



Universidad de Los Andes
Centro de Física Fundamental
Grupo de Caos y Sistemas Complejos

Modelo Sociofísico de dinámica cultural con forzamiento

Trabajo de grado presentado ante la Universidad de Los Andes
como requisito parcial para optar al Título de **Licenciado en Física**.

www.bdigital.ula.ve

Presentado por:

Br. Rubén Bonive

Tutor:

Dr. Kay Tucci

Mérida, Marzo de 2016

Resumen

Se presenta una extensión del modelo de diseminación cultural de Axelrod bajo el efecto de una propaganda masiva que cambia con el tiempo de forma periódica. Se estudia como influye un campo externo con estas características sobre sistemas con tres distintas topologías de interconexión: un grafo regular con forma de grilla, un grafo con enlaces aleatorios y un grafo completo; cambiando los valores para la variedad cultural, el periodo de cambio del campo externo, y su intensidad. Se encontró que existe una transición de fase de segundo orden, inducida por el campo externo que depende del periodo con que cambia la propaganda, su intensidad y la topología de la red; y no parece depender de la variedad cultural. Se caracterizó la frontera que divide el espacio de parámetros en dos regiones; una en la que los agentes comparten la misma cultura que la de la propaganda masiva y otra en donde no existe similitud cultural alguna entre ellos.

www.bdigital.ula.ve

www.bdigital.ula.ve

A mis padres y hermanos

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Modelo de diseminación cultural de Axelrod	5
1.2. Modelo de diseminación cultural de Axelrod con propaganda masiva	11
2. Modelo de diseminación cultural de Axelrod con propaganda masiva variable en el tiempo	13
2.1. El Modelo	13
3. Observaciones finales	21
Bibliografía	23

www.bdigital.ula.ve

Introducción

Desde que se tiene memoria los humanos han tendido a formar sociedades; una forma de organización en la que existe comunicación e intercambio de información entre los individuos. Las sociedades permiten al sujeto conseguir bienes que de otra manera serían difíciles de obtener. La forma en que se organizan varía de una a otra sociedad y esto afecta el desarrollo de cada una de ellas a lo largo del tiempo.

El mundo actual está repleto de humanos conformando un sin fin de sociedades, permitiéndonos y cada uno de nosotros gozar de los beneficios de pertenecer a algunas de ellas. Hoy en día comprendemos que estos beneficios son consecuencia de la dinámica propia de cada sociedad y no de la acción de cada individuo, y es por esto que el estudio de cómo interactúan los individuos ha ganado interés desde mediados del siglo XX hasta nuestros días, proliferando trabajos, modelos y grupos de estudio, incluso dentro de campos aparentemente distantes a este tipo de problemas como de la física y la matemática.

Así es que surge la sociofísica como una rama de la física, que busca la comprensión de fenómenos sociales que son consecuencia del comportamiento colectivo de los individuos. Para ello surge el concepto sistemas complejos enfocándose en las características emergentes de los sistemas, es decir aquellas que surgen por la dinámica de las interacciones y no pueden ser estudiadas observando los elementos que componen al sistema de forma aislada.

La sociofísica ha ganado poco a poco terreno en el ámbito de la física y la sociología, a pesar de que al comienzo de su desarrollo no fue bien vista por esta última comunidad principalmente por el hecho de tratar a las personas como “átomos” [1]. Aunque es cierto que no es posible abstraer todas las características de cada individuo, si es posible estudiar aquellos aspectos que permitan comprender algunos fenómenos emergentes usando ciertos conceptos tomados de la física. Por ejemplo, las sociedades están conformadas por tantas personas que en ocasiones es posible aplicar la ley de los grandes números y la física estadística en alguno de sus estudios [2].

También se ha extendido el uso de modelos y simulaciones que permiten emular las interacciones entre los elementos que componen un sistema social. Los modelos no son más que una simplificación de un objeto dado manteniéndose solo aquellas características importantes para su estudio [3]. La modelización permite abstraer aquellas facultades de interés y desligarse del objeto real. Los modelos creados para estudiar comportamientos colectivos son generalmente modelos basados en

agentes (ABM). Podemos decir que los agentes son la simplificación de los elementos que componen un sistema e interactúan entre sí dentro de un fenómeno grupal dado [3]. Los agentes pueden tener una dinámica propia y son de gran utilidad a la hora de representar algún ente cuyo comportamiento afecte al colectivo y además él pueda ser influido por ese colectivo.

Para estudiar el comportamiento de alguna sociedad se puede crear un modelo basado en agentes con el que se procede a simularla. Esto no es más que emular en el tiempo el desarrollo del sistema modelado. Las simulaciones tienen entradas bien definidas y salidas que permiten analizar fenómenos. Un ejemplo resaltante de un modelo de simulación de un fenómeno social es el creado por Thomas Schelling [4] hace cuatro décadas para estudiar la causa del surgimiento de guetos urbanos en algunas regiones. Para ese momento no estaba claro si la causa de la formación de guetos era la discriminación consciente o la auto organización resultante de la preferencia de los individuos a estar rodeados por personas del mismo grupo. Schelling mostró mediante simulaciones de un modelo muy simple que una leve preferencia en cada individuo de estar rodeado por sus semejantes era suficiente para que existiera segregación en el sistema. El modelo propuesto por Schelling está conformado por individuos que pueden ser de dos tipos, y están distribuidos sobre una red regular con algunos espacios vacíos donde los individuos pueden “mudarse” si no están “cómodos” con sus vecinos. El modelo deja en evidencia un comportamiento social emergente de auto organización no trivial.

Otros fenómenos estudiados a través de simulaciones incluyen la dinámica de la formación de opiniones con los modelos de votantes y diseminación cultural. Este último, propuesto por el politólogo Robert Axelrod [5], busca explicar el origen de las diferencias y similitudes entre individuos en una sociedad e intentar responder a la pregunta de por qué si las personas tienden a parecerse entre ellas a medida que interactúan y llevamos siglos relacionándonos aún hoy existe tanta diversidad. Aunque ya se habían formulado ideas para explicar porque las personas se diferenciaban, el modelo propuesto por Axelrod añade la relación interpersonal a la colección de ideas sin entrar en conflicto con lo ya propuesto. En su trabajo se argumenta que la comunicación ocurre más frecuentemente entre sujetos similares, principio en el que se basa el modelo, y es esto lo que permite una mayor diseminación de la cultura entre los individuos que componen una sociedad.

A pesar de que la cultura es ese objeto complejo compuesto por el conocimiento, las creencias, el arte, la moral, las leyes y cualquier otra capacidad o hábito adquirido por el hombre como miembro de la sociedad; y que la colección de elementos que la pueden componer es vasto y diferenciarlos puede ser ambiguo; Axelrod define en su trabajo a la cultura como el conjunto de atributos que pueden ser transferidos de individuo a individuo como el lenguaje, algunas creencias, la religión o principios, entre otros. En otras palabras, a la cultura la componen atributos característicos de las personas pueden cambiar por interacciones con sus semejantes a medida que estos se relacionen. Sin embargo en el trabajo se muestra, que a través de la influencia interpersonal, no solo surge la semejanza sino también las diferencias entre grupos que conforman la sociedad.

El modelo de Axelrod es un modelo basado en agentes. Cada agente, que representa a un individuo de la sociedad, es un vector donde cada una de sus componentes representa un atributo. Los atributos adoptan valores discretos llamados características. En el modelo original los actores se ubican sobre en una red regular y pueden interactuar con sus primeros vecinos. La interacción entre dos vecinos puede darse o no dependiendo de la cantidad de atributos compartidos. Los actores tendrán mas atributos comunes entre ellos después de cada interacción.

La dinámica del modelo llega siempre a un estado absorbente o estacionario, que puede estar polarizado o fragmentado culturalmente, dicha fase del sistema se caracteriza por la cantidad de culturas distintas o por el tamaño de las regiones de agentes idénticos entre sí [6]. El estado final del sistema depende principalmente de su tamaño y de la cantidad de características posibles; existiendo un valor crítico del número de características que divide las fases monocultural y multicultural.

Desde su publicación en 1997 se han hecho varias extensiones del modelo de diseminación cultural de Axelrod, entre ellas la inclusión de un campo externo que representa la presencia de una propaganda masiva [7]. No cabe duda que es de interés saber cómo una valla publicitaria o un comercial de televisión cambia la cultura de las personas. Esta propaganda se representa en el modelo como un agente que es vecino de todos los actores del sistema y cuya interacción está modulada por un valor llamado intensidad que mide la probabilidad con que los actores se relacionan con el campo externo. Cabe esperar que una propaganda masiva intensa convenga a más agentes y homogenice al sistema, pero al contrario de lo esperado, el modelo encuentra que existe un valor de intensidad de la propaganda donde ocurre fragmentación. Explicaciones de este fenómeno existen y se valen de la poca interacción entre los individuos cuando el campo es intenso y la variedad cultural es grande [8].

