Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
C.I.L.A

Operadores de Mejoramiento de Creencias

Lic. Mattia Medina Grespan

Requisito especial de grado,
en la modalidad seminario monografía,
para optar al Título de
Magister en Matemáticas

Tutor: Dr. Ramón Pino Pérez

Mérida, 2013

Índice general

Capítulo 1

Introducccción

Preguntarse en qué forma evoluciona el conocimiento de un agente a la luz de nuevas informaciones ha conllevado al desarrollo de todo una teoría que intersecta diversas disciplinas, inteligencia artificial, psicología, bases de datos son sólo alguna de ellas. Esta teoría se conoce como la Dinámica del conocimiento.

Desde el punto de vista lógico matemático uno de los marcos predominantes en el estudio de la dinámica del conocimiento es el propuesto por Alchourrón, Gänderfors y Makinson, conocido como el marco de la revisión de creencias AGM ó marco AGM. Los operadores de revisión AGM se rigen por una serie de postulados que se fundamentan en tres principios: el principio de *coherencia*, que pide mantener la consistencia hasta la últimas consecuencias, el principio de cambio minimal, que pide conservar la mayor cantidad de la vieja información como sea posible y el principio de *prioridad de la información* que pide que la nueva información sea aceptada después de la revisión de las creencias por medio del bien conocido *postulado de éxito*.

Con el fin de adherirse más rigurosamente a estos tres principios, el marco AGM ha sido extendido consecuentemente. En 1997 Darwiche y Pearl demostraron que el enfoque AGM de las bases de conocimiento como fórmulas lógicas produce inconvenientes (específicamente con el principio del cambio minimal) a la hora de iterar la revisión debido a su falta de poder expresivo. Propusieron entonces cambiar las bases de creencias lógicas por estructuras más complejas llamadas estados epistémicos, las cuales proporcionan más información sobre el conocimiento del agente. Tradujeron entonces los postulados AGM en términos de estados espistémicos y a estos agregaron nuevos postulados que controlan de manera más precisa el cambio de conocimiento durante la iteración, este nuevo marco se conoce como el Marco DP.
Recientemente Booth y Meyer y, de manera independiente, Jin y Thielscher, han

propuesto mejoras al marco DP.

El trabajo que presentamos a continuación nace de reflexionar sobre la relación entre el principio del cambio minimal y el principio de la prioridad de la nueva información en la revisión de creencias. ¿Qué tan "minimal" es el cambio si es obligatorio incluir a nuestro conjunto de creencias, sea cual sea, la nueva información?. ¿Es absolutamente necesario el postulado de éxito?.

Está claro que este requerimiento es adecuado en una gran cantidad de situaciones, pero hay otras tantas en que quisiéramos considerar la nueva información de una manera más cautelosa. Quizás porque tenemos cierta confianza en la fuente de donde viene esta información, pero no suficiente para aceptarla incondicionalmente en nuestras creencias. Esto puede ser visto como una especie de proceso de *aprendizaje en aumento* de la información: cada vez que el agente recibe una nueva información α, ésta fórmula *mejora* su plausibilidad en el estado epistémico de dicho agente. Y si éste recibe la misma información muchas veces, entonces finalmente la creerá y la aceptará en sus creencias.

En este trabajo proponemos una generalización de los operadores de revisión iterada del marco DP, y los llamamos operadores de mejoramiento. Esta nueva clase de operadores renuncian a la necesidad del postulado de éxito en la búsqueda del verdadero cambio minimal, comportándose de una manera mucho menos drástica que los ya bien conocidos operadores de revisión iterada DP, y basándose en *mejorar* poco a poco la nueva información para luego de un número determinado de iteraciones, finalmente aceptarla.

Daremos una representación precisa de los operadores de mejoramiento, clasificaremos las distintas subclases de operadores de mejoramiento y además exploraremos aquellos operadores que proporcionan el cambio minimal absoluto en las creencias de un agente a la luz de nueva información.

Capítulo 2

Revisión de Creencias

2.1. Marco AGM

El estudio formal de la revisión de creencias comienza en los años 80. Se considera como fundador el trabajo de Alchourrón, Gardenfors y Makinson (AGM) en el año 1985 [1]. El marco AGM estudia un modelo matemático idealizado de la revisión de creencias. Dado un lenguaje lógico, las creencias de un agente son representadas por conjuntos de fórmulas cerradas bajo implicación lógica (Teorías lógicas); son llamadas *conjuntos de creencias*. La nueva información es una fórmula del lenguaje dado. Un operador de revisión es una función que incorpora la nueva información al conjunto de creencias del agente para obtener un nuevo conjunto de creencias revisado.

Definición 2.1 *Una función* $*$: *Teorías* $\times$ *Fórmulas* $\longrightarrow$ *Teorías que toma una teoría lógica y una fórmula* μ *y las envía a una nueva teoría denotada* $K * \mu$ *es llamada operador de revisión.*

Los autores del marco AGM original desarrollaron su teoría guiándose por tres principios fundamentales:

- *La prioridad de la nueva información.* La nueva información se considera más plausible y necesaria en la creencias del individuo (sin importar si está o no en contradicción con las creencias existentes).
- *Cambio minimal* o economía de información. Durante la revisión de creencias no se debe renunciar a creencias existentes en el individuo antes de la revisión o generar nuevas creencias a menos que sea necesario.

- *No contradicción.* El resultado debe ser coherente cuando la nueva información es coherente (incluso si la nueva información está en contradicción con las creencias viejas).

El trío AGM propuso 8 postulados que deben ser satisfechos por cualquier operador de revisión razonable. Ellos son los siguientes:

Postulados AGM:

En lo que sigue usaremos la letra K (eventualmente con subíndices) para denotar una teoría lógica. Las letras griegas minúsculas (eventualmente con subíndices) denotarán fórmulas de la lógica proposicional. La teoría contradictoria será denotada $K_{\perp}$. Usaremos el operador $+$, para la expansión, definido por

$$K + \mu = Cn(K \cup \{\mu\})$$

El primer postulado simplemente requiere que el resultado de una revisión sea un conjunto de creencias.

(K*1) $K * \mu$ es un conjunto de creencias.

El segundo postulado garantiza que la nueva información sea adquirida por el conjunto de creencias tras el proceso de revisión.

(K*2) $\mu \in K * \mu$.

El caso más interesante en un proceso de revisión se da cuando la nueva información μ es inconsistente con el conjunto de creencias K. Sin embargo, para una completa definición del operador de revisión, se cubre al caso cuando μ no es contradictoria con K identificándolo con una expansión de K por μ. El tercer y cuarto postulado nos dicen que la expansión es un caso particular de la revisión salvo en el caso en que $K + \mu = K_{\perp}$.

(K*3) $K * \mu \subseteq K + \mu$.

(K*4) Si $\neg\mu \notin K$, entonces $K + \mu \subseteq K * \mu$.

Los conjuntos de creencias inconsistentes son indeseables. El quinto postulado asume que $K * \mu$ es consistente a menos que μ sea una contradicción.

(K*5) $K * \mu = K_{\perp}$ si, y sólo si, μ es inconsistente.

El sexto postulado requiere que la revisión de creencias sea independiente de la sintáxis.

(K*6) Si $\phi \equiv \mu$, entonces $K * \phi = K * \mu$.

Los postulados 7 y 8 implican que el cambio minimal de K al incluir dos nuevas informaciones μ y ϕ es el mismo de la expansión de $K * \phi$ por μ siempre y cuando, μ no contradiga a las creencias en $K * \phi$.

(K*7) $K * (\phi \wedge \mu) \subseteq (K * \phi) + \mu$.

(K*8) Si $\neg\mu \notin K * \phi$, entonces $(K * \phi) + \mu \subseteq K * (\phi \wedge \mu)$.

Estos *postulados de racionalidad* (como son conocidos) fueron propuestos sobre bases filosóficas. Más aún, cualquier preocupación computacional estaba completamente ausente de de los autores del marco AGM.

En 1991 Katsuno y Mendelzon [6] estudiaron una forma de representar más concretamente a los conjuntos de creencias en el caso "finito"(un número finito de variables proposicionales). En particular, para automatizar y computarizar estos procesos es bueno tener una representación compacta del conjunto de creencias. Por lo tanto decidieron reformular el marco AGM. A esta reformulación la llamaremos marco KM.

2.2. Marco KM

Katsuno y Mendelzon [6] consideraron un lenguaje proposicional finito L, y representaron al conjunto de creencias por medio de una fórmula en L. De esta manera redefinieron a un operador de revisión de la forma siguiente:

Definición 2.2 *Una función* $\circ$: *Fórmulas* $\times$ *Fórmulas* $\longrightarrow$ *Fórmulas que toma una fórmula* ψ *que representa a un conjunto de creencias y a otra fórmula* μ *que representa la nueva información y las envía a una nueva fórmula proposicional denotada como* $\psi \circ \mu$ *es llamado operador de revisión KM.*

Un *operador de revisión KM* debe cumplir con las siguientes propiedades:

(KM1) $\psi \circ \mu \vdash \mu$.

(KM2) Si $\psi \wedge \mu$ es consistente, entonces $\psi \circ \mu \equiv \psi \wedge \mu$.

