Divulgaciones Matemáticas Vol. 17 No. 1 (2016), pp. 75–86

Errores, Dificultades y Conflictos Semióticos Presentes en la Enseñanza de las Derivadas

Errors, Difficulties and Semiotic Conflicts Present in the Teaching of Derivatives

Mario Arrieche (marioarrieche@hotmail.com)
Universidad Pedagógica Experimental Libertador

Albéniz A. Meléndez Q. (albenizamq@yahoo.com)
Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos

Resumen

El problema abordado en esta investigación se centra en la caracterización de los significados personales de la derivada en estudiantes de Ingeniería, en el que se analizan los errores que cometen, las dificultades y conflictos semióticos que se hacen presentes en un proceso de enseñanza y aprendizaje de esta noción. Formó parte de un trabajo de investigación sobre los significados personales de la derivada en estudiantes de Ingeniería, del cual se consideran la descripción del problema destacando la importancia de esta noción para los Ingenieros en proceso de formación. El trabajo se sustenta en el Modelo Semiótico Antropológico propuesto por Godino y Batanero (1994) y usado por Arrieche (2002) y Meléndez (2005), actualmente conocido con el nombre: Enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005). Metodológicamente se sigue un paradigma de tipo mixto, combinando esquemas cualitativos y cuantitativos: por una parte se cuantifican las respuestas parcialmente correctas, las incorrectas y los diferentes tipos de errores cometidos, por la otra se analiza la naturaleza de los errores y sus efectos sobre la calidad de las respuestas. Los significados personales declarados (Godino, 2003) los representan los sistemas de prácticas discursivas o actuativas puestas en juego en las respuestas correctas e incorrectas, mientras que los errores y conflictos semióticos del aprendizaje se reflejan en las discordancias manifestadas entre estos significados y la referencia institucional. Los errores fueron de tipo conceptual, de operaciones básicas, de aplicación de fórmulas, de procedimiento y de simbología y nomenclatura. Finalmente, mediante la aplicación del análisis semiótico a la solución del cuestionario propuesto por el investigador, se identifican potenciales conflictos de significado; en el análisis semiótico practicado al cuestionario respondido por el estudiante que obtuvo la mayor calificación, destacan la ausencia de prácticas discursivas y las validativas se suponen implícitas en los procedimientos.

Palabras y frases clave: Significado personal, análisis semiótico, derivadas.

Abstract

The problem aproached in this investigation is centred in the caracterización of the derivate's personals meanings in ingeneering students, on which are analyzed the errors, the difficulties and semiotics troubles presents in the process of teching and learnig of this

Recibido 1/2011. Revisado 2/2011. Aceptado 4/2011.
MSC (2010): Primary 26A24; Secondary 54C30.
Autor de correspondencia: Mario Arrieche

concept. It was part of an investigation work about the derivate's personals significates in ingeneering students, from which is considered the problem description standing out the importance of this notion por the Engeneer in training process. The work is supported by the Semiotic Anthropologyc Model proposed for Godino y Batanero (1994) and used for Arrieche (2002) y Meléndez (2005), actually known as: focus ontosemiotico of cognition and mathematical instruction (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque and Ordonez, 2005). The method followed is a mixed paradigm, for the combination of cualitatives and cuantitatives schemes: first are quantified the partially correct answers, the incorrects and the differents error's types; on the other hand, is analyzed the error's nature and their effects on the answers quality. The declared personals significates (Godino, 2003) are represented by the discrsives and actuativas practices systems showed in the corrects and incorrects answers, whereas the errors and semiotics troubles of the learning be reflected in the discords between this meanings and the institutional reference. The errors was of conceptual type, of basics operations, of formula's application, of proceedings, of symbology and nomenclature. Finbaly, by application of semiotic analysis to questionnaire's answer proposed for the researcher, are identified potentials meanings troubles; in the semiotic analysis practiced at the questionnaire answered for the student with bigger grade, are standed out the absence of discursives practices and the validates are sopossed implicit in the proceedings.

