separarse y a no estar conectadas entre si. En la figura 3.13b se analiza la modularidad Q en el espacio de parámetros u^2 y v^2 para todos los valores en donde $S > 0.9$. Se aprecia una región notable en donde la modularidad es mayor a 0, con especial atención en la frontera inferior del gráfico en donde se puede observar una modularidad mayor a 0.3. Según el análisis de modularidad podemos afirmar que en la regiones en donde $Q > 0$ existe en la red de interacciones estructura de comunidades. Luego tenemos la frontera superior del gráfico en donde la modularidad va disminuyendo hasta hacerse cero, demostrando que no para todos los valores en donde $S > 0.9$ hay estructura de comunidades.

Analizamos la red de interacciones para algunos valores interesantes de u^2 y v^2 con 250 nodos. Como hemos mencionado para realizar la red consideramos todas las interacciones posibles mostradas en la tabla 3.1. La forma del nodo representa la comunidad a la que pertenece, mientras que el color del nodo representa el estado o la opinión del agente y va desde el color azul al color rojo.

Red de interacción para $u^2 = 0.60$, $v^2 = 0.61$

Análisis de la red de interacción para $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$, $u^2 = 0.60$, $v^2 = 0.61$ con 250 nodos.

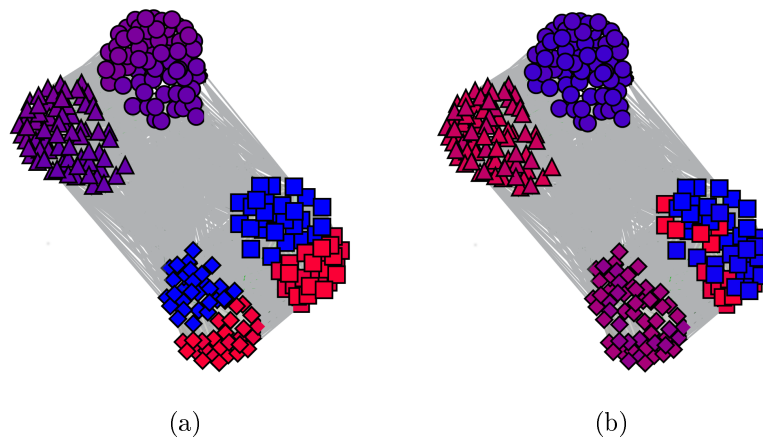


Figura 3.14: Redes de interacción para el caso $\{-1, 1, 0\}$, en donde $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$, $u^2 = 0.60$, $v^2 = 0.61$. a) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 1 de los agentes. b) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 2 de los agentes.

En la figura 3.14a tenemos la red de interacción para la primera opinión o estado

1, las comunidades en forma de diamante y en forma de cuadrado poseen opiniones similares entre si, sin embargo se puede ver que dentro de las comunidades como tal existen opiniones opuestas entre agentes. Las comunidades en forma de triángulos y círculos poseen una opinión intermedia entre el rojo y azul, además de esto las opiniones dentro de estas comunidades son bastante similares, es decir los agentes llegan a un consenso respecto a la primera opinión. La formación de estas comunidades coincide con lo esperado para los parámetros $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$ para $f = 1$ ya que estos valores permiten regiones donde existe interacciones del tipo atractiva e interacciones del tipo repulsivo. En la figura 3.14b se observa la red de interacción para la segunda opinión o estado 2. En este caso las comunidades poseen opiniones diferentes entre si. Debemos resaltar que la formación de las cuatro comunidades se debe a los umbrales de la segunda componente $f = 2$ en donde $u^2 = 0.60$, $v^2 = 0.61$. La región para la interacción del tipo atractiva $[u^2, v^2)$ es muy pequeña con respecto a la región de interacción del tipo repulsiva $(0, u^2]$ lo que propicia la separación de opiniones para la segunda componente. Los resultados son consecuentes con el valor de modularidad para esta región del espacio de parámetros, el cual es $Q \approx 0.498$ valor que indica la formación de comunidades en la red de interacción.

Red de interacción para $u^2 = 0.60$, $v^2 = 0.68$

Análisis de la red de interacción para $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$, $u^2 = 0.60$, $v^2 = 0.68$ con 250 nodos.

