



PROYECTO DE GRADO

Presentado ante la ilustre UNIVERSIDAD DE LOS ANDES como requisito final para
obtener el Título de INGENIERO DE SISTEMAS

FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA EL DISEÑO DE UNA NUEVA CLASE DE CONTROLADORES AUTO-AJUSTABLES IMPLÍCITOS

Por

Br. Jessica Patricia Barrera Montilla

Tutor: Prof. PhD. Anna Patete

Junio 2018

©2018 Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

C.C. Reconocimiento

Fundamentos teóricos para el diseño de una nueva clase de controladores auto-ajustables implícitos

Br. Jessica Patricia Barrera Montilla

Proyecto de Grado — Control y Automatización, 111 páginas
Escuela de Ingeniería de Sistemas, Universidad de Los Andes, 2018

Resumen: El algoritmo de control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada es una línea de investigación que se ha estado desarrollando desde hace ya una década, basándose principalmente en la definición de un teorema, y su respectiva demostración matemática, para garantizar la estabilidad global del esquema de control auto-ajustable en lazo cerrado. Este novedoso algoritmo de control combina las teorías de mínima varianza generalizada, control por régimen deslizante y algoritmos auto-ajustables, para lograr el seguimiento de referencias, en sistemas de control lineales y algunas clases de sistemas no lineales. Este trabajo procura proporcionar una teoría comprensiva, no sólo que especifique los pasos para aplicar algún algoritmo, sino que también apunte las fallas y limitaciones de los mismos, haciendo uso de los recursos bibliográficos disponibles hasta la fecha, para establecer los fundamentos teóricos de la nueva clase de controladores auto-ajustables implícitos y, analizar el comportamiento y desempeño de dichos algoritmos a través de simulaciones para diferentes casos. Cabe destacar que este proyecto de grado no es un libro texto, ni pretende serlo. Sin más, se proyecta documentar la teoría para el diseño de la nueva clase de controladores auto-ajustables implícitos basados en el concepto de mínima varianza generalizada, para el caso de modelos lineales a tiempo discreto.

Palabras clave: auto-ajustable, control, mínima varianza generalizada, modo deslizante, tiempo discreto.

Este trabajo fue procesado en L^AT_EX.

Índice General

Índice de Figuras	v
Agradecimientos	vii
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	3
1.2. Planteamiento del Problema	5
1.3. Justificación	6
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo General	6
1.4.2. Objetivos Específicos	6
1.5. Metodología	7
1.6. Alcance	8
1.7. Producto	8
1.8. Estructura del Documento	9
2. Marco Teórico y Conceptual	10
2.1. Sistemas a Tiempo Discreto	11
2.2. Sistemas de Fase Mínima y Sistemas de Fase No Mínima	14
2.3. Cancelación de Polos y Ceros	17
2.4. Control de Mínima Varianza (MVC)	19
2.5. Control de Mínima Varianza Generalizada (GMVC)	22
2.6. Control por Superficie Deslizante (SMC)	25
2.6.1. Caso a Tiempo Continuo	25
2.6.2. Caso a Tiempo Discreto	28

2.7. Control de Mínima Varianza Generalizada Basada en el Concepto de Modo Deslizante (GMVC-SMC)	33
2.7.1. Ejemplo	37
2.8. Control Auto-Ajustable Implícito	37
3. Nueva Clase de Controladores Auto-Ajustables Implícitos	41
3.1. Fundamentos Teóricos del Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC para Sistemas Lineales	42
3.1.1. Ejemplos	57
3.2. Fundamentos Teóricos del Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC para Sistemas Lineales Auto-Regresivos (AR) en presencia de ruido blanco	66
3.2.1. Modelos ARX	67
3.2.2. Modelos CARMA	74
3.2.3. Ejemplo	76
3.3. Fundamentos Teóricos del Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC para Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (VT)	79
3.3.1. STC-GMVC-SMC-TV para el Caso Libre de Perturbación	80
3.3.2. STC-GMVC-SMC-TV para Modelos ARX	86
3.3.3. Ejemplos	91
3.4. Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC Genérico para Sistemas Lineales	96
3.4.1. Análisis del Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC Genérico para Sistemas Lineales	99
4. Conclusiones y Recomendaciones	103
4.1. Conclusiones	103
4.2. Recomendaciones	106
Bibliografía	108

Índice de Figuras

2.1. (a) Sistema de fase mínima, y (b) sistema de fase no mínima.	15
2.2. Comportamiento de la fase de $G_1(s)$, $G_2(s)$ y $G'(s)$	16
2.3. (a) Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado con cancelación de polo y cero. (b) Polo del controlador. (c) Cero y polo del sistema. Las cruces representan la posición de los polos y los puntos la posición de los ceros.	18
2.4. Señales y_k , r_k y u_k	38
2.5. Configuración genérica de un regulador auto-ajutable implícito (Rodríguez and Bordóns, 2005).	39
3.1. Diagrama de Bloques del sistema en lazo cerrado auto-ajutable (STC-GMVC-SMC).	58
3.2. Respuesta del sistema y_k y señal de referencia r_k , al usar el controlador nominal GMVC-SMC (3.9) y el controlador auto-ajutable STC-GMVC-SMC (3.22) para el modelo real (3.71).	61
3.3. Dinámica de la señal u_k del controlador auto-ajutable STC-GMVC-SMC (3.22) para el modelo real (3.71).	62
3.4. (a) Dinámica de la superficie deslizante S_k (3.2). (b) Zoom de la señal S_k . 63	
3.5. Comportamiento dinámico de los parámetros estimados vs. los parámetros óptimos calculados en base a la planta real.	64
3.6. Señal de salida y_k , y referencia r_k al usar el control nominal GMVC-SMC y el control auto-ajutable STC-GMVC-SMC para el modelo real (3.81). 66	
3.7. Sistema en presencia de ruido blanco.	68
3.8. (a): Señal y_k y señal r_k . $\Gamma_0 = I$ y $\xi_k \sim N(0; 0,1)$. (b): s_k y u_k	77
3.9. (a): Señal y_k y señal r_k . $\Gamma_0 = I$ y $\xi_k \sim N(0; 0,25)$. (b): s_k y u_k	78

3.10. (a): Señal y_k y señal r_k . $\Gamma_0 = I$ y $\xi_k \sim N(0; 0,5)$. (b): s_k y u_k	79
3.11. y_k vs. r_k : algoritmos GMVC-SMC (línea discontinua o a trozos) y STC-GMVC-SMC-TV (línea continua o sólida) aplicados al modelo (3.164), donde después de 100 muestras el modelo de la planta cambia abruptamente al modelo (3.170).	92
3.12. y_k vs. r_k : algoritmos GMVC-SMC (línea discontinua o a trozos) y STC-GMVC-SMC-TV (línea continua o sólida) aplicados al modelo (3.164).	94
3.13. y_k vs. r_k : Algoritmo 3.3.2.1 aplicado al sistema en (3.175), cuando después de 100 muestras cambia a (3.176).	95
3.14. y_k vs. r_k : Algoritmo 3.3.2.1 aplicado al sistema variante en el tiempo (3.177).	96

www.bdigital.ula.ve

Agradecimientos

A Dios todo poderoso por darme la fuerza y la fe de seguir adelante siempre a pesar de las adversidades.

A mi padre, German Barrera, por haber sido pilar fundamental de mi vida, por sus muestras de amor y brindarme siempre su apoyo de forma incondicional. Por seguir guiando mis pasos desde el cielo y bendecirme cada día, este logro te lo dedico a ti papá. Te Amo.

A mi hermano, quien además de ser mi compañero de travesuras, es mi apoyo y mi guía; donde sé que siempre tendré las puertas de su corazón abiertas porque el amor de hermanos es incondicional. Te Quiero Mucho.

A mi madre, por darme la vida, ser pilar fundamental en mi crianza y fraguar los valores que hoy forman parte de mi carácter.

A mi tutora, Prof. PhD Anna Patete, por su ayuda y apoyo incondicional durante mi carrera así como en el desarrollo del presente Proyecto de Grado. Por guiarme siempre con su conocimiento y paciencia para la culminación de éste trabajo. Me siento muy agradecida por presionarme cuando debía hacerlo y exigirme hasta lograr dar lo mejor de mí, sin usted este proyecto no habría sido posible.

A la escuela de Ingeniería de Sistemas y a su personal, tanto docentes como secretarias y personal de mantenimiento, todos y cada uno son piezas fundamentales que funcionan como engranajes para la formación de profesionales que hoy en día dejan en alto el nombre de nuestra universidad fuera del país.

A la ilustre Universidad de Los Andes, por brindarnos el conocimiento necesario para la formación de excelentes profesionales. Además por regalarme una de las mejores experiencias mi vida, donde se crearon anécdotas, vivencias, alegrías, tristezas, amigos y un sentido de pertenencia, es un honor haber tenido el privilegio de haber estudiado en una de las mejores universidades del país.

Capítulo 1

Introducción

En el área de sistemas de control, los investigadores buscan continuamente el desarrollo de nuevos algoritmos de control que sean capaces de solventar los problemas, limitaciones, y desventajas de los controladores propuestos en la literatura. Muchas veces, el surgimiento de un nuevo algoritmo de control se basa en la combinación de las bondades que ofrecen otros diseños de control analizados por años y de fundamentos teóricos definidos, como lo es en este caso de estudio, el algoritmo de control auto-ajutable (*Self-Tuning Control*, STC) basado en el criterio de mínima varianza generalizada (*Generalized Minimum Variance Control*, GMVC), modificado bajo el concepto de control de superficie o modo deslizante (*Sliding Mode Control*, SMC) a tiempo discreto. Este algoritmo de control propuesto por Patete ([Patete et al., 2008c](#)) se basa en las teorías de control de mínima varianza generalizada, control por modo deslizante y la teoría de control auto-ajutable (control adaptativo).

El controlador de mínima varianza (*Minimum Variance Control*, MVC) es un regulador óptimo que pretende reducir el efecto de las perturbaciones sobre la salida del sistema, minimizando un cierto índice de funcionamiento; sin embargo presenta problemas cuando el sistema es de fase no mínima ya que en presencia de ceros inestables estos se cancelarán matemáticamente con los polos inestables del sistema. Existen variaciones del controlador de mínima varianza que tratan este problema, que incorporan seguimiento de referencias y ponderación del esfuerzo de control; es decir, que además de perseguir el objetivo de minimizar las variaciones de la salida con respecto a la referencia se intenta usar el menor esfuerzo de control posible, como lo es el denominado control de mínima varianza generalizada (GMVC) ([Asami and Mori, 2004](#)).

Por otro lado, el control de modo deslizante (SMC), según San Martín ([San Martín, 2005](#)), tiene dos principales ventajas: i) el comportamiento dinámico del sistema puede ser adaptado escogiendo una superficie de conmutación particular y ii) la respuesta en lazo cerrado del sistema controlado es insensible respecto a las incertidumbres del sistema. Para cada opción de control conmutado, se escoge una ganancia tal que, la derivada con respecto al tiempo de esta función sea definida negativa. Después del diseño de la superficie, una ley de control de conmutación es diseñada de modo que los vectores tangentes de las trayectorias de estado apunten hacia la superficie, tal que, los estados son guiados y mantenidos en la superficie deslizante, donde el controlador resulta en un sistema en lazo cerrado discontinuo. Sin embargo, en el diseño de tiempo discreto no es necesario diseñar una ley de control que conmute, solo basta con diseñar una ley de control que lleve las trayectorias a la superficie deslizante ([Furuta, 1990](#)) ([Furuta, 1993a](#)).

Los controladores adaptativos son de gran interés para los diseñadores de sistemas en lazo cerrado, ya que son altamente adaptables a aceptar modificaciones provocadas por el ambiente, errores de diseño de ingeniería o incertidumbre, compensando fallas de componentes menores, e incrementando la confiabilidad de los mismos. Los controladores auto-ajustables son una clasificación de los controladores adaptativos. El adjetivo auto-ajustable resalta la propiedad que tienen estos controladores para sintonizar automáticamente sus propios parámetros, y de esta manera obtener las propiedades deseadas del sistema en lazo cerrado. A su vez, los controladores auto-ajustables pueden clasificarse en implícitos (o directos) o explícitos (o indirectos). Los controladores implícitos ajustan o adaptan directamente los parámetros del controlador, mientras que en los explícitos los parámetros del modelo de la planta son estimados para luego con estos valores calcular los parámetros del controlador ([Astrom and Wittenmark, 1995](#)).

En este capítulo se presenta una breve reseña que brinda las bases para iniciar el desarrollo de este trabajo. Se describen: el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos, la metodología, el alcance del proyecto y el producto que se espera de este proyecto de grado.

1.1. Antecedentes

La idea del control adaptativo surge en los años cincuenta, para los sistemas de aeronaves que operaban en un rango y no en un punto de operación específico. En los años sesenta la teoría de control mostró grandes avances y fue introducido el concepto de espacio estado, a su vez la identificación de sistemas también tuvo grandes progresos. Para los años setenta surgen diferentes esquemas de control para la estimación de parámetros, y varios resultados de aplicaciones fueron reportados; sin embargo los resultados teóricos fueron muy limitados.

Los esquemas de control adaptativo más populares son el denominado control adaptativo por modelo de referencia (*Model Reference Adaptive Control*, MRAC), y el controlador auto-ajustable (*Self-Tuning Controllers*, STC). En el primer esquema, MRAC, la idea básica es hacer que el sistema se comporte como un modelo dado (llamado modelo de referencia), esta idea fue introducida por Whitaker ([Whitaker et al., 1958](#)) y luego fue desarrollada por Parks ([Parks, 1966](#)), Monopoli ([Monopoli, 1974](#)), y Landau ([Landau, 1974](#)). Por otra parte, la idea del control auto-ajustable proviene de manera inherente de los primeros trabajos de Kalman ([Kalman, 1958](#)) y Young ([Young, 1965](#)). Esta idea fue luego analizada y desarrollada por ([Chang and Rissanen, 1969](#)), quienes proponen el uso de la estimación de parámetros por el método de mínimos cuadrados junto con el concepto de mínima varianza generalizada (GMVC). Luego Astrom y Wittenmark ([Astrom and Wittenmark, 1973](#)) realizan una importante contribución al área al mostrar que los parámetros estimados no necesariamente deben converger a los valores óptimos.

Hoy en día las bases teóricas para el diseño de esquemas comunes de control adaptativos es considerada madura y bastantes aplicaciones en sistemas reales han sido publicadas en la literatura.

La estabilidad global del sistema en lazo cerrado, usando el controlador auto-ajustable implícito, para el caso de los sistemas lineales, de una entrada y una salida (*Single Input Single Output*, SISO), invariantes en el tiempo, a tiempo discreto, fue demostrada teóricamente a través del uso de una función de Lyapunov en ([Patete et al., 2008c](#)). La publicación concentra su exposición en el desarrollo de la demostración teórica para garantizar la estabilidad global del sistema en lazo cerrado, ya que hasta

la fecha los argumentos presentados por otros autores sobre la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado al usar controladores auto-ajustables se basaban en suposiciones de gran peso que no eran triviales de asumir o cumplir para cualquier sistema lineal.

Este trabajo luego fue extendido en (Patete et al., 2008b) al caso donde existe la presencia de perturbaciones tipo ruido blanco, es decir, trata con modelos discretos del tipo ARX (AutoRegressive with eXternal input). En este trabajo también se demuestra matemáticamente la estabilidad del sistema en lazo cerrado, y se presentan los resultados simulados donde se logra seguir la referencia en presencia de ruido blanco (sin eliminarlo). Sugiki (Sugiki et al., 2008) y Furuta (Furuta et al., 2011) se basan en los resultados expuestos en (Patete et al., 2008b) para extender el algoritmo de control y aplicarlo a modelos de múltiples entradas y múltiples salidas (*Multi Input Multi Output*, MIMO).

El algoritmo propuesto fue modificado en (Patete et al., 2007) (Patete and Furuta, 2011) para atacar la problemática de los sistemas variantes en el tiempo. Los resultados publicados fueron satisfactorios para el caso del uso del control auto-ajustable en presencia de cambios bruscos e impredecibles en el modelo del sistema.

Debido a que una gran clase de sistemas no lineales pueden ser aproximados a modelos bilineales, el algoritmo de control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada fue nuevamente estudiado y propuesto para controlar modelos bilineales (los cuales representan la clase más simple de sistemas no lineales). Tomados estos como punto de partida hacia la extensión del algoritmo de control a modelos no lineales. Los resultados teóricos de la demostración para mantener la estabilidad global del sistema fueron presentados en (Patete et al., 2008a) (Patete et al., 2011), y para una clase de modelos bilineales más genérica fueron expuestos en (Patete et al., 2010) (Patete et al., 2014). Los resultados simulados demostraron que se aseguraba la estabilidad global del sistema y el seguimiento de la señal de referencia.

Dando un paso más adelante hacia el estudio de control de los sistemas no lineales, en (Patete et al., 2017b) y (Patete et al., 2017a) se presenta un algoritmo más general para tratar una clase de modelos no lineales que puedan expresarse en una forma preestablecida por el algoritmo. Todos estos casos estudiados y publicados trataron con sistemas lineales y algunos tipos de sistemas no lineales, donde el objetivo principal siempre fue encaminado en la demostración de la estabilidad global del sistema en lazo cerrado al incluir la nueva técnica de control auto-ajustable propuesta, y los análisis

sobre los resultados simulados se enfocaron a mostrar el seguimiento de la señal de referencia.

1.2. Planteamiento del Problema

Muchas de las nuevas teorías desarrolladas por los investigadores no son transmitidas a los estudiantes de pregrado debido al nivel de complejidad de las mismas. Por lo general, las publicaciones que están al alcance del público científico, incluyendo a los estudiantes, son presentadas de una manera compleja y concreta, debido a la falta de espacio de redacción, siendo fundamental el preparar un material de las nuevas teorías de control desarrolladas, que esté acorde al nivel académico de los estudiantes de pregrado, permitiendo esto que las mismas sean impartidas, analizadas y aplicadas desde tempranos pasos en el área de sistemas de control.

El algoritmo de control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada (modificado bajo el concepto de control en régimen o modo deslizante a tiempo discreto) es una línea de investigación que se ha estado desarrollando desde el año 2005. Su publicación semilla data del año 2008 ([Patete et al., 2008c](#)), con la presentación de un teorema y su respectiva demostración matemática para garantizar la estabilidad global de un sistema de control auto-ajustable en lazo cerrado, usando un novedoso algoritmo de control que combina las teorías de mínima varianza generalizada, control por modo (o superficie) deslizante y algoritmos auto-ajustables, para el seguimiento de referencias, en sistemas de control lineales. Desde entonces varios artículos han sido publicados extendiendo la aplicación del algoritmo a variantes como sistemas de control lineales con perturbaciones de ruido blanco, sistemas lineales variantes en el tiempo, sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas, y hasta algunos casos de sistemas no lineales han sido estudiados. Sin embargo, las teorías, definiciones, y procedimientos de diseño presentados en los diferentes artículos (publicaciones) difieren en varios aspectos y no están estandarizados. El fundamentar estos aspectos requiere de tiempo, estudio y análisis de diferentes casos, y consideraciones para establecer criterios y conceptos de la manera más general posible. Por lo tanto, es propósito de este documento de proyecto de grado establecer los fundamentos teóricos y algoritmos de diseño de la nueva clase de controladores auto-ajustables implícitos basada en el concepto de mínima varianza generalizada.

1.3. Justificación

El desarrollo de este proyecto surge de la colaboración académica solicitada por parte del profesor Katsuhisa Furuta, de *Tokyo Denki University*, para el desarrollo conceptual del algoritmo auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada (modificado bajo el concepto de control en régimen o modo deslizante a tiempo discreto); línea de investigación que se ha estado desarrollando desde el año 2005, y que hoy en día está siendo motivo de estudio para ser implementada en diferentes sistemas de control, tanto en la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela como en *Tokyo Denki University*, Japón.

Este trabajo de grado permite el refuerzo de los fundamentos de la teoría de control impartidos durante la carrera Ingeniería de Sistemas, en el área de Sistemas de Control, y además contempla el estudio y análisis de teorías de control avanzadas como lo son: el criterio de mínima varianza generalizada, el concepto de control por superficie o modo deslizante, comportamiento e importancia de los controladores auto-ajustables a tiempo discreto, estudio de estabilidad de Lyapunov a tiempo discreto, modelado de sistemas, así como también la combinación de teorías o algoritmos para la modificación o creación de nuevos algoritmos de control.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Recopilar y establecer los fundamentos teóricos para el diseño de una nueva clase de controladores auto-ajustables implícitos basados en el concepto de mínima varianza generalizada.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Recopilar los conceptos y definiciones matemáticas básicas que soportan el desarrollo de la nueva clase de controladores auto-ajustables, específicamente los controladores basados en el concepto de mínima varianza generalizada.
- Estandarizar y establecer las definiciones y fundamentos de la teoría de la nueva

clase de controladores auto-ajustables basados en el concepto de mínima varianza generalizada.

- Estandarizar y establecer los algoritmos matemáticos para el diseño de la nueva clase de controladores auto-ajustables basados en el concepto de mínima varianza generalizada.
- Presentar ejemplos académicos, a través de simulaciones, para el mejor entendimiento de las teorías y definiciones presentadas.

1.5. Metodología

En primera instancia se procedió a realizar una búsqueda en la literatura y bibliografía existente sobre los conceptos competentes a la teoría de control basada en el concepto de mínima varianza generalizada, para estudiar y analizar las nociones de interés relacionados con el objetivo general de este proyecto.

De igual manera, se revisaron las investigaciones y conceptos sobre la teoría de control por superficie deslizante, en específico en el caso a tiempo discreto. Así mismo se revisaron y estudiaron los trabajos realizados al combinar la teoría de mínima varianza generalizada y el control por modo (superficie) deslizante, observando las ventajas que este nuevo algoritmo aporta.

Posteriormente tomando en cuenta los conceptos ya estudiados y establecidos, se procedió a construir los algoritmos matemáticos para el diseño de la nueva clase de controladores auto-ajustables que se presentan en este trabajo, de tal manera de tratar de unificar y estandarizar de la mejor manera posible los mismos.

Se muestran diferentes ejemplos académicos, a través de simulaciones usando del *software Mathematica*, de tal forma de dar soporte a las teorías y fundamentos establecidos. Analizando a través de dichas simulaciones el comportamiento de los controladores en los diferentes casos. Se presentan las conclusiones referentes a las ventajas y desventajas, desempeño, y limitantes del nuevo controlador auto-ajustable basado en mínima varianza generalizada.

1.6. Alcance

Para el desarrollo de este proyecto se lograron establecer los fundamentos teóricos de la nueva clase de controladores auto-ajustables basados en el concepto de mínima varianza generalizada, para el caso de modelos a tiempo discreto, a través de los conceptos de la teoría de sistemas de control y el análisis de resultados simulados.

Se tomaron en cuenta diversas limitaciones al momento de plantear estos conceptos, primeramente el algoritmo de control está diseñado para el caso de modelos matemáticos a tiempo discreto, por lo que se parte de la suposición de que el modelo ya está dado en tiempo discreto, o en caso contrario el modelo continuo debe ser discretizado y expresado en la forma matemática adecuada. Por lo tanto, todo el análisis y conceptos serán basados en sistemas de control a tiempo discreto.

Los fundamentos teóricos son definidos de manera cualitativa o cuantitativa dependiendo de la complejidad de su estudio (para nivel de estudiantes de pregrado) y del aspecto, propiedad, o concepto que se esté considerando.

La teoría se concentrará principalmente para los modelos lineales, de una entrada y una salida, invariantes en el tiempo y descritos en la forma matemática previamente definida. Sin embargo, en la medida de lo posible, se extendieron los fundamentos y análisis a algunos casos de sistemas variantes en el tiempo.

Los análisis de estabilidad, seguimiento de trayectoria, desempeño de los controladores se realizaron sobre los resultados obtenidos mediante simulaciones.

Cabe destacar que este proyecto de grado no es un libro texto, ni pretende serlo. Sin más, se proyecta documentar la teoría de la nueva clase de controladores auto-ajustables basados en el concepto de mínima varianza generalizada, para el caso de modelos a tiempo discreto.

1.7. Producto

Como resultado de este trabajo de grado se obtienen, como producto, las bases o fundamentos teóricos de la nueva clase de controladores auto-ajustables implícitos basados en el concepto de mínima varianza generalizada, para el caso de modelos a tiempo discreto, como un documento de soporte para su futuro estudio, implementación, impartición del conocimiento o autoestudio, dirigido a un público con conocimientos de

teoría de sistemas de control. Siendo este trabajo una base conceptual para el futuro desarrollo de un texto de estudio (libro de control) para discípulos del área de sistemas de control, tanto a nivel de pregrado como de estudios superiores.

1.8. Estructura del Documento

A lo largo de cuatro capítulos se encuentra organizada la información del documento.

Capítulo 1, Introducción. Haciendo referencia en primer lugar al fundamento de la investigación, está caracterizado por los estudios previos y las razones sobre la cual se ha orientado el desarrollo del trabajo.

Capítulo 2, Marco Teórico y Conceptual. Describe los aspectos teóricos base para la comprensión del proyecto, entre los cuales se describen los conceptos básicos de sistemas a tiempo discreto, sistemas de fase mínima y fase no mínima, cancelación de polos y ceros, control de mínima varianza, control de mínima varianza generalizada, control por superficie deslizante, y control auto-ajustable.

Capítulo 3, Nueva Clase de Controladores Auto-Ajustables Implícitos. Es el capítulo central de este proyecto de grado, ya que está dedicado a la definición de los fundamentos teóricos del nuevo algoritmo de diseño de controladores auto-ajustables, para diferentes casos de estudio. En este capítulo se trata de recopilar y estandarizar toda la teoría desarrollada y publicada sobre este tipo de controladores. Algunos ejemplos académicos dan soporte a dicha teoría.

Capítulo 4, Conclusiones y Recomendaciones. Describe las conclusiones generales del trabajo realizado y las recomendaciones sugeridas para trabajos futuros.

Capítulo 2

Marco Teórico y Conceptual

En este capítulo se recopilan los conceptos básicos que se deben tener en cuenta para el entendimiento y desarrollo del Capítulo 3. Para la comprensión de este Capítulo 2, el lector requiere tener conocimiento de teoría de control, tanto de sistemas a tiempo continuo (por ejemplo el contenido de las referencias: [Ogata \(2003\)](#) y/o [Furuta \(1988\)](#)) como de sistemas a tiempo discreto (por ejemplo las referencias [Ogata \(1995\)](#) y/o [Isermann \(2003\)](#)). Se abordan específicamente en este Capítulo 2 conceptos y definiciones de sistemas a tiempo continuo y discreto, así como también sistemas de fase mínima y no mínima, cancelación de polos y ceros. Siendo estas teorías descritas de manera muy genérica.

Por otro lado, para el desarrollo de los algoritmos de control que en este documento son de interés, y que serán presentados en el Capítulo 3, es necesario entender los conceptos de: control de mínima varianza (*Minimum Variance Control*, MVC), control de mínima varianza generalizada (*Generalized Minimum Variance Control*, GMVC), modo (o superficie) deslizante (*Sliding Mode Control*, SMC), control de mínima varianza generalizada basada en el concepto de modo deslizante (que se puede denotar como, *Generalized Minimum Variance Criterium based on Sliding Mode Control*, GMVC-SMC), y controladores auto-ajustables (*Self-Tuning Control*, STC). Estas teorías no son parte del contenido programático de los estudiantes de la carrera Ingeniería de Sistema, en el área de Sistemas de Control, por lo que estas teorías serán descritas un poco más detalladas. Sin embargo, para no hacer de este documento un libro texto de las teorías ya desarrolladas en otras referencias bibliográficas, se presentan los conceptos necesarios y se hace referencia a los textos para su mejor entendimiento (en caso de requerirlo).

