Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Postgrado de Matemáticas
CILA

Abducción vs. revisión no prioritaria

Lic. María Victoria León Sánchez

Trabajo para optar al título de
Magister scienteae en Matemáticas

Tutor: Dr. Ramón Pino

Mérida-Venezuela
Diciembre 2014

DEDICATORIA

A mis padres, hermanos, sobrinos y a mi querido esposo.

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios por darme la fe y fortaleza en los momentos más difíciles, guiando siempre mi camino. Deseo expresar aquí mi gratitud a todas aquellas personas que con su valiosa colaboración contribuyeron, de una u otra manera, en el desarrollo de este trabajo, en especial al profesor Ramón Pino, por su paciencia, dedicación, ayuda y apoyo. También agradezco a los miembros del jurado por la revisión y corrección del texto.

Queremos agradecer al CDCHT-ULA por el financiamiento parcial del proyecto código C-1888-14-05-Em.

RESUMEN

Se persigue el estudio y caracterización de varias relaciones de explicación definidas via operadores de revisión de credibilidad limitada introducidos por Hansson et al. [8] y estudiados recientemente por Booth et al. [2]. Este es un trabajo que continúa el estudio sistemático de las relaciones de explicación iniciado por Pino y Uzcátegui [11], posteriormente profundizado por los mismos autores en [12] y por Díaz y Uzcátegui en [5, 4]. Walliser et al. [14] hacen un estudio similar al realizado en [11] sobre las conexiones existentes entre los operadores de revisión AGM [1] y las relaciones de explicación definidas a través de éstos operadores. Aquí nosotros nos proponemos prolongar este estudio usando ideas liminares de Pino [10].

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Cómo encontrar explicaciones es una tarea clave en muchas áreas tales como el diagnóstico médico, la busqueda de causas a disfuncionamientos en sistemas complejos, etc. La utilización de modelos que usan la lógica matemática es de importancia crucial en Inteligencia Artificial para encontrar algoritmos para decidir cuáles son las mejores explicaciones de una observación. Esto puede ser útil no solo para el diseño de agentes autónomos (robots), sino para el diseño sistemas semi automáticos de ayuda a los humanos en el diagnóstico.

En el enfoque de Pino y Uzcátegui [11] hay una teoría de base Σ en la cual se basa el razonamiento explicatorio. Cuando un par (α, γ) está en la relación de explicación $\rhd_\Sigma$, lo cual se denota $\alpha \rhd_\Sigma \gamma$, se tiene que γ es una explicación consistente de α en el sentido siguiente: Σ y γ son consistentes y además Σ y γ implican lógicamente α, lo cual es denotado $\gamma \vdash_\Sigma \alpha$. Ahora bien, esto es una fuerte hipótesis sobre las explicaciones. Ya en el trabajo [12] se definen relaciones de explicación menos restrictivas. Ese tipo de relaciones es estudiado por Walliser et al. [14].

Usar la revisión para definir explicaciones es una idea vieja. Fue introducida por Becher y Boutilier [3]. Walliser et al. [14] llevan este estudio más lejos. En su trabajo, Walliser et al. [14], definen varias relaciones de explicación asociadas a un operador de revisión. Ellos logran caracterizar axiomáticamente esas relaciones y mostrar la conexión profunda con los operadores de revision AGM.

Nuestro propósito en esta memoria es realizar un estudio paralelo al de Waliser et al. en el marco de la revisón de credibilidad limitada.

Esta memoria esta organizada de la siguiente manera: en el capítulo 1 introduciremos los operadores de revisión [1, 9, 13] que cumplen el principio de prioridad de la nueva información y un tipo de operadores de revisión no priotarios como lo son los operadores de revisión de credibilidad limitada introducidos por Hansson et al. [8] y recientemente estudiados en el marco de la lógica proposicional finita y generalizados al marco de estados epistémicos complejos [2]. De igual manera incluimos las relaciones de explicación propuesta por Walliser et al. [14] en el caso ordenado, en particular el teorema de representación. En el capítulo 2 presentaremos la axiomatica de las relaciones abductivas ordenadas en el marco de la revisión de credibilidad limitada y daremos un teorema de representación semántico. En el capítulo 3 se realizará el mismo estudio del capítulo 2 para el caso de las relaciones abductivas débilmente reflexivas.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. La revisión Katsuno-Mendelzon

Los modelos lógicos matemáticos de la revisión de creencias se inician a finales de los años 70. Esos modelos pretenden dar cuenta del fenómeno de la incorporación de una nueva información, prioritaria, a un marco de creencias, de manera que el resultado sea consistente. El trabajo fundador más completo es el llamado marco AGM [1], trabajo hecho por Alchourrion, Gardenfors y Makinson en 1985, el cual estudia un modelo lógico matemático de un operador llamado de revisión: una función que incorpora una nueva información (fórmula sobre el lenguaje) al conjunto de creencias de un agente (teorías lógicas) para obtener un nuevo conjunto de creencias revisado. Estos operadores están regidos por tres principios fundamentales. A saber: el principio de *coherencia* que nos dice que el resultado debe ser consistente lógicamente; principio de *cambio minimal* que nos dice que el resultado debe ser lo más parecido posible a la vieja información; la *prioridad de la nueva información* que dice que la nueva información debe incorporarse al resultado de la revisión. Ellos sugieren que un buen operador de revisión debe satisfacer 8 postulados básicos.

Estos postulados fueron propuestos sobre bases filosóficas, plenamente justificadas en un marco general. En 1991 Katsuno y Mendelzon crearon una forma de representar los conjuntos de creencias en el caso finito (número finito de variables proposicionales) y reformularon de manera sencilla el marco AGM. En ese marco, llamado KM [9], se considera un lenguaje proposicional finito y se representa al conjunto de creencias por medio de una fórmula del lenguaje.

Antes de presentar el marco KM de manera precisa, recordemos las notaciones más básicas de la lógica proposicional y de ciertas relaciones binarias cruciales en la presentación. Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de fórmulas de un lenguaje proposicional sobre un conjunto finito de variables proposicionales. Sea $\mathcal{V}$ el conjunto de valuaciones para el conjunto de variables proposicionales. Si $\omega \in \mathcal{V}$ y ω satisface α escribiremos $\omega \vDash \alpha$, es decir, ω es un modelo de α. $\mathcal{L}^*$ es el conjunto de fórmulas consistentes. El conjunto de modelos de la fórmula α es denotado por $[\![\alpha]\!]$ y escribiremos $\alpha_{\omega,\omega'}$ si $[\![\alpha]\!] = \{\omega, \omega'\}$. Sea β cualquier fórmula, se dice que una fórmula α_ω es completa si tiene un único modelo, $[\![\alpha_\omega]\!] = \omega$, y además $\alpha_\omega \vdash \beta$ o $\alpha_\omega \vdash \neg\beta$. De ahora en adelante, cada vez que se denote una fórmula como α_ω, esta será completa. Si $\preccurlyeq$ es un preorden total (relación total y transitiva) entonces $\simeq$ es una notación para asociar una relación de equivalencia ($a \simeq b$ si y sólo si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq a$) y ($a \prec b$ si y sólo si $a \preccurlyeq b$ y $b \not\preccurlyeq a$).

Definición 1.1. *Una función $\circ : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ que toma una fórmula φ que representa un conjunto de creencias y a otra fórmula α que representa la nueva información y las envía a una nueva fórmula proposicional denotada $\varphi \circ \alpha$ es llamado operador de revisión KM si se satisfacen los siguientes postulados:*

(R1) $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$

(R2) $\varphi \wedge \alpha \nvdash \bot \;\Rightarrow\; \varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$

(R3) $\alpha \nvdash \bot \;\Rightarrow\; \varphi \circ \alpha \nvdash \bot$

(R4) $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \;\; y \;\; \alpha_1 \equiv \alpha_2 \;\Rightarrow\; \varphi_1 \circ \alpha_1 \equiv \varphi_2 \circ \alpha_2$

(R5) $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$

(R6) $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \nvdash \bot \;\Rightarrow\; (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \equiv \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$

Donde (R1) es llamado Éxito, (R2) Economía (o vacuidad), (R3) Consistencia, (R4) Independencia de la sintáxis, (R5) Relacional uno y (R6) Relacional dos.

En el caso finito, la definición de revisión KM es equivalente a la de AGM.

Definición 1.2. *Sea $\varphi \mapsto \preccurlyeq_\varphi$ una función que asigna a cada fórmula proposicional φ un preorden total $\preccurlyeq_\varphi$ sobre $\mathcal{V}$. Decimos que esta asignación es fiel si y sólo si:*

1. *Si $\omega_1 \models \varphi$ entonces $\omega_1 \preccurlyeq_\varphi \omega_2$ para cualquier ω_2*

2. *Si $\omega_1 \models \varphi$ y $\omega_2 \not\models \varphi$, entonces $\omega_1 \prec_\varphi \omega_2$*

3. *Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ entonces $\preccurlyeq_{\varphi_1} = \preccurlyeq_{\varphi_2}$*

Donde:

- *$\omega_1 \prec_\varphi \omega_2$ está definido como $\omega_1 \preccurlyeq_\varphi \omega_2$ y $\omega_2 \not\preccurlyeq_\varphi \omega_1$*

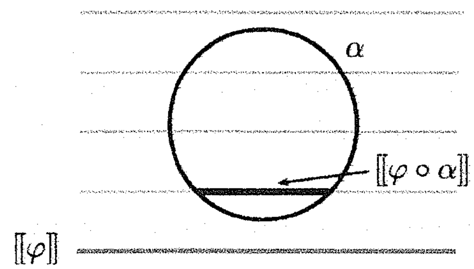
- *$\omega_1 \simeq_\varphi \omega_2$ está definido como $\omega_1 \preccurlyeq_\varphi \omega_2$ y $\omega_2 \preccurlyeq_\varphi \omega_1$*

Katsuno y Mendelzon mostraron un teorema de representación para los operadores de revisión.

Teorema 1.1 (H. Katsuno, and A. Mendelzon).
Un operador de revisión $\circ$ satisface los postulados (R1)-(R6) si y sólo si existe una asignación fiel que envia cada fórmula φ a un preorden total $\preccurlyeq_\varphi$ tal que

$$[\![\varphi \circ \alpha]\!] = min\{[\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi\}$$

La figura siguiente ilustra el significado de los teoremas: los niveles son los modelos de $\mathcal{V}$ ordenados por $\preccurlyeq_\varphi$ el resultado son los modelos minimales de α con respecto al preorden $\preccurlyeq_\varphi$.



1.2. Abducción

Muchos procesos que manipulan información pueden ser modelados como procesos que buscan una explicación como el diagnóstico médico, la busqueda de causas a disfuncionamientos en sistemas complejos, etc. Charles Peirce (1931-1958) fue el primero en proponer un concepto de abducción, al que define como "el proceso de formación de una hipótesis explicativa", en donde se parte de un hecho α y se infiere la mejor explicación γ. Por lo general estas explicaciones son llamadas hipótesis de abducción, las cuales deben explicar los hechos en cuestión y ser los mejores o al menos buenos candidatos para explicar la observación. Una observación puede tener varias explicaciones, y es por esto que usualmente se dice que la abducción es la búsqueda de la mejor explicación de una observación (o de las mejores explicaciones).

Se dice que un razonamiento explicativo es el proceso de inferir una explicación de una observación y un modelo para los razonamientos explicatorios supone la existencia de una relación lógico deductiva entre las observaciones y sus explicaciones. En el enfoque de Pino y Uzcátegui [11] hay una teoría de base Σ en la cual se basa este tipo de razonamiento.

1.2.1. Relaciones explicatorias E-racionales

Definición 1.3. *Dada una observación α y una teoría Σ diremos que una fórmula γ (consistente con Σ) es una explicación de α si $\Sigma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha$.*

Una forma de modelizar la lógica de las explicaciones es a traves de las relaciones explicatorias.

Definición 1.4. *Una relación explicatoria es una relación binaria $\alpha \rhd \gamma$ entre fórmulas tal que*

$$\alpha \rhd \gamma \Rightarrow \Sigma \nvdash \neg\gamma \quad \& \quad \Sigma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha$$

La relación $\alpha \rhd \gamma$ se lee "γ es una relación preferida de α". La colección de fórmulas consistentes con Σ será denotada por $Form_\Sigma$ y el conjunto de posibles explicaciones de una fórmula α es

$$Expl(\alpha) = \{\gamma \in Form_\Sigma : \ \Sigma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha\}$$

Una relación explicatoria $\rhd$ selecciona, para cada α algunas fórmulas en $Expl(\alpha)$ y por esto las llamamos explicaciones preferidas. Usaremos la siguiente abreviación

$$\alpha \vdash_\Sigma \beta \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$$

Definición 1.5. *Una relación explicatoria se dice que es E-racional si satisface las siguientes reglas*

E-CM *Si $\alpha \rhd \gamma$, y para todo $\delta[\alpha \rhd \delta \Rightarrow \delta \vdash_\Sigma \beta]$, entonces $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$.*

E-C-Cut *Si $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$, y para todo $\delta[\alpha \rhd \delta \Rightarrow \delta \vdash_\Sigma \beta]$, entonces $\alpha \rhd \gamma$.*

LLE_Σ *Si $\vdash_\Sigma \alpha \leftrightarrow \alpha'$ y $\alpha \rhd \gamma$, entonces $\alpha' \rhd \gamma$.*

$E - Con_\Sigma$ *Si $\nvdash_\Sigma \neg\alpha$, entonces existe γ tal que $\alpha \rhd \gamma$.*

E-R-Cut $\quad$ *Si* $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$ *y existe* δ *tal que* $\delta \nvdash_\Sigma \beta$ *y* $\alpha \rhd \delta$, *entonces* $\alpha \rhd \gamma$.

LOR $\quad$ *Si* $\alpha \rhd \gamma$ *y* $\beta \rhd \gamma$, *entonces* $(\alpha \vee \beta) \rhd \gamma$.

Donde E-CM abrevia en ingles Explanatory Cautious Monotony, E-C-Cut Explanatory Cautious Cut, LLE_Σ Left Logical Equivalence, E-Con_Σ Explanatory Consistency Preservation, E-R-Cut Explanatory Racional Cut y LOR Left Or.

Pino y Uzcátegui realizan un análisis sistemático de la busqueda de la mejor explicación dada una observación por medio de razonamientos explicatorios y de otro proceso de inferencia llamado razonamiento no monótono. Esto se estudia a través de una relación de consecuencia binaria $\mid\!\sim$ que no es monotona, es decir, que no se cumple la regla de monotonía y de sus propiedades estructurales. Dado esto, algunas preguntas pueden surgir de forma natural ¿Si se sabe como explicar una observación, entonces sabemos cuales son sus consecuencias? o si conocemos las consecuencias de una observación ¿sabemos explicarlas?. Las respuestas a estas interrogantes se pueden encontrar en los trabajos de Pino y Uzcátegui [11, 12, 13] en donde se establecen relaciones estrechas entre estos dos tipos de razonamientos. Más necesariamente, a cada relación de explicación se le asocia una relación de consecuencia y viceversa. Si las relaciones de explicación tienen buenas propiedades, así ocurre con las relaciones de consecuencia asociadas y viceversa. Por ejemplo, si la relación $\rhd$ es E-racional entonces la relación de consecuencia $\mid\!\sim$ asociada será racional.

También es de gran importancia resaltar la relación estrecha entre los operadores de revisión AGM y una tipo particular de relacion de consecuencia llamada E-racionales, esto se debe en virtud al trabajo realizado por P. Gärdenfors and D. Makinson [6] en donde, a cada relación de consecuencia le asocian un operador de revisión AGM con una teoría, y viceversa. Poniendo estos resultados juntos, en el caso en que Σ está constituido por las tautologías, se tiene que hay una relación de va y ven entre las relaciones explicatorias E-racionales y los operadores de revisión AGM.

Siguiendo estas pistas, Walliser et al. [14] establecen varias relaciones directas entre los operadores de revisión AGM y las relaciones explicatorias. Dicho estudio se presenta en la siguiente sección.

1.2.2. Relaciones abductivas en el marco de Walliser et al.

En algunos casos es posible considerar como hipótesis de abducción explicaciones que no necesariamente son buenas, como por ejemplo si el cesped de un campo de futbol está mojado podemos abducir que un camion de bomberos regó el campo. Es por ello que la abducción es no monótona, esto es, la abducción conduce a inferir hipótesis que no pueden ser clásicamente deducidas a partir de hechos dados. Por otro lado cuando una hipótesis es una buena explicación de algunos hechos, eso no quiere decir que es una buena explicación de estos hechos junto a otros hechos.
En el trabajo de Walliser et al. [14], los hechos son representados por proposiciones verdaderas y las hipótesis son proposiciones asumidas, ambos denominados eventos. En lo que sigue de esta memoria, la abducción estará formada por una creencia inicial que denotaremos φ, una nueva información α y una creencia definitiva a fin de incluir una nueva hipótesis.

Esquemas de abducción

Abducción clásica (deducción al revés) se define como:

$$\alpha \rhd_{CL} \gamma \quad \text{si y sólo si} \quad \gamma \vdash \alpha$$

En este esquema ninguna operación de revisión de creencias es involucrada. Es la más sencilla de las inferencias a una buena explicación.

Para los siguientes esquemas se supone que se tiene un operador de revisión $\circ$.

Abducción no transitiva (explicación inversa no transitiva) se define por la siguiente condición:

$$\alpha \rhd_{NT} \gamma \quad \text{si y sólo si} \quad \varphi \circ \gamma \vdash \alpha$$

Este esquema es lógicamente más débil que el anterior y es el único no transitivo. Uno abduce una hipótesis para un hecho si se hubiese añadido este hecho a la creencia después de tener la creencia revisada por la hipótesis, eso significa que la parte "normal" de la hipótesis γ debe implicar el hecho α. Esto corresponde a deducción no monótona al revés.

Abducción no reflexiva (explicación inversa no reflexiva) se define por la siguiente condición:

$$\alpha \rhd_{NR} \gamma \quad \text{si y sólo si} \quad \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$$

Este esquema es lógicamente más fuerte que el anterior y es el único que no posee la propiedad de reflexividad. Afirma que uno abduce una hipótesis de un hecho si explica deductivamente el hecho revisado. Eso significa que la hipótesis γ debe implicar la parte "normal" del hecho α.

