Divulgaciones Matemáticas Vol. 17 No. 1 (2016), pp. 1–13

Aproximación de operadores no lineales por polinomiales de Volterra-Stieltjes

Approximation of nonlinear operators by Volterra-Stieltjes polynomials

Nelson Viloria (nelson@ula.ve)
Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias. Universidad de Los Andes.
Mérida - Venezuela.

Resumen

Establecemos una aproximación (tipo Weierstrass) para operadores definidos sobre el espacio de funciones regladas, $G[a,b]$, vía la representación integral (tipo Riesz) de operadores no lineales.

Palabras y frases clave: operadores no lineales, operadores polinomiales, aproximación,Weierstrass, funciones regladas, integral de Dushnik.

Abstract

We establish a Weierstrass approximation for operators defined in the space of regulated functions, $G[a,b]$, via Riesz integral representation of nonlinear operators.

Key words and phrases: nonlinear operators, polynomials operators, approximation, Weierstrass, regulated functions, Dushnik integral.

1 Introducción

La aproximación de operadores (funcionales) no lineales por operadores (funcionales) polinomiales, es decir, los Teoremas de Weierstrass en espacios de Banach, fue obtenida por Istratescu [5]. Posteriormente, Baesler-Dauvaget [2] tratarón el problema análogo donde los espacios de Banach son espacios de funciones ($C[a,b]$ y $L_p[a,b]$) y los operadores polinomiales son sumas parciales de series de Volterra.

En este trabajo, mostraremos dos resultados: primero, que todo funcional continuo, definido sobre un subconjunto compacto de funciones regladas por la izquierda, es aproximable por funcionales polinomiales de Volterra-Stieltjes. Y luego, que todo operador continuo, definido sobre un subconjunto compacto de funciones regladas por la izquierda, es aproximable por operadores polinomiales de Volterra-Stieltjes. En ambos casos, procedemos vía la representación integral (tipo Riesz) de operadores y funcionales no lineales. Con ese propósito fue necesario generalizar, al caso multilineal, las reprentaciones integrales realizadas por Hönig [4], caso lineal, y Prandini [6], caso bilineal.

Recibido 1/2011. Revisado 2/2011. Aceptado 4/2011.
MSC (2010): Primary 47H60; Secondary 41A65.
Autor de corresondencia: Nelson Viloria

2 Funciones Regladas

Consideremos $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y X, W espacios de Banach.

Definición. *$x : [a,b] \to X$ es una **función reglada** si x solo tiene discontinuidades de primera especie, esto es, si*

i) Para todo $t \in [a,b)$ existe $x(t^+) = \lim\limits_{\epsilon \downarrow 0} x(t+\epsilon)$,

ii) Para todo $t \in (a,b]$ existe $x(t^-) = \lim\limits_{\epsilon \downarrow 0} x(t-\epsilon)$.

Por $G([a,b],X)$ designamos el espacio de Banach de las funciones regladas de $[a,b]$ en X, considerado con la norma del supremo.

Es directo de la definición que toda función continua es reglada. Otros espacios de funciones de uso frecuente (de variación acotada, monótonas, Lipschitz, absolutamente continuas, Darboux, con primitiva, etc.) están estrechamente relacionadas con el espacio de las funciones regladas.

Definición. *$x : [a,b] \to X$ es una **función reglada por la izquierda** si*

i) $x(a) = 0$,

ii) $x(t^-) = x(t)$, para todo $t \in (a,b]$.

El espacio de las funciones regladas por la izquierda, $G^-([a,b],X)$, es un sub-espacio cerrado de $G([a,b],X)$.

Definición. *$x : [a,b] \to L(W,X)$ es una **función simplemente reglada** si, para todo $w \in W$, la función*

$$\begin{aligned} x \cdot w : [a,b] &\longrightarrow X \\ t \quad &\longmapsto x(t)w, \ \ \textit{es reglada.} \end{aligned}$$

En Arbex [1] se muestra que el espacio de las funciones regladas, $G([a,b],L(W,X))$, está contenido en el de las simplemente regladas, $G^\sigma([a,b],L(W,X))$, y son iguales si, y solo si, W es de dimensión finita.

3 Funciones de semivariación acotada

Consideremos $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots,[a_m,b_m] \subset \mathbb{R}$ y $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y, Z$ espacios de Banach.