Key words and phrases: Personal meaning, semiotic analysis, derivate's.

1 Introducción

Este trabajo está inserto en la línea de investigación perspectivas del enfoque semiótico antropológico para la didáctica de la matemática (Arrieche, 2003) y enmarcado en la faceta cognitiva de la investigación sobre los significados personales de la derivada en estudiantes de ingeniería, desarrollado en el programa de Maestría en Enseñanza de la Matemática en la Universidad Rómulo Gallegos. Usamos la noción de significado en el sentido dado por Godino y Batanero (1994) como el sistema de prácticas (actuativas y discursivas) manifestadas por un sujeto ante una cierta clase de tareas. Mediante la prueba de conocimientos aplicada se determina el significado personal declarado, Godino (2003), incluyendo respuestas correctas e incorrectas desde el punto de vista institucional. La discordancia existente entre los significados personales e institucionales constituye los errores y conflictos semióticos del aprendizaje, mientras el significado personal logrado es el que se corresponde con la referencia institucional. Este trabajo se compone del Planteamiento del problema, Antecedentes de la investigación, la Metodología, Análisis y discusión de los datos, las Conclusiones y las Referencias bibliográficas.

2 Planteamiento del Problema

La derivada es un objeto matemático de especial importancia para los estudiantes de Ingeniería, porque es una herramienta básica para la evaluación del comportamiento de modelos matemáticos representativos de situaciones reales, como es el caso de análisis de rapidez de variación, optimización, análisis de curvas, etc. De allí la necesidad de proporcionar a los estudiantes de ingeniería la mayor solidez en conocimiento de las derivadas y sus aplicaciones. Al respecto, Meléndez (2003), señala que en el caso de los estudiantes de Ingeniería Agronómica en la Universidad Rómulo Gallegos, esta solidez de conocimientos se ve afectada por el bajo rendimiento académico en las asignaturas Matemática I y Matemática II, en las que se ha registrado índices de aprobados alrededor del 11 %, junto con índices de deserción que superan el 50 % y una muy marcada repetición de los estudios.

La pregunta: ¿Cuáles son los significados personales que tienen los estudiantes de ingeniería, sobre las derivadas y sus aplicaciones?, es la que motiva esta investigación con el propósito de indagar sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes, los errores que cometen y que efectivamente aprenden sobre un tema que reviste especial importancia para ellos, así como las causas de los indicadores de resultado negativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En ese sentido, surgen otras preguntas específicas para tratar de dar respuesta a la pregunta inicial: de carácter epistémico: ¿Qué son las derivadas?, ¿Cuál es el origen de las derivadas?; de carácter cognitivo: ¿Qué dificultades, errores y obstáculos presentan los estudiantes de ingeniería en el estudio de las derivadas?, de carácter Instruccional: ¿Cómo se enseñan las derivadas a los estudiantes universitarios? En este trabajo se intentará responder a la pregunta de carácter cognitivo, mediante la aplicación de un cuestionario sobre aspectos fundamentales de las derivadas, a un grupo de 60 estudiantes de Ingeniería Agronómica de la Universidad Rómulo Gallegos de San Juan de los Morros cursantes de Matemática II.

3 Antecedentes de la investigación

En este apartado se hace referencia a algunos trabajos realizados por investigadores en didáctica de la matemática, en los que se consideran obstáculos epistemológicos y conflictos semióticos que surgen durante el proceso de instruccional de la matemática, y de la derivada en particular.

Contreras de la Fuente (2000), en un trabajo sobre límites bajo perspectivas de los enfoques epistemológicos y semióticos, señala: *"las concepciones y obstáculos epistemológicos detectados a lo largo de la evolución histórica de los conceptos se repiten, con determinadas diferencias, como concepciones y obstáculos cognitivos en los sujetos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático"*.(p. 4) Los obstáculos epistemológicos son "barreras" que impiden o dificultan la consumación del acto de comprensión. A lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje se van superando estos obstáculos en la medida que se asciende en los niveles de comprensión, una vez que se va rompiendo con las anteriores y se da lugar a nuevas concepciones. *"El desarrollo del conocimiento no es acumulativo, es decir, cuando se pasa de un nivel de comprensión a otro se da simultáneamente una integración y una reorganización del conocimiento"*(Contreras de la Fuente, 2000).

