



**UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES**
V E N E Z U E L A

Estimación del retorno de acciones y criptomonedas a través de un enfoque de volatilidad estocástica

www.bdigital.ula.ve

Alberto Flórez Peña

Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Instituto de Estadística Aplicada y Computación
Mérida, Venezuela
2022

C.C. Reconocimiento

Resumen

Las series de retornos financieros del mercado de criptomonedas, así como otros rendimientos financieros de alta frecuencia, se caracterizan por presentar colas pesadas en su distribución de frecuencias, además de presentar una alta curtosis y volatilidad alrededor de ellas. En este trabajo se ha propuesto emplear dos tipos de modelos sobre los rendimientos de las criptomonedas más importantes, Bitcoin y Ether, y sobre los rendimientos de dos de las empresas más importantes de finales del siglo XX y lo que va del siglo XXI, Apple y Google: los modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicional (GARCH) y los modelos de volatilidad estocástica (SV), respectivamente.

Palabras clave: rendimientos, criptomonedas, GARCH, volatilidad estocástica.

www.bdigital.ula.ve

C.C. Reconocimiento

Contenido

Resumen	VII
1. El Problema	2
1.1. Introducción	2
1.2. Formulación del problema central a investigar	3
1.3. Antecedentes de la investigación	4
1.4. Justificación: importancia, aplicaciones esperadas	5
1.5. Objetivos de la investigación	5
1.5.1. Objetivo general	5
1.5.2. Objetivos específicos	5
2. Marco Teórico	6
2.1. El modelado de retornos de acciones y de criptodivisas	6
2.2. Volatilidad y Heterocedasticidad	6
2.2.1. Proceso Estocástico Heterocedástico	8
2.3. Modelización de los cambios temporales en la volatilidad	8
2.3.1. Modelo Autoregresivo Condicional Heterocedástico (ARCH)	8
2.4. Modelos con memoria larga para la volatilidad.....	10
2.4.1. Modelos Lineales-Simétricos	10
2.4.2. Modelos No Lineales - Asimétricos	17
2.5. Modelos de volatilidad estocástica (SV)	19
2.6. Estimación del modelo SV	21
2.6.1. Estimación por Máxima Verosimilitud	21
2.6.2. Estimación por MCMC	23
3. Marco Metodológico	26
3.1. Elección de acciones y criptomonedas	26
3.2. Datos y arquitectura.....	26
3.3. Modelos.....	27
3.3.1. Metodología para los modelos ARIMA-GARCH y SV	29
4. Resultados y discusión	32
4.1. Análisis descriptivo	32
4.2. Modelo GARCH	39
4.2.1. Estacionariedad en los retornos.....	39
4.2.2. Identificación	41
4.2.3. Elección del mejor modelo GARCH	42
4.2.4. Estimación de los coeficientes de los modelos GARCH	43

4.2.5. Análisis de los residuos	46
4.3. Modelos de volatilidad Estocástica (SV)	46
4.3.1. Modelos SV con máxima verosimilitud	49
4.3.2. Modelos SV con MCMC	50
4.3.3. Coeficientes estimados de los modelos SV	53
4.4. Contraste de los modelos GARCH y SV	55
5. Conclusiones y recomendaciones	57
5.1. Conclusiones	57
5.2. Recomendaciones	58
Bibliografía	59
A. Pruebas Ljung-Box y ARCH LM	62
B. Estimación y próstico de los retornos de Apple con modelo SV / t-student	65
C. Estimación y próstico de los retornos de Google con modelo SV / t-student	67
D. Estimación y pronóstico de los retornos de Bitcoin con el modelo SV/MCMC (ar1)	69
E. Estimación y pronóstico de los retornos de Ether con el modelo SV/MCMC (ar1)	72
F. Código en R	75
G. Repositorio Github	87

Lista de Tablas

4-1.	Distribución del mercado de criptomonedas entre 2015 y 2021	33
4-2.	Estadística descriptiva de los precios y retornos de las acciones y criptomonedas en estudio.	38
4-3.	Resumen de las pruebas de raíz unitaria	39
4-4.	Configuración ARIMA(p,d,q) en los retornos	42
4-5.	Modelos GARCH campeones para cada retorno	42
4-6.	Coeficientes estimados de los modelos GARCH en los retornos de Apple, Google, BTC y ETH.....	45
4-7.	Resumen de criterios de información en el ajuste de modelos SV.	50
4-8.	Medidas de ajuste entre la serie de retornos de prueba y los pronósticos de los modelos SV.....	52
4-9.	Coeficientes estimados con modelos de volatilidad estocásticas por MCMC de los retornos de Apple y Bitcoin.....	54
4-10.	Coeficientes estimados con modelos de volatilidad estocásticas por optimización y distribución T de Student de los retornos de Google y Ether.	54

Lista de Figuras

2-1. Métodos de máxima verosimilitud para estimación de las interacciones de los multivariados	14
3-1. Arquitectura de la solución analítica.	27
3-2. Esquema de pasos empleados para seleccionar, estimar, y comparar los modelos GARCH y SV.....	31
4-1. Compañías más ricas del mundo frente al Producto Interno Bruto (PIB) de algunos pa'ises al cierre de 2019.....	34
4-2. Precios de cierre diario de las acciones de Apple, Google, Bitcoin y Ethereum.	35
4-3. Retornos de las acciones de Apple, Google, Bitcoin y Ethereum.	36
4-4. Histogramas para el retorno de las acciones de Apple, Google, Bitcoin y Ethereum.....	37
4-5. Q-Q Plot de los retorno de las acciones de Apple, Google, Bitcoin y Ether.	38
4-6. Correlogramas de los retornos de Google y Apple.	40
4-7. Correlogramas de los retornos de Bitcoin y ETH.....	41
4-8. Resumen de análisis de los residuos del modelo GARCH de los retornos de Apple	47
4-9. Resumen de analisis de los residuos del modelo GARCH de los retornos de Google	47
4-10. Resumen de análisis de los residuos del modelo GARCH de los retornos de BTC.....	48
4-11. Resumen de análisis de los residuos del modelo GARCH de los retornos de ETH.....	48
4-12. Comparación de las medidas de precisión de los pronósticos ente el modelo SV y el modelo GARCH.	56
B-1. Estimación de los retornos de Apple con modelo SV / t-student	66
B-2. Pronóstico de los retornos de Apple empleando el modelo SV / t-student	66
C-1. Estimación de los retornos de Google con modelo SV / t-student	68
C-2. Pronóstico de los retornos de Google empleando el modelo SV / t-student	68
D-1. Estimación de parámetros del modelo SV/MCMC (ar1) para BTC.	70
D-2. Residuos del modelo SV/MCMC (ar1) para BTC.	70
D-3. Estimación y pronóstico de la volatilidad porcentual de BTC empleando el modelo SV/MCMC (ar1).....	71
E-1. Estimación de parámetros del modelo SV/MCMC (ar1) para ETH.	73

E-2. Residuos del modelo SV/MCMC (ar1) para ETH.	73
E-3. Estimación y pronóstico de la volatilidad porcentual de ETH empleando el modelo SV/MCMC (ar1).....	74

www.bdigital.ula.ve

1. El Problema

1.1. Introducción

A lo largo de la última década, mercados y agentes financieros han experimentado cambios importantes, en una evolución intensamente condicionada por el avance tecnológico que constituye un factor determinante para agilizar la dinámica de las conexiones entre los entornos que intercambian bienes, servicios y activos en la economía, permitiendo que los sistemas de liquidación y compensación de operaciones evolucionen a estandarizaciones más robustas, lo que se traduce en la integración de los mercados financieros a nivel global, en pro de la mejora de la dupla: (*riesgo, rendimiento*) para los inversores. Una de estas innovaciones es la tecnología Blockchain que permite realizar intercambios virtuales seguros de prácticamente cualquier cosa, desde dinero hasta ideas y derechos de autor, dando paso a las denominadas criptomonedas, como el Bitcoin ¹, el Ether, entre otras, operados por agentes privados, los cuales permiten la transferencia de activos digitales e información mediante un registro público de las operaciones sincronizado y compartido entre todos los participantes del esquema sin la necesidad de sistemas centralizados de emisión, registro, compensación y liquidación, a estos sistemas se les conoce como Tecnología de Registros Distribuidos o DLT por sus siglas en inglés.

Así pues, la integración de los mercados financieros a nivel global ha permitido sentar las bases para fomentar la mejora de la dupla: (*riesgo, rendimiento*) para los inversores, otro factor determinante en el mercado financiero global es el predominante factor de la incertidumbre, por lo que analizar los rendimientos de un activo financiero orientado a minimizar los niveles de incertidumbre adecuadamente resulta fundamental para cualquier inversionista, de tal manera que le permita establecer el riesgo y oportunidades de inversión en términos del rendimiento de los diferentes activos financieros al que el inversionista pueda tener acceso, y esto incluye el mercado financiero tradicional y el de criptoactivos.

Por otro lado, el mercado de criptoactivos no sólo se caracteriza por su crecimiento, sino también es el mercado al que se le asocia la mayor volatilidad, “al no poseer regulación alguna, ni respaldo de ninguna institución oficial, el mercado de criptomonedas está expuesto a la manipulación de precios” (Higuera, 2017)[11]. Además de que el riesgo al que se exponen los agentes participantes en este mercado tienden a ser más altos, por lo que los retornos tienen a ser más atractivos, incluso en 2017 Bitcoin alcanzó una rentabilidad

¹El mercado de negociación de criptoactivos, nace a partir del Bitcoin a mediados de octubre de 2008 de la mano de “Satoshi Nakamoto” (Higuera, 2017)[11], siendo considerado como el mercado de mayor crecimiento en lo que va del siglo XXI.

superior a 700 % y una volatilidad anual superior al 50 %.

Ahora bien, los rendimientos de activos financieros ajenos al mercado de criptoactivos, mercados financieros tradicionales como acciones o bonos, no están exentos de presentar fenómenos de alta volatilidad, por lo que se mantiene la continua búsqueda para analizar y mejorar los rendimientos obtenidos por el inversor dónde las series de tiempo suelen presentar exceso de kurtosis, escasa correlación en los niveles y asociaciones lineales directas en la serie de los cuadrados, siendo estos los principales indicadores de la presencia de volatilidades estocásticas a lo largo del tiempo.

1.2. Formulación del problema central a investigar

Partiendo de que la mejora de la dupla (*riesgo, rendimiento*) para los inversores, tiende a ser el núcleo central de las finanzas, dónde se busca minimizar los riesgos de las pérdidas previstas al tiempo que se desea maximizar los rendimientos esperados en el futuro. Han surgido teorías como la denominada valoración de los precios de los activos de capital (CAPM), desarrollada en los años 50 por Markowitz (1952), Tobin (1958) y posteriormente Sharpe (1964), y citados por Medina y Rodríguez (2010) [17], dónde se asocia el riesgo a la varianza del valor de una cartera, y se traduce en una relación entre los rendimientos esperados y la varianza. Por otro lado, Black y Scholes (1973) y Merton (1974), también citados por Rodríguez (2010) [17], abordando el problema de los precios de las opciones ², caso en el cual el precio de las opciones depende de los riesgos y éstos riesgos, a su vez, se miden a partir de la varianza de los rendimientos del activo financiero, siendo además la volatilidad de un periodo actual conjunto a la volatilidad del periodo futuro las mejores medidas del riesgo al que se estará expuesto.

En base a este nuevo paradigma orientado a la predicción de la volatilidad, se desarrolló una nueva metodología, a partir del comportamiento en la rentabilidad de los activos financieros. Por lo que hoy en día modelos de varianza condicional ARCH y GARCH y, los modelos de volatilidad estocástica (SV), permiten estudiar la naturaleza lineal y no lineal de la volatilidad, respectivamente.

Sin embargo, la aplicación de metodologías de modelado de la volatilidad de criptoactivos y la comparación de sus propiedades respecto a la volatilidad de los precios de los diferentes instrumentos financieros más tradicionales, son al día de hoy, investigaciones que han tenido poco abordaje y un área de investigación con un gran potencial si se considera que el mercado de criptoactivos suma un interés creciente por nuevas formas de acumular valor, además de la posible incertidumbre sobre su potencial uso y los riesgos que implica como una alternativa a los mercados financieros.

²“Las opciones proporcionan a su propietario el derecho de vender un activo a un precio determinado en un momento del futuro.” (Medina y Rodríguez, 2010) [17]

1.3. Antecedentes de la investigación

En los mercados financieros, sobre todo en una situación tan creciente como lo es la globalización, es conveniente que los inversores dispongan de la mayor información posible para tomar las decisiones que le permitan obtener los mejores resultados. Por esta razón, es común encontrar diferentes investigaciones que buscan compaginar conclusiones sólidas para la toma de decisiones en base a los resultados obtenidos con modelos estadísticos, financieros o econométricos, sobre la evolución de los rendimientos de diferentes índices de mercados financieros.

A saber, los modelos de volatilidad también permiten entender la relación entre fenómenos económicos que se pueden aplicar al mercado de criptomonedas o el mercado financiero tradicional, algunos ejemplos de ello son los trabajos de Hultman (2018) [13] en su estudio empírico de Bitcoin empleando modelos GARCH, bivariate-BEKK y de volatilidad estocástica (SV) con datos de transacciones minuto a minuto entre agosto de 2015 y junio de 2018, determinó que un modelo GARCH(1,1) es superior a un modelo SV, haciendo énfasis en que el método MCMC de estimación de los parámetros del modelo SV pudo influir en dicho resultado. Mientras que Silva (2017) [28] utilizó un modelo de volatilidad estocástica y estimó la relación entre el mercado de derivados y la tasa de inflación; Su trabajo parte del hecho de que aunque existe una amplia gama de investigaciones sobre la relación entre la política monetaria y los productos derivados, dichas investigaciones han constituido resultados y conclusiones opuestas, donde el principal factor puede atribuirse a la alta volatilidad de las series, especialmente por el acelerado crecimiento de un mercado que representa una disrupción en el área financiera.

A su vez, en el estudio de Sanchez (2016) [27] se realizó una revisión rigurosa de diferentes trabajos orientados a superar la limitación del modelo inicial de Black-Scholes al suponer volatilidades constantes, donde si bien se presentan algunos resultados numéricos aplicado a los mercados de tipos de cambio (FX), la metodología desarrollada en su trabajo y enmarcada en los modelos de volatilidad estocástica (SV), se puede aplicar en otros mercados financieros.

Por otra parte, se han realizado otros estudios sobre los fundamentos del mercado de criptomonedas, orientados hacia la dinámica y volatilidad, especialmente en lo que respecta a la hipótesis de especulación y volatilidad alrededor de su principal activo, el Bitcoin, así como lo señalan los estudios de Bouoiyour y Selmi (2016), Bouri, Azzi, y Dyhrberg (2017), y Dyhrberg (2016), citados por Baur (2017) [2], en los que se emplearon modelos GARCH para estimar la volatilidad diaria de los retornos del Bitcoin, concluyendo ambos que el nivel de volatilidad del mercado de Bitcoin es comparativamente alto, ofreciendo diferentes explicaciones orientadas a factores como ataques cibernéticos, asimetría de información, descentralización o ausencia de regulación, apuntando a hipótesis de especulación y la intervención de las denominadas "ballenas" del mercado.

1.4. Justificación: importancia, aplicaciones esperadas

Los agentes de los mercados financieros, a raíz del paradigma de volatilidad como una medida de riesgo, desde hace varias décadas han tendido a centrarse en su estudio, y si se considera que además que es una variable no observable (variable latente), se hace necesario proponer, desarrollar y comparar diferentes modelos para su descripción y estimación futura.

Por otro lado, la presencia de memoria larga en la volatilidad de los rendimientos de activos financieros en los diferentes mercados, especialmente en los criptoactivos, ha impulsado la incorporación de más inversionistas. Por lo que la volatilidad estocástica sigue teniendo una importancia altamente significativa en el entendimiento y descripción del valor futuro de un portafolio, lo que se traduce en implicaciones importantes para la toma de decisiones de los inversionistas para la integración de sus portafolios y coberturas, pero para llegar a una toma de decisiones acertada se debe establecer metodologías que permitan establecer el modelo más adecuado para explicar la dinámica de la volatilidad.

Por ello, se deben sentar bases que promuevan el implementar y adoptar una metodología robusta para el cálculo de medidas de riesgo en mercado de activos y criptoactivos, donde se pueda discernir y comparar las propiedades dinámicas estocásticas de los retornos de los activos y criptoactivos.

1.5. Objetivos de la investigación

1.5.1. Objetivo general

Identificar los principales modelos de volatilidad con mejor ajuste al comportamiento de los retornos de las principales acciones y criptodivisas del mercado mundial.

1.5.2. Objetivos específicos

1. Establecer, a través del uso de métodos de Pareto, el top de las principales acciones y criptodivisas del mercado mundial susceptibles a ser comparadas según su valor de mercado y transaccionalidad.
2. Describir el comportamiento de las series de tiempo de los rendimientos de las acciones y criptoactivos seleccionados bajo el criterio pareto.
3. Explorar las propiedades dinámicas estocásticas de los activos financieros seleccionados.
4. Estimar los modelos de volatilidad condicional GARCH y volatilidad estocástica (SV) aplicables al mercado de acciones y criptodivisas.
5. Comparar el ajuste de los modelos estimados de los retornos de las principales acciones y criptodivisas del mercado mundial.

2. Marco Teórico

2.1. El modelado de retornos de acciones y de criptodivisas

El mercado de acciones, así como el mercado de criptoactivos, es un tema común en el mercado financiero, siendo este último quien suele caracterizarse por poseer altas volatilidades y una poca regulación (Jaramillo, 2021)[14], pero sin dejar de ser un activo de gran interés para los inversionistas dadas sus características de innovación y potencial tecnológico, que no solo le permite reducir la comisión de una transacción financiera al no tener que depender de intermediarios, sino que también permite alcanzar una mayor velocidad de liquidación, lo que lo proyecta como el presente y futuro de las transacciones financieras.

Sin embargo, la globalización ha promovido una creciente interconexión de los mercados de acciones, que conlleva a una mayor exposición y propagación de choques entre los mercados, traduciéndose en una mayor volatilidad, por lo que la importancia de evaluar el riesgo en los mercados financieros incrementando la demanda de un adecuado modelado de la volatilidad en los retornos de activos.

Dicho modelado, parte del respectivo entendimiento de las características de las series de retornos de acciones o criptoactivos, para posteriormente ocupar modelos de volatilidad estocástica, con lo que es más sencillo reproducir el efecto leverage ¹, ya que basta con permitir que las innovaciones de las ecuaciones de los retornos pasados y de la varianza actual estén negativamente correlacionadas (Ruiz, 2012) [26] para hacer uso de los modelos de volatilidad estocástica.

2.2. Volatilidad y Heterocedasticidad

En los mercados financieros, también existe una gran cantidad de series de tiempo que presentan periodos de relativa estabilidad, pero a su vez se pueden exhibir comportamientos altamente volátiles, por lo cual la literatura reciente intenta modelar dicho comportamiento del término aleatorio. La volatilidad puede ser vista como una medida de riesgo de los activos financieros ante los cambios aleatorios o impredecibles en la rentabilidad

¹Cuando existe presencia de asimetrías en los retornos de una acción o criptomoneda, usualmente se le denomina como efecto leverage, dichos fenómenos asimétricos reportados en la varianza de los rendimientos se abordan a través del análisis de la volatilidad (Hernandez, 2015) [10]

o el precio de un título, o como bien lo cita Castillo (2015) [3]: “ ...en la representación gráfica de una serie histórica de rendimientos se asocia la volatilidad con la amplitud de las fluctuaciones del rendimiento tanto es que se consideren en valor absoluto como en desviaciones alrededor de un valor medio ”.

Las características propias de una serie de tiempo con volatilidad son:

- Exceso de curtosis o distribuciones leptocúrticas.
- Conglomerado de volatilidad y shocks aleatorios, lo cual se refleja en funciones de autocorrelación simple significativas para los cuadrados de las variables.
- Discontinuidades en la serie. Este comportamiento se denomina camino aleatorio, y se corresponde con los procesos no estacionarios.
- Comportamiento asimétrico de la serie temporal.
- Varianza heterocedástica.
- Efecto apalancamiento; Se observa una respuesta asimétrica de la volatilidad al nivel de los rendimientos.
- Efecto apalancamiento; Se observa una respuesta asimétrica de la volatilidad al nivel de los rendimientos.
- Ausencia de estructura regular dinámica en la media, lo que aparece reflejado en estadísticos Ljung-Box generalmente no significativos (Novales, 2013 [21]).

De acuerdo a lo comentado en los apuntes de Orlandoni (2015) [22], las series de tiempo que exhiben dicho comportamiento se definen Heterocedásticas Condicionales (STHC):

- Las STHC tienen varianza no condicional (varianza de largo plazo) constante, pero se presentan periodos durante los cuales la varianza de corto plazo se aparta de su nivel de largo plazo.
- La Heterocedasticidad Condicional no es una fuente de no estacionariedad de la serie. La falta de estacionariedad se debe a que su varianza no condicional, es decir la varianza de largo plazo, es no constante.

Los análisis de series de tiempo que se realizan mediante modelo ARIMA funcionan únicamente con series estacionarias, sin embargo la mayoría, especialmente las financieras no poseen ésta característica a nivel de la varianza, lo cual invalida los parámetros resultantes de un modelo de regresión lineal, así como los estimadores y las pruebas de significancia, resultando no apropiados para predecir el comportamiento de la varianza condicional.

2.2.1. Proceso Estocástico Heterocedástico

Un proceso estocástico X_t es homocedástico si las desviaciones estándar de los términos X_t son constantes para todos los instantes t . En caso contrario el proceso es Heterocedástico. Si X_t no es Heterocedástico no Condicional entonces se dice Homocedástico no Condicional. Si X_t no es Heterocedástico Condicional entonces se dice Homocedástico Condicional. Dicha Heterocedasticidad puede ser de dos tipos:

- Heterocedasticidad no Condicional (HtnC): Un proceso es HtnC si sus Desviaciones Estándar No Condicionales σ_t son no constantes.
- Heterocedasticidad Condicional (HtC): Un proceso es HtC si sus Desviaciones Estándar Condicionales $\sigma_{t|t-1}$ son no constantes.

Todo lo expuesto anteriormente da paso a los modelos estocásticos de volatilidad, a continuación, mencionaremos los más importantes relacionados con el estudio.

2.3. Modelización de los cambios temporales en la volatilidad

2.3.1. Modelo Autoregresivo Condicional Heterocedástico (ARCH)

Robert Engle (1982) propone un enfoque alternativo al ad hoc, según el cual se introduce una variable independiente X_t , considerada como uno de los factores que causan la volatilidad de la serie $Y_{t+1} = \epsilon_{t+1}X_t$, donde $\epsilon_{t+1} \sim (0, \sigma)$. él demostró basado en los estudios de Mandelbrot (1963) y Klein (1977) que se puede modelar simultáneamente la media y la varianza de Y_{t+1} . en lugar de usar una variable exógena para modelar la volatilidad. Si la varianza de ϵ_t es no constante, es posible modelar cambios en la varianza usando modelos del tipo ARMA para la respuesta media aplicados a la varianza de la serie temporal, por tanto, es reconocido como el primer modelo formal que estudió el comportamiento de la varianza de la variable con respecto al tiempo. La idea fundamental de los modelos ARCH es que la varianza del termino aleatorio en el periodo t depende de los errores al cuadrado de periodos anteriores.

El proceso $ARCH(q)$ se define como:

$$\sqrt{y_t} = \epsilon_t \sqrt{h_t} \quad (2-1)$$

$$h_t = \alpha + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2$$

Donde :

$\epsilon_t \sim iid(0, 1)$ es un fuerte proceso de ruido blanco y $\sigma_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, q$

h_t es un factor denominado volatilidad.

La varianza condicional del proceso se comporta como un proceso autorregresivo de orden q , pues todos los shocks $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-q}$ tienen un efecto directo sobre y_t .

Para un $ARCH_{(1,1)}$ según el cual la varianza condicional de un shock en t es una función de los cuadrados de los shocks pasados: $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$ y tiene las siguientes propiedades:

$$\text{Media incondicional marginal : } E(y_t) = 0 \quad (2-2)$$

$$\text{Varianza incondicional marginal : } E_t(y^2) = \sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1)} \sigma_\epsilon^2 \text{ con } \sigma_\epsilon^2 = 1 \quad (2-3)$$

$$\text{Media incondicional : } E_{t-1}(y_t) = 0 \quad (2-4)$$

$$\text{Varianza incondicional : } E_{t-1}(y_t^2) = \sigma_t^2 = \sigma_\epsilon^2 (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) \quad (2-5)$$

$$\text{Independencia de } y : E(y_t y_{t-1}) = 0 \quad (2-6)$$

Nótese que solamente la varianza condicional está afectada por la estructura ARCH. La estimación de parámetros se realiza mediante el Método de Máxima Verosimilitud (MV). Para el $ARCH_{(1,1)}$ con perturbación gaussiana, si $3\alpha_1 < 1$, el coeficiente de curtosis de y_t es $\frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2}$. Si $\alpha_1 > 0$, este valor es mayor que 3, y por tanto el modelo generará datos con colas más anchas que la distribución normal, propiedad de gran interés si se considera una característica típica de muchas series financieras.

Dado que el proceso $ARCH_{(1,1)}$ es una combinación lineal de los errores y las observaciones se distribuyen normal, la distribución conjunta del proceso es el producto de las densidades marginales del proceso de cada elemento, pero como lo que se maximiza es el logaritmo del proceso, la distribución conjunta es la suma de todas las funciones de densidad. Adicionalmente, si y_i es considerada como función de algunas variables explicativas, se tiene el ARCH de regresión:

$$y_t | \phi_{t-1} \sim N(x_t \beta; h_t) \quad (2-7)$$

$$\epsilon_t = y_t - x_t \beta \quad (2-8)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (2-9)$$

En el cual Engle propone un test de contraste previo al desarrollo del modelo, conocido como Contraste del Multiplicador de Lagrange, se consideran los residuos derivados de la estimación de MCO y se genera el estadístico de prueba $T * R^2 \sim \chi_q^2$ para las hipótesis siguientes:

$$H_0 : \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0 \text{ (No hay modelo ARCH)} \quad (2-10)$$

$$H_1 : \text{Al menos un } \alpha_i \neq 0 \text{ (Hay modelo ARCH)} \quad (2-11)$$

La predicción de un modelo $ARCH_{(q)}$ está dada por:

$$h_{t+s} = \sigma_\epsilon^2 \sum_{i=0}^{s-1} \Phi^{2i} + \alpha^{s-1} (h_{t+1} - \sigma_\epsilon^2) \sum_{i=0}^{s-1} \Phi^{2i-1} \alpha^i \quad (2-12)$$

Una vez más, al ser la varianza condicional del período t una función creciente de la magnitud de las últimas innovaciones, se produce el clustering o agrupamiento temporal de volatilidades. El orden q de la representación ARCH es un indicador de la persistencia de los shocks en varianza.