Cabe destacar que, en este documento se tratan modelos de sistemas lineales, de una entrada y una salida (*Single Input Single Output*, SISO), a tiempo discreto o discretizados.

2.1. Sistemas a Tiempo Discreto

El algoritmo de diseño que se propone y estudia en este trabajo parte de la suposición de que el sistema a controlar está dado a tiempo discreto, en la relación entrada salida. Por lo tanto es de interés repasar/conocer el proceso de discretización de un sistema a tiempo continuo. Para mayor detalles e información sobre los sistemas continuos, el lector/estudiante puede referirse a (Ogata, 2003) (Furuta, 1988), y para el estudio de los sistemas a tiempo discreto a (Ogata, 1995) (Isermann, 2003).

Sea el sistema a tiempo continuo representado en espacio estados, de una entrada y una salida, dado por (2.1)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$. La matriz $n \times n$ A representa la dinámica natural del sistema, mientras que el vector columna $n \times 1$ B representa el efecto del control, y el vector fila $1 \times n$ C representa la respuesta de la variable de salida del sistema. En conjunto, (A, B, C) definen la dinámica de entrada-salida del sistema.

Es bien sabido, de la teoría de control moderno (Ogata, 1995) (Isermann, 2003) que, un sistema a tiempo continuo (2.1) puede ser discretizado con un periodo de muestreo T_0 , para obtener un sistema a tiempo discreto, en espacio estados, como el representado por la ecuación (2.2)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k, \\ x_0 &= x_0, \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $x_{k+1} = x_{(k+1)T_0}$, $x_k = x_{kT_0}$, $y_k = y_{kT_0}$, $u_k = u_{kT_0}$, x_0 es la condición inicial y

$$\Phi = e^{AT_0} \quad (2.3)$$

$$\Gamma = \int_0^{kT_0} e^{A\tau} d\tau B \quad (2.4)$$

En lo siguiente se asume $T_0 = 1$ para mayor simplicidad y sin pérdida de generalidad.

El sistema discreto en espacio estados (2.2) puede ser llevado al plano frecuencial, mediante la transformada Z (Ogata, 1995) (Isermann, 2003), de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} zX(z) - zx(0) &= \Phi X(z) + \Gamma U(z), \\ Y(z) &= CX(z) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Recordando que por definición para una función de transferencia se asume que las condiciones iniciales son cero, $x_0 = 0$, y despejando $X(z)$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} X(z) &= (zI - \Phi)^{-1} \Gamma U(z), \\ Y(z) &= CX(z) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Calculando la relación entrada-salida del sistema a tiempo discreto (2.6), se obtiene la función de transferencia discreta (2.7) que representa al sistema (2.2),

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zI - \Phi)^{-1} \Gamma \\ G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

El sistema a tiempo discreto (2.7) también puede ser representado por su ecuación en diferencias. Sea,

$$G(z) = C(zI - \Phi)^{-1} \Gamma = \frac{B_p(z)}{A_p(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (2.8)$$

donde los polinomios $A_p(z)$ y $B_p(z)$ se definen como

$$A_p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$$

$$B_p(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m$$

Con $b_0 \neq 0$. La función de transferencia $G(z)$ puede ser reescrita en términos de $G(z^{-1})$, si los polinomios $A_p(z)$ y $B_p(z)$ se definen como $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$, respectivamente; es decir,

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$$

Con $b_0 \neq 0$, Por los tanto,

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} \quad (2.9)$$

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) Y(z^{-1}) =$$

$$(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) U(z^{-1}) \quad (2.10)$$

$$Y(z^{-1}) + a_1 z^{-1} Y(z^{-1}) + a_2 z^{-2} Y(z^{-1}) + \dots + a_n z^{-n} Y(z^{-1}) =$$

$$b_0 U(z^{-1}) + b_1 z^{-1} U(z^{-1}) + b_2 z^{-2} U(z^{-1}) + \dots + b_m z^{-m} U(z^{-1}) \quad (2.11)$$

$$y_k + a_1 z^{-1} y_k + a_2 z^{-2} y_k + \dots + a_n z^{-n} y_k =$$

$$b_0 u_k + b_1 z^{-1} u_k + b_2 z^{-2} u_k + \dots + b_m z^{-m} u_k \quad (2.12)$$

Usando el teorema del desplazamiento de la transformada Z , $z^{-t} y_k = y_{k-t}$, se obtiene la representación del sistema discreto en ecuaciones en diferencias (2.13),

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \dots + b_m u_{k-m} \quad (2.13)$$

2.2. Sistemas de Fase Mínima y Sistemas de Fase No Mínima

Considere el sistema a tiempo continuo, de una entrada una salida, descrito por (2.1). La transformada de Laplace de dicho sistema (2.1) conlleva a

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)\hat{u}(s) \quad (2.14)$$

donde $C(sI - A)^{-1}x(0)$ es la respuesta respecto a la condición inicial del sistema, I es la matriz identidad y la función de transferencia $G(s)$ es dada por (2.15)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.15)$$

Para examinar los polos y ceros de $G(s)$, esta es escrita como (2.16)

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.16)$$

donde el polinomio del denominador es dado por $D(s) = \det(sI - A)$, y el numerador es $N(s) = C \operatorname{adj}(sI - A)B$. La operación del determinante es representada por $\det(\bullet)$ y para la matriz adjunta como $\operatorname{adj}(\bullet)$.

Se asume que $N(s)$ y $D(s)$ no tienen factores comunes, lo cual aplica sí y solo sí la tripleta (A, B, C) es controlable y observable. En este caso, los n polos de $G(s)$ corresponden a los autovalores de A . Recuerde que, los polos de $G(s)$ determinan si $G(s)$ es estable o inestable (Ogata, 2003) (Furuta, 1988).

Definición 2.2.1: Un polo de una función de transferencia es una raíz correspondiente al polinomio del denominador de dicha función de transferencia, por lo que los polos pueden ser un número real o un par complejo conjugado. Los polos de $G(s)$ determinan si $G(s)$ es estable o inestable.

Definición 2.2.2: Un cero de una función de transferencia es una raíz correspondiente al polinomio del numerador de dicha función de transferencia, por lo que los ceros pueden ser un número real o un par complejo conjugado. Los ceros de $G(s)$

determinan si $G(s)$ es de fase mínima o no mínima.

En el caso a tiempo discreto, la función de transferencia discreta (Ogata, 1995) (Isermann, 2003) se representa de forma similar, como en (2.17)

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-d}N'(z^{-1})}{D'(z^{-1})} \quad (2.17)$$

Definición 2.2.3: Un sistema a tiempo continuo es denominado de fase no mínima sí su función de transferencia contiene ceros en el semiplano derecho o el sistema presenta retardos. De lo contrario el sistema se denomina de fase mínima.

Definición 2.2.4: Un sistema a tiempo discreto es denominado de fase no mínima sí su función de transferencia contiene ceros fuera del círculo unitario. De lo contrario el sistema se denomina de fase mínima.

La Fig. 2.1 muestra un ejemplo de un sistema de fase mínima y otro de fase no mínima, para un sistema discreto en el plano- Z , con tres ceros en cada caso.

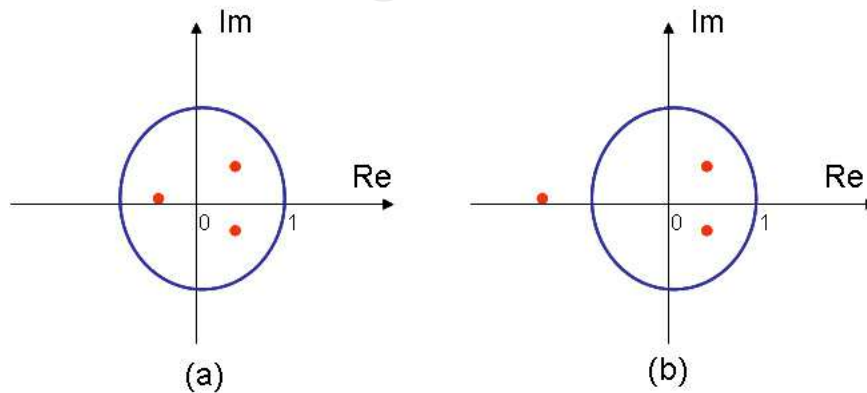


Figura 2.1: (a) Sistema de fase mínima, y (b) sistema de fase no mínima.

El concepto de fase mínima puede ser entendido de mejor manera a través del diagrama de Bode (Ogata, 2003) de una sistema estable. Sí un sistema $G(s)$ es de fase mínima, entonces no existe otro sistema $G'(s)$ que tenga la misma magnitud ($|G(j\omega)| = |G'(j\omega)|$ para todo ω) y que presente un diagrama de fase menor. En otras palabras, un sistema de fase no mínima, $\bar{G}(s)$, no tiene la menor fase posible para los

sistemas de magnitud $|\bar{G}(j\omega)|$.

Ejemplo 2.2.1: Considere los siguientes tres sistemas a tiempo continuo,

$$G_1(s) = e^{-s},$$

$$G_2(s) = \frac{-s + 2}{s + 2},$$

$$G'(s) = \frac{s + 2}{s + 2} = 1.$$

Al calcular la magnitud para cada sistema, se obtiene:

$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = |G'(j\omega)| = 1.$$

El comportamiento de la fase para cada sistema es mostrado en la Fig. 2.2. Se observa que $G'(s)$ tiene la fase mínima posible, por lo tanto $G_1(s)$ y $G_2(s)$ son de fase no mínima.

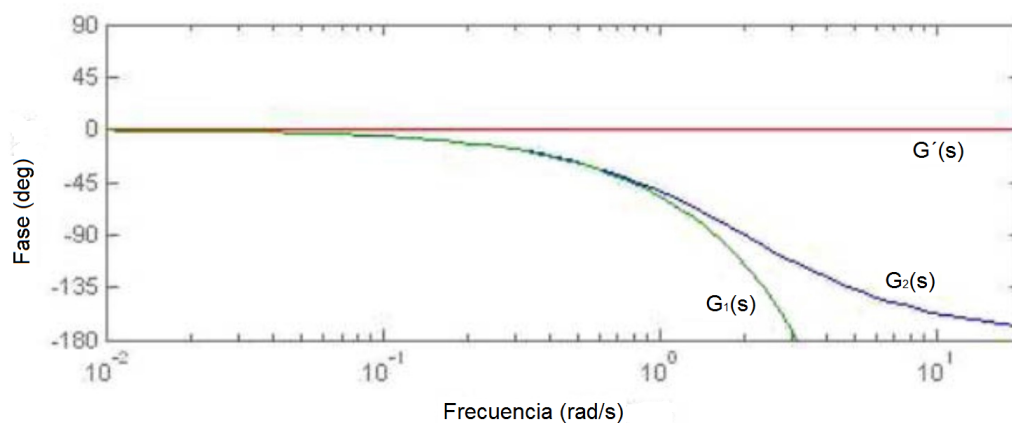


Figura 2.2: Comportamiento de la fase de $G_1(s)$, $G_2(s)$ y $G'(s)$.

2.3. Cancelación de Polos y Ceros

Matemáticamente hablando, un cero se puede cancelar con un polo cuando un par de funciones de transferencia están dispuestas en cascada. Por lo que, matemáticamente, la función de transferencia estable $G(s) = (s + 1)/(s + 1)$ es indistinguible a la función de transferencia constante $G(s) = 1$. Así mismo, la función de transferencia inestable $G(s) = (s - 1)/(s - 1)$ es también indistinguible, matemáticamente, a $G(s) = 1$. Sin embargo, la cancelación de polos yeros inestables no es una operación permitida en la práctica (implementación) de controladores dispuestos en cascada con la planta (o proceso), por la simple razón de que una simple discrepancia entre ambos factores (entre el cero inestable y el polo inestable) puede resultar en inestabilidad de todo el sistema.

Cuando se discretiza un modelo dado por una función de transferencia de fase mínima, usualmente se genera un modelo discreto de fase no mínima. En particular, un periodo de muestreo suficientemente pequeño para muestrear un modelo continuo de segundo orden o superior, da como resultado un modelo discreto de fase no mínima.

Incluso en el caso de que no haya discrepancia entre un polo inestable y un cero inestable, donde la cancelación matemática pueda darse, el sistema de control dispuesto en cascada generalmente presenta una señal interna no acotada (inestable). Este planteamiento se puede observar en el siguiente sistema a tiempo discreto en lazo cerrado descrito a través de su diagrama de bloques, Fig. 2.3, donde la función de transferencia en lazo cerrado involucra una cancelación.

Para el sistema de control mostrado en Fig. 2.3, el error es dado por,

$$e_k = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{2 - 0,5z^{-1}} r_k$$

el cual parece indicar estabilidad. Sin embargo, la función de transferencia desde r_k a u_k es dada por

$$u_k = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(2 - 0,5z^{-1})} r_k$$

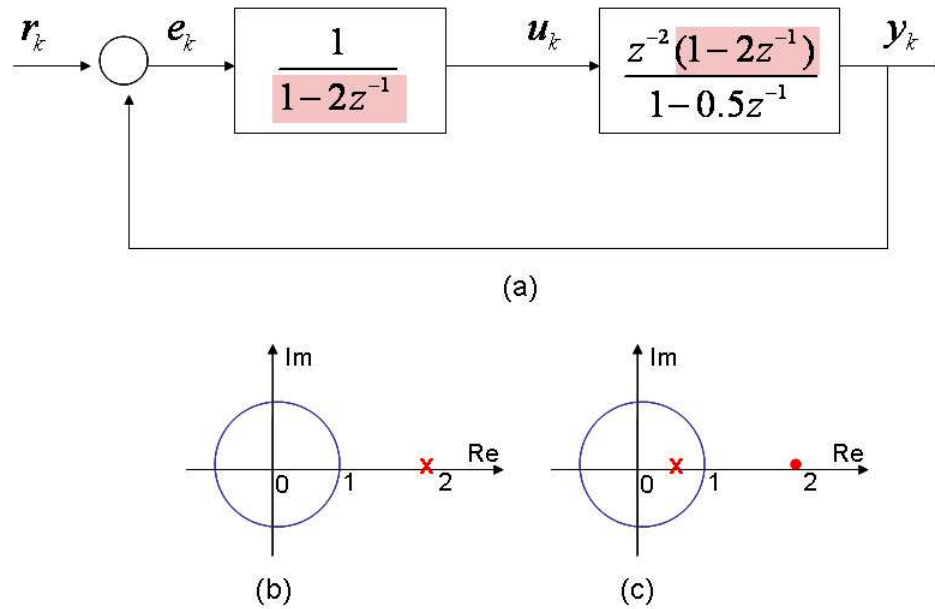


Figura 2.3: (a) Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado con cancelación de polo y cero. (b) Polo del controlador. (c) Cero y polo del sistema. Las cruces representan la posición de los polos y los puntos la posición de los ceros.

la cual es inestable. De hecho, esta función de transferencia muestra la inestabilidad escondida en el sistema. Por lo que, para determinar la estabilidad de un sistema representado a través de su función de transferencia, es necesario evaluar todas las funciones de transferencia involucradas entre las señales, lo que significa que es necesario analizar la estabilidad interna del sistema.

Para demostrar el efecto de las inestabilidades escondidas, considere nuevamente la Fig. 2.3. Si asumimos que r_k es la respuesta a una condición inicial distinta de cero de un sistema lineal invariante en el tiempo, entonces la ley de control u_k no es acotada (es inestable). Mostrándose así la inestabilidad escondida en el sistema consecuencia de la cancelación del polo con el cero inestable.

Así, a pesar de que la cancelación entre un polo y un cero inestable sea perfecta, un cero de un controlador de fase no mínima no debe ser usado para cancelar un polo inestable del modelo de la planta, y viceversa; es decir, un polo inestable de un controlador no debe ser usado para cancelar un cero de un modelo de fase no mínima.

2.4. Control de Mínima Varianza (MVC)

El regulador o control de mínima varianza (*Minimum Variance Control*, MVC) es un regulador predictivo desarrollado por [Chang and Rissanen \(1969\)](#) para sistemas de fase mínima. En ([Chang and Rissanen, 1969](#)), Chang demuestra que esta técnica de control es un control de predicción óptimo.

El control por mínima varianza tiene como objetivo hacer que la variable controlada (salida) siga a una variable de referencia dada en el tiempo mínimo posible, luego de compensar cualquier retardo inherente en el sistema. Por lo que, esta técnica requiere del uso de un predictor por realimentación (retroalimentación o *feedback*). Para lograr dicho objetivo en el tiempo mínimo, el controlador debe realizar el esfuerzo necesario de energía en el primer paso (o primer periodo de tiempo, o periodo de muestreo).

Considere el siguiente modelo a tiempo discreto (2.18),

$$A^0(z^{-1})y_k = z^{-d}B^0(z^{-1})u_k + D^0(z^{-1})\xi_k \quad (2.18)$$

donde z denota el operador de desplazamiento; es decir, $z^{-t}y_k = y_{k-t}$. Sabiendo que la transformada de Laplace es $z = e^{sT_0}$, donde T_0 representa el periodo de muestreo (por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se asume $T_0 = 1$). ξ_k representa la señal de ruido (perturbación). En este modelo, ξ_k es una variable aleatoria independiente. El modelo (2.18) es denominado modelo CARMA (*Controlled Auto-Regressive and Moving Average*).

Definición 2.4.1: Se dice que un polinomio es Schur si tiene todas sus raíces dentro del círculo unitario del plano- Z ([Isermann, 2003](#)).

Los polinomios $A^0(z^{-1})$, $B^0(z^{-1})$ y $D^0(z^{-1})$ se asumen conocidos, y se representan como:

$$\begin{aligned} A^0(z^{-1}) &= 1 + a_1^0 z^{-1} + a_2^0 z^{-2} + \dots + a_n^0 z^{-n}, \\ B^0(z^{-1}) &= b_0^0 + b_1^0 z^{-1} + b_2^0 z^{-2} + \dots + b_m^0 z^{-m}, b_0^0 \neq 0, \\ D^0(z^{-1}) &= 1 + d_1^0 z^{-1} + d_2^0 z^{-2} + \dots + d_l^0 z^{-l}. \end{aligned}$$

Se asumen dadas las siguientes condiciones sobre el modelo (2.18),

Condiciones 2.4.1:

1. No hay factores comunes entre $(A^0(z^{-1}), D^0(z^{-1}))$, o entre $(A^0(z^{-1}), B^0(z^{-1}))$.
2. El tiempo de retardo d es conocido.
3. ξ_k es una variable aleatoria independiente, con varianza σ .
4. $D^0(z^{-1})$ es Schur.

El objetivo de la ley de control u_k es minimizar la función objetivo dada por (2.19),

$$J_0 = E_{\xi} \{ (y_{k+d} - r_{k+d})^2 |_k \} \quad (2.19)$$

donde E_{ξ} es la esperanza con respecto a ξ_k , y r_k es la señal de referencia.

Lema 2.4.1: Dada la ecuación Diofantina,

$$D^0(z^{-1}) = A^0(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}) \quad (2.20)$$

conocida matemáticamente como la identidad de la división polinomial, el cociente y el resto de la división entre dos polinomios, $\frac{D^0(z^{-1})}{A^0(z^{-1})}$, se calcula como:

$$\frac{D^0(z^{-1})}{A^0(z^{-1})} = E(z^{-1}) + z^{-d} \frac{F(z^{-1})}{A^0(z^{-1})} \quad (2.21)$$

donde $\deg\{E(z^{-1})\} = d - 1$ y el primer coeficiente de $E(z^{-1})$ es 1.

Usando la ecuación Diofantina (2.20), el sistema (2.18) puede ser reescrito como sigue, se multiplica por $E(z^{-1})$ el modelo (2.18),

$$E(z^{-1})A^0(z^{-1})y_k = z^{-d}E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k + E(z^{-1})D^0(z^{-1})\xi_k \quad (2.22)$$

Se desplaza (2.22) d -pasos hacia adelante (futuro),

$$E(z^{-1})A^0(z^{-1})y_{k+d} = E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k + E(z^{-1})D^0(z^{-1})\xi_{k+d} \quad (2.23)$$

Usando (2.20) para sustituir $E(z^{-1})A^0(z^{-1})$ en (2.23), se obtiene lo siguiente

$$D^0(z^{-1})y_{k+d} - F(z^{-1})y_k = E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k + E(z^{-1})D^0(z^{-1})\xi_{k+d} \quad (2.24)$$

$$D^0(z^{-1})y_{k+d} - E(z^{-1})D^0(z^{-1})\xi_{k+d} = E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k \quad (2.25)$$

Definiendo

$$y_{k+d|k}^* = y_{k+d} - E(z^{-1})\xi_{k+d} \quad (2.26)$$

entonces el predictor d -pasos hacia adelante de y_k es

$$D^0(z^{-1})y_{k+d|k}^* = E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k \quad (2.27)$$

Así, $y_{k+d|k}^*$ puede ser usada en vez de y_{k+d} en la función objetivo (2.19). Debido a que $y_{k+d|k}^*$ es necesaria, (2.27) es reescrita como:

$$y_{k+d|k}^* = E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k + I'(z^{-1})y_{k+d-1|k-1}^* \quad (2.28)$$

donde $I'(z^{-1})$ es un polinomio definido por (2.29)

$$I'(z^{-1}) = (1 - D^0(z^{-1}))z \quad (2.29)$$

Substituyendo $y_{k+d|k}^*$ por y_{k+d} en la función objetivo (2.19), se tiene

$$J_0 = E_\xi\{(y_{k+d|k}^* - r_{k+d})^2|_k\} \quad (2.30)$$

$$J_0 = E_\xi\{(E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k + I'(z^{-1})y_{k+d-1|k-1}^* - r_{k+d})^2|_k\} \quad (2.31)$$

Minimizando (2.31) con respecto al valor actual de u_k , se tiene,

$$\frac{\partial J}{\partial u_k} = 2b_0^0 e_0 (E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k + I'(z^{-1})y_{k+d-1|k-1}^* - r_{k+d}) \quad (2.32)$$

Así, el control para minimizar (2.32) es dado por (2.33)

$$u_k = -\frac{F(z^{-1})y_k + I'(z^{-1})y_{k+d-1|k-1}^* - r_{k+d}}{B^0(z^{-1})E(z^{-1})} \quad (2.33)$$

Sí el modelo del sistema es preciso, entonces la señal de salida controlada seguirá la señal de referencia después de que transcurra el tiempo de retardo (d), el único error que se pueda presentar será a causa de la señal de ruido o perturbación. Este controlador es óptimo, es decir produce la mejor respuesta del sistema que se pueda obtener en el mínimo tiempo posible, y además compensa el retardo.

2.5. Control de Mínima Varianza Generalizada (GMVC)

El control por mínima varianza obtiene su buen desempeño al cancelar las dinámicas del sistema, por lo que este no puede ser aplicado a sistemas de fase no mínima. Otra observación del control de mínima varianza es que usualmente requiere de un esfuerzo grande por parte de la señal de control, lo cual puede ser una desventaja operacional para ciertos sistemas. Por esta razón, surge el desarrollo de la técnica de control de mínima varianza generalizada (*Generalized Minimum Variance Control*, GMVC) (Clarke et al., 1975), donde se propone una función de costos (función objetivo) que incorpora la variable de control y la variable de referencia.

Así, control de mínima varianza generalizada busca que la ley de control u_k minimice la siguiente función objetivo (2.34),

$$J_1 = E_\xi \{ (R(z^{-1})r_{k+d} - P(z^{-1})y_{k+d})^2 + (\bar{Q}(z^{-1})u_k)^2 |_k \} \quad (2.34)$$

Es de observar que dicha función (2.34) contiene pesos que ponderan las variables

de salida y referencia. Además de incorporar un término para penalizar el esfuerzo excesivo de la ley de control. $P(z^{-1})$, $R(z^{-1})$ y $\bar{Q}(z^{-1})$ son funciones de transferencias de estructura genérica, i.e.

$$P(z^{-1}) = \frac{P_n(z^{-1})}{P_d(z^{-1})}, \quad R(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}, \quad \bar{Q}(z^{-1}) = \frac{\bar{Q}_n(z^{-1})}{\bar{Q}_d(z^{-1})}$$

Dado el mismo modelo (2.18), el problema ahora es encontrar un predictor que remplace el término desconocido

$$\varphi_{k+d} = P(z^{-1})y_{k+d} \quad (2.35)$$

en la función objetivo (2.34).

Como se usan funciones de peso cuya estructura está dada por funciones de transferencia, la siguiente igualdad (2.36) se puede plantear

$$P(z^{-1})D^0(z^{-1}) = A^0(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d} \frac{F(z^{-1})}{P_d(z^{-1})} \quad (2.36)$$

donde $\deg\{E(z^{-1})\} = d - 1$ y el primer coeficiente de $E(z^{-1})$ es 1. Observe que, debido a la inclusión de $P(z^{-1})$ y $P_d(z^{-1})$, los polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$ en (2.36) son diferentes de los presentados en (2.20).

Siguiendo el mismo procedimiento usado para obtener el controlador por mínima varianza, las siguientes ecuaciones son obtenidas:

Multiplicando por $E(z^{-1})$ la ecuación del modelo (2.18), se obtiene (2.22). Luego, usando,

$$P(z^{-1})D^0(z^{-1})y_{k+d} = \frac{F(z^{-1})}{P_d(z^{-1})}y_k + E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k + E(z^{-1})D^0(z^{-1})\xi_{k+d} \quad (2.37)$$

Se definen

$$yf_k = \frac{y_k}{P_d(z^{-1})}$$

$$\bar{G}(z^{-1}) = E(z^{-1})B^0(z^{-1})$$

y,

$$I(z^{-1}) = (1 - D^0(z^{-1}))z$$

entonces, usando (2.35), la ecuación (2.37) se puede reescribir como:

$$D^0(z^{-1})\psi_{k+d} = F(z^{-1})yf_k + \bar{G}(z^{-1})u_k + E(z^{-1})D^0(z^{-1})\xi_{k+d} \quad (2.38)$$

Añadiendo el término ψ_{k+d} en ambos lados de la ecuación (2.38), se tiene

$$D^0(z^{-1})\psi_{k+d} + \psi_{k+d} = F(z^{-1})yf_k + \bar{G}(z^{-1})u_k + \psi_{k+d} + E(z^{-1})D^0(z^{-1})\xi_{k+d} \quad (2.39)$$

$$\psi_{k+d} = F(z^{-1})yf_k + \bar{G}(z^{-1})u_k + \psi_{k+d} - D^0(z^{-1})\psi_{k+d} + E(z^{-1})D^0(z^{-1})\xi_{k+d} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \psi_{k+d} &= F(z^{-1})yf_k + \bar{G}(z^{-1})u_k + (1 - D^0(z^{-1}))z\psi_{k+d-1|k-1} \\ &\quad + E(z^{-1})D^0(z^{-1})\xi_{k+d} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Se define el predictor como

$$\psi_{k+d|k}^* = \psi_{k+d} - E(z^{-1})\xi_{k+d} \quad (2.42)$$

entonces,

$$\psi_{k+d|k}^* = F(z^{-1})yf_k + \bar{G}(z^{-1})u_k + I(z^{-1})\psi_{k+d-1|k-1}^* \quad (2.43)$$

Usando el predictor (2.43) en (2.34) y minimizando la ecuación con respecto a la variable de control u_k , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_k} = & -2\bar{g}_0(R(z^{-1})r_{k+d} - F(z^{-1})yf_k - \bar{G}(z^{-1})u_k - I(z^{-1})\psi_{k+d-1|k-1}^*) \\ & + 2\bar{g}_0\bar{Q}(z^{-1})u_k = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

(2.44) se puede escribir como

$$\psi_{k+d|k}^* - R(z^{-1})r_{k+d} + \bar{Q}(z^{-1})u_k = 0 \quad (2.45)$$

donde se usó (2.43), y

$$\bar{Q}(z^{-1}) = \frac{\bar{g}_0\bar{Q}(z^{-1})}{\bar{g}_0}$$

Como los parámetros del modelo son conocidos, entonces la ley de control se puede calcular usando (2.43) y (2.45), como se muestra en (2.46)

$$u_k = \frac{R(z^{-1})r_{k+d} - \sum_{i=1}^{n_{\bar{G}}} \bar{g}_i u_{k-i} - F(z^{-1})yf_k - I(z^{-1})\psi_{k+d-1|k-1}^*}{\bar{g}_0 + \bar{Q}(z^{-1})} \quad (2.46)$$

Así la ecuación (2.46) es la ley de control óptima para alcanzar el objetivo de seguimiento de referencia en el mínimo tiempo posible, para sistemas de fase no mínima.

