

Gran Unificación Supersimétrica

Alba Ramírez

Tutora: Alejandra Melfo

Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias

Postgrado en Física Fundamental

Centro de Física Fundamental

Enero 2007

Índice general

1. Introducción	4
1.1. Gran Unificación	5
1.2. Supersimetría: Potenciales escalares	8
2. Introducción a Teoría Gran Unificación Supersimétrica: $SO(10)$	10
2.1. Principales características de $SO(10)$	11
2.2. Algunos Modelos Supersimétricos	14
2.2.1. Modelo Left-Right ($L-R$)	14
2.2.2. Modelo Pati-Salam (PS)	17
2.3. Un modelo $SO(10)$ Mínimo GUT	19
3. Un Modelo no-mínimo de $SO(10)$	22
3.1. Campos	22
3.2. Patrones de Rompimiento de Simetría	24
3.3. Cálculo del espectro de partículas	25
3.3.1. Convenciones	25
3.3.2. Rompimiento de simetría	29
3.3.3. Contribuciones a los términos F	33
3.3.4. Contribuciones F_H	33
3.3.5. Contribuciones F_S	34
3.3.6. Contribuciones F_A	35
3.3.7. Contribuciones F_C	36
3.3.8. Contribuciones F_Σ	38
3.3.9. Contribuciones $F_{\bar{\Sigma}}$	40
3.3.10. Matrices de Masa	42
4. Masa para el neutrino	47

5. <i>Conclusiones</i>	50
A. <i>Descomposición de representaciones de $SO(10)$</i>	52
B. <i>Patrones rompimiento de simetría</i>	58

www.bdigital.ula.ve

Resumen

Se calculó en detalle el rompimiento de simetría y el espectro de masas de las partículas para el Modelo $SO(10)$ que contiene las representaciones $H = \mathbf{10}$, $S = \mathbf{54}$, $A = \mathbf{45}$, $C = \mathbf{120}$, $\Sigma = \mathbf{126}$, $\bar{\Sigma} = \bar{\mathbf{126}}$. Se da un ejemplo de uso de este cálculo implementando en la teoría un mecanismo see-saw tipo II para la masa del neutrino.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 1

Introducción

Durante muchos años ha existido el interés de encontrar una teoría que unifique las interacciones entre las partículas. El Modelo Estándar (MS), logra describir tres de las fuerzas y unificar dos de ellas.

Una de las extensiones más interesantes del MS es el modelo estándar supersimétrico. Las teorías supersimétricas contemplan la existencia de un bosón por cada fermión conocido, y viceversa. En el modelo estándar supersimétrico minimal (MSSM) se encuentra que las constantes de calibre del grupo del MS ($SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$) corren con la energía de tal manera que tienen el mismo valor a una escala de 10^{16} GeV . A este hecho se le conoce con el nombre de *Gran Unificación*. Para estudiar este fenómeno en detalle, es necesario construir una así llamada *Teoría de Gran Unificación (GUT)*, basada en un grupo de calibre que contenga como subgrupo el del modelo estándar. El grupo más simple es $SU(5)$. Sin embargo, en la teoría basada en $SU(5)$, los neutrinos, al igual que en el MS, no tienen masa.

Existe otra teoría considerada GUT por poseer características interesantes como el mecanismo see-saw [1], [2], [3], [4] y la conservación de Paridad-R [5], [6], [7], [8], entre otras, incluídas en teorías supersimétricas como el modelo Left-Right y el modelo Pati-Salam. Nos referimos a la teoría basada en el grupo de calibre $SO(10)$, eje central del presente trabajo.

La finalidad de este trabajo es calcular en detalle el rompimiento de simetría y el espectro de masas para la Teoría Gran Unificación supersimétrica $SO(10)$ que contiene las representaciones $H = \mathbf{10}$, $S = \mathbf{54}$, $A = \mathbf{45}$, $C = \mathbf{120}$, $\Sigma = \mathbf{126}$, $\bar{\Sigma} = \bar{\mathbf{126}}$, mediante el método propuesto por [9].

El segundo capítulo está dedicado a una revisión de las características mas relevantes de $SO(10)$ GUT Supersimétrica. También se realizará una revisión

de los modelos supersimétricos: Left-Right y Pati-Salam, contenidos como subgrupos de $SO(10)$, estudiados durante los últimos años y que como se mencionó anteriormente, poseen muchas de las características contenidas en teorías $SO(10)$. Además, se presentará una breve revisión del modelo $SO(10)$ supersimétrico estudiado por Bajc, Melfo, Senjanović y Vissani, en [10], de interés por presentar un estudio detallado del rompimiento de simetría y el espectro de partículas completo.

En el tercer capítulo se propone un Modelo no-minimal $SO(10)$ considerando que el conjunto de representaciones de Higgs presentes en la teoría son: **10**, **54**, **45**, **120**, **126**, **$\bar{126}$** . Se obtendrán los patrones de rompimiento de simetría y el correspondiente espectro de partículas, siendo necesario una descomposición completa bajo el grupo del modelo estándar de estos campos, así como el cálculo de cada uno de los términos F, determinados a partir del superpotencial y de los valores de expectación en el vacío (VEV) que adquieren algunos campos para romper simetría.

En lo que sigue se realizará una breve revisión del interés de teorías Gran Unificación y de cómo se escriben los potenciales escalares en supersimetría.

1.1. Gran Unificación

El interés de Teorías Gran Unificación es describir todas las interacciones con una sola constante de acoplamiento. La escala de unificación es obtenida al restringir que los tres diferentes acoplamientos de calibres unifiquen en una sola constante de acoplamiento de calibre por encima de la escala de unificación.

La evolución de las constantes de calibre con la energía está dada por las ecuaciones del grupo de renormalización para cada grupo de calibre. A la escala de gran Unificación, que llamaremos M_X , tenemos:

$$\frac{dg_i}{d \ln(M_X)} = -\beta_{g_i} \equiv -\frac{b_i}{16\pi^2} g_i^3, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{\alpha_i(M_W)} = \frac{1}{\alpha_i(M_X)} - \frac{b_i}{2\pi} \ln \left(\frac{M_X}{M_W} \right), \quad \alpha \equiv \frac{g^2}{4\pi}. \quad (1.2)$$

donde $\alpha_i(M_W)$ son los tres diferentes acoplamientos de calibre para la escala débil M_W , $\alpha_i(M_X)$ acoplamientos de calibre a la escala de unificación M_X , los b_i son los coeficientes de las partículas que poseen masa por debajo de la

escala de unificación M_X . Estos coeficientes para grupos de calibre $SU(N)$ están dados por

$$b_i = 3N - \sum_F T_F(R) - \sum_H T_H(R), \quad (1.3)$$

donde

$$T(R)\delta_{ij} = Tr(T_i T_j), \quad (1.4)$$

y para $U(1)$ con $Y/2$ como la hipercarga de cada una de las partículas

$$b_1 = -\frac{3}{5} \sum_i \left(\frac{Y}{2}\right)^2. \quad (1.5)$$

En el modelo estándar supersimétrico minimal, el grupo de calibre es dado por $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. El contenido fermiónico es

$$q_L = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix} \quad \ell_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{matrix} u_R^i & d_R^i & e_R \end{matrix} \right\} \times 3 \text{ familias}$$

donde $i = 1 \dots 3$, índice de familia. Transforman bajo cada grupo como

	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y (Y/2)$
q_L	3	2	1/6
u_R^i	3	1	2/3
d_R^i	3	1	-1/3
ℓ_L	1	2	-1/2
e_R	1	1	-1
H	1	2	-1/2
\bar{H}	1	2	+1/2

Calculando los b'_i s con (1.3) y (1.5)

$$b_3 = 3N - n_{ge} * n_{SU(3)} * T(3)_{SU(3)} = 3 * 3 - 3 * 4 * \left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$b_2 = 3N - n_{ge} * n_{SU(2)} * T(2)_{SU(2)} - n_{SU(2)}^H * T(2)_{SU(2)}^H = 3 * 2 - 3 * 4 * \left(\frac{1}{2}\right) - 2 * \left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$b_1 = -\frac{3}{5} \left\{ n_{ge} \left(\left(\frac{1}{6}\right)^2 * 6 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 * 2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 * 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 * 3 + (-1)^2 \right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 * 4 \right\} = -\frac{33}{5}$$

donde n_{ge} : el número de generaciones es 3, $n_{SU(N)}$: número de partículas que transforman bajo el grupo considerado, los $T(R)$ son iguales a $1/2$ y N , para

la representación fundamental y la representación adjunta respectivamente para un grupo $SU(N)$.

La unificación de los tres acoplamientos de calibre, $\alpha_1(M_X) = \alpha_2(M_X) = \alpha_3(M_X) = \alpha_u(M_X)$, se da cuando las ecuaciones del grupo de renormalización quedan

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_1(M_W)} &= \frac{1}{\alpha_u(M_X)} - \frac{b_1}{2\pi} \ln\left(\frac{M_X}{M_W}\right), \\ \frac{1}{\alpha_2(M_W)} &= \frac{1}{\alpha_u(M_X)} - \frac{b_2}{2\pi} \ln\left(\frac{M_X}{M_W}\right), \\ \frac{1}{\alpha_3(M_W)} &= \frac{1}{\alpha_u(M_X)} - \frac{b_3}{2\pi} \ln\left(\frac{M_X}{M_W}\right),\end{aligned}\quad (1.6)$$

donde $1/\alpha_1(M_W) = 60$, $1/\alpha_2(M_W) = 30$, $1/\alpha_3(M_W) = 8,5$, la escala $M_W = 91\text{GeV}$ y los coeficientes de las partículas que tienen masa por debajo de la escala de unificación $b_3 = 3$, $b_2 = -1$, $b_1 = -33/5$.

Para determinar el orden de la escala de unificación M_X , se restan dos de las ecuaciones de (1.6)

$$\ln\left(\frac{M_X}{M_W}\right) = \frac{2\pi}{(b_2 - b_1)} \left(\frac{1}{\alpha_1(M_W)} - \frac{1}{\alpha_2(M_W)} \right) \quad (1.7)$$

sustituyendo valores y calculando, resulta la escala de unificación es del orden de 10^{16} GeV

$$M_X = 3,78 \times 10^{16} \text{ GeV}.$$

El acoplamiento de calibre de unificación es determinado al sumar dos de las ecuaciones de (1.6)

$$\frac{1}{\alpha_u(M_X)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_1(M_W)} + \frac{1}{\alpha_2(M_W)} \right) + \frac{(b_1 + b_2)}{4\pi} \ln\left(\frac{M_X}{M_W}\right) \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{\alpha_u(M_X)} = 24,6.$$

Para modelos con partículas con masas un poco por debajo de la escala de M_X , aún puede haber unificación si se encuentran en el modelo partículas con contribuciones δb_i 's que se contrarresten

$$\ln\left(\frac{M_X}{M_W}\right) = \frac{2\pi}{(b_2 + \delta b_2 - b_1 - \delta b_1)} \left(\frac{1}{\alpha_1(M_W)} - \frac{1}{\alpha_2(M_W)} \right) \quad (1.9)$$

Una aplicación de esto y de lo interesante de obtener un espectro de masas completo en el capítulo 4, es encontrar un triplete liviano.

Esto se realizará en el cuarto capítulo para partículas del modelo no minimal $SO(10)$ que tiene por campos las representaciones **10**, **54**, **45**, **120**, **126**, **$\bar{126}$** , estudiado en el presente trabajo.

1.2. *Supersimetría: Potenciales escalares*

En una teoría supersimétrica, el potencial escalar de un campo ϕ_i se puede escribir en términos de una función holomorfa de los supercampos, el superpotencial W . Para obtener una teoría con interacciones renormalizables únicamente, el superpotencial no debe contener términos de orden mayor que cúbico en los campos. Todo campo escalar tendrá asociado un supercampo, con las mismas propiedades de transformación bajo los grupos de simetría internos. Frecuentemente, se denota de la misma manera el supercampo que el campo escalar, pero debe recordarse que son cosas distintas, el supercampo contiene también campos fermiónicos quirales.

Dado un superpotencial renormalizable de la forma más general posible, escrito en términos de una serie de supercampos ϕ_i como

$$W = m_{ij}\phi_i\phi_j + \lambda_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k$$

el potencial escalar viene dado por

$$V = \sum_i \left| \frac{dW}{d\phi_i} \right|^2$$

Como puede verse, el potencial escalar es una suma de módulos cuadrados, por tanto su valor mínimo es siempre cero. En el caso de una teoría con campos de calibre, se deben agregar a este potencial otra parte correspondiente a las interacciones de calibre. Esta contribución se puede escribir también como una suma de módulos cuadrados.

$$V_{gauge} = \sum_i |D_i|^2$$

con

$$D_i = Tr[\bar{\phi}_i, \phi_i]$$

Los valores de expectación en el vacío de los campos escalares, se encontrarán como es usual minimizando el potencial escalar, pero en este caso ya se sabe que este mínimo debe ser cero. Por tanto, es suficiente garantizar que se cumpla

$$F_i \equiv \frac{dW}{d\phi_i} = 0$$

en el mínimo del potencial. Esto hace que encontrar el mínimo en una teoría supersimétrica sea sumamente simple, aunque existan un número grande de campos, pero a la vez, dado que los superpotenciales son unas funciones muy restringidas (sólo hasta orden cúbico, y holomórficas) en la mayoría de los casos la solución a las ecuaciones de minimización es que todos los VEVs sean cero. Por esta razón, romper una simetría dentro de una teoría supersimétrica puede ser difícil, o requerir varios campos en varias representaciones distintas del grupo.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 2

Introducción a Teoría Gran Unificación Supersimétrica: $SO(10)$

Durante varios años la teoría $SU(5)$ supersimétrica ha sido estudiada por unificar los acoplamientos de la interacción supersimétrica a bajas energías [11], [12], [13], [14]. El sector de Higgs en esta teoría consiste de la representación adjunta 24_H y las fundamentales 5_H y $\bar{5}_H$, el superpotencial para este sector es dado por

$$W_H = m(24)^2 + \lambda(24_H)^3 + \mu\bar{5}_H 5_H + \alpha 5_H 24_H \bar{5}_H$$

y el sector de Yukawa

$$W_Y = y_d 10_F \bar{5}_F \bar{5}_H + y_u 10_F 10_F 5_H.$$

El número de parámetros reales que posee son 21. La teoría falla al obtener neutrinos sin masas y las relaciones de masa: $m_d = m_e$ a la escala M_{GUT} , excepto para la tercera generación [15], [16].

Existen tres posibilidades para resolver el problema de neutrinos sin masa en esta teoría [17]:

1. Agregar neutrinos derechos en singletes de $SU(5)$;
2. Adicionar un triplete de $SU(2)$ contenido en un supercampo de Higgs, 15_H , de dos índices simétricos;

3. La tercera posibilidad es escribir un operador tipo Weinberg [18]

$$W_{y\nu} = y^\nu \frac{1}{M_\nu} \bar{5}_F \bar{5}_F 5_H 5_H,$$

agregando operadores de alta dimensionalidad

$$\Delta W_y = \frac{24_H 5_H}{M_{Pl}} 10_F 10_F + \frac{10_F 10_F 24_H}{M_{Pl}} 5_H + \frac{24_H 5_H}{M_{Pl}} 10_F \bar{5}_F + \frac{24_H \bar{5}_H}{M_{Pl}} 10_F 5_H$$

con $M_\nu \gg M_{GUT}$, $M_\nu \sim M_{Pl}$, [19], [20]. Esta posibilidad implica tener 60 parámetros reales.

Para las dos primeras posibilidades se tiene que M_R es una cantidad invariante de calibre, $M_R \gg M_{GUT}$ y por tanto $m_\nu \ll M_W^2/M_{GUT} \simeq 10^{-3} eV$ [19], [20], masas muy pequeñas para explicar datos de neutrinos atmosféricos y solares.

Así que se tiene una teoría $SU(5)$ con neutrinos sin masa y un sector fermiónico incompleto o se puede realizar una buena afinación a M_R , con correcciones $1/M_{Pl}$ en los acoplamientos de Yukawa y tener correctas relaciones de masa fermiónicas pero implica tener muchos parámetros en la teoría.

Sin embargo, como ya se mencionó anteriormente existe otro candidato a ser considerado una Teoría Gran Unificación (GUT) supersimétrica: la Teoría $SO(10)$. En esta teoría se pueden obtener neutrinos masivos de manera natural sin necesidad de agregarle operadores de alta dimensionalidad a la teoría, además, posee una serie de características de interés, que hacen de la teoría basada en la simetría de calibre $SO(10)$ una Teoría Gran Unificación (GUT).

A continuación se presentan las principales características que posee $SO(10)$ para ser considerado una GUT.

2.1. Principales características de $SO(10)$

- Una característica importante es la **unificación** de **quarks** y **leptones** en una representación espinorial 16-dimensional:

$$\Psi_{16} = \begin{pmatrix} U \\ D \\ D^c \\ U^c \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ \nu \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \\ e \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

donde U^c y D^c están dados por

$$U^c = \begin{pmatrix} u^c \\ u^c \\ u^c \\ \nu^c \end{pmatrix} \quad D^c = \begin{pmatrix} d^c \\ d^c \\ d^c \\ e^c \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

inclusión del neutrino derecho ν^c .

- Incorpora el **Mecanismo See-Saw** como una manera de generar masa para los neutrinos [1], [2], [3], [4], y explica su pequeña masa. Para generar términos de masa, se pueden escribir acoplamiento de Yukawa invariantes de calibre como se explica a continuación.

En el MS el Mecanismo see-saw proporciona una masa pequeña a los neutrinos. La manera de hacerlo es agregar neutrinos derechos ν_R y escribiendo términos de Yukawa en el lagrangeano para $SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$L_y(\nu) = y_D \bar{\nu}_L \phi \nu_R + \frac{1}{2} M_R \nu_R^T C^{-1} \nu_R + h.c.,$$

donde y_D es la matriz de Yukawa en el espacio de sabores, M_R es la matriz de masa de Majorana, C es la matriz de conjugación de carga de Dirac.

Cuando el campo de Higgs ϕ toma un VEV, los neutrinos adquieren una masa "de Dirac", m_D . La matriz de masa queda entonces,

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M_R \end{pmatrix},$$

al diagonalizar esta matriz, resulta la masa para neutrinos ligeros como

$$M_\nu^I = m_D^T M_R^{-1} m_D \sim \frac{M_D^2}{M_R} \sim \frac{M_W^2}{M_R}, \text{ Mecanismo See-Saw tipo I.}$$

En el *Mecanismo See-Saw tipo II* la masa de neutrinos ligeros es generada al introducir en la teoría un triplete de Higgs Δ (con $B - L = 2$) de $SU(2)$, en el término de Yukawa

$$L_y(\nu) = y_\nu \ell_L^T C \Delta \ell_L + h.c.,$$

donde ℓ_L son dobletes leptónicos.

Al poder el triplete Δ adquirir un VEV y acoplarse con los dobletes leptónicos, se tiene la pequeña masa para neutrinos:

$$M_{\nu}^{II} \simeq \frac{M_W^2}{M_{\Delta}},$$

con $\langle \Delta \rangle \simeq \frac{M_W^2}{M_{\Delta}}$, $M_{\Delta} > M_W$.

- Incluye la **Paridad-R**, que puede ser escrita como

$$R = (-1)^{3(B-L)} \equiv M \quad (2.3)$$

donde B el número bariónico, L el número leptónico. Distingue partículas del MS, con Paridad $R = (1)$, de partículas supersimétricas, con Paridad $R = (-1)$.

El grupo de calibre $SO(10)$ contiene como subgrupos el modelo Left-Right (L-R) y el modelo Pati-Salam (P-S). La simetría $(B-L)$ está presente en teorías L-R, donde la interpretación física de esta simetría es la de carga eléctrica $Q = T_{3L} + T_{3R} + (B-L)/2$.