Abducción ordenada (explicación inversa ordenada) se define por la siguiente condición:

$$\alpha \rhd_{or} \gamma \quad \text{si y sólo si} \quad \varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$$

La relación binaria es ahora reflexiva y transitiva y por lo tanto es un preorden, es lógicamente más fuerte que el esquema no transitivo pero más débil que el no reflexivo y no se puede comparar con el esquema clásico. La creencia revisada por la hipótesis implicaría lógicamente la creencia revisada por el hecho. Esto significa que la parte "normal" de la hipótesis γ debe implicar la parte "normal" del hecho α.

1.2.3. Relación abductiva ordenada

El siguiente resultado es una modificación en el caso semántico del trabajo realizado por Walliser et al. [14], en donde axiomatizan las relaciones abductivas ordenadas y las relacionan con los operadores de revisión propuestos en el marco AGM [1].

Una relación de inferencia $\rhd$ es abductiva ordenada si y solamente si satisface los siguientes postulados:

(R) Si $\gamma \nvdash \bot$, entonces $\gamma \rhd \gamma$.

(ICD) Si $\alpha \rhd \gamma$, entonces $\alpha \wedge \gamma \nvdash \bot$.

(FDD) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\delta \vdash \gamma$ (con $\delta \nvdash \bot$), entonces $\alpha \rhd \delta$ o $\alpha \wedge (\neg\delta) \rhd \alpha$.

(OD) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\alpha \rhd \delta$, entonces $\alpha \rhd \gamma \vee \delta$.

(MD) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\gamma \vdash \beta$, entonces $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$.

(T) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\gamma \rhd \delta$, entonces $\alpha \rhd \delta$.

(YI) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \rhd \gamma$, entonces $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$.

Donde(R) abrevia Reflexividad, (ICD) Infra Clasicidad Débil,(FDD) Fortalecimiento a la Derecha Débil, (OD) O a la Derecha, (MD) Monotonía Débil, (T) Transitividad y (YI) Y a la izquierda.

Interpretación

(R) Dice que toda explicación es explicada por si misma. (ICD), las explicaciones no son contradictorias con la observación considerada,(FDD) se puede fortalecer una explicación por una premisa dada o bien puede ser abducida la conjunción de si mismo y la explicación reforzada. (OD) O a la Derecha dice que si dos explicaciones corresponden a una misma observación, entonces la disyunción de estas dos tambien explican la observación, (MD) siempre es posible anexar a la observación cualquier consecuencia de su explicación; (T) dice que la relación es transitiva. (YI) Y a la izquierda dice que la explicación se conserva por la conjunción de las observaciones para las cuales la misma explicación fue abducida.

Definición 1.6. *Se define el conjunto de las explicaciones, denotado Expl, como:*

$$Expl = \{\gamma : \text{ existe } \alpha \text{ tal que } \alpha \rhd \gamma\}$$

El conjunto de las explicaciones de α, denotado $Expl(\alpha)$, corresponde a todos las fórmulas γ que cumplen $\alpha \rhd \gamma$ y el conjunto de las observaciones de β, denotado $Obs(\beta)$, corresponde a todas las fórmulas α' que cumplen $\alpha' \rhd \gamma$.

Proposición 1.1. *Las siguientes reglas son derivables de los postulados de abducción ordenada.*

(D1) $\alpha \rhd \gamma \;\Rightarrow\; \gamma \nvdash \bot$.

(D2) $\gamma \vdash \alpha \;\; y \;\; \gamma \nvdash \bot \;\Rightarrow\; \alpha \rhd \gamma \;\; o \;\; \alpha \wedge (\neg\gamma) \rhd \alpha$.

(D3) $\alpha \rhd \gamma \;\; y \;\; \beta \rhd \delta \;\Rightarrow\; \alpha \vee \beta \rhd \gamma \;\; o \;\; \alpha \vee \beta \rhd \delta$.

(D4) $\alpha \rhd \gamma \;\; y \;\; \beta \rhd \gamma \;\Rightarrow\; \alpha \vee \beta \rhd \gamma$.

(D5) $\alpha \rhd \gamma \;\; y \;\; \beta \vdash \alpha \;\Rightarrow\; \gamma \vee \beta \rhd \gamma$.

(D6) $\alpha \rhd \gamma \;\; y \;\; \beta \vdash \alpha \;\; y \;\; \neg(\alpha \rhd \beta) \;\Rightarrow\; \alpha \wedge (\neg\beta) \rhd \gamma$.

(D7) $\alpha \rhd \gamma \;\; y \;\; \gamma \vdash \beta \;\; y \;\; \alpha \wedge \beta \rhd \delta \;\Rightarrow\; (\alpha \rhd \delta)$.

(D8) $\alpha \rhd \gamma \;\Rightarrow\; \alpha \rhd \alpha \wedge \gamma$.

(D9) $Si\; \alpha \rhd \gamma \;\; y \;\; \beta \vdash \alpha \;\; y \;\; \gamma \wedge \beta \rhd \beta \;\Rightarrow\; \alpha \rhd \beta$.

Demostración:

(D1) (No contradicción). Si $\alpha \rhd \gamma$ por (ICD) se tiene $\alpha \wedge \gamma \nvdash \bot$, así $\gamma \nvdash \bot$.

(D2) Si $\gamma \vdash \alpha$ y $\gamma \nvdash \bot$, entonces $\alpha \rhd \gamma$ o $\alpha \wedge (\neg\gamma) \rhd \alpha$.
Si $\gamma \vdash \alpha$ y $\gamma \nvdash \bot$ entonces $\alpha \nvdash \bot$, por (R) se tiene $\alpha \rhd \alpha$ y de la hipótesis y (FDD) se sigue que $\alpha \rhd \gamma$ o $\alpha \wedge (\neg\gamma) \rhd \alpha$.
Más aún, $\alpha \rhd \gamma$ y $\alpha \wedge (\neg\gamma) \rhd \alpha$ no pueden ocurrir simultaneamente, pues si este es el caso, por (T) se tiene $\alpha \wedge (\neg\gamma) \rhd \gamma$ y por (ICD) se sigue $\alpha \wedge (\neg\gamma) \wedge \gamma \vdash \bot$ lo cual es una contradicción.

(D3) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \rhd \delta$, entonces $\alpha \vee \beta \rhd \gamma$ o $\alpha \vee \beta \rhd \delta$.

Es cierto que $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ y $\beta \vdash \alpha \vee \beta$, entonces por (D2) se tiene

$$[\alpha \vee \beta \rhd \alpha] \text{ o } [(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha) \rhd \alpha \vee \beta] \quad \text{y} \quad [\alpha \vee \beta \rhd \beta] \text{ o } [(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta) \rhd \alpha \vee \beta]$$

Supongamos que no ocurre $(\alpha \vee \beta \rhd \alpha)$ ni $(\alpha \vee \beta \rhd \beta)$, entonces se tiene $(\neg\alpha \wedge \beta \rhd \alpha \vee \beta)$ y $(\neg\beta \wedge \alpha \rhd \alpha \vee \beta)$, por (YI) se sigue $(\neg\alpha) \wedge \beta \wedge (\neg\beta) \wedge \alpha \rhd \alpha \vee \beta$, es decir $\bot \rhd \alpha \vee \beta$ y por (ICL), $\bot \wedge (\alpha \vee \beta) \nvdash \bot$ lo cual es una contradicción.
Luego $(\alpha \vee \beta \rhd \alpha)$ o $(\alpha \vee \beta \rhd \beta)$ ocurre y junto a la hipótesis y (T) se tiene que $\alpha \vee \beta \rhd \gamma$ o $\alpha \vee \beta \rhd \delta$.

(D4) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \rhd \gamma$, entonces $\alpha \vee \beta \rhd \gamma$. Se obtiene directamente de la proposición anterior.

(D5) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \vdash \alpha$, entonces $\gamma \vee \beta \rhd \gamma$.
Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$, de (D1) se tiene $\gamma \nvdash \bot$ y de (R) $\gamma \rhd \gamma$, por (D4) $\alpha \vee \gamma \rhd \gamma$, además es cierto que $\gamma \vdash \gamma \vee \beta$ y por (MD) $(\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \rhd \gamma$. Luego, por la hipótesis $\beta \vdash \alpha$ que muestra $(\alpha \vee \gamma) \wedge (\gamma \vee \beta) \equiv \gamma \vee \beta$, así $\gamma \vee \beta \rhd \gamma$.

(D6) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \vdash \alpha$ y $\neg(\alpha \rhd \beta)$, entonces $\alpha \wedge (\neg\beta) \rhd \gamma$.
Por hipótesis $\beta \vdash \alpha$ y $\neg(\alpha \rhd \beta)$ de (D2) se tiene $\alpha \wedge (\neg\beta) \rhd \alpha$ y como $\alpha \rhd \gamma$, por (T) se sigue $\alpha \wedge (\neg\beta) \rhd \gamma$.

(D7) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\gamma \vdash \beta$ y $\alpha \wedge \beta \rhd \delta$, entonces $(\alpha \rhd \delta)$.
Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$ y $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ y $\neg(\alpha \rhd \alpha \wedge \beta)$, por (D6) $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$ o equivalentemente $\alpha \wedge \neg\beta \rhd \gamma$, de (ICD) $\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma \nvdash \bot$, en particular $\neg\beta \wedge \gamma \nvdash \bot$, por hipótesis $\gamma \vdash \beta$ entonces $\beta \wedge \gamma \nvdash \bot$ lo cual es una contradicción con $\gamma \vdash \beta$. Por lo tanto, se tiene que $\alpha \rhd \alpha \wedge \beta$ ocurre, luego por (T) se sigue $\alpha \rhd \delta$.

(D8) Si $\alpha \rhd \gamma$, entonces $\alpha \rhd \alpha \wedge \gamma$.
Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$, $\alpha \wedge \gamma \vdash \alpha$ y $\neg(\alpha \rhd \alpha \wedge \gamma)$, por (D6) se tiene $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \gamma) \rhd \gamma$ o de forma equivalente $\alpha \wedge \neg\gamma \rhd \gamma$ luego por (ICD) $\alpha \wedge \neg\gamma \wedge \gamma \nvdash \bot$, lo que es una

contradiccioón. Así $\alpha \rhd \alpha \wedge \gamma$.

(D9) Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \vdash \alpha$ y $\gamma \vee \beta \rhd \beta$, entonces $\alpha \rhd \beta$.
Supongamos que $\gamma \vee \beta \rhd \beta$ y $\beta \vdash \alpha$, por (MD) $(\gamma \vee \beta) \wedge \alpha \rhd \beta$ además por la hipótesis $\alpha \rhd \gamma$ y por $\gamma \vdash \gamma \vee \beta$ se tiene por (D7) que $\alpha \rhd \beta$.

Teorema 1.2 (B. Walliser, D. Zwirn, and H. Zwirn).
Si un operador de revisión $\circ$ satisface los postulados $(R1)-(R6)$, entonces la relación binaria $\alpha \rhd \gamma$ entre fórmulas definida como

$$\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow \varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha, \qquad \textit{con} \quad \varphi \circ \gamma \nvdash \bot$$

es una relación abductiva ordenada.

Demostración:
Basta verificar que se cumple los postulados (R), (ICD), (FDD), (OD), (MD), (T), (YI).

(R) Supongamos que $\gamma \nvdash \bot$, queremos mostrar que $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \gamma$. De la hipótesis y (R3) se deduce $\varphi \circ \gamma \nvdash \bot$, así $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \gamma$.

(ICD) Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$, queremos ver que $\alpha \wedge \gamma \nvdash \bot$. De la hipótesis y (R1) se tiene $\varphi \circ \gamma \nvdash \bot$, $\varphi \circ \gamma \vdash \gamma$ y $\varphi \circ \gamma \vdash \alpha$ (pues $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ y $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$), en donde se deduce $\varphi \circ \gamma \vdash \alpha \wedge \gamma$, así $\alpha \wedge \gamma \nvdash \bot$.

(FDD) Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$ y $\delta \vdash \gamma$ (con $\delta \nvdash \bot$), queremos probar que $\alpha \rhd \delta$ o $\alpha \wedge (\neg\delta) \rhd \alpha$.

Caso 1: Supongamos que $\delta \wedge (\varphi \circ \gamma) \nvdash \bot$
De $\delta \vdash \gamma$ y (R4) se deduce $\varphi \circ \delta \equiv \varphi \circ (\gamma \wedge \delta)$. Por la hipótesis del caso y (R6) se tiene $\varphi \circ (\gamma \wedge \delta) \vdash (\varphi \circ \gamma) \wedge \delta$, en donde es cierto $(\varphi \circ \gamma) \wedge \delta \vdash \varphi \circ \gamma$, luego por transitividad $\varphi \circ \delta \vdash \varphi \circ \gamma$, así $\alpha \rhd \delta$.

Caso 2: Supongamos que $\delta \wedge (\varphi \circ \gamma) \vdash \bot$
De la hipótesis y (R1) se tiene $\gamma \nvdash \bot$, $\varphi \circ \alpha \nvdash \bot$, $\varphi \circ \gamma \vdash \alpha$ y $\varphi \circ \gamma \vdash \gamma$, de donde se deduce $(\varphi \circ \alpha) \wedge \gamma \nvdash \bot$ y $\varphi \circ \gamma \equiv (\varphi \circ \gamma) \wedge \alpha$. De (R5) se tiene $\varphi \circ \gamma \equiv (\varphi \circ \gamma) \wedge \alpha \equiv \varphi \circ (\alpha \wedge \gamma) \equiv (\varphi \circ \alpha) \wedge \gamma$. Luego, por la hipótesis del caso y lo anterior se tiene $\delta \wedge [(\varphi \circ \alpha) \wedge \gamma] \vdash \bot$, entonces $\delta \wedge (\varphi \circ \alpha) \vdash \bot$, así $\varphi \circ \alpha \vdash \neg\delta$, de ello se obtiene $(\varphi \circ \alpha) \wedge (\neg\delta) \equiv \varphi \circ \alpha$ y por (R5) se sigue que $(\varphi \circ \alpha) \wedge \neg\delta \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \neg\delta)$, entonces $\varphi \circ \alpha \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \neg\delta)$, así $\alpha \wedge (\neg\delta) \rhd \alpha$.

(OD) Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$ y $\alpha \rhd \delta$, queremos probar que $\alpha \rhd \gamma \vee \delta$. Por la distributividad a la derecha se tiene que $\varphi \circ (\gamma \vee \delta)$ es equivalente a $\varphi \circ \gamma$ o $\varphi \circ \delta$ o $(\varphi \circ \gamma) \vee (\varphi \circ \delta)$, en cualquier caso y por la hipótesis se tiene que $\varphi \circ (\gamma \vee \delta) \vdash \gamma \circ \alpha$, así $\alpha \rhd \gamma \vee \delta$.

(MD) Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$ y $\gamma \vdash \beta$, queremos probar que $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$. De (R1) y la hipótesis se obtiene $\varphi \circ \gamma \vdash \beta$ y como $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ se deduce $\varphi \circ \gamma \vdash (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$. (R5) muestra que $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$ y por lo anterior se tiene $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$, así $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$.

(T) Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$ y $\gamma \rhd \delta$, por definición $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ y $\varphi \circ \delta \vdash \varphi \circ \gamma$ obteniendose $\varphi \circ \delta \vdash \varphi \circ \alpha$, así $\alpha \rhd \delta$.

(YI) Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \rhd \gamma$, queremos probar que $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$. De la hipótesis y (R1) se tiene que $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ y $\varphi \circ \gamma \vdash \beta$, (pues $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \beta$ y $\varphi \circ \beta \vdash \beta$) de donde se deduce que $\varphi \circ \gamma \vdash (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$. De (R4) se tiene $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$, luego $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$, así $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$.

Teorema 1.3 (B. Walliser, D. Zwirn, and H. Zwirn).
Si la relación $\rhd$ es abductiva ordenada, entonces el operador $\circ$, relativo a φ, donde $\varphi = \bigwedge\!\!\!\bigwedge \beta$ con $\beta \in \{\beta \rhd \top\}$ definido por

$$\varphi \circ \alpha \equiv \bigwedge\!\!\!\bigwedge \beta, \qquad con \quad \beta \in \{\beta : \beta \rhd \alpha\}$$

satisface los postulados $(R1)-(R6)$. *Mas aún,* $\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow \varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ *con* $\varphi \circ \gamma \nvdash \bot$ *y* $\varphi \circ \alpha \equiv \{\alpha_\omega : \alpha \rhd \alpha_\omega\}$

Demostración:

i) Primero demostremos que $\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow \varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ con $\varphi \circ \gamma \nvdash \bot$

(Sólo si) Si $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ con $\varphi \circ \gamma \nvdash \bot$ entonces $\alpha \rhd \gamma$.
Dado que $\varphi \circ \alpha \nvdash \emptyset$, existe β tal que $\beta \rhd \alpha$ y por (ICD) $\alpha \wedge \beta \nvdash \bot$ así $\alpha \nvdash \bot$ y por (R) $\alpha \rhd \alpha$, luego $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$ y $\varphi \circ \gamma \vdash \alpha$. Por (FDD) se sigue que $\alpha \rhd \varphi \circ \gamma$ o $(\alpha \wedge \neg(\varphi \circ \gamma)) \rhd \alpha$, pero esto último no puede ocurrir, pues por definición $\varphi \circ \alpha \vdash \beta$ para todo $\beta \in Obs(\alpha)$, así se tendría $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha \wedge \neg(\varphi \circ \gamma)$ y por transitividad $\varphi \circ \gamma \vdash \alpha \wedge \neg(\varphi \circ \gamma)$ lo cual es una contradicción, así se tiene $\alpha \rhd \varphi \circ \gamma$. Por otro lado, de la definición de $\varphi \circ \gamma$ y de (YI), se tiene $\varphi \circ \gamma \rhd \gamma$. Luego por transitividad se tiene $\alpha \rhd \gamma$.