Del modelo de Axelrod con propaganda masiva surgen a su vez otras extensiones que incluyen ruido [10], propaganda inteligente [11] e interacciones sociales en lugar de individuales [13]. El ruido en el modelo de Axelrod representa todos aquellos factores externos que pueden modificar a la cultura de los agentes es decir, que algún atributo cambie de valor aleatoriamente. Esta variante del modelo sirve entre otras cosas, para analizar la estabilidad de las regiones en el sistema. Se ha mostrado que bajo ciertas condiciones el ruido puede homogeneizar al sistema [9]. También se ha determinado que la inclusión de una propaganda masiva que pueda interactuar con los agentes compite con el ruido [10], pues este último necesita ser más intenso para fragmentar al sistema cuando hay propaganda.

Como generalmente la propaganda está diseñada para tener algo en común con las personas, el mensaje no es escogido al azar y, aunque la personas no lo acepten, lo entienden. Pensando en esto, una de las extensiones del modelo de diseminación cultural de Axelrod con propaganda masiva propone que esta sea inteligente, es decir capaz de interactuar siempre con los agentes [11]. Esto se logra a través de un par de parámetros llamados efectividad y confianza. Ambos valores se

incluyen en la probabilidad de interacción agente-agente y agente-campo. El estudio concluye que con altos valores de confianza el sistema siempre llegará a un estado absorbente donde la cultura de la mayor región es igual al campo.

Aunque la interacción en el modelo de diseminación cultural de Axelrod es interpersonal o diádica, hay extensiones del modelo que añaden interacción social argumentando que los individuos tienden a socializar más con un grupo de personas que con una sola persona [12]. Otra extensión del modelo de diseminación cultural de Axelrod añade, además de la interacción social, propaganda masiva, que siempre puede interactuar con el agente, y dos ruidos distintos [13]; el primero puede cambiar el valor del atributo, recién adquirido por el agente luego de la interacción, por una característica escogida de forma aleatoria y el segundo cambia el conjunto de vecinos de cada agente. La propaganda masiva se representa de igual forma como un agente omnipresente, vecino común a todos. La colección de vecinos incluye a su vez al propio agente que interactúa. Las regiones en el modelo muestran ser más estables que las que se forman cuando la interacción es interpersonal y el sistema converge en un estado absorbente monocultural para intensidades de campo altas.

En todos estos casos el campo externo o la propaganda masiva es siempre estático, entonces cabe preguntarse ¿Cómo influye una propaganda masiva variable en el tiempo al sistema?

En este trabajo proponemos responder esa pregunta y es por esto que nos hemos planteado como objetivo el *implementar y simular el modelo de diseminación cultural de Axelrod con propaganda masiva variable en el tiempo para poder estudiar el efecto que tiene la frecuencia de la variación de la propaganda masiva en el sistema.*

Siguen a esta introducción, en el capítulo 1 una descripción detallada del modelo de diseminación cultural propuesto por Axelrod en su trabajo [5] además de conceptos básicos necesario para una mejor comprensión del mismo. Luego, en el mismo capítulo se introduce, la extensión del modelo cuando se le añade un campo externo; mencionando otros trabajos hechos usando esta extensión y algunas conclusiones obtenidas en los mismos.

En el capítulo 2 se presenta el modelo de diseminación cultural de Axelrod sometido a propaganda masiva variable en el tiempo, dando a conocer los resultados obtenidos en esta investigación además de una discusión con respecto a ellos. Finalmente siguen las observaciones finales y referencias que culminan el documento.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se da una breve introducción al modelo de diseminación cultural de Axelrod así como conceptos básicos necesarios para un mejor entendimiento de este trabajo. También se introduce la extensión del mismo cuando se le añade un campo externo o propaganda masiva.

1.1. Modelo de diseminación cultural de Axelrod

En su trabajo de 1997, Robert Axelrod [5] crea y propone un modelo que describe las relaciones entre las personas de una manera muy simple con el que busca explicar la diversidad cultural en las sociedades. Ya habían sido propuestos algunas formas en que individuos de una sociedad podían hacerse similares o diferenciarse [5], sin embargo ninguno tomaba en cuenta las relaciones interpersonales, que para Axelrod eran la forma de interacción predominante.

En el modelo de diseminación cultural de Axelrod las interacciones entre los agentes son no lineales lo cual lo hace complejo. La complejidad de un sistema está relacionada con la cantidad de información necesaria para describir a este último y que puede depender del número de elementos, la manera en que se relacionan y la escala del mismo.

La mayoría de los sistemas que se encuentran en la naturaleza comparten propiedades que son independientes del ámbito de estudio al que pertenecen, propiedades que son universales y en general no dependen de los elementos que lo conforman. Esto ha permitido la creación de una rama interdisciplinaria de la ciencia que estudia dichos sistemas en busca de estas propiedades universales; dinámica de sistemas complejos [27].

Los sistemas complejos muestran una característica llamada emergencia. Un comportamiento emergente es aquel que no puede ser analizado sólo al estudiar las partes que conforman al sistema. Es necesario comprender como estas partes se relacionan entre sí y de allí que el estudio de estos sistemas sea *complicado* siendo los comportamientos emergentes en la mayoría de los casos no triviales e impredecibles.

El cerebro, las familias, los gobiernos, las sociedades, son ejemplos de sistemas complejos. La

inteligencia es un fenómeno que surge a partir de la manera en que las neuronas se conectan. Las relaciones familiares, las decisiones que pueden tomar con respecto a algún asunto no son predecibles estudiando sólo a un miembro de la misma. Los gobiernos, el estado, son sistemas complejos en cuyo comportamiento juegan muchos factores que pueden ser influidos entre sí y que definen su modo de actuar [27].

El modelo de diseminación cultural de Axelrod intenta encontrar y describir fenómenos emergentes que surgen de simples reglas de interacción interpersonal entre individuos que conforman una sociedad, fenómenos relacionados con la manera en que se disemina la cultura a medida que estas interacciones ocurren.

Formalmente este modelo es un autómata celular pues comprende todas sus propiedades. Los autómatas celulares fueron introducidos por Jhon Von Neumann y Stan Ulam en la década de los sesenta con el nombre de espacios celulares, con la intención de modelar particularmente la autoreproducción biológica [15]. Desde entonces estos han sido usados ampliamente en el campo científico. Un autómata celular es un modelo matemático para simular sistemas dinámicos, que consiste en una serie de lugares discretos o celdas, dispuestos en una red de dimensión arbitraria (en el caso de una red regular) o en un grafo. Las celdas pueden tener un número discreto de estados que evolucionan en un tiempo también discreto y son estructuralmente idénticas entre sí en el sentido de que comparten las mismas propiedades. Los autómatas son modelos cuya interacción es local, es decir, el estado siguiente de cada celda depende de su estado actual y el de sus vecinas [15].

El contorno o las condiciones de borde de los autómatas celulares para las redes regulares puede ser periódico en el caso de que los bordes inicial y final de cada dimensión estén unidos o abierto en caso contrario. Cada celda del autómata tiene una vecindad constituida por ella y las celdas adyacentes que se eligen mediante una regla dada que depende del tipo de red o grafo en el que se de la dinámica.

Un autómata celular puede definirse matemáticamente como

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i, \xi_t^i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

donde x_t^i es el estado de la celda i en el tiempo t , f es la función o una serie de reglas que representa la dinámica del elemento y depende del estado actual de la celda i y del conjunto de estados ξ_t^i de los elementos que componen su vecindad σ^i

Los autómatas presentan las cuatro clases de comportamiento observadas en otros sistemas dinámicos. La primera es cuando el autómata celular llega a un estado absorbente constante independiente de su configuración inicial, es decir a un punto fijo. En la segunda se llega a un estado absorbente que consiste en una colección de estructuras simples estables y periódicas. El su tercera clase de comportamiento, el autómata celular llega a un estado donde existen patrones caóticos en el tiempo y el espacio. Este estado final es sensible al cambio en las condiciones iniciales

y a pesar del comportamiento caótico, los patrones tienden a converger a propiedades estadísticas invariantes. Hay autómatas celulares que presentan una cuarta clase de comportamiento donde se observa un estado absorbente de estructuras complejas localizadas. Estos últimos pueden reducirse o simular una máquina de Turing, es decir, son máquinas de computación universal. Un ejemplo de esta clase de autómatas celulares es el juego de la vida de Conway [14].