(KM3) Si μ es consistente, entonces $\psi \circ \mu$ es también consistente.

(KM4) Si $\psi_1 \equiv \psi_2$ y $\mu_1 \equiv \mu_2$, entonces $\psi_1 \circ \mu_1 \equiv \psi_2 \circ \mu_2$.

(KM5) $(\psi \circ \mu) \wedge \phi \vdash \psi \circ (\mu \wedge \phi)$.

(KM6) Si $(\psi \circ \mu) \wedge \phi$ es consistente, entonces $\psi \circ (\mu \wedge \phi) \vdash (\psi \circ \mu) \wedge \phi$.

En el caso finito, la definición de revisión KM es equivalente a la de AGM.

Valiéndose de esta reformulación Katsuno y Mendelzon mostraron un teorema de representación para los operadores de revisión.

Definición 2.3 *Consideremos una función que asigna a cada fórmula proposicional ψ un preorden total*[1] $\leq_\psi$ *sobre W. Decimos que esta asignación es fiel si y sólo si*

1. *Si $\omega_1 \models \psi$, entonces $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ para cualquier ω_2*

2. *Si $\omega_1 \models \psi$ y $\omega_2 \not\models \psi$, entonces $\omega_1 <_\psi \omega_2$; y*

3. *Si $\psi \equiv \phi$, entonces $\leq_\psi = \leq_\phi$.*

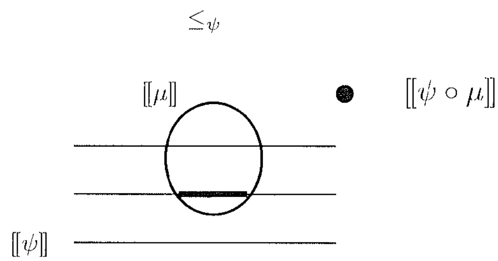
Aquí, $\omega_1 <_\psi \omega_2$ está definido como $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ y $\omega_2 \not\leq_\psi \omega_1$; $\omega_1 =_\psi \omega_2$ está definido como $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ y $\omega_2 \leq_\psi \omega_1$.

Teorema 2.1 *Un operador de revisión $\circ$ satisface los postulados (KM1)-(KM6) si y sólo si existe una asignación fiel que envía cada fórmula ψ a un preorden total $\leq_\psi$ tal que*

$$[[\psi \circ \mu]] = min([[\mu]], \leq_\psi)$$

La siguiente figura ilustra el teorema de representación.

[1] Un preorden total es una relación total y transitiva.



Los modelos de μ están dentro del óvalo. los modelos de $\psi \circ \mu$ están indicados por la línea negra más gruesa: los minimales de los modelos de μ con respecto al preorden $\leq_\psi$, indicado por las rayas horizontales. Los modelos en las rayas más bajas son los modelos más plausibles para ψ.

2.3. Problemas con la Iteración de creencias

Usando el teorema de representación de Katsuno y Mendelzon, Adnan Darwiche y Judea Pearl mostraron en 1997 [3] que la revisión KM (equivalente a la revisión AGM en el caso finito) tiene problemas al iterar el proceso de revisión. Argumentando que estos problemas venían del hecho de que lo único conocido sobre el ordenamiento de los mundos luego de la revisión por la nueva información μ es que los mundos más plausibles (en el primer nivel) son los modelos minimales de μ según el preorden total asignado al conjunto de creencias inicial. Veamos, por medio de los siguientes ejemplos, que ésta falta de relación estructural entre el preorden inicial $\leq_\psi$ asignado fielmente a ψ, y el preorden de la revisión $\leq_{\psi \circ \mu}$ asignado fielmente a $\psi \circ \mu$ implica cambios contraintuitivos en un conjunto de creencias ψ.

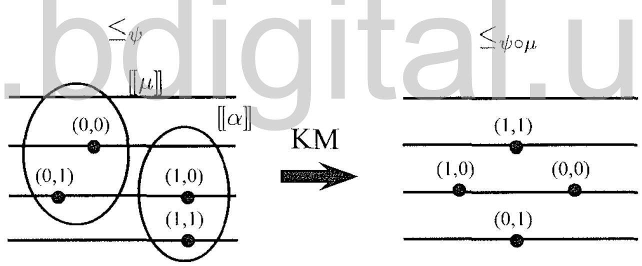
Este ejemplo nos muestra que existen operadores de revisión KM que *renuncian* a creencias sin justificación alguna. El ejemplo a continuación propuesto por Darwiche Pearl (DP), muestra que también existen operadores de revisión KM que *generan* creencias sin justificación alguna.

Ejemplo 2.1 *Se nos presenta una señorita llamada Brenda que parece ser lista y luce adinerada, por lo tanto, creemos que Brenda es lista y que Brenda es adinerada. Claramente, seguiremos creyendo que Brenda es lista aúnque nos enteremos que es pobre y seguiremos creyendo que Brenda es adinerada aunque nos enteremos que no es lista. Entonces, llega a nosotros una información que dice que Brenda no es lista, y por lo tanto, seguimos convencidos de que Brenda es adinerada. Pero otra* *nueva información nos es dada, y nos dice que Brenda sí es lista después de todo. Como el hecho de que Brenda sea o no lista no afecta en absoluto el hecho de que sea adinerada lo razonable es que después de toda la confusión sobre la inteligencia de Brenda sigamos creyendo que Brenda es adinerada.*

Veamos un operador de revisión compatible con KM que permite dejar de creer que Brenda es adinerada e incluso adquirir la creencia de que Brenda no es adinerada.

mundo	lista	adinerada	$\leq_\psi$	$\leq_{\psi o \mu}$
(1,1)	V	V	0	2
(1,0)	V	F	1	1
(0,1)	F	V	1	0
(0,0)	F	F	2	1

Tomando $\psi \equiv lista \wedge adinerada$, $\mu = \neg lista$ y $\alpha = lista$. Veamos la gráfica de la tabla anterior.



Notemos que $min([\![\alpha]\!], \leq_{\psi\circ\mu}) = \{(1,0)\}$. Luego por el teorema de representación obtenemos que $(\psi \circ \mu) \circ \alpha \equiv lista \wedge \neg adinerada$ y obtenemos que $\circ$ satisface (KM1)-(KM6). Posición no deseada por un agente razonable.

Esto nos hace citar la siguiente frase de Hans Rott:

> *"Que los principios de cambio minimal sean las bases de las teorías existentes de revisión de creencias es sólo un mito, al menos en lo que a la tradición AGM se refiere."*

2.4. Estados Epistémicos

Un estado espistémico etimológicamente quiere decir estado de conocimiento. Las creencias de un agente se basan en los conocimientos del mismo en un determinado momento. En el marco AGM las creencias y los estados epistémicos de un agente son exactamente lo mismo, a saber, conjuntos de fórmulas cerradas bajo implicación lógica. Ellos los llaman *conjuntos de creencias* ("belief sets"). Para Katsuno y Mendelzon un estado epistémico es una fórmula proposicional de un lenguaje proposicional finito que codifica un conjunto de creencias. Sin embargo ambos enfoques definen al proceso de revisión de creencias, como un operador que afecta sólo a los conjuntos de creencias, y se basan en postulados que hablan exclusivamente de *un paso* de revisión.

Percatándose de esto, Darwiche y Pearl en 1997 [3] se dieron cuenta que hacía falta más que conjuntos de creencias para poder dar cuenta de manera coherente del proceso de iteración en la revisión. Intuitivamente, un estado epistémico debía tener además de los conjuntos de creencias de AGM o KM toda la información necesaria para un razonamiento coherente, incluyendo en particular, la estrategia para la revisión de creencias que el agente deseara emplear en un determinado momento. De esta manera consideraron a los estádos espistémicos como entidades abstractas pero no dieron una representación formal única de éstos.

Denotaremos a los estados epistémicos con letras griegas mayúsculas Ψ, Φ eventualmente con subíndices.

En el marco propuesto por Darwiche y Pearl (que llamaremos marco DP) es posible hablar de dos estados epistémicos Ψ_1 y Ψ_2 iguales (denotado como $\Psi_1 = \Psi_2$), pero aún así, pudiendo ser sintácticamente diferentes.

En el marco DP cada estado espistémico Ψ tiene un conjunto de creencias asociado. Ese conjunto será codificado por una fórmula proposicional denotada $B(\Psi)$. Como es usual en la literatura confundiremos a la fórmula $B(\Psi)$ con el conjunto de creencias que ella codifica a saber $Cn(B(\Psi))$. Es muy importante notar que el conjunto de creencias de Ψ no caracteriza al estado epistémico Ψ. Es posible tener dos estados epistémicos distintos con conjuntos de creencias asociados equivalentes. Más precisamente, la función B no es, en general, inyectiva.

2.5. Reformulación de KM

Los postulados KM modificados por Darwiche y Pearl son los siguientes:

(R*1) $B(\Psi \circ \mu) \vdash \mu$.

(R*2) Si $B(\Psi) \wedge \mu$ es consistente, entonces $B(\Psi \circ \mu) \equiv B(\Psi) \wedge \mu$.

(R*3) Si μ es consistente, entonces $B(\Psi \circ \mu)$ es también consistente.