(Si) Si $\alpha \rhd \gamma$, entonces $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ con $\varphi \circ \gamma \nvdash \bot$.
Si $\beta \rhd \alpha$, entonces de la hipótesis y la transitividad se tiene $\beta \rhd \gamma$. Luego, $\{\beta : \beta \rhd \alpha\} \subseteq \{\delta : \delta \rhd \gamma\}$, así $\bigwedge\!\!\!\bigwedge \delta \vdash \bigwedge\!\!\!\bigwedge \beta$ que por definición es $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$. De (YI) y la definición de $\varphi \circ \gamma$ se tiene $\varphi \circ \gamma \rhd \gamma$ y de (ICD) $(\varphi \circ \gamma) \wedge \gamma \nvdash \bot$, así $\varphi \circ \gamma \nvdash \bot$.

ii) Demostremos que $\varphi \circ \alpha \equiv \{\alpha_\omega : \alpha \rhd \alpha_\omega\}$

(Si) Si α_ω es tal que $\alpha \rhd \alpha_\omega$, entonces $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$
Esta prueba es equivalente a demostrar que: si $\beta \rhd \alpha$ entonces $\alpha_\omega \vdash \beta$. Supongamos que $\beta \rhd \alpha$ y $\alpha \rhd \alpha_\omega$, de la transitividad tenemos $\beta \rhd \alpha_\omega$ y por (ICD) se tiene $\beta \wedge \alpha_\omega \nvdash \bot$, así $\alpha_\omega \vdash \beta$.

(Sólo si) Si $\alpha_\omega \in \{\delta : \beta \rhd \alpha \Rightarrow \delta \vdash \beta\}$ entonces, $\alpha \rhd \alpha_\omega$. Supongamos que $\alpha \rhd \alpha_\omega$ no se cumple. Por hipótesis, tenemos $(\alpha \rhd \alpha) \wedge (\alpha_\omega \vdash \alpha) \wedge \neg(\alpha \rhd \alpha_\omega)$, entonces por (D6) se tiene $\alpha \wedge (\neg\alpha_\omega) \rhd \alpha$ y de nuevo por hipótesis, $\alpha_\omega \vdash \alpha \wedge (\neg\alpha_\omega)$, lo que es una contradicción.

iii) Demostremos que se satisfacen los postulados $(R1) - (R6)$

(R1) De (R) se tiene $\alpha \rhd \alpha$, entonces por definición del operador $\circ$ se obtiene $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$.

(R3) Supongamos que $\alpha \nvdash \bot$, de (R) se tiene $\alpha \rhd \alpha$, así existe al menos un β tal que $\beta \rhd \alpha$. De (YI) se deduce $\bigwedge\!\!\!\bigwedge \beta \rhd \alpha$, entonces $\varphi \circ \alpha \rhd \alpha$. De (ICD) se tiene $(\varphi \circ \alpha) \wedge \alpha \nvdash \bot$, así $\varphi \circ \alpha \nvdash \bot$.

(R4) Supongamos que $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, mostremos que $\varphi \circ \alpha_1 \equiv \varphi \circ \alpha_2$.
Caso 1: Si $\alpha_1 \vdash \bot$, entonces por (R1) se tiene $\varphi \circ \alpha_1 \vdash \bot$, y como $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ tambien obtenemos $\varphi \circ \alpha_2 \vdash \bot$, así $\varphi \circ \alpha_1 \equiv \varphi \circ \alpha_2$.
Caso 2: Supongamos que $\alpha_1 \nvdash \bot$. De (R) y la hipótesis obtenemos $\alpha_1 \rhd \alpha_1$ y $\alpha_2 \vdash \alpha_1$, por (FDD) se tiene $\alpha_1 \rhd \alpha_2$ o $\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \rhd \alpha_1$. Supongamos que $\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \rhd \alpha_1$ ocurre, entonces de (ICD) se tiene $\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \nvdash \bot$, pero esto es una contradicción con la hipótesis. Entonces $\alpha_1 \rhd \alpha_2$ y de i) se tiene $\varphi \circ \alpha_2 \vdash \varphi \circ \alpha_1$. De manera analoga se obtiene que $\alpha_2 \rhd \alpha_1$ y $\varphi \circ \alpha_1 \vdash \varphi \circ \alpha_2$, así $\varphi \circ \alpha_1 \equiv \varphi \circ \alpha_2$.

Para demostrar (R5) y (R6) es necesario considerar el siguiente resultado:

Hecho: Si $\beta \vdash \varphi \circ \alpha$, entonces $\varphi \circ \beta \equiv \beta$
$(\varphi \circ \beta \vdash \beta)$ se obtiene de (R1).
Veamos que $\beta \vdash \varphi \circ \beta$. Supongamos que $\beta \nvdash \varphi \circ \beta$, entonces $\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta) \nvdash \bot$. Luego, de $\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta) \vdash \beta$ y la hipótesis se tiene $\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta) \vdash \varphi \circ \alpha$ y de (R1) $\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta) \vdash \alpha$. $\alpha \rhd \alpha$ se obtiene de (R), así por (FDD) se tendría $\alpha \rhd \beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta)$ o $\alpha \wedge \neg(\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta)) \rhd \alpha$.
Supongamos que $\alpha \wedge \neg(\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta)) \rhd \alpha$ ocurre, $\varphi \circ \alpha \vdash \varphi \circ [\alpha \wedge \neg(\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta))]$ se obtiene de i). Además de (R1) se tiene $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha \wedge \neg(\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta))$, pero

$\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta) \vdash \varphi \circ \alpha$, entonces $\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta) \vdash \alpha \wedge \neg(\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta))$, lo que es una contradicción. Necesariamente se cumple $\alpha \rhd \beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta)$ y además $\beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta) \vdash \beta$, por (MD) se tiene $\alpha \wedge \beta \rhd \beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta)$, y como $\beta \vdash \alpha$ se tiene $\alpha \wedge \beta \equiv \beta$, entonces se deduce $\beta \rhd \beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta)$. Por i), $\varphi \circ \beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta) \vdash \varphi \circ \beta$ y por (R1), se tiene $\varphi \circ \beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta) \vdash \beta \wedge \neg(\varphi \circ \beta)$, llegando a una contradicción. Así, $\beta \vdash \varphi \circ \beta$.

(R5) Supongamos que $\gamma \vdash (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$, mostremos que $\gamma \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$. Supongamos que $\gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ y $\gamma \vdash \beta$. Por el resultado anterior, tenemos $\varphi \circ \gamma \equiv \gamma$, entonces $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$. De i) $\alpha \rhd \gamma$, entonces por la hipótesis y (MD) se deduce $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$, luego por i) obtenemos $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$, así $\gamma \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$.

(R6) Supongamos que $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \nvdash \perp$; debemos probar que $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$.
De (R1), (R) y la hipótesis tenemos $\alpha \rhd \alpha$, $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ y $\alpha \wedge \beta \nvdash \perp$, por (FDD) se tiene $\alpha \rhd \alpha \wedge \beta$ o $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \rhd \alpha$. Supongamos que $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \rhd \alpha$, es decir ocurre $\alpha \wedge \neg\beta \rhd \alpha$. De i) se tiene $\varphi \circ \alpha \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta)$ y de (R1) $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha \wedge \neg\beta$, entonces, en particular $\varphi \circ \alpha \vdash \neg\beta$, en contradicción con la hipótesis. Así necesariamente se cumple $\alpha \rhd \alpha \wedge \beta$. De i) se tiene $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \varphi \circ \alpha$ y de (R1) $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha \wedge \beta$, en particular $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \beta$, así $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$.

(R2) Demostrar $(\varphi \wedge \alpha \nvdash \perp \Rightarrow \varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha)$ es equivalente a demostrar $(\varphi \circ \top \equiv \varphi)$. Observemos:

Note que $\varphi \equiv \bigwedge\{\beta : \beta \rhd \top\} \equiv \bigvee\{\alpha_\omega : \top \rhd \alpha_\omega\}$ como $\exists\ \alpha_\omega$ tal que $\top \rhd \alpha_\omega$ necesariamente $\varphi \nvdash \perp$. Además por definición $\varphi \equiv \varphi \circ \top$.

$[(\varphi \circ \top \equiv \varphi) \Rightarrow (\varphi \wedge \alpha \nvdash \perp \Rightarrow \varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha)]$. Supongamos que $\varphi \wedge \alpha \nvdash \perp$, de (R5) y (R6) se tiene $(\varphi \circ \top) \wedge \alpha \equiv \varphi \circ (\top \wedge \alpha)$ y de (R4) se deduce que $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$.

1.3. Credibilidad limitada

Hay modelos de cambio [7] en los que no necesariamente se cumple el principio de prioridad de la nueva información. En particular hay diversos tipos de operadores de revisión no priotarios. Entre ellos encontramos los operadores de revisión de credibilidad limitada introducidos por Hansson et al. [8] y recientemente estudiados en el marco de la lógica proposicional finita y generalizados al marco de estados epistémicos complejos [2]. En esta sección introduciremos este último caso.

Definición 1.7. *Un operador $\circ$ que satisface $CL1 - CL6$ es llamado un operador de revisión de credibilidad limitada.*

(CL1) $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$ *o bien* $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$.

(CL2) *Si* $\varphi \wedge \alpha \nvdash \bot$, *entonces* $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$.

(CL3) $\varphi \circ \alpha \nvdash \bot$, *si* φ *es consistente.*

(CL4) *Si* $\varphi \equiv \varphi'$, $\alpha \equiv \alpha'$, *entonces* $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi' \circ \alpha'$.

(CL5) *Si* $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$, $\alpha \vdash \beta$ *entonces* $\varphi \circ \beta \vdash \beta$.

(CL6) $$\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \begin{cases} \varphi \circ \alpha & \text{o bien} \\ \varphi \circ \beta & \text{o bien} \\ (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta) \end{cases}$$

Donde (CL1) es llamado Éxito relativo, (CL2) Vacuidad, (CL3) Coherencia fuerte, (CL4) Independencia de la sintaxis, (CL5) Monotonía exitosa y (CL6) Tricotomía.

Proposición 1.2. *Si* $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \nvdash \bot$, *entonces* $\varphi \circ \beta \vdash \beta$.

Demostración: Si $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$, de la hipótesis $\varphi \wedge \beta \nvdash \bot$ y de (CL2) $\varphi \circ \beta \equiv \varphi \wedge \beta$, entonces $\varphi \circ \beta \vdash \beta$.
Si por el contrario, $\varphi \circ \alpha \not\equiv \varphi$, de (CL1) se tiene $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$. Como $\alpha \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)$, de (CL4) y (CL6) se tiene $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$, o $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta)$ o $\varphi \circ \alpha \equiv [\varphi \circ (\alpha \wedge \beta)] \vee [\varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta)]$.
Si $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$, entonces $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \not\equiv \varphi$ así de (CL1) $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha \wedge \beta$, además es cierto $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$, así de (CL5) $\varphi \circ \beta \vdash \beta$.

Si $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta)$, entonces $\varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta) \not\equiv \varphi$ así de (CL1) $\varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \alpha \wedge \neg\beta$ y $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha \wedge \neg\beta$, de la hipótesis $(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \nvdash \bot$, entonces $\alpha \wedge \neg\beta \wedge \beta \nvdash \bot$, lo que es una contradicción, por lo tanto $\varphi \circ \alpha \not\equiv \varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta)$.

Si $\varphi \circ \alpha \equiv [\varphi \circ (\alpha \wedge \beta)] \vee [\varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta)]$, dado que $\varphi \circ \alpha \not\equiv \varphi$, se tiene $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \not\equiv \varphi$ o $\varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta) \not\equiv \varphi$.
Si $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \not\equiv \varphi$, $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha \wedge \beta$ además es cierto $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$, entonces de (CL5) se tiene $\varphi \circ \beta \vdash \beta$. Si $\varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \equiv \varphi$ y $\varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta) \not\equiv \varphi$, entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \vee (\varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta))$, pero $\varphi \circ (\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \neg\beta$, entonces $\varphi \wedge \beta \nvdash \bot$ y de (CL2) $\varphi \circ \beta \equiv \varphi \wedge \beta$ y $\varphi \circ \beta \vdash \beta$.

Definición 1.8. *Una asignación fiel CL es una función que envía a cada fórmula consistente* φ *al par* $(\mathcal{C}_\varphi, \preccurlyeq_\varphi)$ *donde* $[\![\varphi]\!] \subseteq \mathcal{C}_\varphi \subseteq \mathcal{V}$, $\preccurlyeq_\varphi$ *es un preorden total sobre* $\mathcal{C}_\varphi$ *y las siguientes condiciones valen para todo* $\omega, \omega' \in \mathcal{C}_\varphi$*:*

1. *Si* $\omega \models \varphi$ *y* $\omega' \models \varphi$ *entonces* $\omega \simeq_\varphi \omega'$.
2. *Si* $\omega \models \varphi$ *y* $\omega' \not\models \varphi$ *entonces* $\omega \prec_\varphi \omega'$.
3. *Si* $\varphi \equiv \varphi'$ *entonces* $(\mathcal{C}_\varphi, \preccurlyeq_\varphi) = (\mathcal{C}'_\varphi, \preccurlyeq'_\varphi)$.

Note que 1 y 2 implican que $[\![\varphi]\!] = min\{\mathcal{C}_\varphi, \preccurlyeq_\varphi\}$.

Diremos que α *es creible si y solamente si* $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$.

El siguiente lema será usado más adelante.

Lema 1.1. *Sean* $(\Omega, \preccurlyeq)$ *y* $A, B \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, *entonces*

i) $min(A \cup B) \subseteq min(A) \cup min(B)$.

ii) $min(A) \cap B \subseteq min(A \cap B)$.

iii) Si $min(A) \cap B \neq \emptyset$ *entonces* $min(A \cap B) \subseteq min(A) \cap B$.

iv) Si $min(A) \cap min(B) \neq \emptyset$ *entonces* $min(A \cap B) = min(A) \cap min(B)$.

Demostración:

i) Si $min(A \cup B) = \emptyset$, se cumple. Supongamos que $min(A \cup B) \neq \emptyset$ y sea $v \in min(A \cup B)$, por definición $v \preccurlyeq \omega$ para todo $\omega \in A \cup B$. De allí es inmediato que si v está en A, necesariamente v está en $min(A)$. Igualmente si v está en B, necesariamente v está en $min(B)$.

ii) Si $min(A) \cap B = \emptyset$, entonces se cumple. Supongamos que $min(A) \cap B \neq \emptyset$ y sea $v \in min(A) \cap B$, es decir, $v \preccurlyeq \omega$ para todo $\omega \in A$ y además $v \in B$. Sea $\omega' \in min(A \cap B)$, entonces $\omega' \preccurlyeq v$ y como $\omega' \in A$, $v \preccurlyeq \omega'$, así $v \simeq \omega'$ y $v \in min(A \cap B)$.

iii) Sean $v \in min(A \cap B)$ y $\omega \in min(A) \cap B$, entonces $\omega \in A \cap B$ y $v \preccurlyeq \omega$, además $v \in A \cap B$, en particular $v \in A$ entonces $\omega \preccurlyeq v$, así $v \simeq \omega$ y $v \in min(A) \cap B$.

iv) De la hipótesis se tiene $min(A) \neq \emptyset$ y $min(B) \neq \emptyset$, además $min(B) \subseteq B$ entonces $min(A) \cap min(B) \subseteq min(A) \cap B$. Así de *ii)* y la transitividad se tiene $min(A) \cap min(B) \subseteq min(A \cap B)$.

Por otro lado, sea $\omega \in min(A \cap B)$, en particular $\omega \in A$ y $\omega \in B$. De la hipótesis, existe $v \in min(A) \cap min(B)$, observe que $v \in A \cap B$, entonces $\omega \preccurlyeq v$. Además $v \in min(A)$, así $v \preccurlyeq \omega$ y en consecuencia $v \simeq \omega$, es decir, $\omega \in min(A) \cap min(B)$. Así $min(A \cap B) \subseteq min(A) \cap min(B)$.

Teorema 1.4 (R. Booth, E. Fermé, S. Konieczny, y R. Pino Pérez).
$\circ$ es un operador de credibilidad limitada si y sólo si existe una asignación fiel $\varphi \mapsto (\mathcal{C}_\varphi, \preccurlyeq_\varphi)$ tal que

$$[\![\varphi \circ \alpha]\!] = \begin{cases} min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi) & \text{si} \quad [\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset \\ [\![\varphi]\!] & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Demostración: ($\Leftarrow$) Debemos mostrar que se cumplen (CL1)-(CL6).

(CL1) Si $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$, entonces por definición $[\![\varphi \circ \alpha]\!] = min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$ así $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$. Si $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$ se tiene $[\![\varphi \circ \alpha]\!] = [\![\varphi]\!]$, así $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$.

(CL2) Si $\varphi \wedge \alpha \nvdash \perp$ entonces $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$, por definición $[\![\varphi \circ \alpha]\!] = min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$. Además, como $[\![\varphi]\!] = min(\mathcal{C}_\varphi, \preccurlyeq_\varphi)$ se tiene, de la hipótesis $[\![\alpha]\!] \cap [\![\varphi]\!] \neq \emptyset$, $min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi) = [\![\alpha]\!] \cap [\![\varphi]\!]$, así $[\![\varphi \circ \alpha]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\varphi]\!]$, es decir $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$.

(CL3) Si $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$ entonces $[\![\alpha]\!] \neq \emptyset$, por definición $[\![\varphi \circ \alpha]\!] = min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$ así $[\![\varphi \circ \alpha]\!] \neq \emptyset$ y por lo tanto $\varphi \circ \alpha \nvdash \perp$. Si $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$, entonces $[\![\varphi \circ \alpha]\!] = [\![\varphi]\!]$, donde $\varphi \nvdash \perp$ así $\varphi \circ \alpha \nvdash \perp$.

(CL4) Se obtiene de la definición de $\circ$ y de la asignación fiel.

(CL5) Supongamos que $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$ y $\alpha \vdash \beta$. Si $[\![\beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$ se tiene por definición $[\![\varphi \circ \beta]\!] = min([\![\beta]\!], \preccurlyeq_\varphi) \subseteq [\![\beta]\!]$, entonces $\varphi \circ \beta \vdash \beta$. Si $[\![\beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$, entonces de la definición $\varphi \circ \beta \equiv \varphi$. Dado que $[\![\alpha]\!] \subseteq [\![\beta]\!]$ se tiene $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$, entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$. De la hipótesis $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$ entonces $\varphi \vdash \alpha$. Pero $\alpha \vdash \beta$, por transitividad $\varphi \vdash \beta$, así $\varphi \circ \beta \vdash \beta$.

(CL6) Si $[\![\alpha \vee \beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$ y como $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$ se tiene $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$ y $[\![\beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$, así por definición $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi$, $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$ y $\varphi \circ \beta \equiv \varphi$. Supongamos que $[\![\alpha \vee \beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$, entonces $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$ o $[\![\beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$.