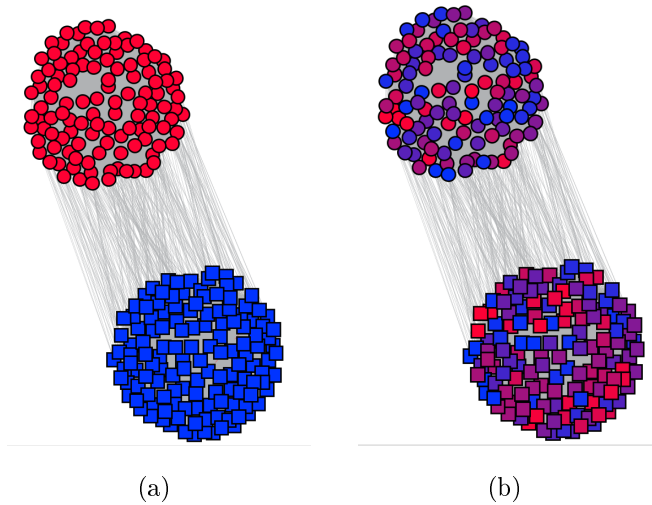


Figura 3.15: Redes de interacción para el caso $\{-1, 1, 0\}$, en donde $u^1 = 0.11$, $v^1 = 0.40$, $u^2 = 0.60$, $v^2 = 0.68$. a) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 1 de los agentes. b) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 2 de los agentes.

En la figura 3.15a se aprecia la red de interacción en función del estado u opinión 1. El sistema evoluciona hasta formar dos comunidades bien definidas representadas por los nodos en forma de círculo y cuadrado. Las opiniones en este caso son claramente opuestas respecto a las dos comunidades, lo que indica polarización en la población como resultado de la dinámica en la componente $f = 1$, sin embargo dentro de cada comunidad los agentes llegan a un consenso. En la figura 3.15b se aprecia la red de interacción en función del estado 2. Vemos como las segundas opiniones de los agentes en las comunidades no llegan a un consenso como sí sucede con la primera opinión, en este caso los agentes poseen opiniones diferentes y las comunidades en función de la segunda opinión son heterogéneas. Por supuesto estos estados dependen de los valores $u^2 = 0.60$, $v^2 = 0.68$ para la segunda componente $f = 2$. Al aumentar la región de interacción atractiva $[u^2, v^2)$ la dinámica permite la formación de comunidades más compactas entre si, en lugar de separar a los agentes con opiniones similares en comunidades diferentes, como si sucede en el caso anterior. Al aumentar la región de interacción atractiva se permite el acercamiento entre las opiniones de los agentes. La modularidad ente caso se mantienen en un valor bastante alto $Q = 0.458$ lo que sigue coincidiendo con el resultado para la red de interacción.

Red de interacción para $u^2 = 0.60, v^2 = 0.71$

Análisis de la red de interacción para $u^1 = 0.11, v^1 = 0.40, u^2 = 0.60, v^2 = 0.71$ con 250 nodos.

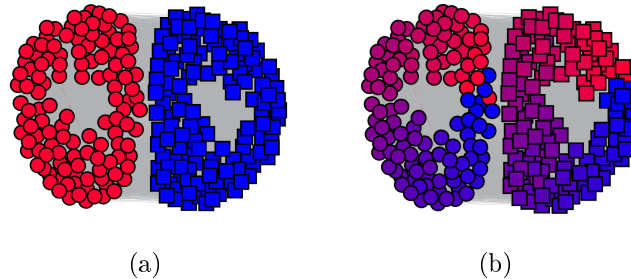


Figura 3.16: Redes de interacción para el caso $\{-1, 1, 0\}$, en donde $u^1 = 0.11, v^1 = 0.40, u^2 = 0.60, v^2 = 0.71$. a) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 1 de los agentes. b) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 2 de los agentes.