Inglada y Font (2003), en un trabajo sobre significados institucionales y personales de la derivada analizan algunos conflictos semióticos relacionados con la notación $\frac{\Delta x}{\Delta y}$; uno de estos conflictos se fundamenta en el hecho que Leibnitz consideraba a dy como la diferencia infinitamente pequeña de dos ordenadas sucesivas y a dx como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores consecutivos de las abscisas, sin embargo, por temor a la crítica presentó al público un concepto diferencial muy diferente pero que cumplía las mismas reglas, el incremento infinitesimal.

Otro conflicto lo llaman *"La complejidad del paso de la derivada en un punto a la función derivada "*(p. 8). Plantean que en los libros de texto que se sometieron al análisis semiótico, los autores no son conscientes de esta dificultad o no le prestan la atención necesaria y, además, sostienen que determinados usos de la notación $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ pueden presentar más inconvenientes cuando se toma en cuenta la complejidad semiótica considerada en este punto. Finalmente, plantean los conflictos semióticos relacionados con la notación incremental y presentan un detalle del entramado de funciones semióticas que debe activar el alumno para comprender la definición de derivada.

Hitt (2003), analiza las dificultades presentes en el aprendizaje del cálculo; sostiene que además de los problemas de entendimiento de los procesos infinitos, debe añadirse los derivados del mal aprendizaje de precálculo. Respecto a la derivada, menciona la dificultad para los estudiantes establecer representaciones visuales de los conceptos matemáticos, además de su resistencia a hacerlo. Pensar visualmente requiere de procesos cognitivos más profundos que pensar en forma algorítmica. Las comparaciones mediante cuadros de visualización y resolución de problemas, en los cuales se separan los sistemas algebraicos de representaciones, las ideas intuitivas y los sistemas geométricos de representaciones, identifican fallas cometidas por profesores pero también sostienen que utilizando la idea intuitiva se puede representar geométricamente las condiciones de los problemas y lograr su solución mediante los procesos algebraicos; esto es un alerta para sugerir que los métodos tradicionales son insuficientes, si se quiere buenos estudiantes que hagan un uso creativo del cálculo.

4 Metodología

4.1 Enfoque Metodológico

La caracterización de los significados de los estudiantes sobre la derivada se lleva a cabo mediante la aplicación de una prueba de conocimientos cuyo análisis se realiza siguiendo un paradigma metodológico de tipo mixto, combinando esquemas cuantitativos y cualitativos (Goetz y Lecompte, 1988).

En este sentido, el enfoque cuantitativo se refiere a la determinación de cantidad de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas y tipos de errores manifestados por los estudiantes, con el correspondiente análisis estadístico; el enfoque cualitativo se desarrolla mediante la aplicación de la técnica del análisis semiótico (Godino y Arrieche, 2001) a las pruebas resueltas por dos estudiantes. A continuación describimos la técnica del análisis semiótico.

La técnica del "análisis semiótico" permite: *"caracterizar tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados elementales puestos en juego en un acto de comunicación matemática"* (Godino y Arrieche, 2001, p.1). Estos autores sostienen que mediante este análisis es posible identificar tanto los conflictos potenciales en la interpretación de los textos de estudio como aquellos que ocurren durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Godino (2002) indica que al comparar los significados institucionales atribuidos a un objeto matemático por dos instituciones o por una persona y un referente institucional, se pueden identificar conflictos semióticos entre esos agentes. Los conflictos semióticos están representados por las disparidades entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa y provocan dificultades y limitaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Más adelante señala Godino (2002): *" Para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas"*. En este caso, se aplica dicho análisis a la resolución realizada por el investigador a la prueba de evaluación de conocimientos sobre las derivadas, aplicada durante el desarrollo del curso de Matemática II, correspondiente al Lapso Académico comprendido entre los meses diciembre 2003 y Abril 2004.