La interacción renormalizable de un campo $(B-L) = 2$ con neutrino derechos, es responsable del rompimiento espontáneo de la simetría $(B-L)$ y evita el rompimiento de Paridad-R [7], siendo esta la manera de incorporar a la teoría un *Mecanismo See-Saw* renormalizable y a través de éste, proveer masa al neutrino [1], [2], [3], [4].

El que la Paridad R permanezca como una simetría exacta en todas las escalas [5], [6], [7], [8] tiene consecuencias cosmológicas, al garantizar la estabilidad del compañero supersimétrico ligero (lightest supersymmetric partner, LSP), por el hecho de que las partículas SUSY no pueden decaer en partículas del Modelo Estándar al conservarse la Paridad R.

Si la paridad-R se rompe, el número bariónico y el número leptónico no son conservados, el decaimiento del protón sería aproximadamente de 10 a 2 segundos. Entonces, ya que el tiempo de vida del protón $\tau_p > 10^{33}$ años, el modelo se vería desfavorecido si la paridad-R no se conserva.

En Teorías Gran Unificación $SO(10)$ la Paridad R aparece debido a que los fermiones están en una representación espinorial 16 dimensional y los Higgs en una representación vectorial 10 dimensional. Bajo paridad-R (M): $16 \xrightarrow{M} -16$, $10 \xrightarrow{M} 10$.

- La **simetría L – R** en forma de conjugación de carga es una transformación de calibre en $SO(10)$.
- La unificación de los acoplamientos de calibre pueden ser buscados sin o con supersimetría, como en el caso de este trabajo, debido a la existencia de escalas intermedias.
- El hecho de que todos los fermiones estén en una sólo representación, implica relaciones entre las masas de los fermiones que puede conducir a predicciones.

Muchas de estas características, además de hacer de $SO(10)$ un modelo atractivo de estudiar, están presentes en modelos supersimétricos estudiados durante los últimos años, por ello en lo que sigue se realiza una revisión de algunos de estos modelos.

2.2. Algunos Modelos Supersimétricos

Los modelos Left-Right y Pati-Salam, revisa los a continuación, están incluidos en $SO(10)$ como subgrupos.

2.2.1. Modelo Left-Right (L-R)

De las características importantes que posee $SO(10)$ por contener el grupo de calibre del modelo L-R, se encuentra la incorporación de la simetría de calibre $B – L$. La manera de incorporar esta simetría en este modelo $L – R$ supersimétrico renormalizable es a través del grupo de calibre $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ [21], [22], [23], [24].

Al rompimiento espontáneo de esta simetría Left-Right (o invariante de calibre $B – L$) se le atribuye la asimetría de paridad en interacciones débiles. Como se mencionó anteriormente, la invariancia bajo esta simetría implica *conservación de paridad R* [25] exacta en todas las escalas, e incorpora un *mecanismo see-saw* renormalizable [7].

El patrón de rompimiento de simetría que sigue el grupo de calibre $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ del Modelo L-R supersimétrico está dado por:

$$\begin{aligned}
& SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \\
& \quad M_R \Downarrow \langle \Omega_c \rangle \\
& SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_R \times U(1)_{B-L} \\
& \quad M_{B-L} \Downarrow \langle \Delta_c \rangle, \langle \bar{\Delta}_c \rangle \\
& SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y
\end{aligned}$$

Esta versión supersimétrica del modelo L-R minimal renormalizable estudiado por Aulakh, Melfo y Senjanović en [5], contiene tres generaciones de supercampos quarks y leptones

$$\begin{aligned}
L &= \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} & L_c &= \begin{pmatrix} \nu_c \\ e_c \end{pmatrix} \\
Q &= \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} & Q_c &= \begin{pmatrix} u_c \\ d \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

con propiedades de transformación bajo $(SU(3)_C, SU(2)_L, SU(2)_R, U(1)_{B-L})$

$$L = (1, 2, 1, -1), L_c = (1, 1, 2, 1), \tag{2.5}$$

$$Q = (3, 2, 1, 1/3) \quad Q_c = (3^*, 1, 2, -1/3), \tag{2.6}$$

$$\Phi_i (1, 2, 2^*, 0), (i = 1, 2), \tag{2.7}$$

tal que

$$\begin{aligned}
L &\rightarrow U_L L, \quad Q \rightarrow U_L Q, \quad \text{bajo } SU(2)_L, \\
L_c &\rightarrow U_R^* L_c, \quad Q_c \rightarrow U_R^* Q_c, \quad \text{bajo } SU(2)_R, \quad \text{y } \Phi \rightarrow U_L \Phi U_R^\dagger
\end{aligned}$$

El conjunto de campos de Higgs que rompen $SU(2)_R$, necesarios para llevar a cabo la violación espontánea de simetría L-R y automáticamente proveer masa al neutrino a través del mecanismo see-saw, está dado por

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1, 3, 1, 2), \quad \bar{\Delta} = (1, 3, 1, -2), \\
\Delta_c &= (1, 1, 3, -2), \quad \bar{\Delta}_c = (1, 1, 3, 2),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $\Delta \rightarrow U_L \Delta U_L^\dagger$ y $\Delta_c \rightarrow U_R^* \Delta_c U_R^T$.

Transforman bajo simetría L-R como conjugación de carga

$$Q \leftrightarrow Q_c, \quad L \leftrightarrow L_c, \quad \Phi_i \leftrightarrow \Phi_i^T, \quad \Delta \leftrightarrow \Delta_c, \quad \bar{\Delta} \leftrightarrow \bar{\Delta}_c \quad .$$

Incluyen un conjunto de tripletes

$$\Omega = (1, 3, 1, 0), \quad \Omega_c = (1, 1, 3, 0), \quad (2.9)$$

los cuales transforman bajo simetría L-R como $\Omega \leftrightarrow \Omega_c$, y permiten la separación de las escalas donde la paridad y simetría L-R son rotas [6].

El superpotencial invariante de calibre más general, para tripletes que realizan el rompimiento de paridad, tiene la forma

$$W = if L^T \tau_2 \Delta L + if^* L_c^T \tau_2 \Delta_c L_c + m_\Delta \left(Tr(\Delta \bar{\Delta}) + Tr(\Delta_c \bar{\Delta}_c) \right) \\ + \frac{m_\Omega}{2} (Tr(\Omega^2) + Tr(\Omega_c^2)) + a \left(Tr(\Delta \Omega \bar{\Delta}) + Tr(\Delta_c \Omega_c \bar{\Delta}_c) \right) \quad (2.10)$$

donde f es una matriz simétrica.

Al minimizar el superpotencial, los VEVs que adquieren los campos quedan dados por [26]

$$\langle \Delta_c \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \bar{\Delta}_c \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \bar{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \Omega_c \rangle = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{pmatrix}.$$

Estos tripletes proveen masa a los neutrinos a través del mecanismo see-saw, al acoplarse con leptones en términos como $L_c^T \tau_2 \Delta_c L_c \rightarrow M_R \nu_c^T \sigma_2 \nu_c$ (masa de Majorana), con $v \sim M_R$. Además se preserva paridad R por el hecho de que $\langle L_c \rangle = 0$, [26]. Como se verá en una teoría $SO(10)$, estos tripletes están contenidos en la representación 126.

Este modelo L-R incorpora el mecanismo see-saw en su forma canónica, es decir, donde la matriz de masa se escribe como

$$m = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M_R \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad m_\pm = \frac{M_R}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{m_D^2}{M_R^2}} \right)$$

donde $w = m_D$, denota la masa de Dirac para los neutrinos y $v = M_R$, es la masa de Majorana del neutrino derecho. La masa de Majorana es inducida a través de los VEVs de los tripletes Δ_c , con rompimiento de paridad a escala grande $M_R \gg m_D$. Con ésto se obtiene:

- Un estado pesado con masa: $m_{\nu_+} \sim M_R$, mayormente ν_R y poco ν_L ,

- Y un estado liviano con masa: $m_{\nu-} \sim \frac{m_D^2}{M_R}$, compuesto casi todo por ν_L .

Otra predicción de este modelo realizada por Aulakh, Melfo, Rásin y Senjanović [26], es el hecho de que las escalas donde $SU(2)_R$ rompa a $U(1)_R$ y $U(1)_R \times U(1)_{B-L}$ rompa a $U(1)_Y$, quedan dadas por $M_R = \frac{m_\Delta}{a}$; $M_{B-L} = \sqrt{2} m_\Delta \frac{m_\Omega}{a}$, respectivamente. La escala M_R es predicha en la región intermedia $M_R > 10^{10} - 10^{11}$ GeV en la cual rompa $SU(2)_R$ y permanece la paridad-R exacta en el límite a bajas energías, simetría requerida para explicar el largo tiempo de vida del protón $\tau_p > 10^{33}$ años.

Por otro lado, el modelo L-R en una versión no supersimétrica contiene un número de escalares de Higgs cargados y doblemente cargados con masa pequeña del orden de M_R^2/M_{PL} [5], de interés en física al ser accesible a experimentos.

2.2.2. Modelo Pati-Salam (PS)

Este modelo supersimétrico posee características importantes de $SO(10)$, como la incorporación del mecanismo see-saw tipo I, permitiendo a su vez la conservación de paridad R como una simetría exacta a todos los órdenes a incorporar simetría Left-Right [21], [22], [23], aún más importante, representa una unificación parcial de quarks y leptones:

$$f = \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} \quad f^c = \begin{pmatrix} U^c \\ D^c \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u \\ \nu \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} d \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

El modelo PS está basado en el grupo de calibre $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$, [21], con patrón de rompimiento de simetría

$$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$$

$$M_c \downarrow \langle A \rangle$$

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$$

$$M_R \downarrow \langle \Delta_c \rangle, \langle \bar{\Delta}_c \rangle$$

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

Obsérvese que

$$SU(4)_C \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{(B-L)}$$

separando quarks y leptones como en el modelo L-R.

El conjunto de campos necesarios para que ocurra rompimiento de simetría en dos pasos, presentes en este modelo

$$\begin{aligned} A(15, 1, 1) &= A(8 + 1 + 3 + \bar{3}, 1, 1) \\ \Sigma(10, 3, 1) &= \Sigma(6 + 3 + 1, 3, 1) \quad \subset \quad \Delta(1, 3, 1) \\ &\quad \bar{\Sigma}(\bar{10}, 3, 1) \quad \subset \quad \bar{\Delta}(\bar{1}, 3, 1) \\ \Sigma_c(\bar{10}, 1, 3) &\subset \Delta_c(\bar{1}, 1, 3) \\ \bar{\Sigma}_c(10, 1, 3) &\subset \bar{\Delta}_c(1, 1, 3), \end{aligned}$$

se puede observar que Σ_c y $\bar{\Sigma}_c$, contienen los singletes de $SU(3)_C$ que adquieren el VEV en el modelo L-R y proveen masa a los neutrinos a través del mecanismo see-saw. También se acoplan con el campo $A(1, 1, 1)$ a través de términos del superpotencial como $Tr(\Sigma_c A \bar{\Sigma})$, siendo los responsables de la escala M_R .

Este conjunto de campos transforman bajo propiedades de paridad como

$$A \rightarrow -A, \quad \Sigma \rightarrow \Sigma_c, \quad \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}_c \quad .$$

El superpotencial más general para estos campos es

$$W = m Tr A^2 + M Tr (\Sigma \bar{\Sigma} + \Sigma_c \bar{\Sigma}_c) + Tr (\Sigma A \bar{\Sigma} - \Sigma_c A \bar{\Sigma}_c). \quad (2.11)$$

Los campos que adquieren VEV distinto de cero

$$\langle A \rangle = M_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ (en el espacio } SU(4)_C \text{),}$$

$$\langle \Delta_c \rangle = M_R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \bar{\Delta}_c \rangle = M_R \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (en el espacio } SU(2)_R \text{),}$$

incorporando de esta manera el mecanismo see-saw proveyendo masa a los neutrinos.

El espectro de masa obtenido [27]:

- $\sim M_c$: todos los estados en $\Sigma, \bar{\Sigma}, A$ (excepto los octetos de color $A(8, 1, 1)$), $\Sigma_c, \bar{\Sigma}_c$ (excepto para Δ_c y $\bar{\Delta}_c$).
- $\sim M_R$: los campos $\Delta_c(1, 1, 3)$ y $\bar{\Delta}_c(1, 1, 3)$ de $\Sigma_c, \bar{\Sigma}_c$ (excepto para las componentes $\delta_c^{++}, \bar{\delta}_c^{++}$), y una combinación de las componentes del singlete.
- $\sim M_R^2/M_c$: el octeto de color $A(8, 1, 1)$.
- $\sim \Lambda_{SUSY}$: supermultipletes $\delta_c^{++}, \bar{\delta}_c^{++}$ y una combinación de los singletes en Δ_c y $\bar{\Delta}_c$ (todos los compañeros supersimétricos de MSSM).

Además, las escalas a las que rompen $SU(4)_C$ y $SU(2)_R$ se encuentran en el rango $10^3 \text{ GeV} \leq M_R \leq 10^7 \text{ GeV}$ y $10^{12} \text{ GeV} \leq M_c \leq 10^{14} \text{ GeV}$ [27], respectivamente. En el caso de rompimiento en un paso, predice la escala de unificación lepton-quark [28], con $M_R \sim M_C \simeq 10^{10} \text{ GeV}$ y monopolos con masa $m_M \simeq 10^{11} \text{ GeV}$, accesible a los experimentos.

Este modelo plantea la existencia de supermultipletes doblemente cargados con masas en la región TeV, [5], [24] y como se observa en el espectro de masa, se tiene un octeto de supermultipletes de color, ligero con masas

$$\sim \frac{M_R^2}{M_c}$$

www.bdigital.ula.ve

2.3. Un modelo $SO(10)$ Mínimo GUT

A continuación se realizará una breve revisión del modelo mínimo $SO(10)$ supersimétrico estudiado en [10], por Bajc, Melfo, Senjanović y Vissani, de interés por presentar un estudio detallado del rompimiento de simetría y el espectro de partículas completo.

En este modelo $SO(10)$, son utilizados como conjunto mínimo de campos en el sector de Higgs, las representaciones **210**, **126**, $\bar{\mathbf{126}}$, **10**, para rompimiento del grupo del calibre hasta el MSSM.

Estos campos son descompuestos bajo el grupo $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ como sigue:

$$\begin{aligned}
H \equiv 10 &= (6, 1, 1) + (1, 2, 2) \\
\Psi \equiv 16 &= (4, 2, 1) + (\bar{4}, 1, 2) \\
\Phi \equiv 210 &= (15, 1, 1) + (1, 1, 1) + (15, 1, 3) + (15, 3, 1) \\
&\quad + (6, 2, 2) + (10, 2, 2) + (\bar{10}, 2, 2) \\
\Sigma \equiv 126 &= (10, 3, 1) + (\bar{10}, 1, 3) + (15, 2, 2) + (6, 1, 1) \\
\bar{\Sigma} \equiv \bar{126} &= (\bar{10}, 3, 1) + (10, 1, 3) + (15, 2, 2) + (6, 1, 1)
\end{aligned}$$

y los supercampos de materia son representaciones espinoriales 16-dimensional.

El superpotencial renormalizable más general que se puede escribir para estos campos es dado por

$$W_H = \frac{m_\Phi}{4!} \Phi^2 + \frac{m_\Sigma}{5!} \Sigma \bar{\Sigma} + \frac{\lambda}{4!} \Phi^3 + \frac{\eta}{4!} \Phi \Sigma \bar{\Sigma} + m_H H^2 + \frac{1}{4!} \Phi H (\alpha \Sigma + \bar{\alpha} \bar{\Sigma}) \quad (2.12)$$

Los campos que adquieren VEVs

$$\begin{aligned} a &= \langle \Phi(15, 1, 1) \rangle, \quad p = \langle \Phi(1, 1, 1) \rangle, \quad w = \langle \Phi(15, 1, 3) \rangle \\ \sigma &= \langle \Sigma(10, 1, 3) \rangle, \quad \bar{\sigma} = \langle \bar{\Sigma}(\bar{10}, 1, 3) \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

El superpotencial escrito en función de los VEVs

$$\begin{aligned} W_H &= m_\Phi (p^2 + 3a^2 + 6w^2) + 2\lambda (a^3 + 3pw^2 + 6aw^2) \\ &+ m_\Sigma \sigma \bar{\sigma} + \eta \sigma \bar{\sigma} (p + 3a - 6w) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Los patrones de rompimiento de simetría descritos a continuación, discutidos en detalle en [10], están determinados a partir de las soluciones a las ecuaciones de los términos F-derivados del superpotencial (2.14):

- $p = a = w = \sigma = 0$ e preserve va el grupo de calibre $SO(10)$.
- $p = a = -w = -\frac{m_\Phi}{3\lambda}$; $\sigma = 0$, $SO(10) \rightarrow SU(5) \times U(1)$
- $p = a = -w = \frac{-m_\Sigma}{10\eta}$; $\sigma \bar{\sigma} = m_\Sigma (10\eta m_\Phi - 3\lambda m_\Sigma) / (50\eta^3)$, $SO(10) \rightarrow SU(5)$.
- $p = w = \sigma = 0$; $a = -\frac{m_\Phi}{\lambda}$, $SO(10) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$, simetría L-R.
- $p = a = w = -\frac{m_\Phi}{3\lambda}$; $\sigma = 0$, $SO(10) \rightarrow SU(5) \times U(1)$,
- $p = 3\frac{m_\Phi}{\lambda}$; $a = -\frac{2m_\Phi}{\lambda}$; $w = \pm \frac{im_\Phi}{\lambda}$; $\sigma = 0$, $SO(10) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_R \times U(1)_{B-L}$.
- $p = -\frac{m_\Phi}{\lambda} \frac{x(1-5x^2)}{(1-x)^2}$; $a = -\frac{m_\Phi}{\lambda} \frac{(1-2x-x^2)}{(1-x)}$; $w = -\frac{m_\Phi}{\lambda} x$; $\sigma \bar{\sigma} = \frac{2m_\Phi^2}{\eta\lambda} \frac{x(1-3x)(1+x^2)}{(1-x)^2}$

$$-8x^3 + 15x^2 - 14x + 3 = (x-1)^2 \frac{\lambda m_\Sigma}{\eta m_\Phi},$$

$SO(10) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, es el Modelo estándar mínimo, para x genérico.

El espectro de masa para el último patrón de simetría, calculados a través del método dado a conocer en [9], así como sus matrices de masas son determinados y presentados en detalle en [10] por Bajc, Melfo, Senjanović y Vissani, donde además verificaron que no existen escalas intermedias en esta teoría, con el conjunto de campos elegidos.

Es conocido que los neutrinos son masivos, y que los parámetros que corresponden a las oscilaciones de neutrinos atmosféricos y solares son: $\Delta m_A^2 \simeq (2,5 \pm 0,6)10^{-3}eV^2$ y $\Delta m_\odot^2 \simeq (8,2 \pm 0,6)10^{-5}eV^2$.

Se ha estudiado en detalle este modelo ([29], [30], entre otros) y se ha demostrado que es necesario incluir la representación 120 para corregir la matriz de masa de los neutrinos y disminuir el valor $\Delta m_A^2/\Delta m_\odot^2$, que conduce a una predicción incorrecta si el modelo minimal no contiene 120, [29].

Este modelo minimal sin incluir 120 posee en total 26 parámetros reales y al incluir 120 aumenta a 39, entonces una vez que es necesario incluir 120, ya no es mínimo. Se pueden considerar igualmente interesantes modelos con 54 y 45 en lugar de 210.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 3

Un Modelo no-mínimo de $SO(10)$

Teniendo presente las características que posee una Teoría $SO(10)$ para ser considerada una Teoría Gran Unificación (GUT), en el presente capítulo se propone un Modelo $SO(10)$ considerando que las representaciones **10**, **54**, **45**, **120**, **126**, $\overline{126}$ son el conjunto de representaciones de Higgs presente en la teoría. También se obtendrán los patrones de rompiendo de simetría y el correspondiente espectro de partículas, siendo necesario para ello una descomposición completa bajo el grupo del modelo estándar de los campos considerados, presentada en detalle en el apéndice A.