En la figura 3.16a vemos la red de interacción en función del estado 1. Se aprecia la formación de dos comunidades representadas por los nodos en forma de círculo y de cuadrado. Nuevamente vemos que las opiniones para la primera componente son opuestas con respecto a las comunidades formadas, sin embargo los agentes llegan a un consenso en las comunidades respectivas. Este tipo de evolución en las opiniones nos indica que la dinámica para la primera componente $f = 1$ propicia la polarización de las opiniones entre dos comunidades conectadas, como se aprecia en los resultados anteriores. En la figura 3.16b observamos la red interacción en función del estado 2, en ella el color de cada nodo representa la opinión 2. Observamos como en ambas comunidades los agentes poseen opiniones que van desde el rojo al azul, sin embargo muestran un orden con respecto al caso anterior en donde los agentes no están organizados. Las dos comunidades poseen comunidades con agentes con opiniones opuestas, así como también agentes con opiniones intermedias. Por supuesto debemos hacer notar el acercamiento de las comunidades con respecto a los casos anteriores, esto se debe al aumento de la región de interacción atractiva $[u^2, v^2)$ para la segunda componente permitiendo así el acercamiento de las comunidades. La modularidad en este caso toma el valor de $Q \approx 0.4797$ este valor refleja claramente la existencia de estructura de comunidades en la red.

Red de interacción para $u^2 = 0.60, v^2 = 0.75$

Análisis de la red de interacción para $u^1 = 0.11, v^1 = 0.40, u^2 = 0.60, v^2 = 0.75$ con 250 nodos.

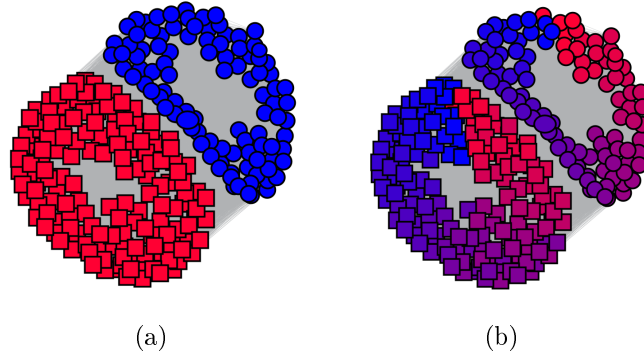


Figura 3.17: Redes de interacción para el caso $\{-1, 1, 0\}$, en donde $u^1 = 0.11, v^1 = 0.40, u^2 = 0.60, v^2 = 0.75$. a) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 1 de los agentes. b) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 2 de los agentes.

En la figura 3.17a se aprecia la red de interacción para la primera opinión o estado 1. Como en los casos anteriores se forman dos comunidades representadas por los nodos en forma de círculos y de cuadrados, cuyos agentes poseen opiniones contrarias respecto a la comunidad vecina, sin embargo la opinión de los agentes es la misma para cada comunidad como tal. En la figura 3.17b tenemos la red de interacción en función del estado u opinión 2. El sistema presenta un comportamiento similar al visto en el caso anterior. Podemos visualizar dos comunidades en donde los agentes poseen opiniones en todo el rango posible de opiniones, esto se ve representado en el color de cada nodo, comenzando por el azul y terminando en el color rojo. Nuevamente la dinámica del sistema fomenta la formación de estas dos comunidades, al aumentar el valor de v^2 hasta 0.75 se aumenta la región de interacción atractiva $[u^2, v^2)$ en la segunda componente $f = 2$ lo que propicia el acercamiento de las opiniones en las comunidades. Si bien en este caso la modularidad se mantiene positiva reduce su valor en gran medida tomando el valor de $Q \approx 0.198$ lo que indica aún formación de comunidades en la red.

Red de interacción para $u^2 = 0.60, v^2 = 0.80$

Análisis de la red de interacción para $u^1 = 0.11, v^1 = 0.40, u^2 = 0.60, v^2 = 0.80$ con 250 nodos.

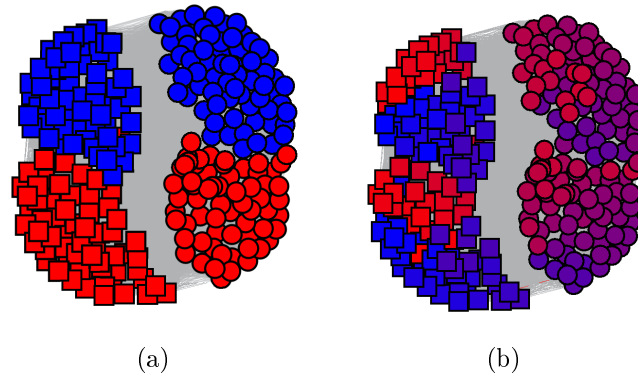


Figura 3.18: Redes de interacción para el caso $\{-1, 1, 0\}$, en donde $u^1 = 0.11, v^1 = 0.40, u^2 = 0.60, v^2 = 0.80$. a) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 1 de los agentes. b) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 2 de los agentes.