Definición. *Una **partición de un m-bloque**, $\prod\limits_{r=1}^{m}[a_r,b_r] \subset \mathbb{R}^m$, es un conjunto finito del tipo $P = \prod\limits_{r=1}^{m} P_r$, con P_r una partición de $[a_r,b_r]$, donde los puntos de esta verifican que $a_r = t_{o(r)} < \ldots < t_{n(r)} = b_r$. Hacemos $n(P) = \prod\limits_{r=1}^{m} n(r)$ y $|P| = \prod\limits_{r=1}^{m} |P_r|$, con $|P_r|$ la norma de la partición P_r. Denotamos por $\mathbb{P}\left(\prod\limits_{r=1}^{m}[a_r,b_r]\right)$ al conjunto de todas las particiones del m-bloque.*

Definición. *Sean* $z : \prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r] \longrightarrow Z$ *y* $P = \prod_{r=1}^{m} P_r$, *con* $P \in \mathbb{P}\Big(\prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r]\Big)$ *y* $a_r = t_{o(r)} < \ldots < t_{n(r)} = b_r$. *Fijando* r, *consideramos un entero positivo* $i(r)$ *con* $1 \leq i(r) \leq n(r)$ *y definimos:*
Para $m = 1$,

$$\Delta_i z = z(t_i) - z(t_{i-1}) \in Z.$$

Para $m \geq 2$,

$$\Delta_{i(r)} z : \prod_{j=1}^{r-1}[a_j, b_j] \times \prod_{j=r+1}^{m}[a_j, b_j] \longrightarrow Z$$

por

$$(\Delta_{i(r)} z)(s_1, \ldots, s_{r-1}, s_{r+1}, \ldots, s_m) =$$
$$z(s_1, \ldots, s_{r-1}, t_{i(r)}, s_{r+1}, \ldots, s_m) - z(s_1, \ldots, s_{r-1}, t_{i(r)-1}, s_{r+1}, \ldots, s_m)$$

Considerando q, $1 \leq q \leq m$, *podemos calcular*

$$\Delta_{i(1)}(\Delta_{i(2)}(\ldots \Delta_{i(q)} z) \ldots)(s_{q+1}, \ldots, s_m)$$

al que denotamos por

$$\Delta_{i(1)} \Delta_{i(2)} \ldots \Delta_{i(q)} z.$$

Definición. *Un operador* $\Lambda : \prod_{r=1}^{m} X_r \longrightarrow Y$ *es* m-***lineal*** *o* ***multilineal*** *si es lineal en cada variable. Escribimos* $\Lambda \in L(X_1, \ldots, X_m; Y)$ *si* Λ *es* m*-lineal y continuo (i.e., existe* $M \geq 0$ *tal que* $||\Lambda(x_1, \ldots, x_m)|| \leq M||x_1|| \cdots ||x_m||$*).*

Definición. *Sea* $K : \prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r] \longrightarrow Z$. *La* ***variación Vitali*** *de* K *en* $\prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r]$ *está dada por*

$$V[K] = \sup_P V_P[K],$$

donde

$$V_P[K] = \sum_{i(1),\ldots,i(m)}^{n(P)} \big||\Delta_{i(1)} \ldots \Delta_{i(m)} K\big||, P \in \mathbb{P}\Big(\prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r]\Big).$$

Si $V[K] < \infty$, *diremos que* K *es de* ***variación acotada*** *en* $\prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r]$ *y escribimos*

$$K \in BV\Big(\prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r], Z\Big).$$

Definición. *Sea* $K : \prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r] \longrightarrow L(X, Y)$. *La* ***semivariación de Vitali*** *de* K *en* $\prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r]$ *está dada por*

$$SV[K] = \sup_{P} SV_{_P}[K],$$

donde

$$SV_{_P}[K] = \sup_{||x_{i(1)\dots i(m)}||\leq 1} \left\{ \left|\left| \sum_{i(1),\dots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K(x_{i(1)\dots i(m)}) \right|\right| : x_{i(1)\dots i(m)} \in X \right\}.$$

*Si $SV[K] < \infty$, diremos que K es de **semivariación de Vitali acotada** y escribimos*

$$K \in SV\bigg(\prod_{r=1}^{m} [a_r, b_r], L(X,Y) \bigg).$$

Teorema 1. $BV\bigg(\prod_{r=1}^{m} [a_r, b_r], L(X,Y) \bigg) \subset SV\bigg(\prod_{r=1}^{m} [a_r, b_r], L(X,Y) \bigg)$. *Además, si* $K \in BV\bigg(\prod_{r=1}^{m} [a_r, b_r], L(X,Y) \bigg)$, *entonces* $SV[K] \leq V[K]$.