3.1. Campos

El conjunto mínimo de representaciones de Higgs requerido para romper el grupo de calibre $SO(10)$ con mecanismo see-saw hasta MSSM:

$$S = \mathbf{54}, A = \mathbf{45}, \Sigma = \mathbf{126}, \overline{\Sigma} = \overline{\mathbf{126}}$$

Las representaciones presentes en la teoría se descomponen bajo el grupo de calibre $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ como

$$\begin{aligned} H = \mathbf{10} &= (6, 1, 1) + (1, 2, 2), \\ S = \mathbf{54} &= (1, 1, 1) + (20, 1, 1) + (1, 3, 3) + (6, 2, 2), \\ A = \mathbf{45} &= (15, 1, 1) + (1, 3, 1) + (1, 1, 3) + (6, 2, 2), \\ C = \mathbf{120} &= (1, 2, 2) + (15, 2, 2) + (6, 1, 3) + (6, 3, 1) + (10, 1, 1) + (\overline{10}, 1, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma &= \mathbf{126} = (10, 3, 1) + (\overline{10}, 1, 3) + (15, 2, 2) + (6, 1, 1), \\ \overline{\Sigma} &= \overline{\mathbf{126}} = (\overline{10}, 3, 1) + (10, 1, 3) + (15, 2, 2) + (6, 1, 1),\end{aligned}$$

Para descomposición de estas representaciones en el Modelo Estandar, ver Apéndice A.

Observése que el campo Σ contiene los tripletes

$$\overline{\Delta}(1, 3, 1), \overline{\Delta}_c(\overline{1}, 1, 3),$$

el campo $\overline{\Sigma}$ contiene

$$\Delta(1, 3, 1), \Delta_c(1, 1, 3),$$

y el campo A contiene

$$\Omega(1, 3, 1), \Omega_c(1, 1, 3)$$

todos presentes en el modelo L-R revisado en la sección 2.2.1. Los tripletes Δ y Δ_c logran adquirir un VEV debido a la existencia de Ω y Ω_c .

Nótese que $(1, 1, 1)_S$, $(15, 1, 1)_A$, $(1, 3, 1)_A$ da los dos primeros pasos de rompimiento de simetría hasta el grupo de simetría de PS ó L-R. El campo S rompe hasta PS. $(15, 1, 1)_A$ es equivalente al que se necesitaba para romper PS, como se dijo en la sección 2.2.1.

Las representaciones Σ y $\overline{\Sigma}$ son necesarias para tener mecanismo see-saw renormalizable y por lo tanto paridad-R exacta a todas las escalas. Son necesarios para asegurar que los términos D sean cero, debido a que contiene los tripletes left $\overline{\Delta}$, Δ y los tripletes right $\overline{\Delta}_c$, Δ_c .

Además, los campos Σ y $\overline{\Sigma}$, junto con S deben estar presentes en la teoría, ya que sólo términos como $(\Sigma^2 S)$ ó $(\overline{\Sigma}^2 S)$ en el superpotencial no producen cualquier interacción cuando $(10, 1, 3)_\Sigma$, $(\overline{10}, 1, 3)_{\overline{\Sigma}}$ y $(1, 1, 1)_S$ adquieren un VEV.

Por otro lado, recordemos que la paridad-R se puede escribir como

$$R = (-1)^{3(B-L)+2S} \equiv M(-1)^{2S},$$

tal que bajo esta simetría de calibre

$$\begin{aligned}p &\xrightarrow{R} p, & \tilde{p} &\xrightarrow{R} -\tilde{p} \\ 16 &\xrightarrow{M} -16, & 10 &\xrightarrow{M} 10\end{aligned}$$

donde p es entendido como partículas y \tilde{p} como superpartículas del modelo estándar. Las representaciones **54**, **45**, **120**, **126**, **$\overline{126}$** construidas a partir de **10**, bajo M , son pares.

El superpotencial renormalizable más general para $H, S, A, C, \Sigma, \bar{\Sigma}$ es dado por

$$\begin{aligned}
W = & \frac{m_S}{2} \text{Tr } S^2 + \frac{\lambda_S}{3} \text{Tr } S^3 + \frac{m_A}{2} \text{Tr } A^2 + \lambda_A \text{Tr } A^2 S \\
& + \frac{m_\Sigma}{5!} \Sigma \bar{\Sigma} + \frac{\eta_S}{4!} \Sigma^2 S + \frac{\bar{\eta}_S}{4!} \bar{\Sigma}^2 S + \frac{\eta_A}{4!} \Sigma \bar{\Sigma} A \\
& + \frac{m_H}{2!} H^2 + \frac{m_C}{2!} C^2 + \frac{\alpha}{3!} H C A + \frac{\eta_C}{3!} S C^2 \\
& + \frac{\eta_H}{2!} H^2 S + \frac{\beta_1}{5!} A C \Sigma + \frac{\beta_2}{5!} A C \bar{\Sigma}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2. Patrones de Rompimiento de Simetría

Los campos que adquieren VEVs distinto de cero son

$$\begin{aligned}
s = \langle (1, 1, 1)_S \rangle, \quad a = \langle (15, 1, 1)_A \rangle, \quad b = \langle (1, 1, 3)_A \rangle, \\
\sigma = \langle (\bar{10}, 1, 3)_\Sigma \rangle, \quad \bar{\sigma} = \langle (10, 1, \bar{3})_{\bar{\Sigma}} \rangle
\end{aligned} \tag{3.2}$$

El superpotencial escrito en función de estos VEVs queda como

$$\begin{aligned}
W = & 30m_S s^2 + 20\lambda_S s^3 + m_A(3a^2 + 2b^2) \\
& - 12\lambda_A(a^2 - b^2)s + m_\Sigma \sigma \bar{\sigma} + \eta_A \sigma \bar{\sigma}(3a - 2b)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Los términos F quedan determinados por las ecuaciones

$$F_s = m_S s + \lambda_S s^2 - \frac{1}{5} \lambda_A (a^2 - b^2) = 0 \tag{3.4}$$

$$F_a = 2m_A a - 8\lambda_A a s + \eta_A \sigma \bar{\sigma} = 0 \tag{3.5}$$

$$F_b = m_A b + 6\lambda_A b s - \frac{1}{2} \eta_A \sigma \bar{\sigma} = 0 \tag{3.6}$$

$$F_\sigma = m_\Sigma \bar{\sigma} + \eta_A \bar{\sigma}(3a - 2b) = 0 \tag{3.7}$$

$$F_{\bar{\sigma}} = m_\Sigma \sigma + \eta_A \sigma(3a - 2b) = 0 \tag{3.8}$$

En el presente trabajo se hallan las soluciones a estas ecuaciones, soluciones que determinan los patrones de rompimiento de simetría de este modelo.

Los patrones de rompimiento de simetría resultantes son:

I.- $s = 0, a = 0, b = 0, \sigma^2 = 0;$

II.- $s = -\frac{m_s}{\lambda_S}, a = 0, b = 0, \sigma^2 = 0;$

III.- $s = \frac{m_A}{4\lambda_A}, a = \frac{\sqrt{5}}{2\lambda_A} \sqrt{m_A(m_S + m_A \frac{\lambda_S}{4\lambda_A})}, b = 0, \sigma^2 = 0;$

IV.- $s = -\frac{m_A}{6\lambda_A}, a = 0, b = \sqrt{\frac{5}{6}} \frac{1}{\lambda_A} \sqrt{m_A(m_S - m_A \frac{\lambda_S}{6\lambda_A})}, \sigma^2 = 0;$

V.- $s = 0, a = -\frac{m_\Sigma}{5\eta_A}, b = \frac{m_\Sigma}{5\eta_A}, \sigma^2 = \frac{2}{5} \frac{m_A m_\Sigma}{\eta_A^2};$

VI.- Rompimiento de simetría completo hasta $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$s = \frac{m_A}{2\lambda_A}(y-1), a = \frac{m_\Sigma}{\eta_A} \frac{(2-3y)}{5y}, b = \frac{m_\Sigma}{\eta_A} \frac{(3-2y)}{5y}, \sigma^2 = \frac{2}{5} \frac{m_A m_\Sigma}{\eta_A^2} \frac{(3y-2)(3-2y)}{y}$$

$$y^2 \frac{(r+y-1)}{(y+1)} = q, r = \frac{2m_S \lambda_A}{m_A \lambda_S}, q = \frac{4}{25} \frac{\lambda_A^2 \lambda_A m_\Sigma^2}{\eta_A^2 \lambda_S m_A^2} \quad (3.9)$$

con y genérico.

Con la rotación VI se pueden obtener dos patrones de rompimiento de simetría (ver Apéndice B) para llegar al grupo de calibre del modelo estándar.

Para realizar el cálculo del espectro de partículas se ha utilizado el método presentado en [9]. A continuación se presentarán las convenciones utilizadas para ello.

3.3. Cálculo del espectro de partículas

Para calcular el espectro de partículas para este modelo no mínimo $SO(10)$ se hace necesario considerar la descomposición detallada de cada uno de los campos. A partir de éstas y sus acoplamientos en los términos F con los campos que toman VEV, se pueden conocer las matrices de masas de las partículas, necesarias para determinar las escalas de rompimiento de simetría.

3.3.1. Convenciones

El conjunto mínimo de representaciones de Higgs para romper el grupo de calibre $SO(10)$ hasta MSSM, requerido es:

■ Campo H en la representación **10**

- Tensor de un índice: $H_i = H_\alpha + H_a$; $\alpha = 1 \dots 4$; $a = 5 \dots 10$.
- Descompuesto bajo $(SU(4)_C, SU(2)_L, SU(2)_R)$ como $H = (6, 1, 1) + (1, 2, 2)$.
- Descompuesto bajo el Modelo Estándar como $H = (3 + \bar{3}, 1, 1) + (1, 2, 2)$.

■ Campo S en la representación **54**

- Tensor de dos índices: $S_{ij} = S_{\alpha\beta} + S_{\alpha a} + S_{ab}$; $\alpha, \beta = 1 \dots 4$; $a, b = 5 \dots 10$.
- Descompuesto bajo $(SU(4)_C, SU(2)_L, SU(2)_R)$ como $S = (20, 1, 1) + (6, 2, 2) + (1, 3, 3) + (1, 1, 1)$.
- Descompuesto bajo el Modelo Estándar como $S = (6 + \bar{6} + 8, 1, 1) + (3 + \bar{3}, 2, 2) + (1, 3, 3) + (1, 1, 1)$.
- Simétrico, sin traza.

■ El campo A en la representación **15**

- Tensor de dos índices: $A_{i,j} = A_{\alpha\beta} + A_{\alpha a} + A_{ab}$; $\alpha, \beta = 1 \dots 4$; $a, b = 5 \dots 10$.
- Descompuesto bajo $(SU(4)_C, SU(2)_L, SU(2)_R)$ como $A = (15, 1, 1) + (6, 2, 2) + (1, 3, 1) + (1, 1, 3)$.
- Descompuesto bajo el Modelo Estándar como $A = (3 + \bar{3} + 8 + 1, 1, 1) + (3 + \bar{3}, 2, 2) + (1, 3, 1) + (1, 1, 3)$.
- Antisimétrico.

■ El campo C en la representación **120**

- Tensor de tres índices:
 $C_{ijk} = C_{abc} + C_{\alpha\beta a} + C_{\alpha ab} + C_{\alpha\beta\gamma}$; $\alpha, \beta = 1 \dots 4$; $a, b = 5 \dots 10$.
- Descompuesto bajo $(SU(4)_C, SU(2)_L, SU(2)_R)$ como $C = (1, 2, 2) + (15, 2, 2) + (6, 1, 3) + (6, 3, 1) + (10, 1, 1) + (\bar{10}, 1, 1)$.
- Descompuesto bajo el Modelo Estándar como $C = (1, 2, 2) + (8 + 3 + \bar{3} + 1', 2, 2) + (3 + \bar{3}, 1, 3) + (3 + \bar{3}, 3, 1) + (1 + 6 + 3, 1, 1) + (1 + \bar{6} + \bar{3}, 1, 1)$.

- Antisimétrico.
- El campo Σ en la representación **126**
 - Tensor de cinco índices:

$$\Sigma_{ijklm} = \Sigma_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} + \Sigma_{\alpha\beta\gamma\delta a} + \Sigma_{\alpha\beta\gamma ab} ; \quad \alpha, \beta = 1 \dots 4; \quad a, b = 5 \dots 10.$$
 - Descompuesto bajo $(SU(4)_C, SU(2)_L, SU(2)_R)$ como

$$\Sigma = (6, 1, 1) + (15, 2, 2) + (\overline{10}, 1, 3) + (10, 3, 1).$$
 - Descompuesto bajo el Modelo Estándar como

$$\Sigma = (3 + \overline{3}, 1, 1) + (8 + 3 + \overline{3} + 1, 2, 2) + (1 + \overline{6} + \overline{3}, 1, 3) + (1 + 3 + 6, 3, 1).$$
 - Antisimétrico, autodual: $\overline{\Sigma}_{ijklm} = -\frac{i}{5!} \epsilon_{ijklmnopqr} \overline{\Sigma}_{nopqr}.$
- El campo $\overline{\Sigma}$ en la representación $\overline{126}$
 - Tensor de cinco índices:

$$\overline{\Sigma}_{ijklm} = \overline{\Sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} + \overline{\Sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta a} + \overline{\Sigma}_{\alpha\beta\gamma ab} ; \quad \alpha, \beta = 1 \dots 4; \quad a, b = 5 \dots 10.$$
 - Descompuesto bajo $(SU(4)_C, SU(2)_L, SU(2)_R)$ como

$$\overline{\Sigma} = (\overline{3}, 1, 1) + (15, 2, 2) + (\overline{10}, 3, 1) + (10, 1, 3).$$
 - Descompuesto bajo el Modelo Estándar como

$$\overline{\Sigma} = (3 + \overline{3}, 1, 1) + (8 + 3 + \overline{3} + 1, 2, 2) + (1 + \overline{6} + \overline{3}, 3, 1) + (1 + 3 + 6, 1, 3).$$
 - Antisimétrico, antiautodual: $\overline{\Sigma}_{ijklm} = -\frac{i}{5!} \epsilon_{ijklmnopqr} \overline{\Sigma}_{nopqr}.$

<i>Campo</i>	<i>Rep.</i>	<i>Tensor</i>	G_{422}	MS
H	10	$H_i = H_\alpha + H_a$	$(6, 1, 1) + (1, 2, 2)$	$(3 + \bar{3}, 1, 1) + (1, 2, 2)$
S	54	$S_{ij} = S_{\alpha\beta}$ $+S_{\alpha a}$ $+S_{ab}$ <i>simétrico, sin traza.</i>	$(20, 1, 1)$ $+(6, 2, 2)$ $+(1, 3, 3) + (1, 1, 1)$	$(6 + \bar{6} + 8, 1, 1)$ $+(3 + \bar{3}, 2, 2)$ $+(1, 3, 3) + (1, 1, 1)$
A	45	$A_{ij} = A_{\alpha\beta}$ $+A_{\alpha a}$ $+A_{ab}$ <i>antisimétrico.</i>	$(15, 1, 1)$ $+(6, 2, 2)$ $+(1, 3, 1) + (1, 1, 3)$	$(3 + \bar{3} + 8 + 1, 1, 1)$ $+(3 + \bar{3}, 2, 2)$ $+(1, 3, 1) + (1, 1, 3)$
C	120	$C_{ijk} = C_{abc}$ $+C_{\alpha\beta a}$ $+C_{\alpha ab}$ $+C_{\alpha\beta\gamma}$ <i>antisimétrico.</i>	$(1, 2, 2)$ $+(15, 2, 2)$ $+(6, 1, 3) + (6, 3, 1)$ $+(10, 1, 1)$ $+(\bar{10}, 1, 1)$	$(1, 2, 2)$ $+(8 + 3 + \bar{3} + 1', 2, 2)$ $+(3 + \bar{3}, 1, 3) + (3 + \bar{3}, 3, 1)$ $+(1 + 6 + 3, 1, 1)$ $+(1 + \bar{6} + \bar{3}, 1, 1)$
Σ	126	$\Sigma_{ijklm} = \Sigma_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}$ $+\Sigma_{\alpha\beta\gamma\delta a}$ $+\Sigma_{\alpha\beta\gamma ab}$ <i>antisimétrico autodual</i>	$(6, 1, 1)$ $+(15, 2, 2)$ $+(\bar{10}, 1, 3)$ $+(10, 3, 1)$	$(3 + \bar{3}, 1, 1)$ $+(8 + 3 + \bar{3} + 1, 2, 2)$ $+(1 + \bar{6} + \bar{3}, 1, 3)$ $+(1 + 3 + 6, 3, 1)$
$\bar{\Sigma}$	$\bar{126}$	$\bar{\Sigma}_{ijklm} = \bar{\Sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}$ $+\bar{\Sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta a}$ $+\bar{\Sigma}_{\alpha\beta\gamma ab}$ <i>antisimétrico antiautodual</i>	$(6, 1, 1)$ $+(15, 2, 2)$ $+(\bar{10}, 3, 1)$ $+(10, 1, 3)$	$(3 + \bar{3}, 1, 1)$ $+(8 + 3 + \bar{3} + 1, 2, 2)$ $+(1 + \bar{6} + \bar{3}, 3, 1)$ $+(1 + 3 + 6, 1, 3)$

Tabla I: Descripción de los campos requeridos para este Modelo $SO(10)$ supersimétrico no mínimo. Los índices: $i, j, \dots = 1 \dots 10$, índices de $SO(10)$; $a, b, \dots = 5 \dots 10$, denota índices de $SO(6)$ y $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \dots = 1 \dots 4$, denotan índices de $SO(4)$. Las condiciones de autodualidad de Σ_{ijklm} y antidualidad de $\bar{\Sigma}_{ijklm}$, están dadas por: $\Sigma_{ijklm} = \frac{i}{5!} \epsilon_{ijklmnopqr} \Sigma_{nopqr}$ y $\bar{\Sigma}_{ijklm} = -\frac{i}{5!} \epsilon_{ijklmnopqr} \bar{\Sigma}_{nopqr}$.