Caso 1: $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$ y $[\![\beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$. Por definición $[\![\varphi \circ \alpha]\!] = min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$ y $[\![\varphi \circ \beta]\!] = [\![\varphi]\!]$, mostremos que $[\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!] = [\![\varphi \circ \alpha]\!]$.
$([\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!] \subseteq [\![\varphi \circ \alpha]\!])$: Si $\omega \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$, entonces $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$ para toda $\omega' \in ([\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!])$, en particular $\omega \preccurlyeq \omega'$ para toda $\omega' \in [\![\alpha]\!]$, así $\omega \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$.
$([\![\varphi \circ \alpha]\!] \subseteq [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!])$: Supongamos que, existe $\omega \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$ tal que $\omega \notin [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$, es decir, existe $\omega' \in [\![\alpha \vee \beta]\!]$ tal que $\omega' \prec_\varphi \omega$. Dado que, $\omega \in [\![\alpha \vee \beta]\!]$, se tiene $\omega \in [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$, como $\omega \in min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$, $\omega' \notin [\![\alpha]\!]$, así $\omega' \in [\![\beta]\!]$, luego $[\![\beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$ lo que es una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto $[\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!] \supseteq [\![\varphi \circ \alpha]\!]$.

Caso 2: $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$ y $[\![\beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$. La prueba es análoga al caso anterior obteniéndose $[\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!] = [\![\varphi \circ \beta]\!]$.

Caso 3: $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$ y $[\![\beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$. Considere ω_1, ω_2, tales que $\omega_1 \in [\![\varphi \circ \alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi$ y $\omega_2 \in [\![\varphi \circ \beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi$.

En primer lugar, veamos que $\omega_1 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ ó $\omega_2 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$.
Supongamos que $\omega_1 \notin [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$, debemos mostrar que $\omega_2 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$.
Dado que $[\![\alpha \vee \beta]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$, se tiene $[\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$. Sea $\omega \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$, como $\omega_1 \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$ y $[\![\varphi \circ \alpha]\!] \subseteq [\![\alpha]\!]$ se tiene que $\omega_1 \in [\![\alpha \vee \beta]\!]$, luego $\omega \prec_\varphi \omega_1$. Como $\omega \not\simeq_\varphi \omega_1$, se tiene $\omega \notin [\![\varphi \circ \alpha]\!]$ y en consecuencia $\omega \in [\![\varphi \circ \beta]\!]$, en vista de esto $\omega \simeq_\varphi \omega_2$ y como $\omega_2 \in [\![\alpha \vee \beta]\!]$, se tiene que $\omega_2 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$. Analogamente cuando $\omega_2 \notin [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$.

En vista de lo anterior se presentan tres situaciones: $\omega_1 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ y $\omega_2 \notin [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$, o bien $\omega_1 \notin [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ y $\omega_2 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$, o bien $\omega_1 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ y $\omega_2 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$.

i) Si $\omega_1 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ y $\omega_2 \notin [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$.
$([\![\varphi \circ \alpha]\!] \supseteq [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!])$: Sea $\omega \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$, entonces $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$, para toda $\omega' \in [\![\alpha \vee \beta]\!]$, en particular, $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$, para toda $\omega' \in [\![\alpha]\!]$, así $\omega \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$.

($[\![\varphi \circ \alpha]\!] \subseteq [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$): Supongamos que existe $\omega \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$ tal que $\omega \notin [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$. De lo primero se tiene $\omega \in [\![\alpha]\!]$, entonces $\omega \in [\![\alpha \vee \beta]\!]$ por otro lado existe ω' en $[\![\alpha \vee \beta]\!]$ tal que $\omega' \prec_\varphi \omega$. Dado que $\omega_1 \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$ se tiene $\omega_1 \simeq_\varphi \omega$ y como $\omega_1 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ se tiene $\omega_1 \prec_\varphi \omega$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$.

ii) Si $\omega_1 \notin [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ y $\omega_2 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ entonces $\varphi \circ \beta \equiv \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$.
La prueba es similar a la anterior.

iii) Si $\omega_1 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ y $\omega_2 \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ entonces $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)$.
($[\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!] \subseteq [\![\varphi \circ \alpha]\!] \vee [\![\varphi \circ \beta]\!]$): Si $\omega \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$ entonces $\omega \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$ o $\omega \in [\![\varphi \circ \beta]\!]$ ya que $min([\![\alpha \vee \beta]\!], \preccurlyeq_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi) \cap min([\![\beta]\!], \preccurlyeq_\varphi)$. Si $\omega \in [\![\varphi \circ \alpha]\!] \cup [\![\varphi \circ \beta]\!]$, entonces $\omega \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$ o $\omega \in [\![\varphi \circ \beta]\!]$.
($[\![\varphi \circ \alpha]\!] \vee [\![\varphi \circ \beta]\!] \subseteq [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$): Supongamos que $\omega \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$ y $\omega \notin [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$, entonces realizando los pasos observados en la segunda parte de i) se llega a una contradicción, por lo tanto $\omega \in [\![\varphi \circ (\alpha \vee \beta)]\!]$. Analogamente cuando $\omega \in [\![\varphi \circ \beta]\!]$. En conclusión $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)$.

($\Rightarrow$) Supongamos que se tiene un operador $\circ$ de credibilidad limitada. Se define una asignación $\varphi \mapsto (\mathcal{C}_\varphi, \preccurlyeq_\varphi)$ para cada fórmula consistente φ como:

- $\mathcal{C}_\varphi := \{\omega : \varphi \circ \alpha_\omega \equiv \omega\}$
- Para todo $\omega, \omega' \in \mathcal{C}_\varphi$, $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$ si y solo si $\omega \vDash \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$

El siguiente lema relaciona las fórmulas creibles y con el postulado de éxito.

Lema 1.2.

i) $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$ *entonces* $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$.

ii) $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$ *entonces* $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$.

Demostración:

i) Si $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$, entonces para todo modelo $\omega \in [\![\alpha]\!]$, $\varphi \circ \alpha_\omega \not\equiv \alpha_\omega$, por (CL1) $\varphi \circ \alpha_\omega \equiv \varphi$ para todo modelo $\omega \in [\![\alpha]\!]$. Es cierto que $\alpha \equiv \alpha_{\omega_1} \vee \alpha_{\omega_2} \ldots \alpha_{\omega_n}$ donde $[\![\alpha]\!] = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Por inducción sobre el cardinal de n y por (CL6) se tiene $\varphi \circ (\alpha_{\omega_1} \vee \ldots \vee \alpha_{\omega_n}) \equiv \varphi$ y por (CL4) $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$.

ii) Supongamos que $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$ y sea $\omega \in [\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi$. Por definición $\varphi \circ \alpha_\omega \equiv \alpha_\omega$, en particular $\varphi \circ \alpha_\omega \vdash \alpha_\omega$ y como $\alpha_\omega \vdash \alpha$ por (CL5) se tiene $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$.

Mostremos que la asignación, así definida, es una asignación fiel.

- $[\![\varphi]\!] \subseteq \mathcal{C}_\varphi$. Si $\omega \in [\![\varphi]\!]$, entonces por (CL2) $\varphi \circ \alpha_\omega \equiv \varphi \wedge \alpha_\omega \equiv \alpha_\omega$, entonces $\omega \in \mathcal{C}_\varphi$.
- $\preccurlyeq_\varphi$ es un preorden total sobre $\mathcal{C}_\varphi$.

<u>Totalidad</u>: Sean $\omega, \omega' \in \mathcal{C}_\varphi$, se debe mostrar que $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$ o $\omega' \preccurlyeq_\varphi \omega$ o $\omega \simeq_\varphi \omega'$. Por (CL6) se tiene $\varphi \circ (\alpha_\omega \vee \alpha_{\omega'}) \equiv \varphi \circ \alpha_\omega$ o $\varphi \circ (\alpha_\omega \vee \alpha_{\omega'}) \equiv \varphi \circ \alpha_\omega'$ o $\varphi \circ (\alpha_\omega \vee \alpha_{\omega'}) \equiv \varphi \circ \alpha_\omega \vee \varphi \circ \alpha_\omega'$, entonces por definición $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}]\!]$ es bien $\{\omega\}$ o $\{\omega'\}$ o $\{\omega\} \cup \{\omega'\}$, así $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$ o $\omega' \preccurlyeq_\varphi \omega$ o $\omega \simeq_\varphi \omega'$.

<u>Transitividad</u>: sean $\omega, \omega', \omega'' \in \mathcal{C}_\varphi$ y supongamos que $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$ y $\omega' \preccurlyeq_\varphi \omega''$ y $\omega \not\preccurlyeq_\varphi \omega''$. Por definición y de la parte *ii*) del *Lema 1.2* $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega''}]\!] = \{\omega''\}$. Considere $\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega',\omega''} \equiv \varphi \circ (\alpha_{\omega,\omega''} \vee \alpha_{\omega'})$. Por (CL6) se tiene $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega',\omega''}]\!] = \{\omega''\}$ o $\{\omega'\}$ o $\{\omega'', \omega'\}$. Suponga que $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega',\omega''}]\!] = \{\omega''\}$. Considere $\varphi \circ (\alpha_{\omega',\omega''} \vee \alpha_\omega)$. Por (CL4) se tiene $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega',\omega''}]\!] = [\![\varphi \circ (\alpha_{\omega',\omega''} \vee \alpha_\omega)]\!] = [\![\omega'']\!]$. Por (CL6) $\varphi \circ (\alpha_{\omega',\omega''}) \equiv \alpha_{\omega''}$ o bien $\varphi \circ \alpha_\omega \equiv \alpha_{\omega''}$, lo segundo es imposible y lo primero, significa $\omega'' \prec_\varphi \omega'$, una contradicción pues $\omega' \preccurlyeq_\varphi \omega''$.

Suponga que $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega',\omega''}]\!] = \{\omega'\}$. Considere $\varphi \circ (\alpha_{\omega,\omega'} \vee \alpha_{\omega''})$. Por (CL4) se tiene $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega',\omega''}]\!] = [\![\varphi \circ (\alpha_{\omega,\omega'} \vee \alpha_{\omega''})]\!] = \{\omega'\}$. Por (CL6) se tiene $\varphi \circ (\alpha_{\omega,\omega'} \vee \alpha_{\omega''}) \equiv \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$, o bien $\varphi \circ (\alpha_{\omega,\omega'} \vee \alpha_{\omega''}) = \varphi \circ \alpha_{\omega''}$ o bien $\varphi \circ (\alpha_{\omega,\omega'} \vee \alpha_{\omega'}) = (\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}) \vee \varphi \circ \alpha_{\omega''}$. En el segundo y tercer caso tendríamos $\omega'' \in \{\omega'\}$ lo cual es una contradicción y en el primero se tiene $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}]\!] = \{\omega'\}$ y esto es una contradicción, pues $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$. Suponga que $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega',\omega''}]\!] = \{\omega'', \omega'\}$.

Considere $\varphi \circ (\alpha_{\omega,\omega'} \vee \alpha_{\omega''})$, por $(CL4)$ se tiene $\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega',\omega''} \equiv \varphi \circ (\alpha_{\omega,\omega'} \vee \alpha_{\omega''})$ entonces de (CL6) la única posibilidad es $\varphi \circ (\alpha_{\omega,\omega'} \vee \alpha_{\omega''}) \equiv \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'} \vee \varphi \circ \alpha_{\omega''}$, entonces $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}]\!] = \{\omega'\}$ en contradicción con $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$.

Verifiquemos que se cumplen las condiciones para que la asignación anteriormente definida sea una asignación fiel. Sean $\omega, \omega' \in \mathcal{C}_\varphi$

1. Si $\omega \models \varphi$, entonces $\omega \models \varphi \wedge \alpha_{\omega,\omega'}$ y $\varphi \wedge \alpha_{\omega,\omega'} \nvdash \perp$. Por (CL2) se tiene $\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'} \equiv \varphi \wedge \alpha_{\omega,\omega'}$, así $\omega \models \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$ y por la definición de la asignación se tiene $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$.

2. Si $\omega \models \varphi$ y $\omega' \not\models \varphi$, entonces $[\![\varphi \wedge \alpha_{\omega,\omega'}]\!] = \{\omega\}$. Por (CL2) $\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'} \equiv \varphi \wedge \alpha_{\omega,\omega'}$, así también $[\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}]\!] = \{\omega\}$, luego $\omega \models \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$ y $\omega \not\models \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$, por lo tanto $\omega \prec_\varphi \omega'$.

3. Si $\varphi \equiv \varphi'$ entonces por (CL4) se tiene $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi' \circ \alpha$ para cualquier α, entonces se tiene $\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{C}'_\varphi$ y $\omega \preccurlyeq_\varphi \omega'$ si y solamente si $\omega \preccurlyeq_{\varphi'} \omega'$.

Faltaría mostrar que $[\![\varphi \circ \alpha]\!] = min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$ si $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$, de otra forma $[\![\varphi \circ \alpha]\!] = [\![\varphi]\!]$.

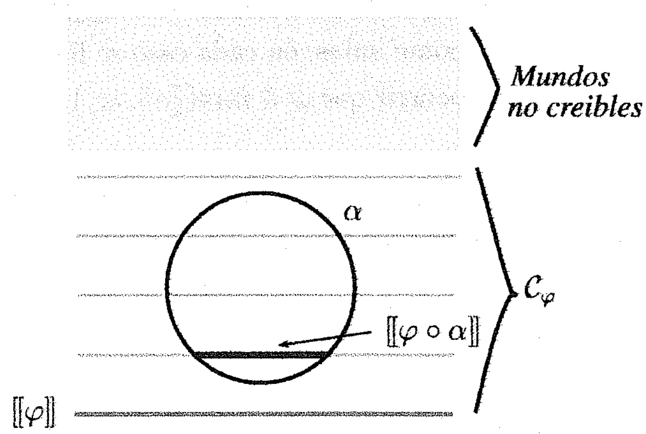
Si $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$, entonces por la parte $i)$ del *Lema 1.2*, se tiene $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$. Supongamos que $[\![\alpha]\!] \cap \mathcal{C}_\varphi \neq \emptyset$, se debe mostrar $[\![\varphi \circ \alpha]\!] = min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$.

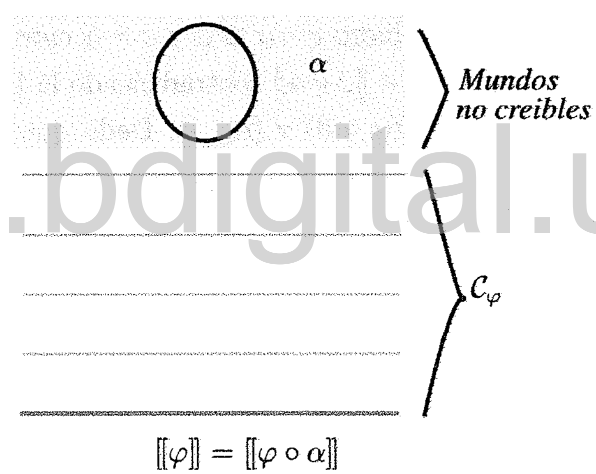
$([\![\varphi \circ \alpha]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi))$: Supongamos que $\omega \models \varphi \circ \alpha$ y $\omega \notin min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$, por la parte $ii)$ del *Lema 1.2* $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$, de igual manera $(\varphi \circ \alpha) \wedge \alpha_\omega \nvdash \perp$, por la *Proposición 1.2* $\varphi \circ \alpha_\omega \vdash \alpha_\omega$ lo que asegura que $\omega \in \mathcal{C}_\varphi$. Considere $\omega' \in min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$, entonces $\omega' \prec_\varphi \omega$ y $\omega \not\models \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$. Sea α_1 una fórmula tal que $[\![\alpha_1]\!] = [\![\alpha]\!] \setminus \{\omega, \omega'\}$. Observe que $\alpha \equiv \alpha_1 \vee \alpha_{\omega,\omega'}$. De (CL4) $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ (\alpha_1 \vee \alpha_{\omega,\omega'})$ y por (CL6) $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ \alpha_1$ o $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$ o $\varphi \circ \alpha \equiv (\varphi \circ \alpha_1) \vee (\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'})$. Observe que $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$ no ocurre pues $\omega \models \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$ es una contradicción con el hecho $\omega' \prec_\varphi \omega$. Si $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ \alpha_1$ ocurre, entonces de (CL1) se tiene que $\varphi \circ \alpha_1 \vdash \alpha_1$ o $\varphi \circ \alpha_1 \equiv \varphi$.
Si $\varphi \circ \alpha_1 \vdash \alpha_1$ entonces $\omega \models \alpha_1$ lo cual es una contradicción. Supongamos que

$\varphi \circ \alpha_1 \equiv \varphi$, entonces $\omega \models \varphi$ así ω debe ser minimal contradiciendo la hipótesis, así $\varphi \circ \alpha \not\equiv \varphi \circ \alpha_1$. Queda por suponer $\varphi \circ \alpha \equiv (\varphi \circ \alpha_1) \vee (\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'})$, pero entonces se tiene $\omega \models \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$ o $\omega \models \varphi \circ \alpha_1$, y como antes, en cada caso se llega a una contradicción. Así necesariamente tiene que ocurrir que $\omega \in min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$.

($[\![\varphi \circ \alpha]\!] \supseteq min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$): Supongamos que $\omega \in min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$, de la hipótesis y el *Lema 1.2* $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$. Supongamos que $\omega \notin [\![\varphi \circ \alpha]\!]$. De (CL3) $\varphi \circ \alpha \nvdash \perp$, es decir existe $\omega' \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$. Como $\omega \in [\![\alpha]\!]$ y considerando β tal que $[\![\beta]\!] = [\![\alpha]\!] \setminus \{\omega, \omega'\}$ entonces $\alpha \equiv \beta \vee \alpha_{\omega,\omega'}$. De (CL4) y (CL6) se tiene $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ \beta$ ó $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$ ó $\varphi \circ \alpha \equiv (\varphi \circ \beta) \vee (\alpha_{\omega,\omega'})$.
Si $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}$ entonces $\omega \notin [\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}]\!]$, y $\omega' \in [\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}]\!]$ por lo tanto $\omega' \prec_\varphi \omega$, pero ω es minimal, lo que es una contradicción.
Supongamos que $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \circ \beta$. Si $\varphi \circ \beta \vdash \beta$, se tiene $\omega' \in [\![\beta]\!]$ lo cual no ocurre, así de (CL1) se tendrá $\varphi \circ \beta \equiv \varphi$, luego $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$ y $\varphi \vdash \alpha$ entonces los minimales de α serán los minimales de φ así $\omega \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$ contradiciendo la hipótesis.
Queda por suponer $\varphi \circ \alpha \equiv (\varphi \circ \beta) \vee (\alpha_{\omega,\omega'})$. Dado que $\omega' \in [\![\varphi \circ \alpha]\!]$, se tiene $\omega' \in [\![\varphi \circ \beta]\!]$ ó $\omega' \in [\![\varphi \circ \alpha_{\omega,\omega'}]\!]$, siguiendo los pasos anteriores también se llega a una contradicción. Así, se demuestra que $[\![\varphi \circ \alpha]\!] \supseteq min([\![\alpha]\!], \preccurlyeq_\varphi)$.