El modelo de diseminación cultural de Axelrod pertenece a los autómatas celulares de la primera clase ya que siempre llega a un estado absorbente constante que en general no depende de su condición inicial.

Los autómatas pueden mostrar comportamientos complejos a pesar de seguir reglas simples, esto permite su uso para la simulación de fenómenos de distinta índole, sobre todo aquellos que dependen de la localidad. Un autómata puede modelar un cristal donde cada una de las celdas represente alguna propiedad de las partículas que conforman el cristal [15], en el caso del modelo de Ising representa el espín [16], o un sistema de moléculas donde cada celda puede representar una región de moléculas que se encuentran en un estado dado [15], de este modo un autómata celular puede representar un sistema no lineal disipativo de moléculas acopladas [15]. Los autómatas han sido también usados para modelar la estructura espacial de las turbulencias aproximando el campo de velocidad como una serie de valores discretos distribuidos en una red regular, donde cada valor de rapidez de cada celda puede cambiar según las celdas vecinas [17], en el campo de la biología pueden modelar sistemas que van desde la fibrilación de las células cardíacas [19] hasta la dinámica de poblaciones en ecosistemas [18] y en el campo social modelan la segregación de grupos sociales como es el caso del modelo de Schelling [4] o la diseminación de la cultura en el caso del modelo propuesto por Axelrod en su trabajo [5].

Existen distintos comportamientos que surgen por la interacción de individuos que tienen una dinámica propia. La modelización de dichos fenómenos se basa en el uso de entes llamados agentes que pueden emular alguna característica de dicha dinámica siguiendo ciertas reglas. Estos modelos, que pueden ser implementados sobre autómatas celulares, son llamados comúnmente Modelos Basados en Agentes o ABM por sus siglas en inglés [20].

La manera en que los agentes se comportan depende de las reglas que se les atribuyan que varían según el comportamiento que se quiera modelar. Son útiles a la hora de representar sistemas donde los elementos tienen un comportamiento bien definido y que la manera en que se relacionan dificulta el estudio de los mismos por medio de técnicas meramente estadísticas o matemáticas.

Los ABM parece ser el modo más natural de estudiar fenómenos de la naturaleza que surgen como un comportamiento emergente de sistemas que son heterogéneos y discretos donde la actuación de los elementos no depende sólo de los estados de sus vecinos. El tráfico y la bolsa de valores son ejemplos de sistemas que pueden ser estudiados con estos modelos.

Otro ejemplo del uso de los ABM es para caracterizar la manera en que opiniones e ideas se diseminan en una sociedad. Los agentes tienen las propiedades necesarias como para emular com-

portamientos de individuos que intercambian ideas y opiniones. El modelo propuesto por Axelrod [5] fue planteado para estudiar particularmente la diseminación cultural en una sociedad a través de interacciones sociales y ha sido extendido para analizar otros fenómenos. En este sentido podemos decir que este modelo es un ABM.

Al modelar y simular un sistema existen fenómenos cuya descripción no es de interés o simplemente es muy complicada como para ser modelados, sin embargo son necesarios a la hora de estudiar un modelo donde el fenómeno está presente. Por ejemplo no es necesario conocer como cambian de dirección las partículas disparadas hacia un medio sino la distribución de partículas que lo traspasa [22]. Para lidiar con esto recurrimos al método de Monte Carlo, que es una técnica muy usada en simulación que consiste en sustituir un fenómeno dado por una distribución de probabilidades. En el caso del modelo de diseminación cultural de Axelrod son sustituidas por distribuciones de probabilidades la generación de la cultura inicial de cada agente así como la interacción interpersonal que se da entre ellos.

Como existen eventos probabilísticos dentro de las simulaciones, las salidas de las mismas también son distribuciones de probabilidad, entonces es necesario efectuar el experimento varias veces para ser analizado con técnicas estadísticas y así resultado concretos estadísticamente.

Usar el método de Monte Carlo es eficiente, pues al sustituir eventos que en principio son complicados o cuya dinámica se desconoce por reglas simples, muchos modelos pueden ser implementados en un computador. No habría sido posible simular el complicado mecanismo de las interacciones humanas que ocurre al intercambiar ideas. Pero en este caso es mucho más importante que ocurra en la interacción. En esta técnica cuando se sustituye la dinámica de los eventos de interacción entre los elementos de un sistema por sus distribuciones de probabilidad ya no es posible medir fenómenos a cuyas escalas temporales sean del orden de las dinámicas de interacción. En estos casos se describe al sistema cada paso de Monte Carlo que corresponde a N interacciones, donde N es la cantidad de elementos que componen al mismo.

Existen comportamientos emergentes en sistemas complejos que dependen de las propiedades de la red sobre la que ocurre la dinámica [25]. Por ejemplo, se sabe que la velocidad de diseminación cultural en el modelo propuesto por Axelrod depende de la conectividad de la red [26].

Como en el modelo de diseminación cultural de Axelrod los agentes pueden encontrarse ubicados de muchas formas utilizaremos grafos para describir estas configuraciones. Un grafo es un objeto matemático que consiste en un par ordenado (V, E) ; donde V es el conjunto de vértices o nodos y E es el conjunto de aristas o enlaces del grafo. Estos dos conjuntos se relacionan a través de una función ψ que vincula cada arista con dos de vértices de G , de manera que si e es uno de las aristas, $\psi(e) = (u, v)$ representará la relación entre este y los vértices u y v . Se dice entonces que u y v están unidos a través de e y que los mismos lo delimitan [23]. Cada nodo v de un grafo tiene un grado de conectividad $k_e(v)$ que es el número de nodos al que este está conectado. Cada grafo tiene un grado de conectividad k propia del mismo que es el promedio del grado de conectividad

de cada nodo. Un grafo se denomina k -regular si todos los vértices v tienen el mismo grado de conectividad k_e . En un grafo se define la distancia entre dos nodos como la mínima cantidad de nodos que se encuentran en el camino que los conecta y la longitud característica como el promedio de esta distancia de todos los nodos que conforman el grafo [23].

Como se dijo anteriormente los autómatas celulares pueden estar sobre un grafo cualquiera. En este trabajo se propone estudiar una extensión particular del modelo en tres tipos de grafos distintos. El primero, que corresponde al sustrato utilizado originalmente por Axelrod, es un grafo en forma de grilla, cuya topología se asemeja a un plano cartesiano. Cada nodo está conectado con sus cuatro vecinos más cercanos como se muestra en la figura 1.1. A esta configuración se le conoce como vecindad de Von Neumann, siendo un grafo k -regular con grado $k = 4$.

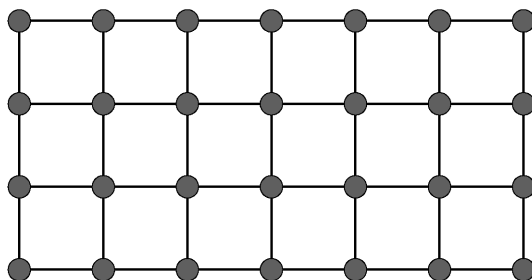


Figura 1.1: Grafo en forma de grilla con $k = 4$ y $N = 28$

El segundo tipo es aleatorio mostrado en la figura 1.2, donde cada nodo está tiene k_e enlaces elegidos de forma aleatoria. En nuestro caso cada nodo tiene cuatro vecinos de manera que el grado del grafo será $k = 4$ [24].

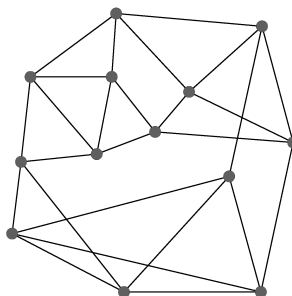


Figura 1.2: Grafo aleatorio con $k = 4$ y $N = 13$

El tercer tipo de grafo es el completo, que se muestra en la figura 1.3, donde sus N nodos están conectados entre sí, de forma que la distancia existe entre dos nodos cualesquiera dentro del grafo siempre es uno. Un grafo con estas características puede representar un mundo completamente conectado y es k -regular con una conectividad $k = N - 1$.

