Divulgaciones Matemáticas Vol. 17 No. 1 (2016), pp. 87–91

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

Varios de los problemas propuestos a lo largo de los últimos años han quedado sin resolver hasta el día de hoy, a saber: 24–28, 44, 51, 54, 59, 61–63, 65–66, 68–69, 72–91, 94–106, 108–113, 116, 118–123, 125–130 y 132–137. En los números siguientes se tratará de llenar ese vacío, publicando más soluciones que problemas nuevos. En ese sentido invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para los problemas mencionados en la lista anterior.

138. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.)*

Let $m, n \geq 1$ be two natural numbers. Calculate

$$\int_0^1 \left\{ \frac{m}{nx} \right\} dx,$$

where $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ denotes the fractional part of a.

2 Soluciones

11. [**6**(1) (1998) p. 81, propuesto por el editor.]

Dados tres enteros r, s y t mayores que 1, ¿existirá siempre un grupo finito con dos elementos x e y tales que los órdenes de x, y y xy sean r, s y t respectivamente?

Solución del autor. La respuesta es que sí. Tomemos dos enteros n y k tales que $n \geq r \geq k > 0$. Sea x el r-ciclo $(1, 2, \ldots, r)$ en el grupo simétrico $G = S_n$. Sea y el $(n - r + k)$-ciclo

$(k, k-1, \ldots, 2, 1, r+1, r+2, \ldots, n)$. Entonces la composición (de izquierda a derecha) xy es el $(n-k+1)$-ciclo $(k, k+1, \ldots, r, \ldots, n)$. Es claro que si conseguimos escoger n y k tales que $n - r + k = s$ y $n - k + 1 = t$ entonces está listo. La solución de este sistema es $n = (r+s+t-1)/2$, $k = (r+s-t+1)/2$. Así hemos hallado una solución para las instancias del problema con $r+s+t$ impar y $r+s > t$. La última restricción se elimina fácilmente como sigue: si $r+s \leq t$ entonces $s+t > r$, así se pueden hallar permutaciones y, z tales que $o(y) = s$, $o(z) = t$ y $o(yz) = r$. Pongamos $x = (yz)^{-1} = (z^{-1})(y^{-1})$. Entonces $o(x) = o(yz) = r$ y $o(xy) = o(z^{-1}) = o(z) = t$.

Si $r+s+t$ es par consideraremos cuatro subcasos:

(a) r par y $r+s > t$.
Pongamos $x = (1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, r)\ (r+1, r+2)$ y $y = (k, k-1, \ldots, 2, 1, r+1, r+2, \ldots, n)$. Obviamente $o(x) = r$ y $o(y) = n - r + k$. Notemos que $1, 2, \ldots, k-1$ y $r+2$ permanecen fijos bajo la composición (de izquierda a derecha) de x e y, así $xy = (k, k+1, \ldots, r, r+1, r+3, \ldots, n)$ y $o(xy) = n - k$. Ahora escojamos $n = (r+s+t)/2$ y $k = (r+s-t)/2$ para obtener $o(y) = s$ y $o(xy) = t$.

(b) r par y $r+s \leq t$.
En este caso $r+t > s$ y por (a) hay permutaciones w y z tales que $o(w) = r$, $o(z) = t$ y $o(wz) = s$. Pongamos $x = w^{-1}$, $y = wz$ y listo.

(c) s par.
Por los casos (a) y (b) hay permutaciones y, z tales que $o(y) = s$, $o(z) = t$ y $o(yz) = r$. Poniendo $x = (yz)^{-1}$ se tiene $o(x) = o(yz) = r$ y $o(xy) = o(z^{-1}) = o(z) = t$.

(d) t par.
En este caso por (b) hay permutaciones y, z tales que $o(y) = s$, $o(z) = t$ y $o(yz) = r$. Poniendo $x = (yz)^{-1}$ se tiene $o(x) = o(yz) = r$, $o(xy) = o(z^{-1}) = o(z) = t$.

22. [**8**(1) (2000) p. 88.]