La figura siguiente ilustra los dos casos en el teorema de representación.





CAPÍTULO 2

RELACIÓN ABDUCTIVA DE CREDIBILIDAD LIMITADA ORDENADA

Este capítulo está dedicado a dar una caracterización axiomática de las relaciones abductivas que esencialmente cumplen $\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow \varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ para $\circ$ un operador de revisión de credibilidad limitada.

Definición 2.1. *Un relación $\rhd$ que satisface $A0 - A10$ es llamada una relación abductiva de Credibilidad Limitada Ordenada*

(A0) *Existe un par α, γ tal que $\alpha \rhd \gamma$ $(\rhd \neq \emptyset)$.*

(A1) *Si $Expl(\alpha) \neq \emptyset$, entonces $\alpha \rhd \alpha$.*

(A2) *Si $\alpha \rhd \gamma$, entonces $\alpha \wedge \gamma \nvdash \bot$.*

(A3) *Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\delta \vdash \gamma$, con $\delta \nvdash \bot$, entonces $\alpha \rhd \delta$ o $\alpha \wedge \neg\delta \rhd \gamma$.*

(A4) *Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\alpha \rhd \delta$ entonces $\alpha \rhd \gamma \vee \delta$.*

(A5) *Si* $\alpha \rhd \gamma$ *y* $\gamma \vdash \beta$, *entonces* $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$.

(A6) *Si* $\alpha \rhd \gamma$ *y* $\gamma \rhd \delta$, *entonces* $\alpha \rhd \delta$.

(A7) *Si* $\alpha \rhd \gamma$ *y* $\beta \rhd \gamma$, *entonces* $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$.

(A8) *Si* $\alpha \equiv \alpha'$ *y* $\gamma \equiv \gamma'$ *entonces* $(\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow \alpha' \rhd \gamma')$.

(A9) *Si* $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ *y* $\alpha \vdash \beta$, *entonces* $Expl(\beta) \neq \emptyset$.

Donde (A0) es llamado No trivialidad, (A1) Reflexivida limitada, (A2) Infra Clasicidad Débil, (A3) Fortalecimiento Débil a la Derecha, (A4) O a la Derecha, (A5) Monotonía Débil, (A6) Transitividad, (A7) Y a la izquierda, (A8) Independencia de la sintaxis y (A9) Monotonía de las fórmulas explicables.

Definición 2.2. *Se define* φ, *asociado al operador* $\rhd$ *como:*

$$\varphi \equiv \bigvee \alpha_\omega, \quad con \quad \alpha_\omega \in \{\alpha'_\omega : \top \rhd \alpha'_\omega\}$$

Más adelante veremos que $\varphi \nvdash \bot$.

Lema 2.1. $Expl(\alpha) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in Expl$

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Si $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ por (A1) $\alpha \rhd \alpha$, así $\alpha \in Expl$.

$(\Leftarrow)$ Si $\alpha \in Expl$, existe β tal que $\beta \rhd \alpha$, como $Expl(\beta) \neq \emptyset$ y $\beta \vdash \alpha \vee \beta$, por (A9) $Expl(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$ y por (A1) $\alpha \vee \beta \rhd \alpha \vee \beta$, como $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ por (A3) se tiene:

$$\alpha \vee \beta \rhd \alpha \quad \text{ó} \quad (\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha \rhd \alpha \vee \beta$$

Si $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha \rhd \alpha \vee \beta$ y como $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha \equiv \beta \wedge \neg\alpha$, por (A8) $\beta \wedge \neg\alpha \rhd \alpha \vee \beta$, como $\beta \vdash \alpha \vee \beta$ de nuevo por (A3) se tiene:

$$\beta \wedge \neg\alpha \rhd \beta \quad \text{ó} \quad (\beta \wedge \neg\alpha) \wedge \neg\beta \rhd \alpha \vee \beta$$

Si $\beta\wedge\neg\alpha\rhd\beta$ y como $\beta\rhd\alpha$ se tiene por (A6) que $\beta\wedge\neg\alpha\rhd\alpha$ y por (A2) $\beta\wedge\neg\alpha\wedge\alpha \nvdash \bot$, contradicción.

Si $(\beta \wedge \neg\alpha) \wedge \neg\beta \rhd \alpha \vee \beta$, por (A2) $(\beta \wedge \neg\alpha) \wedge \neg\beta \wedge (\alpha \vee \beta) \nvdash \bot$, contradicción.

Como $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha \not\rhd \alpha \vee \beta$, ocurre $\alpha \vee \beta \rhd \alpha$. Es cierto que $\alpha \vdash \alpha$, luego por (A5) $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \rhd \alpha$, donde $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \equiv \alpha$, por (A8) se tiene $\alpha \rhd \alpha$, así $Expl(\alpha) \neq \emptyset$.

Proposición 2.1. *Las siguientes reglas son derivables de los* Postulados (A0)-(A10) *y el* Lema 2.1.

(P1) *Si* $\alpha \in Expl$ *entonces* $\alpha \rhd \alpha$.

(P2) *Si* $\alpha \rhd \alpha_\omega$ *entonces* $\alpha_\omega \vdash \alpha$.

(P3) *Si* $\alpha \rhd \alpha$ *y* $\beta \vdash \alpha$, *entonces* $\alpha \rhd \beta$ *o* $\alpha \rhd \alpha \wedge \neg\beta$.

(P4) *Si* $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ *entonces* α *tiene explicaciones completas.*

(P5) *Si* $\alpha \rhd \gamma$ $\beta \vdash \alpha$ *y* $(\alpha \not\rhd \beta)$ *entonces* $\alpha \wedge \neg\beta \rhd \gamma$.

(P6) $\top$ *tiene explicaciones.*

(P7) *Si* $Expl(\alpha) \neq \emptyset$, *entonces* $\alpha \vee \beta \rhd \alpha \vee \beta$ *para cualquier fórmula* β.

(P8) *Si* $\alpha \rhd \gamma$ *y* $\beta \rhd \delta$, *entonces* $\alpha \vee \beta \rhd \gamma$ *o* $\alpha \vee \beta \rhd \delta$.

(P9) *Si* $\alpha \rhd \gamma$ *y* $\gamma \vdash \beta$ *y* $\alpha \wedge \beta \rhd \delta$, *entonces* $\alpha \rhd \delta$.

(P10) *Si* $Expl(\alpha \vee \beta) \cap Expl(\alpha) = \emptyset$, *entonces* $Expl(\alpha \vee \beta) = Expl(\beta)$.

Demostración:

(P1) Si $\alpha \in Expl$, se tiene del *Lema 2.1* y (A1) que $\alpha \rhd \alpha$.

(P2) Si $\alpha \rhd \alpha_\omega$, por (A2) se tiene $\alpha \wedge \alpha_\omega \nvdash \perp$, y como α_ω es una fórmula completa se tiene que $\alpha_\omega \vdash \alpha$.

(P3) Por hipótesis $\alpha \rhd \alpha$ y $\beta \vdash \alpha$, por (A3) se tiene $\alpha \rhd \beta$ o $\alpha \wedge \neg\beta \rhd \alpha$. Si $\alpha \rhd \beta$ se termina la prueba. Supongamos que no ocurre $\alpha \rhd \beta$, como $\alpha \rhd \alpha$ y $\alpha \wedge \neg\beta \vdash \alpha$, de nuevo por (A3) se tiene $\alpha \rhd \alpha \wedge \neg\beta$ ó $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \rhd \alpha$. Si ocurre $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \rhd \alpha$ y como $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \equiv \alpha \wedge \beta$, entonces por (A8) se tiene $\alpha \wedge \beta \rhd \alpha$ y como $\alpha \wedge \neg\beta \rhd \alpha$, por (A7) se tiene $\alpha \wedge \beta \wedge \alpha \wedge \neg\beta \rhd \alpha$, y por (A2) $\alpha \wedge \beta \wedge \alpha \wedge \neg\beta \wedge \alpha \nvdash \perp$ lo que es una contradicción. Así $\alpha \rhd \alpha \wedge \neg\beta$.

(P4) Si $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ de (A1) se tiene $\alpha \rhd \alpha$ y por (A2) $\alpha \wedge \alpha \nvdash \perp$. Como α es consistente podemos suponer que tiene n modelos, es decir:

$$[\![\alpha]\!] = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \quad \text{y} \quad \alpha \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_{\omega_i}$$

Afirmación. $\alpha \rhd \alpha_{\omega_i}$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Se demostrará por inducción sobre el número de modelos de la fórmula.

Base inductiva: supongamos que $[\![\alpha]\!] = \{\omega_1\}$, entonces $\alpha \equiv \alpha_{\omega_1}$ y como $\alpha \rhd \alpha$ por (A8) se tiene $\alpha \rhd \alpha_{\omega_1}$.

Hipótesis inductiva: Supongamos que, para todo α con n modelos y $Expl(\alpha) \neq \emptyset$, existe $\alpha_\omega \in Expl$ tal que $\alpha \rhd \alpha_\omega$.

Considere la fórmula α, con $\alpha \rhd \alpha$ y $[\![\alpha]\!] = \{\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}\}$. Como $\alpha_{\omega_1} \vdash \alpha$ por

P3 se cumple:

$$\alpha \rhd \alpha_{\omega_1} \quad \text{o} \quad \alpha \rhd \alpha \wedge \neg\alpha_{\omega_1}$$

Si $\alpha \rhd \alpha_{\omega_1}$ se termina la prueba. Supongamos que $\alpha \not\rhd \alpha_{\omega_1}$, entonces $\alpha \rhd \alpha \wedge \neg\alpha_{\omega_1}$, por P1 se tiene $\alpha \wedge \neg\alpha_{\omega_1} \rhd \alpha \wedge \neg\alpha_{\omega_1}$ y además $[\![\alpha \wedge \neg\alpha_{\omega_1}]\!] = \{\omega_2, \ldots, \omega_{n+1}\}$, por la hipótesis de inducción existe $\omega_j \in [\![\alpha \wedge \neg\alpha_{\omega_1}]\!]$ tal que $\alpha \wedge \neg\alpha_{\omega_1} \rhd \alpha_{\omega_j}$, luego por (A6) se tiene $\alpha \rhd \alpha_{\omega_j}$.

(P5) Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$, entonces por (P1) $\alpha \rhd \alpha$ y como $\beta \vdash \alpha$ se tiene por (A3)

$$\alpha \rhd \beta \quad \text{ó} \quad \alpha \wedge \neg\beta \rhd \alpha$$

Por hipótesis ($\alpha \not\rhd \beta$), así se cumple $\alpha \wedge \neg\beta \rhd \alpha$, luego por (A6) se tiene $\alpha \wedge \neg\beta \rhd \gamma$.

(P6) De (A0) se tiene que existen α y γ tales que $\alpha \rhd \gamma$, así $Expl(\alpha) \neq \emptyset$. Además $\alpha \vdash \top$, luego de (A9) $Expl(\top) \neq \emptyset$.

(P7) Como $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ y $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$, por (A9) $Expl(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$ y por (A1) $\alpha \vee \beta \rhd \alpha \vee \beta$.

(P8) Como $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ por (P7) $\alpha \vee \beta \rhd \alpha \vee \beta$. Es cierto que $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ y $\beta \vdash \alpha \vee \beta$, entonces por (A3) se tiene:

$$\alpha \vee \beta \rhd \alpha \quad o \quad (\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha \rhd \alpha \vee \beta \quad y \quad \alpha \vee \beta \rhd \beta \quad o \quad (\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \rhd \alpha \vee \beta$$

Supongamos que no ocurre $\alpha \vee \beta \rhd \alpha$ ni $\alpha \vee \beta \rhd \beta$, entonces se cumple $\beta \wedge \neg\alpha \rhd \alpha \vee \beta$ y $\alpha \wedge \neg\beta \rhd \alpha \vee \beta$. Por (A7) se tiene $\beta \wedge \neg\alpha \wedge \alpha \wedge \neg\beta \rhd \alpha \vee \beta$, es decir, $\perp \rhd \alpha \vee \beta$ y por (A2) se tiene $\perp \wedge (\alpha \vee \beta) \nvdash \perp$, lo cual es una contradicción.
Entonces tenemos que $\alpha \vee \beta \rhd \alpha$ ó $\alpha \vee \beta \rhd \beta$ de donde (P8) sigue por transitividad (A6).

(P9) Asumamos $\alpha \rhd \gamma$, $\gamma \vdash \beta$ y $\alpha \wedge \beta \rhd \delta$. Queremos ver que $\alpha \rhd \delta$.
Primero, observemos que $\alpha \rhd \alpha \wedge \beta$. Supongamos que $\alpha \not\rhd \alpha \wedge \beta$, entonces de $\alpha \rhd \gamma$,

$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ y (P5) se tiene que $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$, luego, de (A8), $\alpha \wedge \neg\beta \rhd \gamma$ y por (A2) se tiene $\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma \nvdash \bot$, en particular $\neg\beta \wedge \gamma \nvdash \bot$, lo que es una contradicción pues por hipótesis $\gamma \vdash \beta$. Por lo tanto $\alpha \rhd \alpha \wedge \beta$ y $\alpha \wedge \beta \rhd \delta$, así por (A6) se tiene $\alpha \rhd \delta$.

(P10) Asumimos $Expl(\alpha \vee \beta) \cap Expl(\beta) = \emptyset$ como $\beta \vdash \alpha \vee \beta$, se tiene, por (A9), $Expl(\beta) \neq \emptyset$ y por lo tanto $Expl(\alpha \vee \beta) = Expl(\beta)$.

Supongamos que $Expl(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$
[$Expl(\alpha \vee \beta) \subseteq Expl(\beta)$]: Como $\alpha \vee \beta \rhd \alpha \vee \beta$ y $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$, se tiene de (A3) y (A8)

$$\alpha \vee \beta \rhd \alpha \quad \text{o} \quad \beta \wedge \neg\alpha \rhd \alpha \vee \beta$$

como $\alpha \vee \beta \rhd \alpha$ contradice la hipótesis se cumple $\beta \wedge \neg\alpha \rhd \alpha \vee \beta$, además $\beta \vdash \alpha \vee \beta$, de nuevo por (A3) y (A8) se tiene

$$\beta \wedge \neg\alpha \rhd \beta \quad \text{ó} \quad \beta \wedge \neg\alpha \wedge \neg\beta \rhd \alpha \vee \beta$$

Si $\beta \wedge \neg\alpha \wedge \neg\beta \rhd \alpha \vee \beta$, de (A2) y (A8) se tiene $\bot \wedge (\alpha \vee \beta) \nvdash \bot$ lo que es una contradicción, por lo tanto se cumple $\beta \wedge \neg\alpha \rhd \beta$. Como $Expl(\beta) \neq \emptyset$, se tiene por (A1) $\beta \rhd \beta$ y además $\beta \wedge \neg\alpha \vdash \beta$, entonces por (A3) y (A8)

$$\beta \rhd \beta \wedge \neg\alpha \quad \text{o} \quad \beta \wedge \alpha \rhd \beta$$

Si $\beta \wedge \alpha \rhd \beta$ y como $\beta \wedge \neg\alpha \rhd \beta$ por (A7) se cumple $\beta \wedge \alpha \wedge \beta \wedge \neg\alpha \rhd \beta$, luego de (A2) y (A8) se tiene $\bot \wedge \beta \nvdash \bot$, contradicción. Así $\beta \rhd \beta \wedge \neg\alpha$ y como $\beta \wedge \neg\alpha \rhd \alpha \vee \beta$ se tiene por (A6) que $\beta \rhd \alpha \vee \beta$, así de nuevo por (A6) se cumple $Expl(\alpha \vee \beta) \subseteq Expl(\beta)$.

[$Expl(\beta) \subseteq Expl(\alpha \vee \beta)$]: Sabemos 1. por lo tanto $Expl(\beta) \neq \emptyset$. Entonces como en la prueba de (P8) $\alpha \vee \beta \rhd \alpha$ ó $\alpha \vee \beta \rhd \beta$, lo primero no puede ocurrir por hipótesis. Así que $\alpha \vee \beta \rhd \beta$ y por (A6) se concluye que $Expl(\beta) \subseteq Expl(\alpha \vee \beta)$.

Observemos que si $\rhd$ es una relación AOCL, de (P6) y (P4) se obtiene que la fórmula $\varphi \equiv \bigvee\!\!\!\bigvee\{\alpha_\omega : \top \rhd \alpha_\omega\}$ es consistente.

2.1. Teorema de representación

Teorema 2.1. *Sea $\rhd$ una relación abductiva de credibilidad limitada ordenada. Se define el operador $\circ$ relativo a φ, las fórmulas de la definición 2.2., asociado al operador $\rhd$ de la manera siguiente:*

$$\varphi \circ \alpha \equiv \begin{cases} \varphi & si \quad Expl(\alpha) = \emptyset \\ \bigvee \alpha_\omega, \ \alpha_\omega \in \{\gamma : \alpha \rhd \gamma\} & si \quad Expl(\alpha) \neq \emptyset \end{cases}$$

entonces el operador $\circ$ es un operador de credibilidad limitada. Mas aún,

$$\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow (\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha) \ \ y \ \ (\varphi \circ \alpha \vdash \alpha) \ \ y \ \ (\varphi \circ \gamma \vdash \gamma) \quad con \quad \gamma \nvdash \bot$$

Demostración:

i) $\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow (\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha) \ \ y \ \ (\varphi \circ \alpha \vdash \alpha) \ \ y \ \ (\varphi \circ \gamma \vdash \gamma)$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$, $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$ y $\varphi \circ \gamma \vdash \gamma$.