El modelo clásico de diseminación cultural de Axelrod consiste en una serie de agentes caracterizados por un vector cultural \mathbf{F} de F componentes. Cada una de estas componentes $f_i, i = 1, 2, \dots, F$

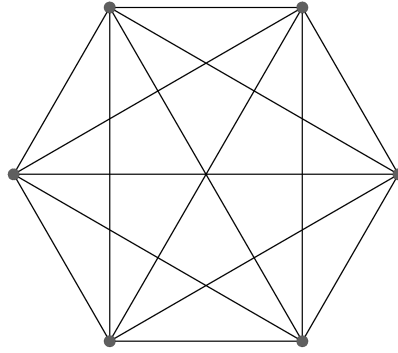


Figura 1.3: Grafo completo con $k = 5$ y $N = 6$

se llama atributo cultural. Cada atributo puede tomar valores $f_i \in 1, 2, \dots, Q$ que se denominan característica cultural donde Q representa la variedad cultural. Axelrod plantea que la interacción entre los agentes dependen de que tanto se parezcan *culturalmente*; mientras más atributos comunes tengan más probable será que interactúen y por cada interacción los agentes se parecerán más entre ellos. Así que en su modelo dos agentes tendrán una probabilidad de interactuar dada por el solapamiento de su vector cultural \mathbf{F}^u y \mathbf{F}^v

$$l(u, v) = \sum_{i=1}^F \delta_{f_i^u, f_i^v} \quad (1.2)$$

donde δ es la delta de Kroneker. Nótese que la interacción no se da si los agentes no tiene atributos comunes.

Cada iteración del modelo sigue los siguientes pasos:

1. Se elige un agente u al azar.
2. Se elige un agente v al azar, vecino del agente u .
3. Se calcula el solapamiento $l(u, v)$.
4. Con probabilidad $p = l/F$ el agente u interactúa con el agente v , es decir que se elige un atributo al azar del agente v de los atributos no comunes entre este y el agente u , luego el agente u adquiere la característica del atributo de v .

Al repetir estos 4 pasos N veces, es decir un paso de Monte Carlo, el modelo avanza un paso en el tiempo de simulación. En este punto cabe mencionar que cuando los elementos que interactúan son idénticos, $l(u, v) = 1$, la interacción siempre ocurre pero no conduce a ningún cambio en el vector cultural de u .

Al simular el modelo se observa que se forman grupos de elementos con una misma cultura. Para caracterizar este fenómeno se define como región a la colección de agentes conectados entre sí cuyo vector cultural es el mismo. Mientras que se define como zona cultural la colección de agentes

conectados entre sí que tienen en común al menos un atributo cultural. Las zonas pueden estar formadas por múltiples regiones.

El modelo de diseminación cultural de Axelrod siempre llega a un estado absorbente donde los agentes ya no pueden interactuar. En este punto se dice que el sistema llega a un estado monocultural si existe una región cuyo tamaño mayor es del orden del sistema, en cambio el estado es multicultural si esto no ocurre.

Existe un valor crítico para el cual se da un cambio de fase en el sistema entre la monoculturalidad y la multiculturalidad que depende de la variedad cultural Q llamado q_c . En este punto el sistema pasa de ser monocultural a multicultural a través de una transición de fase de segundo orden [6].

1.2. Modelo de diseminación cultural de Axelrod con propaganda masiva

La propaganda se encuentra en toda sociedad humana y ya sea un comercial de televisión o una marcha con finalidades religiosas, ella no es mas que un mensaje que intenta llegar a una gran cantidad de individuos. La manera en que los individuos reaccionan a ésta depende de su intensidad, su contenido y su alcance.

Entre las múltiples extensiones del modelo de diseminación cultural de Axelrod está la de incluir en el sistema un campo externo M fijo en el tiempo que representan una propaganda masiva [7]. Este campo, al igual que lo hace un cartel, un mensaje de radio o televisión; puede afectar la cultura de los agentes que interactúan con él. Es por esto que en esta extensión del modelo el campo externo es tratado como un agente más del sistema que interactúa con el resto de los agentes según las mismas reglas descritas anteriormente, pero al que los agentes no pueden alterar.

Con esta extensión se analiza cómo se fragmenta u homogeneiza el sistema cuando todos pueden interactuar con este agente omnipresente que tiene una intensidad B representada por una probabilidad de interacción con el resto del sistema. Se encuentra que el cambio de fase persiste aún con el campo pero éste modifica la forma en que ocurre. Se muestra que a partir de cierta intensidad del campo B se presenta la fragmentación en el sistema [7]. Este último resultado puede ir en contra del sentido común, ya que en general se entiende que una propaganda más intensa debería ser más eficaz en transferir el mensaje que una propaganda tenue.

En el modelo las regiones que se forman a medida que se llevan a cabo las interacciones pueden o no tener un vector cultural idéntico al del campo externo M . En la figura 1.4 se observa que el campo logrará convencer a la mayor parte de los agentes cuando su intensidad B es menor que cierto valor crítico B_c [7]. Sin embargo para valores $B > B_c$ se aprecia que el campo desordena el sistema y surgen regiones que no tienen ningún atributo común con este [29]. Conocer el tamaño

de la mayor región idéntica al campo da una idea de que tan ordenado está el sistema por causa de la propaganda.

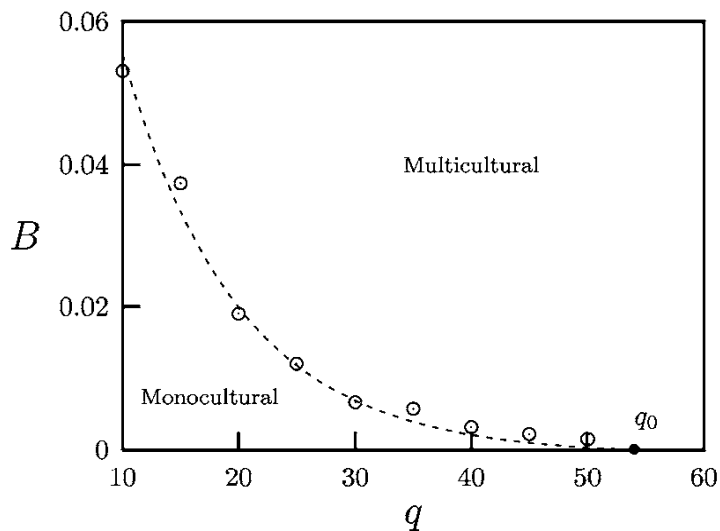


Figura 1.4: Frontera entre la región monocultural y multicultural inducida por un campo externo M en el espacio de parámetros B y q [7]

Se han hecho otros estudios con campos externos con características adicionales como tener un solapamiento no nulo con los agentes [11], campos externos no omnipresentes o heterogéneos [32] que compiten con un campo externo homogéneo y uniforme, campos externos constantes en el tiempo distribuidos espacialmente [30] y campos externos que se originan en la cultura de dos grupos separados de agentes, donde los dos grupos interactúan entre sí a través de estos campos [28]. Otros incluyen además ruido [10] que compite contra la propaganda, y algunos cambian la interacción interpersonal por una interacción social [13].

También se han estudiado fenómenos de retroalimentación donde el campo externo representa la colección de atributos más comunes en el sistema, y compite con la colección de atributos de la vecindad de Von Neumann de los agente [31].

Sin embargo, el campo externo usado en las múltiples extensiones del modelo de diseminación cultural ha sido estático o ha variado de forma aleatoria o no autónoma.

Capítulo 2

Modelo de diseminación cultural de Axelrod con propaganda masiva variable en el tiempo

En este capítulo se describen el modelo propuesto y usado en este trabajo de investigación, además se analizan los resultados obtenidos, los cuales son presentados en una serie de gráficos.

2.1. El Modelo

Los comerciales que vemos en televisión, en Internet o escuchamos de la radio no siempre son los mismos, el mensaje que estos llevan dependen de muchas tendencias sociales del momento y cambian con el tiempo. Una valla publicitaria deja de ser efectiva una vez las personas conocen el mensaje; se torna monótona y aburrida. La propaganda debe cambiar con el tiempo para llegar a más gente, ser llamativa y adaptarse a los cambios sociales.