Una primera clasificación de las unidades de análisis semiótico de un texto matemático propuesta por Godino y Arrieche (2001) es la siguiente: "unidades iniciales (apartados o secciones del texto), unidades primarias (oraciones o sentencias), unidades elementales (términos y expresiones que designan cada una de las seis unidades elementales) y unidades secundarias (combinación de dos o más unidades primarias)". (p.2)

En cuanto al análisis aplicado a la prueba, las unidades iniciales son los ítems o problemas a resolver y las unidades elementales están ubicadas en el proceso de comunicación de la solución, y están representadas por el lenguaje, las situaciones, los actuativos, los conceptos, las propiedades y las argumentaciones, entidades propuestas en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003).

4.2 Población y Muestra

La población sobre la que se hace este estudio, la constituye los estudiantes del segundo semestre de Ingeniería Agronómica y la muestra, que fue tomada en el Área de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos, está conformada por 60 estudiantes que presentaron la prueba de conocimientos aplicada.

4.3 Instrumento aplicado

El instrumento utilizado para recoger los datos consistió en una prueba de conocimientos, aplicada a fin de evaluar qué significados atribuyen los estudiantes a las reglas de derivación de las funciones algebraicas y trascendentes más comunes, la regla de la cadena, la derivación aplicando logaritmos y la aplicación de la derivada en un punto de una función para obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva. La prueba está constituida por cinco preguntas o ítems, cuya estructura y contenido se detalla continuación:

Ítem 1.- Determine $f'(x)$ para: $f(x) = \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right) \operatorname{Arcsec}(2x)$

Ítem 2.- Determine $f'(x)$ para:$f(x) = \frac{7^{3x}}{\operatorname{Arctan}(x)}$

Ítem 3.- Determine $f'(x)$ para: $f(x) = \csc^5\left(\sqrt{3x^4 - 2x + 12}\right)$

Ítem 4.- Aplicando logaritmos determine $f'(x)$ para:

$$f(x) = \frac{\left(2x^3 + 5x^2 - 6x + 9\right) e^x \sec(x)}{\tan(x) \log_4(x)}$$

Ítem 5.- Determine las ecuaciones de las rectas Tangente y Normal a:

$$f(x) = \arctan(2x) \qquad \text{en} \qquad x_0 = -1$$

El objetivo de esta prueba es evaluar que significados atribuyen los estudiantes a las reglas de derivación: producto de una constante por una función, suma algebraica, producto y cociente de funciones, así como de las derivadas de las funciones algebraicas y trascendentes más comunes, la regla de la cadena, la derivación aplicando logaritmos y la aplicación de la derivada en un punto de una función para obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva.

En este trabajo se hace referencia a los resultados correspondientes al ítem N° 1; por lo tanto, el lector interesado en la totalidad de los resultados o de algunos de los ítems en particular, deberá consultar a Meléndez (2005). En el ítem 1 se evalúa la derivada de: producto de una constante por una función, de la suma algebraica de funciones potencia (polinómicas), de una constante, del producto de dos funciones, de una función trigonométrica inversa y de la regla de la cadena.

La respuesta se considera correcta cuando el estudiante:

1. Aplica la fórmula de la derivada a un producto de funciones
2. Obtiene la derivada de la función polinómica propuesta
3. Obtiene la derivada de la función trigonométrica propuesta
4. Aplica la regla de la cadena para derivar una función compuesta
5. Hace las reducciones correspondientes

Las fórmulas que se debe aplicar para resolver esta pregunta, considerando que k es una constante, que u es función de x y que f' o u' es la derivada de una función con respecto a x, son las siguientes:

$$(k)' = 0; \quad (x)' = 1; \quad (ku)' = ku'; \quad (u^n)' = nu^{n-1}u';$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \qquad (\operatorname{Arcsec}(u))' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Respuesta correcta tipo:

Para obtener la derivada de $f(x) = \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right) \operatorname{Arcsec}(2x)$, se debe identificar la operación producto de funciones y aplicar la fórmula:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right)' \operatorname{Arcsec}(2x) + \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right) (\operatorname{Arcsec}(2x))'$$

Luego se derivan las funciones $u = \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right)$ y $v = \operatorname{Arcsec}(2x)$; como el argumento de v es también una función, se debe aplicar la regla de la cadena a una función compuesta:

$$v = h \circ g = h\left[g\left(x\right)\right]; \quad v' = \left(h\left[g\left(x\right)\right]\right)' = \left(h'\left(g\right)\right) g'\left(x\right) \Longrightarrow (\operatorname{Arcsec}(u))' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$f'(x) = \left(12x^3 - 10x^{-6} + 10\right) \operatorname{Arcsec}(2x) + \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right) \frac{(2x)'}{2x\sqrt{(2x)^2-1}}$$

Se deriva el argumento de la función arcosecante y se hacen las simplificaciones correspondientes, hasta obtener el resultado final.

$$f'(x) = \left(12x^3 - 10x^{-6} + 10\right) \operatorname{Arcsec}(2x) + \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right) \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x\sqrt{(2x)^2-1}}$$

Resultado final:

$$f'(x) = \left(12x^3 - 10x^{-6} + 10\right) \operatorname{Arcsec}(2x) + \frac{3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8}{x\sqrt{(2x)^2-1}}$$

5 Análisis y discusión de los datos

Se quiere determinar los significados personales de los estudiantes de Ingeniería sobre las derivadas, haciendo el análisis de los resultados generales de la prueba de conocimientos mediante tablas de frecuencia y porcentajes de las diferentes respuestas obtenidas y, la interpretación de los mismos.

En tal sentido se han establecido tres categorías de respuesta, de acuerdo con el esquema siguiente:

- *Respuesta correcta:* Si el estudiante dio respuesta a todo lo solicitado, sin cometer errores.
- *Respuesta parcialmente correcta:* Si el estudiante respondió parcialmente o totalmente la pregunta y cometió errores; sin embargo, algunos o la mayoría de los conceptos preestablecidos como respuesta correcta fueron satisfechos.
- *Respuesta incorrecta:* Cuando el estudiante no dio respuesta alguna o inició y/o desarrolló un procedimiento para resolver la pregunta pero sin satisfacer ninguno de los conceptos que caracterizan a la respuesta como correcta.

Por otra parte, se clasifican los errores que cometen los estudiantes de la manera siguiente:

- *Conflictos semióticos conceptuales:* Cuando el estudiante desconoce o ha interpretado mal tanto la noción que está aplicando como las operaciones básicas.
- *Conflictos semióticos proposicional:* Cuando el estudiante desconoce o interpreta mal una propiedad.
- *Conflictos semióticos procedimentales:* El estudiante conoce los conceptos y las propiedades pero se equivoca al aplicarlos.
- *Conflictos semióticos lingüístico:* Cuando el estudiante no usa o hace mal uso de la notación y/o nomenclatura.

5.1 Resultados generales de la prueba y análisis de errores

Los resultados de la prueba son expresados mediante el análisis a las respuestas parcialmente correctas e incorrectas de los estudiantes en primer lugar, y luego la clasificación de los errores cometidos por los estudiantes. En cada caso se hace una trascripción textual de lo que el estudiante escribió y los comentarios a que haya lugar. Para el Ítem 1 los resultados fueron los siguientes:

Ítem 1: Determine la derivada de $f(x) = \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right)\operatorname{Arcsec}(2x)$.

Se considera parcialmente correcta si el estudiante aplica bien la propiedad de la derivada de un producto pero comete errores de signos u operaciones elementales en la derivada del polinomio, o en la aplicación de la regla de la cadena al equivocarse en la derivada interna de la función trigonométrica planteada. Algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes, son los siguientes:

Respuestas parcialmente correctas:
Alumno 09:

$$\text{“}f'(x) = 12x^3 + 10x^{-6} + 10\text{Arcsec}(2x) + \frac{1}{2x\sqrt{2x^2-1}}3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\text{”}$$

El estudiante no aplica la regla de la cadena a la derivada de Arcsec$(2x)$ al no multiplicar por 2, derivada del argumento; omite el signo negativo a $10x^{-6}$, no usa los paréntesis para separar las funciones polinómicas como factores multiplicativos y asume que $2x^2 = (2x)^2$.