Demostración. Dados $K \in BV\bigg(\prod_{r=1}^{m} [a_r, b_r], L(X,Y) \bigg)$, $P \in \mathbb{P}\bigg(\prod_{r=1}^{m} [a_r, b_r] \bigg)$ y $x_{i(1)\dots i(m)} \in X$, $1 \leq i(r) \leq n(P_r)$, $r = 1, \dots, m$, tales que $||x_{i(1)\dots i(m)}|| \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\left| \sum_{i(1),\dots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K(x_{i(1)\dots i(m)}) \right|\right| &\leq \sum_{i(1),\dots,i(m)}^{n(P)} ||\Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K|| \\ &\leq V[K]. \end{aligned}$$

Luego, $SV[K] \leq V[K]$. □

Definición. *Sea* $K : \prod_{r=1}^{m} [a_r, b_r] \longrightarrow L(X_1, \dots, X_m; Y)$. *La **semivariación de Fréchet** de K en* $\prod_{r=1}^{m} [a_r, b_r]$ *está dada por*

$$SF[K] = \sup_{P} SF_{_P}[K],$$

donde

$$SF_{_P}[K] = \sup_{||x_{i(r)}||\leq 1} \left\{ \left|\left| \sum_{i(1),\dots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K(x_{i(1)}, \dots, x_{i(m)}) \right|\right| : x_{i(r)} \in X_r \right\}.$$

*Si $SF[K] < \infty$, diremos que K es de **semivariación de Fréchet acotada** y escribimos*

$$K \in SF\bigg(\prod_{r=1}^{m} [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y) \bigg).$$

De forma análoga al teorema anterior se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2. $BV\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r], L(X_1,\ldots,X_m;Y)\right) \subset SF\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r], L(X_1,\ldots,X_m;Y)\right)$. *Además, si* $K \in BV\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r], L(X_1,\ldots,X_m;Y)\right)$, *entonces* $SF[K] \leq V[K]$.

4 Integral de Dushnik

Definición. *Sean* $e, (e_P)_{P\in\mathbb{P}}$ *puntos de un espacio topológico* E. *Escribimos* $e = \lim_{P\in\mathbb{P}} e_P$ *cuando, para toda vecindad* V *de* e, *existe* $P_V \in \mathbb{P}$ *tal que*

$$P \geq P_V \Rightarrow e_P \in V.$$

Definición. *Sean* $K : \prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r] \to L(X_1,\ldots,X_m;Y)$ *y* $x_r : [a_r,b_r] \to X_r; r = 1,\ldots,m$. *Si existe*

$$\lim_{P\in\mathbb{P}} \sum_{i(1),\ldots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)}\ldots\Delta_{i(m)}K(x_1(\xi_{i(1)}),\ldots,x_m(\xi_{i(m)}))$$

con $\xi_{i(r)} \in (t_{i(r)-1}t_{i(r)})$ *y* $\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r]\right)$, *este límite es llamado la* ***integral de Dushnik*** *de* $x = (x_1,\ldots,x_m)$ *con respecto a* K *y la denotamos por*

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_m}^{b_m} d_{s_1\ldots s_m}K(s_1,\ldots,s_m)(x_1(s_1),\ldots,x_m(s_m)).$$

En Hönig [3] se muestra que, para funciones continuas, la integral de Dushnik y la integral de Riemann-Stieltjes coinciden.

Definición. $x \in \Omega_0([a,b],X)$ *si, y solo si, para todo* $\epsilon > 0$ *el conjunto* $\{t \in [a,b] \,|||x(t)|| \geq \epsilon\}$ *es finito.*

En Hönig [3] se muestra que el espacio de las funciones regladas se puede descomponer como suma directa de las regladas por la izquierda y Ω_0.

Teorema 3. *Si* $K \in SF\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r], L(X_1,\ldots,X_m;Y)\right)$ *y* $x_r \in G([a_r,b_r],X_r)$, $r = 1,\ldots,m$, *entonces*

i) *Existe* $\Lambda_K\, x = \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_m}^{b_m} d_{s_1\ldots s_m}K(s_1,\ldots,s_m)(x_1(s_1),\ldots,x_m(s_m))$,

ii) Λ_K *es* m*-lineal,*

iii) $||\Lambda_K\, x|| \leq SF[K]||x_1||\cdots||x_m||$,

iv) *Si* $x_r \in \Omega_0([a_r,b_r],X_r)$, *para algún* $r = 1,\ldots,m$, *tenemos que* $\Lambda_K\, x = 0$.

Demostración. Si $x_r = 0$, para algún r, o $K = 0$, el resultado es inmediato. Por tanto, consideremos $x_r \neq 0, r = 1, \ldots, m$, y $K \neq 0$.

i) Veamos que el criterio de Cauchy se verifica.