(R*4) Si $\Psi_1 = \Psi_2$ y $\mu_1 \equiv \mu_2$, entonces $B(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv B(\Psi_2 \circ \mu_2)$.

(R*5) $B(\Psi \circ \mu) \wedge \phi \vdash B(\Psi \circ (\mu \wedge \phi))$.

(R*6) Si $B(\Psi \circ \mu) \wedge \phi$ es consistente, entonces $B(\Psi \circ (\mu \wedge \phi)) \vdash B(\Psi \circ \mu) \wedge \phi$.

La diferencia entre estos postulados y (KM1)-(KM6) reside esencialmente en la naturaleza de los estados epistémicos y en la función B. Ya no se revisa a un conjunto de creencias ψ ante una nueva información μ. Al contrario, la revisión por μ se aplica sobre un estado epistémico Ψ.

Podría decirse que que los postulados nuevos son una traducción inmediata de los postulados KM a nivel de las creencias. El único postulado que no tiene traducción inmediata es (KM4). Ellos adoptan la condición (R*4) que es un debilitamiento de (KM4). Recordemos que (KM4), en términos de estados epistémicos, dice que dos estados epistémicos Ψ_1 y Ψ_2 con sus respectivos conjuntos de creencias asociados equivalentes, al ser revisados por información equivalente, siguen teniendo respectivos conjuntos de creencias asociados equivalentes. El postulado (R*4) es más débil pues exige hipótesis más fuertes: pide la igualdad de los estados epistémicos (en el antecedente de la implicación) en vez de la equivalencia de sus creencias.

Es importante resaltar una diferencia en la notación que hemos adoptado. Darwiche y Pearl utilizan una notación que puede inducir al lector inadvertido en error. Por ejemplo el postulado (R*1) lo enuncian así: $\Psi \circ \mu \vdash \mu$. Su significado siendo, por supuesto, $B(\Psi \circ \mu) \vdash \mu$. Nosotros preferimos hacer explícita la función B (las creencias) en la formulación de los postulados.

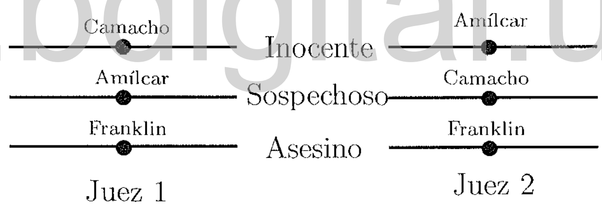
De ahora en adelante nos referiremos a (R*1)-(R*6) como los postulados AGM-DP.

El siguiente ejemplo propuesto por Goldszmidt y Pearl (con otros nombres), ilustra las consecuencias contraintuitivas que se pueden obtener siguiendo una traducción literal de la condición (KM4) que sería: $B(\Psi_1) \equiv B(\Psi_2)$ y $\mu_1 \equiv \mu_2$ implica

$B(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv B(\Psi_2 \circ \mu_2)$, Postulado que llamaremos (R*4')

Ejemplo 2.2 *Dos jueces en un caso de asesinato poseen diferentes estados epistémicos el primer juez cree que "Franklin es el asesino, Amílcar es sospechoso pero no hay pruebas suficientes en su contra, mientras que Camacho es definitivamente inocente". El segundo Juez cree que "Franklin es el asesino, Camacho es sospechoso pero no hay pruebas suficientes en su contra, mientras que Amílcar es definitivamente inocente". Los dos jueces tienen el mismo conjunto de creencias más arraigadas* $B(\Psi_1) \equiv B(\Psi_2) =$ *"Franklin es el asesino". Pero una evidencia sorprendente llega a los jueces* $\mu =$ *"Franklin no es el asesino". Claramente, cualquier revisión de creencias racional, hará que estos jueces difieran en sus conjuntos de creencias más arraigadas resultantes luego de revisar por la nueva evidencia. Sin embargo para cualquier operador de revisión que satisfaga el postulado (R*4') resultará que* $B(\Psi_1 \circ \mu) \equiv B(\Psi_2 \circ \mu)$, *lo cual es una posición insostenible en este caso (ver la explicación más abajo).*

El siguiente diagrama ilustra los estados epistémicos de los dos jueces como preferencias sobre los mundos posibles.



En ese caso, lo razonable es que el primer juez, después de la revisión, piense que el asesino es Daniel y que el segundo juez piense, después de la revisión, que el asesino es Camacho. Así las creencias sobre el asesino serán distintas.

2.5.1. Teorema de representación AGM-DP

Una vez establecido el nuevo marco para la revisión de estados epistémicos, Darwiche y Pearl mostraron un teorema de representación paralelo al teorema de representación de Katsuno y Mendelzon.

Definición 2.4 *Sea W el conjunto de todas las valuaciones de un lenguaje proposicional finito L y suponga que el conjunto de creencias asociado a cualquier estado epistémico pertenece a L. Una función que envía cada estado epistémico Ψ a un preorden total $\leq_\Psi$ sobre W se llama asignación fiel si, y sólo si se cumplen:*

1. *Si $\omega_1 \models B(\Psi)$, entonces $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ para cualquier ω_2.*
2. *Si $\omega_1 \models B(\Psi)$ y $\omega_2 \not\models B(\Psi)$, entonces $\omega_1 <_\Psi \omega_2$.*
3. *Si $\Psi = \Phi$, entonces $\leq_\Psi = \leq_\Phi$.*

Teorema 2.2 *Sea $\circ$ una función con dominio* Estados-epistémicos $\times$ Fórmulas *y codominio* Estados-epistémicos. *Entonces $\circ$ satisface los postulados (R*1)-(R*6) si, y sólo si, existe una asignación fiel que envía cada estado espistémico Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$ tal que*

$$[[B(\Psi \circ \mu)]] = min([[\mu]], \leq_\Psi)$$

Observación 2.1 *Una diferencia esencial entre el teorema 2.1 y el teorema 2.2 es que en el caso del marco KM (teorema 2.1) una asignación fiel permite de reconstruir el operador $\circ$ (salvo equivalencia lógica) mientras que en el marco AGM-DP (teorema 2.2) la asignación fiel no permite reconstruir al operador $\circ$. En este caso debemos tener definido al operador, pues, como ya dijimos antes, conocer $B(\Psi \circ \mu)$ no nos permite conocer $\Psi \circ \mu$.*

2.6. Postulados para la revisión iterada

En la sección anterior pudimos ver que el teorema de representación AGM-DP es paralelo al teorema de representación KM. Vimos también que hay ciertas diferencias. Una de ellas es la formulación de (R*4). Otra es la tercera condición de asignación fiel que exige la igualdad de dos estados epistémicos para asegurar la igualdad entre los preordenes totales correspondientes. Los postulados AGM-DP, sólo nos dicen quiénes van a ser los mundos más plausibles para el preorden asociado al estado espistémico revisado por una nueva información. Así, los postulados DP no hacen restricciones respecto al reordenamiento de los mundos que no son minimales después de la revisión.

En el año 1997 Boutilier comenzó a indagar sobre los problemas en la revisión iterada. Para solucionar estos problemas propuso agregar un nuevo postulado al marco KM existente. Se trata del postulado siguiente

(CB) Si $\psi \circ \mu \vdash \neg\alpha$, entonces $(\psi \circ \mu) \circ \alpha \equiv \psi \circ \alpha$

Este postulado impone restricciones sobre conjuntos de creencias por lo tanto puede ser llevado a la notación de DP:

(CB) Si $B(\Psi \circ \mu) \vdash \neg\alpha$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$

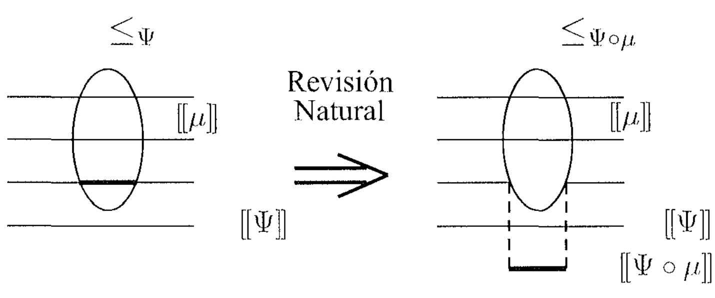
El siguiente teorema nos muestra la contraparte semántica del postulado de Boutilier para estados epistémicos.

Teorema 2.3 *Supongamos que un operador de revisión satisface los postulados (R*1)-(R*6). El operador satisface el postulado (CB), si y sólo si, el operador y su correspondiente asignación fiel satisfacen:*

(CBR) Si $\omega_1, \omega_2 \models \neg B(\Psi \circ \mu)$, *entonces* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ *sii* $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$

Los operadores de revisión AGM-DP (aquellos que satisfacen los postulados (R*1)-(R*6)) que cumplen con el postulado (CB), fueron bautizados por Boutilier operadores de *revisión natural*.

El postulado de Boutilier desde un punto de vista semántico nos dice que $\leq_{\Psi\circ\mu}$ se obtiene de $\leq_\Psi$ simplemente poniendo los minimales de μ en el nivel más bajo y los demás no cambian. Así no sólo impone restricciones sobre el preorden total correspondiente al estado espistémico revisado, (CB) lo define completamente. La siguiente figura explica exactamente este hecho.