Otra manera de detectar los efectos ARCH es utilizar los estadísticos tradicionales de Ljung-Box en los correlogramas de los residuos de la ecuación de la media y de los residuos al cuadrado (Tsay, 1986) [30].

Por otro lado, Pérez, A. (2000) [24], menciona que los modelos ARCH también adolecen de ciertos inconvenientes. Por ejemplo, la distribución marginal de y_t suele ser complicada de obtener y tampoco es fácil establecer las condiciones de estacionariedad ni calcular los momentos. Además, estos modelos incluyen una única perturbación, ϵ_t , que afecta conjuntamente al nivel y a la volatilidad de la serie, lo cual resta flexibilidad al modelo y hace que, por ejemplo, el exceso de curtosis y la persistencia de las correlaciones de los cuadrados sean dos características ligadas entre sí, en el sentido de que una no puede cambiar sin que cambie la otra.

2.4. Modelos con memoria larga para la volatilidad

La propiedad de memoria larga suele relacionarse, desde un punto de vista empírico, con la persistencia que muestran las autocorrelaciones muestrales de ciertas series temporales estacionarias, que decrecen a un ritmo muy lento, pero finalmente convergen hacia cero. Este comportamiento no es compatible ni con los modelos estacionarios autorregresivos y de medias móviles (ARMA), que imponen un decrecimiento exponencial en las autocorrelaciones, ni con el grado extremo de persistencia de los modelos integrados no estacionarios.

A partir del modelo original ARCH, se ha generado toda una familia como resultado de varias ampliaciones y extensiones de esos modelos. Puede hacerse la siguiente clasificación:

2.4.1. Modelos Lineales-Simétricos

Estos modelos se denominan simétricos porque el signo del shock aleatorio no tiene efecto sobre la predicción del modelo, pues dicho shock se toma como un valor elevado al cuadrado. Los modelos considerados como simétricos son: El modelo ARCH generalizado (GARCH), el modelo GARCH integrado (IGARCH), el modelo GARCH multiplicativo MGARCH.

Modelo Generalizado Autorregresivo Condicional Heterocedástico (GARCH)

Debido a que en el modelo ARCH de Engle, el orden que es preciso utilizar para recoger la dependencia temporal en la varianza es elevado con lo cual se pierde gran cantidad de grados de libertad por la larga estructura de rezagos de la varianza condicional para

modelar la memoria de los datos, Tim Bollerslev propuso en el año 1986 una estructura más flexible para capturar la memoria larga de la serie, en los que el término aleatorio de la serie sigue un proceso ARMA en lugar de AR, definiéndose mediante la siguiente expresión:

$$\epsilon_t = \eta_t h_t^{1/2} \quad (2-13)$$

$$\epsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (2-14)$$

$$h_t = \alpha + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (2-15)$$

$\alpha \notin 0$

En términos del polinomio de retardos:

$$h_t = \alpha_0 + A(L)\epsilon_t^2 + B(L)h_t \quad (2-16)$$

donde, $\alpha_0 > 0$: $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, q$: $\beta_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, p$; estas condiciones garantizan que la varianza condicional sea positiva y que la $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ se requiere para que la varianza condicional sea convergente o estacionaria.

En éstos la estructura de la varianza condicional depende, además del cuadrado de los errores retrasados q períodos como en el modelo $ARCH(q)$, de las varianzas condicionales retrasadas p períodos. Los parámetros de un modelo $GARCH(p, q)$ se estiman por el método de MV.

Las propiedades del proceso $GARCH(q, p)$ son señaladas por [22]:

- El termino de error η_t es un proceso ruido blanco y es independiente de ϵ_t , entonces la media condicional y condicional de ϵ_t son iguales a cero, como en el caso del proceso $ARCH$. $E(\epsilon_t) = E_{t-1}E(\epsilon_t) = 0$. Esto se refleja en los correlogramas simple y parcial de esos residuos.
- La varianza condicional de ϵ_t viene dada por $E_{t-1}(\epsilon_t^2) = h_t$ Por tanto la varianza condicional de ϵ_t constituye un proceso $ARMA$, dado por la expresión h_t . El modelo $GARCH(q, p)$ permite incorporar componentes auto regresivos y de promedio móvil en su varianza heterocedastica.
- La característica fundamental del modelo $GARCH(p, q)$ está en que la varianza condicional de las perturbaciones aleatorias de Y_t constituye un proceso $ARMA$. Por eso se trata de una generalización del proceso $ARCH$; Si $(p = 0, q = 1)$, se tiene un $GARCH(0, 1)$ que es el modelo $ARCH(1)$ si todos los coeficientes $\beta = 0$, se tiene un modelo $ARCH(q)$.
- Los beneficios por especificar el proceso como un modelo $GARCH$, en lugar de un modelo $ARCH$ con un valor q grande es que se puede usar un proceso más parsimonioso, que puede ser más fácil de identificar y estimar.

Particularmente, un modelo $GARCH(1, 1)$ se caracteriza por:

- η_t es un ruido blanco, es decir, un proceso estocástico estacionario idénticamente distribuido con media 0 y varianza 1.
- La función de distribución marginal es desconocida pero se pueden calcular los dos primeros momentos
- El proceso ϵ_t es estacionario.
- En los momentos condicionales en t , el valor de $t-1$ es un evento concreto conocido, no aleatorio.

Los dos primeros momentos de un modelo $GARCH(1, 1)$ son:

$$\text{Media incondicional marginal : } E(\epsilon_t) = 0 \quad (2-17)$$

$$\text{Varianza incondicional marginal : } E(\epsilon_t^2) = \sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1 - \beta_1)} \quad (2-18)$$

$$\text{Media condicional : } E_{t-1}(\epsilon_t) = 0 \quad (2-19)$$

$$\text{Varianza condicional : } E_{t-1}(\epsilon_t^2) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2 \quad (2-20)$$

A nivel de estimación, en 1992, los investigadores Bollerslev y Wooldrige propusieron una estimación cuasi máximo verosímil (CMV) que garantiza que los parámetros estimados serán consistentes al igual que la matriz de varianzas y covarianzas asociada, y se emplea cuando se sospecha que los residuos del modelo no se distribuyen normal. La hipótesis nula para la no existencia de un modelo $GARCH$ utiliza el contraste del Multiplicador de Lagrange (Véase también Castillo, L. (2015) [3]).

Al igual que en un modelo de $ARCH$, el último de un modelo $GARCH(p, q)$ es pronosticar los valores de la serie en estudio, así el pronóstico de la varianza condicional estará dado por:

$$\sum_{i=1}^n h_{t-i+s}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \epsilon_{t-i+s}^2 + \sum_{i=s}^m \beta_i h_{t-i+s}^2 \quad (2-21)$$

$$\alpha_0 \neq 0 \quad \alpha_i \neq 0 \quad \beta_i \neq 0 \quad (2-22)$$

donde $n = \min\{m, s - 1\}$ y $m = \max\{p, q\}$ donde $s > m$.

Ahora la varianza condicional depende tanto del cuadrado de los errores como de las varianzas condicionales retrasadas p períodos. Si $p = 0$, se tiene el proceso $ARCH(q)$ en regresión.

Modelo Generalizado Autorregresivo Condicional Heterocedástico Integrado (IGARCH)

Muchas veces, aunque la serie original está incorrelacionada, existe correlación en la serie de los cuadrados y, además, estas correlaciones decrecen lentamente, mostrando valores

significativamente distintos de cero incluso para retardos altos.

Esto justifica el interés de un modelo $GARCH(1, 1)$ en el que se imponga la condición $\alpha_1 + \beta_1 = 1$. El modelo resultante denominado $GARCH$ integrado ó $IGARCH$ fue desarrollado por Engle y Bollerslev en 1986 y puede considerarse como una variante entre un $ARCH(q)$ y un $GARCH(p, q)$ cuya característica principal es estimar la varianza partiendo del hecho de que está integrada. Sus primeros momentos condicionales son:

$$E_{t-1}(\epsilon_t) = 0, \quad (2-23)$$

$$E_{t-1}(\epsilon_t^2) = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q p \beta_j h_{t-j} \quad (2-24)$$

$$(2-25)$$

Donde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ y $1 - \sum_{i=1}^p q + \sum_{j=1}^q p \beta_j = 0$. El proceso tiene $d > 0$ raíces unitarias y el $\max(p, q) - d$ raíces fuera del círculo, por lo que el proceso es:

- Si $\alpha_0 > 0$ integrado es varianza de orden d .
- Si $\alpha_0 = 0$ integrado es varianza con tendencia.

En los modelo $IGARCH$ la información existente es el momento t es sumamente importante para realizar predicciones óptimas en cualquier momento $t + s$ de interés. En el caso particular de un modelo $IGARCH(1, 1)$ su medida condicional en el momento t está dada por:

$$E_t(h_{t+1}) = E_t(\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_t^2 + (1 - \alpha_1)h_t) = \alpha_0 + (1 - \alpha_1)h_t \quad (2-26)$$

Y en el caso particular del momento $t + s$ la ecuación 2-26 se transforma en:

$$E_t(h_{t+s}) = s\alpha_0 + h_{t+1} \quad (2-27)$$

El efecto sobre h_{t+s} de h_{t+1} a medida que $s \rightarrow \infty$ es cada vez menor pero nunca nulo, por lo que el efecto de la varianza persiste sobre el modelo.

Los autores encontraron que la distribución de la varianza del error estocástico presentaba una cola superior a la de la distribución normal, descubriendo que la varianza sigue una distribución t-student estandarizada cuyos grados de libertad son desconocidos pero estimables cuando la muestra es menor a 25 observaciones, de lo contrario por el Teorema Central de Límite se utilizará la Normal.

Modelo Generalizado Autorregresivo Condicional Heterocedástico Multivariado (MGARCH)

En el caso multivariado MGARCH, es posible estimar las interacciones entre las volatilidades (varianza-covarianza) de diferentes series en todas las direcciones y existen

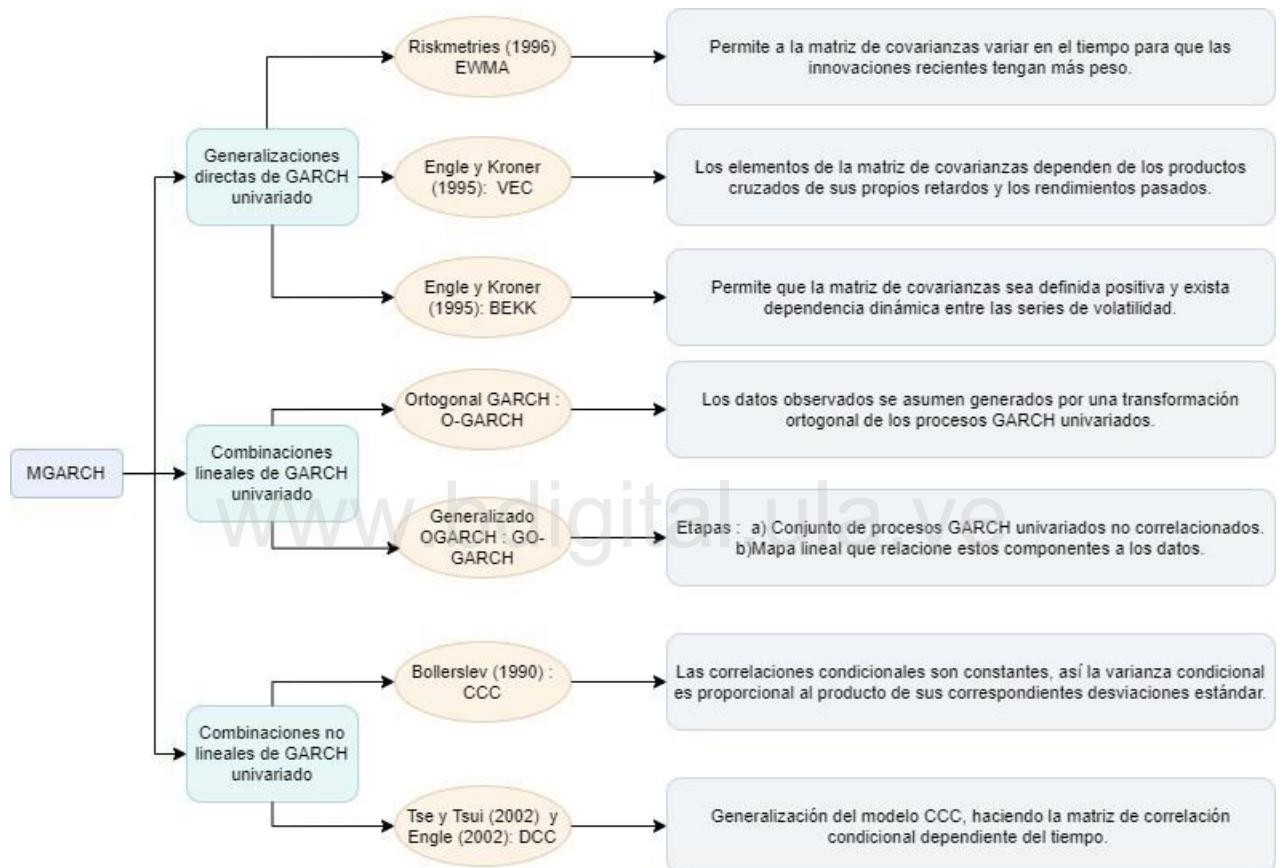


Figura 2-1.: Métodos de máxima verosimilitud para estimación de las interacciones de los multivariados.

Fuente : elaboración propia.

diferentes representaciones que se estiman por el método de máxima verosimilitud, las cuales se resumen a continuación en la figura 2-1.

En el caso de los modelos econométricos, como es el caso de los constant correlation model (CCC) y dynamic correlation model (DCC), estos se han vuelto populares debido a que las restricciones impuestas son simples de modelar. Un modelo similar es el varying conditional correlation (VCC).

Constant correlation model (CCC)

En este caso las correlaciones condicionales son constantes y, en consecuencia, las covarianzas son proporcionales al producto de las desviaciones estándar condicionales correspondientes. Esta restricción reduce el número de parámetros desconocidos y simplifica la estimación. El modelo CCC se define como:

$$H_t = D_t R D_t = (\rho_{ij} \sqrt{h_{iit} h_{jjt}}) \quad (2-28)$$

donde:

$$D_t = \text{diag}(h_{11t}^{1/2}, \dots, h_{NNt}^{1/2}) \quad (2-29)$$

$h_{11t}^{1/2}$ es cualquier modelo *GARCH* univariante. Y $R = (\rho_{ij})$ es una matriz simétrica definida positiva con $\rho_{ii} = 1, \forall i$.

R es la matriz que contiene las correlaciones condicionales constantes ρ_{ij} . El modelo original tenía un *GARCH*(1, 1) como especificación para cada varianza condicional en D_t :

$$h_{iit} = \bar{\omega}_i + \alpha_i \epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{iit-1} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2-30)$$

La matriz H_t es definida positiva si, y solo si, las varianzas condicionales son positivas y R también es definida positiva.

El supuesto de que las correlaciones condicionales son constantes puede parecer no realista, aun así, este modelo ayuda a conocer el grado de interdependencia entre mercados.

Dynamic correlation model (DCC)

Este modelo es una generalización del modelo anterior. Este permite a la matriz de correlación condicional variar en el tiempo, la cual debe ser definida positiva a través del tiempo. Las especificaciones originales del modelo son:

$$H_t = D_t R_t D_t = (\rho_{ij} \sqrt{h_{iit} h_{jjt}}) \quad (2-31)$$

D_t es nuevamente:

$$D_t = \text{diag}(h_{11t}^{1/2}, \dots, h_{NNt}^{1/2}) \quad (2-32)$$

Y h_{iit} puede ser definido como cualquier modelo *GARCH* univariante.

$$R_t = (1 - \vartheta_1 - \vartheta_2)R + \vartheta_1 \psi_{t-1} + \vartheta_2 R_{t-1} \quad (2-33)$$

ϑ_1 y ϑ_2 son parámetros no negativos que satisfacen la condición: $\vartheta_1 + \vartheta_2 < 1$, R es una matriz simétrica de parámetros definida positiva con $\rho_{ii} = 1$, y ψ_{t-1} es una matriz de correlaciones de orden $N \times N$ de ϵ_t para $t = t - M, t - M + 1, \dots, t - 1$. Sus elementos i, j ésimos estan dados por:

$$\text{PorConsolidar} \quad (2-34)$$

donde,

$$u_{it} = \frac{\epsilon_{it}}{\sqrt{h_{iit}}} \quad (2-35)$$

y la matriz ψ_{t-1} es posible definirla como:

$$\psi_{t-1} = B_{t-1}^{-1} L_{t-1} L_{t-1}' B_{t-1}^{-1} \quad (2-36)$$

Y B_{t-1} es una matriz diagonal de orden $N \times N$ como i -ésimos elementos diagonales dados por:

$$\sum_{h=1}^M \left(\frac{2}{i, t-h} \right)^{1/2} \quad (2-37)$$

Y $L_{t-1} = u_{t-1}, \dots, u_{t-M}$ es una matriz $N \times N$ que contiene a $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, \dots, u_{Nt})'$. Se debe destacar que una condición necesaria para garantizar que ψ_{t-1} y R_t sean positivos es que $M \geq N$.

Varying conditional correlation model (VCC)

Finalmente, Tsay y Tsui en 2001 retoman el modelo anterior y, asumiendo rendimientos normales, la función logarítmica de verosimilitud (l_t) de la observación y_t es:

$$l_t = -\frac{1}{2} \ln |D_t \Gamma D_t| - \frac{1}{2} y_t' D_t^{-1} \Gamma^{-1} D_t^{-1} y_t = -\frac{1}{2} \ln |\Gamma| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} y_t' D_t^{-1} \Gamma^{-1} D_t^{-1} y_t \quad (2-38)$$

Donde el número total de parámetros a estimar es $3k + \frac{k(k+1)}{2} + 2$.

2.4.2. Modelos No Lineales - Asimétricos

Estos modelos tratan de solventar las limitaciones que presentan los modelos lineales simétricos, como son:

- Los modelos lineales simétricos solo son sensibles a la magnitud del cambio en la variable analizada (como el cambio en el rendimiento), pero no al signo de dicho cambio. Por tanto, la correlación negativa observada entre la variable rendimiento y los cambios en la volatilidad del rendimiento no puede ser capturada por estos modelos simétricos, por ejemplo.
- Los modelos *GARCH* simétricos imponen condiciones de no negatividad en los valores de sus parámetros, para asegurar la no negatividad de la varianza. Los principales modelos asimétricos son: el modelo *EGARCH* (Exponential Garch) y el modelo *TGARCH* (Threshold Garch).

Modelo Generalizado Autorregresivo Condicional Heterocedástico Exponencial (EGARCH)

En 1987 Milhoj propuso un modelo ARCH logarítmico ante las dificultades de encontrar coeficientes α_i negativos:

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \log(y_{t-1}^2) + \dots + \alpha_q \log(y_{t-q}^2) \quad (2-39)$$

Dicho modelo no requiere condiciones para asegurar que la varianza condicional sea positiva pero una limitación es que h_t es simétrica en los valores pasados, de manera que no pondera de manera apropiada la volatilidad asociada, siendo incapaz de modelizar una respuesta asimétrica a la volatilidad ante las subidas y bajadas de precios por ejemplo. Para solventar éstos inconvenientes, Nelsón (1991) [19], propone un modelo que puede capturar una respuesta asimétrica de la volatilidad ante las innovaciones de distinto signo:

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(h_{t-j}) \quad (2-40)$$

$$g(\eta_t) = \vartheta \eta_t + \gamma[|\eta_t| - E(|\eta_t|)] \quad (2-41)$$

Donde, η_t es el ruido blanco, esto es : $\eta_t \sim iid(0, 1)$. Por lo que las propiedades del modelo son:

- La varianza condicional, h_t , es lineal en η_t , cuya pendiente es $\alpha_i(\vartheta + \gamma)$ cuando $\eta_t > 0$ y es $\alpha_i(\vartheta - \gamma)$ cuando $\eta_t < 0$. Es este hecho el que genera el efecto asimétrico en la varianza condicional.
- El primer término de 2-40 permite una correlación entre el error y futuras varianzas.
- El segundo término de 2-40 es el que produce el efecto *ARCH* en el modelo.

Para el caso particular de un modelo $EGARCH(1, 1)$:

$$y_t = \epsilon_t h_t^{1/2} \quad (2-42)$$

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \beta_1 \log(h_{t-1}) + \alpha_1 \left\| \frac{\epsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right\| + \gamma \sqrt{\frac{\epsilon_{t-1}}{h_{t-1}}} \quad (2-43)$$

Donde, $\beta_1 \log(h_{t-1})$ es la varianza heterocedástica; $\gamma \sqrt{\frac{\epsilon_{t-1}}{h_{t-1}}}$ es el valor autorregresivo del

término de error, y $\frac{\epsilon_{t-1} i}{\sqrt{h_{t-1}}}$ es el efecto asimétrico tal que $i = \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{si } \epsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases}$. La

función de distribución del modelo estará dada por aquella distribución expuesta por Harvey (1981), y citado por Castillo (2015). [3], denominada Distribución Generalizada del Error (DGE)² definida como:

$$f(\epsilon_t) = \frac{\nu - \exp\left(-\frac{\epsilon}{2\lambda}\right)}{\lambda 2^{1+\frac{1}{\nu}} \Gamma(1/\nu)} \quad (2-44)$$

donde, $\Gamma(*)$ es una función Gamma y $\lambda = \left[2^{\frac{2}{\nu}} \frac{\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)} \right]^{1/2}$. Y cabe resaltar algunos casos específicos de la distribución de ϵ_t respecto al valor que tome ν , así:

- Si $\nu = 2$, entonces ϵ_t se distribuye normal.
- Si $\nu < 2$, entonces la distribución ϵ_t presenta colas más anchas que las de la normal.
- Y para el caso $\nu > 2$, entonces la distribución de ϵ_t presentará colas menos anchas que las de una distribución normal.

Modelo Generalizado Autorregresivo Condicional Heterocedástico con Umbral (TGARCH)

Como lo enuncia Castillo, L. (2015) [3], Zakoian desarrolló el modelo $TGARCH$ al añadir una extensión a su modelo inicial añadiendo las desviaciones estándar condicionales pasadas como variables explicativas, dicho modelo viene dado por:

$$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \gamma \sqrt{h_{t-1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^+ \epsilon_{t-i}^+ - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^- \epsilon_{t-i}^- \quad (2-45)$$

donde:

²La DGE debe cumplir: $E(\epsilon_t) = 0$; $E(\epsilon_t^2) = 1$; $E(g(\epsilon_t)) = 0$; $E(\epsilon_t | \epsilon_{t-1}) = 0$

$$\epsilon_{t-i}^+ = \epsilon_{t-i} \text{ si } \epsilon_{t-i} > 0 \text{ y } \epsilon_{t-i}^+ = 0 \text{ si } \epsilon_{t-i} \leq 0 \quad (2-46)$$

$$\epsilon_{t-i}^- = \epsilon_{t-i} \text{ si } \epsilon_{t-i} \leq 0 \text{ y } \epsilon_{t-i}^- = 0 \text{ si } \epsilon_{t-i} > 0 \quad (2-47)$$

Existen también otros modelos de volatilidad tales como el *L – GARCH* que es una linealización del *GARCH – M*, *FACTOR – ARCH* que emplea la covarianza entre series temporales, modelos *ARCH* de régimen cambiante, el *Q – ARCH* cuadrático, *GJR – GARCH*, *NGARCH*, *AV GARCH*, *APARCH* y otros en el contexto multivariado que no serán tratados en esta oportunidad.

2.5. Modelos de volatilidad estocástica (SV)

Mientras en los modelos *ARCH*, σ_t es función de las observaciones pasadas de la serie, en los modelos *SV*, σ_t es función de un proceso estocástico no observable, es decir, un proceso estocástico latente. En los modelos tipo *ARCH*, la volatilidad se considera una función lineal de los cuadrados de las observaciones pasadas de la serie y de su propio pasado, mientras que en los modelos *SV*, la volatilidad es una componente no observable cuyo logaritmo suele modelarse mediante un proceso lineal autorregresivo.

Taylor (1986) [29] propone que en los modelos, σ_t^2 no depende de las observaciones pasadas de la serie, sino de una variable no observable, que habitualmente es un proceso estocástico autorregresivo. Para garantizar que la varianza es positiva, la ecuación de la volatilidad se define para el logaritmo de σ_t^2 al igual que en el modelo *EGARCH*, dando lugar al conocido modelo *SV Log-normal* o *SV autorregresivo de orden uno ARSV (1)* :

$$y_t = \sigma_{*} e^{\frac{1}{2} h_t} \epsilon_t \quad (2-48)$$

$$h_t = \mu + \phi h_{t-1} + \tau \eta_t \quad (2-49)$$

donde σ_{*} es un factor de escala que evita la inclusión de un término constante en la ecuación (2-67), y_t es el logaritmo de los retornos y h_t es el logaritmo de las varianzas ($h_t = \log(\sigma_t)$) que para esta tesis indica la medida de la volatilidad de los retornos de acciones o criptomonedas. ϵ_t y η_t son las perturbaciones o ruidos no esperados para los retornos y para la volatilidad, respectivamente, cada uno de ellos se asume que se distribuye normal. ϕ es la tasa de crecimiento del precio del activo y τ es la volatilidad del proceso de varianza del activo.