Si $Expl(\alpha) = \emptyset$ entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$. Si $\alpha_\omega \vdash \varphi$, entonces $\top \rhd \alpha_\omega$ y $\alpha_\omega \vdash \alpha$, de (A5) y (A8) $\alpha \rhd \alpha_\omega$, así $\alpha_\omega \in Expl(\alpha)$, contradicción. Por lo tanto $Expl(\alpha) \neq \emptyset$. De manera analoga se demuestra $Expl(\gamma) \neq \emptyset$.

Afirmación: $\alpha \rhd \alpha \wedge \gamma$ y $\alpha \wedge \gamma \rhd \gamma$.
De (A1) $\alpha \rhd \alpha$ y además $\alpha \wedge \gamma \vdash \alpha$, de (A3) se tiene $\alpha \rhd \alpha \wedge \gamma$ o $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \gamma) \rhd \alpha$.
Si $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \gamma) \rhd \alpha$, de (A8) $\alpha \wedge \neg\gamma \rhd \alpha$, por (P4) existe α_ω tal que $\gamma \rhd \alpha_\omega$, por (P2) $\alpha_\omega \vdash \gamma$ y además por la hipótesis $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$, entonces $\alpha \rhd \alpha_\omega$. Por (A6) $\alpha \wedge \neg\gamma \rhd \alpha_\omega$ y por (A2) $\alpha \wedge \neg\gamma \wedge \alpha_\omega \nvdash \bot$, contradicción pues $\alpha_\omega \vdash \gamma$. Por lo tanto $\alpha \rhd \alpha \wedge \gamma$.
Por otro lado, de (A1) $\gamma \rhd \gamma$ y además $\neg\alpha \wedge \gamma \vdash \gamma$, entonces de (A3) $\gamma \rhd \neg\alpha \wedge \gamma$ o $\gamma \wedge \neg(\neg\alpha \wedge \gamma) \rhd \gamma$.
Si $\gamma \rhd \neg\alpha \wedge \gamma$ del *Lema 2.1* se tiene $Expl(\neg\alpha \wedge \gamma) \neq \emptyset$. De (P4) existe α_ω tal que $\neg\alpha \wedge \gamma \rhd \alpha_\omega$. De (A2) $\neg\alpha \wedge \gamma \wedge \alpha_\omega \nvdash \bot$ y de (A6) $\gamma \rhd \alpha_\omega$, así $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \gamma$ y

por la hipótesis $\alpha_\omega \vdash \alpha$, contradicción. Entonces $\gamma \wedge \neg(\neg\alpha \wedge \gamma) \rhd \gamma$ y de (A8) $\alpha \wedge \gamma \rhd \gamma$.

Luego, $\alpha \rhd \alpha \wedge \gamma$ y $\alpha \wedge \gamma \rhd \gamma$ y por transitividad $\alpha \rhd \gamma$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$.

De (A1) y (P1) se tiene $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ y $Expl(\gamma) \neq \emptyset$.

($\varphi \circ \gamma \vdash \gamma$) Si $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \gamma$, entonces $\gamma \rhd \alpha_\omega$ y por (P2) $\alpha_\omega \vdash \gamma$.

($\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$) Si $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \gamma$, entonces $\gamma \rhd \alpha_\omega$ y además $\alpha \rhd \gamma$, por (A6) $\alpha \rhd \alpha_\omega$, entonces $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$.

($\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$) Si $\alpha'_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$, entonces $\alpha \rhd \alpha'_\omega$ y por (P2) $\alpha'_\omega \vdash \alpha$.

ii) Se debe mostrar que el operador $\circ$ cumple CL1-CL6.

(CL1) $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$ o $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$.

Si $Expl(\alpha) = \emptyset$, entonces por definición $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$

Si $Expl(\alpha) \neq \emptyset$, entonces existe γ tal que $\alpha \rhd \gamma$, así de $i)$ $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$.

(CL2) Si $\varphi \wedge \alpha \nvdash \bot$ entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$.

($\varphi \circ \alpha \vdash \varphi \wedge \alpha$). Sea α_ω tal que $\alpha_\omega \vdash \varphi$ y $\alpha_\omega \vdash \alpha$ (tal α_ω existe por hipótesis). Por definición de φ se tiene $\top \rhd \alpha_\omega$, entonces de (A5) y (A8) $\alpha \rhd \alpha_\omega$, así de $i)$ $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$.

Afirmación: $\top \rhd \alpha \wedge \varphi$ y $\top \rhd \alpha$

Si $\alpha'_\omega \vdash \alpha \wedge \varphi$ se tiene $\alpha'_\omega \vdash \varphi$ y $\top \rhd \alpha'_\omega$. Note que $\alpha \wedge \varphi \equiv \bigvee \alpha'_\omega$, entonces por (A4) se tiene que $\top \rhd \alpha \wedge \varphi$. Por otro lado, si $\top \not\rhd \alpha$, como $\alpha \vdash \top$ y $\top \rhd \alpha \wedge \varphi$ se tiene por (P5) que $\top \wedge \neg\alpha \rhd \alpha \wedge \varphi$ y por (A8) $\neg\alpha \rhd \alpha \wedge \varphi$, luego por (A2) $\neg\alpha \wedge \alpha \wedge \varphi \nvdash \bot$, lo que es una contradicción. Así $\top \rhd \alpha$.

Sea $\omega \models \varphi \circ \alpha$ entonces, como ya vimos que $Expl(\alpha) \neq \emptyset$, se tiene que $\alpha \rhd \alpha_\omega$, por definición de $\varphi \circ \alpha$. Así tenemos, $\alpha \rhd \alpha_\omega$ y $\top \rhd \alpha$, por (A6) se tiene $\top \rhd \alpha_\omega$ y por la definición de φ, se sigue que $\alpha_\omega \vdash \varphi$.

$(\varphi \wedge \alpha \vdash \varphi \circ \alpha)$. Sea $\alpha_\omega \vdash \varphi \wedge \alpha$, entonces $\alpha_\omega \vdash \alpha$ y $\alpha_\omega \vdash \varphi$. Por definición de φ se tiene $\top \rhd \alpha_\omega$, y de (A5) y (A8) se tiene que $\alpha \rhd \alpha_\omega$, es decir, $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$.

(CL3) $\varphi \circ \alpha \nvdash \perp$.
Si $Expl(\alpha) = \emptyset$, entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$ y como $\varphi \nvdash \perp$ se tiene $\varphi \circ \alpha \nvdash \perp$.
Si $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ por (P4) existe α_ω tal que $\alpha \rhd \alpha_\omega$, entonces $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$, así $\varphi \circ \alpha \nvdash \perp$.

(CL4) Si $\varphi \equiv \varphi'$ y $\alpha \equiv \alpha'$ entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi' \circ \alpha'$.
Si $Expl(\alpha) = \emptyset$ por (A8) se tiene $Expl(\alpha') = \emptyset$, así por definición de $\circ$ se tiene $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$ y $\varphi' \circ \alpha' \equiv \varphi'$. Luego, de la hipótesis y por (A6) se tiene que $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi' \circ \alpha'$.

Supongamos que $Expl(\alpha) \neq \emptyset$, como $\alpha \vdash \alpha'$ se tiene por (A9) que $Expl(\alpha') \neq \emptyset$.
$(\varphi \circ \alpha \vdash \varphi' \circ \alpha')$. Si $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$, entonces $\alpha \rhd \alpha_\omega$. Por hipótesis $\alpha \equiv \alpha'$, entonces por (A8) $\alpha' \rhd \alpha_\omega$, así $\alpha_\omega \vdash \varphi' \circ \alpha'$.
$(\varphi' \circ \alpha' \vdash \varphi \circ \alpha)$. Este caso es análogo al anterior.

(CL5) Si $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$ y $\alpha \vdash \beta$, entonces $\varphi \circ \beta \vdash \beta$
Caso 1: $Expl(\beta) = \emptyset$
Por hipótesis $\alpha \vdash \beta$, entonces $Expl(\alpha) = \emptyset$ por (A9), así $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$. De nuevo por la hipótesis se sigue que $\varphi \vdash \beta$ y como $\varphi \circ \beta \equiv \varphi$ se tiene $\varphi \circ \beta \vdash \beta$.

Caso 2: $Expl(\beta) \neq \emptyset$
Por (P4) existe α_ω tal que $\beta \rhd \alpha_\omega$ y de i) se tiene $\varphi \circ \beta \vdash \beta$.

(CL6)

$$\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \begin{cases} \varphi \circ \alpha & \text{o bien} \\ \varphi \circ \beta & \text{o bien} \\ (\varphi \circ \alpha) \vee \ (\varphi \circ \beta) \end{cases}$$

Si $Expl(\alpha \vee \beta) = \emptyset$, entonces por (A9) se tiene $Expl(\alpha) = \emptyset$ y $Expl(\beta) = \emptyset$, así $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi$, $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$ y $\varphi \circ \beta \equiv \varphi$. Luego $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi \circ \alpha$.

Supongamos que $Expl(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$.

Caso 1: $Expl(\alpha) = \emptyset$, entonces $Expl(\alpha \vee \beta) \bigcap Expl(\alpha) = \emptyset$, luego por (P1)0 se tiene $Expl(\alpha \vee \beta) = Expl(\beta)$, así $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) = \varphi \circ \beta$.

Caso 2: $Expl(\beta) = \emptyset$. Siguiendo el método del caso 1 se obtiene $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi \circ \alpha$

Caso 3: $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ y $Expl(\beta) \neq \emptyset$.

Consideremos tres subcasos: $(\varphi \circ (\alpha \vee \beta)) \wedge \beta \vdash \perp$, $(\varphi \circ (\alpha \vee \beta)) \wedge \alpha \vdash \perp$ y finalmente $(\varphi \circ (\alpha \vee \beta)) \wedge \beta \nvdash \perp$ y $(\varphi \circ (\alpha \vee \beta)) \wedge \alpha \nvdash \perp$.

- En el caso $(\varphi \circ (\alpha \vee \beta)) \wedge \beta \vdash \perp$ probaremos que $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi \circ \alpha$. Suponga $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$, como $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ necesariamente $Expl(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$ (por (A9)). Luego, por definición de $\circ$, se tiene $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$. Por (P2), $\alpha_\omega \vdash \alpha \vee \beta$. Por la hipótesis $\alpha_\omega \nvdash \beta$ así $\alpha_\omega \vdash \alpha$. Como $(\alpha \vee \beta) \rhd \alpha_\omega$ y $\alpha_\omega \vdash \alpha$ por (A5) y (A8) $\alpha \rhd \alpha_\omega$ así por definición de $\circ$ se tiene $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$. Por lo tanto $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \vdash \varphi \circ \alpha$.
  Ahora supongamos que $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$. Queremos ver que $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$. Como $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$, se tiene $\alpha \rhd \alpha_\omega$. Por la hipótesis , $Expl(\beta) \neq \emptyset$, se tiene de (A1), $\beta \rhd \beta$. Así tenemos $\alpha \rhd \alpha_\omega$ y $\beta \rhd \beta$, luego por (P8)

$$\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega \quad \text{o bien} \quad \alpha \vee \beta \rhd \beta$$

Veamos que lo segundo no puede pasar. Si $\alpha \vee \beta \rhd \beta$, por (A6) y la definición de $\circ$ se tiene $\varphi \circ \beta \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$, de donde fácilmente se ve que $\beta \wedge \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$ es consistente pues los modelos de $\varphi \circ \beta$ son modelos de β. Pero esto contradice la hipótesis $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \wedge \beta \vdash \perp$. Entonces $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$, es decir por definición $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$. Así $\varphi \circ \alpha \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$.

- El caso $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \vdash \perp$ es análogo al anterior intercambiando el rol de α y β. En este caso se tiene $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi \circ \beta$.
- Por último consideremos el caso $(\varphi \circ (\alpha \vee \beta)) \wedge \alpha \nvdash \perp$ y $(\varphi \circ (\alpha \vee \beta)) \wedge \beta \nvdash \perp$. En este caso probaremos que $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)$.

Veamos que $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \vdash (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)$. Si $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$ como antes se ve que $\alpha_\omega \vdash \alpha \vee \beta$. Así $\alpha_\omega \vdash \alpha$ o bien $\alpha_\omega \vdash \beta$.
Si $\alpha_\omega \vdash \alpha$ como antes se obtiene $\alpha \rhd \alpha_\omega$ y por definición $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$.
Si $\alpha_\omega \vdash \beta$ se obtiene $\beta \rhd \alpha_\omega$ y por definición $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \beta$.
Así $\alpha_\omega \vdash (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)$. Esto es, $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \vdash (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)$.

Ahora veamos $(\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta) \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta \vdash)$. Demostraremos que $\varphi \circ \alpha \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$ (la prueba de $\varphi \circ \beta \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$ es análoga).
Sabemos que existe α_ω tal que $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$ y $\alpha_\omega \vdash \alpha$; por hipótesis $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ así, por (A1) $\alpha \rhd \alpha$ y por (A8), $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \rhd \alpha$. Entonces por (P9) $\alpha \vee \beta \rhd \alpha$. Luego por (A6) y (A4), se concluye $\varphi \circ \alpha \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$.

Teorema 2.2. *Si $\circ$ es un operador de credibilidad limitada, entonces para cada φ consistente, la relación $\rhd$ definida como:*

$$\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow (\varphi \circ \gamma \vdash \varphi \circ \alpha) \;\; y \;\; (\varphi \circ \alpha \vdash \alpha) \;\; y \;\; (\varphi \circ \gamma \vdash \gamma) \; con \; \gamma \nvdash \perp$$

es una relación abductiva de credibilidad limitada ordenada.

Demostración: Note que si $\gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ y $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$ se tiene $\gamma \vdash \alpha$ y por CL5 $\varphi \circ \gamma \vdash \gamma$.

(A0) De *(CL2)* se tiene $\varphi \circ \varphi \equiv \varphi$. Así $\varphi \vdash \varphi \circ \varphi$ y $\varphi \circ \varphi \vdash \varphi$. Luego se tiene $\varphi \rhd \varphi$, así $\rhd \neq \emptyset$.

Observación 2.1. *En virtud del* Teorema 1.4 *de representación de credibilidad limitada, existe una asignación fiel que envia a cada fórmula consistente φ al par $(C_\varphi, \preceq_\varphi)$ tal que*

$$[\![\varphi \circ \alpha]\!] = \begin{cases} min([\![\alpha]\!], \preceq_\varphi) & si \quad [\![\alpha]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset \\ [\![\varphi]\!] & de\ otra\ forma \end{cases}$$

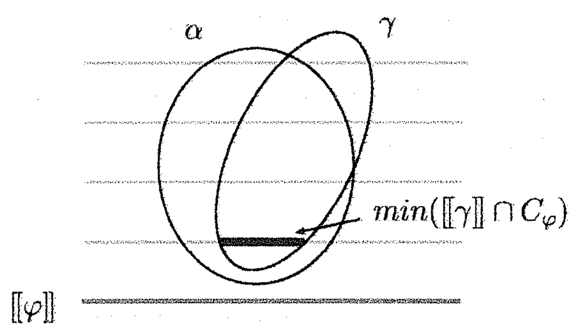
donde, $C_\varphi = \{\omega : \ \varphi \circ \alpha_\omega \vdash \alpha_\omega\}$
Entonces la relación $\rhd$ puede ser definida de manera equivalente como

$$\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow [\![\alpha]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset \ \ y \ \ [\![\gamma]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset \ \ y \ \ min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$$

Con esta nueva definición se debe mostrar que $\rhd$ satisface las reglas (A1)-(A9).

(A1) Si $Expl(\alpha) \neq \emptyset$, existe γ tal que $\alpha \rhd \gamma$, luego por definición $[\![\alpha]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset$ y $min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$, así $\alpha \rhd \alpha$.

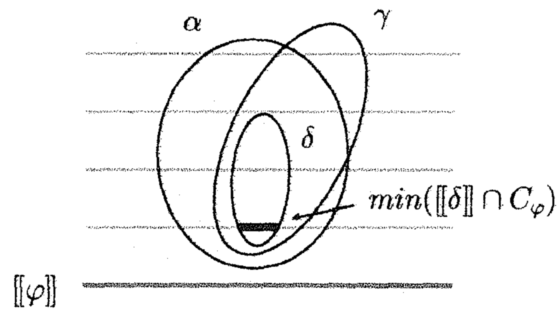
(A2) Si $\alpha \rhd \gamma$ entonces $\emptyset \neq min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \subseteq [\![\alpha]\!]$ y como $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq [\![\gamma]\!]$, se tiene que $[\![\alpha]\!] \cap [\![\gamma]\!] \neq \emptyset$, así $\alpha \wedge \gamma \nvdash \bot$.



(Si γ explica α, sus modelos minimales son modelos minimales de α, en particular, α y γ comparten modelos, así $\alpha \wedge \gamma \nvdash \bot$)

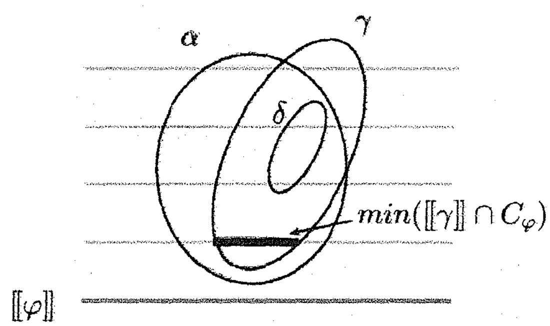
(A3) De la hipótesis se tiene $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$, $[\![\alpha]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset$, $[\![\gamma]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset$, $[\![\delta]\!] \subseteq [\![\gamma]\!]$ y $[\![\delta]\!] \neq \emptyset$.

Caso 1: Si $[\![\delta]\!] \cap min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \neq \emptyset$, entonces como $[\![\delta]\!] \neq \emptyset$ y $[\![\delta]\!] \subseteq [\![\gamma]\!]$, es fácil ver que $\emptyset \neq min([\![\delta]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi)$, por transitividad $min([\![\delta]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$, así $\alpha \rhd \delta$.