La revisión natural pareciera ser la solución más apropiada para los problemas de la revisión iterada en cuanto al cambio minimal en las creencias se refiere, sin embargo, Darwiche y Pearl mostraron que era en cierta forma exagerada y por esta razón llevaba a resultados contraintuitivos. En el siguiente capítulo veremos ejemplos concretos donde la revisión natural implica comportamientos no razonables. Por esta razón Darwiche y Pearl, propusieron sustituir al postulado (CB) por 4 postulados menos restrictivos.

El primer postulado que Darwiche y Pearl propusieron agregar a (R*1)-(R*6) expresa la siguiente idea: cuando dos nuevas informaciones llegan, la segunda siendo más fuerte que la primera, la primera es redundante ya que la segunda información sola, podría implicar el mismo conjunto de creencias que se obtendría al revisar por ambas consecutivamente. Más formalmente el postulado es el siguiente:

(C1) Si $\alpha \vdash \mu$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$.

El segundo postulado expresa que si dos informaciones sucesivas son contradictorias, la última prevalece, es decir, la segunda información sola, implicaría el mismo conjunto de creencias. Más formalmente el postulado es el siguiente:

(C2) Si $\alpha \vdash \neg\mu$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$.

El tercer postulado expresa la siguiente idea: si revisamos nuestras creencias por una información μ, y luego revisamos el conjunto de creencias obtenido de la revisión por μ por una nueva información α. Entonces μ debería ser retenido en el conjunto de creencias final, en el caso de que si hubiesemos revisado inicialmente por α, el conjunto de creencias obtenido implique a μ. Más formalmente el postulado es el siguiente:

(C3) Si $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \mu$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \vdash \mu$.

El cuarto postulado expresa que ninguna información debería contribuir a su propio olvido. Por lo tanto si revisamos nuestras creencias por una información μ, y después por una información α, el conjunto de creencias resultante no debería implicar a la negación de μ, cuando nuestras creencias iniciales revisadas sólo por la información α no implican a $\neg\mu$. Más formalmente el postulado es el siguiente:

(C4) Si $B(\Psi \circ \alpha) \not\vdash \neg\mu$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \not\vdash \neg\mu$.

A los postulados (C1) hasta (C4) los llamaremos postulados de la iteración DP.

Analizando los 4 nuevos postulados de la iteración DP, podemos notar que ninguno de éstos conlleva a olvido innecesario de información. El postulado (C1), no olvida la primera información μ, ya que la segunda información α prevalece e implica a μ. En cambio (C2) si permite el olvido de la primera información μ cuando interviene la segunda información α, pero justificadamente, ya que lógicamente son contradictorias. En cuanto a los postulados (C3) y (C4), ellos están basados precisamente en no olvidar la información que es lo que queremos hacer notar.

Así como el postulado (CBR), la contraparte semántica de (CB), impone relaciones entre los preórdenes asociados a los estados espistémicos antes y despúes de la revisión por la nueva información, los postulados (C1) a (C4) deben tener contrapartes semánticas que también impongan relaciones entre los preórdenes asociados a los estados espistémicos antes y despúes de la revisión por la nueva información.
Y esto es precisamente lo que establece el siguiente teorema.

Teorema 2.4 *Supongamos que un operador de revisión satisface los postulados (R*1)-(R*6). El operador satisface los postulados (C1)-(C4) si, y sólo si, el operador y su asignación fiel correspondiente satisfacen:*

(CR1) Si $\omega_1 \models \mu$ *y* $\omega_2 \models \mu$, *entonces* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

(CR2) Si $\omega_1 \models \neg\mu$ *y* $\omega_2 \models \neg\mu$, *entonces* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

(CR3) Si $\omega_1 \models \mu$ *y* $\omega_2 \models \neg\mu$, *entonces* $\omega_1 <_\Psi \omega_2 \Rightarrow \omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

(CR4) Si $\omega_1 \models \mu$ *y* $\omega_2 \models \neg\mu$, *entonces* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Rightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$.

Más precisamente

$$(Ci) \quad \Leftrightarrow \quad (CRi) \quad para \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

Al examinar con detalle el teorema anterior, nos damos cuenta que los postulados (CR1)-(CR4), no imponen restricciones a $\leq_{\Psi\circ\mu}$ cuando un modelo de $\neg\mu$ es más plausible según $\leq_\Psi$ que un modelo de μ.

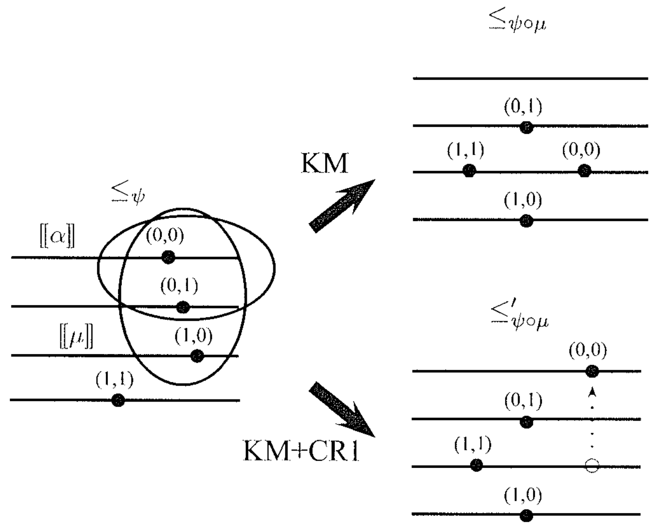
2.6.1. Ejemplos

Ejemplo 2.3 *Tengo incorporados en un circuito un sumador y un multiplicador. Yo creo que tanto el sumador como el multiplicador están funcionando, por lo tanto, todo el circuito está funcionando. Si alguien me dijera que el circuito está fallando, yo culparía al multiplicador y no al sumador (ya que los multiplicadores tienden a dar más problemas). Sin embargo, si alguien me dice que el sumador está dañado, yo creería que el multiplicador esta bien (porque las fallas son independientes, entonces, dos fallas simultáneas son menos deseadas que una sola). Ahora me dicen que el circuito está fallando, e inmediatamente después, que el sumador está fallando. Debería entonces creer que el multiplicador está malo también?. Un argumento tonto sería: "Después de enterarme de la falla en el circuito yo culpo al multiplicador. Sabiendo que el sumador está malo es perfectamente consistente con mis creencias actuales que el multiplicador esté dañado, de esta manera, yo no tengo razones para cambiar de parecer con respecto a multiplicador dañado". Un razonamiento más en acuerdo con la realidad dice que yo debo cambiar de parecer ya que la única razón por la que pueda culpar a multiplicador es que el circuito esté fallando. En otro caso, por mi propia experiencia, presumiré que el multiplicador está bueno. Incluso aceptaré que los dos componentes no son afectados entre si. Por lo tanto, saber que el sumador está malo despeja cualquier razón para que culpe al multiplicador; debo regresar a mi creencia inicial que el multiplicador está bueno.*

La situación siguiente es perfectamente compatible con AGM:

mundo	sumador_ok	multiplicador_ok	$\leq_{\psi}$	$\leq_{\psi o \mu}$
(1,1)	V	V	0	1
(1,0)	V	F	1	0
(0,1)	F	V	2	2
(0,0)	F	F	3	1

Tomando $B(\Psi) \equiv sumador\_ok \wedge multiplicador\_ok$, $\mu = \neg(sumador\_ok \wedge multiplicador\_ok)$ y $\alpha = \neg sumador\_ok$. Veamos la siguiente gráfica que ilustra este comportamiento indeseable y también el comportamiento más racional que impone (CR1) en una situación así.



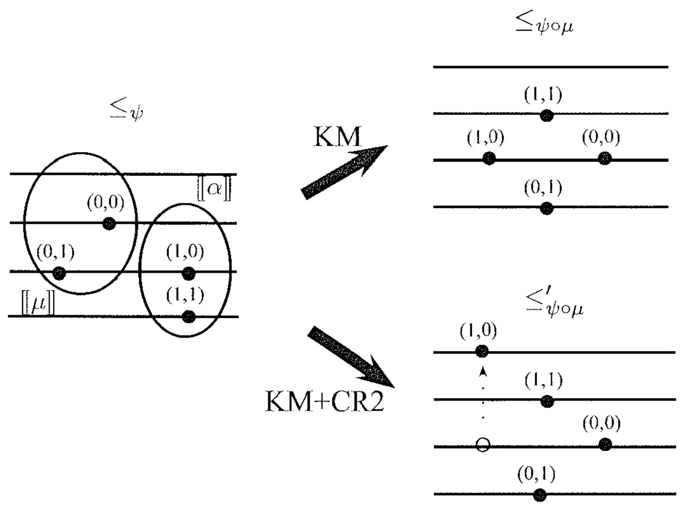
Notemos que $min([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi \circ \mu}) = \{(0,0)\}$. Esto implicaría por el teorema de representación que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv \neg sumador\_ok \wedge \neg multilplicador\_ok$. Pero en la gráfica podemos ver que $(0,1) <_\Psi (0,0)$ y que $(0,0) <_{\Psi \circ \mu} (0,1)$ rompiendo con la condición (CR1) ya que (0,1) y (0,0) son modelos de μ. Sin embargo podemos ver que $min([\![\alpha]\!], \leq'_{\Psi \circ \mu}) = \{(0,1)\}$ ya que $\leq'_{\Psi \circ \mu}$ satisface (CR1). Y de esta manera $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv \neg sumador\_ok \wedge multilplicador\_ok$. Que es la posición razonable de la que habláramos antes.