2.6. Control por Superficie Deslizante (SMC)

El control por superficie deslizante (*Sliding Mode Control*, SMC), ha sido estudiado desde los años sesenta bajo el nombre de sistemas de estructura variable, (*Variable Structure Systems*, VSS). Este tipo de control es robusto ante las incertidumbres del modelo (o planta) controlado. En esta sección, las nociones básicas de la teoría de control por superficie (o modo) deslizante, tanto para el caso a tiempo continuo como para el caso a tiempo discreto, son presentadas.

2.6.1. Caso a Tiempo Continuo

Se considera el siguiente sistema lineal, invariante en el tiempo, de una entrada y una salida,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.47}$$

donde $u(t)$ es una variable escalar, $x(t)$ es el vector de estados de dimensión n , y $y(t)$ es también una variable escalar. La superficie deslizante se define como $s(t)$ (2.48),

$$s(t) = \{x(t) | Gx(t) = 0\}\tag{2.48}$$

$s(t)$ define un hiperplano, así, la teoría de control por superficie deslizante se basa en mantener los estados del sistema $x(t)$ en el hiperplano o superficie deslizante $s(t)$ para garantizar que el sistema sea estable.

Definición 2.6.1.1: El sistema (2.47) es estable mientras los estados $x(t)$ del mismo se mantengan en el hiperplano $s(t)$ (2.48) (Slotine and Li, 1991).

La ley de control capaz de cumplir este objetivo (llevar y mantener los estado del sistema en la superficie deslizante) se deduce de la siguiente manera. Se calcula la derivada de la superficie deslizante y esta debe ser igual a cero, como se muestra en (2.49), donde se sustituye $\dot{x}(t)$ de la ecuación (2.47),

$$G\dot{x}(t) = GAx(t) + GBu(t) = 0\tag{2.49}$$

Se despeja $u(t)$ de (2.49)

$$u(t) = -(GB)^{-1}GAx(t)\tag{2.50}$$

Se reescribe,

$$u(t) = F_{eq}x(t)\tag{2.51}$$

donde

$$F_{eq} = -(GB)^{-1}GA\tag{2.52}$$

La superficie deslizante se escoge entonces tal que el sistema en lazo cerrado, ante la ley de control por retroalimentación (o realimentación) de estados (2.51), sea estable en el hiperplano $s(t)$, es decir,

$$\dot{x}(t) = (A + BF_{eq})x(t) \quad (2.53)$$

y

$$Gx(t) = 0 \quad (2.54)$$

Lo que garantiza que los estados $x(t)$ sean estables.

Sea

$$s(t) = Gx(t) \quad (2.55)$$

y sea la función candidata de Lyapunov definida como

$$V(t) = \frac{1}{2}s^2(t) \quad (2.56)$$

Entonces la derivada de $V(t)$ es

$$\dot{V}(t) = s(t)\dot{s}(t) \quad (2.57)$$

usando (2.55) se tiene que,

$$\dot{V}(t) = s(t)G\dot{x}(t) \quad (2.58)$$

y usando (2.47),

$$\dot{V}(t) = s(t)(GAx(t) + GBu(t)) \quad (2.59)$$

Para garantizar la estabilidad del sistema según la teoría de Lyapunov (Ogata, 2003), se debe entonces garantizar que $\dot{V}(t)$ sea definida negativa para todo t .

Sí $u(t)$ se escoge como

$$u(t) = Fx(t) \quad (2.60)$$

$$F = F_{eq} + F_D \quad (2.61)$$

donde el i -ésimo elemento de F_D , f_i , es

$$f_i = \begin{cases} f_i^+ & (> 0) & \text{para } s(t)(GB)x_i(t) < 0 \\ 0 & & \text{para } s(t)(GB)x_i(t) = 0 \\ f_i^- & (< 0) & \text{para } s(t)(GB)x_i(t) > 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

entonces $\dot{V}(t)$ es negativa y por lo tanto los estados del sistema son llevados en el hiperplano $s(t)$. Es de notar que la ley de control obtenida es una ley de control conmutante, por lo que se debe escoger una u otra para cada caso, generando así la necesidad de realizar un intercambio o “suicheo” (del inglés *switching*) dependiendo del estado de la superficie deslizante. Cabe destacar que solamente un intercambio (“suicheo”) lo suficientemente veloz hará que los estados se mantengan en dicho hiperplano.

2.6.2. Caso a Tiempo Discreto

Se considera ahora que la ley de control (2.60) se realiza de manera digital. La ley de control es dada cada instante de muestreo kT_0 , donde T_0 es el periodo de muestreo. Asumimos que la ley de control digital $u(t)$ tiene un valor constante entre cada periodo de muestreo (Isermann, 2003), esto es

$$u(t) = u_k, \quad kT_0 \leq t < (k+1)T_0 \quad (2.63)$$

De la teoría de sistemas a tiempo discreto (véase Sección 2.1) se sabe que el sistema se puede definir en espacio estados como,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= C x_k \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde $x_k = x_{kT_0}$, $y_k = y_{kT_0}$, Φ es como en (2.3) y Γ es dada en (2.4).

Análogamente al caso continuo, la superficie deslizante s_k para el caso discreto se

define como,

$$s_k = Gx_k \quad (2.65)$$

donde G se diseña de tal manera de que los estados del sistema permanezcan en $s_k = 0$ para todo instante k . G se determina según el siguiente Lema.

Lema 2.6.2.1: (Slotine and Li, 1991) La ley de control discreta para el sistema (2.64) que cumple con el objetivo de que todos los estados del sistema permanezcan en el hiperplano $s_k = s_{k+1}$ para todo instante k es dada por

$$u_k = F_{eq}x_k \quad (2.66)$$

donde

$$F_{eq} = -(G\Gamma)^{-1}G(\Phi - I) \quad (2.67)$$

Demostración: (Slotine and Li, 1991) Sí $s_k = s_{k+1}$, entonces $s_k = s_{k+1} = s_{k+2} = \dots$

Esto conlleva a

$$Gx_{k+1} = G\Phi x_k + G\Gamma u_k = Gx_k \quad (2.68)$$

lo cual equivale a (2.66).

Definición 2.6.2.2: (Slotine and Li, 1991) El hiperplano, equivalente a G , debe ser determinado tal que el sistema

$$x_{k+1} = (\Phi - \Gamma(G\Gamma)^{-1}G(\Phi - I))x_k \quad (2.69)$$

$$Gx_k = 0 \quad (2.70)$$

sea estable.

Como (2.69) y (2.70) se pueden reescribir como

$$\begin{bmatrix} \Phi - zI & \Gamma \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} = 0 \quad (2.71)$$

donde $x_{k+1} = zx_k$, G puede ser calculada asignando todas sus raíces dentro del círculo unitario z , i.e., $|z| < 1$. Entonces la ley de control que transfiera los estados del sistema al hiperplano se puede determinar de la siguiente manera:

Sean V_k y Δs_k definidas como:

$$V_k = \frac{1}{2}s_k^2 \quad (2.72)$$

y

$$\Delta s_k = s_{k+1} - s_k \quad (2.73)$$

donde Δs_k es la derivada discreta de V_k (Ogata, 1995). Entonces la ley de control que hace que V_k se desvanezca es dada por el siguiente Lema.

Lema 2.6.2.2: (Slotine and Li, 1991) Sí la ley de control satisface

$$s_k \Delta s_{k+1} < -\frac{1}{2}(\Delta s_{k+1})^2 \quad (2.74)$$

para $s_k \neq 0$, entonces

$$V_{k+1} < V_k \quad (2.75)$$

Demostración: (Slotine and Li, 1991) De (2.73)

$$s_{k+1} = s_k + \Delta s_{k+1}$$

Elevando al cuadrado ambos lados se tiene

$$s_{k+1}^2 = s_k^2 + s_k \Delta s_{k+1} + (\Delta s_{k+1})^2$$

Substituyendo (2.74), (2.75) se obtiene.

La ley de control que satisface (2.74) es dada según:

$$u_k = (F_{eq} + F_D)x_k \quad (2.76)$$

donde F_{eq} es dada por (2.67) y F_D es una ley discontinua. Substituyendo (2.76) en (2.63)

$$\Delta s_{k+1} = G\Gamma F_D x_k \quad (2.77)$$

Así la ley de control que hace que el sistema en lazo cerrado sea estable es dada por el siguiente Lema.

Lema 2.6.2.3: (Slotine and Li, 1991) Sí la superficie deslizante satisface las condiciones de la Definición 2.6.2.2, y la ley de control se escoge como en (2.76), donde el valor absoluto del i -ésimo elemento de F_D , f_i , es constante para todo instante, y lo mismo ocurre para todo i , es decir,

$$|f_i^+| = |f_i^-| = f_0, \quad (2.78)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la ley de control

$$f_i = \begin{cases} f_0 & \text{para } (G\Gamma)s_k x_{ki} < -\delta_i \\ 0 & \text{para } -\delta_i \leq (G\Gamma)s_k x_{ki} \leq \delta_i \\ -f_0 & \text{para } (G\Gamma)s_k x_{ki} > \delta_i \end{cases} \quad (2.79)$$

hace que el sistema sea estable, donde x_{ki} es el i -ésimo elemento de x_k y δ_i es definida como

$$\delta_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |x_{ki}| |x_{kj}| f_0 (G\Gamma)^2 \quad (2.80)$$

con una amplitud de f_0 limitada por

$$0 < f_0 < \left| \frac{2}{G\Gamma \sum_{j=1}^n |t_{1j}|} \right| \quad (2.81)$$

donde t_{1j} es el i -th elemento de t_1 que satisface $Gt_1 = 1$, $Gt_i = 0$, $t_i \perp t_j$ ($i \neq j$).

Demostración: (Slotine and Li, 1991) Sustituyendo (2.76), (2.67) en (2.64), Δs_{k+1} se reescribe igual a (2.77). Entonces,

$$s_k \Delta s_{k+1} = s_k (G\Gamma) F_D x_k \quad (2.82)$$

$$s_k \Delta s_{k+1} = s_k (G\Gamma) [f_1, f_2, \dots, f_n] x_k \quad (2.83)$$

$$s_k \Delta s_{k+1} = s_k (G\Gamma) \sum_{j=1}^n f_j x_{kj} \quad (2.84)$$

Sí alguno de los f_i 's se escoge como f_0 o $-f_0$ por (2.79), entonces

$$s_k \Delta s_{k+1} \leq - \sum_{j=1}^n \delta_j |f_j| \quad (2.85)$$

$$s_k \Delta s_{k+1} \leq - \frac{1}{2} (G\Gamma)^2 \left(\sum_{j=1}^n |f_j| |x_{kj}| \right)^2 \quad (2.86)$$

$$s_k \Delta s_{k+1} < - \frac{1}{2} (\Delta s_{k+1})^2 \quad (2.87)$$

Colorario 2.6.2.1: Del Lema 2.6.2.2, $V_{k+1} < V_k$ es obtenida. Y sí $|s_k x_{ki}| < \delta_i$ ($s_k \neq 0$) para todo i , entonces $f_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), y $\Delta s_{k+1} = 0$, lo que conlleva a (2.69) y

$$s_{k+1} = s_k \neq 0 \quad (2.88)$$

$|s_k x_{ki}| \leq \delta_i$ significa que Gx_k es casi igual a cero y x_k decrece según la Definición 2.6.2.2.

Como puede observarse, tanto la ley de control a tiempo continuo, como la ley de control obtenida a tiempo discreto son leyes conmutantes; es decir, existe más de una ley de control para el mismo sistema, y se escoge una u otra dependiendo del estado actual del sistema. Este intercambio entre las leyes de control genera comúnmente el efecto conocido como “chaterin” (del inglés *chattering*) (Slotine and Li, 1991), el cual es un comportamiento no deseado en los sistemas de control.

Para un mejor entendimiento del control por superficie deslizante, el lector puede referirse a la literatura presentada en (Furuta et al., 1988), (Furuta, 1990), (Slotine and Li, 1991), (Furuta, 1993a), (Furuta, 1993b), (Misawa, 1997), (Mitic and Vukovic, 2004).

2.7. Control de Mínima Varianza Generalizada Basada en el Concepto de Modo Deslizante (GMVC-SMC)

El control (o criterio) de mínima varianza generalizada (GMVC) presentado en la Sección 2.5 se modifica en esta sección, bajo el concepto del control por superficie (o modo) deslizante (SMC) para sistemas a tiempo discreto. Esta técnica de control fue propuesta por (Furuta, 1990) (Furuta, 1993a) para dar simplicidad al procedimiento de diseño de la ley de control conmutante obtenida en la Sección 2.6.2.

En esta sección, se considera el siguiente modelo de un sistema lineal, SISO, invariante en el tiempo, con entrada u_k y salida y_k (2.89)

$$A^0(z^{-1})y_k = z^{-d}B^0(z^{-1})u_k \quad (2.89)$$

donde las siguientes condiciones aplican,

Condiciones 2.7.1:

1. Polinomios $A^0(z^{-1})$ y $B^0(z^{-1})$ no tienen factores comunes.
2. El tiempo de retardo d es conocido.

El objetivo de la ley de control u_k es minimizar la varianza de la superficie deslizante s_{k+d} (nueva variable manipulable), la cual se define en tiempo discreto de la siguiente manera (Furuta, 1990),

$$s_{k+d} = C(z^{-1})(y_{k+d} - r_{k+d}) + Q(z^{-1})u_k \quad (2.90)$$

Los polinomios $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$, definidos como

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}, \quad (2.91)$$

y

$$Q(z^{-1}) = q_0(1 - z^{-1}), \quad (2.92)$$

deben ser diseñados, r_k es la señal de referencia, y la señal de error e_k es definida como:

$$e_k = y_k - r_k. \quad (2.93)$$

El polinomio $C(z^{-1})$ es Schur, por lo tanto la variable del error tenderá a cero si (2.90) se mantiene en cero ante una señal de entrada constante. El polinomio $C(z^{-1})$ puede entonces ser diseñado asignando todas sus raíces características dentro del círculo unitario del plano Z . Esta idea proviene de la teoría de control por superficie deslizante para sistemas a tiempo discreto presentada en (Furuta, 1993a).

Para el algoritmo de diseño del controlador de mínima varianza generalizada basada en el concepto de superficie deslizante, la ecuación (2.90) se puede reescribir como:

$$s_{k+d} = C(z^{-1})y_{k+d} - C(z^{-1})r_{k+d} + Q(z^{-1})u_k \quad (2.94)$$

Se definen dos polinomios, $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$,

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n-1} z^{-n+1}, \quad (2.95)$$

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{m+d-1} z^{-(m+d-1)}, \quad (2.96)$$

que satisfagan la siguiente igualdad (2.97),

$$C(z^{-1}) = A^0(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}) \quad (2.97)$$

Se multiplica por y_{k+d} la ecuación (2.97)

$$C(z^{-1})y_{k+d} = A^0(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d} + z^{-d}F(z^{-1})y_{k+d}$$

$$C(z^{-1})y_{k+d} = A^0(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d} + F(z^{-1})y_k \quad (2.98)$$

Se sustituye (2.98) en (2.94)

$$s_{k+d} = A^0(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d} + F(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d} + Q(z^{-1})u_k \quad (2.99)$$

La ecuación del modelo (2.89) se expresa d pasos hacia adelante y se multiplica por el polinomio $E(z^{-1})$,

$$E(z^{-1})A^0(z^{-1})y_{k+d} = z^{-d}E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_{k+d} \quad (2.100)$$

$$E(z^{-1})A^0(z^{-1})y_{k+d} = E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k \quad (2.101)$$

Sustituyendo (2.101) en (2.99),

$$s_{k+d} = E(z^{-1})B^0(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d} + Q(z^{-1})u_k \quad (2.102)$$

Definiendo el polinomio $G(z^{-1})$ como (2.103):

$$G(z^{-1}) = E(z^{-1})B^0(z^{-1}) + Q(z^{-1}) \quad (2.103)$$

entonces,

$$s_{k+d} = G(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d} \quad (2.104)$$

El control de mínima varianza generalizada necesario para llevar a cero la variable manipulada s_{k+d} en (2.104), es dado por (2.105):

$$u_k = -G(z^{-1})^{-1}[F(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d}] \quad (2.105)$$

donde, los polinomios $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ son diseñados (escogidos) de tal manera de que el sistema de control satisfaga el siguiente Lema.

Lema 2.7.1: (Astrom and Wittenmark, 1995) La condición necesaria y suficiente para que la variable de control u_k haga que la variable manipulada s_{k+d} sea igual a cero es que todas las raíces del polinomio característico del sistema en lazo cerrado, $T^0(z^{-1})$,

$$T^0(z^{-1}) = A^0(z^{-1})Q(z^{-1}) + B^0(z^{-1})C(z^{-1}) \quad (2.106)$$

pertenezcan al interior del círculo unitario, y que los polinomios (Q, C) , (A^0, C) , y (B^0, Q) no tengan ceros comunes fuera del círculo unitario .

Colorario 2.7.1: Debido a que $A^0(z^{-1})$ y $B^0(z^{-1})$ no tienen factores comunes y que, $Q(z^{-1})$ y $B^0(z^{-1})$ no tienen factores comunes inestables, de lo contrario $T^0(z^{-1})$ no sería Schur, entonces $G(z^{-1})$ no tiene factores comunes inestables con $B^0(z^{-1})$.

Colorario 2.7.2: Para que el error tienda a cero, el polinomio $C(z^{-1})$ debe ser diseñado tal que sea Schur; es decir, asignando todas sus raíces características dentro del círculo unitario del plano- Z .

Colorario 2.7.3: El polinomio $Q(z^{-1}) = q_0(1 - z^{-1})$ debe ser diseñado tal que se cumpla el Lema 2.7.1; es decir $T^0(z^{-1})$ sea Schur; esto se logra, ajustando la ganancia q_0 tal que todas las raíces de $T^0(z^{-1})$ estén dentro del círculo unitario del plano- Z .

Lema 2.7.2: El diseño de control de mínima varianza basada en el concepto de superficie deslizante, para el caso de un sistema de fase mínima, se obtiene haciendo $Q(z^{-1}) = 0$; es decir $q_0 = 0$ en la ley de control (2.105).

La principal ventaja de esta técnica de control, es que la ley de control obtenida para mantener los estados del sistema en la superficie deslizante es única, es decir, no es conmutante como las leyes de control obtenidas en la Sección 2.6, eliminando así cualquier presencia de “chaterin”.

2.7.1. Ejemplo

Para ilustrar el procedimiento de diseño, considere el siguiente modelo de un sistema de fase no mínima,

$$(1 - 0,3z^{-1})y_k = z^{-d}(1 + 2z^{-1})u_k \quad (2.107)$$

donde $d = 2$. Para el diseño de control los siguientes polinomios son diseñados (escogidos):

$$C(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + 0,25z^{-2} \quad (2.108)$$

$$Q(z^{-1}) = 40(1 - z^{-1}) \quad (2.109)$$

usando la igualdad (2.97) y la definición del polinomio $G(z^{-1})$ (2.103), se obtienen

$$F(z^{-1}) = 0,64 \quad (2.110)$$

$$G(z^{-1}) = 41 - 36,7z^{-1} + 2,6z^{-2} \quad (2.111)$$

La Fig. 2.4 muestra la variable de salida (respuesta) y_k del sistema (2.107), la variable de control u_k y la variable de referencia r_k . En este caso en particular, la señal de referencia se escogió como una secuencia de escalones de 100 muestras (pasos) de ancho, y de amplitud 1 comenzando desde 0,5.

Como puede observarse en la Fig. 2.4, la señal de salida sigue a la señal de referencia en estado estacionario, con error cero. Cumpliendo así el objetivo de seguimiento de trayectoria. También se puede observar que esta ley de control no produce “chaterin” en la señal de salida.

2.8. Control Auto-Ajustable Implícito

Los reguladores auto-ajustables (*Self Tunning Control*, STC) constituyen un tipo de control adaptativo (Astrom and Wittenmark, 1995) muy popular en el que en función del conocimiento que se tiene de la dinámica del proceso a controlar son capaces de

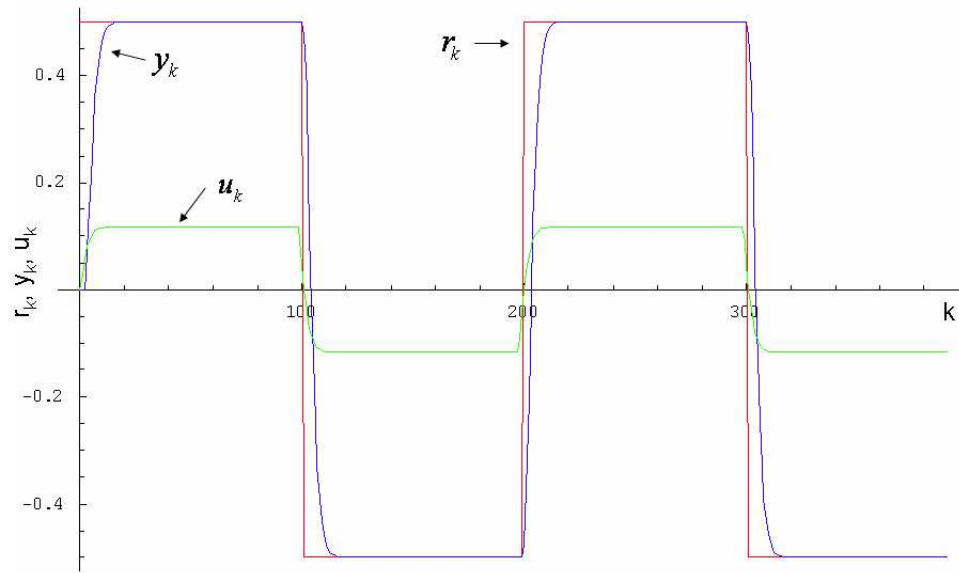


Figura 2.4: Señales y_k , r_k y u_k .

ajustarse a si mismos. Este conocimiento se va actualizando en tiempo real de manera que el ajuste se mantiene lo más cercano posible al óptimo. Los reguladores auto-ajustables intentan alcanzar el control óptimo (lo mejor posible) a partir de un tipo de controlador prefijado y la información obtenida del proceso (señales de entrada, salida, etc.).

Los reguladores auto-ajustables se basan en el principio de equivalencia cierta que consiste en suponer que los parámetros del proceso coinciden con los que se obtienen por identificación, de manera que se diseña el controlador usando esos parámetros. Como el controlador se recalcula en cada paso (periodo de muestreo), y los parámetros se actualizan también en cada paso, el principio de equivalencia cierta no es una suposición demasiado arriesgada (Rodríguez and Bordóns, 2005).

La estructura general de un regulador auto-ajustable contiene tres partes diferenciadas:

Algoritmo recursivo de identificación: Este bloque se encarga de actualizar los parámetros en tiempo real de manera recursiva, es decir, usando la información previamente calculada y almacenada.

Mecanismo de adaptación que desarrolla la tarea de diseño del regulador: Donde se utiliza el modelo actualizado que se tenga de la planta. Al ser la estructura del

controlador fija, diseñar el controlador es equivalente a obtener los mejores valores de los parámetros de sintonía en base al modelo.

Regulador con parámetros ajustables: Por lo general la estructura es fija y puede ser cualquier tipo de controlador lineal en el que los parámetros se puedan ajustar.

Entre los reguladores auto-ajustables se pueden distinguir dos tipos de algoritmos, unos que identifican directamente los parámetros de la planta y luego diseñan el controlador para cumplir con los requisitos o consignas deseadas (estructura explícita) y otros que lo que hacen es estimar los parámetros del controlador directamente sin pasar por la estimación previa de la planta (estructura implícita). Este documento, como su título lo indica, se enfoca al diseño de controladores auto-ajustables del tipo implícitos; es decir, se busca estimar los parámetros del controlador del sistema.

En general, los algoritmos de estructura implícita son más complicados desde el punto de vista conceptual que los de estructura explícita. Para los reguladores auto-ajustables implícitos se reparametriza el modelo de la planta y el controlador en función de los parámetros del controlador. La Fig. 2.5 muestra el esquema de control del sistema. Obsérvese en esta figura que no se está pasando por la fase de diseño del controlador sino que este se identifica, de manera que cumpla con las especificaciones de diseño. El algoritmo de diseño, en forma general, puede plantearse como (Rodríguez and Bordóns, 2005):

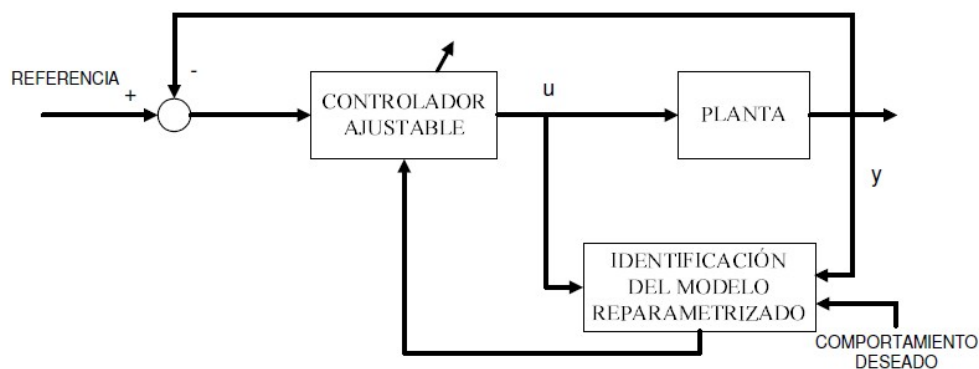


Figura 2.5: Configuración genérica de un regulador auto-ajustable implícito (Rodríguez and Bordóns, 2005).

Algoritmo 2.8.1

1. Estimar los parámetros del controlador (reparametrizado en base a los parámetros del modelo).
2. Calcular y aplicar la señal de control.

Colorario 2.8.1: Debido a que el algoritmo es recursivo, el mismo se debe repetir para cada periodo de muestreo (cada paso o muestra) (Rodríguez and Bordóns, 2005).

En el caso de los reguladores auto-ajustables de estructura implícita se necesitan menos cálculos, pero la identificación es más difícil (pueden aparecer problemas de convergencia con más facilidad, lo cual no es deseable en algoritmos recursivos). Por otra parte no siempre es posible obtener el modelo reparametrizado (caso de modelos muy complejos).

Los algoritmos de mínima varianza y mínima varianza generalizada fueron los primeros algoritmos de control usados con las estructuras de los reguladores auto-ajustables, tanto explícitas como implícitas, y hoy en día son consideradas teorías clásicas.