3.3.2. Rompimiento de simetría

El superpotencial renormalizable más general para los campos H , S , A , C , Σ , $\bar{\Sigma}$ es dado por

$$\begin{aligned}
W = & \frac{m_S}{2} S_{ij} S_{ji} + \frac{\lambda_S}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} + \frac{m_A}{2} A_{ij} A_{ji} + \lambda_A A_{ij} A_{jk} S_{ki} \\
& + \frac{m_\Sigma}{5!} \Sigma_{ijklm} \bar{\Sigma}_{ijklm} + \frac{\eta_S}{4!} \Sigma_{klmni} \Sigma_{klmnj} S_{ij} \\
& + \frac{\bar{\eta}_S}{4!} \bar{\Sigma}_{klmni} \bar{\Sigma}_{klmnj} S_{ij} + \frac{\eta_A}{4!} \Sigma_{klmni} \bar{\Sigma}_{klmnj} A_{ij} \\
& + \frac{m_H}{2!} H_i H_i + \frac{m_C}{2!} C_{ijk} C_{ijk} + \frac{\alpha}{3!} H_i C_{ikl} A_{kl} + \frac{\eta_C}{3!} S_{ij} C_{ikl} C_{jkl} \\
& + \frac{\eta_H}{2!} H_i H_j S_{ij} + \frac{\beta_1}{5!} A_{ij} C_{klm} \Sigma_{ijklm} + \frac{\beta_2}{5!} A_{ij} C_{klm} \bar{\Sigma}_{ijklm} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Los VEVs que adquieren los campos están dados por

- $s = \langle (1, 1, 1)_S \rangle :$

$$\langle S \rangle = i^g (3, 3, 3, -2, -2, 2, -2, -2, -2) s;$$

- $a = \langle (15, 1, 1)_A \rangle :$

$$i a = \langle A_{56} \rangle = \langle A_{67} \rangle = \langle A_{78} \rangle = \langle A_{910} \rangle;$$

- $b = \langle (1, 1, 3)_A \rangle :$

$$i b = \langle A_{12} \rangle = \langle A_{34} \rangle;$$

- $\sigma = \langle (\bar{10}, 1, 3)_\Sigma \rangle :$

$$\langle \Sigma_{c+1, d+3, e+5, f+7, g+9} \rangle = \frac{1}{5^{5/2}} (i)^{(-c-d+e+f+g)} \sigma;$$

- $\bar{\sigma} = \langle (10, 1, 3)_{\bar{\Sigma}} \rangle :$

$$\langle \bar{\Sigma}_{c+1, d+3, e+5, f+7, g+9} \rangle = \frac{1}{5^{5/2}} (-i)^{(-c-d+e+f+g)} \bar{\sigma}$$

donde $c, d, e, f, g = 0, 1$.

A partir del superpotencial (3.10) y conociendo los campos que toman VEVs, se obtienen los siguientes términos F

$$F_{H_i} = m_H H_i + \eta_H H_j \langle S_{ij} \rangle + \frac{\alpha}{3!} C_{ikl} \langle A_{kl} \rangle \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} F_{S_{ij}} &= 2 \frac{m_S}{2} 2S_{ij} + 3 \frac{\lambda_S}{3} 2 \{S_{ik} \langle S_{kj} \rangle + \langle S_{ik} \rangle S_{kj}\}_{S,ST} \\ &+ 2\lambda_A \{A_{ik} \langle A_{kj} \rangle + \langle A_{ik} \rangle A_{kj}\}_{S,ST} \\ &+ 2 \frac{\eta_S}{4!} 2 \{\Sigma_{lmnoi} \langle \Sigma_{lmnoj} \rangle + \langle \Sigma_{lmnoi} \rangle \Sigma_{lmnoj}\}_{S,ST} \\ &+ 2 \frac{\bar{\eta}_S}{4!} 2 \{\bar{\Sigma}_{lmnoi} \langle \bar{\Sigma}_{lmnoj} \rangle + \langle \bar{\Sigma}_{lmnoi} \rangle \bar{\Sigma}_{lmnoj}\}_{S,ST} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} F_{A_{ij}} &= 2 \frac{m_A}{2} 2A_{ij} + 2\lambda_A 2 \{A_{jk} \langle S_{ki} \rangle + \langle A_{jk} \rangle S_{ki}\}_{AS} \\ &+ \frac{\eta_A}{4!} 2 \{\Sigma_{lmnoi} \langle \bar{\Sigma}_{lmnoj} \rangle + \langle \Sigma_{lmnoi} \rangle \bar{\Sigma}_{lmnoj}\}_{AS} \\ &+ 2! \frac{\beta_1}{5!} \{C_{klm} \langle \Sigma_{ijklm} \rangle\}_{AS} + 2! \frac{\beta_2}{5!} \{C_{klm} \langle \bar{\Sigma}_{ijklm} \rangle\}_{AS} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} F_{C_{ijk}} &= 3! \frac{m_C}{2!} 2 C_{ijk} + 2 \frac{\eta_C}{3!} 3! \{(S_{il}) C_{ljk}\}_{AS} + 3! \frac{\alpha}{3!} \{H_i \langle A_{jk} \rangle\}_{AS} \\ &+ 3! \frac{\beta_1}{5!} \{\langle A_{lm} \rangle \Sigma_{lmijk} + A_{lm} \langle \Sigma_{lmijk} \rangle\}_{AS} \\ &+ 3! \frac{\beta_2}{5!} \{\langle A_{lm} \rangle \bar{\Sigma}_{lmijk} + A_{lm} \langle \bar{\Sigma}_{lmijk} \rangle\}_{AS} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} F_{\Sigma_{ijklm}} &= \frac{5!}{5!} m_\Sigma \bar{\Sigma}_{ijklm} + 2 \frac{\eta_S}{5!} 5! \{\Sigma_{ijkln} \langle S_{mn} \rangle + \langle \Sigma_{ijkln} \rangle S_{mn}\}_{AS,AD} \\ &+ \frac{\eta_A}{4!} 5! \{\bar{\Sigma}_{ijkln} \langle A_{mn} \rangle + \langle \bar{\Sigma}_{ijkln} \rangle A_{mn}\}_{AS,AD} \\ &+ 5! \frac{\beta_1}{5!} \{\langle A_{ij} \rangle C_{klm}\}_{AS,AD} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\Sigma}_{ijklm}} &= \frac{5!}{5!} m_\Sigma \Sigma_{ijklm} + 2 \frac{\bar{\eta}_S}{4!} 5! \{\bar{\Sigma}_{ijkln} \langle S_{mn} \rangle + \langle \bar{\Sigma}_{ijkln} \rangle S_{mn}\}_{AS,AAD} \\ &+ \frac{\eta_A}{4!} 5! \{\Sigma_{ijkln} \langle A_{mn} \rangle + \langle \Sigma_{ijkln} \rangle A_{mn}\}_{AS,AAD} \\ &+ 5! \frac{\beta_2}{5!} \{\langle A_{ij} \rangle C_{klm}\}_{AS,AAD} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Las contribuciones a los términos F son presentadas en las Tablas: II→XI. Para facilitar su presentación se escribirán como

$$F_{H_i} = m_H H_i + \eta_H (\mathcal{H}_1)_i + \frac{\alpha}{3!} (\mathcal{H}_2)_i \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} F_{S_{ij}} &= 2\frac{m_S}{2} 2S_{ij} + 3\frac{\lambda_S}{3} 2 * 2(\mathcal{S}_1)_{ij} + 2\lambda_{A2} (\mathcal{S}_2)_{ij} + 2\frac{\eta_S}{4!} 2(\mathcal{S}_3)_{ij} \\ &+ 2\frac{\bar{\eta}_S}{4!} 2(\mathcal{S}_4)_{ij} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} F_{A_{ij}} &= 2\frac{m_A}{2} 2A_{ji} + 2\lambda_{A2} \{(\mathcal{A}_1)_{ij} + (\mathcal{A}_2)_{ij}\} + \frac{\eta_A}{4!} 2 \{(\mathcal{A}_3)_{ij} + (\mathcal{A}_4)_{ij}\} \\ &+ 2! \frac{\beta_1}{5!} (\mathcal{A}_5)_{ij} + 2! \frac{\beta_2}{5!} (\mathcal{A}_6)_{ij} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} F_{C_{ijk}} &= 3! \frac{m_C}{2!} 2 C_{ijk} + 2\frac{\eta_C}{3!} 3! \{(\mathcal{C}_1)_{ijk}\} + 3! \frac{\eta}{4!} \{(\mathcal{C}_2)_{ijk}\} \\ &+ 3! \frac{\beta_1}{5!} \{(\mathcal{C}_3)_{ijk} + (\mathcal{C}_4)_{ijk}\} + 3! \frac{\beta_2}{5!} \{(\mathcal{C}_5)_{ijk} + (\mathcal{C}_6)_{ijk}\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} F_{\Sigma_{ijklm}} &= \frac{5!}{5!} m_{\Sigma} \bar{\Sigma}_{ijklm} + 2\frac{\eta_S}{5!} 5! \{(\mathcal{X}_1)_{ijklm} + (\mathcal{X}_2)_{ijklm}\} \\ &+ \frac{\eta_A}{4!} 5! \{(\mathcal{X}_3)_{ijklm} + (\mathcal{X}_4)_{ijklm}\} + 5! \frac{\beta_1}{5!} \{(\mathcal{X}_5)_{ijklm}\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\Sigma}_{ijklm}} &= \frac{5!}{5!} m_{\Sigma} \Sigma_{ijklm} + 2\frac{\bar{\eta}_S}{4!} 5! \{(\mathcal{J}_1)_{ijklm} + (\mathcal{J}_2)_{ijklm}\} \\ &+ \frac{\eta_A}{4!} 5! \{(\mathcal{J}_2)_{ijklm} + (\mathcal{J}_3)_{ijklm}\} + 5! \frac{\beta_2}{5!} \{(\mathcal{J}_5)_{ijklm}\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Donde

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_1)_i &= H_j \langle S_{ij} \rangle \\ (\mathcal{H}_2)_i &= C_{ikl} \langle A_{kl} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_1)_{ij} &= \left\{ \frac{1}{2} (S_{ik} \langle S_{kj} \rangle + \langle S_{ik} \rangle S_{kj}) \right\} - \frac{\delta_{ij}}{10} \{traza\}, \\
(\mathcal{S}_2)_{ij} &= \left\{ \frac{1}{2} (A_{ik} \langle A_{kj} \rangle + \langle A_{ik} \rangle A_{kj}) \right\} - \frac{\delta_{ij}}{10} \{traza\}, \\
(\mathcal{S}_3)_{ij} &= \left\{ \frac{1}{4} (\Sigma_{lmnoi} \langle \Sigma_{lmnoj} \rangle + \Sigma_{lmnoj} \langle \Sigma_{lmnoi} \rangle + \{simetrico\}) \right\} - \frac{\delta_{ij}}{10} \{traza\}, \\
(\mathcal{S}_4)_{ij} &= \left\{ \frac{1}{4} (\bar{\Sigma}_{lmnoi} \langle \bar{\Sigma}_{lmnoj} \rangle + \bar{\Sigma}_{lmnoj} \langle \bar{\Sigma}_{lmnoi} \rangle + \{simetrico\}) \right\} - \frac{\delta_{ij}}{10} \{traza\}.
\end{aligned}$$

$$(\mathcal{A}_1)_{ij} = \frac{1}{2} \{A_{jk} \langle S_{ki} \rangle + \langle S_{jk} \rangle A_{kji}\}$$

$$(\mathcal{A}_2)_{ij} = \frac{1}{2} \{ \langle A_{jk} \rangle S_{ki} + S_{jk} \langle A_{ki} \rangle \}$$

$$(\mathcal{A}_3)_{ij} = \frac{1}{2} \{ \Sigma_{lmnoi} \langle \bar{\Sigma}_{lmnoj} \rangle - \Sigma_{lmnoj} \langle \bar{\Sigma}_{lmnoi} \rangle \}$$

$$(\mathcal{A}_4)_{ij} = \frac{1}{2} \{ \langle \Sigma_{lmnoi} \rangle \bar{\Sigma}_{lmnoj} - \langle \bar{\Sigma}_{lmnoj} \rangle \Sigma_{lmnoi} \}$$

$$(\mathcal{A}_5)_{ij} = \{ C_{klm} \langle \Sigma_{ijkl} \rangle \}$$

$$(\mathcal{A}_6)_{ij} = \{ C_{klm} \langle \bar{\Sigma}_{ijkl} \rangle \}$$

$$(\mathcal{C}_1)_{ijk} = \frac{1}{3} \{ \langle S_{il} \rangle C_{ljk} + \langle S_{kl} \rangle C_{lij} + \langle S_{jl} \rangle C_{lki} \}$$

$$(\mathcal{C}_2)_{ijk} = \frac{1}{3} \{ H_i \langle A_{jk} \rangle + H_K \langle A_{ij} \rangle + H_j \langle A_{ki} \rangle \}$$

$$(\mathcal{C}_3)_{ijk} = \{ \langle A_{lm} \rangle \Sigma_{lmijk} \}$$

$$(\mathcal{C}_4)_{ijk} = \{ A_{lm} \langle \Sigma_{lmijk} \rangle \}$$

$$(\mathcal{C}_5)_{ijk} = \{ \langle A_{lm} \rangle \bar{\Sigma}_{lmijk} \}$$

$$(\mathcal{C}_6)_{ijk} = \{ A_{lm} \langle \bar{\Sigma}_{lmijk} \rangle \}$$

$$(\mathcal{X}_1)_{ijklm} = \left\{ S_{ip} \langle \Sigma_{pjklm} \rangle - \frac{i}{4!} \epsilon_{ijklmoprs} S_{ot} \langle \Sigma_{tpqrs} \rangle \right\}$$

$$(\mathcal{X}_2)_{ijklm} = \left\{ \langle S_{ip} \rangle \Sigma_{pjklm} - \frac{i}{4!} \epsilon_{ijklmoprs} \langle S_{ot} \rangle \Sigma_{tpqrs} \right\}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{X}_3)_{ijklm} &= \left\{ A_{ip} \langle \bar{\Sigma}_{pjklm} \rangle - \frac{i}{4!} \epsilon_{ijklmopqrs} A_{ot} \langle \bar{\Sigma}_{tpqrs} \rangle \right\} \\
(\mathcal{X}_4)_{ijklm} &= \left\{ \langle A_{ip} \rangle \bar{\Sigma}_{pjklm} - \frac{i}{4!} \epsilon_{ijklmopqrs} \langle A_{ot} \rangle \bar{\Sigma}_{tpqrs} \right\} \\
(\mathcal{X}_5)_{ijklm} &= \left\{ \langle A_{ij} \rangle C_{klm} - \frac{i}{4!} \epsilon_{ijklmopqrs} \langle A_{op} \rangle C_{qrs} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J}_1)_{ijklm} &= \left\{ S_{ip} \langle \bar{\Sigma}_{pjklm} \rangle + \frac{i}{4!} \epsilon_{ijklmopqrs} S_{ot} \langle \bar{\Sigma}_{tpqrs} \rangle \right\} \\
(\mathcal{J}_2)_{ijklm} &= \left\{ \langle S_{ip} \rangle \bar{\Sigma}_{pjklm} + \frac{i}{4!} \epsilon_{ijklmopqrs} \langle S_{ot} \rangle \bar{\Sigma}_{tpqrs} \right\} \\
(\mathcal{J}_3)_{ijklm} &= \left\{ A_{pi} \langle \Sigma_{pjklm} \rangle + \frac{i}{4!} \epsilon_{ijklmopqrs} A_{to} \langle \Sigma_{tpqrs} \rangle \right\} \\
(\mathcal{J}_4)_{ijklm} &= \left\{ \langle A_{pi} \rangle \Sigma_{pjklm} + \frac{i}{4!} \epsilon_{ijklmopqrs} \langle A_{to} \rangle \Sigma_{tpqrs} \right\} \\
(\mathcal{J}_5)_{ijklm} &= \left\{ \langle A_{ij} \rangle C_{klm} + \frac{i}{4!} \epsilon_{ijklmopqrs} \langle A_{op} \rangle C_{qrs} \right\}
\end{aligned}$$

3.3.3. Contribuciones a los términos F

A continuación se presentan cada una de las contribuciones a los términos F calculadas a través de programas considerando las dos últimas subsecciones.

3.3.4. Contribuciones F_H

F_{H_i}	$(\mathcal{H}_1)_i$	$\frac{1}{3!}(\mathcal{H}_2)_i^{(a)}$	$\frac{1}{3!}(\mathcal{H}_2)_i^{(b)}$
$(6, 1, 1)$			
$F_{H_{311}}$	$-2s H_{\bar{3}11}$	$\sqrt{2}/3 a C_{\bar{3}11}$	$i \sqrt{2}/3 b C_{\bar{3}13^0}$
$F_{H_{\bar{3}11}}$	$-2s H_{311}$	$-\sqrt{2}/3 a C_{311}$	$i \sqrt{2}/3 b C_{313^0}$
$(1, 2, 2)$			
$F_{H_{122^+}}$	$3s H_{122^-}$	$i \sqrt{3}/3 a C'_{122^-}$	$-i 1/3 b C_{122^-}$
$F_{H_{122^-}}$	$3s H_{122^+}$	$i \sqrt{3}/3 a C'_{122^+}$	$i 1/3 b C_{122^+}$

Tabla II: Contribuciones a los términos F de los estados de H

3.3.5. Contribuciones F_S

$F_{S_{ij}}$	$(S_1)_{ij}$	$(S_2)_{ij}^{(a)}$	$(S_2)_{ij}^{(b)}$	$(S_3)_{ij}$	$(S_4)_{ij}$
$(20, 1, 1)$					
$F_{S_{611}}$	$-2s S_{\bar{6}11}$	0	0	$i12\sqrt{2}\sigma \Sigma_{\bar{6}13+}$	0
$F_{S_{\bar{6}11}}$	$-2s S_{611}$	0	0	0	$i12\sqrt{2}\bar{\sigma} \bar{\Sigma}_{613-}$
$F_{S_{811}}$	$-2s S_{811}$	$a A_{811}$	0	0	0
$(6, 2, 2)$					
$F_{S_{322+}}$	$\frac{s}{2} S_{\bar{3}22-}$	$-\frac{a}{2} A_{\bar{3}22-}$	$-\frac{b}{2} A_{\bar{3}22-}$	$12\sqrt{2}\sigma \Sigma_{\bar{3}22+}$	0
$F_{S_{3,2,2-}}$	$\frac{s}{2} S_{\bar{3}22+}$	$-\frac{a}{2} A_{\bar{3}22+}$	$+\frac{b}{2} A_{\bar{3}22+}$	0	0
$F_{S_{\bar{3}22+}}$	$\frac{s}{2} S_{322-}$	$+\frac{a}{2} A_{322-}$	$-\frac{b}{2} A_{322-}$	0	0
$F_{S_{\bar{3}22-}}$	$\frac{s}{2} S_{322+}$	$+\frac{a}{2} A_{322+}$	$+\frac{b}{2} A_{322+}$	0	$12\sqrt{2}\bar{\sigma} \bar{\Sigma}_{322-}$
$(1, 3, 3)$					
$F_{S_{1330}}$	$3s S_{1330}$	0	$i\sqrt{2}b A_{131}$	0	0
$F_{S_{133+}}$	$3s S_{133-}$	0	0	$i12\sqrt{2}\sigma \Sigma_{131}$	0
$F_{S_{133-}}$	$3s S_{133+}$	0	0	0	$i12\sqrt{2}\bar{\sigma} \bar{\Sigma}_{\bar{1}31}$
$F_{S_{111}}$	$s S_{111}$	$i\frac{2}{5}\sqrt{5}b A_{111}$	$i\frac{1}{5}\sqrt{30}b A_{113}$	0	0

Tabla III: Contribuciones a terminos F de los estados de S.