El modelo *SV* definido en (2-66) es una martingala ³ en diferencias, ya que $E(y_t | \Sigma_{t-1}) = 0$. En consecuencia, $E(y_t) = 0$ y $Cov(y_t, y_s) = 0$ para $t \neq s$. Las condiciones para que y_t sea

³En teoría de probabilidad, la martingala (galicismo de martingale) es un determinado proceso estocástico. El concepto de la martingala en la teoría de probabilidades fue introducido por Paul Pierre Lévy, y una gran parte del desarrollo original de la teoría lo realizó Joseph Leo Doob. Parte de la motivación era demostrar la inexistencia de estrategias de juego infalibles. Recientemente, en el mercado bursátil el método estocástico de martingalas, adaptado en Forex porque trabaja en dos posiciones (alza-baja).

estacionario son las necesarias para asegurar que lo sea el proceso h_t . En este caso, basta que $|\phi| < 1$ para que y_t sea estacionario con varianza finita.

Este modelo encaja mejor con la teoría financiera y se generaliza bien al caso multivariante, no obstante, la estimación de parámetros es más difícil que la de un proceso ARCH y al no poderse construir fácilmente la función de verosimilitud de forma exacta, conlleva a la utilización de métodos de estimación como pseudo-máxima verosimilitud (PMV), máxima verosimilitud simulada (SMV), el método generalizado de los momentos (GMM) o el método bayesiano Monte Carlo Markov Chain (MCMC).

Por lo que, si la distribución de ϵ_t es simétrica, los momentos impares de y_t son cero y el momento de orden dos de y_t es:

$$E(y_t^2) = \sigma^2 e^{(\mu_h + \frac{1}{2}\sigma^2)} \quad (2-50)$$

Y dado que en la modelización de la volatilidad, el interés no está tanto en la serie original sino en el comportamiento dinámico de la serie de los cuadrados, la correlación de y_t^2 es:

$$\rho_{y_t^2}(k) = \frac{e^{[\sigma_h^2 \rho_h(k)]}}{[E(\epsilon_t^2) e^{(\sigma_h^2)}]} - 1, \text{ para } k \geq 1 \quad (2-51)$$

$$(2-52)$$

donde $\rho_h(k)$ es la función de autocorrelación de h_t .

Taylor (1986, pag. 75)[29] señala que cuando h_t es el proceso AR(1) de la ecuación (2-67) y σ_h^2 es pequeño y/o ϕ está próximo a uno, la función de autocorrelación de y_t^2 en (2-51) es muy parecida a un ARMA(1, 1), propiedad similar a la que se tiene en el modelo GARCH(1, 1).

Harvey, Ruiz y Shephard (1994) [9] observan que las propiedades dinámicas del modelo SV aparecen de forma más clara en la serie $\ln(y_t^2)$. Aplicando esta transformación a la serie y_t el modelo ARSV(1) transformado puede escribirse como:

$$x_t = \ln(y_t^2) = \mu + h_t + \epsilon_t \quad (2-53)$$

$$h_t = \phi h_{t-1} - 1 + \eta_t \quad (2-54)$$

donde μ es la media de x_t , $\mu = \ln(\sigma^2) + E[\ln(\epsilon_t^2)]$ y $\epsilon_t = \ln(\epsilon_t^2) - E[\ln(\epsilon_t^2)]$ es un ruido blanco no gaussiano de media 0 y varianza σ_ϵ^2 cuyas propiedades dependen de las de ϵ_t . Por ejemplo, si ϵ_t se distribuye como una distribución normal estándar, $N(0, 1)$, $\ln(\epsilon_t^2)$ se distribuye como el logaritmo de una χ^2 y se prueba que $E[\ln(\epsilon_t^2)] = -1.27$ y $\sigma_\epsilon^2 = \pi^2/2$, según lo enuncia Espartero (2000)[4] en su tesis de doctorado, lo cual representa la suma de dos procesos mutuamente independientes: un proceso lineal h_t estacionario y un ruido blanco no gaussiano.

Respecto a la varianza, la función de autocovarianza y la función de autocorrelación de x_t :

$$\gamma_x(0) = \text{Var}(x_t) = \sigma_h^2 + \sigma_\epsilon^2 \quad (2-55)$$

$$\gamma_x(K) = \text{Cov}(x_t, x_{t+K}) = \text{Cov}(h_t + \epsilon_t, h_{t+K} + \epsilon_{t+K}) = \gamma_h(K), \quad K \geq 1 \quad (2-56)$$

$$\rho_x(K) = \frac{\gamma_x(K)}{\gamma_x(0)} = \rho_h(K) \frac{1}{1 + (\sigma_\epsilon^2/\sigma_h^2)}, \quad K \geq 1 \quad (2-57)$$

donde σ_h^2 , $\gamma_h(k)$ y $\rho_h(k)$ son la varianza, la autocovarianza y la autocorrelación de orden k del proceso h_t , respectivamente, y σ_ϵ^2 es la varianza de $\ln(\epsilon_t^2)$.

Si h_t es el proceso $AR(1)$ especificado en la ecuación (2-67), se tiene que $\sigma_h^2 = \sigma_\eta^2/(1 - \phi^2)$ y $\rho_h(K) = \phi^K$ para $K \geq 1$. Por tanto, la función de autocorrelación de x_t en (2-57) puede escribirse como:

$$\rho_x(1) = \phi \left[1 + \frac{\sigma_\eta^2 (1 - \phi^2)}{\sigma_\epsilon^2} \right]^{-1} \quad (2-58)$$

$$\rho_x(k) = \phi \rho_x(k-1) = \phi^{k-1} \rho_x, \quad K \geq 2 \quad (2-59)$$

Observamos así que la función de autocorrelación de x_t en el modelo $ARSV(1)$ es equivalente a la de un proceso $ARMA(1, 1)$, que toma valores positivos y negativos dependiendo del signo de ϕ , y decrece exponencialmente a partir del segundo retardo.

2.6. Estimación del modelo SV

Para la estimación de los parámetros y del modelo SV, así como la estimación de la volatilidad se han propuesto diferentes métodos, partiendo de las primeras metodologías planteadas como es el uso del método generalizado de momentos (GMM) propuesto por Hansen (1982) [8], método que presenta inconvenientes como la no trivialidad existente en la elección de las condiciones de los momentos. Ya en los años 90, Harvey y otros (1994)[9] introducen el método de quasi-máxima verosimilitud (QML), sin embargo, el alto costo computacional presentado por este método se convirtió en un inconveniente.

Posterior a los métodos GMM y QML, se introdujeron métodos más elaborados y que se han mantenido, a continuación se enuncian los empleados en esta tesis.

2.6.1. Estimación por Máxima Verosimilitud

La estimación de parámetros de los modelos de volatilidad estocástica es difícil debido a que la función de verosimilitud se expresa como una integral de alta dimensión sobre las variables latentes que no se pueden evaluar analíticamente (Wahl, J. (2019)[31]). Si $y = (y_1, \dots, y_T)$ denota nuestras observaciones, $h = (h_1, \dots, h_T)$ nuestras variables latentes y Θ los parámetros de interés, la función de verosimilitud de Θ viene dada por:

$$L(\Theta) = \int f_y(y|h)f_h(h)dh \quad (2-60)$$

Donde la función de densidad condicional de las observaciones reales dada h se denota por $f_y(y|h)$, y $f_h(h)$ denota la función de densidad marginal de h . Para aproximar esta integral se aplica la aproximación de Laplace.

Aproximación de Laplace

Sea y un vector de observaciones, Θ los parámetros de interés y h un vector aleatorio de variables latentes. Sea $g(h, \Theta)$ la log-verosimilitud conjunta negativa. La probabilidad de Θ está dada por

$$L(\Theta) = \int f(y, h)dh = \int f_y(y|h)f_h(h)dh = \int e^{-g(h, \Theta)}dh \quad (2-61)$$

Se parte del supuesto de que g tiene un mínimo global en $\hat{h}$ para un Θ dado, es decir, $\hat{h} = \arg\min_h g(h, \Theta)$, y que g es dos veces diferenciable. La solución $\hat{h}$ se conoce como estimación Bayesiana empírica (EB). Una expansión de Taylor de segundo orden alrededor de $\hat{h}$ produce:

$$g(h, \Theta) \approx g(\hat{h}, \Theta) + \nabla g(\hat{h}, \Theta)(h - \hat{h}) + \frac{1}{2}(h - \hat{h})' H(h - \hat{h}) \quad (2-62)$$

Como $\hat{h}$ es un mínimo, $\nabla g(\hat{h}, \Theta) = 0$. Por lo tanto

$$L(\Theta) \approx e^{-g(h, \Theta)} \int e^{-\frac{1}{2}(h - \hat{h})' H(h - \hat{h})} dh \quad (2-63)$$

Podemos observar que el integrando es el núcleo de una densidad normal multivariante con matriz de covarianza H^{-1} . Por tanto, la aproximación viene dada por

$$L(\Theta) \approx e^{-g(h, \Theta)} (2\pi)^{\dim(h)/2} \det(H)^{-1/2} \quad (2-64)$$

donde se emplea el hecho de que $\det(H^{-1}) = \det(H)^{-1}$. El log-verosimilitud negativo correspondiente es:

$$-l(\Theta) = -\frac{\dim(h)}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(\det(H)) + g(\hat{h}, \Theta) \quad (2-65)$$

Encontrar el valor óptimo de Θ puede verse como un problema de optimización anidado. Para encontrar y $h(\Theta)$ y $H(\Theta)$, se fija a Θ y se optimiza usando un algoritmo cuasi-Newton o un método de Newton de memoria limitada. Luego, la aproximación de Laplace se optimiza con respecto a Θ usando el algoritmo cuasi-Newton (Kristensen et al.(2016)[16]).

2.6.2. Estimación por MCMC

Uno de los principales algoritmos empleados para estimar el modelo SV, es el método de Cadena de Markov Monte Carlo (MCMC), el cual parte desde un enfoque bayesiano y fue presentado por Kim (1998) [15], que a su vez se basa en dos métodos muestreo : el muestreo de Gibbs y el muestreo de aceptación y rechazo de Metropolis Hastings (Nilsson, 2016 [20]).

Una vez más declaremos nuestro modelo como :

$$y_t = \sigma \epsilon_t \quad (2-66)$$

$$h_t = \mu + \phi h_{t-1} + \tau \eta_t \quad (2-67)$$

Notese que en sistemas como el expresado en el modelo de volatilidad estocástica (SV), se tienen dos tipos de variables: i) observables o conocidas (y_t) y ii) no observables o latentes (h_t). Por lo que el problema de inferencia que se plantea en este apartado utiliza las cadenas de Markov para simular un proceso de Markov sobre un espacio generado por los parámetros Θ , el cual tiene una distribución $P(\vartheta|Y)$, la cual se asume es conocida antes de iniciar la simulación. ϑ es un vector de parámetros ($\vartheta \in \Theta$) y Y son los datos.

Por lo anterior, lo esencial en el método MCMC es crear un proceso de Markov, cuya distribución de transición estacionaria se especifica a por medio de $P(\vartheta|Y)$, para luego iterar un número suficientemente grande de simulaciones con las que la distribución de los valores actuales del proceso se aproxime lo máximo posible a la distribución de transición estacionaria. A continuación se muestran algunos de los algoritmos más populares dentro de MCMC.

Algoritmo de muestreo Gibbs

El algoritmo de Gibbs quizá es el método más popular de MCMC (Parra, 2014)[23], fue propuesto por primera vez por Geman y Geman (1984) [7] y refinado por Gelfand Y Smith (1990) [6]. Para dar una aproximación a su funcionamiento, se parte del supuesto de que el problema a abordad busca estimar tres parámetros ⁴ ($\Theta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$)

1. Se parte de una condición inicial para los parámetros, es decir $\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}, \vartheta_{3,0}$ son conocidos. Donde $\vartheta_{i,j}$ indican i el número del parámetro y j el número de la simulación o iteración.
2. Se genera una muestra aleatoria de realizaciones de $f_1(\vartheta_1|\vartheta_{2,0}, \vartheta_{3,0}, Y, M)$. De allí, se obtiene una realización aleatoria para $\vartheta_{1,1}$, el parámetro 1 para la iteración 1.

⁴Se debe hacer la salvedad de que cuando se haga mención al termino parámetro en la descripción que se emplea en este apartado va orientada a un sentido muy general y no solo a un coeficiente. Ya que en el campo de MCMC un conjunto de variables no observables, tal como la volatilidad de un activo en cada momento del tiempo, puede ser considerada como una agrupación de parámetros de tamaño T , donde T es el tamaño de muestra. (Parra, 2014)[23]

3. Se genera una muestra aleatoria de realizaciones de $f_2(\vartheta_2|\vartheta_{3,0}, \vartheta_{1,1}, Y, M)$. Se incorpora el parámetro $\vartheta_{1,1}$ que se obtuvo en el paso anterior. A partir de esto, se puede tener una realización aleatoria para $\vartheta_{2,1}$, el parámetro 2 para la iteración 1.
4. Se genera una muestra aleatoria de realizaciones de $f_3(\vartheta_3|\vartheta_{1,1}, \vartheta_{2,1}, Y, M)$. Se incorporan los parámetros $\vartheta_{1,1}$ y $\vartheta_{2,1}$ que se obtuvieron en los dos pasos anteriores. A partir de esto, se puede tener una realización aleatoria para $\vartheta_{3,1}$, el parámetro 3 para la iteración 1.
5. Se repiten m veces los pasos 2 al 5. En cada iteración se actualizan f_1, f_2 y f_3 , condicionándolas sobre con los parámetros previamente hallados. Con ello se obtienen los parámetros $\vartheta_{1,m}, \vartheta_{2,m}, \vartheta_{3,m}$ de las m iteraciones de la simulación.

Del algoritmo anterior, se logra tener como resultado en una secuencia de realizaciones aleatorias de los parámetros:

$$(\vartheta_{1,1}, \vartheta_{2,1}, \vartheta_{3,1}), (\vartheta_{1,2}, \vartheta_{2,2}, \vartheta_{3,2}), \dots, (\vartheta_{1,m}, \vartheta_{2,m}, \vartheta_{3,m}) \quad (2-68)$$

Algoritmo de muestreo Metropolis y Metropolis-Hasting

El algoritmo de Metropolis fue introducido por Metropolis y otros (1953) [18], este algoritmo genera una secuencia de repeticiones aleatorias de la distribución aproximada a aquellas distribuciones que convergen a $f(\Theta|Y)$, con ello le permite estimar los parámetros $(\Theta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3))$. A continuación se enuncian los pasos a seguir en el algoritmo según como lo condensa y presenta Parra (2014) [23].

1. Se genera un valor aleatorio inicial para Θ_0 tal que $f(\Theta_0|Y) > 0$.
2. Para $t = 1, 2, \dots$
 - a) Generar una muestra candidata para Θ , la cual se denota como Θ_* de una densidad conocida en la iteración t dados las previas realizaciones Θ_{t-1} . Denote a esta densidad condicionada como $q = J_t(\Theta_t|\Theta_{t-1})$, también denominada densidad incremental (proposal distribution (q)). Se asume que q es simétrica ($J_t(\Theta_i|\Theta_j) = J_t(\Theta_j|\Theta_i)$).
 - b) Calcule la proporción

$$r = \frac{f(\Theta_*|Y)}{f(\Theta_{t-1}|Y)} \quad (2-69)$$

- c) Fije

$$\Theta_t = \begin{cases} \Theta_* & \text{con probabilidad } \min(r, 1) \\ \Theta_{t-1} & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (2-70)$$

Se deben tomar en cuenta algunas condiciones adicionales para garantizar el funcionamiento del algoritmo, como bien señala Parra (2014) [23], lo primero es que debe ser posible calcular la proporción r para todos los Θ_* y Θ_{t-1} . Lo segundo es que se puedan generar repeticiones de Θ utilizando q y finalmente, generar una repetición aleatoria proveniente de una distribución uniforme para determinar el rechazo o no rechazo de Θ_* . La regla de aceptación del algoritmo puede ser ilustrada como sigue:

1. Si el cambio entre Θ_{t-1} a Θ_* mejora el ajuste de la densidad condicional posterior, entonces se acepta Θ_* como Θ_t .
2. Si el cambio entre Θ_{t-1} a Θ_* no favorece el ajuste de la densidad condicional posterior, entonces se fija $\Theta_t = \Theta_*$ con probabilidad r o $\Theta_t = \Theta_{t-1}$ con probabilidad $(1 - r)$.

www.bdigital.ula.ve

3. Marco Metodológico

El tipo de estudio propuesto para este proyecto de tesis fue de carácter descriptivo-explicativo. Descriptivo porque busca precisar y caracterizar un fenómeno económico y financiero a lo largo de una ventana de tiempo definida. Explicativo, dado que el propósito de este estudio también fue el explicar el comportamiento de variables orientadas a la rentabilidad de acciones y criptomonedas mediante el uso de metodologías, análisis y modelado estadístico.

El diseño de la investigación adoptado para este estudio es no experimental del tipo longitudinal o evolutiva, “los cuales recolectan datos en diferentes momentos o periodos para hacer inferencias respecto al cambio, sus determinantes y consecuencias”(Fernandez, 2014 [5]).

3.1. Elección de acciones y criptomonedas

Antes de consolidar los datos de precios de retornos de acciones y criptomonedas, se realizó una exploración de los mercados de criptomonedas y acciones. Para el primero, se parte con la exploración y posterior extracción de los datos históricos expuestos en internet en torno al tamaño del mercado y se consolidó un análisis exploratorio para determinar las criptomonedas a emplear, siendo Bitcoin (BTC) y Ether (ETH) las criptomonedas elegidas. Mientras que para la elección de las acciones fue orientado principalmente hacia las cinco grandes empresas tecnológicas estadounidenses: Google, Amazon, Facebook, Apple y Microsoft, cuyo grupo se le conoce a nivel acrónimo como GAFAM; de este grupo se eligen Apple y Google para ser contrastadas con BTC y ETH.

3.2. Datos y arquitectura

Ya seleccionadas las compañías más importantes del mercado global como los son Google y Apple, y las principales criptomonedas del criptomercado, Bitcoin (BTC) y Ether (ETH), se procede a emplear las APIs de Google Finanzas y Yahoo Finanzas empleando el paquete Quantmod de R, consolidando así los datos de la serie de precios de cierre diario (en dolares) de cada una de ellas.

La ventana de tiempo empleada para la extracción de los datos fue desde enero de 2014 hasta diciembre de 2021 con operaciones durante cinco días a la semana por lo que sábados y domingos no están incluidos.

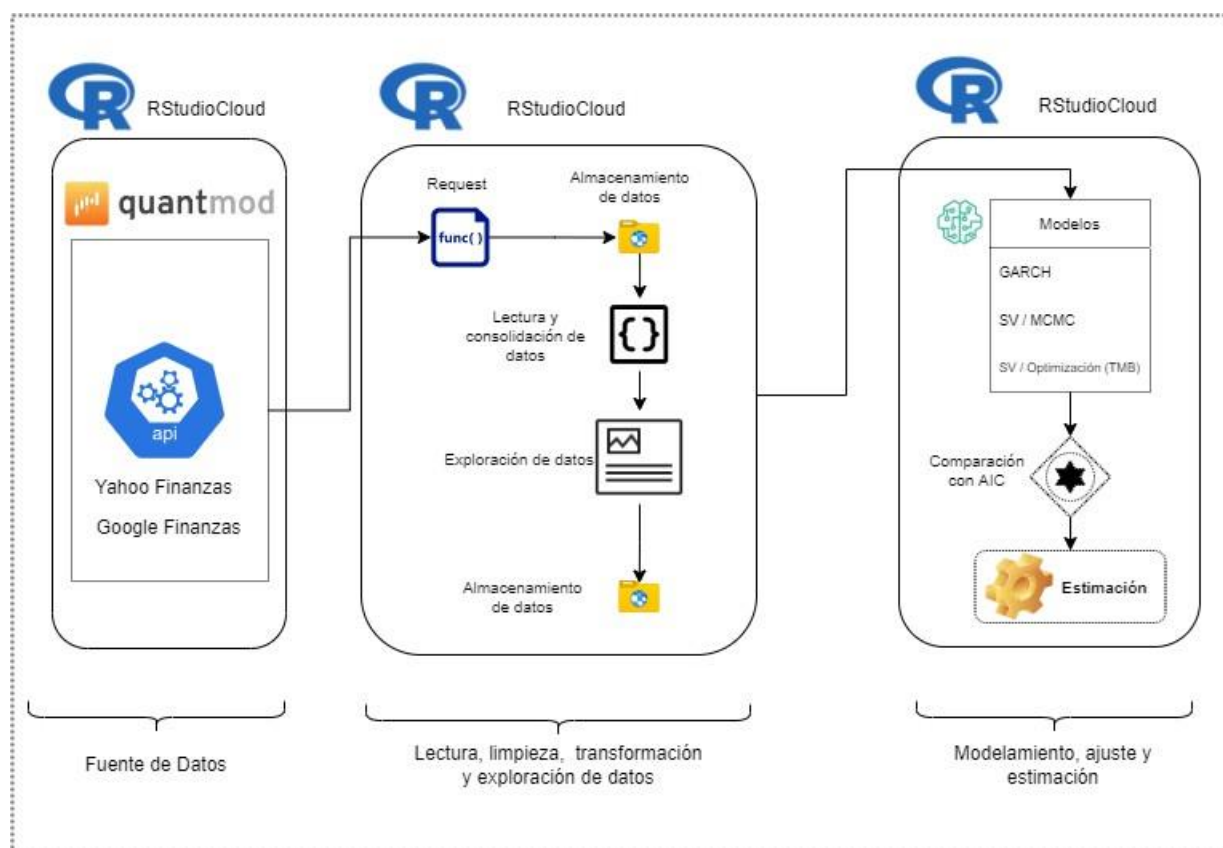


Figura 3-1.: Arquitectura de la solución analítica.

Fuente : elaboración propia.

Para sintetizar la solución analítica de una manera sencilla, a continuación se presenta un esquema del proceso (ver la figura 3-1), donde se parte de la obtención de los datos a través de las APIs de Google finanzas y Yahoo Finanzas a través de Quandmod desde un script de R, para posteriormente realizar un tratamiento de datos: validación, limpieza, transformación e imputación de datos empleando paquetes de R a través del entorno de desarrollo RStudio. Finalmente, para el ajuste de los modelos de volatilidad estocástica para el retorno de acciones o criptomonedas se llevó a cabo en R, dada la disponibilidad de los paquetes *stochvol* y *stochvolTMB*, los cuales se posicionan como los paquetes con funciones más estables y una mayor variedad de opciones para los análisis complementarios que se requieran durante la etapa de modelado.

3.3. Modelos

Para este estudio, se propuso la aplicación de modelos *GARCH* y *SV* para modelar la volatilidad del retorno de acciones y criptomonedas, orientado desde la metodología de sus autores y aplicar las mejores prácticas recomendadas por estos.

Partiendo de lo expuesto por Ruíz (2012) [26], los retornos diarios de una acción o cripto-

tomonedada puede definirse como $y_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) - \mu$, donde μ se asume como constante. Estos retornos pueden modelarse a través de un modelo log-normal de volatilidad estocástica (SV) que está dado por las ecuaciones:

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (3-1)$$

$$h_t = \alpha(1 - \psi) + \psi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \quad (3-2)$$

donde $\sigma_\eta > 0$, $0 < \psi < 1$ y $h_t = \log(\sigma_t^2)$ es el logaritmo de la varianza condicional de los retornos.

Además se asume que el vector de errores (ϵ_{t-1}, η_t) sigue una distribución normal bivaariante con vector de medias cero, con varianzas unitarias y una covarianza ρ , esto es:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{t-1} \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim iidN_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

Se puede destacar que h_t sigue un proceso $AR(1)$ con innovaciones Gaussianas. Dónde la restricción $0 < \psi < 1$ garantiza que el proceso sea estacionario, con una media α y una varianza $\sigma_h^2 = \sigma_\eta^2 / (1 - \psi^2)$.

Pero como bien señala Ruíz (2012) [26], basado en lo desarrollado por Gallant, Hsieh y Tauchen (1997) y Jacquier, Polson y Rossi (2004), “un modelo SV plausible para modelar los datos reales debe contener efecto leverage”, y allí radica la importancia de las propiedades de la distribución log-normal, el proceso de varianza condicional σ_t^2 es estacionario con:

$$Media : E(\sigma_t^2) = \exp\{\sigma_t \epsilon_t\}, \quad (3-4)$$

$$Varianza : Var(\sigma_t^2) = \exp\{2\alpha + \sigma_h^2\}(\exp\{\sigma_h^2 - 1\}) \quad (3-5)$$

Por lo que el efecto leverage se obtiene, según Harvey y Shephard (1996) citados por Ruíz (2012) [26], si $\rho = Corr(\epsilon_{t-1}, \eta_t)$ es negativo; y Yu(2005), también citado por Ruíz (2012) [26], mostró que cuando $\rho < 0$, existe una correlación negativa entre $E(h_{t+1}|y_t)$ ¹ y y_t .

Una forma estándar de modelar el efecto leverage, viene dada por :

$$\eta_t = \rho \epsilon_{t-1} + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_t \quad (3-6)$$

¹La esperanza condicional, $E(h_{t+1}|y_t)$, muestra que el valor esperado de la volatilidad futura aumenta con una reducción de los retornos en el periodo actual, lo que proporciona una interpretación más clara del efecto leverage más clara.

con $\epsilon_t \sim iidN(0, 1)$ independiente de ϵ_t para todo t , por lo que se cumple que $Corr(\epsilon_{t-1}, \eta_t) = \rho$ y la formulación de la log-variancia vendría dada por :

$$h_t = \alpha(1 - \psi) + \psi h_{t-1} + \sigma_\eta \rho \epsilon_{t-1} + \sigma_\eta \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_t \quad (3-7)$$

Asimismo, con esta formulación de los retornos se espera que estos evidencien también lo mencionado por Perez, A. (2000) [24] en su tesis doctoral, dónde se indica que muchas series de tiempo económicas y financieras, suelen presentar cambios temporales en los momentos condicionados de segundo orden. Dichos cambios, tienden a correlacionarse de forma serial, por lo que los periodos de mucha volatilidad se originan a partir de cambios importantes de magnitud del valor de la serie de tiempo. Mientras que los periodos de poca volatilidad suelen corresponder a la consecución de cambios pequeños en los valores de la serie. Por lo que se esperaría tener combinaciones de ambos escenarios, mucha o poca volatilidad, en los diferentes periodos de tiempo de los retornos de acciones y criptomonedas.