Una referencia recomendada para el estudio de los controladores adaptativos y los reguladores auto-ajustables es el libro de Astrom and Wittenmark (1995). En este libro se contemplan diferentes técnicas clásicas que forman las bases teóricas de este tipo de controladores. Sin embargo, hoy en día existe una gran cantidad de nuevos algoritmos de control combinados con estructuras de reguladores auto-ajustables.

En el siguiente Capítulo 3, se presentan los fundamentos teóricos referentes a un novedoso algoritmo de controladores auto-ajustables implícitos, que hace uso de los desarrollos conceptuales del control de mínima varianza generalizada basada en el concepto de superficie deslizante.

Capítulo 3

Nueva Clase de Controladores Auto-Ajustables Implícitos

Este Capítulo 3, se considera el capítulo central de este trabajo, donde se recopilan y estandarizan los fundamentos teóricos referentes a un novedoso algoritmo de controladores auto-ajustables implícitos, que hace uso de los desarrollos conceptuales del control de mínima varianza generalizada basada en el concepto de superficie deslizante expuesto en la Sección 2.7. Por simplicidad, de ahora en adelante se denota a este nuevo algoritmo como: Control Auto-Ajustable basado en el Criterio de Mínima Varianza Generalizada modificado bajo el concepto de Modo Deslizante, cuyas siglas se denotarán en inglés para mayor generalidad del mismo, así STC-GMVC-SMC significa *Self-Tuning Control based on Generalized Minimum Variance Criterium under the Sliding Mode Concept*.

Este algoritmo de control propuesto por Patete ([Patete et al., 2008c](#)) se basa en las teorías de control de mínima varianza generalizada, control por superficie deslizante, y la teoría de control auto-ajustable (control adaptativo). Desde entonces, varias modificaciones y avances han sido publicados, sin embargo este tipo de teorías no son actualmente transmitidas a estudiantes de pregrado debido al nivel de complejidad de las mismas. Por lo general, las publicaciones en revistas, congresos, etc. que están al alcance del público científico, incluyendo a los estudiantes, son presentadas de una manera compleja y concreta, a causa de la falta de espacio de redacción, entre otras. Por lo que es fundamental el preparar un material de las nuevas teorías de control desarrolladas, que esté acorde al nivel académico de los estudiantes de pre-grado, permitiendo

esto que las mismas sean impartidas, analizadas y aplicadas desde tempranos pasos en el área de sistemas de control.

Se elige como referencia para definir el nivel de profundidad y complejidad para plantear los fundamentos teóricos del nuevo algoritmo la bibliografía comúnmente utilizada por los estudiantes de Ingeniería de Sistemas, específicamente los de la opción Sistemas de Control, en la Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, para el estudio y análisis de sus respectivos temas de sistemas control en las diferentes materias de pre-grado. Estas referencias son: [Ogata \(2003\)](#), [Ogata \(1995\)](#), [Isermann \(2003\)](#), y [Furuta \(1988\)](#).

Toda la teoría que se presenta en este capítulo está basada en los conceptos teóricos presentados en el Capítulo 2, y las siguientes publicaciones: [Patete et al. \(2008c\)](#), [Patete et al. \(2008b\)](#), [Patete et al. \(2007\)](#), [Patete and Furuta \(2011\)](#).

3.1. Fundamentos Teóricos del Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC para Sistemas Lineales

En el Capítulo 2, Sección 2.7, el control de mínima varianza generalizada (GMVC) basado en el concepto de modo deslizante (SMC) fue presentado para el caso en que todos los parámetros del modelo (que representa el comportamiento del sistema) son conocidos. Sin embargo, en la práctica (realidad o implementación física) los parámetros del modelo del sistema no son todos conocidos o no se conocen sus valores con precisión, por lo que alguna técnica de identificación es necesaria para poder controlar el sistema satisfactoriamente.

El modelo del sistema a considerar es un modelo lineal, SISO (*Single Input Single Output*), y expresado a tiempo discreto a través de su ecuación en diferencia ([Ogata, 2003](#)) ([Furuta, 1988](#)). Primeramente se debe repasar el algoritmo de diseño de control de mínima varianza generalizada (GMVC) basado en el concepto de modo deslizante (SMC) presentado en la Sección 2.7, para el caso en que todos los parámetros del modelo son conocidos, ya que el control auto-ajustable puede tomar (y es lo recomendable) como valores iniciales para sus parámetros de diseño los valores del controlador nominal obtenidos a través de GMVC-SMC.

Definición 3.1.1: Se dice que el modelo de la planta o proceso es un modelo nominal cuando todos los parámetros del modelo son conocidos, de lo contrario se dice que es un modelo con incertidumbre.

Definición 3.1.2: Se dice que un modelo presenta incertidumbre paramétrica cuando no se conocen con exactitud los valores de sus parámetros. Se sabe o asume conocida la estructura del modelo.

Definición 3.1.3 : Se dice que el controlador (o control, o ley de control) es un control nominal cuando todos los parámetros del controlador son calculados en base al modelo nominal, de lo contrario se dice que es un controlador con incertidumbre.

Se considera el siguiente modelo nominal (3.1) de un sistema invariante en el tiempo, con entrada u_k y salida y_k ,

$$A^0(z^{-1})y_k = z^{-d}B^0(z^{-1})u_k \quad (3.1)$$

donde los polinomios $A^0(z^{-1})$ y $B^0(z^{-1})$ se definen como

$$A^0(z^{-1}) = 1 + a_1^0 z^{-1} + a_2^0 z^{-2} + \dots + a_n^0 z^{-n},$$

$$B^0(z^{-1}) = b_0^0 + b_1^0 z^{-1} + b_2^0 z^{-2} + \dots + b_m^0 z^{-m},$$

con $b_0^0 \neq 0$. Las siguientes condiciones aplican sobre el modelo (3.1),

Condiciones 3.1.1:

1. Polinomios $A^0(z^{-1})$ y $B^0(z^{-1})$ no tienen factores comunes.
2. El tiempo de retardo d es conocido.

Dada la superficie deslizante s_k (3.2),

$$s_{k+d} = C(z^{-1})(y_{k+d} - r_{k+d}) + Q(z^{-1})u_k \quad (3.2)$$

donde r_k es la señal de referencia. Los polinomios

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n} \quad (3.3)$$

y

$$Q(z^{-1}) = q_0(1 - z^{-1}) \quad (3.4)$$

se deben diseñar según los siguientes Lemas.

Lema 3.1.1: El polinomio $C(z^{-1})$ es definido como un polinomio Schur. Todas sus raíces características están dentro del círculo unitario del plano- Z (Furuta, 1993a).

Lema 3.1.2: El polinomio $Q(z^{-1})$ debe ser diseñado tal que satisfaga el Lema 2.7.1. Es decir, todas las raíces del polinomio característico del sistema nominal en lazo cerrado $T^0(z^{-1})$,

$$T^0(z^{-1}) = A^0(z^{-1})Q(z^{-1}) + B^0(z^{-1})C(z^{-1}) \quad (3.5)$$

pertenezcan al interior del círculo unitario. $T^0(z^{-1})$ debe ser Schur, y que los polinomios (Q, C) , (A^0, C) , y (B^0, Q) no tengan ceros comunes fuera del círculo unitario (Astrom and Wittenmark, 1995).

La señal de error e_k es definida como (3.6):

$$e_k = y_k - r_k \quad (3.6)$$

Los polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$ deben satisfacer la igualdad (3.7),

$$C(z^{-1}) = A^0(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}) \quad (3.7)$$

El polinomio $G(z^{-1})$ se define como (3.8):

$$G(z^{-1}) = E(z^{-1})B^0(z^{-1}) + Q(z^{-1}) \quad (3.8)$$

Así, el control de mínima varianza generalizada necesario para llevar a cero la

variable manipulada s_{k+d} (3.2) es dado por (3.9):

$$u_k = -G(z^{-1})^{-1}[F(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d}] \quad (3.9)$$

El algoritmo de diseño para el cálculo de la ley de control nominal de mínima varianza generalizada bajo el concepto de modo deslizante es:

Algoritmo 3.1.1: GMVC-SMC para Sistemas Lineales

1. Dado el modelo nominal (3.1).
2. Dadas las condiciones 3.1.1.
3. Dada la superficie deslizante definida como en (3.2).
4. Diseñar un polinomio $C(z^{-1})$ Schur (Lema 3.1.1).
5. Diseñar un polinomio $Q(z^{-1})$, tal que $T^0(z^{-1})$ sea Schur (Lema 3.1.2).
6. Calcular los polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$, según la igualdad (3.7).
7. Calcular el polinomio $G(z^{-1})$, según (3.8).
8. Obtener la ley de control nominal u_k según (3.9).

El Algoritmo 3.1.1 funciona siempre y cuando los parámetros del modelo son conocidos, así el control puede ser diseñado en base a los valores precisos del modelo. Para el caso donde la estructura del modelo es conocida pero los parámetros del mismo no se conocen con precisión, caso que es muy común de encontrar al momento de implementar algoritmos de control, se propone el nuevo diseño que se denota como STC-GMVC-SMC (*Self-Tuning Control based on Generalized Minimum Variance Criterium under the Sliding Mode Concept*).

Sea el modelo del sistema (planta), con incertidumbre en sus parámetros, dado por (3.10),

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k \quad (3.10)$$

donde los polinomios $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$ se definen como

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} \quad (3.11)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} \quad (3.12)$$

Con $b_0 \neq 0$, donde $a_i \in [\underline{a}_i \ \bar{a}_i]$ y $b_j \in [\underline{b}_j \ \bar{b}_j]$, para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$ respectivamente.

Lo que significa que, a pesar de que los parámetros del modelo no son conocidos, los límites superiores e inferiores dentro de los cuales se encuentra el valor de cada parámetro son conocidos (o en su defecto asumidos). La estructura del modelo (orden del modelo) también es conocida. Más específicamente, las siguientes condiciones se deben cumplir:

Condiciones 3.1.2:

1. n y m son conocidos. Es decir la estructura del modelo es conocida.
2. El tiempo de retardo d es conocido.
3. Los límites inferior y superior ($\underline{a}_i, \underline{b}_j, \bar{a}_i, \bar{b}_j$, para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$) de los parámetros de la planta (3.10) son conocidos.

Como los coeficientes a_i y b_i varían dentro del rango

$$\underline{a}_i \leq a_i^0 \leq \bar{a}_i \quad (3.13)$$

$$\underline{b}_j \leq b_j^0 \leq \bar{b}_j \quad (3.14)$$

entonces, los parámetros nominales, para el modelo nominal (3.1), se obtienen a partir de (3.10) como sigue:

$$a_i^0 = \frac{\bar{a}_i + \underline{a}_i}{2} \quad (3.15)$$

$$b_j^0 = \frac{\bar{b}_j + \underline{b}_j}{2} \quad (3.16)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$. Así el modelo nominal (3.1) de la planta puede ser obtenido.

Cuando los parámetros de la planta no son completamente conocidos o precisos, en el caso de los controladores auto-ajustables implícitos, los polinomios del controlador $G(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$ se pueden estimar, es decir, sea $\hat{F}(z^{-1})$ el estimado de $F(z^{-1})$ y $\hat{G}(z^{-1})$ el estimado de $G(z^{-1})$, así

$$\hat{F}(z^{-1}) = \hat{f}_0 + \hat{f}_1 z^{-1} + \dots + \hat{f}_{n-1} z^{-n+1}, \quad (3.17)$$

$$\hat{G}(z^{-1}) = \hat{g}_0 + \hat{g}_1 z^{-1} + \dots + \hat{g}_{m+d-1} z^{-(m+d-1)}. \quad (3.18)$$

Para aplicar el algoritmo de un controlador auto-ajustable, se deben definir el vector que contenga las señales medidas y el vector de los parámetros a estimar (Astrom and Wittenmark, 1995).

Sea,

$$\phi_k^T = [y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n+1}, u_k, \dots, u_{k-m-d+1}], \quad (3.19)$$

El vector que contiene la información de las señales medidas y las señales de control (información conocida o que se puede conocer a cada instante). Sea

$$\theta^T = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, g_0, \dots, g_{m+d-1}], \quad (3.20)$$

el vector que contiene los parámetros del controlador nominal (calculados según los valores de la planta nominal), y sea

$$\hat{\theta}_k^T = [\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}, \hat{g}_0, \dots, \hat{g}_{m+d-1}], \quad (3.21)$$

el estimado de θ . Es decir, contiene los parámetros del controlador a identificar o estimar.

Por lo tanto, el nuevo controlador auto-ajustable (basado en el control nominal

(3.9)) usa los parámetros estimados de la siguiente manera (Patete et al., 2008c):

$$u_k = -\hat{G}(z^{-1})^{-1}[\hat{F}(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d}], \quad (3.22)$$

donde las estimaciones de los parámetros de control están dadas por la siguiente ecuación,

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}}{1 + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}} [s_k + C(z^{-1})r_k - \phi_{k-d}^T \hat{\theta}_{k-1}], \quad (3.23)$$

y, Γ_k es una matriz definida positiva que se actualiza cada instante o periodo de muestreo

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1}}{1 + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}}. \quad (3.24)$$

La estabilidad global del sistema en lazo cerrado se da al asegurar que para todo k , la señal de entrada u_k , la salida y_k y el error e_k están acotados cuando la referencia r_k es acotada. El seguimiento de trayectoria (referencia) se satisface cuando la referencia es o se hace constante, la salida y_k sigue la referencia r_k y el error e_k tiende a cero.

Definición 3.1.4: La estabilidad global del sistema en lazo cerrado se define para $|r_k| < m_r \forall k$, donde m_r es una constante positiva, sí $|u_k| < m_u$, $|y_k| < m_y$ y $|e_k| < m_e \forall k$ donde m_u , m_k y m_e son constantes positivas.

Definición 3.1.5: El seguimiento de la señal de referencia r_k por la señal de salida y_k se define para una referencia constante. Es decir, sí $r_k = r_0$ donde r_0 es una constante, entonces el $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_k - r_k) = 0$, lo que implica que el $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$ en estado estacionario.

Condición 3.1.3:

1. La señal de referencia, r_k , es acotada.

La reformulación del siguiente Teorema 3.1.1 y su respectiva demostración están basados en los resultados publicados en Patete et al. (2008c). Cabe destacar que no es de interés en este documento el analizar matemáticamente la demostración

del teorema, debido a que esta primera etapa de documentación de los fundamentos teóricos para este nuevo diseño de control auto-ajutable se enfoca a estudiantes de pre-grado. Por lo tanto, la demostración de éste y los demás teoremas se incluyen en este documento como parte fundamental teórica, cuyo análisis matemático debe ser considerado para un nivel de estudiantes mayor o igual al programa de maestría. Sin embargo, en la medida de lo posible se realizan análisis cualitativos, para que los estudiantes de pre-grado puedan alcanzar un mayor entendimiento sobre el significado de los resultados matemáticos presentados.

Teorema 3.1.1: STC-GMVC-SMC Recursivo para Sistemas Lineales.

Dada una matriz definida positiva Γ_0 y el vector de parámetros inicial $\hat{\theta}_0$. Si la estimación $\hat{\theta}_k$ del controlador (3.22) satisface las ecuaciones recursivas (3.23) y (3.24), bajo las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, para el modelo (3.10), entonces el sistema global en lazo cerrado es estable, y la señal de salida seguirá a la señal de referencia en estado estacionario.

Lema 3.1.3: $\hat{\theta}_0$ puede ser inicializado por los parámetros del controlador nominal calculados con $G(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$.

Antes de continuar con la demostración del Teorema 3.1.1, es importante tener conocimiento sobre los siguientes Lemas (Lema 3.1.4 y Lema 3.1.5):

Sean A y C matrices cuadradas, de dimensiones $n \times n$, sea B un vector $1 \times n$ y sea D un vector $n \times 1$,

Lema 3.1.4: Matrix Inversion Lemma (Astrom and Wittenmark, 1995) (Golub and Van Loan, 1996).

Sí A , C y $(C^{-1} + DA^{-1}B)$ son matrices cuadradas no singulares, entonces $(A + BCD)$ es invertible, y además se cumple que,

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (3.25)$$

Demostración del Lema 3.1.4: Por mutiplicación directa se deduce que,

$$\begin{aligned} & (A + BCD)(A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}) \\ &= I + BCDA^{-1} - B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} - BCDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & (A + BCD)(A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}) \\ &= I + BCDA^{-1} - BC(C^{-1} + DA^{-1}B)(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$(A + BCD)(A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}) = I \quad (3.28)$$

En el caso especial donde C es una matriz unitaria de dimensión 1×1 la identidad anterior se reduce a la ecuación de Sherman Morrison.

Lema 3.1.5: Sherman Morrison Formula ([Press et al., 1992](#)).

Sí A una matriz cuadrada no singular, y $(1 + DA^{-1}B) \neq 0$, entonces $(A + BD)$ es invertible, y además

$$(A + BD)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}BDA^{-1}}{1 + DA^{-1}B} \quad (3.29)$$

Demostración del Lema 3.1.5: Dado que $DA^{-1}B$ es un escalar y que puede ser factorizado, entonces, por multiplicación directa se deduce que,

$$\begin{aligned} & (A + BD)(A^{-1} - \frac{A^{-1}BDA^{-1}}{1 + DA^{-1}B}) = \\ & AA^{-1} + BDA^{-1} - \frac{AA^{-1}BDA^{-1} + BDA^{-1}BDA^{-1}}{1 + DA^{-1}B} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$(A + BD)(A^{-1} - \frac{A^{-1}BDA^{-1}}{1 + DA^{-1}B}) = I + BDA^{-1} - \frac{BDA^{-1} + BDA^{-1}BDA^{-1}}{1 + DA^{-1}B} \quad (3.31)$$

$$(A + BD)(A^{-1} - \frac{A^{-1}BDA^{-1}}{1 + DA^{-1}B}) = I + BDA^{-1} - \frac{1 + (DA^{-1}B)BDA^{-1}}{1 + DA^{-1}B} \quad (3.32)$$

$$(A + BD)(A^{-1} - \frac{A^{-1}BDA^{-1}}{1 + DA^{-1}B}) = I + BDA^{-1} - BDA^{-1} \quad (3.33)$$

$$(A + BD)(A^{-1} - \frac{A^{-1}BDA^{-1}}{1 + DA^{-1}B}) = I \quad (3.34)$$

Demostración del Teorema 3.1.1: La variable de la superficie deslizante s_{k+d} se puede reescribir como

$$s_{k+d} = \hat{G}(z^{-1})u_k + \hat{F}(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d} + \phi_k^T \tilde{\theta}_{k+d} \quad (3.35)$$

donde $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$. Es decir, $\tilde{\theta}_k$ es el error entre el valor real del parámetros θ (el cual es constante, fijo) y su valor estimado en cada instante k , $\hat{\theta}_k$.

Usando la ley de control (3.22), la ecuación (3.35) da como resultado

$$s_{k+d} = \phi_k^T \tilde{\theta}_{k+d} \quad (3.36)$$

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V_k = \frac{1}{2}s_k^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k \quad (3.37)$$

que es definida positiva sobre s_k y el parámetro $\tilde{\theta}_k$. La diferencia de tiempo de (3.37), derivada discreta (Ogata, 2003), es

$$\Delta V_k = V_k - V_{k-1} \quad (3.38)$$

$$\Delta V_k = \frac{1}{2}s_k^2 - \frac{1}{2}s_{k-1}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} \quad (3.39)$$

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2}s_{k-1}^2 - \quad (3.40)$$

$$\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + \frac{1}{2}s_k^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} + \Gamma_{k-1}^{-1}) \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}$$

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2}s_{k-1}^2 - \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + s_k^2 - \frac{1}{2}s_k^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1}) \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}$$

De (3.36), s_k^2 es

$$s_k^2 = \tilde{\theta}_k^T \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k \quad (3.42)$$

sustituyendo (3.42) en (3.41), se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \Delta V_k = & -\frac{1}{2}s_{k-1}^2 - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + \\ & \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Usando el Lema 3.1.4, la ecuación recursiva dada (3.24) se reescribe como,

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T (\Gamma_{k-1}^{-1} + \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T)^{-1} \quad (3.44)$$

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} (I + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d})^{-1} \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \quad (3.45)$$

$$\Gamma_k = (\Gamma_{k-1}^{-1} + \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T)^{-1} \quad (3.46)$$

la inversa, de la relación (3.46) produce

$$\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d}\phi_{k-d}^T = 0 \quad (3.47)$$

lo que implica que el tercer término del lado derecho de (3.43) se anule (o tienda a cero).

A partir de (2.104), s_k se puede escribir como,

$$s_k = \phi_{k-d}^T \theta - C(z^{-1})r_k \quad (3.48)$$

a continuación, utilizando la ley adaptativa recursiva (3.23), la siguiente ecuación se obtiene,

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}(1 + \phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d})^{-1}\phi_{k-d}^T(\theta - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (3.49)$$

$$\tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}_{k-1} - \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}(1 + \phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d})^{-1}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_{k-1} \quad (3.50)$$

como la siguiente relación se cumple,

$$\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}(1 + \phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d})^{-1} = (I + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T)^{-1}\Gamma_{k-1}\phi_{k-d} \quad (3.51)$$

por lo tanto, (3.51) se sustituye en (3.50), y se obtiene

$$(I + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T)\tilde{\theta}_k = (I + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T)\tilde{\theta}_{k-1} - \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_{k-1} \quad (3.52)$$

además (3.52) se puede escribir como

$$\tilde{\theta}_k + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}_{k-1} \quad (3.53)$$

$$\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_k = 0 \quad (3.54)$$

lo que hace que el cuarto término de la derecha de (3.43) desaparezca (se hace cero).

Por lo tanto, al usar las ecuaciones recursivas (3.23) y (3.24) en (3.43) para V_0 positiva y acotada, ΔV_k se demuestra que es semidefinida negativa, es decir, $\Delta V_k \leq 0$

de la siguiente manera:

Usando las ecuaciones recursivas (3.23) y (3.24) en (3.43) para $k = 1$ se obtiene la siguiente relación:

$$V_1 - V_0 = -\frac{1}{2}s_0^2 - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0)^T \Gamma_0^{-1}(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0) \quad (3.55)$$

Inicialmente $\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0 \neq 0$, entonces $V_1 - V_0 < 0$ lo que implica que $V_1 < V_0$.

Para $k = 2$,

$$V_2 + \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)^T \Gamma_1^{-1}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) = V_1 < V_0 \quad (3.56)$$

Para $k = 3$,

$$V_3 + \frac{1}{2}s_2^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)^T \Gamma_2^{-1}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2) = V_2 \quad (3.57)$$

usando (3.56) y (3.57)

$$V_3 + \frac{1}{2}s_2^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)^T \Gamma_2^{-1}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2) + \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)^T \Gamma_1^{-1}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) = V_1 < V_0 \quad (3.58)$$

Entonces para $k = N$ se deriva la siguiente relación

$$V_N + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N (s_{k-1}^2 + (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1}(\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1})) < V_0 < \infty \quad (3.59)$$

La ecuación (3.59) implica que s_N y $(\hat{\theta}_N - \hat{\theta}_{N-1})$ desaparecen cuando N tiende a infinito, ΔV_k es semidefinida negativa para todo k y la varianza mínima generalizada se reduce al mínimo, lo que demuestra la estabilidad global de todo el sistema en lazo cerrado.

Dado que el polinomio $Q(z^{-1})$ está diseñado para satisfacer el Lema 3.1.2, entonces para una referencia r_k acotada, ocurre que la entrada u_k , la salida y_k y error e_k son acotados. Como se aprecia al multiplicar (2.90) por $A(z^{-1})$

$$A(z^{-1})s_{k+d} = A(z^{-1})C(z^{-1})y_{k+d} - A(z^{-1})C(z^{-1})r_{k+d} + A(z^{-1})Q(z^{-1})u_k \quad (3.60)$$

y usando (3.10)

$$A(z^{-1})s_{k+d} = B(z^{-1})C(z^{-1})u_k - A(z^{-1})C(z^{-1})r_{k+d} + A(z^{-1})Q(z^{-1})u_k \quad (3.61)$$

se obtiene la siguiente ecuación para la señal de control:

$$u_k = \frac{A(z^{-1})}{A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})} s_{k+d} + \frac{A(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})} r_{k+d} \quad (3.62)$$

Cuando k tiende a infinito, s_{k+d} se desvanece (tiende a cero) como se muestra en (3.59). Debido a que $T^0(z^{-1})$ está diseñado Schur, entonces para una referencia acotada r_k , se prueba que u_k es acotada para todo k . Esto es, $s_{k+d} \rightarrow 0$ cuando k se acerca al infinito, entonces (3.62) se convierte en

$$u_k = \frac{A(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})} r_{k+d} \quad (3.63)$$

Como $T^0(z^{-1}) = A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})$ es Schur, entonces para una señal de referencia r_k acotada, la señal de control u_k será acotada para todo k .

Como la superficie deslizante se anula, ésta se puede escribir como en (3.64) y despejando y_{k+d} se obtiene (3.65)

$$C(z^{-1})(y_{k+d} - r_{k+d}) + Q(z^{-1})u_k = 0 \quad (3.64)$$

$$y_{k+d} = \frac{1}{C(z^{-1})} r_{k+d} - \frac{Q(z^{-1})}{C(z^{-1})} u_k \quad (3.65)$$

Como se demostró que u_k es acotada y r_k también es acotada, entonces de (3.65) y_k es acotada para todo k , además de (2.93) e_k es acotada para todo k . Así la estabilidad global del sistema en lazo cerrado está asegurada.

Colorario 3.1.1: Especialmente cuando la señal de referencia es o se vuelve constante, $r_k = r_0$, entonces s_k se aproxima a cero cuando k tiende a infinito, de (3.62) la

señal de control u_k tiende a ser constante, es decir, $u_k = u_{k-1}$. Esto implica que:

$$Q(z^{-1})u_k = 0 \quad (3.66)$$

Entonces, a partir de (3.2), la señal de salida y_k se acerca a r_0 , además, la señal de error e_k se aproxima a cero. Esto es,

$$C(z^{-1})(y_{k+d} - r_{k+d}) = 0, \quad (3.67)$$

$$y_{k+d} = r_{k+d} = r_0. \quad (3.68)$$

Y la convergencia de la señal de salida y_k está asegurada a la señal de referencia constante r_0 .

Observaciones 3.1.1:

- $\hat{\theta}_k$ no converge a θ , ya que $\Delta V_k \leq 0$ para todo k . Es decir, cada elemento de $\hat{\theta}_k$ tiende a valores constantes previamente desconocidos.
- El rendimiento del sistema en lazo cerrado depende del diseño de los polinomios $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$, lo que lleva a un compromiso entre ellos.

El controlador auto-ajustable formado al combinar (3.22), (3.23) y (3.24) para la planta (3.10) proporciona la estabilidad global del sistema en lazo cerrado al asegurar que para todo k , las señales del sistema se muestran acotadas; es decir, $|u_k| < m_u$, $|y_k| < m_y$ y $|e_k| < m_e$ para una referencia acotada $|r_k| < m_r$, donde m_u , m_y , m_e y m_r son constantes positivas. Así para una referencia constante, $r_k = r_0$, donde r_0 es una constante, el $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_k - r_k) = 0$ lo que implica que el $\lim_{k \rightarrow \infty} (e_k) = 0$.