A pesar de lo anterior, en todas las extensiones del modelo de diseminación cultural de Axelrod con propaganda masiva la propaganda es estática en el tiempo o cambia junto con los actores a través de alguna interacción, de alguna manera este cambio no es autónomo. Es por esto que en este modelo proponemos que el campo externo pueda cambiar de forma autónoma periódicamente, esto representaría una propaganda masiva que renueva su mensaje. En estas condiciones hay que prestar atención a ciertos aspectos como la intensidad y la frecuencia con que ocurren estos cambios. Por ejemplo, si el cambio es brusco el nuevo mensaje será completamente nuevo y no habría diferencia con el acto de introducir otro campo externo completamente aleatorio, es decir ruido. Es por esto que el modelo usado en este trabajo, que es una extensión del modelo de diseminación cultural con propaganda masiva [7] tiene la particularidad de que el campo externo cambia levemente y de forma periódica. Se puede hacer cambiar la cultura de este campo de varias maneras, por ejemplo, pueden cambiar todos los atributos o sólo unos cuantos de ellos. La forma que estos atributos cambian está

dada por cierta regla que puede ser simple o no. En el modelo propuesto la propaganda masiva está representada por un vector cultural \mathbf{M} , con las mismas propiedades que tienen los vectores culturales de los agentes, que cambia aleatoriamente la característica de uno de sus atributos que es elegido al azar cada T pasos de Monte Carlo. Recordemos que un paso de Monte Carlo son N iteraciones, donde N es el tamaño del sistema. De esta forma T se define como el periodo de cambio de la propaganda masiva.

Cada iteración del modelo sigue los siguientes pasos:

1. Se elige un agente u al azar.
2. Se elige un agente ω , este puede ser; con probabilidad B el campo externo M , o un agente v al azar, vecino del agente u en caso contrario.
3. Se calcula el solapamiento $l(u, \omega)$ mediante la ecuación 1.2
4. Con probabilidad $p = l/F$ el agente u interactúa con el agente ω , es decir que se elige un atributo al azar del agente ω de los atributos no comunes entre este y el agente u , luego el agente u adquiere la característica del atributo de ω .
5. Si el número de iteraciones $t = kTN$, con $k = 1, 2, 3, \dots$, entonces M cambia uno de sus atributos escogidos al azar, al que se le asigna un valor $q \in 1, 2, 3, \dots, Q$ seleccionado de manera aleatoria.

Un agente del modelo es idéntico al campo si el solapamiento entre sus vectores culturales $l = 1$, es completamente distinto a M si $l = 0$ o puede tener algunos atributos comunes con M , es decir $1 > l > 0$. Al simular el sistema se observa que en ocasiones los elementos se agrupan en regiones. Una región es el conjunto de agentes conectados entre sí que comparten el mismo vector cultural. El comportamiento del sistema puede analizarse mediante el estudio de estas regiones que los agentes formán. Con la presencia del campo externo variable en el tiempo es particularmente de interés estudiar la mayor región cuya cultura sea idéntica a la propaganda masiva. El tamaño instantáneo normalizado de esta región, es decir, el medido en cada paso de Monte Carlo se define como s_t .

La vecindad de cada agente en el modelo define un grafo o red. En este trabajo se eligieron tres tipos de grafos con distintas topologías que permiten hacer un estudio de la dependencia del fenómeno con respecto al grado k y la longitud característica L del grafo. Se eligió en primer lugar un grafo en forma de grilla k -regular con $k = 4$ y $L = \sqrt{N}/2$, el segundo tipo es un grafo completo con $k = N - 1$ y $L = 1$ y por último un grafo aleatorio con $k = 4$ y que exhibe una baja longitud característica. Estas redes van desde una con pocas conexiones localmente conectada hasta una con muchas conexiones globalmente conectada, pasando por una red *intermedia* con pocas conexiones, pero cuya topología permite que estas no sean locales. Para las simulaciones se fijó el tamaño del

sistema cada uno de estos es de $N = 10000$ nodos. En cada nodo se ubica un agente con vector cultural de tamaño $F = 10$ cuyos atributos se le asignan inicialmente valores aleatorios entre $f_i \in 1, 2, \dots, Q$; donde Q es la variedad cultural del modelo.

En primer lugar estudiaremos la evolución temporal del tamaño de la región más grande que sea idéntica al sistema s_t variando la topología de la red y los parámetros Q , T y B del modelo. Todas las medidas fueron realizadas descartando un transiente de $t = 10^5$ pasos de Monte Carlo.

En la figura 2.1 se muestra la evolución de s_t para los tres grafos usados en el trabajo con $Q = 20$, $B = 0.04$ y $T = 40$. Los valores de Q y B fueron elegidos para comparar el comportamiento del sistema con el del modelo para un grafo 4-regular con un campo externo estático, que para estos parámetros se encuentra en la región multicultural del espacio de fase mostrado en la figura 1.4. Se observa que para una red regular, fig. 2.1(a), que s_t aumenta lentamente, hasta que llega a $s_t \approx 0.5$, momento en que el campo externo cambia y s_t vuelve a caer. Con la red aleatoria, fig. 2.1(b), ocurre el mismo fenómeno pero de manera distinta. Aquí s_t crece casi de manera constante. En la figura 2.1(c), que corresponde al grafo completo, se aprecia algo distinto; s_t cambia bruscamente oscilando alrededor de $s_t = 0.5$.

Al aumentar el periodo de la propaganda, figura 2.2, se observa el mismo fenómeno descrito en la figura 2.1 con la salvedad que la mayor región idéntica a M tiene más tiempo para evolucionar antes de que la propaganda cambie. En el caso de la red regular, fig. 2.2(a), s_t llega a ser del tamaño del sistema justo antes de que el campo externo cambie. En la red aleatoria, 2.2(b), ocurre también el mismo comportamiento de s_t . En el tercer caso, 2.2(c), se observa claramente como el valor de s_t oscila de forma irregular aumentando la amplitud hasta que la propaganda cambia.

En la figura 2.3 se muestra el efecto de una disminución de la intensidad de la propaganda masiva B en la evolución temporal de s_t . Aquí el periodo de cambio del campo externo es más largo que el usado para la figura 2.1 pero su intensidad menor y al parecer estos cambios se compensan obteniéndose comportamiento muy similares a los obtenidos en la figura 2.1 las red regular y aleatoria. En el caso de la red completamente acoplada el comportamiento de s_t es mas ruidoso.

También se analizó el sistema para $Q = 20$, $T = 40$ y $B = 0.02$. En este caso $s_t = 0$ todo el tiempo independientemente del grafo en el que se de la dinámica. Esto se debe a que el campo externo cambia demasiado rápido como para poder transmitir su cultura a los agentes.

Se observa las figuras 2.1, 2.2, 2.3 que s_t llega a valores máximos y similares justo antes de que el campo externo cambie, parece entonces natural pensar que estos valores son una característica propia de la dinámica del sistema. Por esto se define como s_T al valor de s_t una iteración antes de que M cambie y \bar{S}_T como el promedio temporal de dicho valor, que viene dado por

$$\bar{S}_T = 1/\tau \sum_{k=1}^{\tau} s_T \quad (2.1)$$

donde $\tau = 100$ es la cantidad de veces que se midio S_T en este trabajo. Para que \bar{S}_T no dependa

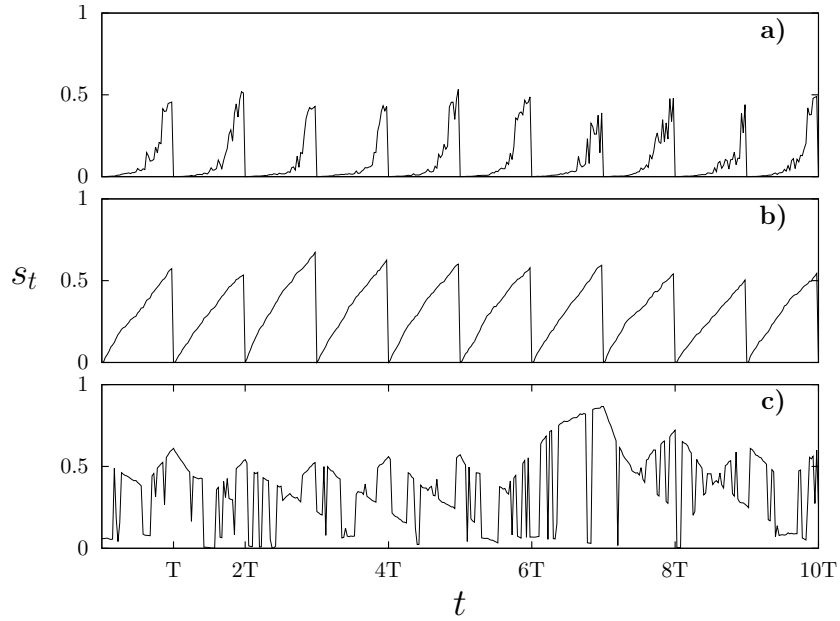


Figura 2.1: Evolución temporal de la región idéntica al campo externo y de tamaño máximo s_t . (a) Red regular. (b) red aleatoria. (c) Red completamente acoplada para $Q = 20$, $T = 40$ y $B = 0.04$