Sean n puntos distintos, P_1, P_2,…, P_n, sobre una recta del plano ($n \geq 2$). Se consideran las circunferencias de diámetro P_iP_j ($1 \leq i < j \leq n$) y coloreamos cada circunferencia con uno de k colores dados. Llamamos (n, k)-nube a esta configuración.

Para cada entero positivo k, determine todos los n para los cuales se verifica que toda (n, k)-nube contiene dos circunferencias tangentes exteriormente del mismo color,

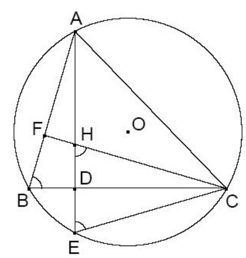
Nota: Para evitar ambigüedades, los puntos que pertenecen a más de una circunferencia no llevan color.

Solución del editor. La respuesta es $n > 2^k$. En otras palabras, con k colores se pueden colorear todas las circunferencias de una nube de manera aceptable (es decir de modo que circunferencias tangentes exteriormente sean de distinto color) hasta para $n = 2^k$, pero no más. La prueba es por inducción. Si $k = 1$ el resultado es obvio. Si asumimos que es cierto para k, entonces la nube con 2^{k+1} puntos se colorea así: primero se colorean de manera aceptable con los colores $1, \ldots, k$ las circunferencias con diámetros P_iP_j para $1 \leq i < j \leq 2^k$. Lo mismo se hace con las circunferencias con diámetros P_iP_j para $2^k + 1 \leq i < j \leq 2^{k+1}$. Finalmente las circunferencias con diámetros P_iP_j tales que $i \leq 2^k < j$ se colorean con el color $k+1$, y listo. Ahora bien, si para algún $n > k$ la nube se puede colorear con k colores, consideremos el conjunto A de los puntos P_i que son extremo izquierdo (i.e., el más cercano a P_1) de un diámetro de una circunferencia de color k, y sea B su complemento en $\{P_1, \ldots, P_n\}$. Las circunferencias con dos puntos en A no pueden ser de color k, como tampoco pueden serlo las que tienen dos puntos en B. Pero uno de estos dos conjuntos debe tener más de 2^{k-1} puntos, y se contrtadice la hipótesis inductiva.

92. [**12**(2) (2004) p. 183, propuesto por Francisco J. García Capitán, Córdoba, España.]

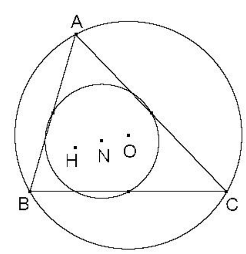
Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de los lados de todos los triángulos que tienen un ortocentro dado y están inscritos en una circunferencia dada es otra circunferencia.

Solución del autor. En la figura hemos trazado el triángulo ABC y sus alturas AD y CF que se cortan en el ortocentro H. La prolongación de AD corta en E a la circunferencia circunscrita. Pues bien, el triángulo CEH es isósceles. En efecto, $\angle AEC = \angle ABC$, ya que ambos son ángulos inscritos que abarcan el mismo ángulo. Por otro lado, los triángulos rectángulos BFC y HDC son semejantes, ya que tienen un ángulo común.



Por tanto, es $\angle ABC = \angle FBC = \angle DHC$ y deducimos que $\angle DEC = \angle DHC$ y que CEH es isósceles.Por ser CEH isósceles, la recta BC es la mediatriz de EH, de manera que si del triángulo ABC conocemos solo el ortocentro H, la circunferencia circunscrita y el vértice A sobre ella podemos hallar fácilmente los otros dos vértices.

Por los tres puntos medios de los lados del triángulo así construido pasará la circunferencia de los nueve puntos de dicho triángulo, cuyo centro N sabemos que está en el punto medio de H y O, y cuyo radio r es la mitad del radio R de la circunferencia circunscrita. Pero al ser fijos O, H y R también lo son N y r, por lo que todos los puntos medios de los triángulos estarán en una misma circunferencia.

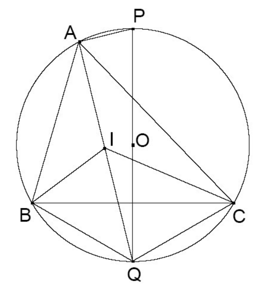


93. [**12**(2) (2004) p. 183, propuesto por Francisco J. García Capitán, Córdoba, España y Ricardo Barroso Campos, Universidad de Sevilla, España.]