3.3.6. Contribuciones F_A

$F_{A_{ij}}$	$(\mathcal{A}_1)_{ij}$	$(\mathcal{A}_2)_{ij}^{(a)}$	$(\mathcal{A}_2)_{ij}^{(b)}$	$(\mathcal{A}_3)_{ij}$
$(15, 1, 1)$				
$F_{A_{811}}$	$2s A_{811}$	$a S_{811}$	0	0
$F_{A_{111}}$	$2s A_{111}$	$i\frac{1}{5}\sqrt{5}a S_{111}$	0	$-12\sqrt{3}\bar{\sigma} \Sigma_{\bar{1}13-}$
$F_{A_{311}}$	$2s A_{\bar{3}11}$	0	0	$i12\sqrt{2}\bar{\sigma} \Sigma_{\bar{3}13-}$
$F_{A_{\bar{3}11}}$	$2s A_{311}$	0	0	0
$(6, 2, 2)$				
$F_{A_{322+}}$	$-\frac{s}{2} A_{\bar{3}22-}$	$+\frac{a}{2} S_{\bar{3}22-}$	$+\frac{b}{2} S_{\bar{3}22-}$	0
$F_{A_{322-}}$	$-\frac{s}{2} A_{\bar{3}22+}$	$+\frac{a}{2} S_{\bar{3}22+}$	$-\frac{b}{2} S_{\bar{3}22+}$	0
$F_{A_{\bar{3}22+}}$	$-\frac{s}{2} A_{322-}$	$-\frac{a}{2} S_{322-}$	$+\frac{b}{2} S_{322-}$	0
$F_{A_{\bar{3}22-}}$	$-\frac{s}{2} A_{322+}$	$-\frac{a}{2} S_{322+}$	$-\frac{b}{2} S_{322+}$	$+12\sqrt{2}\bar{\sigma} \Sigma_{322-}$
$F_{A_{(131)}}$	$-3s A_{131}$	0	$i\frac{\sqrt{2}}{2}b S_{13^0 3^0}$	0
$(1, 1, 3)$				
$F_{A_{113^0}}$	$-3s A_{113^0}$	0	$i\frac{1}{10}\sqrt{30}b S_{111}$	$-12\sqrt{2}\bar{\sigma} \Sigma_{\bar{1}13-}$
$F_{A_{113+}}$	$-3s A_{113-}$	0	0	0
$F_{A_{113-}}$	$-3s A_{\bar{1}13+}$	0	0	$+12\sqrt{2}\bar{\sigma} \Sigma_{\bar{1}13^0}$

Tabla IV: Contribuciones $(\mathcal{A}_1)_{ij}$, $(\mathcal{A}_2)_{ij}$, $(\mathcal{A}_3)_{ij}$ a los términos F de los estados de A.

$F_{A_{ij}}$	$(\mathcal{A}_4)_{ij}$	$\frac{2!}{5!} (\mathcal{A}_5)_{ij}$	$\frac{2!}{5!} (\mathcal{A}_6)_{ij}^{(a)}$
$(15, 1, 1)$			
$F_{A_{811}}$	0	0	0
$F_{A_{111}}$	$+12\sqrt{3}\sigma \bar{\Sigma}_{113+}$	0	0
$F_{A_{311}}$	0	0	$-\frac{1}{5}i\bar{\sigma} C_{\bar{3}13-}$
$F_{A_{\bar{3}11}}$	$-i12\sqrt{2}\sigma \bar{\Sigma}_{313+}$	$\frac{1}{5}i\sigma C_{313+}$	0
$(6, 2, 2)$			
$F_{A_{322+}}$	$-12\sqrt{2}\sigma \bar{\Sigma}_{\bar{3}22+}$	$-\frac{1}{5}\sigma C_{\bar{3}22+}$	0
$F_{A_{322-}}$	0	0	0
$F_{A_{\bar{3}22+}}$	0	0	0
$F_{A_{\bar{3}22-}}$	0	0	$\frac{1}{5}\bar{\sigma} C_{322-}$
$F_{A_{131}}$	0	0	0
$(1, 1, 3)$			
$F_{A_{113^0}}$	$+12\sqrt{2}\sigma \bar{\Sigma}_{113+}$	0	0
$F_{A_{113+}}$	$-12\sqrt{2}\sigma \bar{\Sigma}_{113^0}$	$-i\frac{1}{5}\sigma C_{111}$	0
$F_{A_{113-}}$	0	0	$i\frac{1}{5}\bar{\sigma} C_{\bar{1}11}$

Tabla V: Contribuciones $(\mathcal{A}_4)_{ij}$, $(\mathcal{A}_5)_{ij}$, $(\mathcal{A}_6)_{ij}$ a los términos F de los estados de A.

3.3.7. Contribuciones F_C

$F_{C_{ij}}$	$(C_1)_{ijk}$	$(C_2)_{ijk}$	$\frac{3!}{5!}(C_3)_{ijk}^{(a)}$	$\frac{3!}{5!}(C_3)_{ijk}^{(b)}$
(1, 2, 2)				
$F_{C_{122+}}$	$3 s C_{122-}$	$i \frac{1}{3} b H_{122-}$	$i \frac{\sqrt{6}}{10} a \Sigma_{122-}$	0
$F_{C_{122-}}$	$3 s C_{122+}$	$-i \frac{1}{3} b H_{122+}$	$i \frac{\sqrt{6}}{10} a \Sigma_{122+}$	0
(15, 2, 2)				
$F_{C_{1'22+}}$	$-\frac{1}{3} s C_{1'22-}$	$i \frac{\sqrt{3}}{3} a H_{122-}$	$i \frac{\sqrt{2}}{5} a \Sigma_{122-}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} b \Sigma_{122-}$
$F_{C_{1'22-}}$	$-\frac{1}{3} s C_{1'22+}$	$i \frac{\sqrt{3}}{3} a H_{122+}$	$i \frac{\sqrt{2}}{5} a \Sigma_{122+}$	$i \frac{\sqrt{2}}{10} b \Sigma_{122+}$
$F_{C_{\bar{3}22+}}$	$-\frac{1}{3} s C_{\bar{3}22-}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a \Sigma_{\bar{3}22-}$	$\frac{\sqrt{2}}{10} b \Sigma_{\bar{3}22-}$
$F_{C_{\bar{3}22-}}$	$-\frac{1}{3} s C_{\bar{3}22+}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a \Sigma_{\bar{3}22+}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} b \Sigma_{\bar{3}22+}$
$F_{C_{\bar{3}22+}}$	$-\frac{1}{3} s C_{\bar{3}22-}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a \Sigma_{\bar{3}22-}$	$\frac{\sqrt{2}}{10} b \Sigma_{\bar{3}22-}$
$F_{C_{\bar{3}22-}}$	$-\frac{1}{3} s C_{\bar{3}22+}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a \Sigma_{\bar{3}22+}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} b \Sigma_{\bar{3}22+}$
$F_{C_{822+}}$	$-\frac{1}{3} s C_{822-}$	0	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} a \Sigma_{822-}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} b \Sigma_{822-}$
$F_{C_{822-}}$	$-\frac{1}{3} s C_{822+}$	0	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} a \Sigma_{822+}$	$i \frac{\sqrt{2}}{10} b \Sigma_{822+}$
(6, 1, 3)				
$F_{C_{\bar{3}13^0}}$	$\frac{4}{3} s C_{\bar{3}13^0}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} b H_{\bar{3}11}$	$\frac{\sqrt{2}}{5} a \Sigma_{\bar{3}13^0}$	$\frac{1}{5} b \Sigma_{\bar{3}11}$
$F_{C_{\bar{3}13^-}}$	$\frac{4}{3} s C_{\bar{3}13^-}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{5} a \Sigma_{\bar{3}13^-}$	0
$F_{C_{\bar{3}13^+}}$	$\frac{4}{3} s C_{\bar{3}13^+}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{5} a \Sigma_{\bar{3}13^+}$	0
$F_{C_{\bar{3}13^0}}$	$\frac{4}{3} s C_{\bar{3}13^0}$	$i \frac{\sqrt{2}}{3} b H_{311}$	0	$i \frac{1}{5} b \Sigma_{311}$
$F_{C_{\bar{3}13^+}}$	$\frac{4}{3} s C_{\bar{3}13^-}$	0	0	0
$F_{C_{\bar{3}13^-}}$	$\frac{4}{3} s C_{\bar{3}13^+}$	0	0	0
(6, 3, 1)				
$F_{C_{\bar{3}31}}$	$\frac{4}{3} s C_{\bar{3}31}$	0	0	0
$F_{C_{\bar{3}31}}$	$\frac{4}{3} s C_{\bar{3}31}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{5} a \Sigma_{\bar{3}31}$	0
(10, 1, 1)				
$F_{C_{111}}$	$-2 s C_{\bar{1}11}$	0	0	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b \Sigma_{\bar{1}13^0}$
$F_{C_{311}}$	$-2 s C_{\bar{3}11}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3} a H_{\bar{3}11}$	$-\frac{1}{5} a \Sigma_{\bar{3}11}$	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b \Sigma_{\bar{3}13^0}$
$F_{C_{611}}$	$-2 s C_{\bar{6}11}$	0	0	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b \Sigma_{\bar{6}13^0}$
(\bar{10}, 1, 1)				
$F_{C_{\bar{1}11}}$	$-2 s C_{111}$	0	0	0
$F_{C_{\bar{3}11}}$	$-2 s C_{311}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} a H_{311}$	$-\frac{1}{5} a \Sigma_{311}$	0
$F_{C_{\bar{6}11}}$	$-2 s C_{611}$	0	0	0

Tabla VI: Contrib. $(C_1)_{ijk}$, $(C_2)_{ijk}$, $\frac{3!}{5!}(C_3)_{ijk}^{(a)}$ y $\frac{3!}{5!}(C_3)_{ijk}^{(b)}$ a los términos F de los estados de C.

FC_{ij}	$\frac{3!}{5!}(\mathcal{C}_4)_{ijk}$	$\frac{3!}{5!}(\mathcal{C}_5)_{ijk}^{(a)}$	$\frac{3!}{5!}(\mathcal{C}_5)_{ijk}^{(b)}$	$\frac{3!}{5!}(\mathcal{C}_6)_{ijk}$
$(1, 2, 2)$				
FC_{122+}	0	$-i \frac{\sqrt{6}}{10} a \bar{\Sigma}_{122-}$	0	0
FC_{122-}	0	$-i \frac{\sqrt{6}}{10} a \bar{\Sigma}_{122+}$	0	0
$(15, 2, 2)$				
$FC_{1'22+}$	0	$i \frac{\sqrt{2}}{5} a \bar{\Sigma}_{122-}$	$i \frac{\sqrt{2}}{10} b \bar{\Sigma}_{122-}$	0
$FC_{1'22-}$	0	$i \frac{\sqrt{2}}{5} a \bar{\Sigma}_{122+}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} b \bar{\Sigma}_{122+}$	0
FC_{322+}	0	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a \bar{\Sigma}_{322-}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} b \bar{\Sigma}_{322-}$	0
FC_{322-}	0	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a \bar{\Sigma}_{322+}$	$\frac{\sqrt{2}}{10} b \bar{\Sigma}_{322+}$	$\frac{1}{5} \bar{\sigma} A_{322-}$
$FC_{\bar{3}22+}$	$-\frac{1}{5} \sigma A_{322+}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a \bar{\Sigma}_{322-}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} b \bar{\Sigma}_{322-}$	0
$FC_{\bar{3}22-}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a \bar{\Sigma}_{322+}$	$\frac{\sqrt{2}}{10} b \bar{\Sigma}_{322+}$	0
FC_{822+}	0	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} a \bar{\Sigma}_{822-}$	$i \frac{\sqrt{2}}{10} b \bar{\Sigma}_{822-}$	0
FC_{822-}	0	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} a \bar{\Sigma}_{822+}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} b \bar{\Sigma}_{822+}$	0
$(6, 1, 3)$				
FC_{313^0}	0	0	$i \frac{1}{5} b \bar{\Sigma}_{311}$	0
FC_{313+}	$i \frac{1}{5} \sigma A_{311}$	0	0	0
FC_{313-}	0	0	0	0
$FC_{\bar{3}13^0}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{5} a \bar{\Sigma}_{313^0}$	$i \frac{1}{5} b \bar{\Sigma}_{311}$	0
$FC_{\bar{3}13+}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{5} a \bar{\Sigma}_{313-}$	0	0
$FC_{\bar{3}13-}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{5} a \bar{\Sigma}_{313+}$	0	$-i \frac{1}{5} \bar{\sigma} A_{311}$
$(6, 3, 1)$				
FC_{331}	0	$\frac{\sqrt{2}}{5} a \bar{\Sigma}_{331}$	0	0
$FC_{\bar{3}31}$	0	0	0	0
$(10, 1, 1)$				
FC_{111}	$-i \frac{1}{5} \sigma A_{113+}$	0	0	0
FC_{311}	0	$\frac{1}{5} a \bar{\Sigma}_{311}$	0	0
FC_{611}	0	0	0	0
$(\bar{10}, 1, 1)$				
$FC_{\bar{1}11}$	0	0	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b \bar{\Sigma}_{113^0}$	$i \frac{1}{5} \bar{\sigma} A_{113-}$
$FC_{\bar{3}11}$	0	$\frac{1}{5} a \bar{\Sigma}_{311}$	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b \bar{\Sigma}_{313^0}$	0
$FC_{\bar{6}11}$	0	0	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b \bar{\Sigma}_{613^0}$	0

Tabla VII: Contrib. $\frac{3!}{5!}(\mathcal{C}_4)_{ijk}$, $\frac{3!}{5!}(\mathcal{C}_5)_{ijk}^{(a)}$, $\frac{3!}{5!}(\mathcal{C}_5)_{ijk}^{(b)}$ y $\frac{3!}{5!}(\mathcal{C}_6)_{ijk}$ de los términos F de los estados de C .

3.3.8. Contribuciones F_Σ

$F_{\Sigma_{ijklm}}$	$(\mathcal{X}_1)_{ijklm}$	$(\mathcal{X}_2)_{ijklm}$	$(\mathcal{X}_3)_{ijklm}$	$(\mathcal{X}_4)_{ijklm}^{(a)}$
$(6, 1, 1)$				
$F_{\Sigma_{311}}$	0	$2s \Sigma_{\bar{3}11}$	0	$-\frac{1}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{3}11}$
$F_{\Sigma_{\bar{3}11}}$	0	$2s \Sigma_{311}$	0	$+\frac{1}{5}a \bar{\Sigma}_{311}$
$(10, 3, 1)$				
$F_{\Sigma_{131}}$	$i\frac{\sqrt{2}}{5}\sigma S_{13^0 3^+}$	0	0	$-\frac{3}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{1}31}$
$F_{\Sigma_{331}}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{3}31}$
$F_{\Sigma_{\bar{6}31}}$	0	0	0	$+\frac{1}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{6}31}$
$(10, 1, 3)$				
$F_{\Sigma_{\bar{1}13^0}}$	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{5}\bar{\sigma} A_{113^-}$	$+\frac{3}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{1}13^0}$
$F_{\Sigma_{\bar{1}13^+}}$	0	0	0	$+\frac{3}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{1}13^+}$
$F_{\Sigma_{\bar{1}13^-}}$	0	0	$-\frac{1}{5}\bar{\sigma}(\sqrt{2} A_{113^0} + \sqrt{3} A_{111})$	$+\frac{3}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{1}13^-}$
$F_{\Sigma_{\bar{3}13^0}}$	0	0	0	$+\frac{1}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{3}13^0}$
$F_{\Sigma_{\bar{3}13^+}}$	0	0	0	$+\frac{1}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{3}13^+}$
$F_{\Sigma_{\bar{3}13^-}}$	0	0	$i\frac{\sqrt{2}}{5}\bar{\sigma} A_{311}$	$+\frac{1}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{3}13^-}$
$F_{\Sigma_{\bar{6}13}}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{6}13}$
$F_{\Sigma_{\bar{6}13^+}}$	$i\frac{\sqrt{2}}{5}\sigma S_{611}$	0	0	$-\frac{1}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{6}13^+}$
$F_{\Sigma_{\bar{6}13^-}}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{6}13^-}$
$(15, 2, 2)$				
$F_{\Sigma_{122^+}}$	0	$-s \Sigma_{122^-}$	0	0
$F_{\Sigma_{122^-}}$	0	$-s \Sigma_{122^+}$	0	0
$F_{\Sigma_{322^+}}$	0	$-s \Sigma_{\bar{3}22^-}$	0	$+\frac{2}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{3}22^-}$
$F_{\Sigma_{322^-}}$	0	$-s \Sigma_{\bar{3}22^+}$	$\frac{\sqrt{2}}{5}\bar{\sigma} A_{\bar{3}22^-}$	$+\frac{2}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{3}22^+}$
$F_{\Sigma_{\bar{3}22^+}}$	$\frac{\sqrt{2}}{5}\sigma S_{322^+}$	$-s \Sigma_{322^-}$	0	$-\frac{2}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{3}22^-}$
$F_{\Sigma_{\bar{3}22^-}}$	0	$-s \Sigma_{322^+}$	0	$-\frac{2}{5}a \bar{\Sigma}_{\bar{3}22^+}$
$F_{\Sigma_{822^+}}$	0	$-s \Sigma_{822^-}$	0	0
$F_{\Sigma_{822^-}}$	0	$-s \Sigma_{822^+}$	0	0

Tabla VIII: Contribuciones $(\mathcal{X}_1)_{ijklm}$, $(\mathcal{X}_2)_{ijklm}$, $(\mathcal{X}_3)_{ijklm}$ y $(\mathcal{X}_4)_{ijklm}^{(a)}$ de los términos F de los estados de Σ .

$F_{\Sigma_{ijklm}}$	$(\mathcal{X}_4)_{ijklm}^{(b)}$	$(\mathcal{X}_5)_{ijklm}^{(a)}$	$(\mathcal{X}_5)_{ijklm}^{(b)}$
$(6, 1, 1)$			
$F_{\Sigma_{311}}$	0	$-\frac{1}{5} a C_{\bar{3}11}$	$i \frac{1}{5} b C_{\bar{3}13^0}$
$F_{\Sigma_{\bar{3}11}}$	0	$-\frac{1}{5} a C_{311}$	$i \frac{1}{5} b C_{313^0}$
$(10, 3, 1)$			
$F_{\Sigma_{131}}$	0	0	0
$F_{\Sigma_{331}}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{5} a C_{\bar{3}31}$	0
$F_{\Sigma_{631}}$	0	0	0
$(10, 1, 3)$			
$F_{\Sigma_{\bar{1}13^0}}$	0	0	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b C_{111}$
$F_{\Sigma_{\bar{1}13^+}}$	$+\frac{2}{5} b \bar{\Sigma}_{113^-}$	0	0
$F_{\Sigma_{\bar{1}13^-}}$	$-\frac{2}{5} b \bar{\Sigma}_{113^+}$	0	0
$F_{\Sigma_{\bar{3}13^0}}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{5} a C_{313^0}$	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b C_{311}$
$F_{\Sigma_{\bar{3}13^+}}$	$+\frac{2}{5} b \bar{\Sigma}_{313^-}$	$\frac{\sqrt{2}}{5} a C_{313^-}$	0
$F_{\Sigma_{\bar{3}13^-}}$	$-\frac{2}{5} b \bar{\Sigma}_{313^+}$	$\frac{\sqrt{2}}{5} a C_{313^+}$	0
$F_{\Sigma_{\bar{6}13^0}}$	0	0	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b C_{611}$
$F_{\Sigma_{\bar{6}13^+}}$	$+\frac{2}{5} b \bar{\Sigma}_{613^-}$	0	0
$F_{\Sigma_{\bar{6}13^-}}$	$-\frac{2}{5} b \bar{\Sigma}_{613^+}$	0	0
$(15, 2, 2)$			
$F_{\Sigma_{122^+}}$	$+\frac{1}{5} b \bar{\Sigma}_{122^-}$	$i \frac{\sqrt{6}}{10} a C_{122^-} + i \frac{\sqrt{2}}{5} a C_{1'22^-}$	$i \frac{\sqrt{2}}{10} b C_{1'22^-}$
$F_{\Sigma_{122^-}}$	$-\frac{1}{5} b \bar{\Sigma}_{122^+}$	$i \frac{\sqrt{6}}{10} a C_{122^+} + i \frac{\sqrt{2}}{5} a C_{1'22^+}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} b C_{1'22^+}$
$F_{\Sigma_{322^+}}$	$+\frac{1}{5} b \bar{\Sigma}_{322^-}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a C_{\bar{3}22^-}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} b C_{\bar{3}22^-}$
$F_{\Sigma_{322^-}}$	$-\frac{1}{5} b \bar{\Sigma}_{322^+}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a C_{\bar{3}22^+}$	$\frac{\sqrt{2}}{10} b C_{\bar{3}22^+}$
$F_{\Sigma_{\bar{3}22^+}}$	$+\frac{1}{5} b \bar{\Sigma}_{322^-}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a C_{322^-}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} b C_{322^-}$
$F_{\Sigma_{\bar{3}22^-}}$	$-\frac{1}{5} b \bar{\Sigma}_{322^+}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a C_{322^+}$	$\frac{\sqrt{2}}{10} b C_{322^+}$
$F_{\Sigma_{822^+}}$	$+\frac{1}{5} b \bar{\Sigma}_{822^-}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} a C_{822^-}$	$i \frac{\sqrt{2}}{10} b C_{822^-}$
$F_{\Sigma_{822^-}}$	$-\frac{1}{5} b \bar{\Sigma}_{822^+}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} a C_{822^+}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} b C_{822^+}$

TABLA IX: Contribuciones $(\mathcal{X}_4)_{ijklm}^{(b)}$, $(\mathcal{X}_5)_{ijklm}^{(a)}$ y $(\mathcal{X}_5)_{ijklm}^{(b)}$ a los términos F de los estados de Σ .