www.bdigital.ula.ve

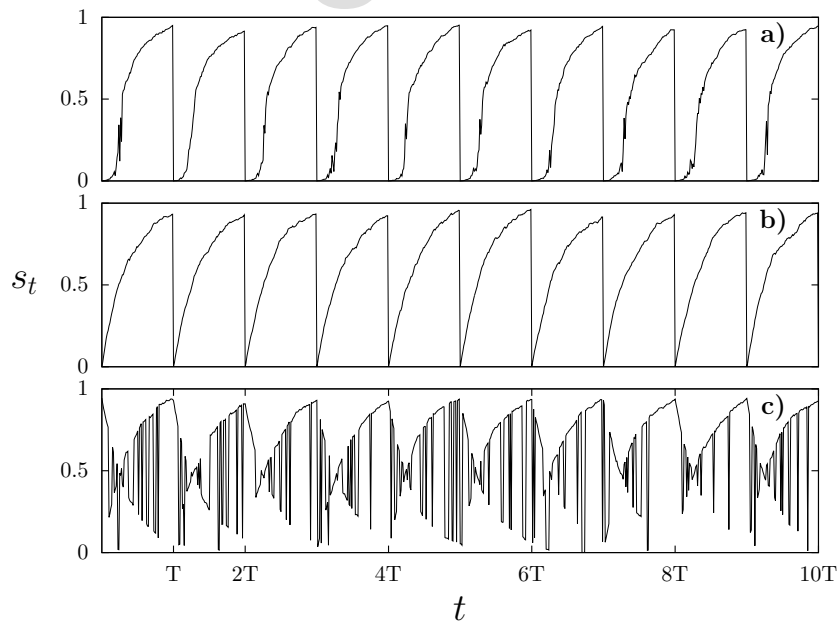


Figura 2.2: Evolución temporal de la región idéntica al campo externo y de tamaño máximo s_t . (a) Red regular. (b) red aleatoria. (c) Red completamente acoplada para $Q = 20$, $T = 80$ y $B = 0.04$

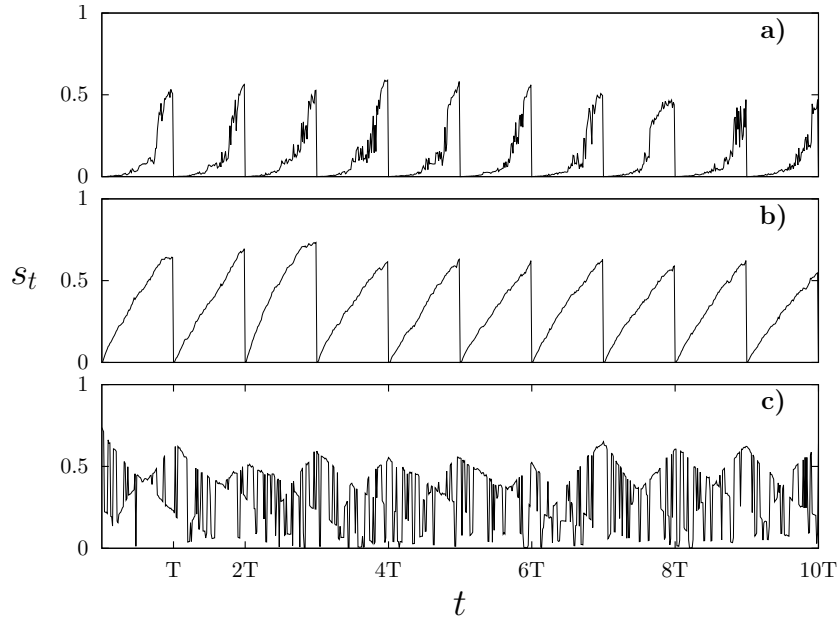


Figura 2.3: Evolución temporal de la región idéntica al campo externo y de tamaño máximo s_t . (a) Red regular. (b) Red aleatoria. (c) Red completamente acoplada para $Q = 20$, $T = 80$ y $B = 0.02$

de las condiciones iniciales es necesario promediar su valor obtenido en varias simulaciones

$$S_T = 1/n \sum_{i=1}^n \bar{s}_T \quad (2.2)$$

donde $n = 2$ es el número de realizaciones.

En la figura 2.4 se muestra para los tres tipos de grafo S_T en función del periodo de cambio T para $Q = 20$ y $B = 0.04$. El rango de T usado permite apreciar el comportamiento de S_T donde en todos los casos se observa a partir de cierto valor T_c del periodo de cambio que S_T aumenta su valor y converge a $S_T = 1$. Este cambio en el comportamiento del parámetro de orden S_T nos indica que estamos en presencia de dos fases en el comportamiento del sistema; una donde la propaganda no logra imponerse en los agentes $T < T_c$, y la otra donde una fracción significativa de los agentes comparten el mismo vector cultural que M . La forma del cambio de fase cambiar es de segundo orden. Se observa que el valor crítico del periodo T_c está en los tres casos entre 20 y 40 siendo su valor más alto en el grafo 4-regular, esto puede deberse al carácter local de la red.

Al estudiar el efecto que pudiese tener la variedad cultural Q en el cambio de fase se encontró que ésta no afecta significativamente al periodo crítico T_c ni la forma como crece S_T en ninguno de los tres tipos de grafos aquí presentados. La figura 2.5 muestra el comportamiento de S_T en función de T para una mayor variedad cultural $Q = 60$ que es muy similar al observado en la figura 2.4.

También se estudió el efecto que tiene la intensidad de la propaganda B en el comportamiento de S_T . En la figura 2.6 se exhibe el comportamiento de S_T usando ahora $Q = 20$ y $B = 0.02$. En este caso persiste el cambio de fase y aumenta el periodo de cambio crítico T_c .

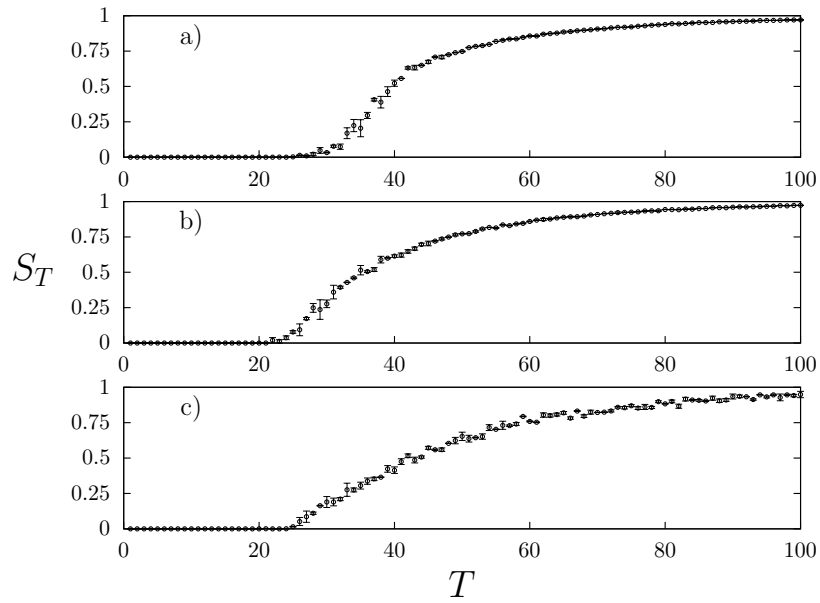


Figura 2.4: Tamaño máximo de la región idéntica a la propaganda S_T en función del periodo de cambio T para $Q = 20$ y $B = 0.04$. (a) Red regular. (b) Red aleatoria. (c) Red completamente acoplada.

www.bdigital.ula.ve

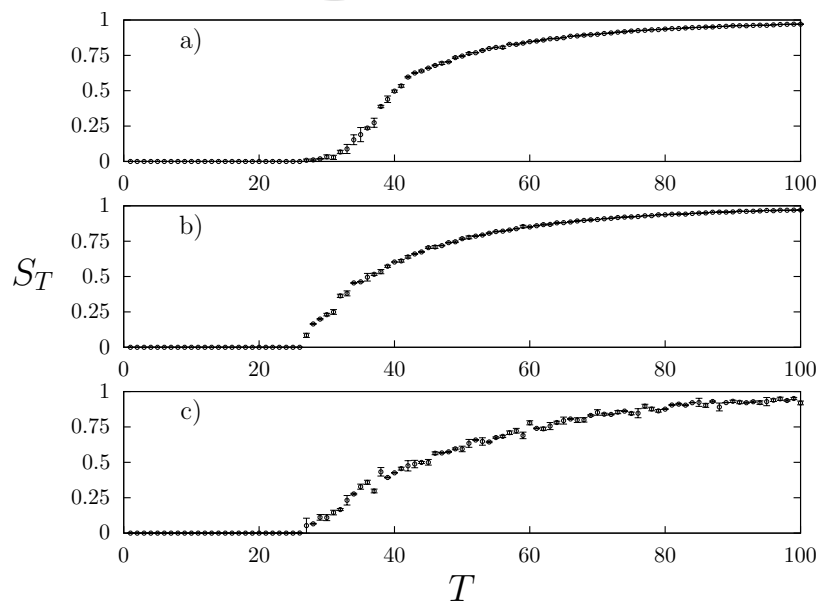


Figura 2.5: Tamaño máximo de la región idéntica a la propaganda S_T en función del periodo de cambio T para $Q = 60$ y $B = 0.04$. (a) Red regular. (b) Red aleatoria. (c) Red completamente acoplada.