Sea $\epsilon > 0$, entonces para todo r, $r = 1, \ldots, m$, por caracterización de las funciones regladas, existe $P_r(\epsilon) \in \mathbb{P}[a_r, b_r]$ tal que

$$\omega_{P_r(\epsilon)}(x_r) < \frac{\epsilon||x_r||}{2SF[K]||x_1|| \cdots ||x_m||}.$$

Si $P \geq P(\epsilon) = \prod_{r=1}^{m} P_r(\epsilon)$, podemos obtener P de $P(\epsilon)$ intercalando un número finito de puntos en las particiones $P_r(\epsilon)$. Inductivamente, todo se reduce al caso en el cual P se obtiene insertando un punto en alguna partición $P_k(\epsilon)$ para algún $k, k = 1, \ldots, m$. Sea $\mathcal{O}_k$ el punto considerado, en algún intervalo de $P_k(\epsilon)$. Así,

$$\begin{aligned} \sigma_P - \sigma_{P(\epsilon)} \quad = \quad & \sum_{i(1),\ldots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \ldots \Delta_{i(m)} K\Big(x_1(\xi_{i(1)}), \ldots, x_{k-1}(\xi_{i(k-1)}), \\ & \qquad x_k(\xi_{i(k)}) - x_k(\xi_{\mathcal{O}_k}), x_{k+1}(\xi_{i(k+1)}), \ldots, x_m(\xi_{i(m)})\Big) \\ & + \sum_{i(1),\ldots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \ldots \Delta_{i(m)} K\Big(x_1(\xi_{i(1)}), \ldots, x_{k-1}(\xi_{i(k-1)}), \\ & \qquad x_k(\xi_{\mathcal{O}_k}) - x_k(\xi_{i(k)-1}), x_{k+1}(\xi_{i(k+1)}), \ldots, x_m(\xi_{i(m)})\Big) \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \sigma_P - \sigma_{P(\epsilon)} \quad = \quad & \sum_{i(1),\ldots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \ldots \Delta_{i(m)} K\Big(\frac{x_1(\xi_{i(1)})}{||x_1||} \ldots, \\ & \frac{2SF[K]\ ||x_1|| \cdots ||x_m||}{\epsilon||x_k||}(x_k(\xi_{i(k)}) - x_k(\xi_{\mathcal{O}_k})), \ldots, \frac{x_m(\xi_{i(m)})}{||x_m||}\Big)\ \frac{\epsilon}{2SF[K]} \\ & + \sum_{i(1),\ldots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \ldots \Delta_{i(m)} K\Big(\frac{x_1(\xi_{i(1)})}{||x_1||}, \ldots, \\ & \frac{2SF[K]\ ||x_1|| \cdots ||x_m||}{\epsilon||x_k||}(x_k(\xi_{\mathcal{O}_k}) - x_k(\xi_{i(k)-1})), \ldots, \frac{x_m(\xi_{i(m)})}{||x_m||}\Big)\ \frac{\epsilon}{2SF[K]}. \end{aligned}$$

Luego,

$$||\sigma_P - \sigma_{P(\epsilon)}|| \ \leq \ SF[K]\frac{\epsilon}{2SF[K]} + SF[K]\frac{\epsilon}{2SF[K]} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

y, por tanto,

$$P, \bar{P} \geq P(\epsilon) \Longrightarrow ||\sigma_{_P} - \sigma_{_{\bar{P}}}|| \leq \epsilon.$$

ii) Es directo de la definición de la integral.

iii) Para cualquier $P \in \mathbb{P}\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r]\right)$, tenemos

$$||\sigma_{_P}|| = \left|\left|\sum_{i(1),\dots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K\left(\frac{x_1(\xi_{i(1)})}{||x_1||}, \dots, \frac{x_m(\xi_{i(m)})}{||x_m||}\right)\right|\right| \cdot ||x_1|| \cdots ||x_m||$$

De donde,

$$||\sigma_{_P}|| \leq SF[K]||x_1|| \cdots ||x_m||.$$

Así, pasando al límite, resulta

$$||\Lambda_{_K} x|| \leq SF[K]||x_1|| \cdots ||x_m||.$$

iv) Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 \in \Omega_0([a_1, b_1], X_1)$. Entonces, por la definición de Ω_0, para todo $\epsilon > 0$ existe $P_1(\epsilon) \in \mathbb{P}[a_1, b_1]$ tal que

$$\left\{t \in [a_1, b_1] : ||x_1(t)|| \geq \tfrac{\epsilon}{SF[K]||x_2|| \cdots ||x_m||}\right\} \subset P_1(\epsilon).$$

De donde, si $P = \prod_{r=1}^{m} P_r$ con $P_1 \geq P_1(\epsilon)$ y las otras particiones son arbitrarias, entonces

$$||\sigma_{_P}|| = \left|\left|\sum_{i(1),\dots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K\left(\frac{SF[K]||x_2|| \cdots |x_m||}{\epsilon} x_1(\xi_{i(1)}),\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\tfrac{x_2(\xi_{i(2)})}{||x_2||}, \dots, \tfrac{x_m(\xi_{i(m)})}{||x_m||}\right)\right|\right| \frac{\epsilon}{SF[K]} < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\Lambda_{_K}\ x = 0$.