En base a los fundamentos teóricos planteados, se puede deducir el algoritmo de diseño para el cálculo de la ley de control adaptativa de mínima varianza generalizada bajo el concepto de modo deslizante como sigue:

Algoritmo 3.1.2: STC-GMVC-SMC Recursivo para Sistemas Lineales

1. Dado el modelo de la planta con incertidumbre paramétrica (3.10).
2. Dadas las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3.
3. Calcular el modelo nominal de la planta, según la ecuaciones (3.15) y (3.16).
4. Dada la superficie deslizante definida como en (3.2).
5. Diseñar un polinomio $C(z^{-1})$ Schur.
6. Diseñar un polinomio $Q(z^{-1})$, tal que $T^0(z^{-1})$ sea Schur.
7. Calcular los polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$, según la igualdad (3.7)
8. Calcular el polinomio $G(z^{-1})$, según (3.8).
9. Obtener la ley de control nominal u_k según (3.9).
10. Obtener el algoritmo recursivo dado por (3.23) y (3.24), cada periodo de muestreo.
11. Obtener la ley de control auto-ajutable u_k según (3.22), cada periodo de muestreo.

Como se puede observar, el Algoritmo 3.1.2, hace uso del Algoritmo 3.1.1, y toma los valores de $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$ obtenidos, como los valores iniciales para la ley de control auto-ajutable (2.105); es decir en $k = 0$, $F(z^{-1}) = \hat{F}(z^{-1})$ y $G(z^{-1}) = \hat{G}(z^{-1})$.

La representación en Diagramas de Bloques del sistema en lazo cerrado auto-ajutable se muestra en la Fig. 3.1.

3.1.1. Ejemplos

En esta sección se presentan dos ejemplos para demostrar el comportamiento del algoritmo recursivo, Algoritmo 3.1.2. Primero, se presenta un ejemplo académico de un sistema con incertidumbres paramétricas, estable pero de fase no mínima (Ejemplo 1). En el siguiente (Ejemplo 2) se muestra el comportamiento del sistema para una planta con incertidumbres paramétricas, inestable y de fase no mínima.

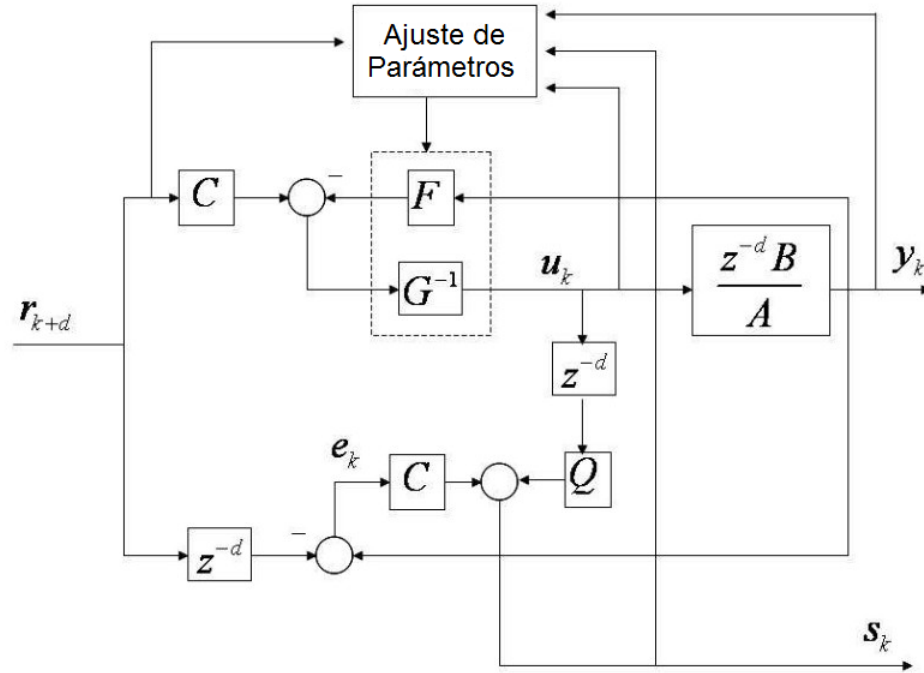


Figura 3.1: Diagrama de Bloques del sistema en lazo cerrado auto-ajutable (STC-GMVC-SMC).

Ejemplo 1

En la explicación de este primer ejemplo, se sigue paso a paso el Algoritmo 3.1.2 para un mejor entendimiento del diseño y aplicación de la ley de control propuesta.

Paso 1: Considere el siguiente modelo (3.69) de fase no mínima con incertidumbres paramétricas (no se conocen los valores específicos de sus parámetros),

$$(1 + a_1 z^{-1})y_k = z^{-d}(b_0 + b_1 z^{-1})u_k \quad (3.69)$$

donde el retardo $d = 2$, y el intervalo de valores para cada parámetro es dado como sigue,

$$a_1 \in [-0,5 \ -0,1], \ b_0 \in [0,8 \ 1,2], \ b_1 \in [1,4 \ 2,6].$$

El modelo (3.69) es el modelo que se conoce (bien sea a través de modelado por leyes físicas o por técnicas de identificación) de la planta o proceso, y es el que se le denomina modelo real. Como se puede observar en (3.69), los valores de los parámetros

no son conocidos exactamente, en vez, se conoce el rango de valores dentro de los cuales pueden estar los valor reales de los parámetros.

Paso 2: La estructura del modelo es conocida, el tiempo de retardo es conocido, y el rango de los valores de los parámetros es conocido. Así, las condiciones sobre el modelo están verificadas.

La señal de referencia se define como una señal acotada. Es una secuencia de escalones de 100 muestras y de amplitud unitaria, comenzando desde 0,5.

Paso 3: Para calcular el modelo nominal de la planta o proceso, se hace uso de las ecuaciones (3.15) y (3.16). Donde se obtiene (3.70),

$$(1 - 0,3z^{-1})y_k = z^{-d}(1 + 2z^{-1})u_k \quad (3.70)$$

El modelo nominal (3.70) permite obtener un modelo con valores específicos que permite diseñar el algoritmo de control nominal. Estos valores del modelo nominal no son necesariamente los reales de la planta, pero si están contenidos dentro del rango conocido para cada parámetro.

El algoritmo de control se diseña sobre el modelo nominal (3.70), el cual se obtiene de la información disponible del modelo real (3.69); luego el algoritmo de control es aplicado o es implementado sobre la planta o proceso real, la cual se asume se comporta como el modelo real presentado en (3.69).

Nótese que este es el mismo modelo (2.107) del Ejemplo 2.7.1, de las Sección 2.7, para el caso donde todos los parámetros del sistema son conocidos, es decir, usando el Algoritmo 3.1.1.

En este caso, para mostrar las simulaciones, se asume que el modelo real es representado por la siguiente ecuación (3.71). Se puede observar que los parámetros de (3.71) poseen un valor definido dentro del rango conocido para cada parámetro.

$$(1 - 0,5z^{-1})y_k = z^{-d}(1 + 2,3z^{-1})u_k \quad (3.71)$$

Así, el modelo (3.71) se asume como el real de la planta, en el caso de que el mismo

fuese conocido con total precisión.

Paso 4: Para el diseño de la ley de control, se tiene la superficie deslizante como en (3.2).

Paso 5: Primeramente se diseña un polinomio $C(z^{-1})$ que sea Schur (con todas sus raíces dentro del círculo unitario del plano z)

$$C(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + 0,25z^{-2} \quad (3.72)$$

Paso 6: Luego se diseña un polinomio $Q(z^{-1})$ tal que, el polinomio característico del sistema en lazo cerrado $T^0(z^{-1})$ sea Schur. Esto se logra moviendo el valor de q_0 en la ecuación (3.4). En este caso se diseña $Q(z^{-1})$ como en (3.73),

$$Q(z^{-1}) = 40(1 - z^{-1}) \quad (3.73)$$

Paso 7: Usando la igualdad (3.7) se obtienen los polinomios $F(z^{-1})$ y $E(z^{-1})$.

$$F(z^{-1}) = 0,64 \quad (3.74)$$

$$E(z^{-1}) = 1 \quad (3.75)$$

Paso 8: De la definición del polinomio $G(z^{-1})$ en (3.8), se obtiene el siguiente polinomio de interés para el diseño de la ley de control nominal.

$$G(z^{-1}) = 41 - 36,7z^{-1} + 2,6z^{-2} \quad (3.76)$$

Paso 9: Así se tienen todos los polinomios de diseño necesarios para el controlador nominal dado por la ecuación (3.9).

Nótese que el control nominal (3.9) para el modelo nominal (3.70) fue diseñado en la Sección 2.7.1 usando las ecuaciones (2.108) y (2.109), al igual que en este ejemplo.

En caso de no tener incertidumbres paramétricas en el modelo de la planta, es decir el modelo nominal de la planta sea efectivamente el modelo que representa a la planta

real, entonces basta con aplicar el control nominal (3.9) para obtener resultados satisfactorios (como fue el caso del ejemplo en la Sección 2.7.1).

Paso 10: Para uso del algoritmo de control auto-ajustable ((3.23) y (3.24)), Γ es inicializada con el valor de la matriz identidad, esto es: $\Gamma_0 = I$.

Paso 11: Aplicar el diseño del control auto-ajustable STC-GMVC-SMC, donde los polinomios $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$ obtenidos en (3.74) y (3.76) dan los valores iniciales para $\hat{F}(z^{-1})$ y $\hat{G}(z^{-1})$ del controlador auto-ajustable recursivo (3.22).

En la Fig. 3.2 se muestra la respuesta del sistema (3.71), al ser controlado por el control nominal (3.9), Algoritmo 3.1.1: GMVC-SMC para Sistemas Lineales, y el controlador auto-ajustable (3.22), Algoritmo 3.1.2: STC-GMVC-SMC Recursivo para Sistemas Lineales.

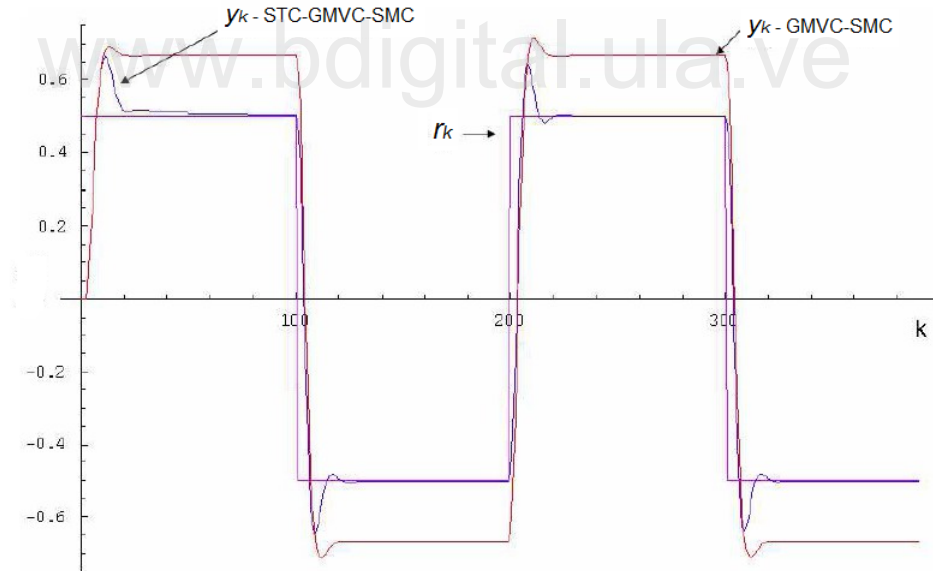


Figura 3.2: Respuesta del sistema y_k y señal de referencia r_k , al usar el controlador nominal GMVC-SMC (3.9) y el controlador auto-ajustable STC-GMVC-SMC (3.22) para el modelo real (3.71).

Se puede observar en la Fig. 3.2, que el controlador de mínima variancia generalizada (3.9) es muy sensible ante las incertidumbres paramétricas, dando un error en

estado estacionario bastante apreciable. Por el contrario, el controlador auto-ajustable (3.22) puede adaptarse (mientras los parámetros del controlador se identifican) a dichas incertidumbres y compensarlas, tendiendo a un error de cero en estado estacionario. El sistema en lazo cerrado es estable y además se cumple el objetivo del seguimiento de trayectoria; es decir, la señal de salida y_k (STC-GMVC-SMC) sigue a la señal de referencia r_k en estado estacionario.

En la Fig. 3.3, se muestra la dinámica de la señal de control u_k del controlador auto-ajustable STC-GMVC-SMC (3.22) para el modelo real (3.71). Se puede notar que es una dinámica que no presenta valores altos con respecto a la salida del sistema y siempre permanece acotada. Debido a la estructura del polinomio $Q(z^{-1})$, cuando la salida del sistema alcanza el estado estacionario la señal de control se vuelve constante.

Es de observar que en este tipo de controladores el estado transitorio no es de importancia relevante, como lo es en el caso de otros tipos de controladores comunes. Ya que el objetivo del controlador es asegurar la estabilidad global del sistema en lazo cerrado, y seguir la referencia en estado estacionario. Por lo tanto en estos casos no se hace análisis sobre las características del estado transitorio de la dinámica de salida del sistema.

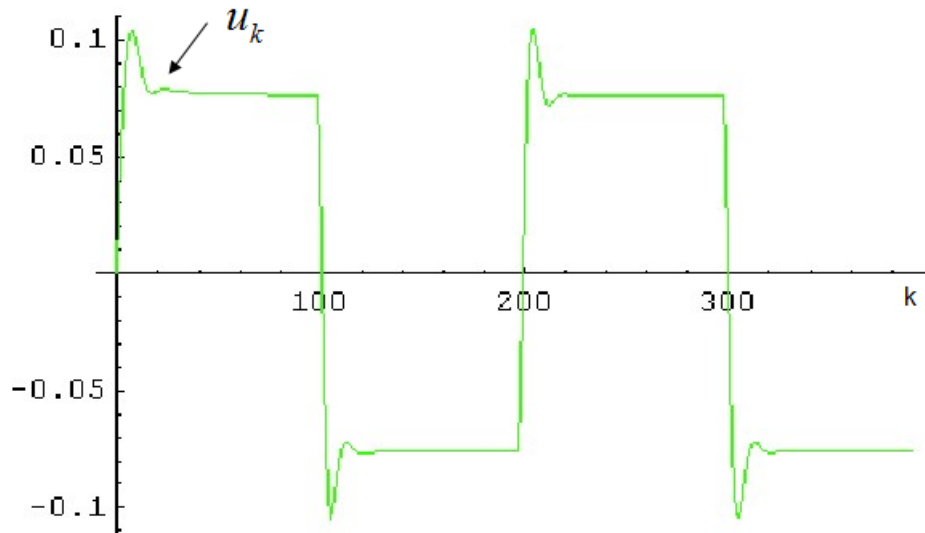


Figura 3.3: Dinámica de la señal u_k del controlador auto-ajustable STC-GMVC-SMC (3.22) para el modelo real (3.71).

La Fig. 3.4 muestra el comportamiento de la superficie deslizante S_k (3.2). La superficie deslizante también posee un estado transitorio que ocurre mientras los parámetros son identificados y el error entre la señal de referencia y salida se va desvaneciendo (tiende a cero). Como puede observarse, una vez que la superficie deslizante alcanza el valor de cero y se mantiene en el mismo, es cuando la salida del sistema entra en régimen permanente (estado estacionario). Validándose así la teoría y los resultados obtenidos en la demostración del Teorema 3.1.1 y explicadas en el Colorario 3.1.1.

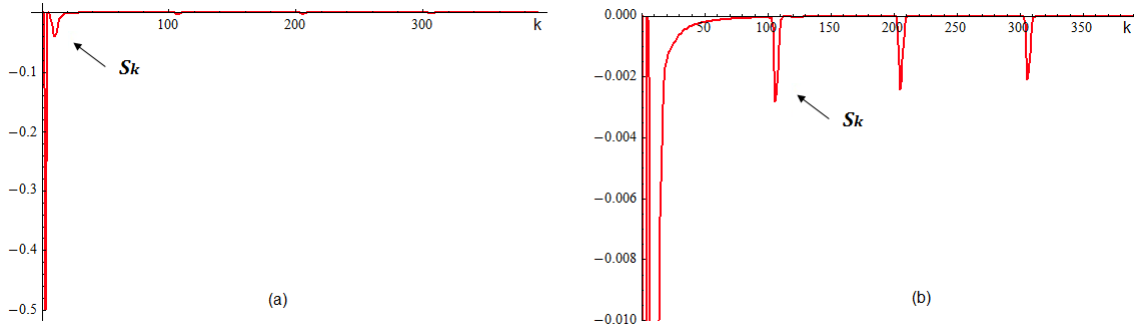


Figura 3.4: (a) Dinámica de la superficie deslizante S_k (3.2). (b) Zoom de la señal S_k .

Cuando los polinomios $C(z^{-1})$, definido en (3.72), y $Q(z^{-1})$, definido en (3.73), se usan para calcular los polinomios $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$ del controlador óptimo (controlador real); esto es, en base a los valores de la planta real (3.71), los siguientes polinomios $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$ son obtenidos.

$$F(z^{-1}) = 1 \quad (3.77)$$

$$G(z^{-1}) = 41 - 36,2z^{-1} + 3,45z^{-2} \quad (3.78)$$

La Fig. 3.5 muestra el comportamiento dinámico de los parámetros estimados (identificados), y los parámetros calculados para el controlador óptimo. Se observa que dichos parámetros no convergen a sus valores óptimos (reales), tal y como se expresó en las Observaciones 3.1.1. Se puede observar además que los parámetros se auto-ajustan cada vez que ocurre un cambio en la referencia del sistema, lo que indica que la identificación de los parámetros se realiza cada periodo de muestreo y depende del error (diferencia entre la señal de entrada y la señal de salida).

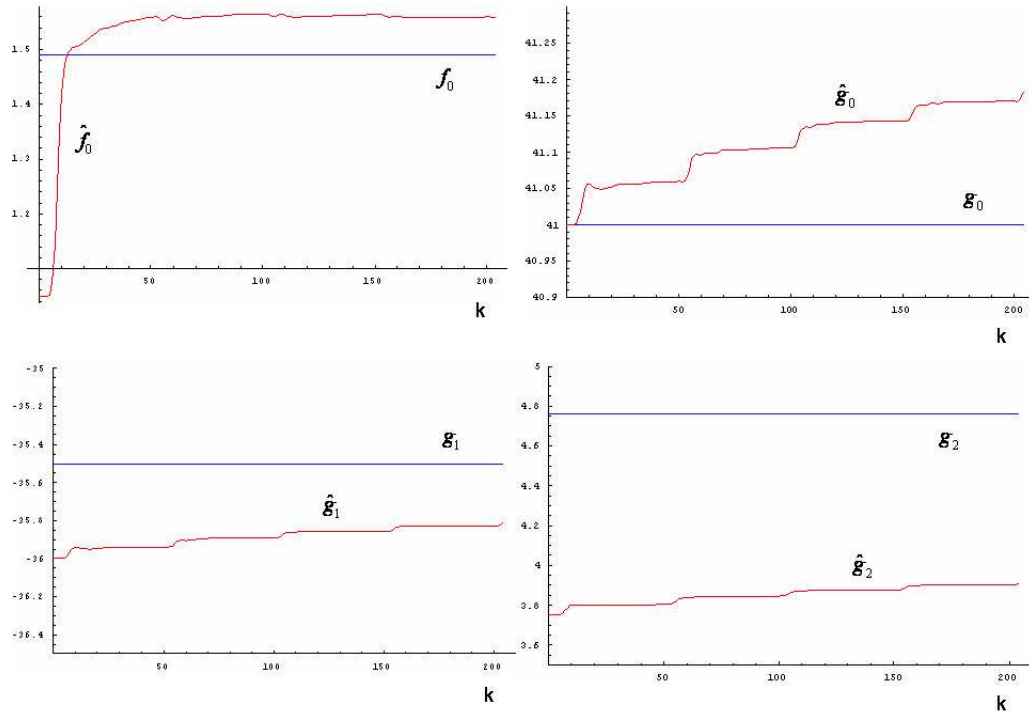


Figura 3.5: Comportamiento dinámico de los parámetros estimados vs. los parámetros óptimos calculados en base a la planta real.

Ejemplo 2

Los ejemplos que se presentan a continuación y a lo largo del presente proyecto, siguen los mismos pasos de los algoritmos presentados en cada sección. Y el diseño de la ley de control es análoga al diseño presentado paso a paso para el Ejemplo 1. Por lo que para los siguientes ejemplos los cálculos se muestran de manera más directa.

Considere el siguiente modelo real de una planta inestable de fase no mínima,

$$(1 + a_1 z^{-1})y_k = z^{-d}(b_0 + b_1 z^{-1})u_k \quad (3.79)$$

donde $d = 2$, y el intervalo de valores para cada parámetro es dado por

$$a_1 \in [-1,5 \ -1,3], \text{ and } b_1 \in [1,1 \ 1,3]$$

Usando (3.15) y (3.16), se obtiene el modelo nominal (3.80) (de manera análoga a como se obtuvo el modelo nominal en el Ejemplo 1).

$$(1 - 1,4z^{-1})y_k = z^{-d}(1 + 1,2z^{-1})u_k \quad (3.80)$$

En este caso, el sistema real es asumido como,

$$(1 - 1,5z^{-1})y_k = z^{-d}(1 + 1,3z^{-1})u_k \quad (3.81)$$

El controlador nominal para el modelo nominal (3.80) se diseña como:

$$C(z^{-1}) = 1 - 1,2z^{-1} + 0,36z^{-2} \quad (3.82)$$

$$Q(z^{-1}) = 1(1 - z^{-1}) \quad (3.83)$$

y se obtienen los siguientes polinomios para el controlador nominal,

$$F(z^{-1}) = 0,64 \quad (3.84)$$

$$G(z^{-1}) = 2,5 - 0,1z^{-1} + 0,24z^{-2} \quad (3.85)$$

$F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$ dan los valores iniciales para $\hat{F}(z^{-1})$ y $\hat{G}(z^{-1})$, respectivamente.

La Fig. 3.6 muestra la salida del modelo (3.81), al usar el control nominal (GMVC-SMC) y el control auto-ajutable (STC-GMVC-SMC). La matriz Γ es inicializada como $\Gamma_0 = I$. La señal de referencia es una secuencia de escalones de 300 muestras y de amplitud unitaria, comenzando desde 0,5. El controlador auto-ajutable cumple con el objetivo de estabilizar la planta en lazo cerrado y además con el objetivo de seguir la referencia en estado estacionario. Es decir, efectivamente el error en estado estacionario tiende a cero como se demostró matemáticamente.

Los ejemplos mostrados ayudan a visualizar el comportamiento del algoritmo auto-ajutable respecto al tiempo. A través de las simulaciones se puede confirmar que: i) el control auto-ajutable cumple con el objetivo primordial de garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Es decir, para una referencia acotada, las señales de salida, control y error serán acotadas. ii) el control auto-ajutable cumple con el objetivo de

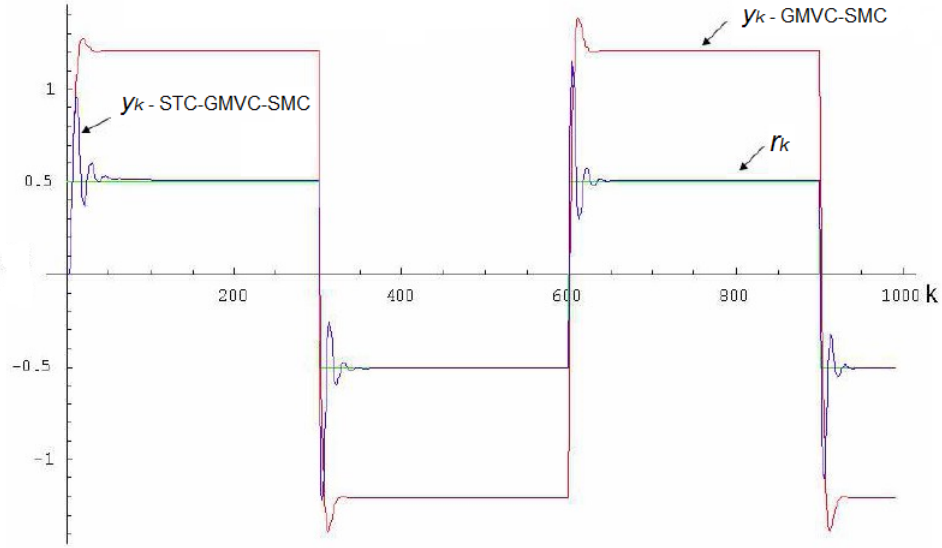


Figura 3.6: Señal de salida y_k , y referencia r_k al usar el control nominal GMVC-SMC y el control auto-ajustable STC-GMVC-SMC para el modelo real (3.81).

seguimiento de referencia en estado estacionario. Esto significa que el error en estado estacionario tiende a cero y la señal de salida del sistema sigue a la señal de referencia.

El algoritmo auto-ajustable presentado en esta sección puede ser usado de manera general para sistemas lineales, SISO, invariantes en el tiempo, de fase mínima o de fase no mínima, estables o inestables.

3.2. Fundamentos Teóricos del Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC para Sistemas Lineales Auto-Regresivos (AR) en presencia de ruido blanco

El problema de diseño para un sistema de control se reduce básicamente en hacer que el sistema en lazo cerrado se comporte como un sistema deseado. Si las dinámicas del proceso y las señales de perturbación (o ruido) que afectan al sistema son conocidas, entonces el controlador puede ser diseñado de tal manera de que éste haga que el

sistema en lazo cerrado se comporte como es deseado (cancelando, eliminando o compensando las señales de perturbación). La mayoría de los algoritmos de control se basan en que el sistema puede ser representado por un modelo lo suficientemente “cómodo”, sin embargo, en la realidad al implementar dichos controladores sobre las plantas las perturbaciones o ruidos inherentes en el sistema no son conocidos (no son medibles), por lo que el modelo “cómodo.” ideal no representa el comportamiento del sistema real.

En esta Sección 3.2, el controlador auto-ajustable presentado en la sección anterior 3.1 es extendido al caso de modelos de sistemas lineales en presencia de ruido. Dos tipos de modelos son estudiados, los modelos: modelos ARX (*Auto-Regressive with auxiliary input*) y modelos CARMA (*Controlled Auto-Regressive Moving Average*).

3.2.1. Modelos ARX

Uno de los modelos auto-regresivos en presencia de ruido más simples es donde el valor actual de la salida es una función de sus valores anteriores, los valores pasados del controlador y el valor actual de la variable de ruido o perturbación. Como el representado en la ecuación (3.86),

$$A^0(z^{-1})y_k = z^{-d}B^0(z^{-1})u_k + \xi_k \quad (3.86)$$

donde ξ_k representa la señal de ruido blanco (*white noise*) definida como:

$$E_{\xi}\{\xi_i\} = 0$$

$$E_{\xi}\{\xi_j\xi_i\} = \delta_{ji}\sigma^2, \text{ con } \delta_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ 1 & \text{para } i = j \end{cases}$$

E_{ξ} denota la esperanza (operador estocástico) respecto a ξ_k .

El modelo del sistema a ser considerado en esta Sección 3.2.1 es representado por (3.87),

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + \xi_k \quad (3.87)$$

donde el modelo nominal de (3.87) es dado por (3.86).

Condición 3.2.1.1:

1. El modelo en presencia de ruido blanco (3.87) satisface el Lema 2.7.1 al calcular la esperanza de dicho sistema en lazo cerrado respecto a ξ_k .

Colorario 3.2.1.1: Condición 3.2.1.1 expresa que, la condición necesaria y suficiente para que la variable de control $E_\xi\{u_k\}$ haga que la variable manipulada $E_\xi\{s_{k+d}\}$ sea igual a cero es que todas las raíces del polinomio característico del sistema en lazo cerrado, $E_\xi\{T^0(z^{-1})\}$,

$$E_\xi\{T^0(z^{-1})\} = E_\xi\{A^0(z^{-1})Q(z^{-1}) + B^0(z^{-1})C(z^{-1})\} \quad (3.88)$$

pertenezcan al interior del círculo unitario, y que los polinomios (Q, C) , (A^0, C) , y (B^0, Q) no tengan ceros comunes fuera del círculo unitario (Astrom and Wittenmark, 1995).