3.3.9. Contribuciones $F_{\bar{\Sigma}}$

$F_{\bar{\Sigma}_{ijklm}}$	$(\mathcal{J}_1)_{ijklm}$	$(\mathcal{J}_2)_{ijklm}$	$(\mathcal{J}_3)_{ijklm}$	$(\mathcal{J}_4)_{ijklm}^{(a)}$
$(6, 1, 1)$				
$F_{\bar{\Sigma}_{311}}$	0	$2s \bar{\Sigma}_{311}$	0	$+\frac{1}{5}a \Sigma_{311}$
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{3}11}}$	0	$2s \bar{\Sigma}_{311}$	0	$-\frac{1}{5}a \Sigma_{311}$
$(\bar{10}, 3, 1)$				
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{1}31}}$	$i\frac{\sqrt{2}}{5}\bar{\sigma} S_{1303^-}$	0	0	$-\frac{3}{5}a \Sigma_{131}$
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{3}31}}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}a \Sigma_{331}$
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{6}31}}$	0	0	0	$+\frac{1}{5}a \Sigma_{631}$
$(10, 1, 3)$				
$F_{\bar{\Sigma}_{113^0}}$	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{5}\sigma A_{113^+}$	$+\frac{3}{5}a \Sigma_{\bar{1}13^0}$
$F_{\bar{\Sigma}_{113^+}}$	0	0	$\frac{1}{5}\sigma(\sqrt{2} A_{113^0} + \sqrt{3} A_{111})$	$+\frac{3}{5}a \Sigma_{\bar{1}13^-}$
$F_{\bar{\Sigma}_{113^-}}$	0	0	0	$+\frac{3}{5}a \Sigma_{\bar{1}13^+}$
$F_{\bar{\Sigma}_{313^0}}$	0	0	0	$+\frac{1}{5}a \Sigma_{\bar{3}13^0}$
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{3}13^+}}$	0	0	$-i\frac{\sqrt{2}}{5}\sigma A_{\bar{3}1}$	$+\frac{1}{5}a \Sigma_{\bar{3}13^+}$
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{3}13^-}}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}a \Sigma_{\bar{3}13^-}$
$F_{\bar{\Sigma}_{613^0}}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}a \Sigma_{\bar{6}13^0}$
$F_{\bar{\Sigma}_{613^+}}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}a \Sigma_{\bar{6}13^-}$
$F_{\bar{\Sigma}_{613^-}}$	$i\frac{\sqrt{2}}{5}\bar{\sigma} S_{\bar{6}11}$	0	0	$-\frac{1}{5}a \Sigma_{\bar{6}13^+}$
$(15, 2, 2)$				
$F_{\bar{\Sigma}_{122^+}}$	0	$-s \bar{\Sigma}_{122^-}$	0	0
$F_{\bar{\Sigma}_{122^-}}$	0	$-s \bar{\Sigma}_{122^+}$	0	0
$F_{\bar{\Sigma}_{322^+}}$	0	$-s \bar{\Sigma}_{322^-}$	0	$-\frac{2}{5}a \Sigma_{\bar{3}22^-}$
$F_{\bar{\Sigma}_{322^-}}$	$\frac{\sqrt{2}}{5}\bar{\sigma} S_{\bar{3}22^-}$	$-s \bar{\Sigma}_{322^+}$	0	$-\frac{2}{5}a \Sigma_{\bar{3}22^+}$
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{3}22^+}}$	0	$-s \bar{\Sigma}_{322^-}$	$-\frac{\sqrt{2}}{5}\sigma A_{322^+}$	$+\frac{2}{5}a \Sigma_{322^-}$
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{3}22^-}}$	0	$-s \bar{\Sigma}_{322^+}$	0	$+\frac{2}{5}a \Sigma_{322^+}$
$F_{\bar{\Sigma}_{822^+}}$	0	$-s \bar{\Sigma}_{822^-}$	0	0
$F_{\bar{\Sigma}_{822^-}}$	0	$-s \bar{\Sigma}_{822^+}$	0	0

TABLA X: Contribuciones $(\mathcal{J}_1)_{ijklm}$, $(\mathcal{J}_2)_{ijklm}$, $(\mathcal{J}_3)_{ijklm}$ y $(\mathcal{J}_4)_{ijklm}^{(a)}$ a los términos F de los estados de $\bar{\Sigma}$.

$F_{\bar{\Sigma}_{ijklm}}$	$(\mathcal{J}_4)_{ijklm}^{(b)}$	$(\mathcal{J}_5)_{ijklm}^{(a)}$	$(\mathcal{J}_5)_{ijklm}^{(b)}$
$(6, 1, 1)$			
$F_{\bar{\Sigma}_{311}}$	0	$\frac{1}{5} a C_{\bar{3}11}$	$i \frac{1}{5} b C_{\bar{3}13^0}$
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{3}11}}$	0	$\frac{1}{5} a C_{311}$	$i \frac{1}{5} b C_{313^0}$
$(10, 3, 1)$			
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{1}31}}$	0	0	0
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{3}31}}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{5} a C_{331}$	0
$F_{\bar{\Sigma}_{\bar{6}31}}$	0	0	0
$(10, 1, 3)$			
$F_{\bar{\Sigma}_{113^0}}$	0	0	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b C_{\bar{1}11}$
$F_{\bar{\Sigma}_{113^+}}$	$-\frac{2}{5} b \Sigma_{\bar{1}13^-}$	0	0
$F_{\bar{\Sigma}_{113^-}}$	$+\frac{2}{5} b \Sigma_{\bar{1}13^+}$	0	0
$F_{\bar{\Sigma}_{313^0}}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{5} a C_{\bar{3}13^0}$	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b C_{\bar{3}11}$
$F_{\bar{\Sigma}_{313^+}}$	$-\frac{2}{5} b \Sigma_{\bar{3}13^-}$	$-\frac{\sqrt{2}}{5} a C_{\bar{3}13^-}$	0
$F_{\bar{\Sigma}_{313^-}}$	$+\frac{2}{5} b \Sigma_{\bar{3}13^+}$	$-\frac{\sqrt{2}}{5} a C_{\bar{3}13^+}$	0
$F_{\bar{\Sigma}_{613^0}}$	0	0	$i \frac{\sqrt{2}}{5} b C_{\bar{6}11}$
$F_{\bar{\Sigma}_{613^+}}$	$-\frac{2}{5} b \Sigma_{\bar{6}13^-}$	0	0
$F_{\bar{\Sigma}_{613^-}}$	$+\frac{2}{5} b \Sigma_{\bar{6}13^+}$	0	0
$(15, 2, 2)$			
$F_{\bar{\Sigma}_{122^+}}$	$-\frac{1}{5} b \Sigma_{122^-}$	$-i \frac{\sqrt{6}}{10} a C_{122^-} + i \frac{\sqrt{2}}{5} a C_{1'22^-}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} b C_{1'22^-}$
$F_{\bar{\Sigma}_{122^-}}$	$+\frac{1}{5} b \Sigma_{122^+}$	$-i \frac{\sqrt{6}}{10} a C_{122^+} + i \frac{\sqrt{2}}{5} a C_{1'22^+}$	$i \frac{\sqrt{2}}{10} b C_{1'22^+}$
$F_{\bar{\Sigma}_{322^+}}$	$-\frac{1}{5} b \Sigma_{\bar{3}22^-}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a C_{\bar{3}22^-}$	$\frac{\sqrt{2}}{10} b C_{\bar{3}22^-}$
$F_{\bar{\Sigma}_{322^-}}$	$+\frac{1}{5} b \Sigma_{\bar{3}22^+}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a C_{\bar{3}22^+}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} b C_{\bar{3}22^+}$
$F_{\bar{\Sigma}_{522^+}}$	$-\frac{1}{5} b \Sigma_{322^-}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a C_{322^-}$	$\frac{\sqrt{2}}{10} b C_{322^-}$
$F_{\bar{\Sigma}_{522^-}}$	$+\frac{1}{5} b \Sigma_{322^+}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} a C_{322^+}$	$-\frac{\sqrt{2}}{10} b C_{322^+}$
$F_{\bar{\Sigma}_{822^+}}$	$-\frac{1}{5} b \Sigma_{822^-}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} a C_{822^-}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} b C_{822^-}$
$F_{\bar{\Sigma}_{822^-}}$	$+\frac{1}{5} b \Sigma_{822^+}$	$-i \frac{\sqrt{2}}{10} a C_{822^+}$	$i \frac{\sqrt{2}}{10} b C_{822^+}$

TABLA XI: Contribuciones $(\mathcal{J}_4)_{ijklm}^{(b)}$, $(\mathcal{J}_5)_{ijklm}^{(a)}$ y $(\mathcal{J}_5)_{ijklm}^{(b)}$ de los términos F a los estados de $\bar{\Sigma}$.

3.3.10. Matrices de Masa

A partir del cálculo de los términos F se pueden escribir las matrices de masas para los estados mezclados y no mezclados.

1. $Y/2 = (+2/3, -2/3)$

$$\begin{pmatrix} (S_{\bar{6}11}, \Sigma_{\bar{6}13+}) \\ (S_{611}, \bar{\Sigma}_{613-}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2(m_S - 4\lambda_S s) & i2\sqrt{2} \eta_S \sigma \\ i2\sqrt{2} \bar{\eta}_S \bar{\sigma} & (m_\Sigma - \eta_A(a - 2b)) \end{pmatrix}$$

2. $Y/2 = (0, 0)$

$$\begin{pmatrix} (S_{811}, A_{811}) \\ (S_{811}, A_{811}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2(m_S - 4\lambda_S s) & 4\lambda_A a \\ 4\lambda_A a & 2(-m_A + 4\lambda_A s) \end{pmatrix}$$

3. $Y/2 = (+1/6, -1/6)$

$$\begin{pmatrix} (S_{\bar{3}2-}, A_{\bar{3}2+}, \Sigma_{\bar{2}2-}, \Sigma_{\bar{3}2-}, C_{\bar{2}2-}) \\ (S_{322-}, A_{322-}, \Sigma_{322+}, \Sigma_{322+}, C_{322+}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2(m_S + \lambda_S s) & 2\lambda_A(a+b) & 2\sqrt{2}\bar{\eta}_S \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ -2\lambda_A(a+b) & -2(m_A + \lambda_A s) & 0 & \sqrt{2}\eta_A \bar{\sigma} & \frac{\beta_2}{5} \bar{\sigma} \\ 2\sqrt{2}\eta_S \sigma & 0 & (m_\Sigma - \eta_A(2a-b)) & -10\eta_S s & -\beta_1 \frac{\sqrt{2}}{10}(a+b) \\ 0 & -\sqrt{2}\eta_A \sigma & -10\bar{\eta}_S s & (m_\Sigma + \eta_A(2a-b)) & \beta_2 \frac{\sqrt{2}}{10}(-a+b) \\ 0 & -\frac{\beta_1}{5} \sigma & -\beta_2 \frac{\sqrt{2}}{10}(a+b) & \beta_1 \frac{\sqrt{2}}{10}(-a+b) & (3!m_C - \frac{2}{3}\eta_C s) \end{pmatrix}$$

4. $Y/2 = (+5/6, -5/6)$

$$\begin{pmatrix} (S_{\bar{3}22+}, A_{\bar{3}22+}) \\ (S_{322-}, A_{322-}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2(m_S + \lambda_S s) & -2\lambda_A(a-b) \\ 2\lambda_A(a-b) & -2(m_A + \lambda_A s) \end{pmatrix}$$

5. $Y/2 = (0, 0)$

$$\begin{pmatrix} (S_{133^0}, A_{131}) \\ (S_{133^0}, A_{131}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2(m_S + 6s\lambda_S) & i4\sqrt{2}\lambda_A b \\ i4\sqrt{2}\lambda_A b & -2(m_A + 6\lambda_A s) \end{pmatrix}$$

6. $Y/2 = (-1, +1)$
 (S_{133-}, Σ_{131})
 $(S_{133+}, \bar{\Sigma}_{\bar{1}31})$

$$\begin{pmatrix} 2(m_S + 6s\lambda_S) & i2\sqrt{2}\eta_S\sigma \\ i2\sqrt{2}\bar{\eta}_S\bar{\sigma} & (m_\Sigma - 3\eta_A a) \end{pmatrix}$$

7. $Y/2 = (0, 0)$
 $(A_{111}, S_{111}, \Sigma_{\bar{1}13-}, \bar{\Sigma}_{\bar{1}13+}, A_{113^0})$
 $(A_{111}, S_{111}, \Sigma_{\bar{1}13-}, \bar{\Sigma}_{\bar{1}13+}, A_{113^0})$

$$\begin{pmatrix} 2(-m_A + 4s\lambda_A) & i\frac{8}{5}\sqrt{5}\lambda_A a & -\sqrt{3}\eta_A\bar{\sigma} & \sqrt{3}\eta_A\sigma & 0 \\ i\frac{8}{5}\sqrt{5}\lambda_A a & 2(m_S + 2\lambda_S s) & 0 & 0 & i\frac{4}{5}\sqrt{30}b\lambda_A \\ -\sqrt{3}\eta_A\bar{\sigma} & 0 & 0 & (m_\Sigma + \eta_A(3a - 2b)) & -\sqrt{2}\bar{\sigma}\eta_A \\ \sqrt{3}\eta_A\sigma & 0 & (m_\Sigma + \eta_A(3a - 2b)) & 0 & \sqrt{2}\sigma\eta_A \\ 0 & i\frac{4}{5}\sqrt{30}b\lambda_A & -\sqrt{2}\bar{\sigma}\eta_A & \sqrt{2}\sigma\eta_A & -2(m_A + 6s\lambda_A) \end{pmatrix}$$

8. $Y/2 = (-2/3, 2/3)$
 $(A_{\bar{3}1}, \Sigma_{\bar{3}13}, C_{\bar{3}3-})$
 $(A_{\bar{3}1}, \Sigma_{\bar{3}13}, C_{\bar{3}3-})$

$$\begin{pmatrix} 2(-m_A + 4s\lambda_A) & -i\sqrt{2}\eta_A\bar{\sigma} & -i\frac{\beta_2}{5}\bar{\sigma} \\ -i\sqrt{2}\eta_A\sigma & (m_\Sigma + \eta_A(a - 2b)) & -\beta_2\frac{\sqrt{2}}{5}a \\ i\frac{\beta_1}{5}\sigma & \beta_1\frac{\sqrt{2}}{5}a & (3!m_C + \frac{8}{3}\eta_C s) \end{pmatrix}$$

9. $Y/2 = (-1, +1)$
 $(A_{113-}, \bar{\Sigma}_{\bar{1}13^0}, C_{111})$
 $(A_{113+}, \Sigma_{\bar{1}13^0}, C_{\bar{1}11})$

$$\begin{pmatrix} -2(m_A + 6s\lambda_A) & -\sqrt{2}\eta_A\sigma & -i\beta_1\frac{1}{5}\sigma \\ \sqrt{2}\eta_A\bar{\sigma} & (m_\Sigma + 3\eta_A a) & i\beta_1\frac{\sqrt{2}}{5}b \\ i\beta_2\frac{1}{5}\bar{\sigma} & i\beta_2\frac{\sqrt{2}}{5}b & (3!m_C - 4\eta_C s) \end{pmatrix}$$

10. $Y/2 = (+1/3, -1/3)$
 $(\bar{\Sigma}_{\bar{3}11}, \Sigma_{\bar{3}11}, \Sigma_{\bar{3}13^0}, C_{\bar{3}11}, C_{\bar{3}13^0}, H_{\bar{3}11})$
 $(\Sigma_{311}, \bar{\Sigma}_{311}, \bar{\Sigma}_{313^0}, C_{311}, C_{313^0}, H_{311})$

$$\begin{pmatrix} (m_{\Sigma} - \eta_{AA}) & 20\eta_S s & 0 & -\beta_1 \frac{1}{5} a & i \beta_1 \frac{1}{5} b & 0 \\ 20\bar{\eta}_S s & (m_{\Sigma} + \eta_{AA}) & 0 & \beta_2 \frac{1}{5} a & i \beta_2 \frac{1}{5} b & 0 \\ 0 & 0 & (m_{\Sigma} + \eta_{AA}) & i \beta_2 \frac{\sqrt{2}}{5} b & -\beta_2 \frac{\sqrt{2}}{5} a & 0 \\ \beta_2 \frac{1}{5} a & -\beta_1 \frac{1}{5} a & i \beta_1 \frac{\sqrt{2}}{5} b & (3!m_C - 4\eta_C s) & 0 & -\alpha \frac{\sqrt{2}}{3} a \\ i \beta_2 \frac{1}{5} b & i \beta_2 \frac{1}{5} b & \beta_1 \frac{\sqrt{2}}{5} a & 0 & (3!m_C + \frac{8}{3}\eta_C s) & i \alpha \frac{\sqrt{2}}{3} b \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \frac{\sqrt{2}}{3} a & i \alpha \frac{\sqrt{2}}{3} b & (m_H - 2\eta_H s) \end{pmatrix}$$

11. $Y/2 = (+1/3, -1/3)$
 $(C_{\bar{3}31}, \bar{\Sigma}_{\bar{3}31})$
 (Σ_{331}, C_{331})

$$\begin{pmatrix} -\beta_1 \frac{\sqrt{2}}{5} a & (m_{\Sigma} - \eta_{AA}) \\ (3!m_C + \frac{8}{3}\eta_C s) & \beta_2 \frac{\sqrt{2}}{5} a \end{pmatrix}$$

www.bdigital.ula.ve

12. $Y/2 = (+1/3, -1/3)$
 $(\bar{\Sigma}_{\bar{6}13^0}, C_{\bar{6}11})$
 $(\Sigma_{\bar{6}13^0}, C_{\bar{6}11})$

$$\begin{pmatrix} (3!m_C - 4\eta_C s) & i \beta_2 \frac{\sqrt{2}}{5} b \\ i \beta_1 \frac{\sqrt{2}}{5} b & (m_{\Sigma} - \eta_{AA} a) \end{pmatrix}$$

13. $Y/2 = (-1/3, +1/3)$
 $(\bar{\Sigma}_{\bar{6}31})$
 (Σ_{631})

$$(m_{\Sigma} + \eta_A a)$$

14. $Y/2 = (-2, +2)$
 $(\bar{\Sigma}_{\bar{1}13^-})$
 $(\Sigma_{\bar{1}13^+})$

$$(m_{\Sigma} + \eta_A(3a + 2b))$$

15. $Y/2 = (-4/3, +4/3)$

$(C_{313-}, \bar{\Sigma}_{313-})$

$(C_{\bar{3}13+}, \Sigma_{\bar{3}13+})$

$$\begin{pmatrix} (6m_C + \frac{8}{3}s) & -\beta_2 \frac{\sqrt{2}}{5} a \\ \beta_1 \frac{\sqrt{2}}{5} a & (m_\Sigma + \eta_A(a + 2b)) \end{pmatrix}$$