3.3.1. Metodología para los modelos ARIMA-GARCH y SV

Para identificar los principales modelos de volatilidad desde la óptica de ARIMA-GARCH y SV de los retornos de cada uno de las acciones y criptomonedas en estudio, se siguieron una serie de actividades que se esquematizan en la figura 3-2 dónde se partió de una lectura de los precios diarios desde la API de Yahoo Finanzas a través del software estadístico open source R [25] apoyado en el paquete quantmod.

Posterior a la lectura de los datos de precios diarios de interés, se aplicó un análisis descriptivo de los datos inicial, para luego computar los retornos de la forma : $y_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$ y continuar un análisis descriptivo de los retornos.

Las actividades ejecutadas que describen a continuación corresponden a la búsqueda del mejor modelo GARCH en cada una de las series de retornos de precios diarios de la partición de entrenamiento:

1. Se procedió a particionar la serie de retornos diarios en una data de entrenamiento (train) y una data de prueba (test), dejando un tamaño para la data de prueba de aproximadamente mes y medio ($n = 45$).
2. Siguiendo uno de los primeros pasos de la metodología Box-Jenkins, la cual consiste en verificar que la serie de entrenamiento es estacionaria mediante la Prueba de Raíces Unitarias de Dickey-Fuller aumentada y la prueba Phillips-Perron.
3. Siguiendo con la metodología Box-Jenkins, para estimar un modelo ARIMA para la serie de retorno, con el fin de eliminar cualquier dependencia lineal en la serie cuando se emplee el modelo GARCH, se emplearon correlogramas ACF de los retornos estandarizados y los retornos estandarizados al cuadrado para probar la existencia de una varianza condicional.

4. Sabiendo que la data de retornos cumple estacionariedad y teniendo una idea del número aproximado de los valores de p y q , se emplea una función `auto.arima` del paquete `forecast` de R para determinar el mejor modelo ARIMA para la data de entrenamiento.
5. Una vez se identificó los valores p y q del modelo ARIMA, se procede a emplear una rutina que recorre un pool de modelos GARCH que varía diferentes parámetros tales como:
 - a) Tipo de modelo a través del vector `c("sGARCH", "gjrGARCH", "fGARCH", "eGARCH", "apARCH", "csGARCH")`.
 - b) Tipo de distribución de probabilidad por el vector `c("snorm", "std", "sstd", "ged", "sged", "nig", "ghyp", "jsu")`.
 - c) Los parámetros p y q del modelo GARCH son vectores que se mueven entre 0 y 3.
 - d) Los parámetros $ar.p$ y $ar.q$ del modelo GARCH son vectores que se mueven entre 0 y el valor obtenido en el ajuste del modelo ARIMA.
6. Seleccionar el mejor modelo GARCH en base a los criterios de información AIC, BIC, Shibata y Hanna-Quinn.
7. Estimar un modelo de volatilidad GARCH basado en la combinación de los mejores parámetros encontrados con los criterios de información del paso anterior.
8. Comprobar el modelo ajustado cuidadosamente y refinarlo si es necesario.

Por otro lado, para los modelos de volatilidad estocástica (SV) se emplean los siguientes pasos:

1. Empleando el paquete `stochvol` de R, desarrollado por Hosszejni y Kastner (2021)[12], se configuran dos modelos para ser estimados a través de MCMC con diseños de matrices "`ar0`" y "`ar1`". Es importante destacar que para este objeto estimado por MCMC no se cuentan con criterios de información para la selección u comparación de los modelos, por lo que se plantea una estrategia diferente para el contraste de los mismos.
2. Para complementar el paquete `stochvol`, se incorpora `stochvolTMB`, desarrollado por Wahl (2021)[32], que a diferencia de `stochvol`, emplea métodos numéricos o de optimización para estimar los parámetros del modelo de volatilidad estocástica y no MCMC. En este paquete se puede elegir entre cuatro opciones de distribución de los errores observados, por lo que se desarrolló una rutina para ajustar cada uno de ellos en un pool de modelos.
 - Gaussian - Para el modelo SV clásico con ruido Gaussiano.
 - t- Distribución para los retornos con colas pesadas.
 - Leverage - Es una extensión del modelo gaussiano al permitir que los rendimientos observados se correlacionen con la volatilidad latente.

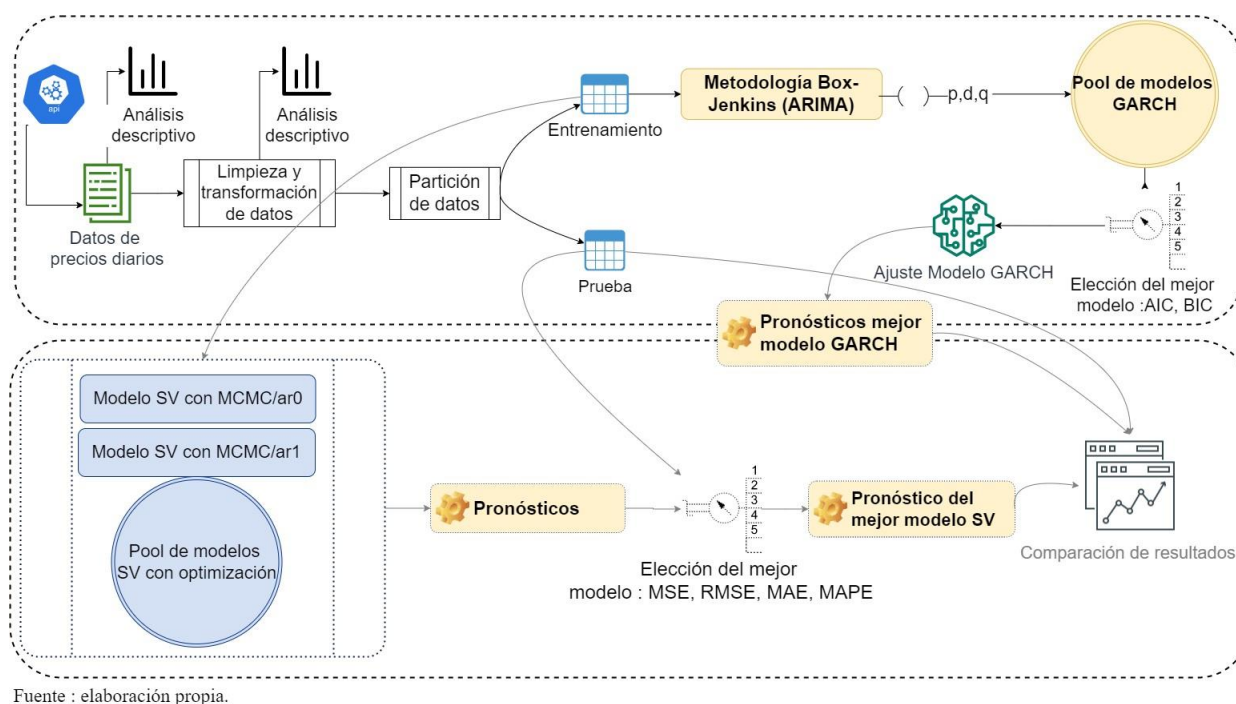


Figura 3-2.: Esquema de pasos empleados para seleccionar, estimar, y comparar los modelos GARCH y SV.

- Skew-Gaussian - La distribución gaussiana sesgada para los residuos de los retornos asimétricos.
3. Se pronostican los retornos empleando los modelos SV y se contrastan con los datos de prueba a través de las métricas de MSE, RMSE, MAE, MAPE.
 4. Se selecciona el mejor modelo SV y se comprueba el modelo ajustado.

Finalmente, se realiza una comparación entre el mejor modelo GARCH y el mejor modelo SV para cada uno de los retornos de precios diarios de Apple, Google, Bitcoin y Ether.

4. Resultados y discusión

Partiendo de lo estipulado en el capítulo III, se inicia con la selección de las principales criptomonedas y acciones a emplear como datos de entrada para la elaboración de los modelos de volatilidad estocástica (SV).

4.1. Análisis descriptivo

La extracción de datos históricos del mercado de criptomonedas desde la página web de la empresa CoinMarketCap ¹, dónde se buscaron, extrajeron y consolidaron los datos históricos del mercado para luego ser condensados en tablas y analizados, de este primer análisis descriptivo se presentan los resultados obtenidos en la tabla **4-1**, en la que se puede resaltar:

1. A finales de 2021, el mercado de criptomonedas cerró en 2.370.532 millones de dólares, esto representa un incremento en el capital del mercado del 23.967 % respecto al año 2015 donde el mercado total de criptomonedas fue de 6.944 millones de dólares.
2. En 2017, se evidencia la entrada de nuevos proyectos de criptomonedas y bifurcaciones de nuevos proyectos de Bitcoin como 'Bitcoin Cash', por lo que se evidencia un aumento en la capitalización del mercado que también se traduce en una caída en la participación de mercado por parte del Bitcoin, que pasa de tener un 88 % en 2016 a un 39 %. Sin embargo, en el 2018 el mercado se normaliza nuevamente por la salida de proyectos de poca o baja confianza en la comunidad y la recuperación de la participación de mercado por parte de Bitcoin representando, para dicho año, el 53 % del mercado.
3. Las principales criptomonedas del mercado entre los años 2015 y 2021 han sido : Bitcoin (BTC), Ether(ETH) y XRP, que sí bien han venido cediendo participación en el mercado de criptomonedas desde el 2015 cuando representaban el 94 % del capital del mercado, con 91 % para BTC, 1 % para ETH y 3 % para XRP, respectivamente, pasando a representar el 63 % del mercado al cierre de 2021 con 41 % para BTC, 20 % para ETH y 2 % para XRP, respectivamente, no deja de sorprender la consistencia e importancia de estas criptomonedas en el mercado de criptoactivos.

¹CoinMarketCap, www.coinmarketcap.com, fundada en mayo de 2013 por Brandon Chez, es el sitio web de seguimiento de precios más reconocido del mundo para criptoactivos, cuya misión se orienta en hacer más visibles y eficientes el mercado de criptomonedas a nivel mundial.

Tabla 4-1.: Distribución del mercado de criptomonedas entre 2015 y 2021

Criptomonedas	Capital de mercado* entre el año 2015 y 2021						
	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Bitcoin	\$ 6.348	\$ 14.396	\$ 237.467	\$ 67.476	\$ 134.571	\$ 488.213	\$ 960.900
Ether	\$ 65	\$ 626	\$ 73.170	\$ 14.560	\$ 14.698	\$ 77.828	\$ 483.620
XRP	\$ 213	\$ 232	\$ 89.122	\$ 15.077	\$ 8.536	\$ 12.851	\$ 43.789
~197 Criptos	\$ 318	\$ 1.116	\$ 207.009	\$ 30.624	\$ 40.391	\$ 120.432	\$ 882.222
Total mercado	\$ 6.944	\$ 16.370	\$ 606.768	\$ 127.737	\$ 198.196	\$ 699.325	\$ 2.370.532

* Expresado en millones de dolares

Criptomonedas	Participacion del mercado entre el año 2015 y 2021						
	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Bitcoin	91 %	88 %	39 %	53 %	68 %	70 %	41 %
Ether	1 %	4 %	12 %	11 %	7 %	11 %	20 %
XRP	3 %	1 %	15 %	12 %	4 %	2 %	2 %
~197 Criptos	5 %	7 %	34 %	24 %	20 %	17 %	37 %
Total mercado	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %

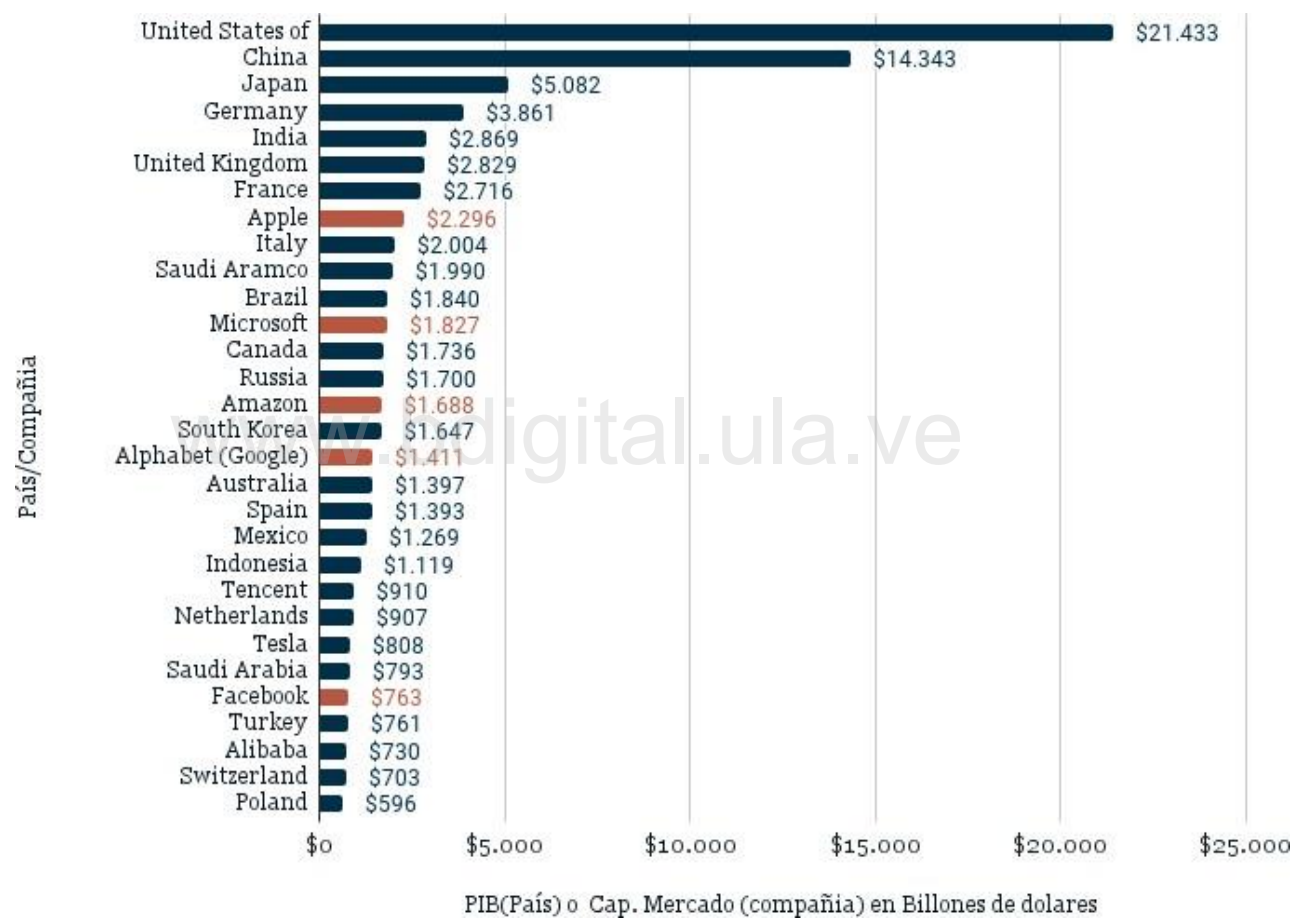
Por otro lado, para el análisis las principales acciones del mercado bursátil, se limitó el alcance a solo las acciones que se tranzan en el mercado de Estados Unidos, en el cuál se destaca la colosal capitalización del mercado de las denominadas GAFAM, que es el acrónimo empleado para referirse a las 5 principales compañías del mundo, que incluso para el año 2019 en conjunto superaron el PIB de países como Japón, Alemania, India, Ucrania, Francia; Italia, Rusia (ver figura 4.1), siendo Apple y Microsoft las compañías con mayor valoración en el mercado bursátil teniendo una capitalización de \$2296B y \$1827B de dolares, respectivamente.

Considerando la capitalización de mercado de las GAFAM y la gran influencia que representa el Bitcoin y Ether en el mercado de criptoactivos, para continuar con los siguientes análisis y modelado de la volatilidad de las series de tiempo, se continua con 2 empresas de GAFAM : Apple y Google; y las dos principales criptomonedas del mercado : Bitcoin y Ether.

En la figura 4-2, se puede apreciar la evaluación de los precios las acciones de Apple y Google, así como de las criptomonedas BTC y ETH, en el que se puede destacar :

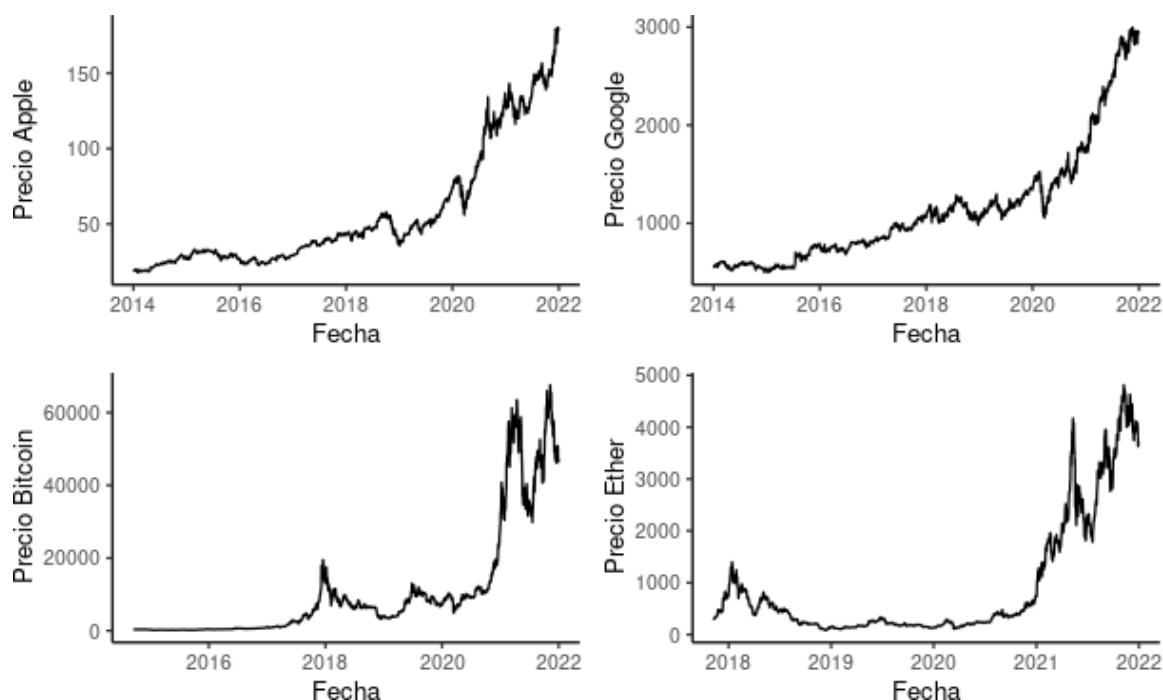
- A nivel general. los precios de las acciones de Apple y Google han venido hacia la alta desde los últimos 3 años. Y dicha tendencia también se puede observar en las criptomonedas de BTC y ETH.
- Existe una gran diferencia entre la magnitud de los precios entre las empresas y las criptomonedas. En el último año, los precios de Apple no superan los \$200 por acción, mientras que Google ronda los \$3000 por acción, siendo la criptomoneda ETH la que se cotiza entre los \$4000 y \$5000 superando los precios de Apple y

Figura 4-1.: Compañías más ricas del mundo frente al Producto Interno Bruto (PIB) de algunos países al cierre de 2019.



Fuente : elaboración propia.

Figura 4-2.: Precios de cierre diario de las acciones de Apple, Google, Bitcoin y Ethereum.



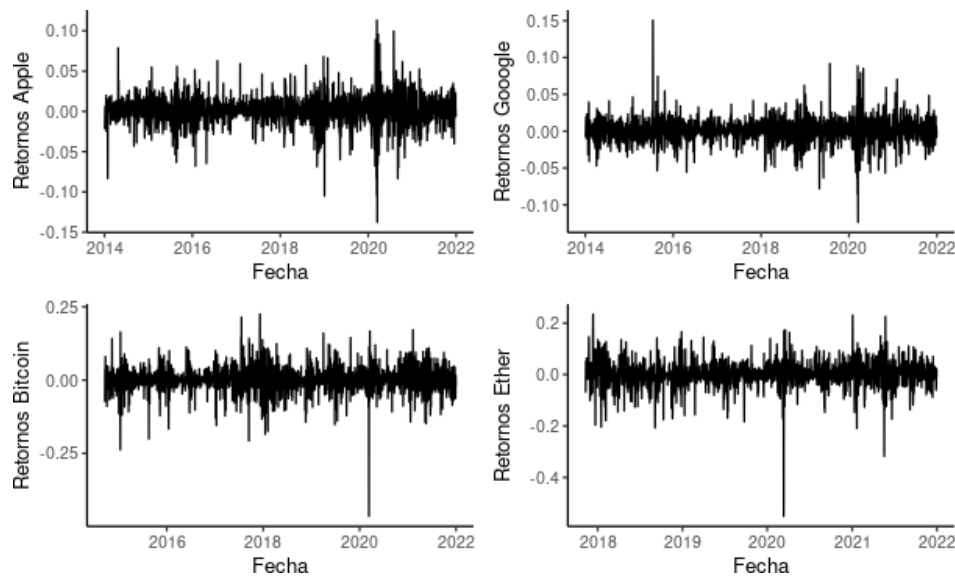
Fuente : elaboración propia.

Google. Sin embargo, BTC es la que mayor valoración representa al estar oscilando entre los \$40000 y \$60000 en el 2021 e incluso tener un valor de mercado superior a los \$20000 desde el año 2020.

- A nivel visual, se puede percibir la presencia de mayores variaciones de precios en las criptomonedas respecto al precio de las acciones de Apple y Google, dónde si bien se aprecian cambios en los precios, dichos cambios no se aprecian tan abruptos en periodos de tiempo tan cortos. Esto se profundizará más adelante en términos de retornos y las métricas asociadas a su volatilidad.

Para el cálculo de los retornos se empleo la formula $retorno_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$ en los precios de las acciones y las criptomonedas, el comportamiento de estos retornos a lo largo del tiempo se puede apreciar en la figura 4-3 en el que se destaca:

- Los rangos de los retornos de las acciones de Apple y Google están contenidas entre una perdida (retorno negativo) de 15 % y un retorno de capital del 10 % mientras que las criptomonedas BTC y ETH están contenidas entre una perdida cercana al 50 % y un retorno de capital cercano al 25 %.
- En los retornos de las acciones y criptomonedas también se aprecia el mayor nivel de perdida en el primer trimestre del año 2020, esto se debe al inicio de la pandemia provocada por el virus SARS-COV-2, mejor conocido como COVID-19, el cual

Figura 4-3.: Retornos de las acciones de Apple, Google, Bitcoin y Ethereum.

Fuente : elaboración propia.

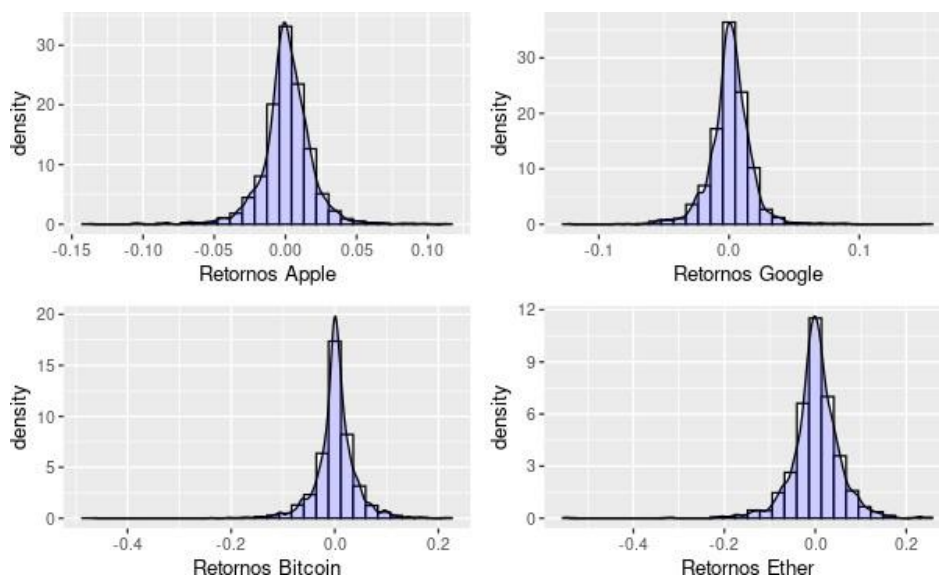
afectó todos los mercados del mundo, por lo que se pudiese considerar un valor atípico (outlier) para cada uno de los retornos.

Para entender el comportamiento de la tasa de los retornos de las acciones y criptomonedas e incluso la determinación del menor riesgo de inversión se hace uso de estadística descriptiva como medidas de tendencia central, dispersión y forma, tal como se presentan en la tabla 4-2. Asimismo, el uso de histogramas, los cuales se presentan en la figura 4-4, y gráficos Q-Q plot (ver figura 4-5) que permiten entender la distribución de los datos y la presencia de colas pesadas en la distribución, las cuales se traducen en un mayor riesgo al momento de invertir en una acción o en un criptoactivo. De este entendimiento de los datos se puede resaltar:

- Al observar los histogramas, la tasa de los retornos de las acciones y criptomonedas en estudio presentan características de una distribución leptocúrtica, siendo más marcado en la distribución en los retornos de BTC. Esto se confirma con los coeficientes de kurtosis de cada uno de los retornos, siendo superiores a 3, indicando un exceso de kurtosis respecto a la distribución normal, siendo los retornos de BTC la que mayor exceso de kurtosis presenta con un valor de 11.24.
- En los Q-Q plot se evidencia la presencia de colas pesadas negativas y positivas en las distribuciones de los retornos de acciones y criptomonedas, esto se evidencia por las bandas de TS ² las cuales son sensibles a detectar colas pesadas y al no estar contenidos los puntos de las colas dentro de la banda de TS implica que los

²El método 'TS' construye bandas de confianza sensibles a la cola, como proponen Aldor-Noiman et al. (2013) [1], siendo un procedimiento gráfico para detectar normalidad de forma visual, sustentado en las pruebas de Kolmogorov – Smirnov.

Figura 4-4.: Histogramas para el retorno de las acciones de Apple, Google, Bitcoin y Ethereum.