En la figura 3.18a tenemos la red de interacción para la primera opinión o estado 1. En este caso tenemos dos poblaciones representadas por cuadrados y círculos. Vemos que en ambas poblaciones tenemos grupos con opiniones completamente diferentes, esto lo vemos representado con el color rojo y azul de los nodos es sus respectivas comunidades. En la figura 3.18b tenemos la representación de la red de interacciones en función de la segunda opinión. Observamos dos poblaciones, en la primera representada por los cuadrados tenemos en general opiniones bastante diferentes entre los agentes, mientras que en la población representada por los círculos tenemos en general un consenso en las opiniones de los agentes. En este caso los elementos más opuestos entre sí se agruparon en una comunidad mientras que los que poseen una opinión intermedia se desplazaron a otra comunidad. Aunque la región de interacción atractiva $[u^2, v^2)$ para este caso aumente, no vemos aún un cambio significativo con respecto a la forma de la red como tal. La modularidad se mantiene positiva con un valor de $Q \approx 0.12$ lo que coincide con lo esperado en una red con estructura de comunidades.

Red de interacción para $u^2 = 0.60, v^2 = 0.90$

Análisis de la red de interacción para $u^1 = 0.11, v^1 = 0.40, u^2 = 0.60, v^2 = 0.90$ con 250 nodos.

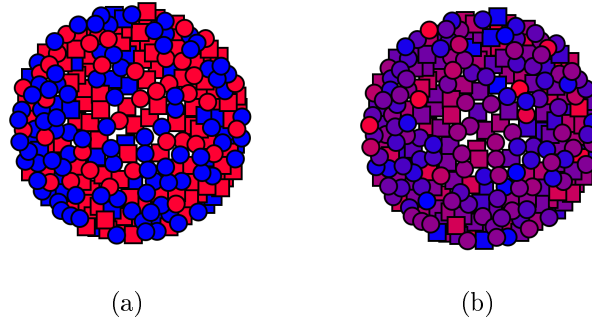


Figura 3.19: Redes de interacción para el caso $\{-1, 1, 0\}$, en donde $u^1 = 0.11, v^1 = 0.40, u^2 = 0.60, v^2 = 0.90$. a) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 1 de los agentes. b) Red de interacción en donde se representa el estado o la opinión 2 de los agentes.

En la figura 3.19a vemos la red de interacción para la primera opinión o estado 1. Se observa una conglomeración de individuos con opiniones opuestas entre si, sin embargo no se aprecian comunidades como tal, en lugar de eso se observa que todos los individuos están agrupados de forma aleatoria. Algo similar sucede en la red de interacciones para la segunda opinión o estado, figura 3.19b, en donde tenemos individuos agrupados sin estructura alguna, sin embargo en este caso los individuos parecen tener opiniones similares entre si. La estructura de la red concuerda con lo esperado para los valores de los umbrales en la segunda componente. El valor de v^2 ha aumentado hasta alcanzar el valor de 0.90, aumentando a su vez la región de interacción atractiva $[u^2, v^2)$, en este caso el aumento a sido tal que los agentes en el sistema se acercan hasta formar un conglomerado de elementos sin estructura de comunidades, el resultado concuerda con el valor de modularidad determinado para los valores de $u^2 = 0.60, v^2 = 0.90$ el cual es de $Q \approx 0$.

“Pelearé hasta el último segundo y mi epitafio será: No estoy de acuerdo.”

Eduardo Galeano.

Capítulo 4

Conclusión y recomendaciones.

Hemos estudiado el surgimiento de comunidades en un modelo de formación de opinión multidimensional, en donde los agentes del sistema poseen dos opiniones diferentes sobre dos temas. La interacción entre cada elemento del sistema puede ser atractiva o repulsiva, estas dos posibilidades dependen de la componente a la que se haga referencia $f = 1$ o $f = 2$ y de las regiones de interacciones determinadas $[0, u^1]; [u^1, v^1]; [v^1, 1]$ para $f = 1$ y $[0, u^2]; [u^2, v^2]; [v^2, 1]$ para $f = 2$, en este caso la regla de interacción es la misma para ambas componentes y es $\{-1, 1, 0\}$.