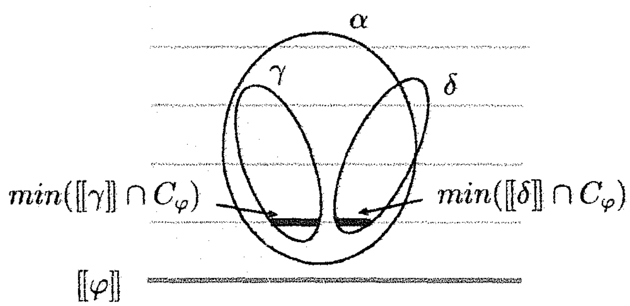
(Si todo modelo de δ es modelo de γ y al menos uno de sus modelos es modelo minimal de γ, entonces los modelos minimales de δ son modelos minimales de γ, en particular, son modelos minimales de α)

Caso 2: Si $[\![\delta]\!] \cap min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) = \emptyset$, se tiene que $min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \subseteq [\![\neg\delta]\!]$, pues de lo contrario existiria $\omega \in min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \cap [\![\delta]\!]$ pero $\omega \in [\![\gamma]\!]$ así $\omega \in min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi)$ lo cual contradice la hipótesis. Ahora bien como $min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \subseteq [\![\neg\delta]\!]$ es claro que $min([\![\alpha]\!] \cap [\![\neg\delta]\!] \cap C_\varphi) = min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$. Entonces, por transitividad
$\emptyset \neq min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap [\![\neg\delta]\!] \cap C_\varphi)$ o lo que es lo mismo
$\emptyset \neq min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha \wedge \neg\delta]\!] \cap C_\varphi)$ así $\alpha \wedge \neg\delta \rhd \gamma$.



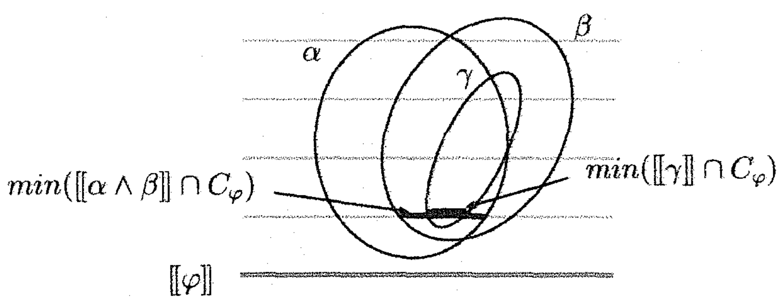
(Si todo modelo de δ es modelo de γ pero no modelo minimal de γ y los minimales de γ están entre los minimales de α, entonces $\neg\delta$ contiene los modelos minimales de α)

(A4) De la hipótesis y por el *Lema 1.1* parte *i)* se tiene
$min([\![\gamma \vee \delta]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \cup min([\![\delta]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$,
así $\alpha \rhd \gamma \vee \delta$.



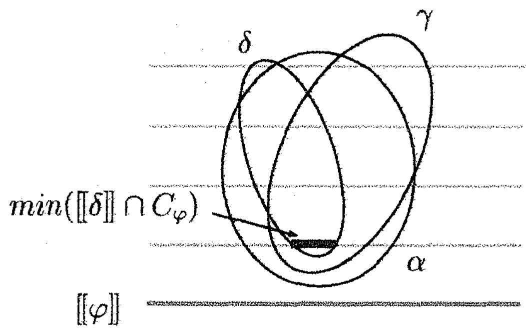
(Si los modelos minimales de γ y los modelos minimales de δ son modelos minimales de α, entonces los modelos minimales de la disyunción $\gamma \vee \delta$ también son modelos minimales de α)

(A5) Por hipótesis, $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$, y $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq [\![\gamma]\!] \subseteq [\![\beta]\!]$. Así, $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \cap [\![\beta]\!]$. Del *Lema 1.1* parte *ii)* se tiene
$min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \cap [\![\beta]\!] \subseteq min([\![\alpha \wedge \beta]\!] \cap C_\varphi)$, luego $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha \wedge \beta]\!] \cap C_\varphi)$,
así $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$.



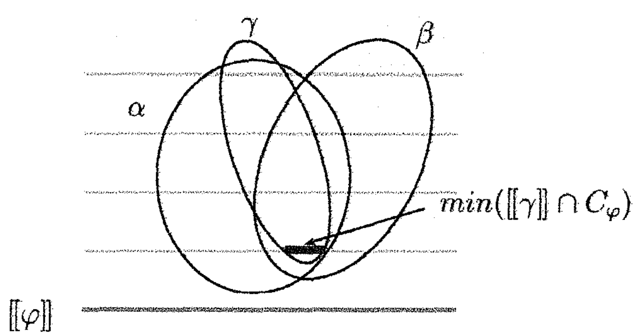
(Si los modelos minimales de γ son modelos minimales de α y todo modelo de γ es modelo de β, entonces los modelos minimales de γ son modelos minimales de la conjunción $\alpha \wedge \beta$)

(A6) Se tiene $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$, y $min([\![\delta]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi)$, luego por transitividad $\emptyset \neq min([\![\delta]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$ así $\alpha \rhd \delta$.



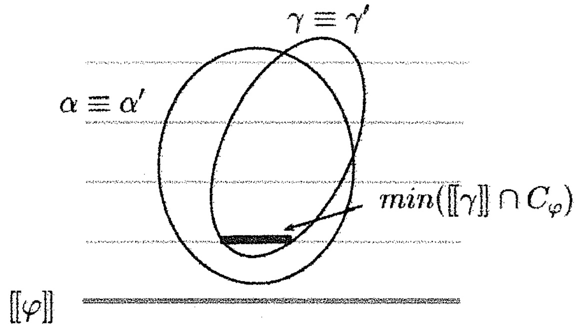
(Si los modelos minimales de δ son modelos minimales de γ y estos a su vez son modelos minimales de α, entonces los modelos minimales de δ son modelos minimales de α)

(A7) De la hipótesis, $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$ y $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\beta]\!] \cap C_\varphi)$. Así, $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \cap min([\![\beta]\!] \cap C_\varphi)$. Del *Lema 1.1* parte *iv*) se tiene $min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \cap min([\![\beta]\!] \cap C_\varphi) = min([\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!] \cap C_\varphi)$. Luego $min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha \wedge \beta]\!] \cap C_\varphi)$, así $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$.



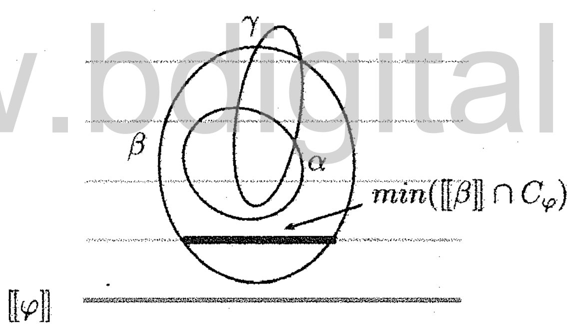
(Si los modelos minimales de γ son modelos minimales de α y de β, entonces son modelos minimales de $\alpha \wedge \beta$)

(A8) Si $\alpha \rhd \gamma$ entonces de la hipótesis se tiene $min([\![\gamma']\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha']\!] \cap C_\varphi)$ así $\alpha' \rhd \gamma'$. El reciproco es análogo.



(Si $\alpha \equiv \alpha'$ y $\gamma \equiv \gamma'$, entonces sus modelos minimales coinciden respectivamente, por lo tanto, si los minimales de γ son modelos minimales de α entonces los minimales de γ' son modelos minimales de α' y viceversa)

(A9) Si Expl$(\alpha) \neq \emptyset$ existe γ tal que $\alpha \rhd \gamma$. Luego $\emptyset \neq min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$ y como $[\![\alpha]\!] \subseteq [\![\beta]\!]$ se tiene $[\![\beta]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset$ y $min([\![\beta]\!] \cap C_\varphi) \neq \emptyset$, entonces $\beta \rhd \beta$, así $Expl(\beta) \neq \emptyset$.



(Si γ explica α, sus modelos minimales son modelos minimales de α, en particular son modelos de β, asì β tiene modelos en C_φ, luego tiene modelos minimales y por ello se explica a sí misma)

De los *Teoremas 2.1, 2.2* y del Teorema de representación de los operadores de revisión de credibilidad limitada (*Teorema 1.4*), obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.3. $\rhd$ *es una relación abductiva ordenada si y solamente si existe* $C_\varphi \subseteq \mathcal{V}$ *y un preorden total* $\preccurlyeq_\varphi$ *sobre* C_φ *tal que:*

$$\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi, \preccurlyeq_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi, \preccurlyeq_\varphi) \text{ } y \text{ } min([\![\gamma]\!] \cap C_\varphi, \preccurlyeq_\varphi) \neq \emptyset$$

CAPÍTULO 3

RELACIÓN ABDUCTIVA DE CREDIBILIDAD LIMITADA CON REFLEXIVIDAD DÉBIL

Este capítulo está dedicado a dar una caracterización axiomática y semántica de las relaciones abductivas que están definidas esencialmente por

$$\alpha \rhd \gamma \;\Leftrightarrow\; \gamma \vdash \varphi \circ \alpha$$

en donde $\circ$ es un operador de revisión de credibilidad limitada.

Definición 3.1. *Un relación $\rhd$ que satisface $B0 - B8$ es llamada una relación abductiva de credibilidad limitada con reflexividad débil*

(B0) $Expl(\top) \neq \emptyset$.

(B1) *Si* $\alpha \rhd \gamma$, *entonces* $\gamma \nvdash \bot$.

(B2) *Si* $\alpha \rhd \gamma$ *y* $\delta \vdash \gamma$, *con* $\delta \nvdash \bot$, *entonces* $\alpha \rhd \delta$.

(B3) *Si* $\alpha \rhd \gamma$ *y* $\alpha \rhd \delta$ *entonces* $\alpha \rhd \gamma \vee \delta$.

(B4) *Si* $\alpha \wedge \beta \rhd \delta$ *y existe* γ *tal que* $\alpha \rhd \gamma$ *y* $\gamma \vdash \beta$, *entonces* $\alpha \rhd \delta$.

(B5) *Si* $\alpha \rhd \gamma$, *entonces* $\gamma \vdash \alpha$.

(B6) *Si* $\alpha \rhd \gamma$ *y* $\gamma \vdash \beta$ *y* $\alpha \wedge \beta \nvdash \perp$, *entonces* $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$.

(B7) $\alpha \equiv \alpha'$ *y* $\gamma \equiv \gamma'$, *entonces* $(\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow \alpha' \rhd \gamma')$.

(B8) *Si* $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ *y* $\alpha \vdash \beta$, *entonces* $Expl(\beta) \neq \emptyset$.

Donde (B1) es llamada No contradicción, (B2) Fortalecimiento a la derecha, (B3) O a la Derecha, (B4) Corte débil, (B5) Infra clasicidad, (B6) Monotonía cautelosa no reflexiva, (B7) Independencia de la sintaxis y (B8) Monotonía de las explicaciones.

Definición 3.2. *Se define* φ, *asociado al operador* $\rhd$ *como:*

$$\varphi \equiv \bigvee\!\!\!\bigvee \alpha_\omega, \quad con \quad \alpha_\omega \in \{\alpha'_\omega : \top \rhd \alpha'_\omega\}$$

Observación 3.1. *Note que si* $\rhd$ *satisface (B0), (B1) y (B2) la fórmula* φ *de la Definición 3.2 es consistente.*

Proposición 3.1. *Si* $\alpha \rhd \gamma$, *entonces* $\gamma \rhd \gamma$.

Demostración: Si $\alpha \rhd \gamma$ entonces de (B1) y (B5) se tiene $\gamma \nvdash \perp$ y $\gamma \vdash \alpha$, además es cierto que $\gamma \vdash \gamma$, entonces de (B6) se tiene $\alpha \wedge \gamma \rhd \gamma$ y como $\gamma \vdash \alpha$, $\alpha \wedge \gamma \equiv \gamma$. Así, por (B7), $\gamma \rhd \gamma$.

3.1. Teorema de representación

Teorema 3.1. *Sea $\rhd$ una relación abductiva de credibilidad limitada no reflexiva. Se define el operador $\circ$ relativo a φ (la fórmula de la* Definición 3.2*) asociado al operador $\rhd$ como:*

$$\varphi \circ \alpha \equiv \begin{cases} \varphi & si \quad Expl(\alpha) = \emptyset \\ \bigvee\!\!\!\!\bigvee \alpha_\omega, \ \alpha_\omega \in \{\gamma : \alpha \rhd \gamma\} & si \quad Expl(\alpha) \neq \emptyset \end{cases}$$

entonces el operador $\circ$ es un operador de credibilidad limitada. Mas aún,

$$\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow (\gamma \vdash \varphi \circ \alpha) \ \ y \ \ (\varphi \circ \alpha \vdash \alpha) \quad con \quad \gamma \nvdash \bot$$

Demostración:

i) Comencemos probando la siguiente equivalencia

$$\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow (\gamma \vdash \varphi \circ \alpha),\ (\varphi \circ \alpha \vdash \alpha)\ y\ \gamma \nvdash \bot$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\gamma \vdash \varphi \circ \alpha$ y $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$. Si α tiene explicaciones entonces existen $\{\alpha_{\omega_i}\}$ elementos de $Expl(\alpha)$ tales que $\gamma \vdash \bigvee\!\!\!\!\bigvee \alpha_{\omega_i}$ para todo i, luego por (B3), $\alpha \rhd \bigvee\!\!\!\!\bigvee \alpha_{\omega_i}$ y como $\gamma \vdash \bigvee\!\!\!\!\bigvee \alpha_{\omega_i}$ se tiene por (B2) $\alpha \rhd \gamma$. Si α no tiene explicaciones, entonces existen $\{\alpha_{\omega_i}\}$ elementos de $Expl(\top)$ tales que $\gamma \vdash \bigvee\!\!\!\!\bigvee \alpha_{\omega_i}$ para todo i, luego por (B3) y (B2), se tiene $\top \rhd \gamma$, además $\gamma \vdash \alpha$ y $\top \wedge \alpha \nvdash \bot$, entonces, por (B6), $\top \wedge \alpha \rhd \gamma$ y de (B7), $\alpha \rhd \gamma$.

($\Rightarrow$) Si $\alpha \rhd \gamma$, entonces por (B1) γ es consistente. Se puede definir

$$[\![\gamma]\!] = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \quad \text{donde} \quad \gamma \equiv \bigvee\!\!\!\!\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_{\omega_i}$$

entonces $\alpha_{\omega_i} \vdash \gamma$ para todo i. Por (B2) $\alpha \rhd \alpha_{\omega_i}$ entonces $\alpha_{\omega_i} \vdash \varphi \circ \alpha$ para todo i. Luego, $\bigvee\!\!\!\!\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_{\omega_i} \vdash \varphi \circ \alpha$, así $\gamma \vdash \varphi \circ \alpha$.

Por otro lado, $\alpha \rhd \alpha_\omega$ para todo $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$, entonces por (B5) $\alpha_\omega \vdash \alpha$, así $\bigvee\!\!\!\!\bigvee \alpha_\omega \vdash \alpha$ y $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$.

ii) Se debe mostrar que el operador $\circ$ cumple (CL1)-(CL6)

(CL1) $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$ ó bien $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$.

Si $Expl(\alpha) = \emptyset$, entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$. Si $Expl(\alpha) \neq \emptyset$, existe γ tal que $\alpha \rhd \gamma$ y por $i)$ $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$.

(CL2) Si $\varphi \wedge \alpha \nvdash \perp$ entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$.

Si $\alpha_\omega \vdash \varphi \wedge \alpha$ entonces $\top \rhd \alpha_\omega$ y $\alpha_\omega \vdash \alpha$. Como $\alpha \nvdash \perp$ entonces $\top \wedge \alpha \nvdash \perp$ y por (B6) y (B7) se tiene $\alpha \rhd \alpha_\omega$, así $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$.
Sea $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$. Dado que $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ se tiene por definición $\alpha \rhd \alpha_\omega$. Como $\varphi \wedge \alpha \nvdash \perp$, existe $\alpha_{\omega'}$ tal que $\top \rhd \alpha_{\omega'}$ y $\alpha_{\omega'} \vdash \alpha$. Luego de (B4) $\top \rhd \alpha_\omega$, así $\alpha_\omega \vdash \varphi$. Por lo tanto $\alpha_\omega \vdash \varphi \wedge \alpha$.

(CL3) $\varphi \circ \alpha \nvdash \perp$.

Si $Expl(\alpha) = \emptyset$ entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$, como $\varphi \nvdash \perp$ (ver *Observación 3.1*) se tiene $\varphi \circ \alpha \nvdash \perp$. Si $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ existe γ tal que $\alpha \rhd \gamma$, luego por (B1) $\gamma \nvdash \perp$, así existe α_ω tal que $\alpha_\omega \vdash \gamma$, entonces por (B2) $\alpha \rhd \alpha_\omega$ así $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$ y, por lo tanto, $\varphi \circ \alpha$ es consistente.

(CL4) Si $\varphi \equiv \varphi'$ y $\alpha \equiv \alpha'$ entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi' \circ \alpha'$.

Si α no tiene explicaciones entonces α' no tiene explicaciones, luego $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$ y $\varphi' \circ \alpha' \equiv \varphi'$, así $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi' \circ \alpha'$.

Si α tiene explicaciones existe α_ω tal que $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$ y $\alpha \rhd \alpha_\omega$, luego por (B7) $\alpha' \rhd \alpha_\omega$, por lo tanto $\alpha_\omega \vdash \varphi' \circ \alpha'$. El recíproco es análogo.

(CL5) Si $\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$ y $\alpha \vdash \beta$, entonces $\varphi \circ \beta \vdash \beta$.

Supongamos que α no tiene explicaciones, entonces $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$, de esto y la hipotesis se obtiene $\varphi \vdash \alpha$. Luego, si $\alpha_\omega \vdash \varphi$ se tiene $\top \rhd \alpha_\omega$, $\alpha_\omega \vdash \alpha$ y $\top \wedge \alpha \nvdash \bot$, entonces por (B6) $\top \wedge \alpha \rhd \alpha_\omega$, así por (B7) $\alpha \rhd \alpha_\omega$, lo que es una contradicción con lo supuesto. Por lo tanto, α tiene explicaciones, así de (B8) β tiene explicaciones. Si $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \beta$ por definición $\beta \rhd \alpha_\omega$, así por (B5) $\alpha_\omega \vdash \beta$. Por lo tanto, $\varphi \circ \beta \vdash \beta$.

(CL6)

$$\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \begin{cases} \varphi \circ \alpha & \text{o bien} \\ \varphi \circ \beta & \text{o bien} \\ (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta) \end{cases}$$

Si $Expl(\alpha \vee \beta) = \emptyset$ de (B8) se tiene $Expl(\alpha) = \emptyset$ y $Expl(\beta) = \emptyset$, luego $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi$, $\varphi \circ \alpha \equiv \varphi$ y $\varphi \circ \beta \equiv \varphi$, así por ejemplo, $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi \circ \alpha$.