Alumno 17:

$$\text{“}f'(x) = \left(12x^3 - 10x^{-6} + 10\right) \operatorname{Arcsec}(2x) + \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 - 1}}(2)\left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right)\text{”}$$

El estudiante no usa bien la fórmula de la derivada de Arcsec$(2x)$ al omitir el factor $2x$ en el denominador.

Alumno 24:

$$\text{“}f'(x) = 12x^3 - 10x^{-6} + 10\operatorname{Arcsec}(2x) + \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\text{”}$$

El estudiante no aplica la regla de la cadena en la derivada de Arcsec$(2x)$, aparentemente usó la fórmula para derivar Arcsec(x).

Alumno 44:

$$\text{“}f'(x) = \left(12x^3 - 10x^{-4} + 10\right) \operatorname{Arcsec}(2x) + \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 + 1}}\left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right)(2)\text{”}$$

En la derivada de $-2x^{-5}$ equivoca el exponente a colocar $10x^{-4}$ y en la derivada de Arcsec$(2x)$ cambia el signo del 1 en el radical.

Respuestas incorrectas:
Alumno 15:

$$\text{“}f'(x) = \left(12x^3 + 10x^2 + 10\right)\left(\frac{2}{x\sqrt{(x)^2 + 1}}\right)\text{”}$$

No aplica la fórmula de la derivada del producto de funciones y no deriva bien ninguna de las funciones propuestas.

Alumno 42:

$$\text{“}f'(x) = \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right)' \left(\operatorname{Arcsec}(2x)\right)'$$
$$f'(x) = \left(3x^4 + 2x^5 + 10x - 8\right)\frac{2x\ln_a(2)}{\sqrt{3x^4 - 2x^{-5} - 10}}\text{”}$$

No aplica bien la fórmula para derivar el producto de funciones y no deriva bien ninguna de las funciones.

Cuadro 1. Estadística de respuestas. Ítem 1

Incorrectas		Parcialmente Correctas		Correctas		Respuestas en blanco		
Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	% respecto a las Incorrectas	% del total
21	35	33	55	6	10	1	4,76	1,67
Total de respuestas				60	100 %			

Frec.: Frecuencia

Sólo 6 estudiantes (10 %) respondieron correctamente la pregunta lo cual indica un alto nivel de dificultad; 33 estudiantes (55 %) manifestaron tener alguna noción del concepto evaluado. (Cuadro 1)

Cuadro 2. Errores cometidos por los estudiantes. Ítem 1									
Conceptuales		Operaciones Básicas		Aplicación de fórmulas		Procedimiento		Simbología y nomenclatura	
Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
23	32.86	8	11.43	20	28.57	3	4.29	16	22.86
Total de errores registrados:				70					

Frec.: Frecuencia

La mayoría de los errores cometidos son conceptuales (32,86 %) y de aplicación de fórmulas (28,57), no identifican la operación producto a derivar, aplican fórmulas no correspondientes o no aplican bien la regla de la cadena. Se remite al lector interesado a Meléndez (2005) en donde se hace un análisis detallado y pormenorizado de toda la prueba.

5.2 Análisis Semiótico de la Prueba

Se definieron los aspectos para calificar una respuesta como correcta, parcialmente correcta o incorrecta; el investigador desarrolla y explica su visión sobre cuál debe ser la respuesta correcta a cada ítem; esto constituye un significado institucional de referencia (Godino, 2003), a partir del cual se identificarán los errores y conflictos semióticos producto de las discordancias con el significado personal logrado de los estudiantes. El análisis semiótico se desarrolla en tres fases: exposición del texto y unidades primarias de análisis, identificación de las componentes y unidades elementales y la identificación de los conocimientos puestos en juego y conflictos semióticos potenciales. Los detalles debe consultarlos el lector interesado, en Meléndez (2005), para indagar sobre la totalidad de los resultados del análisis.