Fuente : elaboración propia.

retornos se empieza a perfilar cómo inversiones de alto riesgo, además de ratificar que la distribución de los retornos de las acciones y criptomonedas en estudio no siguen una distribución normal al tener puntos fuera de las bandas de normalidad (Banda Normal).

- Los valores promedio y medianales de los retornos son cero para cada uno de los retornos de acciones y criptomonedas, indicando cierto nivel de asimetría en las distribuciones de los retornos, pero al observar el coeficiente de asimetría en cada uno de ellos que los retornos de Apple, Bitcoin y Ethereum presentan una ligera asimetría negativa, mientras que los retornos de Google presentan una ligera asimetría positiva, por lo que ninguna de ellas es simétrica.
- La volatilidad histórica de las acciones se puede apreciar a través de la desviación estándar de los rendimientos en la tabla 4-2. Allí se puede observar que Apple y Google presentan el mismo nivel de volatilidad con un valor de 0.02, mientras que Bitcoin y Ether duplican dicho nivel de volatilidad con un valor de 0.04 y 0.05, respectivamente. Asimismo, a nivel de homogeneidad respecto al retorno promedio, el coeficiente de variación indica que Apple es la opción más homogénea de las cuatro con un valor de 16.28 seguido por Google con un valor de 19.73 mientras que Bitcoin y Ether son más heterogéneas, siendo Ether la opción más homogénea de las cuatro.

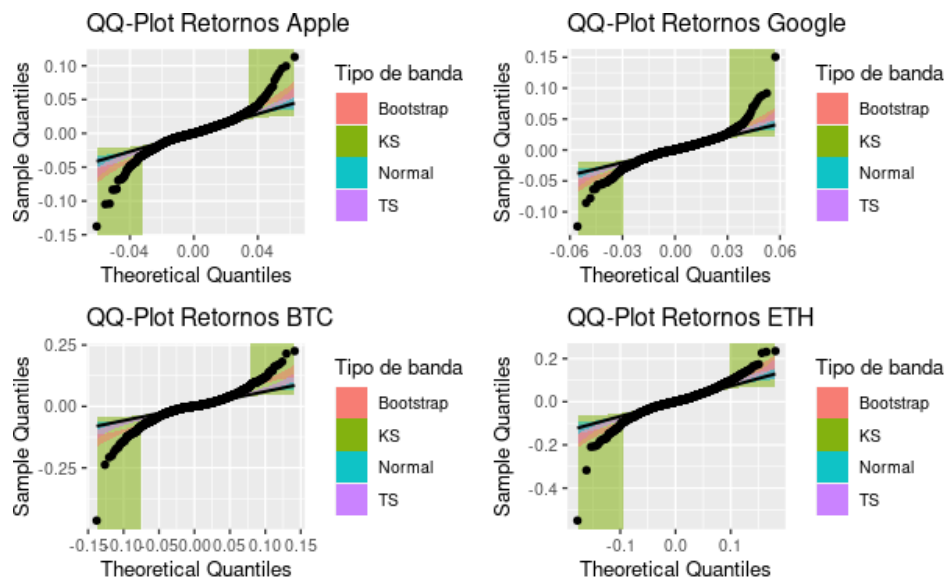
Tabla 4-2.: Estadística descriptiva de los precios y retornos de las acciones y criptomonedas en estudio.

	Min.	Max.	Promedio	Mediana	Desv. Est.	Coef. Var.	Asimetría	Kurtosis
Precios								
Apple	17.85	180.33	56.54	41.31	39.74	0.70	1.34	0.52
Google	497.06	2996.77	1145.39	1039.74	600.84	0.52	1.47	1.63
Bitcoin	178.10	67566.83	10760.23	6173.23	15716.16	1.46	2.00	2.90
Ethereum	84.31	4812.09	923.18	360.17	1177.67	1.28	1.70	1.68
Retornos								
Apple	-0.14	0.11	0.00	0.00	0.02	16.28	-0.31	6.75
Google	-0.12	0.15	0.00	0.00	0.02	19.73	0.13	8.53
Bitcoin	-0.46	0.23	0.00	0.00	0.04	22.64	-0.80	11.24
Ethereum	-0.55	0.23	0.00	0.00	0.05	32.65	-1.00	10.38

Fuente : elaboración propia.

www.bdigital.ula.ve

Figura 4-5.: Q-Q Plot de los retorno de las acciones de Apple, Google, Bitcoin y Ether.



Fuente : elaboración propia.

Tabla 4-3.: Resumen de las pruebas de raíz unitaria

Retornos	Prueba	Estadístico	p-value	Decisión
Apple	Dickey-Fuller aumentada	-12.264	0.01	Estacionario
	Phillips-Perron	-2187.9	0.01	Estacionario
Google	Dickey-Fuller aumentada	-13.627	0.01	Estacionario
	Phillips-Perron	-2068.1	0.01	Estacionario
BTC	Dickey-Fuller aumentada	-13.071	0.01	Estacionario
	Phillips-Perron	-2800.6	0.01	Estacionario
ETH	Dickey-Fuller aumentada	-10.883	0.01	Estacionario
	Phillips-Perron	-1731.2	0.01	Estacionario

Fuente : elaboración propia.

4.2. Modelo GARCH

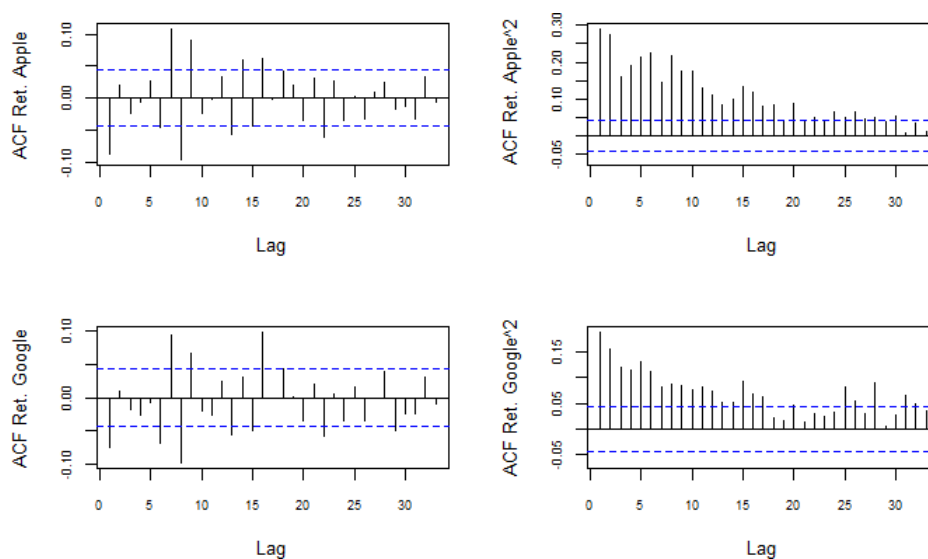
En esta sección se presenta la elección y aplicación de los modelos GARCH en la serie de retornos diarios de Apple, Google, Bitcoin y Ether. Se inició por las validaciones de estacionariedad, la cual se debe cumplir para emplear modelos ARMA y GARCH, para posteriormente identificar la configuración adecuada del componente ARMA del modelo GARCH para elección del mejor modelo en cada una de la serie de retornos.

4.2.1. Estacionariedad en los retornos

Previo al uso de modelos de heterocedasticidad condicional y de volatilidad estocástica, las variables deben cumplir la condición de estacionariedad. Para determinar dicha estacionariedad, se emplean las pruebas de raíz unitaria de Dickey-Fuller aumentada y Phillips-Perron, donde la hipótesis nula H_0 : la serie tiene una raíz unitaria y la hipótesis alternativa H_1 es que la serie es estacionaria. En la tabla 4-3, que se presenta a continuación, se hace un resumen de las pruebas en las que se puede observar que las series de los retornos de Apple, Google, BTC y ETH son estacionarias a un nivel de significancia del 5 %. Con ello, también se establece que en caso de que se desee ajustar un modelo ARIMA para alguna de estas variables, por ser una serie de tiempo estacionaria, es integrada de orden cero ($I(0)$).

Por otro lado, al observar las correlaciones de los retornos y las correlaciones de los de los retornos al cuadrado en las figuras 4-6 y 4-7 se puede destacar:

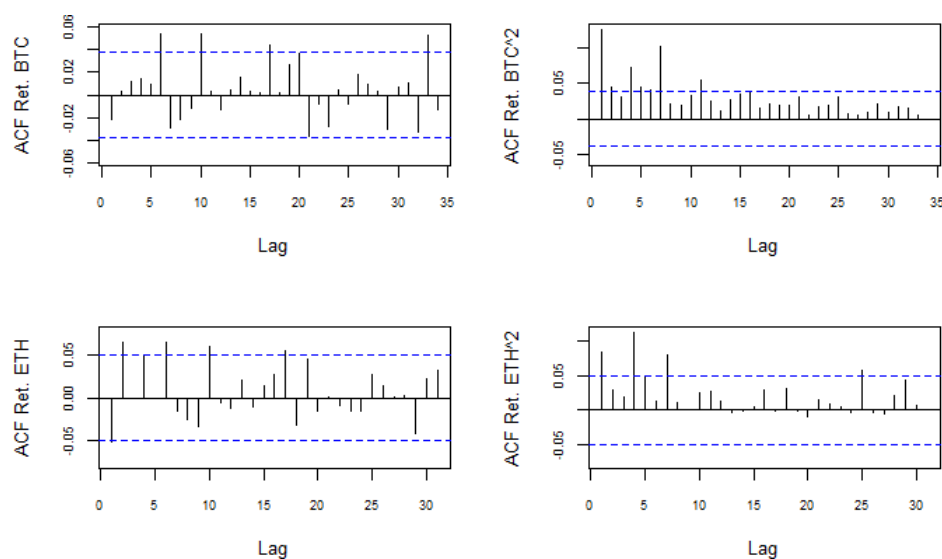
1. Para los retornos de Google y Apple se puede observar una correlación de al menos un orden 1.
2. Los retornos al cuadrado de Google y Apple presentan una estructura de correlación que sugiere que la varianza condicional no es constante en el tiempo, de hecho, decae exponencialmente.
3. En el caso de los retornos de BTC se puede observar que las correlaciones no son significativas, mientras que en el caso de los retornos de ETH se puede observar una

Figura 4-6.: Correlogramas de los retornos de Google y Apple.

Fuente : elaboración propia.

correlación de un orden 1 o 2.

4. Los retornos al cuadrado de BTC y ETH presentan una estructura de correlación que sugiere que la varianza condicional no es constante en el tiempo, al tener una correlación positiva de al menos un orden 1 pudiendo alcanzar un orden 11 en el caso de los retornos de BTC y un orden 7 en el caso de los retornos de ETH, respectivamente.

Figura 4-7.: Correlogramas de los retornos de Bitcoin y ETH.

Fuente : elaboración propia.

4.2.2. Identificación

Para elegir el modelo se identificó a través de las funciones de autocorrelación (FAC) y autocorrelación parcial (FACP), los cuales permitieron encontrar el orden p y q de los procesos autorregresivos (AR) y de medias móviles (MA), respectivamente, de cada uno de los retornos en estudio.

En la tabla 4-4 se puede apreciar las configuraciones de los modelos ARIMA que se identificaron las datas de entrenamiento de cada una de las series de retornos diarios, en el que se puede destacar:

1. Todos los modelos ARIMA de los retornos de precios diarios presentan un valor $d = 0$ en el componente de integración, esto se debe a que todas las pruebas de raíz unitaria (ver tabla 4-3) se determinó que todas las series son estacionarias.
2. El mejor modelo identificado para los retornos diarios de Apple es un $AR(1)$.
3. El mejor modelo identificado para los retornos diarios de Google es un $MA(1)$.
4. El mejor modelo identificado para los retornos diarios de Bitcoin es un $AR(2)$.
5. El mejor modelo identificado para los retornos diarios de ETHER es un $ARMA(2, 2)$.

De lo anterior, se pueden indicar los valores máximos p para el proceso AR y q para el proceso MA a los cuales iterar para determinar el mejor modelo GARCH a través del pool de colección de modelos a evaluar en cada una de las series de retornos diarios.

Tabla 4-4.: Configuración ARIMA(p,d,q) en los retornos

Retornos	AR(p)	I(d)	MA(q)
Apple	1	0	0
Google	0	0	1
BTC	2	0	0
ETH	2	0	2

Tabla 4-5.: Modelos GARCH campeones para cada retorno

Retornos	Mejor modelo	AIC	BIC	Shibata	Hanna-Quinn
Apple (756)	apARCH(1, 1)/std/Ar.p=0 Ar.q=0	-5,575	-5,555	-5,575	-5,567
Google (632)	eGARCH(1,1)/sstd/Ar.p=1 Ar.q=1	-5,736	-5,710	-5,736	-5,726
BTC (616)	eGARCH(2,1)/jsu/Ar.p=0 Ar.q=1	-4,120	-4,098	-4,121	-4,112
ETH (1424)	eGARCH(1,1)/nig/Ar.p=2 Ar.q=2	-3,314	-3,275	-3,314	-3,300

4.2.3. Elección del mejor modelo GARCH

Para la elección del mejor modelo GARCH, el cual refleja de mejor forma el comportamiento asimétrico de la varianza condicional heteroscedástica de los rendimientos diarios de cada una de las series de entrenamiento de los retornos, se utilizó el consenso de los criterios de información Akaike (AIC), Bayesiano (BIC), Shibata y Hanna-Quinn, donde cada uno de los modelos seleccionados obtuvo el menor valor en al menos dos de los cuatro criterios respecto a los otros modelos evaluados en el pool.

1. Para los retornos diarios de Apple, el algoritmo comparó 756 modelos GARCH diferentes, donde el mejor modelo seleccionado a través de los criterios de información es un *APARCH*(1, 1) con una distribución de probabilidad T de Student (std), sin componente ARMA.
2. Para los retornos diarios de Google, el algoritmo comparó 632 modelos GARCH diferentes, donde el mejor modelo seleccionado a través de los criterios de información es un *EGARCH*(1, 1) con una distribución de probabilidad T de Student Sesgada (sstd) y un *ARMA*(1, 1).
3. Para los retornos diarios de Bitcoin, el algoritmo comparó 616 modelos GARCH diferentes, donde el mejor modelo seleccionado a través de los criterios de información es un *EGARCH*(2, 1) con una distribución de probabilidad SU de Johnson (sstd) y un *MA*(1).
4. Por último, para los retornos diarios de Ether, el algoritmo comparó 1424 modelos GARCH diferentes, donde el mejor modelo seleccionado a través de los criterios de información es un *EGARCH*(1, 1) con una distribución de probabilidad Normal Inversa Gaussiana (nig) y un *ARMA*(2, 2).

4.2.4. Estimación de los coeficientes de los modelos GARCH

En la tabla 4-6 se presenta el resumen consolidado de la estimación de los coeficientes de cada uno de los modelos de la serie de retornos de las datas de entrenamiento. De las estimaciones de los modelos se puede destacar:

1. Respecto a la estimación de μ , el cual apunta hacia el rendimiento promedio diario a “largo plazo ”.
 - Según el modelo APGARCH(1,1), Apple tenderá a un rendimiento diario del 0.1 % en el largo plazo. Con un P-valor significativo menor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(1,1), Google tenderá a un rendimiento diario del 0.06 % en el largo plazo. Con un P-valor significativo menor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(2,1), BTC tenderá a un rendimiento diario del 0.1 % en el largo plazo. Con un P-valor significativo menor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(1,1), ETH tenderá a un rendimiento diario del 0.4 % en el largo plazo. Con un P-valor significativo menor a 5 %.
2. Por otro lado, se tiene la estimación de ω , que es la varianza a largo plazo de los retornos, en este caso se tiene :
 - Según el modelo APGARCH(1,1), Apple tenderá a una volatilidad del 0.06 % en el largo plazo. Con un P-valor no significativo al ser mayor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(1,1), Google tenderá a una volatilidad del 36.4 % en el largo plazo. Con un P-valor significativo menor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(2,1), BTC tenderá a una volatilidad del 5.8 % en el largo plazo. Con un P-valor significativo menor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(1,1), ETH tenderá a una volatilidad del 21.4 % en el largo plazo. Con un P-valor significativo menor a 5 %.
3. Para el coeficiente α_1 , que es el impacto de la varianza cuadrada rezagada en el retorno de hoy.
 - Según el modelo APGARCH(1,1), el rendimiento de Apple se explica en un 11.9 % por la volatilidad de hace un día. Con un P-valor significativo menor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(1,1), el rendimiento de Google se explica en un 11.1 % por la volatilidad de hace un día. Con un P-valor significativo menor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(2,1), el rendimiento de BTC se explica en un 1.4 % por la volatilidad de hace un día. Con un P-valor no significativo mayor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(1,1), el rendimiento de ETH se explica en un 0.7 % por la volatilidad de hace un día. Con un P-valor no significativo mayor a 5 %.

4. Mientras que para la estimación de α_2 , que es el impacto de la varianza cuadrada rezagada en el retorno de 2 días anteriores.
 - Según el modelo APGARCH(1,1) de Apple, no se está estimando este parámetro.
 - Según el modelo EGARCH(1,1) de Google, no se está estimando este parámetro.
 - Según el modelo EGARCH(2,1), el rendimiento de BTC se explica en un 5.8 % por la volatilidad de hace un día. Con un p-valor no significativo mayor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(1,1) de ETH, no se está estimando este parámetro.
5. En el impacto de los residuos cuadrados rezagados en el rendimiento, determinado por la estimación de θ_1 :
 - En el modelo APGARCH(1,1) de Apple, se explica en un 87 % por la varianza ajustada del día anterior. Con un p-valor significativo menor a 5 %.
 - En el modelo EGARCH(1,1) de Google, se explica en un 95 % por la varianza ajustada del día anterior. Con un p-valor significativo menor a 5 %.
 - En el modelo EGARCH(2,1) de BTC, se explica en un 99 % por la varianza ajustada del día anterior. Con un p-valor significativo menor a 5 %.
 - En el modelo EGARCH(1,1) de ETH, se explica en un 96 % por la varianza ajustada del día anterior. Con un p-valor significativo menor a 5 %.
6. Respecto a el parámetro de apalancamiento, γ_1 .
 - Según el modelo APGARCH(1,1) de Apple al tener una positiva de γ_1 , se espera que los retornos de Apple tienen efecto de apalancamiento. Con un p-valor significativo menor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(1,1) de Google al tener una positiva de γ_1 , se espera que los retornos de Google tienen efecto de apalancamiento. Con un p-valor significativo menor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(2,1) de BTC al tener una positiva de γ_1 , se espera que los retornos de BTC tienen efecto de apalancamiento. Con un p-valor significativo menor a 5 %.
 - Según el modelo EGARCH(1,1) de ETH al tener una positiva de γ_1 , se espera que los retornos de ETH tienen efecto de apalancamiento. Con un p-valor significativo menor a 5 %.
7. El componente Shape corresponde a los grados de libertad de la distribución T de Student y en cuanto más grande es el valor de Shape, más gruesa es la cola. Se puede apreciar que en cada modelo la estimación de este parámetro tiene un p-valor significativo menor a 5 %, donde los modelos de retornos de Apple y Google son las que tienen las colas más pesadas.

Tabla 4-6.: Coeficientes estimados de los modelos GARCH en los retornos de Apple, Google, BTC y ETH.

Retorno	Coefficiente	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
Apple	μ	0.00123	0.00026	4.64900	0.00000
	ω	0.00063	0.00054	1.15831	0.24674
	α_1	0.11947	0.01868	6.39388	0.00000
	β_1	0.87227	0.02093	41.66603	0.00000
	γ_1	0.51032	0.10730	4.75621	0.00000
	δ	1.01771	0.20912	4.86670	0.00000
	shape	4.51243	0.46450	9.71458	0.00000
Google	μ	0.00068	0.00026	2.61821	0.00884
	ar1	0.85231	0.02083	40.92614	0.00000
	ma1	-0.88133	0.01868	-47.18392	0.00000
	ω	-0.36492	0.02991	-12.19909	0.00000
	α_1	-0.11154	0.02111	-5.28262	0.00000
	β_1	0.95636	0.00351	272.83082	0.00000
	γ_1	0.17998	0.02897	6.21379	0.00000
	skew	0.90340	0.02732	33.06459	0.00000
	shape	3.96716	0.37652	10.53627	0.00000
Bitcoin	μ	0.00118	0.00044	2.68479	0.00726
	ma1	-0.06015	0.01691	-3.55587	0.00038
	ω	-0.05837	0.01697	-3.43983	0.00058
	α_1	-0.01450	0.04008	-0.36184	0.71747
	α_2	0.05837	0.03999	1.45975	0.14436
	β_1	0.99130	0.00275	360.89385	0.00000
	γ_1	0.30466	0.04717	6.45932	0.00000
	γ_2	-0.08201	0.04811	-1.70453	0.08828
	skew	-0.05243	0.03576	-1.46599	0.14265
	shape	1.04358	0.04043	25.80902	0.00000
Ether	μ	0.00498	0.00127	3.90965	0.00009
	ar1	0.56859	0.00522	108.88155	0.00000
	ar2	0.42978	0.00524	81.98548	0.00000
	ma1	-0.65911	0.00006	-11335.88728	0.00000
	ma2	-0.33291	0.00068	-488.96839	0.00000
	ω	-0.21374	0.04964	-4.30553	0.00002
	α_1	0.00707	0.01932	0.36608	0.71430
	β_1	0.96422	0.00825	116.94128	0.00000
	γ_1	0.18196	0.03234	5.62713	0.00000
	skew	-0.05088	0.04353	-1.16882	0.24248
	shape	0.54337	0.08922	6.09020	0.00000

4.2.5. Análisis de los residuos

A continuación, se procederá a validar los modelos a partir de la interpretación de los resultados obtenidos para los residuos empleando correlogramas y pruebas estadísticas como Ljung-Box y ARCH LM.

La figura **4-8** presenta el resumen del análisis de los residuos del modelo **GARCH** de los retornos de Apple, donde se presentan los correlogramas de ACF para los residuos estandarizados y los residuos estandarizados al cuadrado. En el ACF de los residuos estandarizados se puede observar solo un rezago significativo que se pudiese explicar por aleatoriedad, además que en el anexo **A** se presentan valores del estadístico Ljung-Box cercanos o inferiores a 2, con p-valores superiores a 5 %, por lo que no se rechaza la hipótesis nula de la no correlación serial, es decir, los residuos del modelo son ruido blanco. Mientras que para el ACF de los residuos al cuadrado no se presentan autocorrelaciones significativas, además de no rechazarse las hipótesis nulas de Ljung-Box y la prueba Multiplicador de Lagrange para efectos ARCH (ARCH LM) al presentar p-value mayores a 5 %, por lo que no existe varianza heterocedástica, cuando se analizaron los datos con un retardo ARCH(1), ARCH(3), ARCH(5) Y ARCH(7).

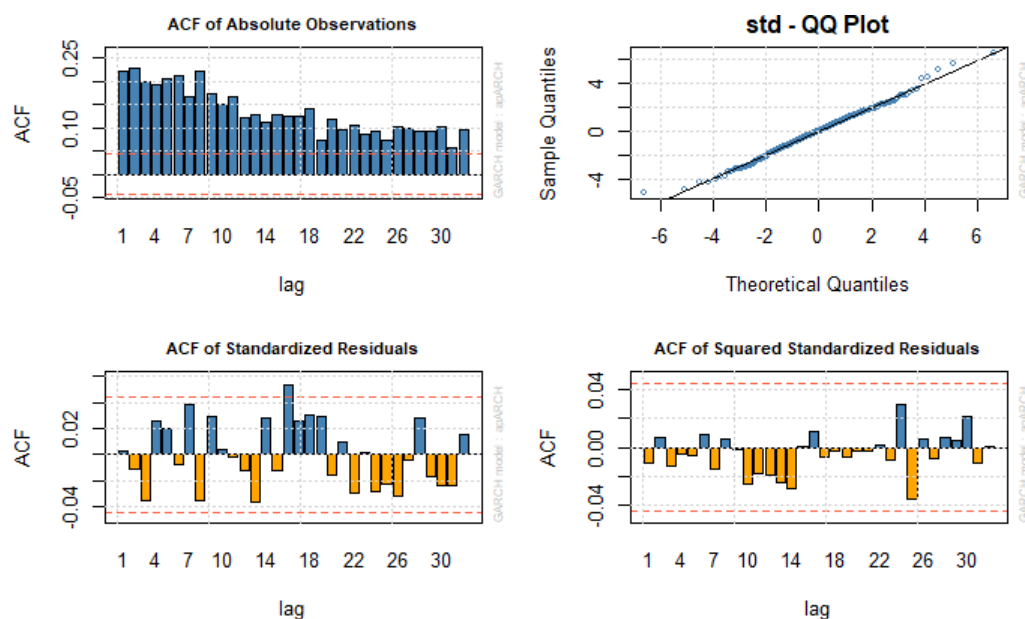
Para los residuos del modelo GARCH de los retornos de Google se aprecia un comportamiento similar al observado en el análisis de los residuos del modelo GARCH de los retornos de Apple, aunque se puede observar en el ACF de los residuos estandarizados dos rezagos significativos (ver figura **4-9**), los valores de la prueba Ljung-Box (ver el anexo A) con p-valores superiores a 5 %, por lo que los residuos del modelo son ruido blanco. Y los residuos al cuadrado no se presentan autocorrelaciones significativas en el ACF, no rechazándose las hipótesis nulas de Ljung-Box y ARCH LM al presentar p-value mayores a 5 %, lo que implica que no existe varianza heterocedástica en los residuos.

Ya con los residuos del modelo GARCH de los retornos de Bitcoin y Ether el comportamiento cambia respecto a los dos anteriores, ya que se aprecia en las figuras **4-10** y **4-11** la presencia de autocorrelaciones significativas en los residuos estandarizados, donde las pruebas de Ljung-Box con p-value significativos inferiores a 5 % indicando la presencia de problemas de autocorrelación en los residuos, es decir, no son ruido blanco. Por otro lado, en el caso de los residuos al cuadrado también se presentan algunas autocorrelaciones significativas, pero las pruebas de Ljung-Box y ARCH LM presentan p-value mayores a 5 %, por lo que se concluye que los residuos de este modelo no presentan una varianza heterocedástica.