16. $Y/2 = (-4/3, +4/3)$

$(\Sigma_{\bar{6}13-})$

$(\bar{\Sigma}_{613+})$

$$(m_\Sigma - \eta_A(a + 2b))$$

17. $Y/2 = (-1/2, +1/2)$

$(\Sigma_{122-}, \bar{\Sigma}_{122-}, C_{1'22-}, C_{122-}, H_{122-})$

$(\Sigma_{122+}, \bar{\Sigma}_{122+}, C_{1'22+}, C_{122+}, H_{122+})$

$$\begin{pmatrix} (m_\Sigma + \eta_A b) & -10\eta_S s & i\beta_1 \frac{\sqrt{2}}{5} (a + \frac{b}{2}) & i\beta_1 \frac{\sqrt{6}}{10} a & 0 \\ -10\bar{\eta}_S s & (m_\Sigma - \eta_A b) & i\beta_2 \frac{\sqrt{2}}{5} (a - \frac{b}{2}) & -\beta_2 \frac{\sqrt{6}}{10} a & 0 \\ \beta_2 \frac{\sqrt{2}}{5} (a + \frac{b}{2}) & i\beta_1 \frac{\sqrt{2}}{5} (a - \frac{b}{2}) & (3! \eta_C - \frac{2}{3} i_C s) & 1 & i\alpha \frac{\sqrt{3}}{3} a \\ -i\beta_2 \frac{\sqrt{6}}{10} a & i\beta_1 \frac{\sqrt{6}}{10} a & 0 & 6(m_C + \eta_C s) & i\alpha \frac{1}{3} b \\ 0 & 0 & i\alpha \frac{\sqrt{3}}{3} a & -i\alpha \frac{1}{3} b & (m_H + 3\eta_H s) \end{pmatrix}$$

18. $Y/2 = (-7/6, +7/6)$

$(C_{\bar{3}22-}, \bar{\Sigma}_{\bar{3}22-}, \Sigma_{\bar{3}22-})$

$(C_{322+}, \Sigma_{322+}, \bar{\Sigma}_{322+})$

$$\begin{pmatrix} (3!m_C - \frac{2}{3}\eta_C s) & -\beta_2 \frac{\sqrt{2}}{10}(a + b) & \beta_1 \frac{\sqrt{2}}{10}(-a + b) \\ -\beta_1 \frac{\sqrt{2}}{10}(a + b) & (m_\Sigma + \eta_A(2a + b)) & -10\eta_S s \\ \beta_2 \frac{\sqrt{2}}{10}(-a + b) & -10\bar{\eta}_S s & (m_\Sigma - \eta_A(2a + b)) \end{pmatrix}$$

19. $Y/2 = (-1/2, +1/2)$

$(C_{822-}, \Sigma_{822-}, \bar{\Sigma}_{822-})$

$(C_{822+}, \Sigma_{822+}, \bar{\Sigma}_{822+})$

$$\begin{pmatrix} (3!m_C - \frac{2}{3}\eta_C s) & -i\beta_1 \frac{\sqrt{2}}{10}(a + b) & i\beta_2 \frac{\sqrt{2}}{10}(-a + b) \\ i\beta_1 \frac{\sqrt{2}}{10}(-a + b) & -10\eta_S s & (m_\Sigma + \eta_A b) \\ -i\beta_2 \frac{\sqrt{2}}{10}(a + b) & (m_\Sigma - \eta_A b) & -10\bar{\eta}_S s \end{pmatrix}$$

El grupo $SO(10)$ posee 45 generadores, de los cuales 9 son rotos y dan lugar a 9 bosones, estos 9 bosones se encuentran en las siguientes las matrices de masa: 3 : $(\mathbf{3}, 2, 2^+)_A, (\bar{\mathbf{3}}, 2, 2^-)_A$; 4 : $(\mathbf{3}, 2, 2^-)_A, (\bar{\mathbf{3}}, 2, 2^+)_A$; 7 : $(1, 1, 3^0)_A$; 8 : $(\mathbf{3}, 1, 1)_A, (\bar{\mathbf{3}}, 1, 1)_A$; 9 : $(1, 1, 3^+), (1, 1, 3^-)_A$.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 4

Masa para el neutrino

Recordemos que para la unificación de los tres diferentes acoplamiento de calibres $\alpha_1(M_X) = \alpha_2(M_X) = \alpha_3(M_X) = \alpha_u(M_X)$ en una única constante de acoplamiento $\alpha_u(M_X)$, las ecuaciones del grupo de normalización para cada grupo de calibre deben seguir

$$\frac{1}{\alpha_i(M_W)} = \frac{1}{\alpha_u(M_X)} - \frac{b_i}{\pi} \ln \left(\frac{M_X}{M_W} \right); \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Restando dos de ellas y considerando que el modelo posee partículas con contribuciones δb_i 's que se contrarresten para continuar teniendo unificación

$$\ln \left(\frac{M_X}{M_W} \right) = \frac{2\pi}{(b_j + \delta b_j - b_i - \delta b_i)} \left(\frac{1}{\alpha_i(M_W)} - \frac{1}{\alpha_j(M_W)} \right); \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j. \quad (4.2)$$

En el modelo $SO(10)$ estudiado se necesita por supuesto que la *masa* para los *neutrinos* sea *pequeña*, $M_\nu^{II} \simeq \langle \Delta \rangle \simeq \frac{M_W^2}{M_\Delta} \sim 10^{-12} GeV$, $M_\Delta > M_W$ (Mecanismo See-Saw Tipo II), esto implica que el *triplete* contenido en el campo $\bar{\Sigma}$ sea *liviano*, es decir con masa por debajo de la escala de unificación M_X , por lo tanto la masa del triplete $M_\Delta < 10^{16} GeV$.

Para que las condiciones de unificación se sigan cumpliendo a pesar de tener un triplete liviano, las contribuciones δb_i del triplete se deben contrarrestar con algunas de las contribuciones δb_i de las otras partículas. Es decir,

$$\begin{aligned} (\delta b_2^{(T)} - \delta b_1^{(T)}) + n_{(k)}(\delta b_2^{(k)} - \delta b_1^{(k)}) + n_{(l)}(\delta b_2^{(l)} - \delta b_1^{(l)}) &= 0 \\ (\delta b_3^{(T)} - \delta b_2^{(T)}) + n_{(r)}(\delta b_3^{(r)} - \delta b_2^{(r)}) + n_{(s)}(\delta b_3^{(s)} - \delta b_2^{(s)}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $\delta b_i^{(T)}$: es la contribución al coeficiente b_i de la partícula T (triplete, matriz de masa (6)), $\delta b_i^{(k)}$: es la contribución al coeficiente b_i de la partícula k ($k, l, r, s = 1 \dots 19$, 19 matrices de masa), $n_{(k)}$: es el número de veces que debe estar la partícula k (k, l, r, s).

Para determinar las contribuciones $\delta b_i^{(T)}$ del triplete $(1, 3, 1)$ del campo $\bar{\Sigma}$, así como las contribuciones $\delta b_i^{(k)}$ de los demás campos para luego compararlas en (4.3), es necesario considerar los siguientes datos

Matriz	$D_{SU(3)}$	$T(D)_{SU(3)}$	$D_{SU(2)}$	$T(D)_{SU(2)}$	$ Y/2 $	N. edos	Bosones
1	6	5/2	1	0	2/3	4	0
2	8	3	1	0	0	2	0
3	3	1/2	2	1/2	1/6	8	2
4	3	1/2	2	1/2	5/6	2	2
5	1	0	3	2	0	2	0
6	1	0	3	2	1	4	0
7	1	0	1	0	0	4	1
8	3	1/2	1	0	2/3	4	2
9	3	1/2	1	0	1	4	2
10	3	1/2	1	0	1/3	12	0
11	3	1/2	2	2	1/3	4	0
12	6	5/2	1	0	1/3	4	0
13	6	5/2	3	2	1/3	2	0
14	1	0	1	0	2	2	0
15	3	1/2	1	0	4/3	4	0
16	6	5/2	1	0	4/3	2	0
17	1	0	2	1/2	1/2	10	0
18	3	1/2	2	1/2	7/6	6	0
19	8	3	2	1/2	1/2	6	0

TABLA XII: Datos necesarios para calcular las contribuciones δb_i^T y δb_i^k . $D_{SU(3)}$: es la dimensión en $SU(3)$, $T(D)_{SU(3)}$: es la traza de la representación D -dimensional al cuadrado, $D_{SU(2)}$: es la dimensión en $SU(2)$, $T(D)_{SU(2)}$: es la traza de la representación D -dimensional al cuadrado, $|Y/2|$: denota la hipercarga, N. edos: designa el número de estados (restando los bosones en caso de haber).

Teniendo presente la tabla anterior, se realizó un programa que determina cada una de dichas contribuciones δb_i 's (para las 19 matrices de masas), las compara y obtiene cuál es el conjunto de partículas que cumple (4.3) y por

lo tanto (4.2). En la siguiente tabla se presentan las soluciones encontradas a través de dicho programa

Solución	Matriz k	$n_{(k)}$	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)$	δb_1	δb_2	δb_3
Δ	6	2	(1, 3, ± 1)	9/5	2	0
I	2	1	(8, 1, 0)	0	0	3
	10	2	(3, 1, $\pm 1/3$)	1/5	0	1/2
			Total	4/2	4/2	4/2
II	1	2	(6, 1, $\pm 2/3$)	8/5	0	5/2
	3	2	(3, 2, $\pm 1/6$)	1/10	3/2	1
			Total	7/2	7/2	7/2
III	12	2	(6, 1, $\pm 1/3$)	2/5	0	5/2
	17	2	(1, 2, $\pm 1/2$)	3/10	1/2	0
			Total	5/2	5/2	5/2

TABLA XIII: Soluciones con contribuciones δb_1 , δb_2 , δb_3 para el triplete y las partículas que cumplen con (4.2).

Las soluciones **I** y **II** son descartadas por poseer pocos parámetros que se puedan ajustar.

La solución **III** involucra las matrices

12. $Y/2 = (+1/3, -1/3)$

$$(\bar{\Sigma}_{613^0}, C_{611})$$

$$(\Sigma_{\bar{6}13^0}, C_{\bar{6}11})$$

$$\begin{pmatrix} (3!m_C - 4\eta_C s) & i\beta_2 \frac{\sqrt{2}}{5} b \\ i\beta_1 \frac{\sqrt{2}}{5} b & (m_\Sigma - \eta_A a) \end{pmatrix}$$

17. $Y/2 = (-1/2, +1/2)$

$$(\Sigma_{122^-}, \bar{\Sigma}_{122^-}, C_{1'22^-}, C_{122^-}, H_{122^-})$$

$$(\Sigma_{122^+}, \bar{\Sigma}_{122^+}, C_{1'22^+}, C_{122^+}, H_{122^+})$$

$$\begin{pmatrix} (m_\Sigma + \eta_A b) & -10\eta_S s & i\beta_1 \frac{\sqrt{2}}{5} (a + \frac{b}{2}) & i\beta_1 \frac{\sqrt{6}}{10} a & 0 \\ -10\bar{\eta}_S s & (m_\Sigma - \eta_A b) & i\beta_2 \frac{\sqrt{2}}{5} (a - \frac{b}{2}) & -i\beta_2 \frac{\sqrt{6}}{10} a & 0 \\ i\beta_2 \frac{\sqrt{2}}{5} (a + \frac{b}{2}) & i\beta_1 \frac{\sqrt{2}}{5} (a - \frac{b}{2}) & (3!m_C - \frac{2}{3}\eta_C s) & 0 & i\alpha \frac{\sqrt{3}}{3} a \\ -i\beta_2 \frac{\sqrt{6}}{10} a & i\beta_1 \frac{\sqrt{6}}{10} a & 0 & 6(m_C + \eta_C s) & i\alpha \frac{1}{3} b \\ 0 & 0 & i\alpha \frac{\sqrt{3}}{3} a & -i\alpha \frac{1}{3} b & (m_H + 3\eta_H s) \end{pmatrix}$$

Estas matrices contienen suficientes parámetros para ajustar, no contribuyen al decaimiento del protón y se obtienen tripletes ligeros.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se calculó en detalle el rompimiento de simetría y el espectro de masas para el modelo $SO(10)$ que contiene las representaciones $H = \mathbf{10}$, $S = \mathbf{54}$, $A = \mathbf{45}$, $C = \mathbf{120}$, $\Sigma = \mathbf{126}$, $\bar{\Sigma} = \overline{\mathbf{126}}$.

En el primer capítulo se revisaron las ecuaciones del grupo de renormalización para cada grupo de calibre, una vez que los tres acoplamientos de calibre se unifican en uno solo. También se realizó una breve revisión de cómo se escribe un potencial escalar en supersimetría, característica en una teoría supersimétrica como en el caso del modelo no-minimal $SO(10)$ objeto de estudio en este trabajo.

Se estudiaron las características principales que posee una teoría $SO(10)$. Algunas de las características están presentes en subgrupos que están contenidos en $SO(10)$, como el modelo L-R supersimétrico y el modelo PS. También se revisó brevemente un modelo $SO(10)$ mínimo GUT, presentado por Bajc, Melfo, Senjanović y Vissani, en [10]. Pero este modelo deja de ser minimal en el momento que hay que agregarle la representación 120 para obtener una relación de masa para los neutrinos semejante a los datos experimentales conocidos hasta los momentos.

Ya que se pueden estudiar modelos que contengan $\mathbf{45}$ y $\mathbf{54}$ en lugar de $\mathbf{210}$, se propuso un modelo no-minimal $SO(10)$ considerando que el conjunto de representaciones de Higgs presentes en la teoría son: $\mathbf{10}$, $\mathbf{54}$, $\mathbf{45}$, $\mathbf{120}$, $\mathbf{126}$, $\overline{\mathbf{126}}$. Se obtuvieron los patrones de rompimiento de simetría (Tabla XIV) y el correspondiente espectro de partículas (subsección 3.3.10), siendo necesario una descomposición completa bajo el grupo del modelo estándar de estos campos (Tabla I).

Para obtener el espectro de masa de las partículas para este modelo,

se calculó cada uno de los términos F (Tablas II \rightarrow XI), determinados a partir del superpotencial y considerando que los campos que adquieren VEVs para romper simetría son $s = \langle(1, 1, 1)_S\rangle$, necesario para romper hasta PS, $b = \langle(1, 1, 3)_A\rangle$, $a = \langle(15, 1, 1)_A\rangle$, equivalente al que se necesita para romper PS, $\sigma = \langle(\overline{10}, 1, 3)_\Sigma\rangle$, $\bar{\sigma} = \langle(10, 1, 3)_{\bar{\Sigma}}\rangle$, necesarios para tener mecanismo see-saw ya que contienen los tripletes, como en el modelo L-R.

Una vez que se obtuvo el espectro de partículas se calculó de qué manera los tripletes contenidos en Σ y $\bar{\Sigma}$ pueden mantenerse livianos, con masa $M_\Delta < M_X$, garantizando que la masa para neutrino sea pequeña. Se encontraron tres posibles escenarios, donde partículas en diferentes representaciones pueden cancelar las contribuciones de los tripletes y mantener las predicciones de unificación. De estos tres, sólo uno es viable, en el sentido de que las matrices de masa poseen suficientes parámetros que pueden ajustarse para obtener un autovalor pequeño.

www.bdigital.ula.ve

Apéndice A

Descomposición de representaciones de $SO(10)$

La representación fundamental $\mathbf{6}$ de $SO(6)$ están dadas por los índices

$$\begin{aligned} r &: 5 + i6 \\ \mathbf{3}_{(-2/3)} & \quad b : 7 + i8 \\ g &: 9 + i0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde $-7/3 = F - I$
Los dobletes de $SU(2)_R$ están dados por

$$T_{3L} = +1/2, T_{3R} = +1/2 : [-1 + i2] \tag{A.2}$$

$$T_{3L} = +1/2, T_{3R} = -1/2 : [3 + i4]$$

$$T_{3L} = -1/2, T_{3R} = +1/2 : [3 - i4] \tag{A.3}$$

$$T_{3L} = -1/2, T_{3R} = -1/2 : [1 + i2]$$

En las tablas que siguen están dadas la descomposiciones de cada una de las representaciones en los estados del modelo estándar escritos en índices de $SO(10)$. Para $SU(3)$ están dadas todas las combinaciones de colores, etiquetados con índices y subíndices r, b, g . Para los tripletes de $SU(2)_L$ y $SU(2)_R$ están dados para los $T_{3L}, T_{3R} = -1, 0, +1$.

Los factores de normalización no están presentes.

$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$	Estados en H	Indices $SO(10)$
$(\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	
	r	$5 + i 6$
	b	$7 + i 8$
	g	$9 + i 0$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	
	\bar{r}	$5 - i 6$
	\bar{b}	$7 - i 8$
	\bar{g}	$9 - i 0$
$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	
	$(1, 2^+, 2^+)$	$-1 + i 2$
	$(1, 2^+, 2^-)$	$3 + i 4$
	$(1, 2^-, 2^+)$	$3 - i 4$
	$(1, 2^-, 2^-)$	$1 + i 2$

Cuadro A.1: Descomposición de los estados de la representación $\mathbf{10}$.

$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$	Estados en S	Indices $SO(10)$
$(20, 1, 1)$	$(6, 1, 1)$ rr bb gg $rb + br$ $gb + bg$ $rg + gb$ $(\bar{6}, 1, 1)$ $(8, 1, 1)$ $r\bar{r} - b\bar{b}$ $r\bar{r} - g\bar{g}$ $r\bar{g}$ $r\bar{b}$ $b\bar{g}$ $g\bar{r}$ $b\bar{r}$ $g\bar{b}$	$55 - 66 + i 56$ $77 - 88 + i 78$ $99 - 00 + i 90$ $57 - 68 + i (58 + 67)$ $79 - 80 + i (89 + 70)$ $59 - 60 + i (50 + 69)$ conjugados de los anteriores $55 + 66 - 77 - 88$ $55 + 66 - 99 - 00$ $59 + 60 + i (69 - 50)$ $57 + 68 + i (-58 + 67)$ $79 + 80 + i (89 - 70)$ $59 + 60 + i (50 - 69)$ $57 + 68 + i (58 - 67)$ $79 + 80 + i (70 - 89)$
$(6, 2, 2)$	$(3, 2, 2)$ $(3_r, 2^+, 2^+)$ $(3_r, 2^+, 2^-)$ $(3_r, 2^-, 2^+)$ $(3_r, 2^-, 2^-)$ $(3_b, 2^+, 2^+)$ $(3_b, 2^+, 2^-)$ $(3_b, 2^-, 2^+)$ $(3_b, 2^-, 2^-)$ $(3_g, 2^+, 2^+)$ $(3_g, 2^+, 2^-)$ $(3_g, 2^-, 2^+)$ $(3_g, 2^-, 2^-)$ $(\bar{3}, 2, 2)$ $(\bar{3}_r, 2^+, 2^+)$ $(\bar{3}_r, 2^+, 2^-)$ $(\bar{3}_r, 2^-, 2^+)$ $(\bar{3}_r, 2^-, 2^-)$ $(\bar{3}_b, 2^+, 2^+)$ $(\bar{3}_b, 2^+, 2^-)$ $(\bar{3}_b, 2^-, 2^+)$ $(\bar{3}_b, 2^-, 2^-)$ $(\bar{3}_g, 2^+, 2^+)$ $(\bar{3}_g, 2^+, 2^-)$ $(\bar{3}_g, 2^-, 2^+)$ $(\bar{3}_g, 2^-, 2^-)$	$-(15 + 26) + i (25 - 16)$ $35 - 46 + i (45 + 36)$ $35 + 46 - i (45 - 36)$ $15 - 26 + i (25 + 16)$ $-(17 + 28) + i (27 - 18)$ $37 - 48 + i (47 + 38)$ $37 - 48 - i (47 - 38)$ $17 - 28 - i (27 - 18)$ $-(19 + 20) + i (29 + 10)$ $39 - 40 + i (49 + 30)$ $39 + 40 - i (49 - 30)$ $19 - 20 + i (29 + 10)$ $-15 + 26 + i (25 + 16)$ $35 + 46 + i (45 - 36)$ $35 - 46 - i (45 + 36)$ $15 + 26 + i (25 - 16)$ $-17 + 28 + i (27 + 18)$ $37 + 48 + i (47 - 38)$ $37 - 48 - i (47 + 38)$ $17 + 28 + i (27 - 18)$ $-19 + 20 + i (29 + 10)$ $39 + 40 + i (49 - 30)$ $39 - 40 - i (49 + 30)$ $19 + 20 + i (29 - 10)$
$(1, 3, 3)$	$(1, 3^0, 3^+)$ $(1, 3^0, 3^-)$ $(1, 3^0, 3^0)$	$-13 + 24 + i (14 + 23)$ $13 - 24 + i (14 + 23)$ $-(11 + 22) + (33 + 44)$
$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$	$-(11 + 22 + 33 + 44)$ $+(55 + 66 + 77 + 88 + 99 + 00)$

Cuadro A.2: Descomposición de los estados de la representación **54**.