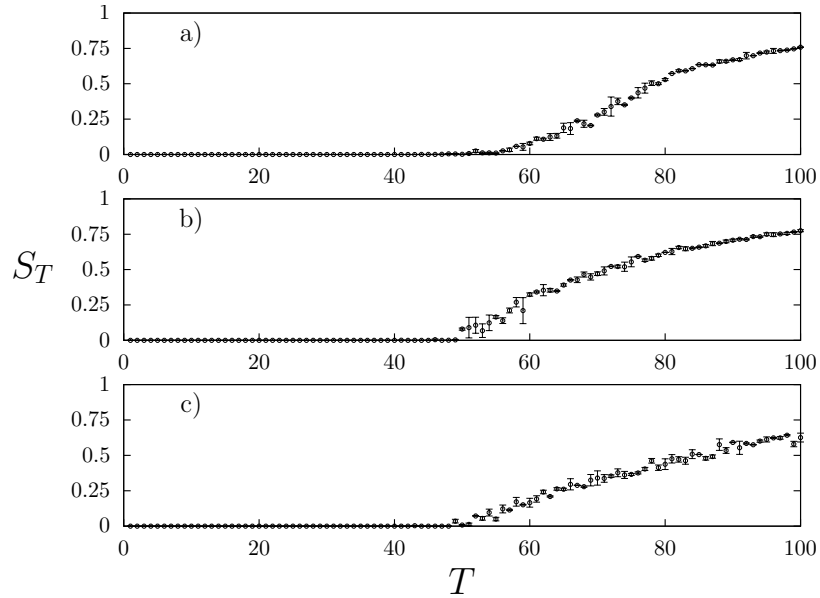


Figura 2.6: Tamaño máximo de la región idéntica a la propaganda S_T en función del periodo de cambio T para $Q = 20$ y $B = 0.02$. (a) Red regular. (b) Red aleatoria. (c) Red completamente acoplada.

Se puede ver que existe una dependencia entre T_c y B ; a mayor intensidad de M menor será el periodo de cambio crítico. Ocurre que un campo externo intenso tiene mayor probabilidad de interactuar con un agente y a diferencia de un campo estático, un campo externo que varía en el tiempo eventualmente es capaz de interactuar con alguno de los agentes al momento de tener solapamiento nulo con estos. El cambio permite que M remueva las regiones de aquellos elementos que fragmentan al sistema y aumenta la influencia de la propaganda en el mismo, es por ello que a pesar de que la combinación de $Q = 20$ y $B = 0.04$ se encuentra en la región multicultural del espacio de parámetros para una propaganda estática (figura 1.4), en el caso de una propaganda variable en el tiempo, el campo externo puede homogenizar el sistema. Este efecto está presente en las tres redes estudiadas.

A pesar de haberse hecho solamente dos realizaciones por cada conjunto de valores de los parámetros la desviación estándar de S_T es pequeña. La mayor desviación se observa en el grafo completo, ya que aquí el cambio de s_t es más ruidoso que en los otros dos grafos como se observó en las figuras 2.1, 2.2 y 2.3. El hecho de que la desviación estándar de S_T es pequeña muestra la poca dependencia que tiene su valor de las condiciones iniciales.

Las variaciones en el parámetro de orden S_T cerca del valor crítico T_c tiene la forma

$$S_T \propto (T_c - T)^\beta \text{ si } T > T_c \quad (2.3)$$

En principio los valores del periodo y del exponente crítico T_c y β pueden depender de la intensidad del campo externo B y de la variedad cultural Q . Para encontrar estos valores en cada una de las tres redes se hicieron regresiones exponenciales con distintos valores de T_c y se eligió aquella que tuviese el menor error en β para cada valor de Q , T_c y B . Se pudo encontrar

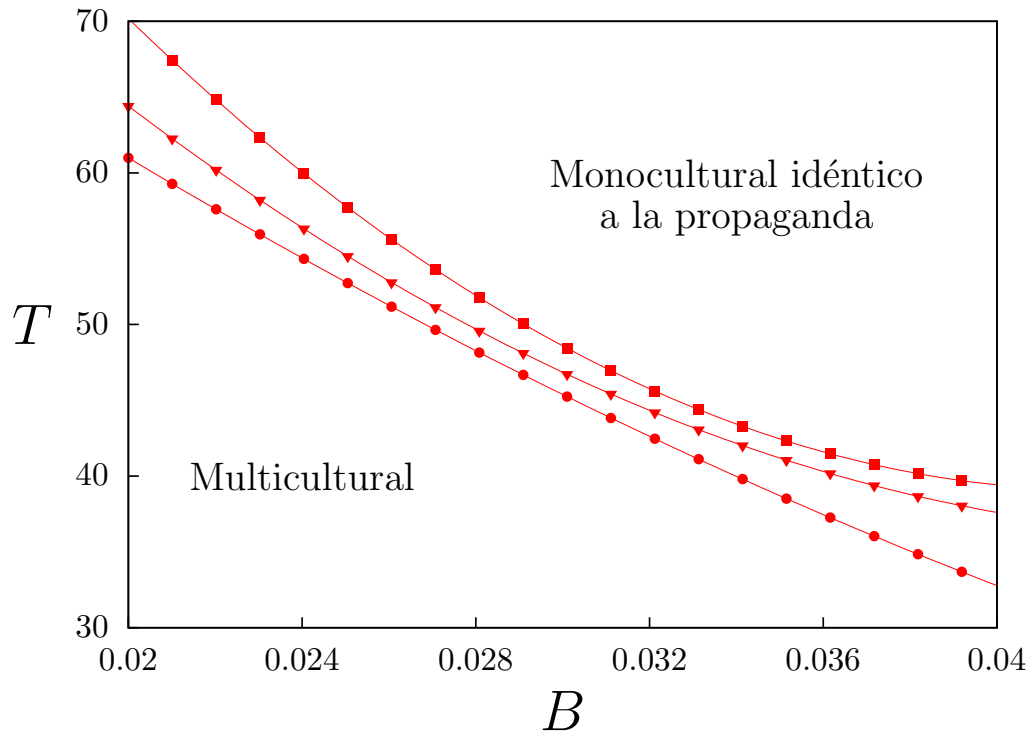


Figura 2.7: Diagrama de fase en el espacio de parámetros (B, T) . Se muestra la frontera crítica $T_c(B)$ que separa la región monocultural idéntica a la propaganda de la multicultural para los tres tipos de grafos. 4-regular (■). Aleatorio (●). Completo (▼).

los valores del periodo crítico T_c y $\beta \in [0.1, 0.6]$, es decir que la transición de fase en todos los casos y para el rango de parámetros estudiados es de segundo orden. Pero las fluctuaciones estadísticas no permiten encontrar una relación funcional clara entre el exponente y los parámetros Q y B .