4.3. Modelos de volatilidad Estocástica (SV)

Para el ajuste de los modelos de volatilidad estocástica, se parte de las funciones disponibles en el paquete **stochvolTMB**, el cual está diseñado para estimar modelos de volatilidad estocástica de serie de tiempo. Este paquete está inspirado en el paquete **stochvol**, el cual

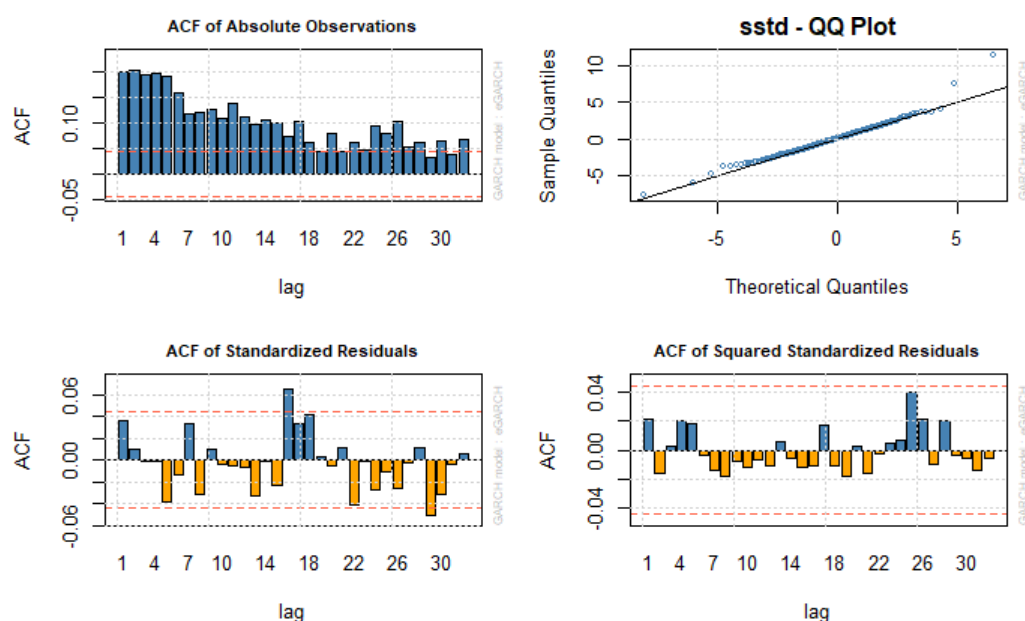
Figura 4-8.: Resumen de análisis de los residuos del modelo GARCH de los retornos de Apple



Fuente : elaboración propia.

www.bdigital.ula.ve

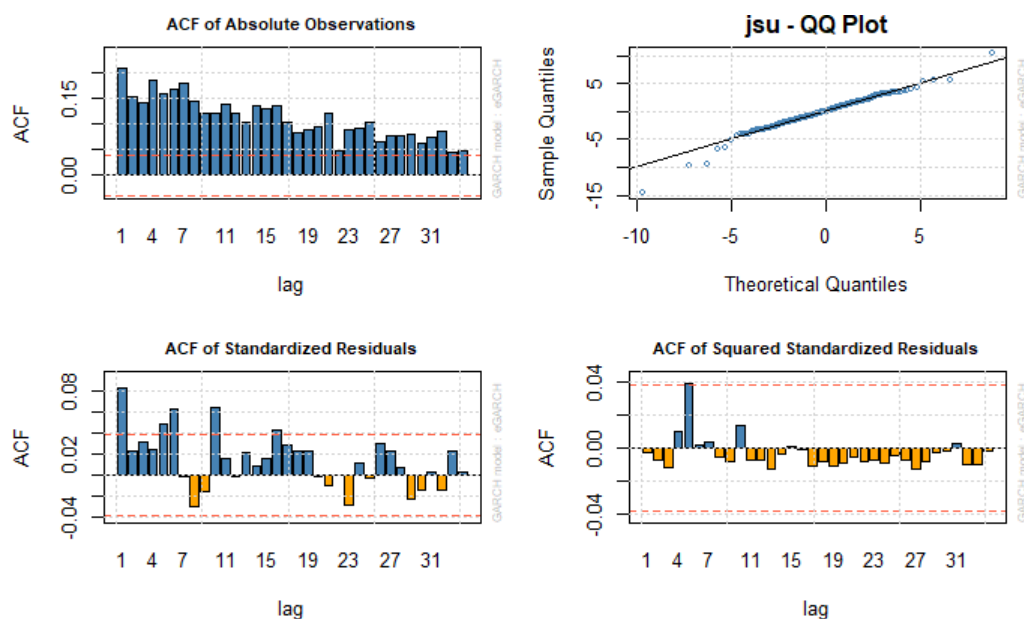
Figura 4-9.: Resumen de análisis de los residuos del modelo GARCH de los retornos de Google



Fuente : elaboración propia.

C.C. Reconocimiento

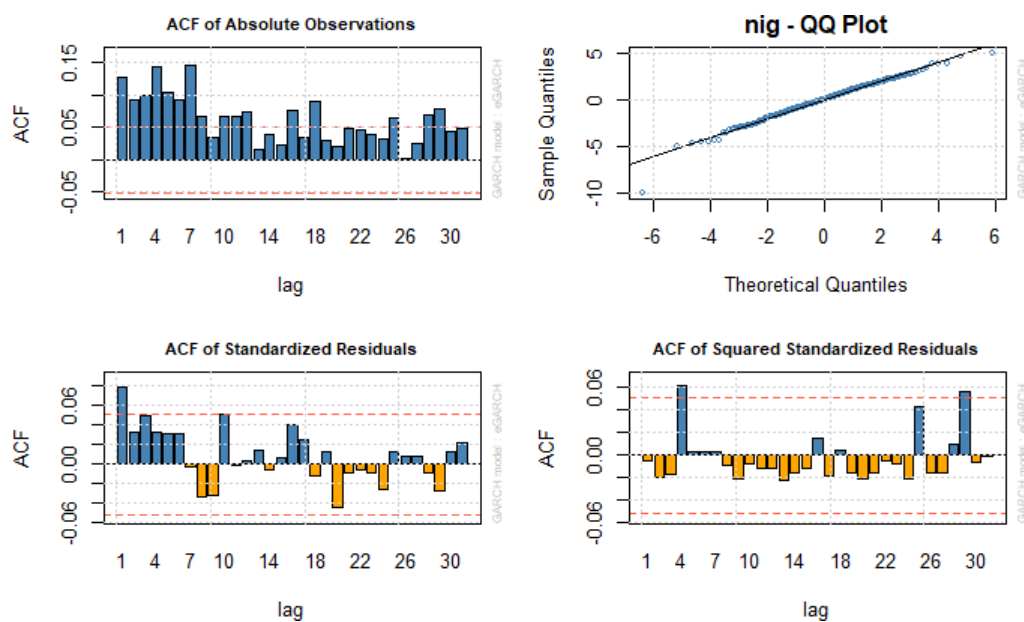
Figura 4-10.: Resumen de análisis de los residuos del modelo GARCH de los retornos de BTC



Fuente : elaboración propia.

www.bdigital.ula.ve

Figura 4-11.: Resumen de análisis de los residuos del modelo GARCH de los retornos de ETH



Fuente : elaboración propia.

C.C. Reconocimiento

también se utilizó en el ajuste de modelos SV en este trabajo para contrastar los diferentes métodos de estimación de los parámetros ya que existe una la diferencia entre ambos paquetes; el primero moldea la volatilidad latente a través de máxima verosimilitud y optimización usando aproximaciones de Laplace y diferenciación automática mientras que el segundo utiliza métodos MCMC.

4.3.1. Modelos SV con máxima verosimilitud

Se inició con los modelos de optimización asumiendo cuatro diferentes distribuciones para los errores observados en la data de entrenamiento, para ello se desarrolló en R una rutina para el pool de modelos de SV con estimación de parámetros de máxima verosimilitud a través de la función `estimate_parameters()` del paquete `stochvolTMB`, a continuación se presenta un trozo de código empleado en R que permite el ajuste de los cuatro casos.

```
#-----#
# Encuentra el mejor modelo SV usando AIC y BIC
#-----#
## Pool de modelos
gaussian <- estimate_parameters(yt$Return,
                               model = "gaussian", silent = TRUE)
t_dist <- estimate_parameters(yt$Return,
                              model = "t", silent = TRUE)
skew_gaussian <- estimate_parameters(yt$Return,
                                     model = "skew_gaussian", silent = TRUE)
leverage <- estimate_parameters(yt$Return,
                                model = "leverage", silent = TRUE)
## Extraccion de AIC y BIC de cada modelo
sv.aic <- AIC(gaussian, t_dist, skew_gaussian, leverage)
sv.bic <- BIC(gaussian, t_dist, skew_gaussian, leverage)
## Union de criterios
sv.criteria <- cbind(sv.aic, sv.bic)
sv.criteria #-- Dataframe con informacion de los
            #-- criterios de decision
#-----# Fin Rutina -----#
```

El resultado de los criterios de información se presenta en la tabla 4-7, donde se pueden observar los valores de los criterios de información AIC y BIC en cada uno de los retornos en estudio: Apple, Google, Bitcoin y Ether. Para las series de entrenamiento de los retornos se obtuvieron que los mejores modelos SV con optimización de los parámetros son los modelos que asumen una distribución T de Student (" t_dist ") al presentar los valores más bajos de AIC y BIC, seguido de los modelos con distribución leverage con los segundos valores más bajos de AIC y BIC.

Tabla 4-7.: Resumen de criterios de información en el ajuste de modelos SV.

Retornos	Tipo modelo	df	AIC	BIC
Apple	gaussian	3	-10887.7	-10870.9
	t_dist	4	-10919.8	-10897.5
	skew_gaussian	4	-10887.3	-10864.9
	leverage	4	-10918.9	-10896.5
Google	gaussian	3	-11191.9	-11175.1
	t_dist	4	-11225.8	-11203.5
	skew_gaussian	4	-11194.1	-11171.8
	leverage	4	-11213.9	-11191.5
Bitcoin	gaussian	3	-10625.5	-10607.9
	t_dist	4	-10749.4	-10726
	skew_gaussian	4	-10636.2	-10612.8
	leverage	4	-10623.2	-10599.7
Ether	gaussian	3	-4816.48	-4800.61
	t_dist	4	-4850.31	-4829.15
	skew_gaussian	4	-4817.54	-4796.37
	leverage	4	-4817.86	-4796.69

De lo anterior, se seleccionó solo los modelos SV con distribución “ t_dist ” para cada uno de los retornos en estudio para posteriormente ser contrastados con los modelos SV con parámetros estimados por MCMC.

4.3.2. Modelos SV con MCMC

Los modelos SV con el método de estimación MCMC del paquete stochvol permiten definir el diseño de la matriz de regresión para estimar la media, teniendo principalmente el diseño “ ar0 ”, que es equivalente a una matriz unitaria, y el diseño “ ar1 ” que permite implementar un ajuste de modelo AR(1), por lo que se emplearon dos modelos SV con MCMC para cada data de entrenamiento de los retornos. Otro punto importante con este paquete, es que tipo de objeto que arroja el resultado del modelo, no cuenta con funciones de criterios de información y las funciones para el computo de estas métricas disponibles en otros paquetes de R no funcionan para este tipo de objetos, por lo que la manera de evaluar los modelos SV con estimación MCMC versus el modelo SV de máxima verosimilitud se realizó a través de medidas de precisión como son: MSE, RMSE, MAE, MAPE y BIAS.

En la tabla 4-7 se presenta el resumen de las métricas de contraste de los pronósticos de los modelos SV estimados con MCMC y la serie de prueba de los retornos, en la que se destaca:

1. Para los retornos de Apple, el mejor ajuste del modelo viene dado por el modelo SV/MCMC(ar0), a pesar de que la métrica del MAPE no es la menor en la compa-

ración de los modelos, si posee el menor nivel de error en MSE, RMSE, y presenta la mayor precisión en los pronósticos al tener el MAE más bajo.

2. En el caso de los retornos de Google, el mejor modelo viene dado por un modelo SV/T-Student, si bien las métricas de MSE, RMSE y MAE son muy similares, el modelo SV/T-Student es el más preciso en sus pronósticos al tener los valores más bajos de MAE y MAPE.
3. Para los retornos de BTC los modelos SV presentan valores de ajuste del error de los pronósticos muy similares, por lo que se eligió el modelo SV / MCMC(ar1) al ser el más preciso, con el MAE y MAPE más bajo .
4. Al igual que con BTC, en la serie de entrenamiento de los retornos de Ether, los modelos SV presentan valores de ajuste muy similares, por lo que se eligió el modelo SV / T-Student por ser el más preciso, con el MAE y MAPE más bajo.

www.bdigital.ula.ve

Tabla 4-8.: Medidas de ajuste entre la serie de retornos de prueba y los pronósticos de los modelos SV.

Retornos	Modelo	MSE	RMSE	MAE	MAPE	BIAS	PCT.BIAS	logLoss
Apple	SV/MCMC(ar1)	0.000279	0.016704	0.013064	1.551334	0.002457	-0.69962	0.027115
	SV/MCMC(ar0)	0.000279	0.016697	0.013044	1.508452	0.002514	-0.661015	0.027027
	SV/T-Student (ar1)	0.000288	0.016977	0.013194	1.019651	0.003872	0.088273	Inf
Google	SV/MCMC (ar1)	0.000229	0.015141	0.011394	1.230488	-0.000102	-0.459701	0.008424
	SV/MCMC(ar0)	0.00023	0.015168	0.011376	1.151962	-0.000105	-0.403601	0.008793
	SV/T-Student	0.00023	0.015169	0.01132	0.975973	0.0011	0.006481	Inf
Bitcoin	SV / MCMC(ar1)	0.001118	0.033434	0.025242	0.994187	-0.0073	-0.242405	-0.037177
	SV / MCMC (ar0)	0.00112	0.033472	0.025238	0.995971	-0.007369	-0.227535	-0.036914
	SV / T-Student	0.001108	0.033281	0.025254	1.015136	-0.005829	-0.027765	Inf
Ether	SV / MCMC(ar1)	0.001516	0.03893	0.031703	1.002466	-0.003078	-0.07487	Inf
	SV / MCMC (ar0)	0.001519	0.03897	0.031774	1.018065	-0.004519	-0.154189	-0.018607
	SV / T-Student	0.001516	0.03893	0.031703	1.002466	-0.003078	-0.07487	Inf

4.3.3. Coeficientes estimados de los modelos SV

En la tabla 4-9 se presentan las estimaciones por MCMC de un total de 10, 000 iteraciones, de los modelos de volatilidad estocastica de las series de entrenamiento de los retornos de Apple y BTC en las que se puede resaltar:

1. La condición de estacionariedad de un modelo SV se cumple cuando $\phi < 1$, por lo que los modelos SV de los retornos de Apple y Bitcoin son estacionarios al tener valores inferiores a 1, con 0.967 y 0.97, respectivamente. Sin embargo, los modelos están próximos a la raíz unitaria.
2. Considerando que ν presenta un valor bajo, $\nu < 18$, se confirma que los retornos de Apple y Bitcoin tienen colas pesadas.
3. El nivel de la volatilidad de los retornos viene dado por $e^{\mu/2}$ y σ , dónde se puede observar que los retornos de BTC presenta un mayor nivel de volatilidad respecto a los retornos de Apple de al menos 4 %.

Para las series de entrenamiento de los retornos de Google y Ether, en la tabla 4-10 se presenta el resumen de las estimaciones de los coeficientes de los modelos SV las cuales se realizarón a través de métodos de máxima verosimilitud empleando el paquete stochvolTMB, en el que se puede destacar:

1. Las estimaciones de los parámetros de los modelos SV de los retornos de Google y Ether son significativamente distintos de cero, con un p-value inferior a un nivel de significancia del 5 %.
2. La condición de estacionariedad se cumple en ambos modelos SV de los retornos de Google y Ether, teniéndose un $\phi < 1$, con los valores 0.9622 y 0.9571, respectivamente. Sin embargo, los modelos están próximos a la raíz unitaria.
3. El parámetro ν se refiere a los grados de libertad de la distribución T de Student de los errores ϵ_t . Por lo que para el modelo de los retornos de Google, $\epsilon_t \sim T_{5.83}(0, 1)$; mientras que para el modelo SV de los retornos de Ether $\epsilon_t \sim T_{4.30}(0, 1)$.
4. El nivel de la volatilidad observada en la serie de entrenamiento de los retornos, σ_y , dónde se puede observar que los retornos de ETH presenta un mayor nivel de volatilidad respecto a los retornos de Google a aproximadamente 1.9 %.
5. El nivel de la volatilidad del proceso latente h_t viene dado por σ_h , dónde se puede observar que los retornos de ETH presenta un mayor nivel de volatilidad respecto a los retornos de Google a aproximadamente 1.9 %.

Tabla 4-9.: Coeficientes estimados con modelos de volatilidad estocásticas por MCMC de los retornos de Apple y Bitcoin

Retornos	Parameter	mean	sd	0.05	0.5	0.95	ESS
Apple	μ	-8.455	0.168	-8.729	-8.454	-8.188	2094.101
	ϕ	0.967	0.011	0.948	0.968	0.982	152.928
	ψ	0.214	0.033	0.165	0.212	0.272	120.346
	ν	6.559	1.206	5.084	6.327	8.925	64.950
	$e^{\mu/2}$	0.015	0.001	0.013	0.015	0.017	2094.101
	σ^2	0.047	0.015	0.027	0.045	0.074	120.346
Bitcoin	μ	-6.767	0.237	-7.138	-6.776	-6.380	639.159
	ϕ	0.975	0.006	0.965	0.976	0.985	294.866
	σ	0.255	0.026	0.213	0.255	0.300	159.753
	ν	3.371	0.268	2.961	3.352	3.821	64.280
	$e^{\mu/2}$	0.034	0.004	0.028	0.034	0.041	639.159
	σ^2	0.066	0.013	0.045	0.065	0.090	159.753

www.bdigital.ula.ve

Tabla 4-10.: Coeficientes estimados con modelos de volatilidad estocásticas por optimización y distribución T de Student de los retornos de Google y Ether.

Retornos	Parameter	Estimate	std-error	z-value	p-value	type
Google	σ_y	0.0138	0.0009	14.9696	1.16E-50	transformed
	σ_h	0.2059	0.0345	5.9626	2.48E-09	transformed
	ϕ	0.9622	0.0120	80.1692	0.00E+00	transformed
	df	5.8333	0.8725	6.6859	2.30E-11	transformed
	$\log(\sigma_y)$	-4.2840	0.0668	-64.1301	0.00E+00	fixed
	$\log(\sigma_h)$	-1.5805	0.1677	-9.4237	4.36E-21	fixed
	$\text{logit}(\phi)$	3.9495	0.3236	12.2040	2.96E-34	fixed
	$\log(df - 2)$	1.3437	0.2276	5.9038	3.55E-09	fixed
Ether	σ_y	0.0474	0.0037	12.7267	4.20E-37	transformed
	σ_h	0.2190	0.0452	4.8414	1.29E-06	transformed
	ϕ	0.9571	0.0158	60.4330	0.00E+00	transformed
	df	4.3021	0.6041	7.1221	1.06E-12	transformed
	$\log(\sigma_y)$	-3.0487	0.0786	-38.8004	0.00E+00	fixed
	$\log(\sigma_h)$	-1.5185	0.2066	-7.3517	1.96E-13	fixed
	$\text{logit}(\phi)$	3.8194	0.3769	10.1338	3.91E-24	fixed
	$\log(df - 2)$	0.8338	0.2624	3.1779	1.48E-03	fixed

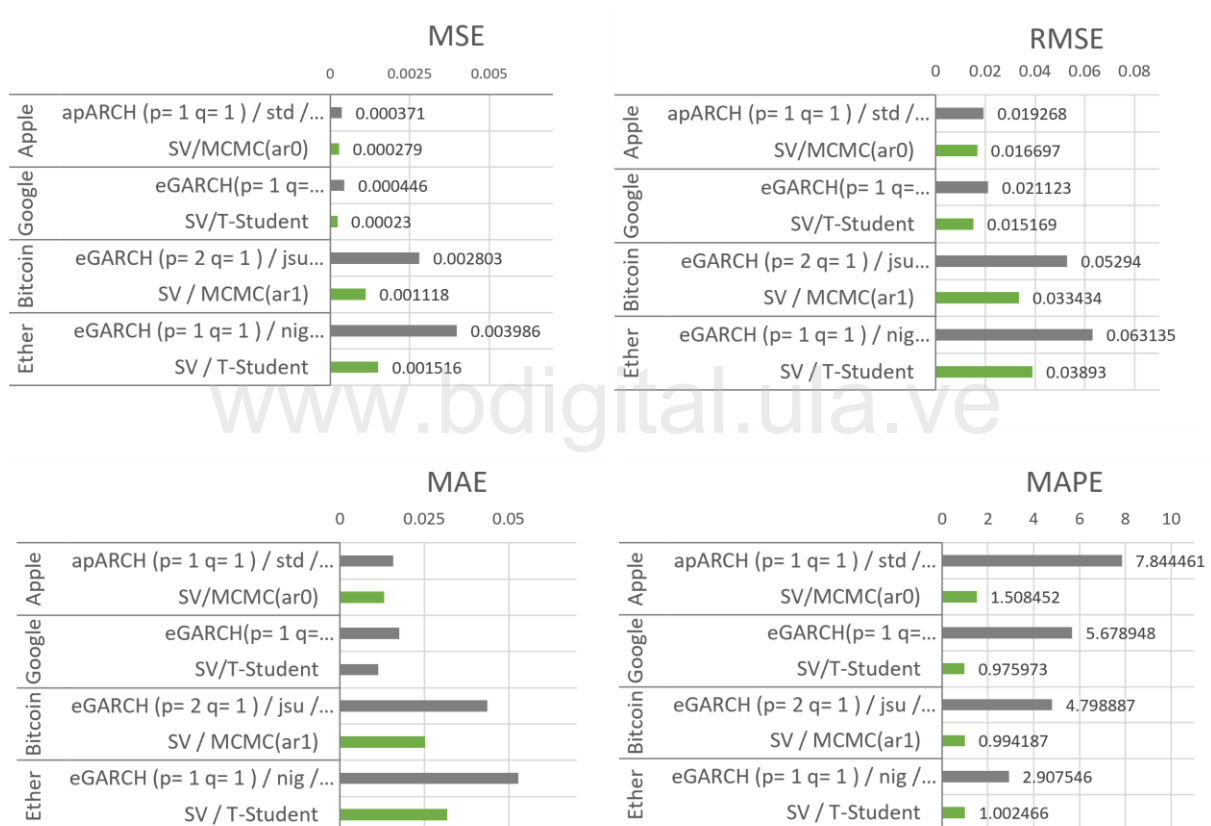
4.4. Contraste de los modelos GARCH y SV

Considerando que se estimó y seleccionó el mejor modelo GARCH y el mejor modelo SV para cada serie de retornos de entrenamiento, se realizó a través de medidas de precisión MSE, RMSE, MAE, MAPE y BIAS un contraste entre ambos modelos.

Los resultados de las medidas de precisión de contraste de los pronósticos de los modelos GARCH y SV con las series de prueba de los retornos de Apple, Google, BTC y ETH se presentan en la figura 4-12 en la que se destaca:

1. Para los retornos de Apple, el modelo SV/MCMC(ar0), presenta un menor error y una mayor precisión en los pronósticos respecto al modelo GARCH (apARCH(p=1,q=1) / std / Ar.p=0 Ar.q= 0), donde el mayor impacto se puede apreciar en la métrica del MAPE, pasando de un 7.8 % en el modelo GARCH a un 1.5 % en el modelo SV.
2. En el caso de los retornos de Google, el modelo SV/T-Student mejora de forma notable los pronósticos respecto al modelo GARCH, reduciendo a la mitad las métricas de error, pasando de 0.000446 a 0.00023 y 0.021123 a 0.015169 en el MSE y RMSE, respectivamente. El MAPE también presenta una mejora considerable, pasando de 5.68 % a un 0.976 %.
3. Con los retornos de BTC ocurre algo similar con el modelo SV de los retornos de Google, el modelo SV / MCMC(ar1) mejora considerablemente los pronósticos respecto al modelo GARCH (eGARCH(p=2, q=1)/jsu/Ar.p= 0 Ar.q= 1), reduciendo a la mitad las métricas de error, pasando de 0.002803 a 0.001118 y 0.003986 a 0.001516 en el MSE y RMSE, respectivamente. Además de que la MAE pasa de 0.043586 a 0.025242 y el MAPE también presenta una mejora considerable, pasando de 4.799 % a un 0.9942 %.
4. Al igual que en los casos de retornos anteriores, el modelo SV/T-Student para los retornos de Ether mejora de forma notable los pronósticos respecto al modelo GARCH (eGARCH(p=1, q=1) / nig / Ar.p= 2 Ar.q= 2), reduciendo a poco más de la mitad las métricas de error, pasando de 0.003986 a 0.001516 y 0.063135 a 0.038930 en el MSE y RMSE, respectivamente. La precisión mejora considerable teniendo un MAPE de 5.68 % en el modelo GARCH a uno de 0.976 % en el modelo SV.

Figura 4-12.: Comparación de las medidas de precisión de los pronósticos ente el modelo SV y el modelo GARCH.



Fuente : elaboración propia.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

Empleando los métodos de Pareto, se identificó que entre el año 2015 y 2021, las principales criptomonedas del mercado de criptoactivos vienen dadas por Bitcoin y Ether, representando en conjunto al menos el 60 % del capital del mercado, por lo que se orienta el estudio hacia estas criptomonedas.

Para el análisis las principales acciones del mercado bursátil, se orientó el alcance hacia solo las acciones que se tranzan en el mercado de Estados Unidos, dónde en el Pareto de acciones destaca la colosal capitalización del mercado de GAFAM (Google, Apple, Facebook, Amazon y Microsoft), y dado que se eligieron dos criptomonedas, se limitó el grupo a solo las empresas Google y Apple.

Una vez seleccionadas las criptomonedas y acciones, se consolidaron los datos de precios diarios de BTC, ETH, Google y Apple entre los años 2015 y 2021, ambos inclusive, a través de la API de Yahoo Finanzas. Con ello, se tiene el principal insumo para el cálculo de los retornos diarios.