A continuación, a manera de ejemplo, presentamos el desarrollo del análisis realizado al ítem 1:

Ítem 1. Derivar la función: $f(x) = \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right) \operatorname{Arcsec}(2x)$

Texto y unidades primarias del análisis:

1.1	Para obtener la *derivada* de $f(x) = \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right) \operatorname{Arcsec}(2x)$, se debe identificar la operación *producto de funciones* y aplicar la fórmula: $$(uv)' = u'v + uv'$$
1.2	$$f'(x) = \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right)' \operatorname{Arcsec}(2x) + \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right) (\operatorname{Arcsec}(2x))'$$
1.3	Luego se derivan las funciones $u = \left(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8\right)$ y $v = \operatorname{Arcsec}(2x)$; como el argumento de v es también una *función*, se debe aplicar la *regla de la cadena* a una *función compuesta*: $$v = h \circ g = h\left[g\left(x\right)\right]; \quad v' = \left(h\left[g\left(x\right)\right]\right)' = \left(h'\left(g\right)\right) g'\left(x\right) \Longrightarrow \left(\operatorname{Arcsec}(u)\right)' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

1.4	$f'(x)=\left(12x^3-10x^{-6}+10\right)\operatorname{Arcsec}(2x)+\left(3x^4+2x^{-5}+10x-8\right)\frac{(2x)'}{2x\sqrt{(2x)^2-1}}$
1.5	Se *deriva* el *argumento* de la *función arcosecante* y se hacen las *simplificaciones* correspondientes, hasta obtener el resultado final.
1.6	$f'(x)=\left(12x^3-10x^{-6}+10\right)\operatorname{Arcsec}(2x)+\left(3x^4+2x^{-5}+10x-8\right)\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x\sqrt{(2x)^2-1}}$
1.7	Resultado final : $f'(x)=\left(12x^3-10x^{-6}+10\right)\operatorname{Arcsec}(2x)+\frac{3x^4+2x^{-5}+10x-8}{x\sqrt{(2x)^2-1}}$

Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones: Problema de aplicación de la derivada del producto de una función polinómica y una función trigonométrica. Técnicas: Derivación, aplicación de la regla de la cadena, simplificación.	Términos y expresiones: Derivar, producto de funciones, función, argumento, regla de la cadena, simplificaciones, arcosecante. Notaciones: $f(x)$ x^n	Conceptos: Derivada, función, función compuesta, regla de la cadena, arcosecante. Propiedades: El argumento es una función. Reglas para derivar funciones y regla de la cadena. Validaciones: Justificación de cada operación y del resultado.

Conocimientos y conflictos semióticos:

1. 1 Se condiciona la aplicación de la derivada, a la identificación de la operación producto, propia del álgebra de funciones, y supone como conocido el término función. La no identificación de la operación o la no interpretación de la fórmula, constituyen conflictos semióticos potenciales.

1. 2 Se han puesto en juego la fórmula para derivar un producto y elementos notacionales; la expresión indica la forma de aplicación de la fórmula y los conflictos semióticos ocurrirían con la identificación de las funciones, las operaciones relacionadas con la aplicación de la derivada de un producto y las fórmulas que se deben aplicar.

1. 3 Se considera necesario conocer el concepto de *argumento*, así como la interpretación del significado y aplicación de la regla de la cadena para relacionar al argumento con la función compuesta y su derivada; de allí surgirían los posibles conflictos semióticos.

1. 4 Se señala la forma general de una función compuesta, su derivada y la derivada de la función arcosecante; podrían surgir conflictos semióticos por incomprensión de la notación.

1. 5 Se ha aplicado la derivada a las funciones polinómica y arcosecante, sólo queda por derivar al argumento $2x$. Los conflictos semióticos podrían ubicarse en el manejo de los

exponentes y sus signos, así como en la identificación del argumento o la no adecuada aplicación de la regla de la cadena.