Ejemplo 2.4 *Retomemos el ejemplo 2.1 de la señorita Brenda.*

La siguiente situación, compatible con AGM, resume el ejemplo anterior

mundo	lista	adinerada	$\leq_\psi$	$\leq_{\psi \circ \mu}$
(1,1)	V	V	0	2
(1,0)	V	F	1	1
(0,1)	F	V	1	0
(0,0)	F	F	2	1

Tomando $B(\Psi) \equiv lista \wedge adinerada$, $\mu = \neg lista$ y $\alpha = lista$. Veamos los problemas y la solución que impone (CR2) ilustrados en la gráfica siguiente:



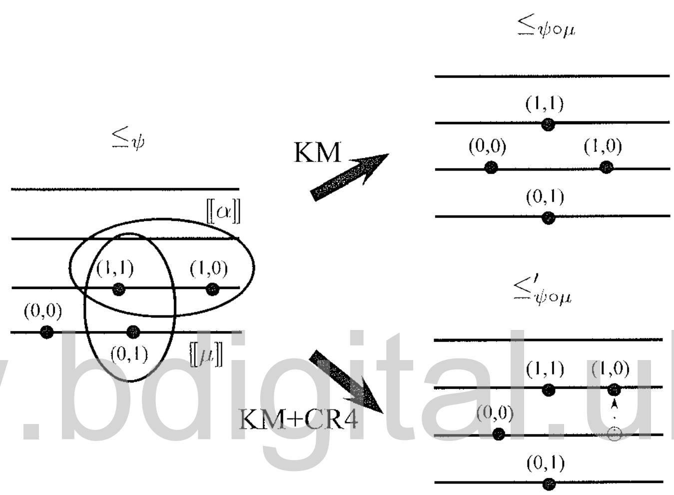
Notemos que $min([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi\circ\mu}) = \{(1,0)\}$. Esto implicaría por el teorema de representación que $B((\Psi\circ\mu)\circ\alpha) \equiv lista \wedge \neg adinerada$. Pero en la gráfica podemos ver que $(1,1) <_\Psi (1,0)$ y que $(1,0) <_{\Psi\circ\mu} (1,1)$ rompiendo con la condición (CR2) ya que (1,1) y (1,0) son modelos de $\neg\mu$. Sin embargo podemos ver que $min([\![\alpha]\!], \leq'_{\Psi\circ\mu}) = \{(1,1)\}$ ya que $\leq'_{\Psi\circ\mu}$ satisface (CR2). Y de esta manera $B((\Psi\circ\mu)\circ\alpha) \equiv lista \wedge adinerada$. Que es una posición razonable.

Ejemplo 2.5 *Un filósofo escocés se levanta en la mañana y dice: "El sol está radiante. ¡Qué bueno! No tengo razones para creer que tendré un día desagradable". La esposa le dice: "De hecho antes de que te levantaras dijeron en la radio que va ser un día agradable". El filósofo dijo: "¿En verdad lo dijeron? Los de la radio normalmente están en lo cierto, voy a tener que retractarme. Hoy va ser un día desagradable después de todo".*

Vamos a ver que AGM permite ese razonamiento extraño mientras que (CR4) lo prohíbe. La situación inicial es que en general no hay mucho sol en Escocia. Pero en cualquier caso los días pueden ser tanto agradables como desagradables. La tabla siguiente, que es compatible con AGM, ilustra porqué ese razonamiento extraño es posible:

mundo	sol_radiante	día_agradable	$\leq_\Psi$	$\leq_{\Psi o \mu}$
(1,1)	V	V	1	2
(1,0)	V	F	1	1
(0,1)	F	V	0	0
(0,0)	F	F	0	1

Tomando $B(\Psi) \equiv \neg sol\_radiante$, $\mu = dia\_agradable$ y $\alpha = sol\_radiante$, vamos a ver en la gráfica siguiente de manera más precisa el comportamiento extraño del filósofo y cómo (CR4) prohíbe ese comportamiento.



Notemos que $min([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi \circ \mu}) = \{(1,0)\}$. Esto implicaría por el teorema de representación que $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv dia\_soleado \wedge \neg dia\_agradable$. Pero en la gráfica podemos ver que $(1,1) =_\psi (1,0)$ y que $(1,0) <_{\psi \circ \mu} (1,1)$ rompiendo con la condición (CR4) ya que $(1,1) \in [\![\mu]\!]$ y $(1,0) \in [\![\neg\mu]\!]$. Sin embargo podemos ver que $min([\![\alpha]\!], \leq'_{\Psi \circ \mu}) = \{(1,1),(1,0)\}$ ya que $\leq'_{\Psi \circ \mu}$ satisface (CR4). Y de esta manera $B((\Psi \circ \mu) \circ \alpha) \equiv sol\_radiante$. Que es una posición razonable.

2.7. Operadores de Revisión DP

Veamos ahora ejemplos concretos de operadores que satisfagan los postulados (R*1)-(R*6) y (C1)-(C4).

2.7.1. Revisión natural

La Revisión Natural se definió para aquellos operadores que cumplieran con los postulados (R*1)-(R*6) y la condición (CB) de Boutilier. Por lo tanto bastará mostrar que (CB) implica (C1)-(C4) para incluir a la Revisión Natural en la lista de operados compatibles con la revisión de Darwiche y Pearl.

Proposición 2.1 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface (R*1)-(R*6). Si el operador satisface (CBR) entonces satisface (CR1)-(CR4).*

Esta proposición junto con el Teorema 2.3 y el Teorema 2.4 nos aseguran que la revisión natural es un operador de revisión de Darwiche Pearl. Más aún, este resultado muestra que los postulados (C1)-(C4) son un debilitamiento de (CB). Que no son equivalentes, es decir que (C1)-(C4) no implican (CB), será visto en la siguiente sección.

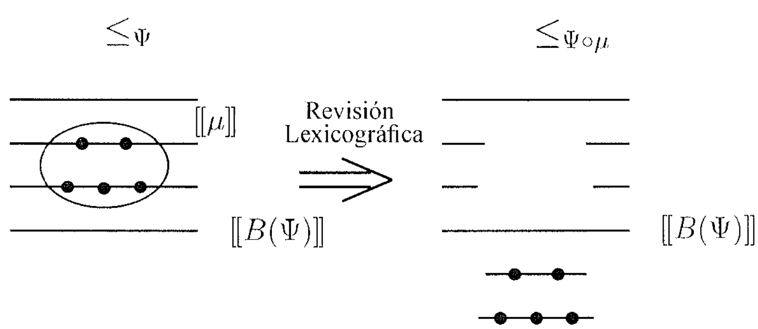
2.7.2. Revisión Lexicográfica

Contemporáneamente con Boutilier, Nayak [9] introdujo el operador de *revisión lexicográfica* buscando la solución para el problema de la revisión iterada de AGM. Semánticamente la revisión natural impone restricciones sobre el ordenamiento de las valuaciones después de efectuada la revisión por nueva información. La propiedad (Lex) muestra como Nayak define el preorden $\leq_{\Psi\circ\mu}$ para una información μ.

(Lex)

$$\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2 \Leftrightarrow [(\omega_1 \models \mu) \wedge (\omega_2 \models \neg\mu)] \vee [[(\omega_1, \omega_2 \models \mu) \vee (\omega_1, \omega_2 \models \neg\mu)] \wedge [\omega_1 \leq_\Psi \omega_2]]$$

La siguiente gráfica ilustra la revisión lexicográfica.



Como veremos más adelante, en presencia de (R*1)-(R*6), la condición (Lex) será equivalente a (C1), (C2) más una condición que Nayak llamó *Recalcitrancia*: cuando llegan dos nuevas informaciones no contradictorias entre si se tiene que al revisar las creencias por la primera información y luego revisar nuevamente por la segunda información el conjunto de creencias resultante debe implicar la primera información. Esta condición será denotada (Rec). En términos de estados epistémicos recalcitrancia dice:

(Rec) Si $\beta \not\vdash \neg\alpha$, entonces $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \alpha$.

El siguiente Teorema nos muestra la contraparte semántica de la recalcitrancia.

Teorema 2.5 *Supongamos que un operador $\circ$ satisface (R*1)-(R*6). Entonces $\circ$ satisface (Rec), si y sólo si, $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen:*
(R) Si $\omega_1 \in [\![\alpha]\!]$ y $\omega_2 \in [\![\neg\alpha]\!]$, entonces $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

Teorema 2.6 *Sea $\circ$ un operador que satisface (R*1)-(R*6). Entonces $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen (CR1), (CR2) y (R) si, y sólo si, $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen (Lex).*

Como corolario del teorema anterior y de los teoremas 2.4 y 2.5 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.7 *Sea $\circ$ un operador que satisface los postulados (R*1)-(R*6). Entonces $\circ$ es un operador de Revisión Lexicográfica si, y sólo si, $\circ$ satisface (C1), (C2) y (Rec).*

Proposición 2.2 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface (R*1)-(R*6).*
Si $\circ$ y su correspondiente asignación fiel cumplen (R) entonces $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen (CR3) y (CR4).