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de los lados de todos los triángulos que tienen un incentro dado y están inscritos en una circunferencia dada?

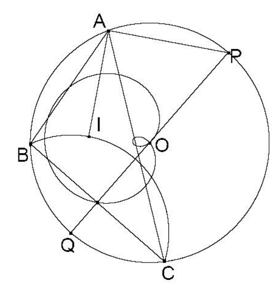
Solución de los autores. Sabemos que el ortocentro H, el baricentro G y el circuncentro O son puntos alineados, cumpliéndose además que $HG : GO = 2 : 1$, por lo que si el baricentro y el circuncentro fueran fijos, también lo sería el ortocentro, reduciéndose el problema al caso ya resuelto. Observemos para empezar que, con las condiciones del problema, la circunferencia inscrita al triángulo es fija en posición, ya que I es fijo, y también en tama no, en virtud de la relación $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (fórmula de Euler), siendo aquí R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita.

Consideremos la figura de la derecha. En ella hemos trazado un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita con centro O. También vemos el incentro I y las bisectrices AI, BI, CI. La prolongación de AI corta a la circunferencia circunscrita en Q, punto medio del arco BC, ya que los ángulos BAQ y QAC son iguales. Entonces, al trazar el diámetro PQ, resultará que el ángulo PAQ es recto, y PQ será la mediatriz del lado BC.

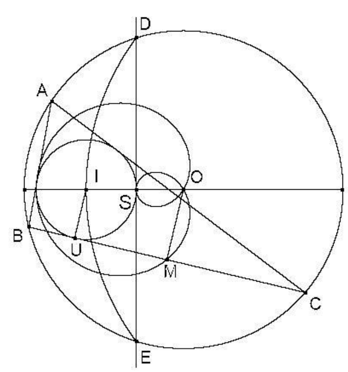


Razonemos ahora que el triángulo QBI es isósceles, con $QB = QI$. Llamemos α, β y γ a las mitades de los ángulos A, B y C. Entonces $\angle IBC = \beta$ y $\angle CBQ = \alpha$, así que $\angle IBQ = \alpha+\beta$. Por otro lado, también es $\angle BIQ = \alpha + \beta$, por ser $\angle IBA = \beta$ y $\angle BAI = \alpha$. Razonando de forma parecida concluimos que $QI = QC$ y por tanto B y C están en la circunferencia de centro Q y radio QI. Con todo lo expuesto, si del triángulo ABC sólo nos son dados el incentro I, la circunferencia circunscrita, con centro O, y el vértice A sobre ella, para determinar B y C bastará trazar a IA una perpendicular por A, que cortará en P a la circunferencia circunscrita. Uniendo P con O podremos obtener el punto Q y, finalmente, trazando una circunferencia con centro Q y radio QI, podremos determinar los puntos B y C como intersección de dicha circunferencia con la circunferencia circunscrita dada.

Ahora, podemos usar la orden Lugar geométrico de *Cabri-Géomètre* sobre el punto medio de uno los lados del triángulo para encontrar el lugar geométrico buscado. El lugar geométrico encontrado se llama *caracol de Pascal* (limaçon de Pascal). Este caracol de Pascal es la curva pedal de la circunferencia inscrita al ABC, respecto del circuncentro O. Para hallar la curva pedal de una curva cualquiera respecto de un punto O, se traza la recta tangente a la curva por cualquier punto U y se considera en ésta el punto M tal que OM es perpendicular a MU.



Como vemos en la figura siguiente, cada recta tangente a la circunferencia de centro I corresponde a un lado de un triángulo que tiene a dicha circunferencia como circunferencia inscrita.



Es claro en este caso que OM es perpendicular a MU (el lado BC es una cuerda de la que M

es su punto medio). Si asignamos coordenadas de manera que el circuncentro es $O = (0,0)$ y el incentro es $I = (-a, 0)$, puede comprobarse que la ecuación del lugar geométrico es

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = r^2(x^2 + y^2),$$

cumpliendo r que $a^2 = R^2 + 2Rr$.