1. 6 Se señala la última derivada que falta por obtener, la del argumento de la función arcosecante; supone conocida la técnica de simplificación de expresiones algebraicas. Conflictos semióticos potenciales los representan la interpretación de la técnica de la simplificación.

1. 7 Se señala qué se debe simplificar. Conflictos semióticos ocurren cuando se simplifica la x externa a la raíz del denominador, con las x del polinomio en el numerador o algo similar.

1. 8 Se muestra el resultado final. Cualquier operación que se haga a partir de este nivel, podría generar errores a consecuencia de conflictos semióticos.

6 Conclusiones

Se determinó que la prueba resultó bastante difícil, puesto que de 60 estudiantes evaluados, sólo 4 aprobaron y, además, la nota promedio fue de 3 puntos, en una escala del 1 al 10. El análisis realizado a los errores cometidos por los estudiantes en la prueba, permitió detectar que la mayoría de errores fueron de tipo conceptual y de aplicación de fórmulas. La importancia de este análisis radica en que la identificación de los errores, que trae consigo la detección de conflictos semióticos y de obstáculos epistemológicos, nos permite establecer una sistematización de los mismos, identificar qué los produce, cuál es su origen, cómo pueden solucionarse o cómo pueden evitarse, etc., lo que podría ofrecer una oportunidad para desarrollar estrategias conducentes a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada como tema particular, y de la Matemática en todos los sentidos.

Se aplicó el análisis semiótico a la solución de la prueba planteada para establecer un significado institucional de referencia (Godino, 2003) y se identificaron los potenciales conflictos semióticos y obstáculos epistemológicos que podrían presentarse durante el intercambio profesor-alumno para desarrollar el tema en cuestión. Como un ejemplo de los posibles conflictos semióticos detectados tenemos la no identificación de la operación o la no interpretación de la fórmula, la identificación de las funciones, las operaciones relacionadas con la aplicación de la derivada de un producto y las fórmulas que se deben aplicar.

Referencias

[1] Arrieche, M. *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*, Tesis doctoral. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada. 2002.

[2] Arrieche, M. *Línea de investigación perspectivas del enfoque semiótico-antropológico para la didáctica de la matemática*, Paradigma, **24**(2) (2003), 151–160.

[3] Contreras de la Fuente, A. *La enseñanza del Análisis matemático en el bachillerato y primer curso de la universidad. Perspectiva desde los enfoques epistemológico y semiótico*, Actas de las XVI Jornadas del SI-IDM. Huelva. 2000.

[4] Contreras de la Fuente, A. *El límite en el bachillerato y primer curso de la universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión.*

Actas del IV Simposio de la SEIEM. Huesca. Disponible: http://www.ugr.es/local/seiem/IV Simposio.htm. 2001.

[5] Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. *Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal*. Recherches en Didactiques des Mathématiques, **25**(2) (2005), 151-186.

[6] Godino, J. y Batanero, C. *Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos.* Recherches en didactique des Mathématiques, **14**(3) (1994), 325-355.

[7] Godino, J.D. y Arrieche, M. *El análisis semiótico como técnica para determinar significados.* Comunicación presentada en el V Simposio de la SEIEM, Grupo de Trabajo DMDC. Almería. 2001.

[8] Godino, J. *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible: `http://www.ugr.es/local/jgodino/` 2002.

[9] Godino, J. *Teoría de las funciones semióticas en didáctica de las matemáticas*, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible: `http://www.ugr.es/local/jgodino/` 2003.

[10] Goetz, J, y Lecompte, M. *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*, Morata, Madrid, 1988.

[11] Hitt, F. *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*, XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia. Disponible:`http://www.hemerodigital_unam.mx/` 2003.

[12] Meléndez, A. *Significados Personales de la Derivada en Estudiantes de Ingeniería*, Tesis de Maestría. Universidad Rómulo Gallegos. San Juan de los Morros. Venezuela. 2005.