□

Tal como en el caso bilineal ([6, Theorem 4.3]) se tiene que

Teorema 4. *Sean* $K \in SF\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y)\right)$ *y* $x_r \in G([a_r, b_r], X_r)$*, para todo* $r, r = 1, \dots, m$*. Entonces,*

$$\Lambda_{_K} x = \int_{a_m}^{b_m} d_{s_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} K(s_1, \dots, s_m) x_1(s_1) \cdots x_m(s_m).$$

5 Representación Integral tipo Riesz

Demostraremos ahora dos teoremas de representación integral tipo Riesz, para operadores y funcionales multilineales. Esos teoremas serán piezas fundamentales para expresar operadores y funcionales polinomiales como operadores y funcionales de Volterra-Stieltjes, es decir para probar los Teoremas 7 y 8, de la última sección.

Definición. *Sea* $K : \prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r], \longrightarrow L(X_1, \ldots, X_m; Z)$*, escribimos*

$$K \in SF_{a^m}\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r], L(X_1, \ldots, X_m; Z)\right)$$

si $K(s_1, \ldots, s_{i-1}, a_i, s_{i+1}, \ldots, s_m) = 0$ *para todo* $i, i = 1, \ldots, m$.

Teorema 5. *La aplicación* $K \longmapsto \Lambda_{_K}$*, donde*

$$\Lambda_{_K} x = \int_{a_m}^{b_m} d_{s_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} K(s_1, \ldots, s_m) x_1(s_1) \cdots x_m(s_m)$$

es una isometría entre los espacios de Banach

$$SF_{a^m}\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r], L(X_1, \ldots, X_m; Z)\right)$$

y

$$L(G^-([a_1, b_1], X_1), \ldots, G^-([a_m, b_m], X_m); Z).$$

Además,

$$K(s_1, \ldots, s_m)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) = \Lambda_{_K}(\chi_{(a_1,s_1]}\bar{x}_1, \ldots, \chi_{(a_m,s_m]}\bar{x}_m)$$

y

$$||\Lambda_{_K}|| = SF[K].$$

Demostración. Por el Teorema 3, la aplicación está bien definida, es lineal y continua; además, $||\Lambda|| \leq SF[K]$.

Inyectividad: Si $K \neq 0$, existen $\tau_r \in (a_r, b_r]$ y $\bar{x}_r \in X_r, r = 1, \ldots, m$ tales que

$$K(\tau_1, \ldots, \tau_m)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) \neq 0.$$

Sea $x_r = X_{(a_r,\tau_r]}\bar{x}_r \in G^-([a_r, b_r], X_r)$, entonces $\Lambda_{_K} \neq 0$, pues

$$\begin{aligned}
\Lambda_{_K} x &= \int_{a_m}^{b_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1 \ldots s_m} K(s_1, \ldots, s_m)(\chi_{(a_1,\tau_1]}(s_1)\bar{x}_1, \ldots, \chi_{(a_m,\tau_m]}(s_m)\bar{x}_m) \\
&= K(\tau_1, \ldots, \tau_m)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m).
\end{aligned}$$

Sobreyectividad: Dada $\Lambda \in L(G^-[a_1,b_1],X_1),\ldots,G^-([a_m,b_m],X_m);Z)$, si existe $K \in SF_{a^m}\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r],L(X_1,\ldots,X_m;Z)\right)$ tal que $\Lambda = \Lambda_{_K}$, entonces

$$K(\tau_1,\ldots,\tau_m)(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m) = \Lambda(\chi_{(a_1,\tau_1]}\bar{x}_1,\ldots,\chi_{(a_m,\tau_m]}\bar{x}_m),$$

$\tau_r \in (a_r,b_r]$ y $\bar{x}_r \in X_r, r = 1,\ldots,m$. Tomemos esta como la definición de K.

Debemos probar que: a) $SF[K] \leq ||\Lambda||$ y b) $\Lambda_{_K} = \Lambda$.