Para el análisis exploratorio, se realizó un entendimiento de las series de precios y retornos diarios a través de gráficos de líneas e histogramas, además del uso de estadísticos descriptivos de tendencia central, forma y dispersión, dando cuenta de las tendencias crecientes de los precios a lo largo del tiempo, identificando valores atípicos en el mercado durante el año 2020 asociados principalmente al inicio de la pandemia por el virus SARS-COV-2, además de mostrar que los niveles de volatilidad de BTC y ETH tienden a ser más altos.

En línea con lo anterior, como lo señala Ruiz y Veiga (2012) [26], en las series de rendimientos financieros es habitual encontrar características empíricas, y los retornos de Apple, Google, BTC y ETH no son las excepciones, en ellas se observó:

1. Las distribuciones de los retornos diarios tienen media cero y un exceso de kurtosis, además de presentar leves asimetrías en su distribución.
2. Pese a que las autocorrelaciones de los rendimientos y_t en las datas de entrenamiento no tienden, en su mayoría, a ser significativas, en nuestro caso se logró establecer modelos ARMA(p,q) de máximo un segundo orden para p y para q .
3. Las autocorrelaciones de los retornos al cuadrado, y_t^2 son significativas y en la mayoría de los casos, decaen lentamente hacia cero.

También se identificó la presencia de colas pesadas en la distribución de los retornos diarios y la no normalidad, empleando graficos Q-Q plot con bandas de confianza para pruebas de normalidad, lo que se traduce en una mayor volatilidad, teniéndose los niveles más elevados en las criptomonedas de BTC y ETH.

Para el ajuste de los modelos GARCH con los datos de entrenamiento de las series de los retornos diarios se creó una rutina en R que permitió la comparación de cientos de modelos GARCH para elegir un modelo campeón de esta familia de modelos por cada una de los instrumentos financieros en estudio empleando criterios de información AIC y BIC.

Por otro lado, los parámetros de los modelos de volatilidad estocástica (SV) se estimaron a través del uso de MCMC y máxima verosimilitud con transformaciones de Laplace, para luego elegir un modelo SV campeón empleando criterios de información AIC y BIC, complementado con métricas de ajuste de los pronósticos respecto a las series retornos de las datas de prueba como lo son: MSE, RMSE, MAE y MAPE.

Una vez se estimaron y eligieron los mejores modelos GARCH y SV, se comparan a través de su ajuste en los pronósticos respecto a las datas de prueba, empleando nuevamente el MSE, RMSE, MAE y MAPE en cada uno de los modelos de retornos diarios. La mejora de forma consistente de los pronósticos de los retornos de Apple, Google, BTC y Ether empleando los modelos de volatilidad estocástica, reduciendo a la mitad los errores de ajuste de los modelos MSE y RMSE, además de la precisión de los pronósticos respecto a las series de retorno de prueba, evidenciándose en las medidas MAE y MAPE, dan cuenta de la creciente popularidad de los modelos SV para ajustar y predecir series de tiempo heterocedásticas.

5.2. Recomendaciones

En el alcance de este trabajo no se incluyó el uso de los modelos de valor en riesgo (VaR - por sus siglas en ingles) empleados ampliamente en las matemáticas financieras y en la gestión del riesgo, especialmente para la optimización de portafolios de inversión. Por lo que se abre la oportunidad de extender este trabajo hacia un uso de modelos VaR posterior al ajuste y pronóstico de un modelo SV en la serie de retornos.

A nivel de software, existen muy pocas opciones para implementar el uso de modelos de volatilidad estocástica, por lo que se pueden orientar esfuerzos para mejorar y robustecer los paquetes en R y Python que permitan el crecimiento de la batería de funciones de estimación, evaluación, ajuste y pronóstico de los retornos.

Bibliografía

- [1] ALDOR NOIMAN, Sivan ; BROWN, LAWRENCE D AND BUJA, ANDREAS AND ROLKE, WOLFGANG AND STINE, ROBERT A: The Power to See: A New Graphical Test of Normality. En: *The American Statistician* 67 (2013), Nr. 4, p. 249–260
- [2] BAUR, Dirk G. ; DIMPFL, THOMAS: Realized bitcoin volatility. En: *SSRN* 2949754 (2017), p. 1–26
- [3] CASTILLO, Laura: *Estudio del Comportamiento del Tipo de Cambio Paralelo Para Venezuela 2005-2013*, Universidad de los Andes, Tesis de Grado, 2015
- [4] ESPARTERO, Ana P.: *Estimación e identificación de modelos de volatilidad estocástica con memoria larga*, Tesis de Grado
- [5] FERNÁNDEZ COLLADO, Carlos ; BAPTISTA LUCIO, PILAR AND HERNÁNDEZ SAMPIERI, ROBERTO: Metodología de la Investigación. En: *Editorial McGraw Hill* (2014)
- [6] GELFAND, Alan E. ; SMITH, Adrian F.: Sampling-based approaches to calculating marginal densities. En: *Journal of the American statistical association* 85 (1990), Nr. 410, p. 398–409
- [7] GEMAN, Stuart ; GEMAN, Donald: Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. En: *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence* (1984), Nr. 6, p. 721–741
- [8] HANSEN, Lars P.: Large sample properties of generalized method of moments estimators. En: *Econometrica: Journal of the econometric society* (1982), p. 1029–1054
- [9] HARVEY, Andrew ; RUIZ, ESTHER AND SHEPHARD, NEIL: Multivariate stochastic variance models. En: *The Review of Economic Studies* 61 (1994), Nr. 2, p. 247–264
- [10] HERNÁNDEZ, Ignacio ; LÓPEZ, FRANCISCO: Análisis del efecto apalancamiento en los rendimientos del IPC mediante una Cadena de Markov Monte Carlo antes, durante y después de la crisis subprime. (2015)
- [11] HIGUERA, Jhonathan A. ; GONZÁLEZ, CRISTIAN ARLEY: El bitcoin como dinero y su mercado. (2017)
- [12] HOSSZEJNI, Darjus ; KASTNER, Gregor: Modeling Univariate and Multivariate Stochastic Volatility in R with stochvol and factorstochvol. En: *Journal of Statistical Software* 100 (2021), Nr. 12, p. 1–34

- [13] HULTMAN, Hugo: Volatility Forecasting An Empirical Study on Bitcoin Using Garch and Stochastic Volatility models. (2018)
- [14] JARAMILLO ECHEVERRY, Laura: Portafolios diversificados con criptomonedas y su respectivo riesgo de mercado. (2021)
- [15] KIM, Sangjoon ; SHEPHARD, Neil ; CHIB, Siddhartha: Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models. En: *The review of economic studies* 65 (1998), Nr. 3, p. 361–393
- [16] KRISTENSEN, Kasper ; NIELSEN, Anders ; BERG, Casper W. ; SKAUG, Hans ; BELL, Brad: TMB: automatic differentiation and Laplace approximation. En: *arXiv pre-print arXiv:1509.00660* (2015)
- [17] MEDINA, Ronne ; RODRÍGUEZ, HEIVAR: Una revisión de los modelos de volatilidad estocástica. En: *Comunicaciones en estadística* 3 (2010), Nr. 1, p. 79–98
- [18] METROPOLIS, Nicholas ; ROSENBLUTH, ARIANNA W AND ROSENBLUTH, MARSHALL N AND TELLER, AUGUSTA H AND TELLER, EDWARD: Equation of state calculations by fast computing machines. En: *The journal of chemical physics* 21 (1953), Nr. 6, p. 1087–1092
- [19] NELSON, D. *Conditional Heterocedasticity in asset returns: a New Approach. Econometrica*, 59. 1991
- [20] NILSSON, Oscar. *On Stochastic Volatility Models as an Alternative to GARCH Type Models*. 2016
- [21] NOVALES, Alfonso: Modelos ARCH univariantes y multivariantes. En: *Departamento de Economía Cuantitativa. Universidad Complutense de Madrid.(Versión Preliminar)*. Madrid, España (2013)
- [22] ORLANDONI, Giampaolo: *Modelos GARCH. Procesos Generalizados Autoregresivos con Heterocedasticidad Condicional*. 2005
- [23] PARRA AMADO, Daniel: Estimación de la volatilidad de la tasa de cambio peso-dólar a través de un modelo de volatilidad estocástica. En: *Facultad de Ciencias* (2014)
- [24] PÉREZ ESPARTERO, Ana: *Estimación e identificación de modelos de volatilidad estocástica con memoria larga*, Universidad de Valladolid, Tesis de Grado, 2000
- [25] R CORE TEAM: *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2022
- [26] RUIZ OSORNO, Édison H.: Una aplicación del método de momentos eficiente a la estimación de modelos de volatilidad estocástica. En: *Escuela de Estadística* (2012)
- [27] SÁNCHEZ, Alfonso ; PAOLA, SHERLY: Estudio de modelos de volatilidad estocástica en el mercado FX. En: *Departamento de Matemáticas* (2016)

- [28] SILVA, Maria de los A. ; MARTÍNEZ-MARCA, JOSÉ LUIS AND VENEGAS-MARTÍNEZ, FRANCISCO AND OTHERS: El mercado de derivados y su impacto en la política monetaria: un modelo de volatilidad estocástica. En: *Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superios de Economía del Instituto Politécnico Nacional* 1 (2017), p. 405–430
- [29] TAYLOR, Stephen J.: *Modelling financial time series*. world scientific, 2008
- [30] TSAY, Ruey S.: Nonlinearity tests for time series. En: *Biometrika* 73 (1986), Nr. 2, p. 461–466
- [31] WAHL, Jens. *stochvolTMB: Likelihood estimation of stochastic volatility*. 2019
- [32] WAHL, Jens C.: *stochvolTMB: Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models*, 2021. – R package version 0.2.0

www.bdigital.ula.ve

A. Pruebas Ljung-Box y ARCH LM

--- Pruebas de los Residuos del modelo GARCH-APPLE -----

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals

	statistic	p-value
Lag [1]	0.01548	0.9010
Lag [2 * (p+q) + (p+q) - 1] [2]	0.14355	0.8901
Lag [4 * (p+q) + (p+q) - 1] [5]	2.37548	0.5327
d.o.f=0		
H0 : No serial correlation		

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals

	statistic	p-value
Lag [1]	0.2162	0.6420
Lag [2 * (p+q) + (p+q) - 1] [5]	0.5261	0.9536
Lag [4 * (p+q) + (p+q) - 1] [9]	0.8521	0.9916
d.o.f=2		

Weighted ARCH LM Tests

	Statistic	Shape	Scale	P-Value
ARCH Lag [3]	0.3291	0.500	2.000	0.5662
ARCH Lag [5]	0.3912	1.440	1.667	0.9152
ARCH Lag [7]	0.6717	2.315	1.543	0.9603

----- Pruebas de los Residuos del modelo GARCH-GOOGLE -----

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals

	statistic	p-value
Lag [1]	2.535	0.1114
Lag [2 * (p+q) + (p+q) - 1] [5]	3.284	0.3068
Lag [4 * (p+q) + (p+q) - 1] [9]	5.699	0.3089

d.o.f=2

H0 : No serial correlation

Weighted Ljung–Box Test **on** Standardized Squared Residuals

	statistic	p-value
Lag [1]	0.8736	0.3500
Lag [2 * (p+q) + (p+q) - 1] [5]	1.7480	0.6790
Lag [4 * (p+q) + (p+q) - 1] [9]	2.5682	0.8275
d.o.f=2		

Weighted ARCH LM Tests

	Statistic	Shape	Scale	P-Value
ARCH Lag [3]	0.01622	0.500	2.000	0.8987
ARCH Lag [5]	1.09392	1.440	1.667	0.7053
ARCH Lag [7]	1.40252	2.315	1.543	0.8407

----- Pruebas de los Residuos del modelo GARCH-BTC -----

Weighted Ljung–Box Test **on** Standardized Residuals

	statistic	p-value
Lag [1]	17.65	0.000026593976
Lag [2 * (p+q) + (p+q) - 1] [2]	18.35	0.000000000000
Lag [4 * (p+q) + (p+q) - 1] [5]	22.14	0.000000002223
d.o.f=1		

H0 : No serial correlation

Weighted Ljung–Box Test **on** Standardized Squared Residuals

	statistic	p-value
Lag [1]	0.01763	0.8944
Lag [2 * (p+q) + (p+q) - 1] [8]	2.58009	0.7617
Lag [4 * (p+q) + (p+q) - 1] [14]	3.93847	0.8860
d.o.f=3		

Weighted ARCH LM Tests

	Statistic	Shape	Scale	P-Value
ARCH Lag [4]	0.2785	0.500	2.000	0.5977
ARCH Lag [6]	3.5758	1.461	1.711	0.2325
ARCH Lag [8]	3.7995	2.368	1.583	0.4058

----- Pruebas de los Residuos del modelo GARCH-ETH -----

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals

	statistic	p-value
Lag [1]	8.901	0.00285017
Lag [2 * (p+q) + (p+q) - 1] [11]	17.632	0.00000000
Lag [4 * (p+q) + (p+q) - 1] [19]	21.604	0.00007887
d.o.f=4		
H0 : No serial correlation		

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals

	statistic	p-value
Lag [1]	0.03168	0.8587
Lag [2 * (p+q) + (p+q) - 1] [5]	2.99058	0.4088
Lag [4 * (p+q) + (p+q) - 1] [9]	4.71108	0.4730
d.o.f=2		

Weighted ARCH LM Tests

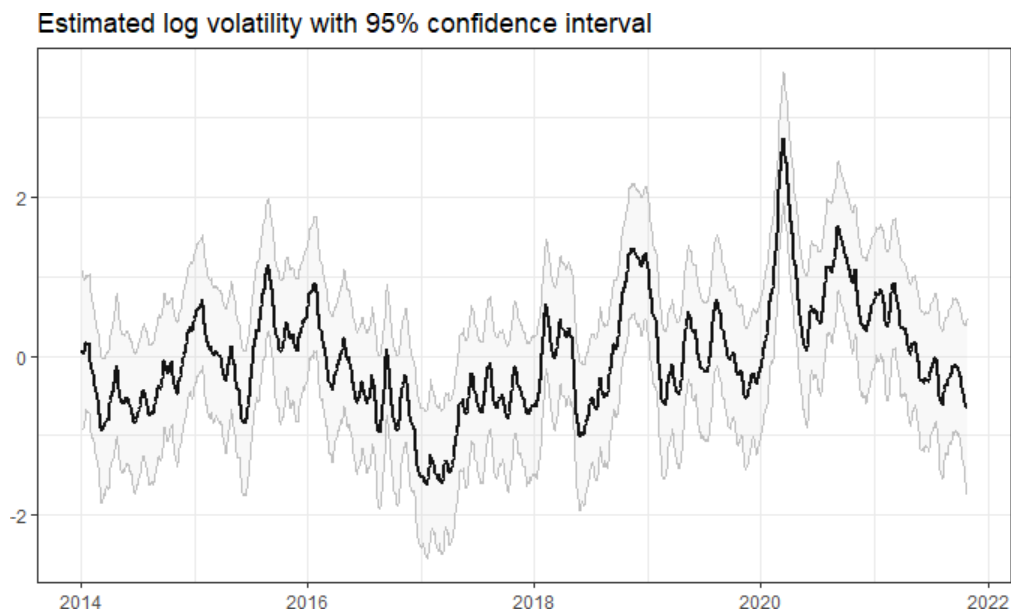
	Statistic	Shape	Scale	P-Value
ARCH Lag [3]	0.454	0.500	2.000	0.5004
ARCH Lag [5]	4.867	1.440	1.667	0.1103
ARCH Lag [7]	5.194	2.315	1.543	0.2056

B. Estimación y próstico de los retornos de Apple con modelo SV / t-student

www.bdigital.ula.ve

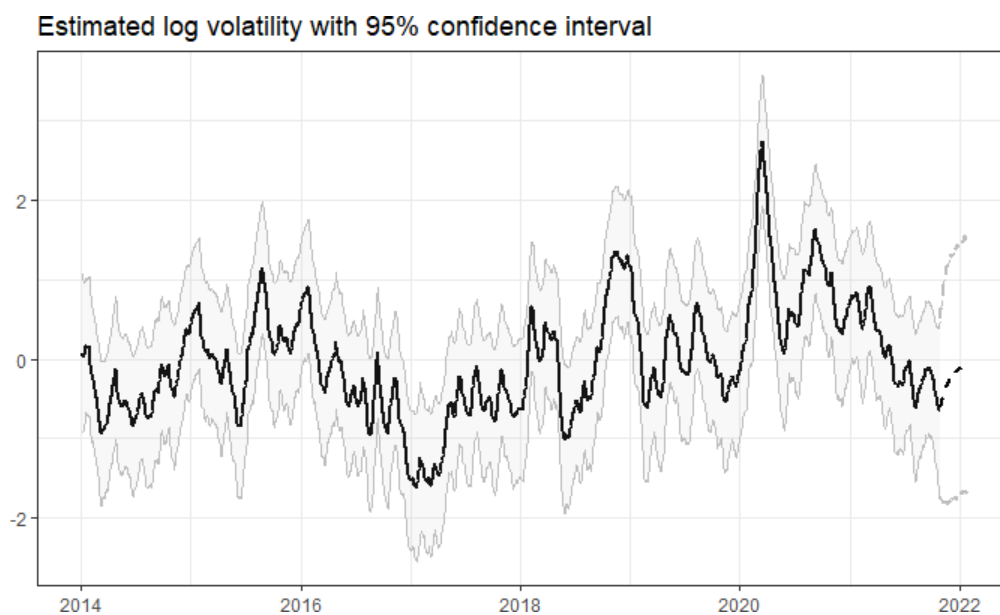
C.C. Reconocimiento

Figura B-1.: Estimación de los retornos de Apple con modelo SV / t-student



www.bdigital.ula.ve

Figura B-2.: Pronóstico de los retornos de Apple empleando el modelo SV / t-student

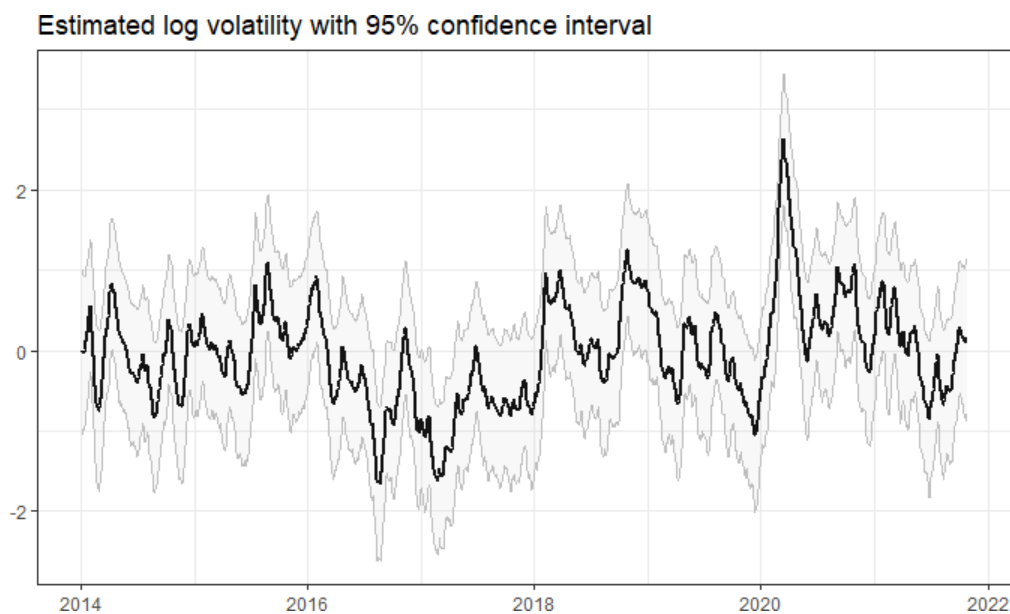


C.C. Reconocimiento

C. Estimación y próstico de los retornos de Google con modelo SV / t-student

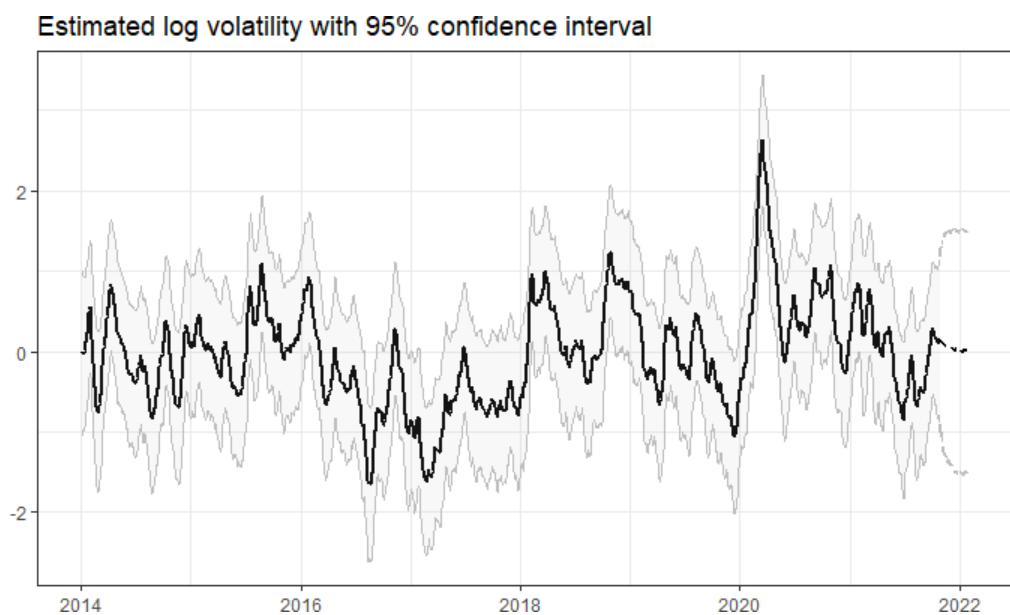
www.bdigital.ula.ve

Figura C-1.: Estimación de los retornos de Google con modelo SV / t-student



www.bdigital.ula.ve

Figura C-2.: Pronóstico de los retornos de Google empleando el modelo SV / t-student

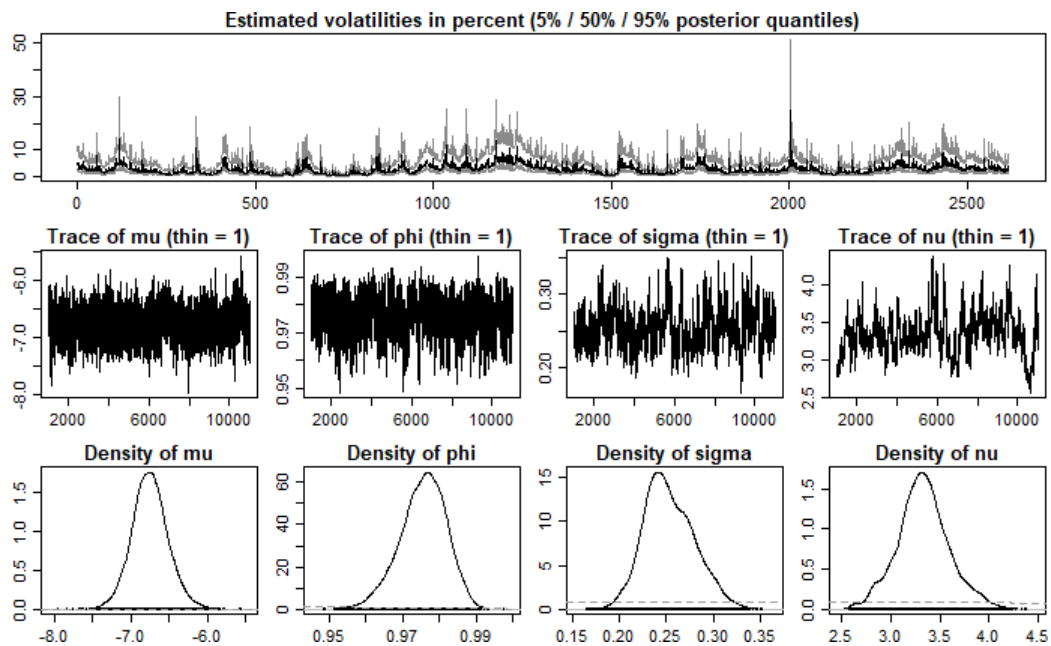


C.C. Reconocimiento

**D. Estimación y pronóstico de los
retornos de Bitcoin con el modelo
SV/MCMC (ar1)**

www.bdigital.ula.ve

Figura D-1.: Estimación de parámetros del modelo SV/MCMC (ar1) para BTC.



www.bdigital.ula.ve

Figura D-2.: Residuos del modelo SV/MCMC (ar1) para BTC.