En la figura 2.7 se muestra el diagrama de fase del sistema. Allí se el periodo crítico T_c en relación a la intensidad de campo para los tres grafos respectivamente. Las fronteras que divide las regiones son curvas suaves cuya forma abre la posibilidad de que existan dos asíntotas; una que define el periodo mínimo para el cual existe la transición y otra que define la intensidad mínima del campo externo donde no importa que tan alto sea el periodo el sistema se encontrará fragmentado. La frontera correspondiente a la red regular (■) se encuentra por encima de las otras dos. Esto posiblemente se debe a que las conexiones de este grafo no tienen tanto alcance comparada con los grafos aleatorio y completo, por lo tanto tarda un poco más en diseminarse el mensaje proveniente de M en el sistema sobre una red regular que en el caso de las otras dos topologías. En el grafo aleatorio (●) sin embargo, la frontera se encuentra por debajo, muy cerca de la frontera del grafo completo (▼). La razón por la que la frontera de la red completamente acoplada se encuentra sobre la frontera de la red aleatoria se debe a el gran número de conexiones que tiene cada nodo, de manera que el campo externo tiene que competir con cada agente al momento de que se disemine su vector cultural. Parece que la velocidad de diseminación del mensaje por parte de M en el sistema es mayor para una longitud característica baja y un grado k de la red pequeño.

Capítulo 3

Observaciones finales

Se estudió cómo un campo variable en el tiempo era capaz de inducir una transición de fase en el modelo de diseminación cultural de Axelrod. Para ello se modificó el modelo de diseminación cultural de Axelrod con propaganda masiva propuesto por J.C. Gonzales-Avella et al. [7] agregándole propaganda variable en el tiempo. La variación de la propaganda es de un atributo cultural cada T pasos de Monte Carlo, que la hace suficientemente suave como para que no sea considerada un ruido.

El modelo se estudió sobre tres tipos de redes con propiedades topológicas extremas. El primero fue una red 4-regular donde las interacciones son locales, el grado de la red es bajo, $k = 4$ y la longitud característica es relativamente alta. El segundo, una red aleatoria, mantiene el grado en $k = 4$ pero se pierde el sentido de localidad de las interacciones y la longitud característica es significativamente menor que la de la red regular. La última, un grafo completo, tiene muchas más interconexiones que las dos redes anteriores, el grado es igual al tamaño del sistema, la longitud característica es mínima y se ha perdido completamente la noción de la localidad.

La transición fue caracterizada mediante el parámetro de orden que mide el tamaño máximo promedio de la región idéntica a la propaganda S_T . Se encontró que la transición depende fuertemente del periodo de de cambio T y de la intensidad de la propaganda masiva B , pero no de la variedad cultural Q . Existen valores T y B para los cuales el sistema se mantiene multicultural, ya sea por que el campo externo cambia muy rapidamente, por que no es lo suficientemente intenso o por ambas. La transición de fase se aprecia en los tres grafos usados: 4-regular, aleatorio y completo. En todos los casos se encontró que es de segundo orden y se construyó el diagrama de fase del sistema en el espacio de parámetros (B, T) . Esto hace pensar que el fenómeno es independiente del tipo de red en el que se encuentren los agentes, siempre y cuando no estén aislados. Para trabajos futuros se puede incluir una red en forma de anillo y grafos aleatorios con k variable para estudiar como ocurre la transición de fase y observar más detalladamente como depende del grado de la red.

La manera en que la propaganda masiva cambia en el tiempo influye en cómo el mensaje es

transmitido en el sistema, se podría estudiar la influencia de un campo externo que cambie de manera distinta a la considerada en este trabajo, por ejemplo, que este cambie dos o más de sus atributos en vez de uno. Por otro lado la propaganda masiva podría sincronizar el sistema para $B < 0.02$ si T es muy largo, es decir, se podría explorar el comportamiento del sistema para un mayor rango de T . Pensamos que puede existir un valor asintótico de B debajo del cual el sistema siempre se encuentre en el estado multicultural. Igualmente debe existir un valor de T para el cual, no importa que tan intenso sea el campo, el sistema también se encontrará en este estado. Para ello sería necesario estudiar los fenómenos para valores de $B > 0.04$. Posiblemente los valores asintóticos dependerán de la topología de la red donde se encuentren los agentes.

También sería de utilidad ampliar el rango de variedad cultural Q para estudiar la dependencia del cambio de fase con respecto a este valor, ya que podría haber una diferencia más significativa entre $Q = 10$ y $Q = 200$ que la que existe entre $Q = 10$ y $Q = 60$. Así como también hacer un estudio del fenómeno usando valores altos de B y valores bajos de Q para encontrar un valor mínimo de β en la transición de fase.

En el presente trabajo se usó el mismo número de nodos en las tres redes, no se conoce la dependencia de transición de fase con respecto al tamaño del sistema, un futuro trabajo en el que se estudien redes de tamaños variados permitiría observar dicha dependencia.

Los algoritmos usados en las simulaciones y el procesamiento de los datos obtenidos se presta para ser automatizado. Se puede crear un programa que tenga como entrada los distintos parámetros y topologías usados en este trabajo y como salida los parámetros T_c y β .

Bibliografía

- [1] Galam, Serge. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 336.1 (2004): 49-55.
- [2] Stauffer, Dietrich. *Journal of Statistical Physics* 151.1-2 (2013): 9-20.
- [3] Gilbert, Nigel, Klaus G. Troitzsch, and Francisco J. Miguel Quesada. *Simulación para las ciencias sociales: una guía práctica para explorar cuestiones sociales mediante el uso de simulaciones informáticas*. McGraw-Hill, 2006.
- [4] Schelling, Thomas C. *Journal of mathematical sociology* 1.2 (1971): 143-186.
- [5] Axelrod, Robert. *Journal of conflict resolution* 41.2 (1997): 203-226.
- [6] Castellano, Claudio, Matteo Marsili, and Alessandro Vespignani. *Physical Review Letters* 85.16 (2000): 3536.
- [7] González-Avella, Juan Carlos, Mario G. Cosenza, and K. Tucci. *Physical Review E* 72.6 (2005): 065102.
- [8] Peres, Lucas R., and José F. Fontanari. *EPL (Europhysics Letters)* 96.3 (2011): 38004.
- [9] Klemm, Konstantin, et al. *Physical Review E* 67.4 (2003): 045101.
- [10] Mazzitello, Karina I., Julián Candia, and Víctor Dossetti. *International Journal of Modern Physics C* 18.09 (2007): 1475-1482.
- [11] Rodríguez, Arezky H., M. del Castillo-Mussot, and G. J. Vázquez. *International Journal of Modern Physics C* 20.08 (2009): 1233-1245.
- [12] Flache, Andreas, and Michael W. Macy. *Journal of Conflict Resolution* 55.6 (2011): 970-995.
- [13] Rodríguez, Arezky H., and Y. Moreno. *Physical Review E* 82.1 (2010): 016111.
- [14] Rendell, Paul. *Collision-based computing*. Springer London, 2002. 513-539.
- [15] Wolfram, Stephen. *Reviews of modern physics* 55.3 (1983): 601.
- [16] Cipra, B. A. (1987). *American Mathematical Monthly*, 94(10), 937-959.

- [17] Wolfram, Stephen. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 10.1 (1984): 1-35.
- [18] Hogeweg, P. *Applied mathematics and computation* 27.1 (1988): 81-100.
- [19] Mikhailov, Alexander, & Vera Calenbuhr. *From cells to societies: models of complex coherent action*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [20] Bonabeau, Eric. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 99.suppl 3 (2002): 7280-7287.
- [21] Kroese, Dirk P., et al. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics* 6.6 (2014): 386-392.
- [22] Kahn, Herman, and Theodore E. Harris. *National Bureau of Standards applied mathematics series* 12 (1951): 27-30.
- [23] Bondy, John Adrian, and Uppaluri Siva Ramachandra Murty. *Graph theory with applications*. Vol. 290. London: Macmillan, 1976.
- [24] Newman, M. E., Watts, D. J., and Strogatz, S. H. (2002). *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(suppl 1), 2566-2572.
- [25] Watts, Duncan J., and Steven H. Strogatz. *Nature* 393.6684 (1998): 440-442.
- [26] Klemm, Konstantin, et al. *Physical Review E* 67.2 (2003): 026120.
- [27] Bar-Yam, Y. (1997). *Dynamics of complex systems (Vol. 213)*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- [28] González-Avella, Juan Carlos, Mario G. Cosenza, and Maxi San Miguel. *PloS one* 7.12 (2012): e51035.
- [29] González-Avella, Juan Carlos, et al. *New Journal of Physics* 12.1 (2010): 013010.
- [30] Echeverria, Carlos A., and Kay Tucci. *Phase Growth and Pattern Formation in Heterogeneous Media*. Thesis. Postgrado De Física Fundamental, Facultad De Ciencias, Universidad De Los Andes. Mérida, Venezuela,, 2007. Print.
- [31] González-Avella, Juan Carlos, et al. arXiv preprint arXiv:0705.1091 (2007).
- [32] González-Avella, Juan Carlos, et al. *Physical Review E* 73.4 (2006): 046119.