Al estudiar cada una de las redes de interacción posibles se determino que la red se fragmenta para varios valores del espacio de parámetros u^2 y v^2 consideramos entonces que para valores de S menores a 0.90 la red se fragmenta. Al realizar el análisis de Q en el espacio de parámetros u^2 y v^2 se encontró que para la red de interacción $\{1, 1\}; \{-1, 1\}; \{1, -1\}; \{-1, -1\}$ los valores positivos de Q no representan una región bien delimitada por lo que no es posible determinar la existencia de comunidades en dichas redes. Para las redes $\{-1, 0\}; \{1, 0\}$ no se analizo el valor de Q pues el valor de S en estos casos siempre es menor a 0.90 por lo que la red se fragmenta. En las redes de interacción $\{0, -1\}; \{0, 1\}$ si se encontraron regiones bien definidas en donde $Q > 0$ por lo que para dichos valores existe en la red estructura de comunidades, es decir la formación de comunidades se da de manera espontánea en las regiones en donde $Q > 0$ en estos dos casos. Se encuentra además una rela-

ción entre las redes de interacción, se observa como en el sistema la red se forma por interacciones de diferente tipo dependiendo del valor de u^2 y v^2 .

Por último analizando la red de interacción completa, es decir la red que considera las interacciones $\{1, 1\}; \{1, 0\}; \{1, -1\}; \{-1, 1\}; \{-1, 0\}; \{-1, -1\}; \{0, 1\}; \{0, -1\}$, se encuentra una gran región en donde $S > 0.9$, región en la cual la red no se fragmenta. Al realizar el análisis de Q para los $S > 0.9$ se encuentran regiones en las cuales $Q > 0$, lo que implica surgimiento de comunidades espontáneamente que además se mantienen conectadas entre si.

Se representaron dichas redes para los valores $(u^2 = 0.60; v^2 = 0.61)$, $(u^2 = 0.60; v^2 = 0.68)$, $(u^2 = 0.60; v^2 = 0.71)$, $(u^2 = 0.60; v^2 = 0.75)$, $(u^2 = 0.60; v^2 = 0.80)$, $(u^2 = 0.60; v^2 = 0.90)$, en donde se observa que la disminución de la modularidad esta directamente relacionada con la formación de las comunidades. Para modularidad altas las comunidades tienden a separarse y a tener opiniones bastante diferentes, a medida que Q disminuye las opiniones de los agentes se acercan hasta el punto en que las comunidades desaparecen, en correlación justamente con el valor de Q que para el caso en que las comunidades no se forma es de $Q \approx 0$.

El análisis del modelo ha sido bastante completo, sin embargo se pueden realizar algunas recomendaciones que pueden implementarse en un futuro, como lo son estudiar el cambio en el sistema al aumentar el número de agentes ó estudiar la formación de comunidades dejando los umbrales u^2, v^2 fijos y barriendo en los umbrales u^1, v^1 . Por supuesto se plantea el análisis de los 20 casos en los cuales se tiene diferentes reglas de interacción para cada componente.

Bibliografía

- [1] K. Kaneko and I. Tsuda, *Complex systems: chaos and beyond: a constructive approach with applications in life sciences*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] S. Funtowicz and J. R. Ravetz, “Emergent complex systems,” *Futures*, vol. 26, no. 6, pp. 568–582, 1994.
- [3] S. Camazine, *Self-organization in biological systems*. Princeton University Press, 2003.
- [4] J. Goldstein, “Emergence as a construct: History and issues,” *Emergence*, vol. 1, no. 1, pp. 49–72, 1999.
- [5] G. Savoiu and I. Iorga-Siman, “Sociophysics: A new science or a new domain for physicists in a modern university,” *Econophysics: Background and Applications in Economics, Finance, and Sociophysics*, pp. 149–168, 2012.
- [6] T. C. Schelling, “Dynamic models of segregation,” *Journal of mathematical sociology*, vol. 1, no. 2, pp. 143–186, 1971.
- [7] M. Cosenza, K. Tucci, and J. G. Avella, “Modelo sociofísico de la influencia de propaganda masiva en un sistema social,” 2007.
- [8] P. Erdos and A. Rényi, “On the evolution of random graphs,” *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, vol. 5, no. 1, pp. 17–60, 1960.
- [9] D. J. Watts, *Small worlds: the dynamics of networks between order and randomness*. Princeton university press, 1999.