$$\text{a)}SF_{_P}[K] = \sup_{||\bar{x}_{i(r)}||\leq 1}\left\{\left|\left|\sum_{i(1),\ldots,i(m)}^{n(p)}\Delta_{i(1)}\ldots\Delta_{i(m)}K(\bar{x}_{i(1)},\ldots,\bar{x}_{i(m)})\right|\right| : \bar{x}_{i(r)} \in X_r\right\}$$

$$= \sup_{||\bar{x}_{i(r)}||\leq 1}\left\{\left|\left|\sum_{i(1),\ldots,i(m)}^{n(p)}\Lambda(\chi_{(t_{i(1)-1},t_{i(1)}]}\bar{x}_{i(1)},\ldots,\chi_{(t_{i(m)-1},t_{i(m)}]}\bar{x}_{i(m)})\right|\right|\right\}$$

$$= \sup_{||\bar{x}_{i(r)}||\leq 1}\left\{\left|\left|\Lambda\left(\sum_{i(1)=1}^{n(p_1)}\chi_{(t_{i(1)-1},t_{i(1)}]}\bar{x}_{i(1)},\ldots,\sum_{i(m)=1}^{n(p_m)}\chi_{(t_{i(m)-1},t_{i(m)}]}\bar{x}_{i(m)}\right)\right|\right|\right\} \leq ||\Lambda||.$$

b) Tenemos que $\Lambda,\Lambda_{_K} \in L(G^-([a_1,b_1],X_1),\ldots,G^-([a_m,b_m],X_m);Z)$. Para probar la igualdad $\Lambda_{_K} = \Lambda$, basta ver que coinciden en los elementos de la forma $\chi_{(a_1,\tau_1]}\bar{x}_1,\ldots,\chi_{(a_m,\tau_m]}\bar{x}_m$ pues estos forman un conjunto total en $G^-([a_1,b_1],X_1),\ldots,G^-([a_m,b_m],X_m)$, respectivamente. De hecho, $\Lambda_{_K}(\chi_{(a_1,\tau_1]}\bar{x}_1,\ldots,\chi_{(a_m,\tau_m]}\bar{x}_m) =$

$$= \int_{a_m}^{b_m}\cdots\int_{a_1}^{b_m} d_{s_1\ldots s_m}K(s_1\ldots s_m)(\chi_{(a_1,\tau_1]}(s_1)\bar{x}_1,\ldots,\chi_{(a_m,\tau_m]}(s_m)\bar{x}_m)$$
$$= K(\tau_1,..,\tau_m)(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m)$$
$$= \Lambda(\chi_{(a_1,\tau_1]}\bar{x}_1,\ldots,\chi_{(a_m,\tau_m]}\bar{x}_m). \qquad \square$$

Consideremos ahora el caso de operadores entre espacios de funciones. Necesitaremos, para esto, la siguiente definición.

Definición. *Sea* $K : [a,b] \times \prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r] \longrightarrow L(X_1,\ldots,X_m;Y)$*. Definimos* $K^t : \prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r] \longrightarrow L(X_1,\ldots,X_m;)$ *y* $K_{s^m} : [a,b] \longrightarrow L(X_1,\ldots,X_m;Y)$ *por*

$$K^t(s_1,\ldots,s_m) = K(t,s_1,\ldots,s_m) = K_{s^m}(t).$$

Además, consideremos las siguientes propiedades:

(G^σ) : K es ***simplemente reglada como función de*** t, i.e.,

$$K_{s^m} \in G^\sigma([a,b],L(X_1,\ldots,X_m;Y)).$$

(SF^u) : K es ***uniformemente de semivariación de Fréchet acotada*** como función de $(s_1,\ldots,s_m)$, i.e.,

$$SF^u[K] = \sup_{t\in[a,b]} SF[K^t] < \infty.$$

$(SF^u_{a^m})$: K satisface (SF^u) y $K^t \in SF_{a^m}\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r], L(X_1,\ldots,X_m;Z)\right)$ para todo $t\in[a,b]$.

Cuando K verifica ambas (G^σ) y (SF^u), escribimos

$$K \in G^\sigma \cdot SF^u\left([a,b]\times\prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r], L(X_1,\ldots,X_m;Y)\right).$$

Análogamente para $K \in G^\sigma \cdot SF^u_{a^m}$.

Teorema 6. *La aplicación $K \longmapsto \Lambda_K$, donde*

$$\Lambda_K x(t) = \int_{a_m}^{b_m} d_{s_m}\cdots\int_{a_1}^{b_1} d_{s_1}K(t,s_1,\ldots,s_m)x_1(s_1)\cdots x_m(s_m)$$

es una isometría entre los espacios de Banach

$$G^\sigma \cdot SF^u_{a^m}\left([a,b]\times\prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r], L(X_1,\ldots,X_m;Y)\right)$$

y

$$L(G^-([a_1,b_1],X_1),\ldots,G^-([a_m,b_m],X_m);G([a,b],Y)).$$

Además,

$$K(t,s_1,\ldots,s_m)(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m) = \Lambda_K\ (\chi_{(a_1,s_1]}\bar{x}_1,\ldots,\chi_{(a_m,s_m]}\bar{x}_m)(t)$$