Demostración: Supongamos que (R) se cumple.

(CR3) Tomemos $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$. Supongamos que $\omega_1 <_\Psi \omega_2$. Queremos ver que $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$, lo cual se deduce directamente de la hipótesis y de (R).

(CR4) Tomemos $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$. Supongamos que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$. Queremos ver que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Por (R) y la hipótesis tenemos $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Luego $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Como queríamos. ∎

Finalmente tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.8 *Sea $\circ$ un operador que satisface (R*1)-(R*6). Si $\circ$ es de revisión lexicográfica entonces es un operador de Darwiche y Pearl es decir satisface (C1)-(C4).*

Demostración: Del teorema 2.7 tenemos que todo operador lexicográfico que satisface (R*1)-(R*6) también satisface (C1), (C2) y (Rec). Pero por la proposición 2.2, el teorema 2.5 y el teorema 2.4 tenemos que la condición (Rec) implica a (C3)-(C4). Hecho que concluye la prueba. ∎

2.7.3. Funciones ordinales condicionales de Spohn

En 1987 Spohn [11] introdujo a las *funciones ordinales condicionales* como representantes de estados epistémicos. De acuerdo a Spohn una función ordinal condicional, es una función κ también llamada *función de ranking* desde el conjunto dado de valuaciones W a la clase de los ordinales. Intuitivamente κ representa un orden de los mundos (valuaciones) por su grado de plausibilidad: los mundos con ordinales más pequeños son más plausibles. Así, los mundos que son la pre-imagen del 0 son los más plausibles de acuerdo a las creencias del agente.
El ordenamiento por plausibilidad de las valuaciones posibles puede ser extendido a un ordenamiento de las proposiciones (conjuntos de mundos posibles), definiendo a el valor bajo κ de una proposición μ como el valor del mundo con el menor ordinal asignado entre los modelos de μ. Esto es, $\kappa(\mu) = min\{\kappa(\omega) : \omega \models \mu\}$. Diremos que las creencias de una función denotadas como $B(\kappa)$ se caracterizan por ser las proposiciones que tienen como modelos las pre-imágenes bajo κ del ordinal 0. Esto es, $[\![B(\kappa)]\!] = \{\omega : \kappa(\omega) = 0\}$[2].
Además de proponer a las funciones ordinales condicionales como representación de estados epistémicos. Spohn propuso un método para cambiar un ranking frente a nueva información. La evidencia la representó como un par (μ, m), donde μ es una proposición representante de la nueva información y m es el grado de plausibilidad de μ después de la revisión, es decir m es el rango mínimo en donde se encuentran puden encontrarse modelos de $\neg\mu$. Según Spohn, un ranking κ es actualizado frente a una nueva evidenciade la siguiente manera:

[2]A diferencia de Spohn y Darwiche y Pearl nosotros no suponemos que $\kappa^{-1}(0) \neq \emptyset$, así puede suceder que $B(\kappa) \equiv \perp$.

$$\kappa_{(\mu,m)}(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega) - \kappa(\mu), & \text{si} \quad \omega \models \mu; \\ \kappa(\omega) - \kappa(\neg\mu) + m, & \text{si} \quad \omega \models \neg\mu. \end{cases}$$

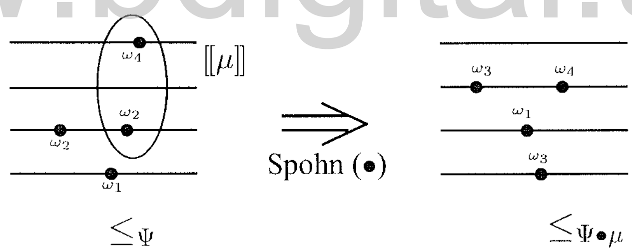
Spohn llamó a la función $\kappa_{(\mu,m)}(\omega)$ la (μ, m)-condicionalización de κ.

Haciendo variar m es posible definir una gran cantidad de funciones de ranking. Darwiche y Pearl construyeron un operador de revisión de creencias denotado por $\bullet$ inspirados en las ideas de Spohn.

Es una especie de función de ranking que fortaleciera las creencias en la nueva información luego de revisar por ella. Específicamente, tomaron m el grado de plausibilidad post-revisión de μ un grado mayor que el valor $\neg\mu$ bajo κ:

$$(\kappa \bullet \mu)(\omega) \stackrel{def}{=} \kappa_{(\mu,\kappa(\neg\mu)+1)}(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega) - \kappa(\mu), & \text{si} \quad \omega \models \mu; \\ \kappa(\omega) + 1, & \text{si} \quad \omega \models \neg\mu. \end{cases}$$

La siguiente figura da un ejemplo que ilustra al operador $\bullet$.



El siguiente teorema muestra que la propuesta para revisión de creencias de Spohn, satisface el marco Darwiche-Pearl.

Teorema 2.9 *El operador de revisión $\bullet$ satisface los postulados (R*1)-(R*6) y (C1)-(C4).*

De esta manera tenemos que el operador $\bullet$ es un operador de Darwiche Pearl. A partir de ahora al operador $\bullet$ definido por Darwiche y Pearl lo llamaremos *operador SDP*.

2.8. Revisión Admisible

2.8.1. Problemas en el marco DP

Darwiche y Pearl mostraron que la condición (CB) es muy fuerte, y que la revisión natural no es del todo tan natural ya que puede llevar a resultados contraintuitivos. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6 *Observamos un extraño animal y éste parece ser un pájaro; por lo tanto creemos que lo es. Cuando éste se acerca, vemos claramente que el animal es rojo. Así, creemos que es un pájaro rojo. Para salir de dudas consultamos a un experto en aves que lo examina y concluye que no es un pájaro sino otra clase de animal. ¿Deberíamos seguir creyendo que el animal es rojo?¡(CB) nos dice que no! Como si nunca hubiesemos sabido el color del pájaro.*

Este resultado poco satisfactorio puede ser visto más precisamente si ponemos

$$\leq_{\Psi} = \begin{array}{cc} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{array}$$

en donde la primera coordenada se refiere a $pajaro$ y la segunda a $rojo$. Así $B(\Psi) \equiv pajaro$. La revisión natural por $rojo$ nos lleva a

$$\leq_{\Psi \circ rojo} = \begin{array}{cc} 00 & 01 \\ & 10 \\ & 11 \end{array}$$

y de nuevo revisando por $\neg pajaro$ la revisión natural nos da

$$\leq_{\Psi \circ rojo \circ \neg pajaro} = \begin{array}{cc} & 10 \\ & 11 \\ 00 & 01 \end{array}$$

Así, es claro que $B(\Psi \circ rojo \circ \neg pajaro) \equiv \neg pajaro$.

Como la revisión de Boutilier es un caso particular de la revisión de Darwiche-Pearl, se desprende que hay debilidades en el Marco DP. Lo curioso del trabajo de Darwiche y Pearl es que a pesar de que se dieron cuenta del problema de la revisión natural, no la rechazaron de los operadores compatibles con DP, si no que a partir del postulado de Boutilier propusieron los postulados (C1)-(C4) más débiles que (CB).

Por lo tanto no dieron una solución definitiva para esto.

Este hecho motivó a los investigadores Richard Booth y Thomas Meyerpor un lado [2] y a Yi Jin y Michael Thielscher por otro [5], a estudiar estos problemas recientemente. Ellos proponen varios cambios en el marco DP como solución.

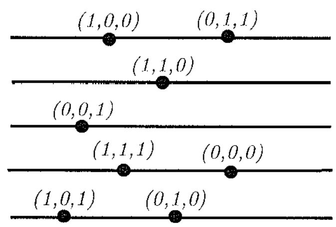
2.8.2. Marco RAGM

Booth y Meyer comienzan su nuevo marco considerando operadores de revisión con estados epistémicos (el marco DP sin los axiomas de la iteración). Ellos, por comodidad en el tratamiento, sólo consideran estados epistémicos Ψ tales que $B(\Psi)$ sea consistente. También suponen que las fórmulas por las cuales se revisa serán siempre consistentes. Esto es necesario para que el postulado (R*1) sea consistente con la hipótesis que las creencias de los estados epistémicos son siempre consistentes. Note que bajo estas suposiciones el postulado (R*3) es redundante.

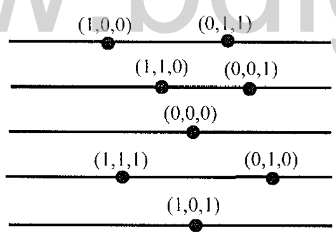
Recordemos que Darwiche y Pearl mostraron que una traducción literal del postulado de irrelevancia de sintáxis (KM4) a estados epistémicos en términos de la función B era demasiado fuerte (ver ejemplo 2.2 que le precede) y debía ser sustituido por el postulado (R*4) en el marco de estados epistémicos. Sin embargo, Booth y Meyer argumentan que (R*4) es muy débil. Ya que no proporciona una formulación adecuada de la irrelevancia de sintáxis para la revisión iterada. (R*4) especifíca que la revisión por dos informaciones equivalentes debe producir estados espistémicos con bases de creencias asociadas equivalentes. Pero de allí no se deduce, que estos estados epistémicos revisados resultantes, después de ser a su vez revisados por informaciones equivalentes también produzcan estados espistémicos con bases de creencias asociadas equivalentes.