La representación del sistema (3.87) en Diagramas de Bloques se muestra en la Fig. 3.7.

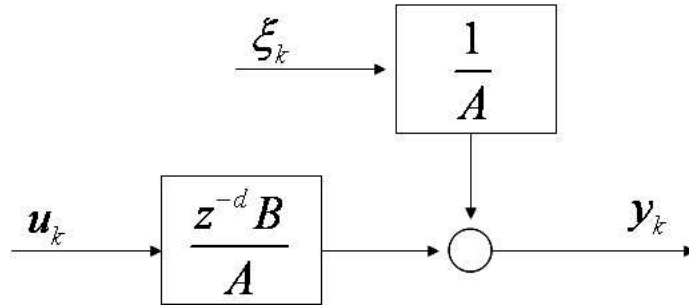


Figura 3.7: Sistema en presencia de ruido blanco.

Usando la definición de s_{k+d} dada en (3.2), s_{k+d} se reescribe como:

$$s_{k+d} = G(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d} + E(z^{-1})\xi_{k+d} \quad (3.89)$$

para obtener (3.89), se usó la ecuación del modelo ARX (3.86) y la identidad dada en (3.7).

Tomando en cuenta que se pueden conocer los valores futuros o de predicción del ruido blanco (esto es $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_{k+d}$), por lo tanto, estos no pueden ser controlados por la señal de control u_k ; entonces la ley de control que hace que $s_{k+d} = 0$ es la misma dada en (3.22). Sí la señal de control (3.22) es usada para el modelo nominal (3.86), entonces

$$s_{k+d} = E(z^{-1})\xi_{k+d} \quad (3.90)$$

Debido a que el grado del polinomio $E(z^{-1})$ es $d - 1$, según los cálculos de la identidad dada en (3.7), entonces al usar la ley de control (3.22), la superficie deslizante s_{k+d} en (3.90) depende solamente de los valores medidos futuros de ξ , por lo que (3.22) es control de mínima varianza para la salida y_k .

El modelo en presencia de ruido blanco (3.87) es estable en lazo cerrado, y la salida sigue a la referencia si se satisface el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1.1: STC-GMVC-SMC-ARX Recursivo para Sistemas Lineales Dada una matriz definida positiva Γ_0 y el vector de parámetros inicial $\hat{\theta}_0$. Si la estimación $\hat{\theta}_k$ del controlador (3.22) satisface las ecuaciones recursivas (3.23) y (3.24), bajo las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, y 3.2.1.1, para el modelo (3.87), entonces el sistema global en lazo cerrado es estable, y la señal de salida seguirá a la señal de referencia en estado estacionario, al calcular la esperanza de dicho sistema en lazo cerrado respecto a ξ_k .

Lema 3.2.1.1: $\hat{\theta}_0$ puede ser inicializado por los parámetros del controlador nominal calculados con $G(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$.

La demostración del Teorema 3.2.1.1 es análoga a la demostración del Teorema 3.1.1. En este caso se debe tomar en cuenta que debido a que el modelo con incertidumbres paramétricas (3.87) está en presencia de ruido blanco, entonces se usa el operador estocástico para calcular la esperanza de las variables involucradas en el

sistema en lazo cerrado.

Demostración: Usando la ley de control (3.22), s_k se reescribe como

$$s_k = \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k + E(z^{-1}) \xi_k \quad (3.91)$$

Considerando la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$E_\xi \{V_k\} = E_\xi \left\{ \frac{1}{2} s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k \right\} \quad (3.92)$$

La diferencia en el tiempo (3.92) es:

$$E_\xi \{\Delta V_k\} = E_\xi \{V_k - V_{k-1}\} \quad (3.93)$$

Primeramente, $V_k - V_{k-1}$ es calculada como:

$$E_\xi \{\Delta V_k\} = \frac{1}{2} s_k^2 - \frac{1}{2} s_{k-1}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} \quad (3.94)$$

www.bdigital.ula.ve

$$E_\xi \{\Delta V_k\} = -\frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \quad (3.95)$$

$$\frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + \frac{1}{2} s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} + \Gamma_{k-1}^{-1}) \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}$$

$$E_\xi \{\Delta V_k\} = -\frac{1}{2} s_k^2 - \quad (3.96)$$

$$\frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1}) \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}$$

de (3.91), s_k^2 es

$$s_k^2 = \tilde{\theta}_k^T \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k + 2E(z^{-1}) \xi_k \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k + (E(z^{-1}) \xi_k)^2 \quad (3.97)$$

Sustituyendo (3.97) en (3.96), entonces se tiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} \Delta V_k = & \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_k - \frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) \quad (3.98) \\ & + \frac{1}{2} (E(z^{-1})\xi_k)^2 + \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}^T E(z^{-1})\xi_k) \end{aligned}$$

El siguiente término en (3.98)

$$\frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_k$$

se hace cero al usar la ecuación recursiva (3.24) tal y como fue demostrado en el Teorema 3.1.1 (donde se hizo uso del Lema 3.1.4).

De (3.98), el término

$$\tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}^T E(z^{-1})\xi_k)$$

se hace cero al usar la ecuación recursiva (3.23), como se muestra a continuación

$$\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}^T E(z^{-1})\xi_k = 0 \quad (3.99)$$

$$\tilde{\theta}_k + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}_{k-1} - \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}^T E(z^{-1})\xi_k \quad (3.100)$$

$$(I + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_k = \quad (3.101)$$

$$-\Gamma_{k-1} \phi_{k-d}^T E(z^{-1})\xi_k + (I + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_{k-1} - \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_{k-1}$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} (1 + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d})^{-1} (\phi_{k-d}^T (\theta - \hat{\theta}_{k-1}) + E(z^{-1})\xi_k) \quad (3.102)$$

Observando de (3.89) que,

$$s_k = \phi_{k-d}^T \theta - C(z^{-1})r_k + E(z^{-1})\xi_k \quad (3.103)$$

se deduce (3.23).

Si las ecuaciones recursivas (3.23) y (3.24) son usadas en (3.98), entonces

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2}s_{k-1}^2 - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + \frac{1}{2}(E(z^{-1})\xi_k)^2 \quad (3.104)$$

De (3.91), s_{k-1}^2 es

$$s_{k-1}^2 = \tilde{\theta}_{k-1}^T \phi_{k-d-1} \phi_{k-d-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} + 2E(z^{-1})\xi_{k-1} \phi_{k-d-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} + (E(z^{-1})\xi_{k-1})^2 \quad (3.105)$$

Sustituyendo (3.105) en (3.104), entonces

$$\begin{aligned} \Delta V_k = & -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) \\ & -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{k-1}^T \phi_{k-d-1} \phi_{k-d-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} + (E(z^{-1})\xi_{k-1})^2) \\ & -E(z^{-1})\xi_{k-1} \phi_{k-d-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} + \frac{1}{2}(E(z^{-1})\xi_k)^2 \end{aligned} \quad (3.106)$$

Tomando la esperanza de (3.106) con respecto a la señal de ruido blanco ξ , entonces

$$E_\xi\{\Delta V_k\} = -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{k-1}^T \phi_{k-d-1} \phi_{k-d-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} \quad (3.107)$$

Si las ecuaciones recursivas (3.23) y (3.24) son usadas en (3.98), entonces $E_\xi\{\Delta V_k\} \leq 0$, lo que implica que la esperanza de s_k se hace cero y $\tilde{\theta}_k$ tiende a una constante mientras k tiende a infinito.

Como $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ son diseñados de tal manera de satisfacer el Lema 2.7.1, entonces para una referencia acotada $|r_k| < m_r$ y una señal de ruido blanco (media cero) ξ_k , se tiene que la señal de control u_k , la señal de salida y_k y la señal de error e_k serán acotadas. Multiplicando (2.90) por $A(z^{-1})$ y usando (3.87), se obtiene la siguiente ecuación para u_k

$$u_k = \frac{A(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})} r_{k+d} \quad (3.108)$$

$$\frac{A(z^{-1})}{A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})} s_{k+d} - \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})} \xi_{k+d}$$

Al calcular la esperanza $E_{\xi}\{u_k\}$ en (3.108), $E_{\xi}\{s_k\}$ se hace cero cuando k tiende a infinito, entonces $E_{\xi}\{|u_k|\} < m_u$ y de (2.90) $E_{\xi}\{|y_k|\} < m_y$, así $E_{\xi}\{|e_k|\} < m_e$. Por lo tanto, la estabilidad global del sistema en lazo cerrado es asegurada en el sentido de la esperanza con respecto a ξ_k .

Colorario 3.2.1.2: No se necesita mayor información a-priori sobre la señal de ruido blanco, excepto que debe ser de media cero. Mientras la señal de ruido blanco tenga media cero, la estabilidad global del sistema en lazo cerrado es asegurada, en el sentido de la esperanza con respecto a ξ_k .

Algoritmo 3.2.1.1: STC-GMVC-SMC-ARX Recursivo para Sistemas Lineales

1. Dado el modelo de la planta con incertidumbre paramétrica en presencia de perturbación del tipo ruido blanco (3.87).
2. Dadas las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, y 3.2.1.1.
3. Calcular el modelo nominal de la planta, según la ecuaciones (3.15) y (3.16).
4. Dada la superficie deslizante definida como en (3.2).
5. Diseñar un polinomio $C(z^{-1})$ Schur.
6. Diseñar un polinomio $Q(z^{-1})$, tal que $E_{\xi}\{T^0(z^{-1})\}$ sea Schur.
7. Calcular los polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$, según la igualdad (3.7)
8. Calcular el polinomio $G(z^{-1})$, según (3.8).
9. Obtener la ley de control nominal u_k según (3.9).
10. Obtener el algoritmo recursivo dado por (3.23) y (3.24), cada periodo de muestreo.

11. Obtener la ley de control auto-ajutable u_k según (3.22), cada periodo de muestreo.

3.2.2. Modelos CARMA

Considere el modelo CARMA (3.109), el cual tiene incertidumbres paramétricas:

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + D^0(z^{-1})\xi_k \quad (3.109)$$

donde los polinomios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ y $D^0(z^{-1})$ se definen como:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}, \quad (3.110)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}, b_0 \neq 0, \quad (3.111)$$

$$D^0(z^{-1}) = 1 + d_1^0z^{-1} + d_2^0z^{-2} + \dots + d_l^0z^{-l}, \quad (3.112)$$

donde $a_i \in [\underline{a}_i \ \bar{a}_i]$ y $b_j \in [\underline{b}_j \ \bar{b}_j]$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$ respectivamente.

Condiciones 3.2.2.1:

1. El polinomio $D^0(z^{-1})$ es conocido.
2. El polinomio $D^0(z^{-1})$ es Schur.

Obsérvese que a pesar de que el modelo CARMA (3.109) tiene incertidumbres paramétricas, el polinomio $D^0(z^{-1})$ es conocido. Es decir, los polinomios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ pueden tener incertidumbre paramétrica, sin embargo, el polinomio $D^0(z^{-1})$ es conocido con precisión (o se asume conocido).

Las señales y_k y u_k son redefinidas como señales filtradas de la forma:

$$y'_k = \frac{1}{D^0(z^{-1})}y_k, \quad (3.113)$$

y

$$u'_k = \frac{1}{D^0(z^{-1})}u_k. \quad (3.114)$$

Así el modelo (3.109) es (3.115)

$$A(z^{-1})y'_k = z^{-d}B(z^{-1})u'_k + \xi_k \quad (3.115)$$

Note que este modelo (3.115) tiene la misma estructura que el modelo auto-regresivo (3.87). Si las señales filtradas y'_k y u'_k son usadas en el diseño en vez de y_k y u_k , respectivamente; entonces el siguiente teorema puede ser enunciado.

Teorema 3.2.2.1: STC-GMVC-SMC-CARMA Recursivo para Sistemas Lineales. Dada una matriz definida positiva Γ_0 y el vector de parámetros inicial $\hat{\theta}_0$. Si la estimación $\hat{\theta}_k$ del controlador (3.22) satisface las ecuaciones recursivas (3.23) y (3.24), bajo las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1.1 y 3.2.2.1, para el modelo (3.115), entonces el sistema global en lazo cerrado es estable, y la señal de salida seguirá a la señal de referencia en estado estacionario, al calcular la esperanza de dicho sistema en lazo cerrado respecto a ξ_k . Donde las señales filtradas y'_k y u'_k son usadas en vez de y_k y u_k , respectivamente.

Lema 3.2.2.1: $\hat{\theta}_0$ puede ser inicializado por los parámetros del controlador nominal calculados con $G(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$.

La demostración del Teorema 3.2.2.1 es la misma demostración del Teorema 3.2.1.1, usando las señales filtradas y'_k y u'_k en vez de y_k y u_k , respectivamente.

Algoritmo 3.2.2.1: STC-GMVC-SMC-CARMA Recursivo para Sistemas Lineales

1. Dado el modelo de la planta con incertidumbre paramétrica en presencia de perturbación del tipo ruido blanco (3.115).
2. Dadas las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1.1 y 3.2.2.1.
3. Calcular el modelo nominal de la planta, según la ecuaciones (3.15) y (3.16).
4. Dada la superficie deslizante definida como en (3.2).
5. Diseñar un polinomio $C(z^{-1})$ Schur.

6. Diseñar un polinomio $Q(z^{-1})$, tal que $E_{\xi}\{T^0(z^{-1})\}$ sea Schur.
7. Calcular los polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$, según la igualdad (3.7)
8. Calcular el polinomio $G(z^{-1})$, según (3.8).
9. Obtener la ley de control nominal u_k según (3.9).
10. Obtener el algoritmo recursivo dado por (3.23) y (3.24), en cada periodo de muestreo.
11. Obtener la ley de control auto-ajutable u_k según (3.22), cada periodo de muestreo.

3.2.3. Ejemplo

Para mostrar el comportamiento del Algoritmo 3.2.1.1, se considera el mismo modelo real (3.69) y nominal (3.70) analizado en la Sección 3.1.1 para el caso donde no existe presencia de perturbación. Sin embargo, en esta sección, el modelo real está sujeto a presencia de perturbación del tipo ruido blanco, por lo que el modelo real se expresa,

$$(1 - 0,5z^{-1})y_k = z^{-d}(1 + 2,3z^{-1})u_k + \xi_k \quad (3.116)$$

cuyo modelo nominal es dado por

$$(1 - 0,3z^{-1})y_k = z^{-d}(1 + 2z^{-1})u_k \quad (3.117)$$

La ley de control basada en el modelo nominal del sistema fue calculada en la Sección 2.7.1 y luego presentada nuevamente en la Sección 3.1.1. Es decir, se diseñan $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ como sigue,

$$C(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + 0,25z^{-2} \quad (3.118)$$

$$Q(z^{-1}) = 40(1 - z^{-1}) \quad (3.119)$$

Luego, usando la igualdad (3.7) y la definición del polinomio $G(z^{-1})$ en (3.8), se obtienen

$$F(z^{-1}) = 0,64, \quad (3.120)$$

$$G(z^{-1}) = 41 - 36,7z^{-1} + 2,6z^{-2} \quad (3.121)$$

Para el uso del algoritmo auto-ajutable STC-GMVC-SMC-ARX, los polinomios $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$ obtenidos en (3.120) y (3.121) dan los valores iniciales para $\hat{F}(z^{-1})$ y $\hat{G}(z^{-1})$ del controlador auto-ajutable recursivo (3.22).

La Fig. 3.8(a) muestra la salida del sistema en lazo cerrado para el modelo (3.116), usando el algoritmo recursivo STC-GMVC-SMC-ARX. La condición inicial para Γ es la matriz identidad, esto es $\Gamma_0 = I$. La señal de referencia es una serie de escalones de 100 muestras de ancho, y la señal de ruido blanco, ξ_k , es del tipo Gaussiana, $\xi_k \sim N(0; 0,1)$. En la Fig. 3.8(b) muestra el comportamiento de la superficie deslizante s_k y la ley de control u_k .

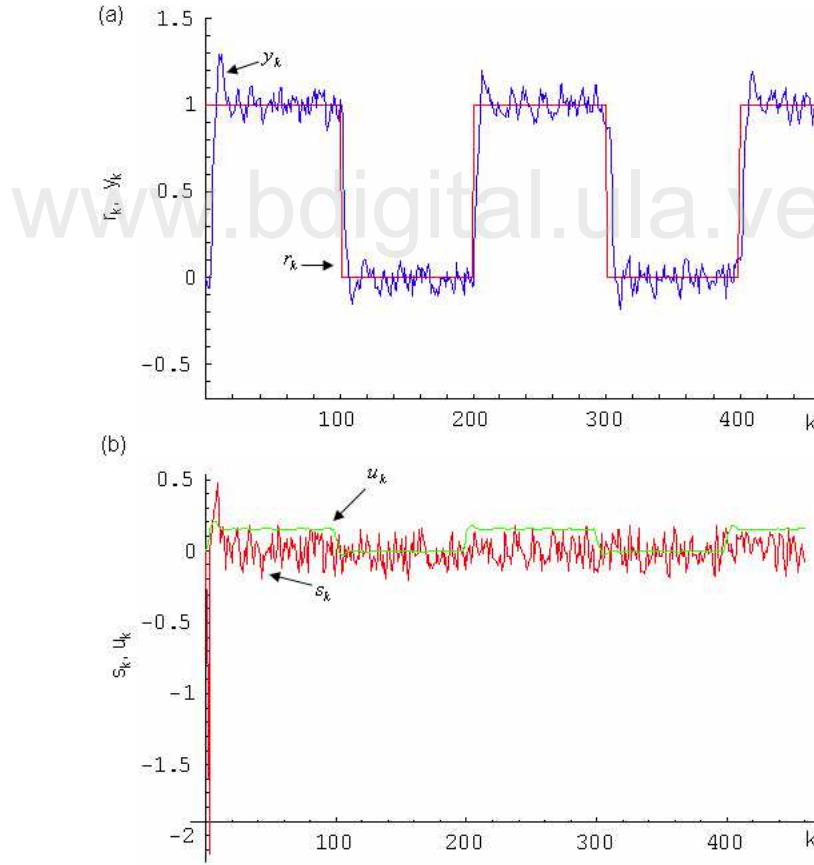


Figura 3.8: (a): Señal y_k y señal r_k . $\Gamma_0 = I$ y $\xi_k \sim N(0; 0,1)$. (b): s_k y u_k

La varianza de la señal de ruido es aumentada a $\xi_k \sim N(0; 0,25)$, y el resultado se muestra en la Fig. 3.9. Luego, para analizar su comportamiento, es nuevamente aumentada a $\xi_k \sim N(0; 0,5)$, y se muestra la simulación en la Fig. 3.10.

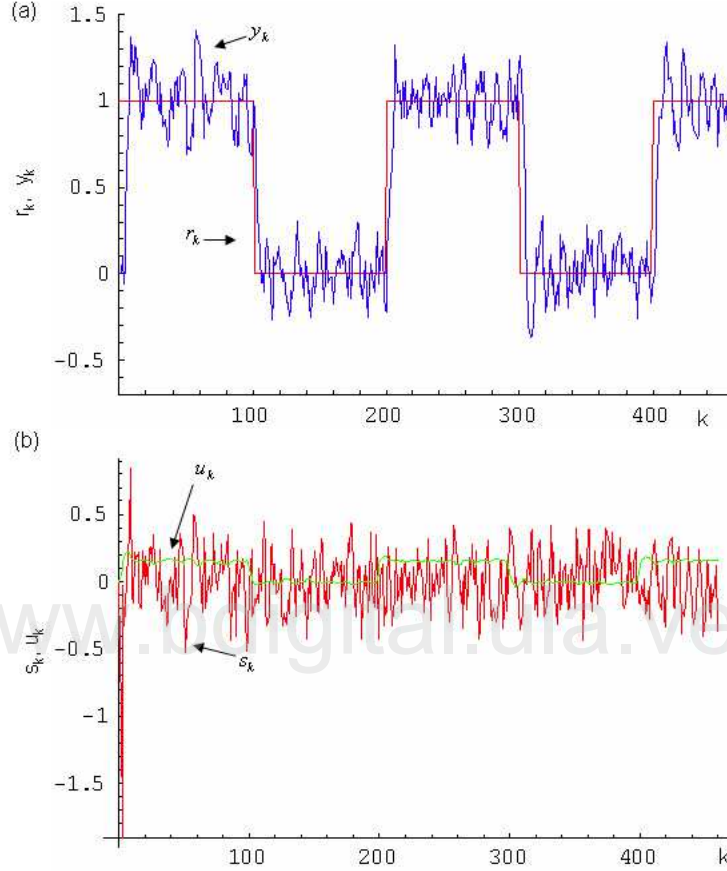


Figura 3.9: (a): Señal y_k y señal r_k . $\Gamma_0 = I$ y $\xi_k \sim N(0; 0,25)$. (b): s_k y u_k

Como se puede observar, el algoritmo auto-ajustable STC-GMVC-SMC-ARX no elimina las perturbaciones de ruido blanco presentes en el sistema. Mientras mayor sea la varianza de dicha perturbación, mayor será el ruido en la señal de salida del sistema controlado, ya que es directamente proporcional. Esto es debido a que la superficie deslizante no se hace cero cuando el sistema está sujeto a perturbaciones, tal y como se indicó en la ecuación (3.90).

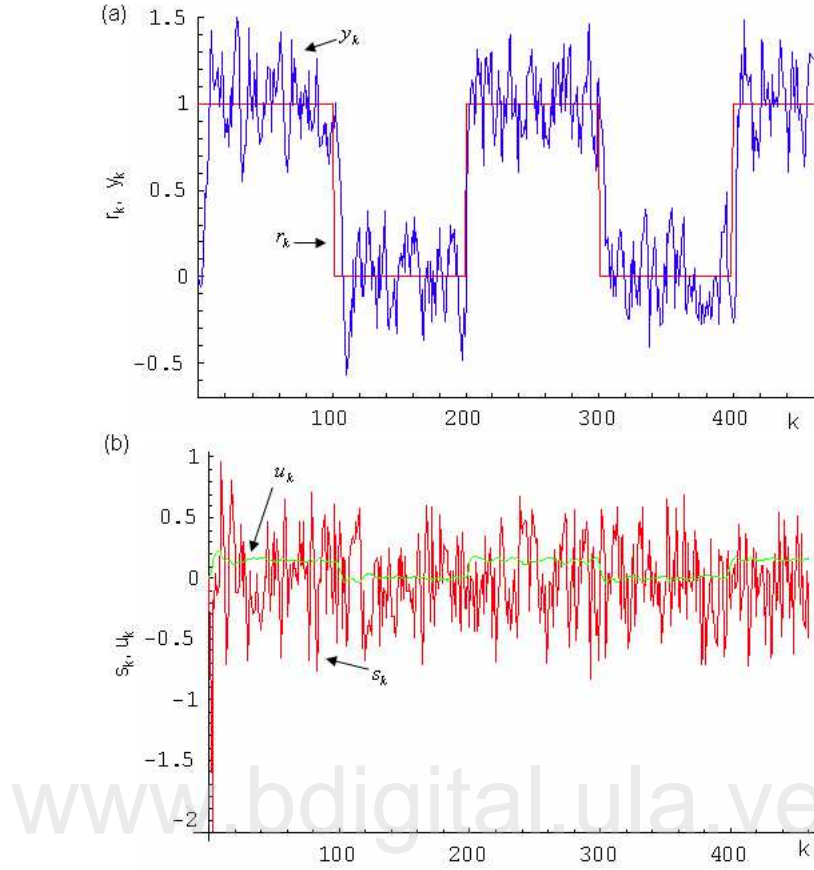


Figura 3.10: (a): Señal y_k y señal r_k . $\Gamma_0 = I$ y $\xi_k \sim N(0; 0,5)$. (b): s_k y u_k

3.3. Fundamentos Teóricos del Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC para Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (VT)

Muchas veces los procesos de control presentan parámetros variantes en el tiempo, siendo este tipo de procesos uno de los motivos por el cual surge el concepto de control adaptativo o auto-ajutable. En general, la metodología usada por el control adaptativo para los sistemas variantes en el tiempo es tratar los efectos de la variación de los parámetros como una perturbación no modelada, para que así el problema se convierta en un problema de robustez. Esta metodología ha sido aplicada a sistemas lineales variantes en el tiempo, donde los parámetros del modelo varían de manera suave y lenta,

o cuando se presentan discontinuidades abruptas (por ejemplo saltos) no frecuentes.

En las secciones anteriores (Sección 3.1 y Sección 3.2), el modelo del sistema se consideraba con incertidumbre paramétrica, pero los parámetros del mismo eran constantes. En esta sección, se considera que los parámetros del sistema pueden o no presentar incertidumbre paramétrica y además sus parámetros pueden variar con el tiempo de manera suave y lenta, o tener cambios abruptos infrecuentes.

Además se estudia y presenta el caso donde el modelo variante en el tiempo también puede estar sujeto a la presencia de perturbaciones del tipo ruido blanco.

3.3.1. STC-GMVC-SMC-TV para el Caso Libre de Perturbación

Una de las metodologías usadas en la teoría de control para atacar el problema de la presencia de parámetros variantes en el tiempo, es incluir dentro de las ecuaciones recursivas del STC el denominado factor de olvido. Este factor de olvido funciona de tal manera, que los valores recientes tienen más peso o importancia a los valores pasados; es decir, se van olvidando (por decirlo de alguna manera) los valores pasados.

Sea el modelo del sistema real (planta), con incertidumbre en sus parámetros, dado por (3.122),

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k \quad (3.122)$$

donde los polinomios $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$ se definen como

$$A(z^{-1}) = 1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2} + \dots + a_{nk}z^{-n}, \quad (3.123)$$

$$B(z^{-1}) = b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2} + \dots + b_{mk}z^{-m}, b_{0k} \neq 0, \quad (3.124)$$

donde a_{ik} y b_{jk} , para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$, son constantes o pueden ser funciones acotadas variantes en el tiempo.

Condiciones 3.3.1.1:

1. Los parámetros, variantes o cambiantes en el tiempo, desconocidos del modelo

real (3.122) deben ser acotados para todo k .

2. El vector de parámetros variantes en el tiempo θ_k se representa a través del siguiente modelo,

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \eta_k, \quad (3.125)$$

donde η_k es considerada una señal variante en el tiempo de media cero. Así,

$$E_\eta\{\theta_k\} = E_\eta\{\theta_{k-1}\}, \quad (3.126)$$

donde E_η denota la esperanza con respecto a η_k .

Teorema 3.3.1.1: STC-GMVC-SMC-TV Recursivo para Sistemas Lineales. Dada una matriz definida positiva Γ_0 , el valor del factor de olvido μ ($0 < \mu < 1$) y el vector de parámetros inicial $\hat{\theta}_0$. Si la estimación $\hat{\theta}_k$ del controlador (3.22) satisface las ecuaciones recursivas (3.127) y (3.128), bajo las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, y 3.3.1.1, para el modelo (3.122), entonces el sistema variante en el tiempo en lazo cerrado es estable, y la señal de salida seguirá a la señal de referencia en estado estacionario, al calcular la esperanza de dicho sistema en lazo cerrado respecto a η_k . Donde,

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}}{\mu + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}} [s_k + C(z^{-1})r_k - \phi_{k-d}^T \hat{\theta}_{k-1}] \quad (3.127)$$

y

$$\Gamma_k = \frac{1}{\mu} (\Gamma_{k-1} - \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1}}{\mu + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}}) \quad (3.128)$$

Lema 3.3.1.1: $\hat{\theta}_0$ puede ser inicializado por los parámetros del controlador nominal calculados con $G(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$.