y

$$||\Lambda_K|| = SF^u[K].$$

Demostración. Para $t\in[a,b], K_{s^m}$ es de semivariación de Fréchet acotada. Por otro lado, x_r es reglada, para $r=1,\ldots m$, entonces $\Lambda_K\ (x_1,\ldots,x_m)(t)$ está bien definida. Como en la prueba anterior, la linealidad y la inyectividad son consecuencias directas de la definición. Además, para $t\in[a,b]$,

$$||(\Lambda_K x)(t)|| \le SF[K^t]||x_1||\cdots||x_m||.$$

Luego,

$$||\Lambda_K x|| \le SF^u[K]||x_1||\cdots||x_m||.$$

Por lo tanto,

$$||\Lambda_K|| \le SF^u[K].$$

Sobreyectividad: Sea $\Lambda \in L(G^-([a_1,b_1],X_1),\ldots,G^-([a_m,b_m],X_m);G([a,b],Y))$. Por el teorema anterior, existe

$$\bar{K} \in SF_{a^m}\left(\prod_{r=1}^{m}[a_r,b_r], L(X_1,\ldots,X_m;G([a,b],Y)\right)$$

tal que

$$\Lambda x = \int_{a_m}^{b_m} d_{s_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} \bar{K}(s_1, \ldots, s_m) x_1(s_1) \ldots x_m(s_m),$$

donde

$$\bar{K}(s_1, \ldots, s_m)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) = \Lambda(\chi_{(a_1,s_1]}\bar{x}_1, \ldots, \chi_{(a_m,s_m]}\bar{x}_m).$$

Definiendo

$$K : [a,b] \times \prod_{r=1}^{m} [a_r, b_r] \longrightarrow L(X_1, \ldots, X_m; Y)$$

por

$$K(t, s_1, \ldots, s_m)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) = (\bar{K}(s_1, \ldots, s_m)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m))(t),$$

tenemos

$$\Lambda(\chi_{(a_1,s_1]}\bar{x}_1, \ldots, \chi_{(a_m,s_m]}\bar{x}_m)(t) = K(t, s_1, \ldots, s_m)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m).$$

Por lo tanto,

$$\Lambda x(t) = \int_{a_m}^{b_m} d_{s_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} K(t, s_1, \ldots, s_m) x_1(s_1) \cdots x_m(s_m).$$

Mostremos ahora que $K \in G^\sigma \cdot SF^u_{a^m}\left([a,b] \times \prod_{r=1}^{m}[a_r, b_r], L(X_1, \ldots, X_m; Y)\right)$.

a) $K(t, a_1, \ldots, a_m)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) = (\bar{K}(a_1, \ldots, a_m)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m))(t) = 0.$

b) K es uniformemente de semivariación de Fréchet acotada en $(s_1, \ldots, s_m)$. De hecho, sean $P = \prod_{r=1}^{m} P_r, P_r \in \mathbb{P}[a_r, b_r]$ y $\bar{x}_{i(r)} \in X_r$ con $||\bar{x}_{i(r)}|| \leq 1$ para todo $i(r), 1 \leq i(r) \leq n(r), \forall r = 1, \ldots, m$.

Entonces, $\left|\left| \sum_{i(1),\ldots,i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \ldots \Delta_{i(m)} K(t)(\bar{x}_{i(1)}, \ldots, \bar{x}_{i(m)}) \right|\right| =$

$$= \left|\left| \Lambda\left(\sum_{i(1)=1}^{n(P_1)} \chi_{(t_{i(1)-1}, t_{i(1)}]}\bar{x}_{i(1)}, \ldots, \sum_{i(1)=1}^{n(P_m)} \chi_{(t_{i(m)-1}, t_{i(m)}]}\bar{x}_{i(m)} \right)(t) \right|\right|$$

$$\leq \left|\left| \Lambda\left(\sum_{i(1)=1}^{n(P_1)} \chi_{(t_{i(1)-1}, t_{i(1)}]}\bar{x}_{i(1)}, \ldots, \sum_{i(1)=1}^{n(P_m)} \chi_{(t_{i(m)-1}, t_{i(m)}]}\bar{x}_{i(m)} \right) \right|\right|$$

$$\leq ||\Lambda|| \left|\left| \sum_{i(1)=1}^{n(P_1)} \chi_{(t_{i(1)-1}, t_{i(1)}]}\bar{x}_{i(1)} \right|\right| \cdots \left|\left| \sum_{i(1)=1}^{n(P_m)} \chi_{(t_{i(m)-1}, t_{i(m)}]}\bar{x}_{i(m)} \right|\right| \leq ||\Lambda||.$$

Luego,

$$SF[K^t] \leq ||\Lambda|| \ \ \forall t \in [a,b].$$

De donde,

$$SF^u[K] \leq ||\Lambda||.$$

c) K es simplemente reglada como función de t; pues como Λ toma valores en $G([a,b],Y)$, por la definición de K, tenemos que, para todo $(s_1,\ldots,s_m)$, la función

$$\phi : [a,b] \longrightarrow Y$$

definida por

$$\phi(t) = K(t,s_1,\ldots,s_m)(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m),$$

para todo $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m)$, es reglada.