Como veremos a continuación, es posible entonces satisfacer la revisión de Darwiche-Pearl y tener $B((\Psi \circ \alpha) \circ \gamma) \not\equiv B((\Psi \circ \beta) \circ \delta)$ aún cuando $\alpha \equiv \beta$ y $\gamma \equiv \delta$. Esto, por supuesto, no parece ser muy racional.

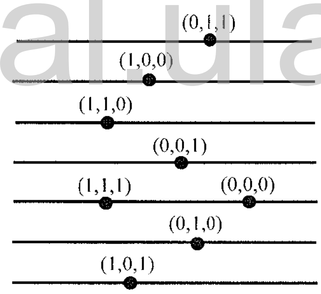
Ejemplo 2.7 *Consideremos un lenguaje proposicional generado por 3 fórmulas atómicas p,q y r. Fijemos cualquier operador $\circ$ de revisión de Darwiche-Pearl (La revisión lexicográfica por ejemplo). Por los teoremas 2.2 y 2.4 existe una asignación fiel que envía cada estado epistémico Ψ a un preorden total $\leq_\Psi$ cumpliendo que $[[\Psi \circ \mu]] = min([[\mu]], \leq_\Psi)$ y las condiciones (CR1),(CR2),(CR3) y (CR4). Si tomamos esta misma asignación para todo los estados epistémicos salvo en los casos de Φ, $\Phi \circ p$ y $\Phi \circ \neg\neg p$ a los cuales son asignados respectivamente los preordenes totales $\leq_\Phi$, $\leq_{\Phi \circ p}$ y $\leq_{\Phi \circ \neg\neg p}$ como se muestran abajo. Es fácil verificar que estos tres preordenes siguen cumpliendo las condiciones de la asignación fiel de los teoremas 3.1 y 3.3 y por lo tanto que la asignación fiel considerada con los pequeños cambios realizados corresponde a un operador de revisión de Darwiche y Pearl.*



$\leq_\Phi$



$\leq_{\Phi \circ p}$



$\leq_{\Phi \circ \neg\neg p}$

Pero observemos que $B((\Phi \circ\ p) \circ q) = \{(1,1,1), (0,1,0)\}$, mientras que $B((\Phi \circ \neg\neg p) \circ q) = \{(0,1,0)\}$. De esta manera hemos conseguido un operador de Darwiche y Pearl que se comporta de la forma poco intuitiva que habláramos justo antes.

Como consecuencia de este hecho, Booth y Meyer proponen que el postulado (R*4) sea reemplazado[3] por el postulado siguiente:

[3]Nosotros simplemente reforzaremos (R*4). Pensamos que (R*4) no se puede obtener de (R*4')(módulo (R*1), (R*2), (R*3), (R*5) y (R*6)) como Booth y Meyer lo sobrentienden.

(R*4') Si $\Psi_1 = \Psi_2$, $\alpha \equiv \beta$ y $\delta \equiv \gamma$ entonces $B((\Psi \circ \alpha) \circ \gamma) \equiv B((\Psi \circ \beta) \circ \delta)$

Proposición 2.3 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface (R*1)-(R*6). Entonces $\circ$ (R*4') si, y sólo si $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen*

*(RR*4') Si $\Psi_1 = \Psi_2$ y $\alpha \equiv \beta$ entonces $\leq_{\Psi_1 \circ \alpha} = \leq_{\Psi_2 \circ \beta}$.*

Proposición 2.4 *La revisión lexicográfica, natural y SDP satisfacen (R*4').*

Booth y Meyer conjeturan que la intención de Darwiche y Pearl era reemplazar (KM4) con (R*4') en lugar de (R*4). en todo caso parece una propiedad muy natural y como acabamos de ver satisfecha por los operadores más conocidos.

Definición 2.5 *El conjunto de postulados del marco AGM-DP al cual se le añade (R*4') se define como el marco RAGM. Precisamente los postulados del marco RAGM se pueden enunciar así:*

(R*1) $B(\Psi \circ \mu) \vdash \mu$.

(R*2) Si $B(\Psi) \wedge \mu$ es consistente, entonces $B(\Psi \circ \mu) \equiv B(\Psi) \wedge \mu$.

(R*3) Si μ es consistente, entonces $B(\Psi \circ \mu)$ es también consistente.

(R*4") Si $\Psi_1 = \Psi_2$, $\mu_1 \equiv \mu_2$ y $\rho_1 \equiv \rho_2$, entonces $B(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv B(\Psi_2 \circ \mu_2)$ y $B(\Psi_1 \circ \mu_1 \circ \rho_1) \equiv B(\Psi_2 \circ \mu_2 \circ \rho_2)$.

(R*5) $B(\Psi \circ \mu) \wedge \phi \vdash B(\Psi \circ (\mu \wedge \phi))$.

(R*6) Si $B(\Psi \circ \mu) \wedge \phi$ es consistente, entonces $B(\Psi \circ (\mu \wedge \phi)) \vdash B(\Psi \circ \mu) \wedge \phi$.

Note que (R*4") es equivalente a la conjunción de (R*4) y (R*4').

Definición 2.6 *Sea W el conjunto de todos las valuaciones de un lenguaje proposicional finito L y suponga que el conjunto de creencias asociado a cualquier estado epistémico es una fórmula de L. Una función que envía cada estado epistémico Ψ a un preorden total $\leq_\Psi$ sobre W se llama asignación fiel B-M si, y sólo si:*

1. *Si $\omega_1 \models B(\Psi)$, entonces $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ para cualquier ω_2.*

2. *Si* $\omega_1 \models B(\Psi)$ *y* $\omega_2 \not\models B(\Psi)$, *entonces* $\omega_1 <_\Psi \omega_2$.

3. *Si* $\Psi = \Phi$ *y* $\alpha \equiv \beta$ *con* $\alpha, \beta \in L$, *entonces* $\leq_\Psi = \leq_\Phi$ *y* $\leq_{\Psi\circ\alpha} = \leq_{\Phi\circ\mu}$.

Aquí, $\omega_1 <_\Psi \omega_2$ *está definido como* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ *y* $\omega_2 \nleq_\Psi \omega_1$.

Teorema 2.10 *Un operador de revisión* $\circ$ *satisface los postulados (RAGM), si y sólo si, existe una asignación fiel B-M que envía a cada estado espistémico* Ψ *a un preorden total* $\leq_\Psi$ *tal que*

$$[[B(\Psi \circ \mu)]] = min([[\mu]], \leq_\Psi)$$

Añadir (R*4') es el primer cambio[4] propuesto por Booth y Meyer. Ellos proponen un segundo cambio. Para verlo recordemos el ejemplo 2.6. Vimos allí que la revisión natural no podía retener la información del color del animal luego de la última información que el animal no era pájaro. El argumento de retener la creencia en el color rojo del animal se basa en el hecho de que la información del color del animal no entra en conflicto con la información del tipo de animal (en este caso particular). En otras palabras, conocer que el animal no es un pájaro no impide que pueda ser de color rojo, es razonable entonces retener la información de que es rojo.

De esta manera Booth y Meyer generalizaron esta situación: cuando una información α es consistente con una revisión por una información β, debería ser retenida si una revisión por α se realiza justo antes que la revisión por β. Formalmente esto es,

(P) Si $B(\Psi \circ \beta) \not\vdash \neg\alpha$ entonces $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \alpha$.

Aplicando (P) al ejemplo 3.1 vemos que si $rojo$ es consistente con $B(\Psi \circ \neg pajaro)$, tenemos que $B((\Psi \circ rojo) \circ \neg pajaro) \vdash rojo$. En cierta forma (P) enfoca la independencia entre nuevas informaciones. La proposición siguiente nos da la caracterización semántica de (P).

Proposición 2.5 *Supongamos que un operador de revisión satisface los postulados (R*1)-(R*6). El operador satisface el postulado (P), si y sólo si, el operador y su correspondiente asignación fiel satisfacen:*

(PR) Si $\omega_1 \in [[\alpha]]$ *y* $\omega_2 \in [[\neg\alpha]]$, *entonces* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Rightarrow \omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$

[4]En realidad como ya lo señaláramos, Booth y Meyer proponen simplemente reemplazar (R*4) por (R*4') pero nosotros guardamos (R*4) para poder obtener el teorema 4.1 de una manera bastante simple.

Esta condición propuesta por Boooth-Meyer asegura que la nueva información α sea incluida en las creencias con el *arraigamiento mínimo* suficiente para que sea retenido en la revisión que sigue.