Demostración: Usando la ley de control (3.22), s_{k+d} se reescribe como

$$s_{k+d} = \phi_k^T \tilde{\theta}_{k+d} \quad (3.129)$$

donde

$$\tilde{\theta}_k = \theta_k - \hat{\theta}_k \quad (3.130)$$

La función candidata de Lyapunov es dada como:

$$E_\eta\{V_k\} = E_\eta\left\{\frac{1}{2}s_k^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k\right\} \quad (3.131)$$

La diferencia respecto al tiempo de (3.131) es:

$$E_\eta\{\Delta V_k\} = E_\eta\{V_k - \mu V_{k-1}\} \quad (3.132)$$

donde μ es el factor de olvido, $0 < \mu < 1$.

Observación 3.3.1.1: El uso del parámetro μ en la función candidata de Lyapunov (3.132) es similar a la introducción de un factor de olvido en el conocido algoritmo de los mínimos cuadrados [Astrom and Wittenmark \(1995\)](#).

Entonces, ΔV_k se reescribe como

$$V_k - \mu V_{k-1} = \frac{1}{2}s_k^2 - \frac{1}{2}s_{k-1}^2\mu + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}\mu \quad (3.133)$$

$$V_k - \mu V_{k-1} = -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})\mu + \frac{1}{2}s_k^2 - \frac{1}{2}s_{k-1}^2\mu + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} + \Gamma_{k-1}^{-1}\mu) \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}\mu \quad (3.134)$$

$$V_k - \mu V_{k-1} = -\frac{1}{2}s_{k-1}^2\mu - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})\mu + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1}\mu) \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_k\mu - \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}\mu - \frac{1}{2}s_k^2 + s_k^2 \quad (3.135)$$

De (3.129), s_k^2 es

$$s_k^2 = \tilde{\theta}_k^T \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k \quad (3.136)$$

Sustituyendo (3.136) en (3.135), se obtiene lo siguiente:

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})\mu - \frac{1}{2}s_{k-1}^2\mu + \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} \mu - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_k \\ & + \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \mu (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k \mu^{-1}) \end{aligned}$$

El tercer y cuarto término del lado derecho de (3.137) se hacen cero de la siguiente manera:

El tercer término del lado derecho de (3.137) es igual a cero tal y como se demostró en Teorema 3.1.1 (al usar el Lema 3.1.4).

El cuarto término del lado derecho de (3.137),

$$\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k \mu^{-1} = 0 \quad (3.138)$$

Usando (2.104) y (3.130), y sustituyendo en (3.138), entonces

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} (s_k \mu^{-1} - \phi_{k-d}^T \hat{\theta}_k \mu^{-1} + C(z^{-1}) r_k \mu^{-1}) + \theta_k - \theta_{k-1} \quad (3.139)$$

$$(\mu + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}) \hat{\theta}_k = \mu \theta_k - \mu \theta_{k-1} + (\mu + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}) \hat{\theta}_{k-1} + \quad (3.140)$$

$$\Gamma_{k-1} \phi_{k-d} [s_k + C(z^{-1}) r_k - \phi_{k-d}^T \hat{\theta}_{k-1}]$$

Calculando la esperanza con respecto a η_k , se obtiene (3.127).

Así, al usar las ecuaciones recursivas (3.127) y (3.128) en (3.137) para una función definida positiva V_0 , se demuestra que $E_\eta\{\Delta V_k\}$ es semidefinida negativa, esto es $E_\eta\{\Delta V_k\} \leq 0$ como sigue:

Usando las ecuaciones recursivas (3.127) y (3.128) en (3.137) para $k = 1$ se obtiene,

$$E_\eta\{V_1 - \mu V_0\} = E_\eta\left\{-\frac{1}{2} s_0^2 \mu - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0)^T \Gamma_0^{-1} (\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0) \mu\right\} \quad (3.141)$$

Inicialmente $\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0 \neq 0$, entonces $E_\eta\{V_1 - \mu V_0\} < 0$, lo que conlleva a

$$E_\eta\{V_1\} < E_\eta\{\mu V_0\}.$$

Para $k = 2$,

$$E_\eta\{V_2 + \frac{1}{2}s_1^2\mu + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)^T\Gamma_1^{-1}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)\mu\} = E_\eta\{\mu V_1\} < E_\eta\{\mu^2 V_0\} \quad (3.142)$$

Para $k = 3$,

$$E_\eta\{V_3 + \frac{1}{2}s_2^2\mu + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)^T\Gamma_2^{-1}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)\mu\} = E_\eta\{\mu V_2\} \quad (3.143)$$

Sustituyendo (3.142) en (3.143), entonces

$$E_\eta\{V_3 + \frac{1}{2}s_2^2\mu + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)^T\Gamma_2^{-1}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)\mu + \mu(\frac{1}{2}s_1^2\mu + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)^T\Gamma_1^{-1}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)\mu)\} = E_\eta\{\mu^2 V_1\} < E_\eta\{\mu^3 V_0\} \quad (3.144)$$

Así, para un valor muy grande de N se puede expresar que,

$$E_\eta\{V_N + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^N(s_{k-1}^2 + (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T\Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}))\mu^{N-k+1}\} < E_\eta\{\mu^N V_0\} \quad (3.145)$$

La ecuación (3.145) implica que cuando N tiende a infinito, μ^N se aproxima a cero; entonces el lado izquierdo de (3.145) se hace cero. Así, s_N y $(\tilde{\theta}_N - \tilde{\theta}_{N-1})$ se hacen cero cuando N tiende a infinito.

El término s_{k+d} se hace cero al calcular la esperanza con respecto a η_k cuando k tiende a infinito, como se demostró en (3.145).

Dado que el polinomio $Q(z^{-1})$ está diseñado para satisfacer el Lema 3.1.2, entonces para una señal de referencia acotada r_k , de (3.62) u_k es acotada para todo k al calcular la esperanza con respecto a η_k . Así de (2.90) y_k es acotada y la señal de error e_k es acotada para todo k . Por lo que la estabilidad del sistema variante en el tiempo en lazo cerrado es asegurada, en el sentido de la esperanza con respecto a η_k .

Cuando la referencia se hace constante $r_k = r_0$, s_k se aproxima a cero en el sentido de la esperanza con respecto a η_k mientras k tiende a infinito, de (3.62) la ley de control u_k tiende a una constante, esto implica que $Q(z^{-1})u_k = 0$. Entonces, de (2.90),

la señal de salida y_k se aproxima a la referencia r_0 ; por lo que la señal de error e_k se hace cero. Y la señal de salida y_k converge a la señal constante de la referencia r_k , lo que asegura el seguimiento de trayectoria en el sentido de la esperanza con respecto a η_k .

Colorario 3.3.1.1: La inclusión del parámetro μ en la ecuación (3.132) implica la inclusión de un parámetro de peso sobre los datos variantes en el tiempo. Donde los datos más recientes son pesados con valor de la unidad, mientras que los datos que son k unidades de tiempo atrás (del pasado) son pesadas con el valor de μ^t .

Colorario 3.3.1.2: El vector de parámetros $\hat{\theta}_k$ no converge a θ_k . En vez de eso, cada elemento de $\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}$ converge a algún valor constante en el sentido de la esperanza con respecto a η_k .

Algoritmo 3.3.1.1: STC-GMVC-SMC-TV Recursivo para Sistemas Lineales

1. Dado el modelo de la planta variante en el tiempo con incertidumbre paramétrica (3.122).
2. Dadas las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, y 3.3.1.1.
3. Calcular el modelo nominal de la planta, según la ecuaciones (3.15) y (3.16).
4. Dada la superficie deslizante definida como en (3.2).
5. Diseñar un polinomio $C(z^{-1})$ Schur.
6. Diseñar un polinomio $Q(z^{-1})$, tal que $T^0(z^{-1})$ sea Schur.
7. Calcular los polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$, según la igualdad (3.7)
8. Calcular el polinomio $G(z^{-1})$, según (3.8).
9. Obtener la ley de control nominal u_k según (3.9).
10. Diseñar el valor de factor de olvido μ ($0 < \mu < 1$).

11. Obtener el algoritmo recursivo dado por (3.127) y (3.128), cada periodo de muestreo.
12. Obtener la ley de control auto-ajustable u_k según (3.22), cada periodo de muestreo.

Colorario 3.3.1.3: Sí el factor de olvido es $\mu = 1$, entonces el Algoritmo 3.3.1.1 es el mismo que en el Algoritmo 3.1.1.

3.3.2. STC-GMVC-SMC-TV para Modelos ARX

El Algoritmo 3.3.1.1 es ahora extendido al caso donde el modelo variante en el tiempo además está sujeto a perturbaciones del tipo ruido blanco.

Sea el modelo del sistema real, con incertidumbre en sus parámetros y sujeto a perturbaciones del tipo ruido blanco, dado por (3.146),

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + \xi_k \quad (3.146)$$

donde los polinomios $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$ se definen como

$$A(z^{-1}) = 1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2} + \dots + a_{nk}z^{-n}, \quad (3.147)$$

$$B(z^{-1}) = b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2} + \dots + b_{mk}z^{-m}, b_{0k} \neq 0, \quad (3.148)$$

donde a_{ik} y b_{jk} , para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$, son constantes o pueden ser funciones acotadas variantes en el tiempo. Las Condiciones 3.3.1.1 y 3.3.1.1 aplican sobre el modelo (3.146).

Teorema 3.3.2.1: STC-GMVC-SMC-TV-ARX Recursivo para Sistemas Lineales. Dada una matriz definida positiva Γ_0 , el valor del factor de olvido μ ($0 < \mu < 1$) y el vector de parámetros inicial $\hat{\theta}_0$. Si la estimación $\hat{\theta}_k$ del controlador (3.22) satisface las ecuaciones recursivas (3.127) y (3.128), bajo las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1.1 y 3.3.1.1, para el modelo (3.146), entonces el sistema variante en el

tiempo en lazo cerrado es estable, y la señal de salida seguirá a la señal de referencia en estado estacionario, al calcular la esperanza de dicho sistema en lazo cerrado respecto a η_k y respecto a ξ_k .

Lema 3.3.2.1: $\hat{\theta}_0$ puede ser inicializado por los parámetros del controlador nominal calculados con $G(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$.

Observación 3.3.2.1: Para la demostración, la ecuaciones (3.86)~(3.90) dadas en 3.2 son usadas. Es de notar que la demostración del Teorema 3.3.2.1 se deduce directamente al combinar la demostración de los Teoremas: Teorema 3.2.1.1 y el Teorema 3.3.1.1.

Demostración: Usando la ley de control (3.22), s_{k+d} se reescribe como

$$s_k = \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k + E(z^{-1})\xi_k \quad (3.149)$$

La función candidata de Lypunove es,

$$E_\xi\{E_\eta\{V_k\}\} = E_\xi\{E_\eta\{\frac{1}{2}s_k^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k\}\} \quad (3.150)$$

La diferencia en el tiempo de (3.150) es,

$$E_\xi\{E_\eta\{\Delta V_k\}\} = E_\xi\{E_\eta\{V_k - \mu V_{k-1}\}\} \quad (3.151)$$

Así para ΔV_k , se obtiene (3.135).

De (3.149), s_k^2 es

$$s_k^2 = \tilde{\theta}_k^T \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k + 2E(z^{-1})\xi_k \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k + (E(z^{-1})\xi_k)^2 \quad (3.152)$$

Sustituyendo (3.152) en (3.135), se obtiene la siguiente relación

$$\Delta V_k = \frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1}\mu - \phi_{k-d}\phi_{k-d}^T)\tilde{\theta}_k + \quad (3.153)$$

$$\mu\tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \mu^{-1}\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_k + \mu^{-1}\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}^T E(z^{-1})\xi_k) +$$

$$\frac{1}{2}\mu(E(z^{-1})\xi_k)^2 - \frac{1}{2}\mu s_{k-1}^2 - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})\mu$$

El término

$$\frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T(\Gamma_k^{-1} - \mu\Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d}\phi_{k-d}^T)\tilde{\theta}_k \quad (3.154)$$

en (3.153) se hace cero al usar la ecuación recursiva (3.128), como fue demostrado en el Teorema 3.1.1 (al usar el Lema 3.1.4).

De(3.153), el término

$$\mu\tilde{\theta}_k^T\Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \mu^{-1}\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_k + \mu^{-1}\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}^TE(z^{-1})\xi_k) \quad (3.155)$$

es cero usando la ecuación (3.127), como se muestra a continuación. Usando (3.130),

$$\theta_k - \hat{\theta}_k - \theta_{k-1} + \hat{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T(\theta_k - \hat{\theta}_k)\mu^{-1} + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}^TE(z^{-1})\xi_k\mu^{-1} = 0 \quad (3.156)$$

www.bdigital.ula.ve

$$(\mu + \phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d})\hat{\theta}_k = \mu\theta_k - \mu\theta_{k-1} + (\mu + \phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d})\hat{\theta}_{k-1} + \quad (3.157)$$

$$\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}[\phi_{k-d}^T\theta_k + E(z^{-1})\xi_k - \phi_{k-d}^T\hat{\theta}_{k-1}]$$

De (3.89), s_k se reescribe como

$$s_k = \phi_{k-d}^T\theta_k - C(z^{-1})r_k + E(z^{-1})\xi_k \quad (3.158)$$

entonces

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \mu\theta_k - \mu\theta_{k-1} + \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}^T}{(\mu + \phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d})}[s_k + C(z^{-1})r_k - \phi_{k-d}\hat{\theta}_{k-1}] \quad (3.159)$$

Calculando la esperanza de (3.159) con respecto a η_k , se obtiene (3.127).

Sí las ecuaciones recursivas (3.127) y (3.128) son usadas en (3.153), entonces

$$E_\eta\{\Delta V_k\} = \frac{1}{2}\mu(E(z^{-1})\xi_k)^2 - \frac{1}{2}\mu s_{k-1}^2 - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})\mu \quad (3.160)$$

De (3.149), s_{k-1}^2 es

$$s_{k-1}^2 = \tilde{\theta}_{k-1}^T \phi_{k-d-1} \phi_{k-d-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} + 2E(z^{-1})\xi_{k-1} \phi_{k-d-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} + (E(z^{-1})\xi_{k-1})^2 \quad (3.161)$$

Sustituyendo (3.161) en (3.160), la siguiente ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} E_\eta\{\Delta V_k\} = & -\frac{1}{2}\mu(\tilde{\theta}_{k-1}^T \phi_{k-d-1} \phi_{k-d-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} + (E(z^{-1})\xi_{k-1})^2) - \\ & E(z^{-1})\xi_{k-1} \phi_{k-d-1}^T \tilde{\theta}_{k-1}\mu + \frac{1}{2}\mu(E(z^{-1})\xi_k)^2 - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})\mu \end{aligned} \quad (3.162)$$

Calculando la esperanza de (3.162) con respecto a la perturbación de ruido blanco ξ_k , entonces

$$E_\xi\{E_\eta\{\Delta V_k\}\} = -\frac{1}{2}\tilde{\theta}_{k-1}^T \phi_{k-d-1} \phi_{k-d-1}^T \tilde{\theta}_{k-1}\mu - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})\mu \quad (3.163)$$

Si las ecuaciones recursivas (3.127) y (3.128) son usadas en (3.153), entonces $E_\xi\{E_\eta\{\Delta V_k\}\} \leq 0$, lo que implica que la esperanza de s_k se hace cero y $\tilde{\theta}_k$ se hace constante mientras que k tiende a infinito.

Dado que el polinomio $Q(z^{-1})$ está diseñado para satisfacer el Lema 3.1.2, cuando s_k se hace cero mientras k tiende a infinito, entonces u_k , y_k y e_k son acotadas si la señal de referencia r_k es acotada. Así, la estabilidad del sistema global en lazo cerrado es asegurada al calcular la esperanza de dicho sistema en lazo cerrado respecto a η_k y respecto a ξ_k .

Para una señal de referencia constante $r_k = r_0$ cuando k tiende a infinito, la señal de salida y_k converge a la señal de referencia r_k en estado estacionario, por lo que la señal de error e_k tiende a cero, así y_k sigue a la referencia constante r_k .

Colorario 3.3.2.1: El vector de parámetros $\hat{\theta}_k$ no converge a θ_k . Cada elemento de $\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}$ converge a algún valor constante en el sentido de la esperanza con respecto a η_k y respecto a ξ_k .

Algoritmo 3.3.2.1: STC-GMVC-SMC-TV-ARX Recursivo para Sistemas Lineales

1. Dado el modelo de la planta variante en el tiempo con incertidumbre paramétrica y en presencia de perturbaciones del tipo ruido blanco (3.146).
2. Dadas las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1.1. y 3.3.1.1.
3. Calcular el modelo nominal de la planta, según la ecuaciones (3.15) y (3.16).
4. Dada la superficie deslizante definida como en (3.2).
5. Diseñar un polinomio $C(z^{-1})$ Schur.
6. Diseñar un polinomio $Q(z^{-1})$, tal que $E_\xi\{T^0(z^{-1})\}$ sea Schur.
7. Calcular los polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$, según la igualdad (3.7)
8. Calcular el polinomio $G(z^{-1})$, según (3.8).
9. Obtener la ley de control nominal u_k según (3.9).
10. Diseñar el valor de factor de olvido μ ($0 < \mu < 1$).
11. Obtener el algoritmo recursivo dado por (3.127) y (3.128), cada periodo de muestreo.
12. Obtener la ley de control auto-ajustable u_k según (3.22), cada periodo de muestreo.

Colorario 3.3.2.2: Sí el factor de olvido de $\mu = 1$, entonces el Algoritmo 3.3.1.1 es el mismo que en el Algoritmo 3.2.1.1.

3.3.3. Ejemplos

En esta parte se presentan algunos ejemplos académicos para mostrar el comportamiento de los algoritmos variantes en el tiempo presentados en esta Sección 3.3. Se consideran, tanto el caso cuando los parámetros varían de manera lenta respecto al tiempo como el caso cuando existe un cambio abrupto del modelo de la planta. Se considera además, en algunos casos, la presencia de perturbaciones del tipo de ruido blanco, definidas como en la Sección 3.2.

A manera general, se puede destacar que para todos los casos estudiados en esta sección se escoge como condición inicial de la matriz Γ a $\Gamma_0 = I$, y el factor de olvido como $\mu = 0,8$.

Ejemplo 1

Como primer ejemplo, se considera el modelo real de fase no mínima (3.164) con $d = 2$ (mismo modelo real (3.69) y nominal (3.70) considerado en la Sección 3.1.1),

$$(1 - 0,5z^{-1})y_k = z^{-d}(1 + 2,3z^{-1})u_k \quad (3.164)$$

cuyo modelo nominal es dado por (3.117)

$$(1 - 0,3z^{-1})y_k = z^{-d}(1 + 2z^{-1})u_k \quad (3.165)$$

El diseño de control nominal fue descrito en la Sección 3.1.1. Es decir, los polinomios $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ se escogieron como:

$$C(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + 0,25z^{-2} \quad (3.166)$$

$$Q(z^{-1}) = 40(1 - z^{-1}) \quad (3.167)$$

Usando la igualdad (3.7) y la definición del polinomio $G(z^{-1})$ (3.8), se obtienen los polinomios $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$ para el control nominal

$$F(z^{-1}) = 0,64 \quad (3.168)$$

$$G(z^{-1}) = 41 - 36,7z^{-1} + 2,6z^{-2} \quad (3.169)$$

Los polinomios $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$ del control nominal dan los valores iniciales para $\hat{F}(z^{-1})$ y $\hat{G}(z^{-1})$ del controlador auto-ajustable recursivo (3.22).

En este primer ejemplo, se estudia el caso cuando uno o varios parámetros del modelo real cambia abruptamente. Es decir, el modelo real dado en (3.164) cambia al siguiente modelo (3.170), después de un periodo de 100 muestras,

$$(1 - 0,7z^{-1})y_k = z^{-d}(1,2 + 2,6z^{-1})u_k \quad (3.170)$$

La Fig. 3.11 muestra la respuesta del sistema, y_k , cuando se usa el control GMVC-SMC (3.22), sin ningún algoritmo de auto-ajuste. Además se muestra el comportamiento de la salida, y_k , al usar el algoritmo recursivo STC-GMVC-SMC-TV. La referencia es una señal tipo escalón unitario.

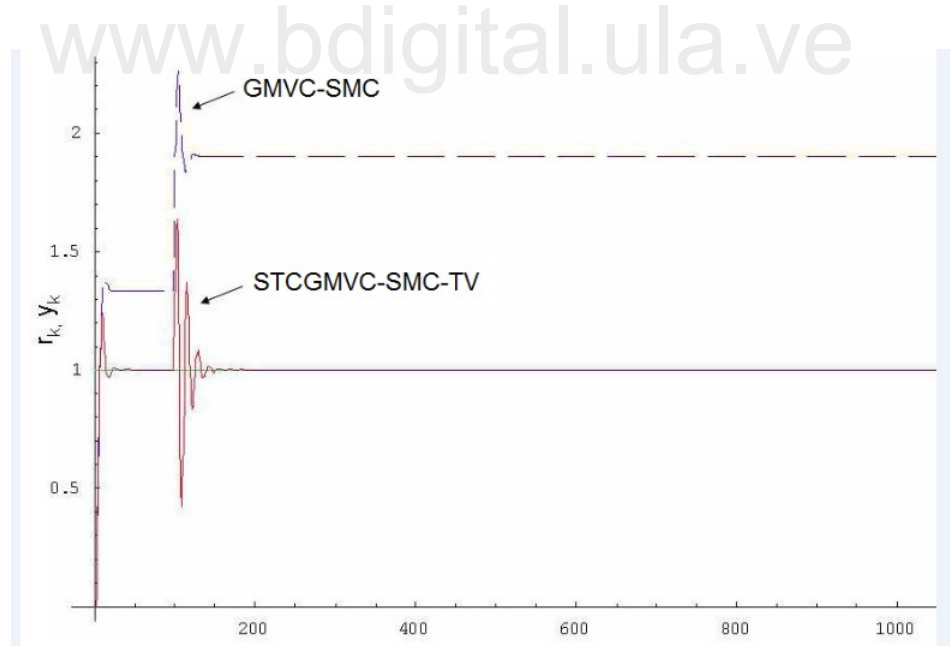


Figura 3.11: y_k vs. r_k : algoritmos GMVC-SMC (línea discontinua o a trozos) y STC-GMVC-SMC-TV (línea continua o sólida) aplicados al modelo (3.164), donde después de 100 muestras el modelo de la planta cambia abruptamente al modelo (3.170).

Ejemplo 2

El siguiente modelo variante en el tiempo con $d = 2$ es considerando como segundo ejemplo,

$$(1 - 0,56z^{-1})y_k = z^{-d}(b_{0_k} + b_{1_k}z^{-1} + b_{2_k}z^{-2})u_k \quad (3.171)$$

donde los parámetros b_{ik} ($i = 0, 1, 2$) cambian de manera continua pero lenta según las funciones,

$$b_{0_k} = 0,35 + 0,05 \sin\left[\frac{\pi}{40}(k - 2)\right]$$

$$b_{1_k} = 0,18 + 0,03 \sin\left[\frac{\pi}{40}(k - 3)\right]$$

$$b_{2_k} = 0,18 + 0,02 \sin\left[\frac{\pi}{40}(k - 4)\right]$$

En este caso, los límites superiores e inferiores que acotan los parámetros variantes en el tiempo se consideran como sigue,

$b_{0_k} \in [0,1, 0,4]$, $b_{1_k} \in [0,1, 0,3]$ y $b_{2_k} \in [0,1, 0,14]$. Así, el sistema nominal (necesario para calcular el control nominal) es (3.172):

$$(1 - 0,56z^{-1})y_k = z^{-d}(0,25 + 0,2z^{-1} + 0,12z^{-2})u_k \quad (3.172)$$

Para el diseño del controlador nominal, se escogen los siguientes polinomios de diseño,

$$C(z^{-1}) = 1 + 0,2z^{-1} \quad (3.173)$$

$$Q(z^{-1}) = 1(1 - z^{-1}) \quad (3.174)$$

con los que se obtienen los siguientes polinomios para la ley de control nominal,

$$F(z^{-1}) = 0,4256$$

$$G(z^{-1}) = 1,25 - 0,61z^{-1} + 0,272z^{-2} + 0,0912z^{-3}$$

Como en todos los casos, los polinomios $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$ del control nominal dan los

valores iniciales para $\hat{F}(z^{-1})$ y $\hat{G}(z^{-1})$ del controlador auto-ajustable recursivo (3.22).

La Fig. 3.12 presenta la respuesta del sistema real (3.171), cuando se usa el control nominal GMVC-SMC (línea discontinua o a trozos) y STC-GMVC-SMC-TV (línea continua o sólida).

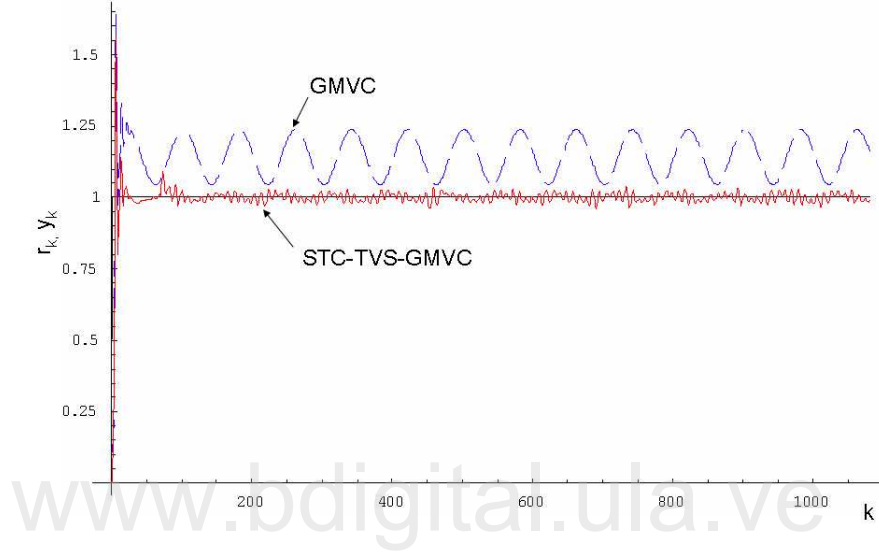


Figura 3.12: y_k vs. r_k : algoritmos GMVC-SMC (línea discontinua o a trozos) y STC-GMVC-SMC-TV (línea continua o sólida) aplicados al modelo (3.164).

Ejemplo 3

Primeramente, se considera el mismo modelo dado en (3.164) pero en este caso además está sujeto a la presencia de perturbaciones del tipo ruido blanco; es decir el modelo real es como sigue (3.175),

$$(1 - 0,5z^{-1})y_k = z^{-d}(1 + 2,3z^{-1})u_k + \xi_k \quad (3.175)$$

y el modelo nominal es como el dado en (3.70). Además, considere la situación en donde después de 100 muestras, el modelo (3.175) cambia abruptamente al modelo real (3.176),

$$(1 - 0,1z^{-1})y_k = z^{-d}(1,2 + 2,6z^{-1})u_k + \xi_k \quad (3.176)$$

En este caso, la señal de ruido blanco está definida como ξ_k , es una señal de ruido blanco, $\xi_k \sim N(0; 0,05)$. La Fig. 3.13 muestra la respuesta del sistema, cuando se aplica el Algoritmo 3.3.2.1.

En segundo lugar, el modelo dado en (3.171) se considera también sujeto a perturbaciones del tipo ruido blanco (3.177),

$$(1 - 0,56z^{-1})y_k = z^{-d}(b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})u_k + \xi_k \quad (3.177)$$

donde ξ_k es una señal Gaussiana de ruido blanco, $\xi_k \sim N(0; 0,05)$. En la Fig. 3.14 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado, cuando se aplica el Algoritmo 3.3.2.1 al sistema variante en el tiempo (3.177).