Supongamos que $Expl(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$. Por (CL3) $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \nvdash \bot$, así existe α_ω tal que $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$ y por (B5) $\alpha_\omega \vdash \alpha \vee \beta$

Caso 1: Si $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ y $Expl(\beta) = \emptyset$, entonces $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi \circ \alpha$.
En efecto, sea $\alpha_{\omega'} \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$, entonces $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_{\omega'}$, por (B5) $\alpha_{\omega'} \vdash \alpha \vee \beta$. Si $\alpha_{\omega'} \vdash \beta$ y como $(\alpha \vee \beta) \wedge \beta \nvdash \bot$ se tiene por (B6) $(\alpha \vee \beta) \wedge \beta \rhd \alpha_{\omega'}$ y de (B7) $\beta \rhd \alpha_{\omega'}$ lo que es una contradicción. Luego $\alpha_{\omega'} \nvdash \beta$, así $\alpha_{\omega'} \vdash \alpha$ y de (B6) y (B7) se tiene $\alpha \rhd \alpha_{\omega'}$, por lo tanto $\alpha_{\omega'} \vdash \varphi \circ \alpha$.
Si $\alpha_{\omega'} \vdash \varphi \circ \alpha$, entonces $\alpha \rhd \alpha_{\omega'}$. Si $\alpha_\omega \vdash \beta$ entonces como $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$ de (B6) y (B7) se tendría $\beta \rhd \alpha_\omega$ lo cual no ocurre, por ello $\alpha_\omega \nvdash \beta$ y como $\alpha_\omega \vdash \alpha \vee \beta$, necesariamente $\alpha_\omega \vdash \alpha$. Tenemos $\alpha \rhd \alpha_{\omega'}$, es decir por (B7), $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \rhd \alpha_{\omega'}$; además $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$ y $\alpha_\omega \vdash \alpha$. Así, de (B4), $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$, es decir $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$.

Caso 2: Si $Expl(\alpha) = \emptyset$ y $Expl(\beta) \neq \emptyset$, entonces $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi \circ \beta$
Caso análogo al anterior.

Caso 3: $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ y $Expl(\beta) \neq \emptyset$. Considere $\alpha_{\omega'}$ y $\alpha_{\omega''}$ tales que, $\alpha \rhd \alpha_{\omega'}$ y $\beta \rhd \alpha_{\omega''}$.

i) Si $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_{\omega'}$ y $\alpha \vee \beta \not\rhd \alpha_{\omega''}$, entonces $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi \circ \alpha$.
   $(\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \vdash \varphi \circ \alpha)$ Sea $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$, entonces $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$ y de (B5) $\alpha_\omega \vdash \alpha \vee \beta$.
   Si $\alpha_\omega \vdash \beta$ y además $(\alpha \vee \beta) \wedge \beta \equiv \beta$ y $(\alpha \vee \beta) \wedge \beta \rhd \alpha_{\omega''}$, se tiene por (B4) $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_{\omega''}$, lo que contradice la hipótesis. Así $\alpha_\omega \vdash \alpha$, y además $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \nvdash \perp$, entonces por (B6) $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \rhd \alpha_\omega$ y de (B7) $\alpha \rhd \alpha_\omega$, por lo tanto $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$.
   $(\varphi \circ \alpha \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta))$ Sea $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$ entonces $\alpha \rhd \alpha_\omega$. De la hipótesis y (B5) se tiene $\alpha_{\omega'} \vdash \alpha$, entonces como $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \equiv \alpha$, por (B7) $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \rhd \alpha_\omega$. Como también tenemos $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_{\omega'}$ y $\alpha_{\omega'} \vdash \alpha$, por (B4) $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$, por lo tanto $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$.

ii) Si $\alpha \vee \beta \not\rhd \alpha_{\omega'}$ y $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_{\omega''}$, entonces $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv \varphi \circ \beta$.
   Análogo a *i*)

iii) Si $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_{\omega'}$ y $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_{\omega''}$, entonces $\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \equiv (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)$.
   $[\varphi \circ (\alpha \vee \beta) \vdash (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)]$: Sea $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \underline{e}ta)$, entonces $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$ y de (B5) $\alpha_\omega \vdash \alpha \vee \beta$. Si $\alpha_\omega \vdash \alpha$ y como $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \nvdash \perp$, se tiene por (B6) $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \rhd \alpha_\omega$ y por (B7) $\alpha \rhd \alpha_\omega$, así $\alpha_\omega \vdash (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)$. Si $\alpha_\omega \nvdash \alpha$, entonces $\alpha_\omega \vdash \beta$, realizando pasos análogos se obtiene $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \beta$ y por lo tanto $\alpha_\omega \vdash (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)$.
   $[\varphi \circ \alpha \vee \varphi \circ \beta \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)]$: Sea $\alpha_\omega \vdash (\varphi \circ \alpha) \vee (\varphi \circ \beta)$. Si $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \alpha$ entonces $\alpha \rhd \alpha_\omega$. De la hipótesis y (B5) se tiene $\alpha_{\omega'} \vdash \alpha$ luego de (B4) $\alpha \vee \beta \rhd \alpha_\omega$, por lo tanto $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ (\alpha \vee \beta)$. Si $\alpha_\omega \vdash \varphi \circ \beta$, se procede de manera similar.

Teorema 3.2. *Si $\circ$ es un operador de credibilidad limitada y φ una fórmula consistente, entonces la relación $\rhd$ definida como $\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow (\gamma \vdash \varphi \circ \alpha)$ y $(\varphi \circ \alpha \vdash \alpha)$ con $\gamma \nvdash \perp$ es una relación abductiva de credibilidad limitada con reflexividad débil.*

Demostración:

(B0) De (CL3) $\varphi \circ \top \nvdash \perp$, entonces existe γ tal que $\gamma \vdash \varphi \circ \top$, como $[\![\top]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset$ se tiene $[\![\varphi \circ \top]\!] = min([\![\top]\!] \cap C_\varphi)$, luego $[\![\gamma]\!] \subseteq min([\![\top]\!] \cap C_\varphi)$, así $\top \rhd \gamma$ y $Expl(\top) \neq \emptyset$.

(B1) Es inmediato de la definición.

Observación 3.2. *En virtud del teorema de representación de credibilidad limitada, existe una asignación fiel que envia a cada fórmula consistente φ al par $(C_\varphi, \preceq_\varphi)$ tal que*

$$[\![\varphi \circ \alpha]\!] = \begin{cases} min([\![\alpha]\!], \preceq_\varphi) & si \quad [\![\alpha]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset \\ [\![\varphi]\!] & de\ otra\ forma \end{cases}$$

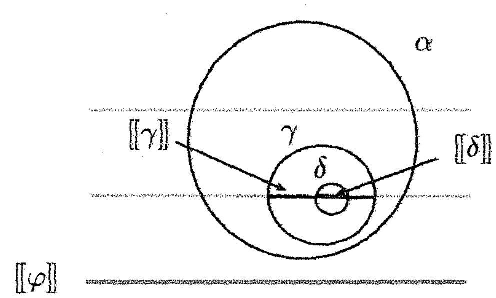
donde, $C_\varphi = \{\omega : \ \varphi \circ \alpha_\omega \vdash \alpha_\omega\}$

Entonces la relación $\rhd$ puede ser definida de manera equivalente como

$$\alpha \rhd \gamma \Leftrightarrow [\![\alpha]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset \quad y \quad [\![\gamma]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi), \quad con\ [\![\gamma]\!] \neq \emptyset$$

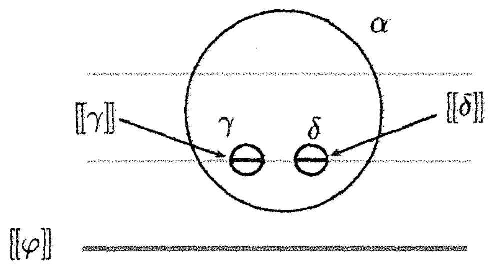
Con esto es más facil demostrar que $\rhd$ satisface las reglas (B2)-(B8).

(B2) De la hipótesis, $[\![\gamma]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$ y $[\![\delta]\!] \subseteq [\![\gamma]\!]$, se obtiene de la transitividad $[\![\delta]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$ y como $[\![\delta]\!] \neq \emptyset$, se tiene $\alpha \rhd \delta$.



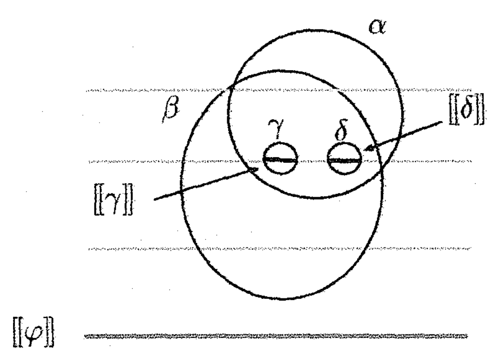
(Si todo modelo de δ es modelo de γ el cual a su vez está constituido por modelos minimales de α, entonces δ explica α.)

(B3) Si $[\![\gamma]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$ y $[\![\delta]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$ y $[\![\gamma]\!] \neq \emptyset \neq [\![\delta]\!]$, entonces $\emptyset \neq [\![\gamma \vee \delta]\!] \subseteq [\![\gamma]\!] \cup [\![\delta]\!]$ y $[\![\gamma]\!] \cup [\![\delta]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$, así $\alpha \rhd \gamma \vee \delta$.



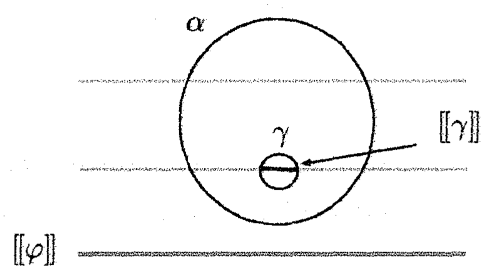
(Si todo modelo de γ y todo modelo de δ son modelos minimales de α, entonces los modelos de la disyunción también son modelos minimales de α, asi $\gamma \vee \delta$ explica α.)

(B4) De (B1) $[\![\delta]\!] \nvdash \perp$ y como $[\![\gamma]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$ y $[\![\gamma]\!] \subseteq [\![\beta]\!]$ se tiene $min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \cap [\![\beta]\!] \neq \emptyset$, luego del *Lema 1.1* parte *iii)* $[\![\delta]\!] \subseteq min([\![\alpha \wedge \beta]\!] \cap C_\varphi)$ y $min([\![\alpha \wedge \beta]\!] \cap C_\varphi) \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \cap [\![\beta]\!]$, por lo tanto $[\![\delta]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$, así $\alpha \rhd \delta$.



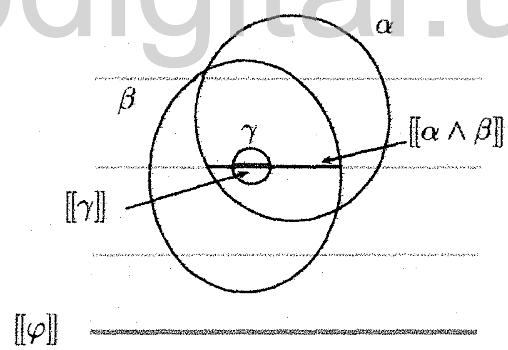
(Si todo modelo de γ es modelo minimal de α, y a su vez modelo de β, entonces toda fórmula cuyos modelos son minimales de $\alpha \wedge \beta$, estará constituida por modelos minimales de α.)

(B5) Si $\alpha \rhd \gamma$ se obtiene por definición $[\![\gamma]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \subseteq [\![\alpha]\!]$, así por transitividad $[\![\gamma]\!] \subseteq [\![\alpha]\!]$, es decir, $\gamma \vdash \alpha$.



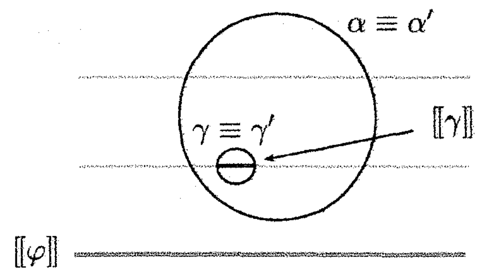
(Si todo modelo de γ es modelo minimal de α, entonces es modelo de α.)

(B6) De la hipótesis $[\![\gamma]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi)$, $[\![\gamma]\!] \neq \emptyset$ y $[\![\gamma]\!] \subseteq [\![\beta]\!]$ y del *Lema 1.1* parte *ii)* $[\![\gamma]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi) \cap [\![\beta]\!] \subseteq min([\![\alpha \wedge \beta]\!] \cap C_\varphi)$, así $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$.



(Si todo modelo de γ es modelo minimal de α, y a su vez modelo de β, entonces los modelos de γ son también minimales en $[\![\alpha \wedge \beta]\!]$.)

(B7) Si $\alpha \rhd \gamma$ entonces de la hipótesis se tiene $[\![\gamma']\!] \subseteq min([\![\alpha']\!] \cap C_\varphi)$ así $\alpha' \rhd \gamma'$. El reciproco es análogo.



(Si γ explica a α, entonces cualquier fórmula que comparta los mismos modelos con γ también explica a α y en general, explica a cualquier fórmula equivalente con α.)

(B8) Note que para cualquier fórmula α', $Expl(\alpha') \neq \emptyset$ si y solamente si $[\![\alpha']\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset$. Entonces, si $Expl(\alpha) \neq \emptyset$ se tiene $[\![\alpha]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset$, pero si además $[\![\alpha]\!] \subseteq [\![\beta]\!]$, obviamente $[\![\beta]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset$ y por lo tanto $Expl(\beta) \neq \emptyset$.

De los *Teoremas 3.1, 3.2* y *1.3* se tiene el resultado siguiente:

Teorema 3.3. $\rhd$ *es una relación abductiva de credibilidad limitada con reflexividad débil si y solamente si existe* $C_\varphi \subseteq \mathcal{V}$ *y un preorden total* $\preccurlyeq_\varphi$ *sobre* C_φ *tal que*

$$\alpha \rhd \gamma \;\Leftrightarrow\; [\![\alpha]\!] \cap C_\varphi \neq \emptyset,\; [\![\gamma]\!] \neq \emptyset \text{ y } [\![\gamma]\!] \subseteq min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi, \preccurlyeq_\varphi)$$

Note que la estructura $(C_\varphi, \preccurlyeq_\varphi)$ define una relación racional (es una estructura racional) definida por $\alpha \mid\!\sim \beta$ si y sólo si $min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi, \preccurlyeq_\varphi) \subseteq [\![\beta]\!]$. Así
$C(\alpha) = \{\beta :\; \alpha \mid\!\sim \beta\} = Th(min([\![\alpha]\!] \cap C_\varphi, \preccurlyeq_\varphi))$. Ahora bien, por el teorema anterior, si $\rhd$ es una relación abductiva de credibilidad limitada con reflexividad débil, se tiene $\alpha \rhd \gamma \;\Leftrightarrow [\![\gamma]\!] \subseteq [\![C(\alpha)]\!]$ es decir que $\rhd$ es una relación E-racional (ver [11]). En este caso $\Sigma = Th(C_\varphi)$.
Por lo tanto tenemos lo siguientes:

Teorema 3.4. *Una relación* $\rhd$ *abductiva de credibilidad limitada con reflexividad débil no es otra cosa que una relación E-racional en donde* $\Sigma = Th(\{\omega :\; \alpha_\omega \rhd \alpha_\omega\})$.

El corolario de esta discución es que se tiene una axiomatización alternativa de las relaciones E-racionales en donde Σ está implícito.

CONCLUSIÓN Y PERSPECTIVAS

Hemos estudiado diferentes esquemas abductivos definidos en términos de operadores de revisión de credibilidad limitada. Hemos dado caracterizaciones semánticas de ciertos operadores de abducción. Uno de los subproductos es tener una caracterización alternativa de las relaciones E-racionales en donde Σ la teoría de base está implícita.

Queda por estudiar y caracterizar otros esquemas de abducción. También está abierto saber si las caracterizaciones axiomáticas son minimales.

BIBLIOGRAFÍA

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[2] R. Booth, E. Fermé, S. Konieczny, and R. Pino Pérez. Credibility-limited revision operators in propositional logic. In *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the Thirteenth International Conference, KR 2012, Rome, Italy, June 10-14, 2012*, pages 116–125, 2012.

[3] C. Boutilier, and V. Becher. Abduction as belief revision. *Artificial Intelligence*, 77:43-94, 1995.

[4] A. Díaz and C. Uzcátegui. Representation theorems for explanatory reasoning based on cumulative models. *Journal of Applied Logic*, 6:564–579, 2008.

[5] A. Díaz. *Relaciones explicatorias: Teoremas de representación y noción de clausura.* PhD thesis, IVIC, Caracas, Venezuela, 2005.

[6] P. Gärdenfors and D. Makinson. Relations between the logic of theory change and nonmonotonic logic. In *The Logic of Theory Change, Workshop, Konstanz, FRG, Octuber 1989*, pages 185–205. Springer-Verlag, 1989. Lecture Notes in Artificial Intelligence 465.

[7] S. O. Hansson. A survey of non-prioritized belief revision. *Erkenntnis*, **50**, 413–427, (1999).

[8] S. O. Hansson, E. Fermé, J. Cantwell, and M. Falappa, Credibility limited revision. *Journal of Symbolic Logic*, **66**, 1581–1596, (2001).

[9] H. Katsuno, and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence* 52:263–294, (1991)

[10] Ramón Pino Pérez. Relaciones de explicación y operadores de revisión no prioritarios. In *XXVI Jornadas Venezolanas de Matemática.* Valencia, Venezuela, 18 al 21 de marzo, 2013.

[11] R. Pino-Pérez and C. Uzcátegui. Jumping to explanations versus jumping to conclusions. *Artificial Intelligence*, 111(2):131–169, (1999).

[12] R. Pino-Pérez and C. Uzcátegui. Preferences and explanations. *Artificial Intelligence*, 149:1–30, (2003).

[13] R. Pino Pérez, C. Uzcátegui. *Dinámica del conocimiento.* Ediciones IVIC, ISBN 978-980-261-122-5, Caracas, Venezuela, 2010.

[14] B. Walliser, D. Zwirn, and H. Zwirn. Abductive logic in a belief revision framework. *J. Logic, Languange and Information*, 14:87–117, (2005).