□

6 Aproximación de operadores no lineales

Definición. *Si* $h_m \in G^\sigma \cdot SF^u_a([a,b]^{m+1}, L_m(X;\mathbb{R}))$*, el funcional*

$$\rho_m \ : \ G^-([a,b],X) \longrightarrow \mathbb{R},$$

definido por

$$(\rho_m x)(t) = h_{_0}(t) + \sum_{n=1}^{m} \int_a^b d_{s_n} \cdots \int_a^b d_{s_1} h_n(t,s_1,\ldots,s_n)x(s_1)\cdots x(s_n),$$

es llamado ***funcional polinomial de Volterra-Stieltjes****, de grado* m*.*

En Istrăţescu [5] se muestra el Teorema de Weierstrass, el cual expresa que el conjunto de todos los operadores polinomiales continuos, definidos sobre un subconjunto compacto de un espacio de Banach, es denso en el conjunto de todos los operadores continuos, en ese mismo compacto. En su prueba, utiliza tres importantes teoremas del Análisis Funcional: el Teorema de Hahn-Banach, el Teorema de Krein-Milman y el Teorema de Riesz-Katutani.

Teorema 7. *Sean* $A \subset G^-([a,b],X)$ *compacto y* $\rho : A \to \mathbb{R}$ *continuo. Entonces, para todo* $\epsilon > 0$*, existe un operador polinomial de Volterra-Stieltjes* ρ_m *tal que*

$$||\rho x - \rho_m x|| < \epsilon,$$

para todo $x \in A$*.*

Demostración. Del teorema de Weierstrass [5, Theorem 2.1] tenemos que todo funcional continuo, definido sobre un subconjunto compacto de un espacio de Banach, puede ser aproximado uniformemente por funcionales polinomiales. Por el teorema 5, estos son funcionales polinomiales de Volterra- Stieltjes. □

Definición. *Si* $h_m \in G^\sigma \cdot SF_a^u([a,b]^{m+1}, L_m(X;X))$*, el operador*

$$P_m \;:\; G^-([a,b],X) \longrightarrow G^-([a,b],X),$$

definido por

$$(P_m x)(t) = h_0(t) + \sum_{n=1}^{m} \int_a^b d_{s_n} \cdots \int_a^b d_{s_1} h_n(t, s_1, \ldots, s_n) x(s_1) \cdots x(s_n),$$

es llamado ***operador polinomial de Volterra-Stieltjes****, de grado* m.

También en Istrăţescu [5] se muestra el Teorema de Weierstrass para funcionales, el cual expresa que el conjunto de todos los funcionales polinomiales continuos, definidos sobre un subconjunto compacto de un espacio de Banach, es denso en el conjunto de todos los funcionales continuos, en ese mismo compacto.

Teorema 8. *Sean* $A \subset G^-([a,b],X)$ *compacto y* $P : A \to G^-([a,b],X)$ *continuo. Entonces, para todo* $\epsilon > 0$*, existe un operador polinomial de Volterra-Stieltjes* P_m *tal que*

$$||Px - P_m x|| < \epsilon$$

para todo $x \in A$.

Demostración. Del teorema de Weierstrass [5, Theorem 2.5] tenemos que todo operador continuo, definido sobre un subconjunto compacto de un espacio de Banach, puede ser apro-ximado uniformemente por operadores polinomiales. Por el teorema 6, estos son operadores polinomiales de Volterra- Stieltjes. □

Referencias

[1] Arbex, S. *Ecuações Integrais de Volterra-Stieltjes com núcleos des-contínuos*, Dr. Tese, IME-USP, Brasil. 1976.

[2] Baesler, I. y Daugavet, I. K. *Approximation of nonlinear operators by Volterra polynomials*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **155**(1993), 47-58.

[3] Hönig, C. *Volterra-Stieltjes Integral Equations*, Math. Studies 16, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam (1975).

[4] Hönig, C. *Équations intégrales généralisées et applications*, Exp. No. 5, Publ. Math. Orsay 83, 1, Univ. Paris XI, Orsay, 1983.

[5] Istrăţescu, V. *Fixed Point Theory. An Introduction*, volume 7. D. Reidel Publ. Comp., London, 1988.

[6] Prandini, J. *Extensions of the Representation Theorems of Riesz and Fréchet*, Mathematica Bohemica, **118**(1993), 297-312.