$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$	Estados en A	Indices $SO(10)$	
$(15, 1, 1)$	$(8, 1, 1)$		
	$r\bar{r} - b\bar{b}$	78 - 56	
	$r\bar{r} - g\bar{g}$	90 - 56	
	$r\bar{g}$	59 + 60 + i (69 - 50)	
	$r\bar{b}$	57 + 68 + i (67 - 58)	
	$b\bar{g}$	79 + 80 + i (89 - 70)	
	$b\bar{r}$	-(57 + 68) + i (67 - 58)	
	$g\bar{r}$	-(59 + 60) + i (69 - 50)	
	$g\bar{b}$	-(79 + 80) + i (89 - 70)	
	$(3, 1, 1)$		
	$\bar{r}\bar{g} - \bar{g}\bar{r}$	59 - 60 - i (50 + 69)	
	$\bar{g}\bar{b} - \bar{b}\bar{g}$	80 - 79 + i (70 + 89)	
	$\bar{r}\bar{b} - \bar{b}\bar{r}$	57 - 68 - i (58 + 67)	
	$(\bar{3}, 1, 1)$	conjugado de los anteriores	
	$(1, 1, 1)$		
$r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}$	-(56 + 78 + 90)		
$(6, 2, 2)$	$(3, 2, 2)$		
	$(3_r, 2^+, 2^+)$	15 + 26 - i (25 - 16)	
	$(3_r, 2^+, 2^-)$	-(35 - 46) - i (45 + 36)	
	$(3_r, 2^-, 2^+)$	-(35 + 46) + i (45 - 36)	
	$(3_r, 2^-, 2^-)$	-(15 - 26) - i (25 + 16)	
	$(3_b, 2^+, 2^+)$	17 + 28 - i (27 - 18)	
	$(3_b, 2^+, 2^-)$	-(37 - 48) - i (47 + 38)	
	$(3_b, 2^-, 2^+)$	-(37 + 48) + i (47 - 38)	
	$(3_b, 2^-, 2^-)$	-(17 + 28) - i (27 + 18)	
	$(3_g, 2^+, 2^+)$	19 - 20 - i (29 - 10)	
	$(3_g, 2^+, 2^-)$	-(39 - 40) - i (49 + 30)	
	$(3_g, 2^-, 2^+)$	-(39 + 40) + i (49 - 30)	
	$(3_g, 2^-, 2^-)$	-(19 - 20) - i (29 + 10)	
	$(\bar{3}, 2, 2)$		
	$(\bar{3}_r, 2^+, 2^+)$	15 - 26 - i (25 + 16)	
	$(\bar{3}_r, 2^+, 2^-)$	-(35 + 46) - i (45 - 36)	
	$(\bar{3}_r, 2^-, 2^+)$	-(35 - 46) + i (45 + 36)	
	$(\bar{3}_r, 2^-, 2^-)$	-(15 + 26) - i (25 - 16)	
	$(\bar{3}_b, 2^+, 2^+)$	17 - 28 - i (27 + 18)	
	$(\bar{3}_b, 2^+, 2^-)$	-(37 + 48) - i (47 - 38)	
	$(\bar{3}_b, 2^-, 2^+)$	-(37 - 48) + i (47 + 38)	
	$(\bar{3}_b, 2^-, 2^-)$	-(17 + 28) - i (27 - 18)	
	$(\bar{3}_g, 2^+, 2^+)$	19 - 20 - i (29 + 10)	
	$(\bar{3}_g, 2^+, 2^-)$	-(39 + 40) - i (49 - 30)	
	$(\bar{3}_g, 2^-, 2^+)$	-(39 - 40) + i (49 + 30)	
	$(\bar{3}_g, 2^-, 2^-)$	-(19 + 20) - i (29 - 10)	
	$(1, 3, 1)$	$(1, 3^0, 1)$	12 - 34
		$(1, 3^+, 1)$	14 - 23 - i (13 + 24)
		$(1, 3^-, 1)$	14 - 23 + i (13 - 24)
	$(1, 1, 3)$	$(1, 1, 3^0)$	12 + 34
$(1, 1, 3^+)$		14 + 23 + i (13 - 24)	
$(1, 1, 3^-)$		14 + 23 - i (13 + 24)	

Cuadro A.3: Descomposición de los estados de la representación 45.

$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$	Estados en C	Indices $SO(10)$
$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ $(1, 2, 2^+)$ $(1, 2, 2^-)$	$(134) - i(234)$ $(123) + i(124)$
$(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{1}', \mathbf{2}, \mathbf{2})$ $(1', 2, 2^+)$ $(1', 2, 2^-)$ $(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ $(3, 2, 2^+)$ $(3, 2, 2^-)$ $(\bar{\mathbf{3}}, 2, 2^+)$ $(\bar{\mathbf{3}}, 2, 2^-)$ $(\mathbf{8}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ $(8, 2, 2^+)$ $(8, 2, 2^-)$	$-(190 + 178 + 156) + i(290 + 278 + 256)$ $(390 + 378 + 356) + i(490 + 478 + 456)$ $(160 - 159 + 250 + 269)$ $+i(-260 + 259 + 150 + 169)$ $(-360 + 359 + 450 + 469)$ $+i(-460 + 459 - 350 - 360)$ $(160 - 159 - 250 - 269)$ $+i(-260 + 259 - 150 - 169)$ $(-360 + 359 - 450 - 469)$ $+i(-460 + 459 + 350 + 369)$ $-(156 - 178) + i(256 - 278)$ $(356 - 378) + i(456 - 478)$
$(\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ $(3, 1, 3^0)$ $(3, 1, 3^+)$ $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}^-)$ $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ $(\bar{\mathbf{3}}, 1, 3^0)$ $(\bar{\mathbf{3}}, 1, 3^+)$ $(\bar{\mathbf{3}}, 1, 3^-)$	$(127 + 347) - i(128 + 348)$ $(-138 + 248 + 147 + 237)$ $+i(137 - 247 - 148 - 238)$ $(147 + 237 + 138 - 248)$ $+i(-137 + 247 + 148 + 238)$ $(127 + 347) + i(128 + 348)$ $(138 + 248 + 147 + 237)$ $+i(137 - 247 - 148 - 238)$ $(-138 + 248 + 147 + 237)$ $+i(-137 + 247 - 148 - 238)$
$(\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$ $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(127 - 347) + i(128 - 348)$ $(127 - 347) - i(128 - 348)$
$(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ $(\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(579 - 689 - 580 - 670)$ $+i(570 + 589 + 679 - 680)$ $(568 + 890) - i(567 + 790)$ $(568 - 890) + i(567 - 790)$
$(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ $(\bar{\mathbf{6}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(579 - 689 - 580 - 670)$ $-i(570 + 589 + 679 - 680)$ $(568 + 890) + i(567 + 790)$ $(-568 + 890) - i(567 - 790)$

Cuadro A.4: Descomposición de los estados de la representación **120**.

$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$	Estados en Σ	Indices $SO(10)$
$(\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$12347 + i 12348$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$12347 - i 12348$
$(\mathbf{10}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$(12579 - 12689 - 12580 - 12670)$ $(i 12570 + i 12589 + i 12679 - i 12680)$ $-(12 \rightarrow 34)$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$12568 + 12890 - i 1267 - i 12790$ $-(12 \rightarrow 34)$
	$(\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$	$12568 - 12890 + i 12567 - i 12790$ $-(12 \rightarrow 34)$
$(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$	$12579 - 12689 - 12580 - 12670$
	$(\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}^0)$	$-i 12570 - i 12589 - i 12679 + i 12680$ $+i(12 \rightarrow 34)$
	$(\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}^+)$	$i 13579 - i 13689 - i 13580 - i 13670$ $+13570 + 13589 + 13679 - 13680$ $-(13 \rightarrow 24) - i(13 \rightarrow 14) - i(13 \rightarrow 23)$
	$(\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}^-)$	$-i(13579 - 13689 - 13580 - 13670)$ $-i 13570 - i 13589 - i 13679 + i 13680$ $-(13 \rightarrow 24) + i(13 \rightarrow 14) + i(13 \rightarrow 23)$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$	$12568 + 12890 + i 12567 + i 12790$ $+(12 \rightarrow 34)$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}^0)$	$+i 13568 + i 13890 - 13567 - 13790$ $-(13 \rightarrow 24) - i(13 \rightarrow 14) - i(13 \rightarrow 23)$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}^+)$	$-i 13568 - i 13890 + 13567 + 13790$ $-(13 \rightarrow 24) - i(13 \rightarrow 14) - i(13 \rightarrow 23)$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}^-)$	$+i 13568 + i 13890 - 13567 - 13790$ $-(13 \rightarrow 24) - i(13 \rightarrow 14) - i(13 \rightarrow 23)$
	$(\bar{\mathbf{6}}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$	$12568 - 12890 - i 12567 - i 12790$ $+(12 \rightarrow 34)$
	$(\bar{\mathbf{6}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}^0)$	$i 13568 - i 13890 + 13567 - 13790$ $-(13 \rightarrow 24) - i(13 \rightarrow 14) - i(13 \rightarrow 23)$
	$(\bar{\mathbf{6}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}^+)$	$-i 13568 + i 13890 - 13567 + 13790$ $-(13 \rightarrow 24) + i(13 \rightarrow 14) + i(13 \rightarrow 23)$
	$(\bar{\mathbf{6}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}^-)$	$+i 13568 + i 13890 - 13567 - 13790$ $-(13 \rightarrow 24) - i(13 \rightarrow 14) - i(13 \rightarrow 23)$
$(\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	$-15678 - 15690 - 17890$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}^+)$	$-i(1 \rightarrow 2)$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}^-)$	$35678 + 35690 + 37890$ $+i(3 \rightarrow 4)$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	$-16789 - 15780 - i 15789 + i 16780$ $-i(1 \rightarrow 2)$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}^+)$	$36789 + 35780 + i 35789 - i 36780$ $+i(3 \rightarrow 4)$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}^-)$	$36789 + 35780 + i 35789 - i 36780$ $+i(3 \rightarrow 4)$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	$16789 + 15670 - i 15789 + i 16780$ $-i(1 \rightarrow 2)$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, \mathbf{2}^+)$	$-36789 - 35780 + i 35789 - i 36780$ $-i(3 \rightarrow 4)$
	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, \mathbf{2}^-)$	$-36789 - 35780 + i 35789 - i 36780$ $-i(3 \rightarrow 4)$
	$(\mathbf{8}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	$-17890 + 15690 - i(1 \rightarrow 2)$
	$(\mathbf{8}, \mathbf{2}, \mathbf{2}^+)$	$37890 - 35690 + i(3 \rightarrow 4)$
	$(\mathbf{8}, \mathbf{2}, \mathbf{2}^-)$	$37890 - 35690 + i(3 \rightarrow 4)$

Cuadro A.5: Descomposición de los estados de la representación **126**.

Apéndice B

Patrones rompimiento de simetría

Soluciones a ecuaciones de términos F. Patrones de rompimiento de simetría

	s	a	b	σ^2
I	0	0	0	0
II	$-\frac{m_S}{\lambda_A}$	0	0	0
III	$\frac{m_A}{4\lambda_A}$	$\frac{\sqrt{5}}{2\lambda_A} \sqrt{m_A(m_S + m_A \frac{\lambda_S}{4\lambda_A})}$	0	0
IV	$-\frac{m_A}{6\lambda_A}$	0	$\sqrt{\frac{5}{6}} \frac{1}{\lambda_A} \sqrt{m_A(m_S - m_A \frac{\lambda_S}{6\lambda_A})}$	0
V	0	$-\frac{m_\Sigma}{5\eta_A}$	$\frac{m_\Sigma}{5\eta_A}$	$\frac{2}{5} \frac{m_A m_\Sigma}{\eta_A^2}$
VI	$\frac{m_A}{2\lambda_A} (y - 1)$	$\frac{m_\Sigma}{\eta_A} \frac{(2-3y)}{5y}$	$\frac{m_\Sigma}{\eta_A} \frac{(3-2y)}{5y}$	$\frac{2}{5} \frac{m_A m_\Sigma}{\eta_A^2} \frac{(3y-2)(3-2y)}{y}$ $y^2 \frac{(r+y-1)}{(y+1)} = q$ $r = \frac{2m_S}{m_A} \frac{\lambda_A}{\lambda_S}$ $q = \frac{4}{25} \frac{\lambda_A^2}{\eta_A^2} \frac{\lambda_A}{\lambda_S} \frac{m_\Sigma^2}{m_A^2}$

TABLA XIV: Solución términos F

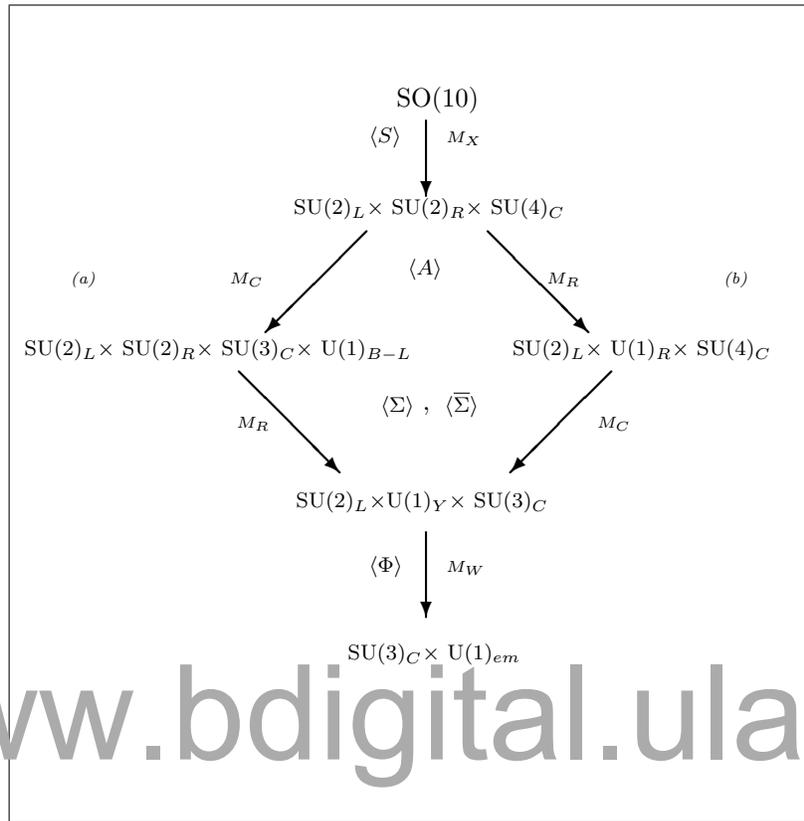


FIGURA 1: Patrones de rompimiento de simetría: (a) $s \gg a \gg \sigma = \bar{\sigma} \gg b$, con $y > 1$; (b) $s \gg b \gg \sigma = \bar{\sigma} \gg a$, con $y < 1$.

Bibliografía

- [1] T. Yanagida. proceedings of the workshop on unified theories and baryon number in the universe. In A. Sugamoto A. Sawada, editor, *Tsukuba*, number KEK Report No. 79-18. Tsukuba, 1979.
- [2] P. Ramond M. Gell-Mann and R. Slansky. proceedings of the supergravity stony brook workshop. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [3] S. Glashow. Proceedings, quarks and leptons. page 687, Cargese, 1979.
- [4] R. N. Mohapatra and G. Senjanović. *Phys. Rev. Lett.* 44:44, 1980
- [5] A. Melfo C.Aulakh and G. Senjanović. *Phys. Rev.*, D(57):4174–4178, 1998.
- [6] K. Benakli C.Aulakh and G. Senjanović. *Phys. Rev. Lett.*, (79):2188, 1997.
- [7] A. Rašin C.Aulakh, A. Melfo and G. Senjanović. *Phys. Lett.*, B(459):557, 1999.
- [8] A. Melfo A. Rašin C.Aulakh, B. Bajc and G. Senjanović. *Nucl. Phys.*, B(597):89–109, 2001.
- [9] X. G. He and Meljanac. *Phys. Rev*, D(41):1620–1629, 1990.
- [10] G. Senjanović B. Bajc, A. Melfo and F. Vissani. *Phys. Rev.*, D(70):035007, 2004.
- [11] F. Wilczek S. Dimopoulos, S.Raby. *Phys. Rev*, D(24):1681, 1981.
- [12] G. G. Ross L. E. Ibáñez. *Phys. Lett.*, B(105):439, 1981.

- [13] D. R. Jones M. B. Einhorn. *Nucl. Phys.*, B(196):475, 1982.
- [14] G. Senjanović W. Marciano. *Phys. Rev*, D(25):3092, 1982.
- [15] J. R. Ellis M. S. Chanowitz and M. K. Gaillard. *Nucl. Phys.*, B(128):506, 1977.
- [16] M. K. Gaillard A. J. Buras, J. R. Ellis and D. V. Nanopoulos. *Nucl. Phys.*, B(135):66, 1978.
- [17] G. Senjanovic. See-saw and grand unification. arXiv:hep-ph/0501244 v1. 26 Jan, 2005.
- [18] S. Weinberg. *Phys. Rev. Lett.*, (43):1566, 1979.
- [19] J. R. Ellis R. Barbieri and M. K. Gaillard. *Phys. Lett.*, B(90):249, 1980.
- [20] Z. G. Berezhiani E. K. Akhmedov and G. Senjanović. *Phys. Rev. Lett.*, (69):3013, 1992.
- [21] J. Pati and A. Salam. *Phys. Rev.*, D(10):275, 1974.
- [22] R. Mohapatra and J. Pati. *Phys. Rev.*, D(11):2558, 1975.
- [23] G. Senjanović and R. Mohapatra. *Phys. Rev.*, D(12):1502, 1975.
- [24] Z. Chacko and R.Ñ. Mohapatra. *Phys. Rev.*, D(58):015003, 1998.
- [25] R. Mohapatra. *Phys. Rev*, D(34):3457, 1986.
- [26] A. Rašin C. Aulak, A. Melfo and G. Senjanović. *Phys. Rev.*, D(58):115007, 1998.
- [27] A. Melfo and G. Senjanović. *Phys. Rev.*, D(68):035013, 2003.
- [28] A. Salam J. C. Pati and Sarkar. *Phys. Lett.*, B(133):330, 1983.
- [29] M. Frigerio S. Bartolini and M. Malinský. *Phys. Rev*, D(70):095002, June 2004.
- [30] K. S. Babu and C. Macesanu. *Phys. Rev.*, D(72):115003, 2005.