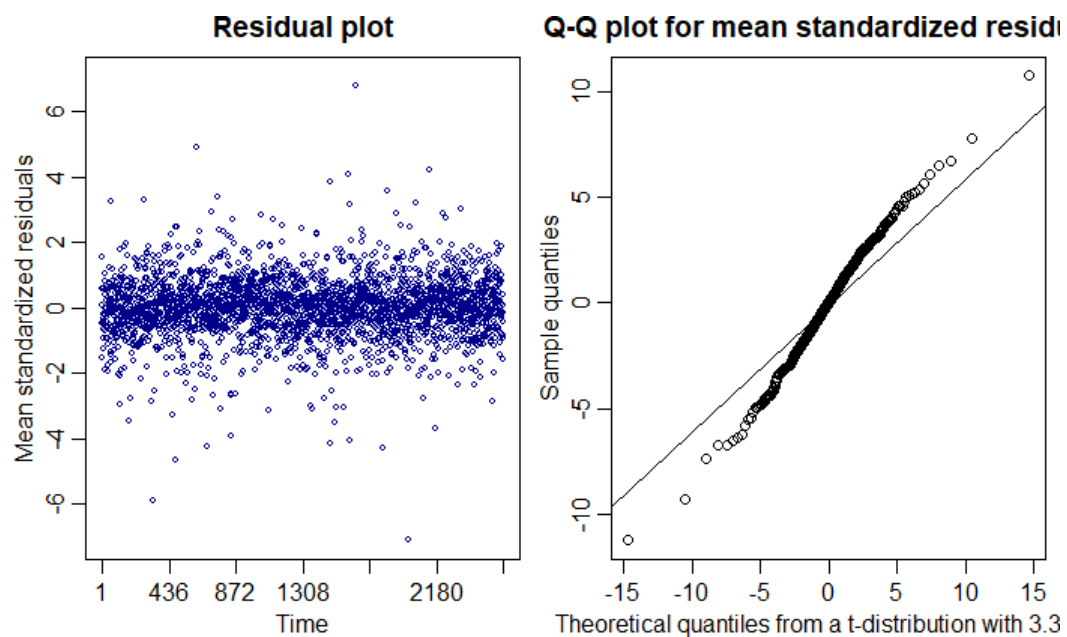
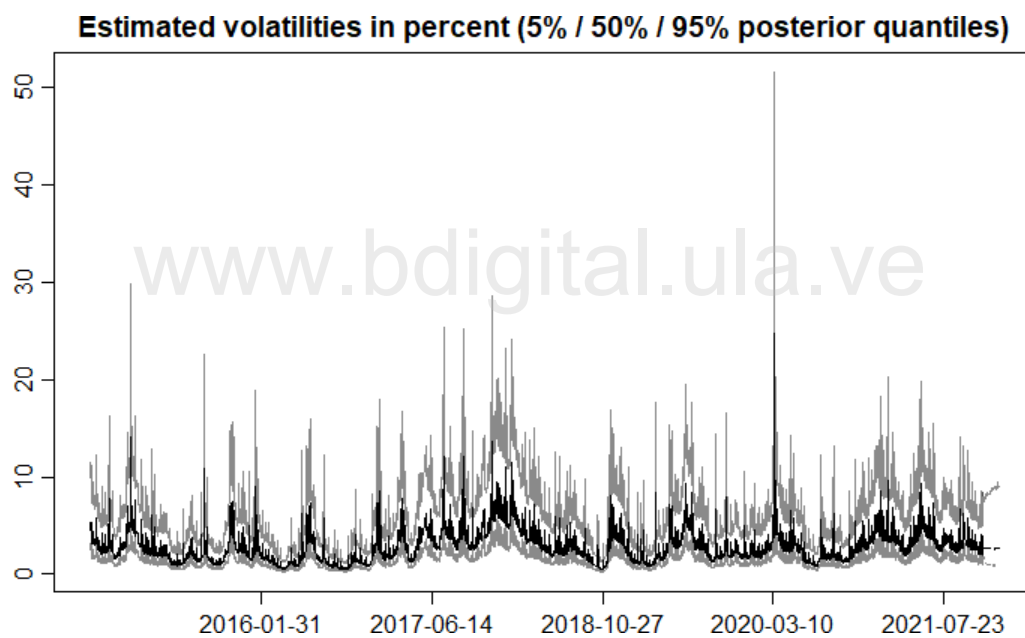


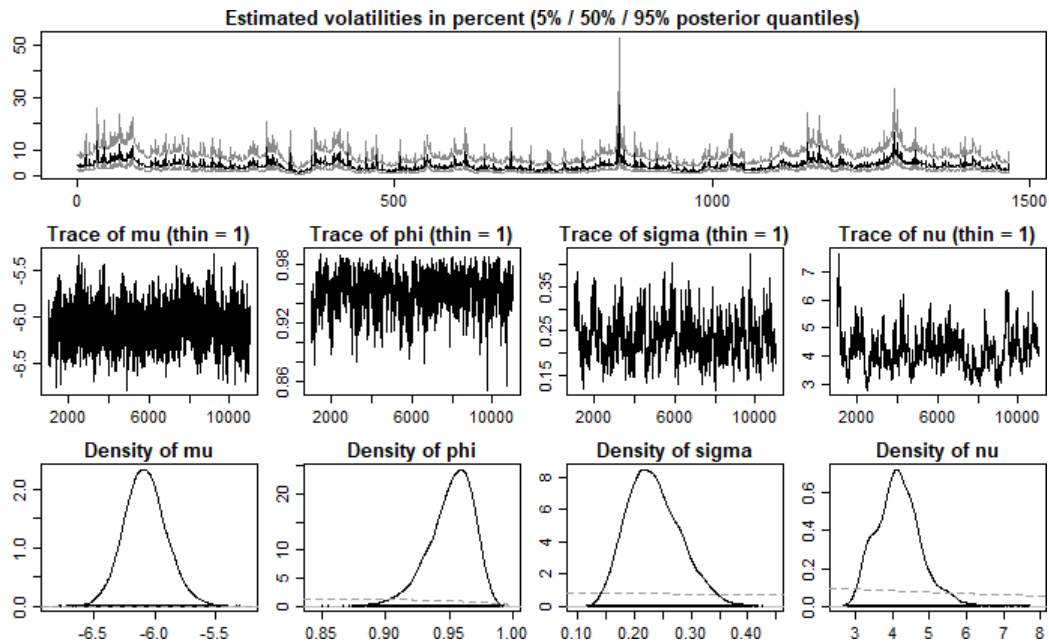
Figura D-3.: Estimación y pronóstico de la volatilidad porcentual de BTC empleando el modelo SV/MCMC (ar1).



E. Estimación y pronóstico de los retornos de Ether con el modelo SV/MCMC (ar1)

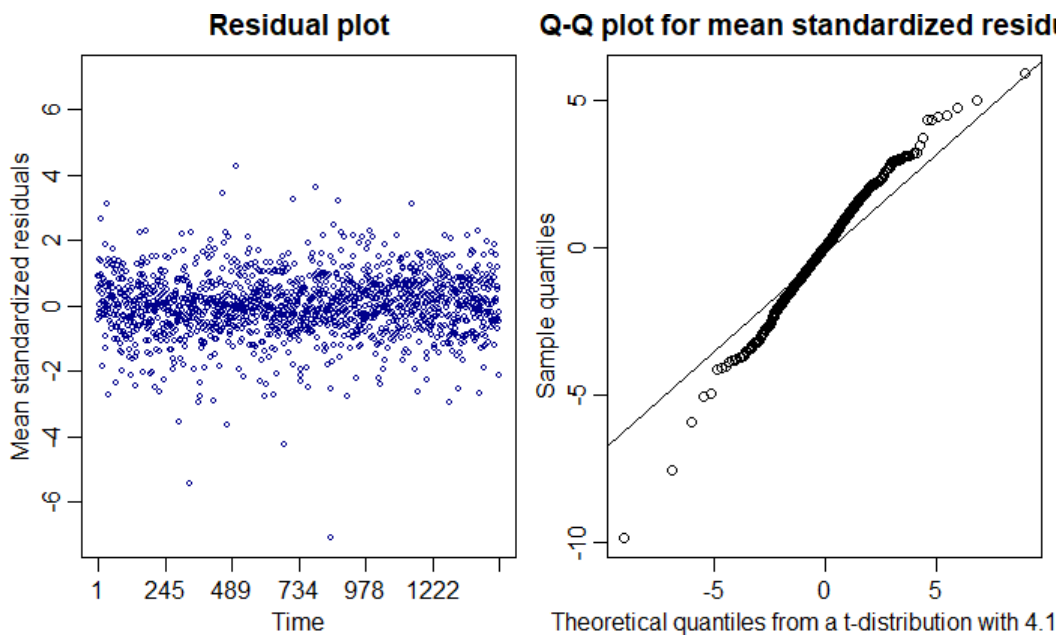
www.bdigital.ula.ve

Figura E-1.: Estimación de parámetros del modelo SV/MCMC (ar1) para ETH.



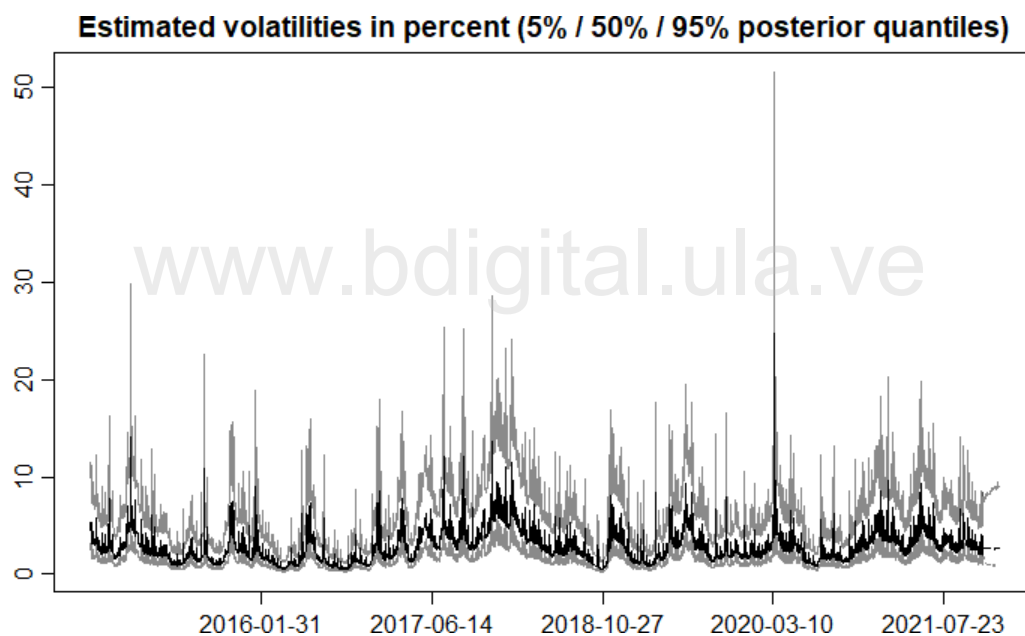
www.bdigital.ula.ve

Figura E-2.: Residuos del modelo SV/MCMC (ar1) para ETH.



C.C. Reconocimiento

Figura E-3.: Estimación y pronóstico de la volatilidad porcentual de ETH empleando el modelo SV/MCMC (ar1).



F. Código en R

```
# Libraries
# APIs
if (!require (quantmod)) {
  install.packages("quantmod")
  suppress Package Startup Messages ( library ( quantmod ))
}

if (!require ( devtools )) {
  install.packages(" devtools ")
  suppress Package Startup Messages ( library ( devtools ))
}

# Manejo de datos
if (!require ( data . table )) {
  install.packages(" data . table ")
  suppress Package Startup Messages ( library ( data . table ))
}

#Gr\'aficos
if (!require ( ggplot2 )) {
  install.packages(" ggplot2 ")
  suppress Package Startup Messages ( library ( ggplot2 ))
}

if (!require ( hrbrthemes )) {
  install.packages(" hrbrthemes ")
  suppress Package Startup Messages ( library ( hrbrthemes ))
}

if (!require ( patchwork )) {
  install.packages(" patchwork ")
  suppress Package Startup Messages ( library ( patchwork ))
}

if (!require ( qqplotr )) {
```

```
devtools::install_github("aloy/qqplo tr")
suppressPackageStartupMessages (library ( qqplo tr ))
}

# Reportes

if (!require ( reporttools )) {
  install.packages (" reporttools ")
  suppressPackageStartupMessages (library ( reporttools ))
}
#Colecciones de paquetes
if (!require ( tidyverse )) {
  install.packages (" tidyverse ")
  suppressPackageStartupMessages (library ( tidyverse ))
}

if (!require ( dplyr )) {
  install.packages (" dplyr ")
  suppressPackageStartupMessages (library ( dplyr ))
}

if (!require ( gridExtra )) {
  install.packages (" gridExtra ")
  library ( gridExtra , warn.conflicts = FALSE)
}

#-- Times Series

if (!require (TSA)) {
  install.packages ("TSA")
  library (TSA)
}

if (!require (tseries)) {
  install.packages ("tseries")
  library (tseries)
}

if (!require (TSstudio)) {
  install.packages ("TSstudio")
  library (TSstudio)
}

if (!require (forecast)) {
```

```

  install.packages("forecast")
  library(forecast)
}

if (!require(x12)) {
  install.packages("x12")
  library(x12)
}

if (!require(rugarch)) {
  install.packages("rugarch")
  library(rugarch)
}

##--- sv
if (!require(stochvol)) {
  install.packages("stochvol")
  library(stochvol)
}

if (!require(stochvolTMB)) {
  install.packages("stochvolTMB")
  library(stochvolTMB, warn.conflicts = FALSE)
}

##---- Portafolios

if (!require(vrtest)) {
  install.packages("vrtest")
  library(vrtest, warn.conflicts = FALSE)
}

##--- Metrics
if (!require(Metrics)) {
  install.packages("Metrics")
  library(Metrics, warn.conflicts = FALSE)
}

## Funciones

coef_var <- function(x, na.rm = FALSE) {
  sd(x, na.rm=na.rm) / mean(x, na.rm=na.rm)
}

```

```

##-- Funci\on para los modelos

pool.garch <- function(df = train , ar.p , ar.q,
                      max.p, max.q, tmodel= "sGARCH",
                      dist.model = "std"){

  ##-- Valores iniciales

  df.ax <- data.frame ( Model = character ( ) ,
                        AIC = double ( ) , BIC = double ( ) ,
                        Shibata = double ( ) , Hanna.Quinn = double ( ) ,
                        stringsAsFactors = FALSE)

  ##-- Loop de modelos
  for (i in 1:max.p){
    for (j in 1:max.q){

      name.model <- paste ( tmodel , " ( p=" , i , "q=" , j , " ) " ,
                           "/" , dist.model , "/" ,
                           "Ar.p=" , ar.p , "Ar.q=" , ar.q)

      garch.spec <- ugarchspec (
        variance.model = list (model=tmodel ,
                                garchOrder=c(i , j)) ,
        mean.model = list (armaOrder=c( ar.p , ar.q)) ,
        distribution.model = dist.model)

      garch.fit <- ugarchfit(spec=garch.spec ,
                             data=df , solver.control=list (trace = 1))
      aic.garch <- infocriteria(garch.fit)[1]
      bic.garch <- infocriteria(garch.fit)[2]
      shi.garch <- infocriteria(garch.fit)[3]
      hq.garch <- infocriteria(garch.fit)[4]

      df.0 <- data.frame(Model = name.model , AIC = aic.garch ,
                          BIC = bic.garch , Shibata = shi.garch ,
                          Hanna.Quinn = hq.garch , stringsAsFactors = FALSE)

      df.ax <- rbind(df.ax , df.0)
    }
  }

  return (df.ax)
}

```

Acciones y criptomonedas

```
GOOG <- getSymbols(Symbols = "GOOGL",
  src = "yahoo", #Other sources include: google, FRED, etc.
  from="2014-01-01",
  to="2021-12-31",
  verbose=F)
```

```
APPL <- getSymbols(Symbols = "AAPL",
  src = "yahoo", #Other sources include: google, FRED, etc.
  from="2014-01-01",
  to="2021-12-31",
  verbose=F)
```

```
BTC <- getSymbols(Symbols = "BTC-USD",
  src = "yahoo", #Other sources include: google, FRED, etc.
  from="2014-01-01",
  to="2021-12-31",
  verbose=F)
```

```
ETH <- getSymbols(Symbols = "ETH-USD",
  src = "yahoo", #Other sources include: google, FRED, etc.
  from="2014-01-01",
  to="2021-12-31",
  verbose=F)
```

Empresas

```
y.AAPL <- AAPL$AAPL.Close
y.GOOG <- GOOGL$GOOGL.Close
```

Criptomonedas

```
y.BTC <- 'BTC-USD' $ 'BTC-USD.Close'
y.ETH <- 'ETH-USD' $ 'ETH-USD.Close'
```

Retornos

Compañías

```
r.AAPL <- diff(log(y.AAPL))[-1]
r.GOOG <- diff(log(y.GOOG))[-1]
```

Criptomonedas

```
r.BTC <- diff(log(y.BTC))[-1]
```

```
r.ETH <- diff(log(y.ETH))[-1]
```

```
# Modelos de Volatilidad
## Metodología Box-Jenkins
```

```
y <- r.ETH ##-- r.AAPL, r.GOOG, r.BTC , r.ETH
print(nrow(y))
print(sum(is.na(y)))
summary(y)
```

```
### Entrenamiento y Prueba
#--- N\úmero de datos a pronosticar
n <- 45
```

```
#--- Partición de las datas
train <- head(y, length(y)-n)
test <- tail(y, n)
print(nrow(train))
print(nrow(test))
```

```
### Prueba de estacionariedad
adf.test(train)
pp.test(train)
```

```
##--- 1. Identificación
```

```
##-- Apple
par(mfrow=c(2,2))
ts.plot(train, gpars = list(xlab="Tiempo", ylab= "Retornos de Apple"))
Acf(train, main="ACF")
Acf(train, main="PACF", type = "partial")
cpgram(train, main="Periodogram")
```

```
arma.train = auto.arima(train, max.order = c(9, 0, 9),
                        stationary = TRUE, trace = T,
                        ic = 'aicc')
```

```
##--- 2. Estimación
arma.train
```

```
##--- 3. Diagnostico
```

```
arma.train$residuals %>% ggtsdisplay(plot.type = 'hist',
```

```

lag.max = 20)
ar.res.train <- arima.train$residuals
Box.test(arima.train$residuals , lag = 14 ,
fitdf = 2 , type = 'Ljung-Box')

```

```
#
```

```
### Modelo GARCH
```

```
#
```

```
tsdisplay(ar.res.train^2 , main = 'Squared Residuals')
```

```
###--- Pool Models Garch
```

```
p.ar <- 0
```

```
q.ma <- 1
```

```
md.arima <- auto.arima(train)
```

```
md.arima
```

```
##-- Maya para ciclo de modelos
```

```
# Lista Modelos Disponibles :: c("sGARCH", "gjrGARCH",
"fGARCH", "eGARCH", "apARCH", "csGARCH")
```

```
tipo.modelos <- c("sGARCH", "gjrGARCH", "fGARCH", "eGARCH", "apARCH", "csGAR
```

```
l.tm <- length(tipo.modelos)
```

```
tipo.dist <- c("snorm", "std", "sstd", "ged", "sged",
"nig", "ghyp", "jsu")
```

```
l.td <- length(tipo.dist)
```

```
max.ar.p <- 2
```

```
max.ar.q <- 2
```

```
df.ax.crit <- data.frame(Model = character(),
AIC = double(), BIC = double(), Shibata = double(),
Hanna.Quinn = double(), stringsAsFactors = FALSE)
```

```
##-- Loop de modelos
```

```
for (i in 1:l.tm){
```

```
  for (j in 1:l.td){
```

```
    for (k in 0:max.ar.p){
```

```
      for (l in 0:max.ar.q){
```

```

tryCatch ({
  df.criteria <- pool.garch(df = train ,
    ar.p=k , ar.q=l , max.p=2, max.q=2,
    tmodel= tipo.modelos[i] ,
    dist.model = tipo.dist[j])
  df.ax.crit <- rbind(df.ax.crit ,
    df.criteria)
}, error=function(e){})

}
}
}
}

## Seleccion de modelo GARCH : AIC y BIC
min.aic <- min(df.ax.crit$AIC)
print(min.aic)
print(df.ax.crit[df.ax.crit$AIC == min.aic , ])
min.BIC <- min(df.ax.crit$BIC)
print(min.BIC)
print(df.ax.crit[df.ax.crit$BIC == min.BIC, ])

#####
## The best GARCH Model

garch.spec <- ugarchspec(variance.model = list(model="eGARCH" ,
  garchOrder=c(1,1)) ,
  mean.model = list(armaOrder=c(2,2)) ,
  distribution.model = "nig")

model.garch <- ugarchfit(spec=garch.spec ,
  data=train ,
  solver.control=list(trace = 1))

fitted <- as.data.frame(fitted(model.garch))
#####

#-- Pronostico
forecast <- ugarchforecast(fitORspec = model.garch ,
  n.ahead = n)
#class(forecast@forecast[["series For"]])
fst <- sigma(forecast)
head(fst)

```

```

##--- Metricas del modelo
nombre.md <- df.ax.crit[df.ax.crit$AIC == min.aic, ][1,1]
#nombre.md <- "eGARCH (p= 1 q= 1 ) / sstd / Ar.p= 1 Ar.p= 1"
##--- Metricas
df.metrics <- data.frame(Modelo = nombre.md,
                          MSE = round(mse(test, fst), 6),
                          RMSE = round(rmse(test, fst), 6),
                          MAE = round(mae(test, fst), 6),
                          MAPE = round(mape(test, fst), 6),
                          BIAS = round(bias(test, fst), 6),
                          PCT.BIAS = round(percent_bias(test, fst), 6),
                          logLoss = round(logLoss(test, fst), 6))
head(df.metrics)

options(scipen = 999)
model.garch@fit$matcoef

par(mfrow = c(1, 2))
# generate plots using the which argument Figure -12 1. ACF of
# standardised residuals
plot(model.garch, which = 10)
# 2. Conditional SD (vs | returns |)
plot(model.garch, which = 3)

par(mfrow = c(2, 2))
plot(model.garch, which = 6)
plot(model.garch, which = 9)
plot(model.garch, which = 10)
plot(model.garch, which = 11)
par(mfrow = c(1, 1))

#-----
## Models SV
#-----

##--- MCMC / AR1

### MCMC : Train
yr <- train
colnames(yr) <- c("Return")

# Ajuste de modelo
res-svt.yr <- svtsample(yr, designmatrix = "ar1")

```

```

summary(res_svt.yr, showlatent=FALSE)

# Validacion visual de las estimaciones
plot(res_svt.yr)
resid.return <- resid(res_svt.yr)
plot(resid.return, col="darkblue", cex=0.5)

#Predicciones
pred.vol <- predict(res_svt.yr, n)
sm.y.sv <- summary(predy(pred.vol))
## summary(predlatent(pred.vol))
y.fs.sv <- data.frame(sm.y.sv$statistics)$Mean

# Estimacion volatilidades
vp <- volplot(res_svt.yr, forecast = n,
              dates = index(yr)[-1])

##--- Metricas MCMC/ AR1
df.metrics.sv <- data.frame(Modelo = "SV / MCMC",
                             MSE = round(mse(test, y.fs.sv), 6),
                             RMSE = round(rmse(test, y.fs.sv), 6),
                             MAE = round(mae(test, y.fs.sv), 6),
                             MAPE = round(mape(test, y.fs.sv), 6),
                             BIAS = round(bias(test, y.fs.sv), 6),
                             PCT.BIAS = round(percent_bias(test, y.fs.sv), 6),
                             logLoss = round(logLoss(test, y.fs.sv), 6))
head(df.metrics.sv)

##--- SV/MCMC/Ar0

# Ajuste de modelo
res_svt.yr.ar0 <- svtsample(yr, designmatrix = "ar0")
summary(res_svt.yr.ar0, showlatent=FALSE)

# Validacion visual de las estimaciones
plot(res_svt.yr.ar0)
resid.return.ar0 <- resid(res_svt.yr.ar0)
plot(resid.return.ar0, col="darkblue", cex=0.5)

#Predicciones
pred.vol.ar0 <- predict(res_svt.yr.ar0, n)
sm.y.sv.ar0 <- summary(predy(pred.vol.ar0))
y.fs.sv <- data.frame(sm.y.sv.ar0$statistics)$Mean

```

```
# Estimacion volatilidades
```

```
vp <- volplot(res-svt.yr.ar0, forecast = n,  
              dates = index(yr))
```

```
##--- Metrics
```

```
df.metrics.sv.ar0 <- data.frame(Modelo = "SV / MCMC (ar0)",  
                                MSE = round(mse(test,y.fs.sv),6),  
                                RMSE = round(rmse(test,y.fs.sv),6),  
                                MAE = round(mae(test,y.fs.sv),6),  
                                MAPE = round(mape(test,y.fs.sv),6),  
                                BIAS = round(bias(test,y.fs.sv),6),  
                                PCT.BIAS = round(percent_bias(test,y.fs.sv),6),  
                                logLoss = round(logLoss(test,y.fs.sv),6))  
head(df.metrics.sv.ar0)
```

```
#-----
```

```
## Pool Models SV
```

```
#-----
```

```
yt <- as.data.table(train)  
colnames(yt) <- c("Tiempo", "Return")
```

```
# Lista de modelos
```

```
gaussian <- estimate_parameters(yt$Return,  
                               model = "gaussian", silent = TRUE)  
t_dist <- estimate_parameters(yt$Return,  
                              model = "t", silent = TRUE)  
skew_gaussian <- estimate_parameters(yt$Return,  
                                     model = "skew_gaussian", silent = TRUE)  
leverage <- estimate_parameters(yt$Return,  
                                model = "leverage", silent = TRUE)
```

```
## Criterio AIC
```

```
sv.aic <- AIC(gaussian, t_dist, skew_gaussian, leverage)
```

```
## Criterio BIC
```

```
sv.bic <- BIC(gaussian, t_dist, skew_gaussian, leverage)
```

```
## Union de criterios
```

```
sv.criteria <- cbind(sv.aic, sv.bic)  
sv.criteria
```

```
# T dist
```

```

estimates <- summary(tdist)
head(estimates, 10)
# Simulacion de precios futuros
pred.sv <- predict(tdist, steps = n)

# Calculo de cuantiles de la simulacion
pred_summary <- summary(pred.sv,
                          quantiles = c(0.025, 0.975),
                          predict_mean = TRUE)
print(pred_summary)

# Grafico de volatilidades
plot(tdist, include_ci = TRUE, forecast = n, dates = yt$Tiempo) +
  ggplot2::xlim(c(yt[,N, Tiempo] - 600, yt[,N, Tiempo] + n))

y.fs.sv <- pred_summary$y$mean

###--- Metricas
df.metrics.sv.1 <- data.frame(Modelo = "SV / T-Student",
                               MSE = round(mse(test, y.fs.sv), 6),
                               RMSE = round(rmse(test, y.fs.sv), 6),
                               MAE = round(mae(test, y.fs.sv), 6),
                               MAPE = round(mape(test, y.fs.sv), 6),
                               BIAS = round(bias(test, y.fs.sv), 6),
                               PCT.BIAS = round(percent_bias(test, y.fs.sv), 6),
                               logLoss = round(logLoss(test, y.fs.sv), 6))
head(df.metrics.sv.1)

### Consolidado de Metricas
df.metrics.all <- rbind(df.metrics, df.metrics.sv,
                        df.metrics.sv.ar0, df.metrics.sv.1)
df.metrics.all

```

G. Repositorio Github

En el siguiente link se puede acceder al repositorio de código, datos y demás recursos empleados en la elaboración de este trabajo de grado: <https://github.com/Aflorez721/Tesis-ULA—IEAC->

www.bdigital.ula.ve

C.C. Reconocimiento