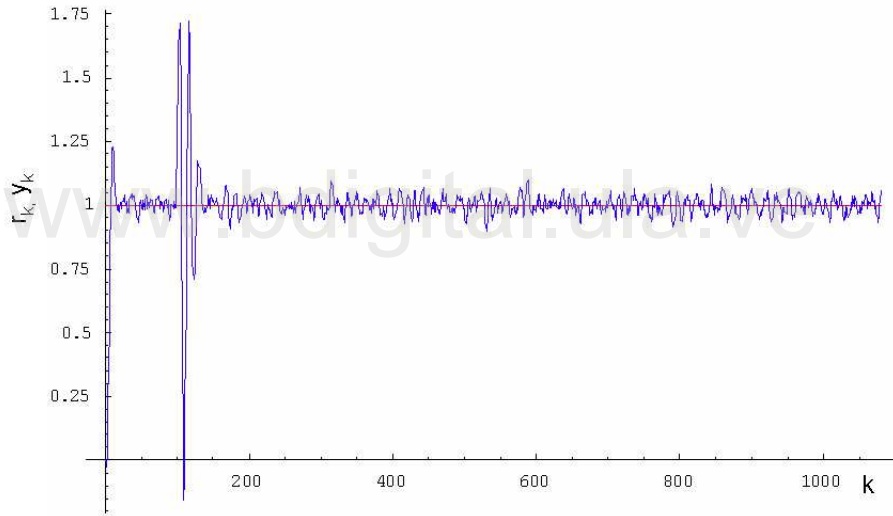


Figura 3.13: y_k vs. r_k : Algoritmo 3.3.2.1 aplicado al sistema en (3.175), cuando después de 100 muestras cambia a (3.176).

En todos los ejemplos estudiados en esta sección que al usar el algoritmo recursivo STC-GMVC-SMC-TV la señal de salida se auto-ajusta para seguir a la señal de referencia, a pesar de los cambios suaves y constantes o abruptos e infrecuentes, en el modelo del sistema. Incluso para el caso donde además existe la presencia de ruido blanco o perturbación, la señal de salida trata de seguir a la señal de referencia con la mínima varianza posible. Tal y como se presentó en la sección anterior, el algoritmo de control Algoritmo 3.3.2.1 no elimina el ruido o perturbación presente en el sistema.

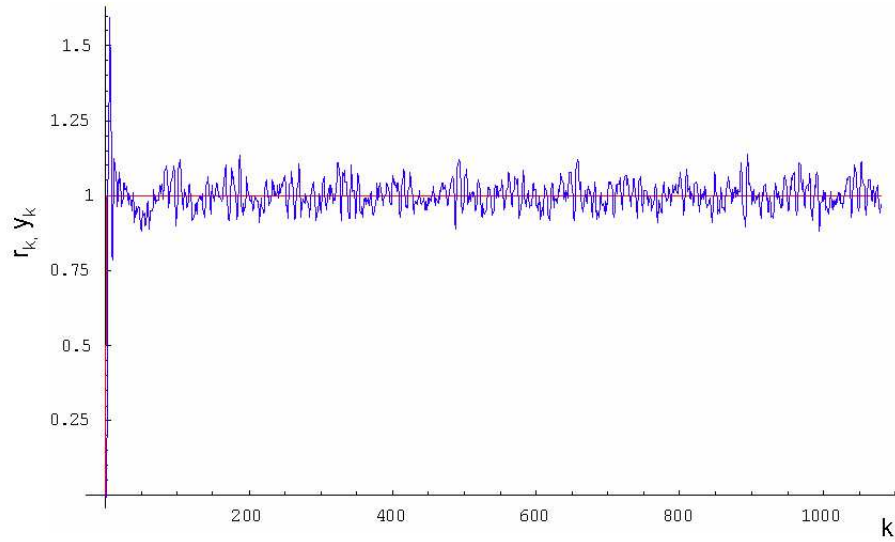


Figura 3.14: y_k vs. r_k : Algoritmo 3.3.2.1 aplicado al sistema variante en el tiempo (3.177).

3.4. Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC Genérico para Sistemas Lineales

Como un aporte adicional a la teoría presentada en este capítulo, se puede notar que todos los algoritmos recursivos discutidos a lo largo de este capítulo pueden estandarizarse y generalizarse para los diferentes tipos de sistemas lineales presentados.

El procedimiento de diseño en general, se puede expresar de la siguiente manera:

Procedimiento STC-GMVC-SMC Genérico para Sistemas Lineales:

Sea el modelo real del sistema lineal con incertidumbres paramétricas dado por (3.178):

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k \quad (3.178)$$

Sea la superficie deslizante definida como (3.179):

$$s_{k+d} = C(z^{-1})(y_{k+d} - r_{k+d}) + Q(z^{-1})u_k \quad (3.179)$$

Sea el algoritmo recursivo auto-ajutable dado por (3.180) y (3.181):

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}}{1 + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}} [s_k + C(z^{-1})r_k - \phi_{k-d}^T \hat{\theta}_{k-1}] \quad (3.180)$$

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1}}{1 + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}} \quad (3.181)$$

Sea la ley de control auto-ajutable (3.182):

$$u_k = -\hat{G}(z^{-1})^{-1}[\hat{F}(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d}] \quad (3.182)$$

donde,

$$\hat{F}(z^{-1}) = \hat{f}_0 + \hat{f}_1 z^{-1} + \dots + \hat{f}_{n-1} z^{-n+1}, \quad (3.183)$$

$$\hat{G}(z^{-1}) = \hat{g}_0 + \hat{g}_1 z^{-1} + \dots + \hat{g}_{m+d-1} z^{-(m+d-1)}, \quad (3.184)$$

$$\phi_k^T = [y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n+1}, u_k, \dots, u_{k-m-d+1}], \quad (3.185)$$

$$\theta^T = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, g_0, \dots, g_{m+d-1}], \quad (3.186)$$

$$\hat{\theta}_k^T = [\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}, \hat{g}_0, \dots, \hat{g}_{m+d-1}]. \quad (3.187)$$

Se tiene que, para el caso del modelo real del sistema lineal con incertidumbres paramétricas y sujeto a presencia de perturbaciones del tipo ruido blanco, el modelo real es descrito por (3.188):

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + \xi_k \quad (3.188)$$

donde ξ_k representa la variable o señal de perturbación (ruido blanco). La señal ξ_k es una variable aleatoria de media cero y varianza definida por un valor real constante y acotado.

Para el caso del modelo real del sistema lineal variante en el tiempo, se considera

que el modelo para los parámetros del controlador es definido como (3.189):

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \eta_k \quad (3.189)$$

donde η_k es una señal variante de media cero. En este caso, se introduce un factor de olvido dentro de las ecuaciones recursivas del controlador auto-ajustable (3.190) y (3.190):

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}}{\mu + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}} [s_k + C(z^{-1})r_k - \phi_{k-d}^T \hat{\theta}_{k-1}], \quad (3.190)$$

$$\Gamma_k = \frac{1}{\mu} \left(\Gamma_{k-1} - \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1}}{\mu + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}} \right) \quad (3.191)$$

donde $0 < \mu < 1$.

Por lo tanto, en general el algoritmo de control auto-ajustable puede ser descrito por las ecuaciones (3.190) y (3.190), donde el parámetro $\mu = 1$ se define como: $\mu = 1$ para el caso invariante en el tiempo, y $0 < \mu < 1$ para el caso variante en el tiempo.

Las ecuaciones auto-ajustables (3.190) y (3.190) pueden ser aplicadas para todos los casos de sistemas lineales descritos en este capítulo. Es decir, para sistemas lineales, SISO, con o sin perturbaciones del tipo ruido blanco, sean variantes o invariantes en el tiempo. En general el teorema puede ser anunciado como:

Teorema 3.4.1: STC-GMVC-SMC Genérico para Sistemas Lineales.

Dada una matriz definida positiva Γ_0 , el valor del factor de olvido μ ($0 < \mu \leq 1$) y el vector de parámetros inicial $\hat{\theta}_0$. Si la estimación $\hat{\theta}_k$ del controlador (3.22) satisface las ecuaciones recursivas (3.190) y (3.190), bajo las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1.1 y 3.3.1.1, para el modelo real, entonces el sistema en lazo cerrado es estable, y la señal de salida seguirá a la señal de referencia en estado estacionario, al calcular la esperanza de dicho sistema en lazo cerrado respecto a η_k y respecto a ξ_k .

Lema 3.4.1: $\hat{\theta}_0$ puede ser inicializado por los parámetros del controlador nominal calculados con $G(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$.

Colorario 3.4.1: El vector de parámetros $\hat{\theta}_k$ no converge a θ_k . Cada elemento de $\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}$ converge a algún valor constante en el sentido de la esperanza con respecto a η_k y respecto a ξ_k .

Algoritmo 3.4.1: STC-GMVC-SMC Genérico para Sistemas Lineales

1. Dado el modelo real de la planta (cualquiera de los propuestos anteriormente).
2. Dadas las Condiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1.1., 3.2.2.1 y 3.3.1.1.
3. Calcular el modelo nominal de la planta, según la ecuaciones (3.15) y (3.16).
4. Dada la superficie deslizante definida como en (3.2).
5. Diseñar un polinomio $C(z^{-1})$ Schur.
6. Diseñar un polinomio $Q(z^{-1})$, tal que $E_\xi\{T^0(z^{-1})\}$ sea Schur.
7. Calcular los polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$, según la igualdad (3.7)
8. Calcular el polinomio $G(z^{-1})$, según (3.8).
9. Obtener la ley de control nominal u_k según (3.9).
10. Diseñar el valor de factor de olvido μ , según sea el caso: μ ($0 < \mu < 1$) o $\mu = 1$.
11. Obtener el algoritmo recursivo dado por (3.190) y (3.190), cada periodo de muestreo.
12. Obtener la ley de control auto-ajutable u_k según (3.22), cada periodo de muestreo.

3.4.1. Análisis del Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC Genérico para Sistemas Lineales

En esta sección se presentan los análisis referentes a las ventajas y desventajas, desempeño, y limitantes del nuevo controlador auto-ajutable basado en mínima

varianza generalizada.

La teoría expuesta en la Sección 3.1 es basada en la publicación Patete et al. (2008c), la cual marca el inicio de la nueva propuesta de control auto-ajustable presentada. Esta publicación centra su análisis en argumentar la demostración del nuevo teorema para garantizar la estabilidad global del sistema en lazo cerrado y además garantizar el seguimiento de trayectoria, al usar el control auto-ajustable propuesto.

En base a lo publicado en Patete et al. (2008c), se reformula el Teorema 3.1.1, y se presenta su respectiva demostración. Cabe destacar que no es de interés en este documento el analizar la demostración matemática del teorema, debido a que esta primera etapa de recopilación y consolidación de los fundamentos teóricos para este nuevo diseño de control auto-ajustable es enfocada a estudiantes de pre-grado.

En la publicación Patete et al. (2008b) se consiguen las ideas básicas para el desarrollo de la teoría presentada en la Sección 3.2. El planteamiento del teorema y su respectiva demostración son simplemente una extensión del caso libre de perturbación de la Sección 3.1. Donde el aporte de la publicación Patete et al. (2008b) está basado en el cálculo de la esperanza respecto al ruido blanco para lograr establecer la demostración matemática.

Es de hacer notar una vez más que en el caso de los modelos con presencia de ruido blanco, el control auto-ajustable no atenúa o elimina la señal de ruido blanco. Ésta permanece al medir la señal de salida, sin embargo para el planteamiento de esta nueva ley de control auto-ajustable, el control garantiza la mínima varianza que se puede lograr.

Al considerar un tipo de modelos un poco más acorde con la motivación del surgimiento de las leyes de control adaptativas o auto-ajustables, como lo son los modelos lineales variantes en el tiempo, la teoría presentada se basa en las publicaciones presentadas en Patete et al. (2007) y Patete and Furuta (2011). Este algoritmo de diseño también es una extensión del algoritmo presentado en la Sección 3.1. Donde el

aporte se basa en la inclusión de un factor de olvido (o factor de peso o ponderación) que hace que los datos más recientes tengan mayor peso que los datos anteriores o pasados.

El planteamiento de los conceptos fundamentales, los teoremas y las demostraciones de los teoremas para cada caso, se realiza de manera análoga a la primera demostración para el caso lineal invariante en el tiempo y libre de perturbaciones.

Al analizar los tres algoritmos principales se observa que tienen una estructura similar y que pueden ser generalizados para todos los casos presentados. Siendo otro aporte en este trabajo el presentar un procedimiento genérico para los sistemas lineales STC-GMVC-SMC, y su respectivo algoritmo de diseño.

En cuanto a los ejemplos académicos presentados, se trató, en la medida de lo posible, considerar el mismo ejemplo académico para todos los casos estudiados; a manera de poder realizar comparaciones entre los mismo y observar los diferentes comportamientos según el tipo de modelo.

En cuanto a las ventajas que posee este nuevo diseño de control auto-ajustable se pueden destacar que primeramente es un algoritmo sencillo de aplicar, que funciona para sistemas lineales, invariantes o variantes en el tiempo, y que pueden estar sujetos a la presencia de ruido blanco. Es un algoritmo que garantiza la estabilidad global del sistema en lazo cerrado, bajo ciertas condiciones. Y que además es un algoritmo que se puede usar para resolver los problemas de seguimiento de trayectoria, ya que la señal de salida siempre tiende a seguir la señal de referencia.

Una de las principales desventajas radica en que el modelo debe estar dado (o debe reescribirse) en tiempo discreto y de una forma o estructura predeterminada. Siendo esto además una limitante al tratar con modelos muy complejos, donde no sea posible llevar el modelo a la estructura exigida.

Otra característica del controlador, que pudiera considerarse una desventaja, es que para el caso de estimación de parámetros donde sea de interés el conocimiento

de sus valores verdaderos o reales este algoritmo de estimación de los parámetros del controlador no garantiza que los mismos converjan a sus valores reales, sino que convergen a ciertos valores constantes que se consideran los óptimos.

Debido a que este tipo de controladores se auto-ajustan cada periodo de muestreo en base al error entre la referencia y la señal de salida, no es posible diseñar el comportamiento en lazo cerrado en base a características de diseño común, como lo son el sobre disparo, tiempo de asentamiento, etc. Es por esta razón que el análisis del comportamiento en estado transitorio se limita a asegurar que la señal de salida permanezca acotada y cumpla con el objetivo de seguir a la señal de referencia en estado estacionario.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 4

Conclusiones y Recomendaciones

En este capítulo se sintetizan los resultados del trabajo realizado, una vez recopilada la información, analizada y redactada de manera tal que sea acorde con el nivel de un estudiante de pre-grado. De igual manera se presentan algunas recomendaciones para trabajos futuros.

4.1. Conclusiones

Se recopiló, estudió y analizó la nueva teoría propuesta, presentada a través de publicaciones en artículos de revistas indexadas o en conferencias internacionales, para un nuevo diseño de control, el cual se define como algoritmo de diseño *Self-Tuning Control based on Generalized Minimum Variance Criterium under the Sliding Mode Concept* (STC-GMVC-SMC) para Sistemas Lineales, con la finalidad de dar forma conceptual y plantear los fundamentos teóricos que la soportan.

Se redactaron los conceptos, definiciones, teoremas, ejemplos, etc., de tal manera de que fuese acorde con el nivel de conocimiento y capacidad de entendimiento y análisis de los estudiantes de pre-grado. El cómo medir este nivel se basó en la profundidad conceptual presentada en las referencias comúnmente usada por estos estudiantes.

El Capítulo 3 comienza con la definición de los fundamentos teóricos para el caso de los sistemas lineales invariantes en el tiempo y libres de perturbaciones, basándose en la publicación científica que dio origen a toda la nueva teoría del algoritmo de

control auto-ajustable.

Debido a que se consideró que la comprensión y análisis de la demostración del Teorema 3.1.1 es de un nivel académico más profundo al de pre-grado (se considera un nivel adecuado para estudiantes de maestría en el área de sistemas de control), dicha demostración se presentó solo como soporte matemático al teorema y se analiza la misma de manera cualitativa, sin profundizar en los argumentos matemáticos utilizados en la demostración. Sin embargo, considerando la posibilidad de su estudio a nivel de pre-grado se incluyeron algunos Lemma que dan mayor soporte a la explicación del cómo se deduce matemáticamente la demostración del teorema presentado. Y se presentaron algunos Colorarios que dan mayor soporte cualitativo a la demostración matemática.

Las teorías fundamentales presentadas en la Sección 3.1 fueron extendidas de manera análoga a los casos en los cuales el sistema lineal está sujeto a la presencia de ruido blanco (Sección 3.2), tanto para los modelos ARX como los modelos CARMA. Igualmente para el caso de los sistemas lineales variantes en el tiempo (Sección 3.3), en los casos donde los parámetros del modelo varían de manera lenta y suave o el caso donde el modelo del sistema cambia de forma abrupta pero infrecuente.

Basados en los fundamentos teóricos desarrollados y analizados para los diferentes casos, se logró estandarizar la teoría fundamental presentada en un solo teorema y algoritmo genérico (Sección 3.4), el cual funciona para todos los diferentes casos de sistemas lineales considerados en este proyecto.

Se presentó un análisis cualitativo del algoritmo de diseño STC-GMVC-SMC Genérico para Sistemas Lineales (Sección 3.4.1), donde se mostraron las ventajas y desventajas de la nueva clase de controladores auto-ajustables, así como también las limitantes de dicho algoritmo.

Se presentaron ejemplos académicos para los diferentes casos de nuevos algoritmos estudiados, y se realizó el análisis cualitativo correspondiente en base a las simulaciones obtenidas. Los ejemplos presentados son sencillos y tratan de mantener la misma

estructura, de tal manera de que el estudiante puede entenderlos fácilmente y pueda identificar qué cambios ocurren en cada caso analizado.

Por lo tanto, se puede concluir que, este Proyecto de Grado consolida toda la teoría, presentada a través de diferentes publicaciones científicas hasta la presente fecha, sobre el algoritmo de diseño, en este proyecto denominado: *Self-Tuning Control based on Generalized Minimum Variance Criterium under the Sliding Mode Concept* (STC-GMVC-SMC) para Sistemas Lineales, de una manera más explicativa y detallada. Junto con un conjunto de conceptos y fundamentos teóricos básicos para su mejor entendimiento. Donde se definen paso a paso los algoritmos de diseño de control de una manera estandarizada y generalizada.

Se considera este Proyecto de Grado como material fundamental básico para iniciarse en el estudio del nuevo algoritmo de control auto-ajustable STC-GMVC-SMC para Sistemas Lineales. Estudio que puede ser profundizado y complementado con los aportes presentados en las diferentes publicaciones científicas anteriormente mencionadas.

Se espera que con la ayuda de este Proyecto de Grado, los estudiantes de pregrado, con formación en sistemas de control, se familiaricen con diferentes técnicas de control avanzado, conozcan las ventajas y desventajas de este nuevo algoritmo STC-GMVC-SMC para Sistemas Lineales y aprendan a usar y analizar los diferentes algoritmos presentados.

Se considera este Proyecto de Grado como un primer paso, y como material fundamental básico, en miras de en un futuro desarrollar un libro texto sobre el nuevo algoritmo de control auto-ajustable STC-GMVC-SMC para Sistemas Lineales que incluya muchos más ejemplos, ejercicios propuestos, simulaciones, discusiones, ejemplos de implementaciones reales, entre otros.

4.2. Recomendaciones

Entre las recomendaciones para trabajos futuros en esta área podemos destacar las siguientes:

- Impartir este nuevo diseño de controladores auto-ajustables, Algoritmo de Diseño STC-GMVC-SMC para Sistemas Lineales, a estudiantes de pre-grado en el área de Sistemas de Control, Escuela de Ingeniería de Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes.
- Complementar los fundamentos teóricos presentados en el Proyecto de Grado con ejemplos de aplicaciones reales, tales como los publicados en [Saitoh and Furut \(2007\)](#) y [Furuta et al. \(2011\)](#).
- Extender los fundamentos teóricos presentados al caso de sistemas no lineales. Al menos a algunos casos particulares o clases de sistemas no lineales, basándose en este Proyecto de Grado y las publicaciones que se encuentran en la literatura: ([Patete et al., 2008a](#)), ([Patete et al., 2011](#)), ([Patete et al., 2017b](#)) y ([Patete et al., 2017a](#)).
- Considerar la inclusión del caso de sistemas multivariables para sistemas lineales, basándose en las publicaciones científicas dadas por [Sugiki et al. \(2008\)](#), [Furuta et al. \(2011\)](#) y [Ohata et al. \(2014\)](#).
- Una vez extendidos los fundamentos teóricos a algunos casos de sistemas no lineales, impartir el conocimiento del mismo a nivel de pre-grado en la electiva de Sistemas No Lineales, del Plan de Formación de los estudiantes de pre-grado en el área de Sistemas de Control, Escuela de Ingeniería de Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes.
- Impartir este tipo de diseño de controladores, tanto lineales como no lineales a nivel de estudiantes de maestría, incluyendo el análisis matemático de las demostraciones de los diferentes teoremas.
- En este proyecto, y en las publicaciones científicas encontradas, en el modelo CARMA el polinomio $D^0(z^{-1})$ es conocido con precisión (o se asume conocido). Sería interesante realizar el estudio y la deducción del teorema y algoritmo para

el caso donde también exista incertidumbre paramétrica en el polinomio $D^0(z^{-1})$, como un nuevo aporte a esta línea de investigación.

www.bdigital.ula.ve

C.C. Reconocimiento

Bibliografía

- Asami, F. and Mori, Y. (2004). A study of generalized minimum variance control for continuous-time system with time delay. *SICE Annual Conference*, pages 1344–1348.
- Astrom, K. J. and Wittenmark, B. (1973). A study of generalized minimum variance control for continuous-time system with time delay. *Automatica*, 9:185–199.
- Astrom, K. J. and Wittenmark, B. (1995). *Adaptive control*. Addison-Wesley, USA, 2nd edition.
- Chang, A. and Rissanen, J. (1969). Regulation of incompletely identified linear system. *SIAM J. Control*, 6(3):327–348.
- Clarke, D. W., Phi, I. D., and Gawthrop, P. (1975). Self-tuning controller. *IEE Proceedings*, 22(9):929–934.
- Furuta, K. (1988). *State variable methods in automatic control*. John Wiley and Sons, Tokyo.
- Furuta, K. (1990). Sliding mode control of a discrete system. *Systems and Control Letters*, 14:145–152.
- Furuta, K. (1993a). Vss type self-tuning control. *IEEE Transaction Industrial Electronics*, 40(4):37–44.
- Furuta, K. (1993b). Vss type self-tuning control-beta equivalent control approach. In *proceedings of the American control conference (ACC), San Francisco, USA.*, pages 980–984.

- Furuta, K., Kosuge, K., and Kobayashi, H. (1988). Vss type self-tuning control-beta equivalent control approach. In *proceedings of International Industrial Electronics Conference (IECON), Singapore.*, pages 459–465.
- Furuta, K., Ohata, A., and Sugiki, A. (2011). Self-tuning control based on discrete-time sliding mode with applications. In *proceedings of the 18th IFAC World Congress, Italy*, pages 774–779.
- Golub, G. H. and Van Loan, C. F. (1996). *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, 3rd edition.
- Isermann, R. (2003). *Digital control systems*. Springer-Verlag, 4a edition.
- Kalman, R. E. (1958). Design of a self-optimizing control system. *Transactions of the ASME*, 80(2):468–478.
- Landau, I. D. (1974). A survey of model reference adaptive techniques - theory and applications. *Automatica*, 10:353–379.
- Misawa, E. A. (1997). Discrete-time sliding mode control: the linear case. *ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control*, 119(4):819–821.
- Mitic, D. and Vukovic, P. D. (2004). Sliding mode based minimum variance control and generalized minimum variance controls with $o(t^2)$ and $o(t^3)$ accuracy,. *Electrical Engineering*, pages 229–239.
- Monopoli, R. V. (1974). Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19:474–482.
- Ogata, K. (1995). *Discrete-time control systems*. Prentice-Hall, USA, 2nd edition.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Prentice-Hall, Madrid, 4a edition.
- Ohata, A., Sugiki, A., and Furuta, K. (2014). Self-tuning control based on discrete sliding mode. *Mechanical Engineering and Automation*, 1:367–372.
- Parks, P. C. (1966). Liapunov redesign of model reference adaptive control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11:362–367.

- Patete, A. and Furuta, K. (2011). Stability of implicit self-tuning controllers for a class of time-varying systems based on lyapunov function. *Revista Técnica de Ingeniería*, 34(2):148–155.
- Patete, A., Furuta, K., and Rios, M. (2008a). Self-tuning control of bilinear systems based on generalized minimum variance criterion. In *proceedings of the XIII CLCA y VI CAC, Venezuela*, pages 557–562.
- Patete, A., Furuta, K., and Tomizuka, M. (2007). Self-tuning control of time-varying systems based on generalized minimum variance criterion. In *In proceedings of the IEEE SICE Annual International Conference on Instrumentation, Control and Information Technology, Japan*, pages 2563–2568.
- Patete, A., Furuta, K., and Tomizuka, M. (2008b). Self-tuning control based on generalized minimum variance criterion for auto regressive models. *Automatica*, 44(8):1970–1975.
- Patete, A., Furuta, K., and Tomizuka, M. (2008c). Stability of self-tuning control based on lyapunov function. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 22(8):795–810.
- Patete, A., Rios, M., Gomez, C., and Furuta, K. (2010). Stability of a self-tuning control for an extended class of bilinear systems. In *proceedings of the XIV CLCA 2010 y XIX ACCA 2010, Chile*.
- Patete, A., Rios, M., Gomez, C., and Furuta, K. (2011). Self-tuning control for a class of bilinear systems. *Revista de Ingeniería*, 33:7–13.
- Patete, A., Rios, M., Gomez, C., and Furuta, K. (2014). Self-tuning control for an extended class of bilinear systems, case of study: nuclear fission model. *Revista Ciencia e Ingeniería*, 35:13–22.
- Patete, A., Velasco, M., and Furuta, K. (2017a). Implicit self-tuning control for a class of nonlinear systems. *Revista Ciencia e Ingeniería*, 38(2):131–140.
- Patete, A., Velasco, M., and Furuta, K. (2017b). Nonlinear implicit self-tuning control applied to a slider-crank mechanism. *Revista Ciencia e Ingeniería*, 38(1):41–52.

- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., and Vetterling, W. T. (1992). Numerical recipes in c: The art of scientific computing. *Technical report, Cambridge University*.
- Rodríguez, D. and Bordóns, C. (2005). Apuntes de ingeniería de control. *Apuntes, Universidad de Sevilla*.
- Saitoh, M. and Furut, a. K. (2007). Generalized minimum variance control of slider-crank mechanism. *SICE Annual Conference, Takamatsu, Japan*.
- San Martin, P. (2005). Diseño e implementación de un sistema de control por modo deslizante usando dsp aplicado a un prototipo de grúa puente. *Universidad Nacional de Ingeniería, Perú*.
- Slotine, J. E. and Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. Prentice Hall.
- Sugiki, A., Ohata, A., Patete, A., and Furuta, K. (2008). Design of a multivariable implicit self-tuning controller. In *proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Mexico*.
- Whitaker, H. P., Yamron, J., and A., K. (1958). Design of model reference adaptive control systems for aircraft. *Institute of Technology, Cambridge, Massachesetts*.
- Young, P. C. (1965). The determination of the parameters of a dynamic process. *Radio Electronics Engineering*, 29(6):345–361.