- [10] A.-L. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [11] S. Fortunato, “Community detection in graphs,” *Physics reports*, vol. 486, no. 3, pp. 75–174, 2010.
- [12] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Opera Omnia, 1736.
- [13] M. E. Newman, “Modularity and community structure in networks,” *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 103, no. 23, pp. 8577–8582, 2006.
- [14] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, and G. Weisbuch, “Mixing beliefs among interacting agents,” *Advances in Complex Systems*, vol. 3, no. 01n04, pp. 87–98, 2000.
- [15] S. F. C, “Estructura modular inducida por exclusión en un modelo de formación de opinión sobre redes coevolutivas.” 2014.
- [16] D. de la academia española, 2014.
- [17] A.-L. Barabási, “Linked: The new science of networks,” 2003.
- [18] M. E. Newman, “The structure and function of complex networks,” *SIAM review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [19] J. L. Herrera, “Modelos de dinámica social en redes coevolutivas,” 2012.
- [20] M. Á. Serrano, M. Boguná, and A. Vespignani, “Extracting the multiscale backbone of complex weighted networks,” *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 106, no. 16, pp. 6483–6488, 2009.
- [21] C. W. Wu, *Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems*. World Scientific, 2007.
- [22] X. F. Wang and G. Chen, “Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 1, pp. 54–62, 2002.

- [23] P.-P. Li, D.-F. Zheng, and P. Hui, “Dynamics of opinion formation in a small-world network,” *Physical Review E*, vol. 73, no. 5, p. 056128, 2006.
- [24] T. Gross and B. Blasius, “Adaptive coevolutionary networks: a review,” *Journal of the Royal Society Interface*, vol. 5, no. 20, pp. 259–271, 2008.
- [25] T. Gross, C. J. D. D’Lima, and B. Blasius, “Epidemic dynamics on an adaptive network,” *Physical review letters*, vol. 96, no. 20, p. 208701, 2006.
- [26] J. M. Pacheco, A. Traulsen, and M. A. Nowak, “Coevolution of strategy and structure in complex networks with dynamical linking,” *Physical review letters*, vol. 97, no. 25, p. 258103, 2006.
- [27] H. Avendaño, “Implementación en isys de medidas para la caracterización de redes complejas,” 2010.
- [28] M. E. Newman and M. Girvan, “Finding and evaluating community structure in networks,” *Physical review E*, vol. 69, no. 2, p. 026113, 2004.
- [29] M. Girvan and M. E. Newman, “Community structure in social and biological networks,” *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 99, no. 12, pp. 7821–7826, 2002.
- [30] A. Clauset, M. E. Newman, and C. Moore, “Finding community structure in very large networks,” *Physical review E*, vol. 70, no. 6, p. 066111, 2004.
- [31] M. Rosvall and C. T. Bergstrom, “An information-theoretic framework for resolving community structure in complex networks,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 104, no. 18, pp. 7327–7331, 2007.
- [32] M. Rosvall and C. T. Bergstrom, “Maps of random walks on complex networks reveal community structure,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 105, no. 4, pp. 1118–1123, 2008.
- [33] V. D. Blondel, J.-L. Guillaume, R. Lambiotte, and E. Lefebvre, “Fast unfolding of communities in large networks,” *Journal of statistical mechanics: theory and experiment*, vol. 2008, no. 10, p. P10008, 2008.

- [34] D. Stauffer and H. Meyer-Ortmanns, “Simulation of consensus model of deffuant et al. on a barabasi–albert network,” *International Journal of Modern Physics C*, vol. 15, no. 02, pp. 241–246, 2004.
- [35] P. Sobkowicz, “Extremism without extremists: Deffuant model with emotions,” *Frontiers in Physics*, vol. 3, p. 17, 2015.

www.bdigital.ula.ve