Proposición 2.6 *La revisión lexicográfica y la revisión SDP satisfacen el postulado P.*

Acabamos de ver que la condición (P) es una propiedad que ya tenían tanto el operador $\bullet$ como el operador lexicográfico. No pasa lo mismo para la revisión natural que claramente no cumple esta condición. Así, adoptando la condición (P) se excluye la revisión natural como un operador de revisión permitido. Por lo tanto, Booth-Meyer incluyeron en sus cambios para el marco (DP) a (P) como postulado, argumentando que era importante no descartar innecesariamente información obtenida previamente a la última información incluída.

Definición 2.7 *Un operador de revisión es Admisible si, y sólo si, satisface RAGM, (C1), (C2), y (P).*

Así como el marco DP puede ser visto, en cuanto a los asignamientos fieles se refiere, como un marco en cual la revisión por una información α, produce que los modelos de la información α se deslicen hacia abajo o no se muevan con respecto a los modelos de $\neg\alpha$ que están al mismo nivel, la revisión admisible asegura vía (PR) que este deslizamiento hacia abajo sea estricto.

Como el operador SDP es un operador de revisión Darwiche y Pearl, satisface (R*4') y (P) respectivamente. Así, $\bullet$ es un operador de revisión admisible. De la misma manera por la proposición 2.4 tenemos que la revisión lexicográfica es un operador admisible.

Anteriormente vimos que el postulado (P) bajo RAGM produce un deslizamiento estricto hacia abajo de los modelos de la nueva información por la que se está revisando en el preorden total asociado al estado espistémico revisado. Sin embargo (P) no nos dice cuánto van a mejorar o deslizar hacia abajo dichos modelos. Dependiendo de este deslizamiento obtendremos un operador de revisión distinto. Ya vimos por ejemplo, que si deslizamos hacia abajo los modelos de la nueva información tanto como nos permita RAGM obtendremos la revisión lexicográfica. Por esta razón Booth-Meyer incluyen otro postulado que compensa este problema determinando exactamente el mejoramiento de la nueva información en el preorden asociado a la revisión.

Para ello, introdujeron la terminología y la notación siguiente:

Definición 2.8 *Dos fórmulas proposicionales α y β son contradictorias respecto a un estado epistémico Ψ, denotado como $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$, si, y sólo si, $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \neg\beta$ y $B(\Psi \circ \beta) \vdash \neg\alpha$. En tal caso diremos que α y β son Ψ-contradictorias.*

Que $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ significa que, bajo Ψ, α y β tienden a *excluirse* una con otra. Esta relación propuesta por Booth y Meyer tiene ciertas propiedades importantes. Primero notemos que $\leftrightsquigarrow_\Psi$ depende sólo del preorden total asignado a Ψ. En efecto, del teorema de representación tenemos que $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ si, y sólo si, $min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \subseteq [\![\neg\beta]\!]$ y $min([\![\beta]\!], \leq_\Psi) \subseteq [\![\neg\alpha]\!]$. Esto puede reformularse de la siguiente manera, que nos dará una ayuda útil para visualizar la relación de Ψ-contradicción.

Proposición 2.7 *$\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$ si, y sólo si, existe $\omega' \in [\![\alpha]\!]$ y $\omega'' \in [\![\beta]\!]$ tales que $\omega' <_\Psi \omega$ y $\omega'' <_\Psi \omega$ para todo $\omega \in min([\![\alpha \wedge \beta]\!], \leq_\Psi)$.*

Ya conociendo la relación $\leftrightsquigarrow_\Psi$, podemos introducir una nueva condición propuesta por Booth y Meyer.

(D) Si $\alpha \leftrightsquigarrow_\Psi \beta$, entonces $B((\Psi \circ \alpha) \circ \beta) \vdash \neg\alpha$.

Esta nueva condición requiere que cuando α y β son Ψ-contradictorias, $\neg\alpha$ resulta de una revisión por α seguida de una revisión por β. Esto es, cuando se realiza la revisión por β del estado epistémico $\Psi \circ \alpha$, la información que se tenía en Ψ (que dado β implicaba $\neg\alpha$) toma precedencia sobre la información obtenida en $\Psi \circ \alpha$.

Esa condición tiene una contraparte semántica como lo establece el teorema siguiente:

Teorema 2.11 *Supongamos que un operador de revisión $\circ$ satisface los postulados RAGM. Entonces $\circ$ satisface el postulado (D), si y sólo si, $\circ$ y su correspondiente asignación fiel satisfacen:*

(DR) Si $\omega_1 \in [\![\neg\alpha]\!]$, $\omega_2 \in [\![\alpha]\!]$ y $\omega_2 \notin [\![B(\Psi \circ \alpha]\!]$, entonces, $\omega_1 <_\Psi \omega_2 \Rightarrow \omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

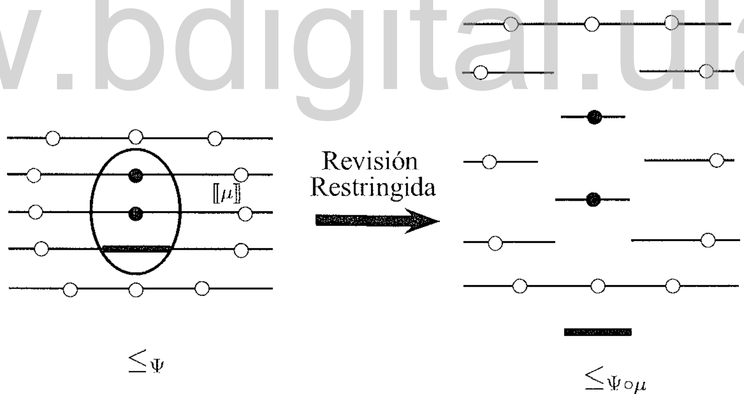
La condición (DR) reduce el aumento de plausibilidad de los modelos de α después de una revisión por α. Asegura que, a excepción de los modelos más plausibles de α, el ordenamiento relativo entre los modelos de $\neg\alpha$ más plausibles que los modelos de α no cambie.

Booth y Meyer decidieron reforzar los requerimientos de la revisión admisible (aquellos operadores que satisfacen RAGM, (C1), (C2) y (P)) insistiendo que la condición (D) debe ser también satisfecha. De esta manera introdujeron una nueva clase de operadores llamados operadores de *Revisión Restringida*.

Definición 2.9 *Un operador de revisión que satisface RAGM, (C1), (C2), (P) y (D) será llamado de revisión restringida.*

Proposición 2.8 *Sea $\circ$ un operador de revisión que satisface RAGM. Entonces el operador y su correspondiente asignación fiel satisfacen (CR1), (CR2), (PR) y (DR) si, y sólo si, $\circ$ satisface (C1), (C2), (P) y (D).*

La siguiente gráfica ilustra el comportamiento de un operador de revisión restringida. Los modelos están representados con los puntos negros dentro del óvalo y los puntos blancos son los no modelos de la nueva información.:



Capítulo 3

Operadores de Mejoramiento

El convencimiento de un agente racional para que acepte en sus creencias una nueva información que le es trasmitida es un tipo de cambio de conocimiento muy común. Muchas veces, a la luz de una nueva información, no quisiéramos incluirla impulsivamente en nuestras creencias, sin embargo, pudieramos empezar un proceso de convencimiento respecto a ésta, de manera tal que si nos repiten esta misma información varias veces quisiéramos que fuese ganando plausibilidad en nuestras creencias hasta finalmente convencernos totalmente de la misma y aceptarla.

Relatemos un ejemplo de la situación antes planteada:

Ejemplo 3.1 *Gianluca siempre ha comprado automóviles europeos de bajo costo y está pensando en cambiar de carro. Se dirige hacia una nueva agencia de carros cercana a su trabajo y pregunta entre las opciones de carros europeos de bajo costo, y el vendedor le ofrece una camioneta americana a un muy bajo costo que resultó ser el modelo más comprado del año anterior a nivel mundial. Gianluca no conoce a este vendedor pero de todas maneras se sorprende con esta información, así que decide ir a una agencia cercana a su casa donde ha comprado todos sus carros anteriormente y el vendedor de siempre allí le dice que últimamente los carros que tienen menos quejas de averías y que además siempre tienen repuestos disponibles son las camionetas americanas unas más costosas que otras pero le dice que por experiencia de trabajo con automóviles "lo barato sale caro". A los pocos días y luego de reflexionar sobre su auto europeo y las que le ha hecho pasar y ver que también las revistas más reconocidas de automóviles ponen a las camionetas americanas en lo más alto de los conteos, Gianluca está viendo la televisión y nota de 5 propagandas de automóviles que pasan por televisión, 4 son de automóviles americanos, donde aparecen propietarios de estos carros certificando su calidad, su comodidad y su fidelidad y nota que los modelos más vistosos son los de las camionetas. Gianluca ya empieza a convencerse* *de comprar un carro americano, en paticular una camioneta. Esa misma tarde llega un compañero de trabajo contando que se hizo un pozo en plena carretera y que gracias a su camioneta americana pudo pasar sin problemas y que observó como otros carros pequeños se quedaban trancados en el pozo uno a uno. Gianluca no lo duda más va hacia la agencia más cercana y compra una camioneta americana de precio standard.*

Notemos que si este caso hubiese sido modelado usando la revisión de creencias (o bien en el marco AGM-DP, o en el marco RAGM), Gianluca hubiese tenido que renunciar a su fidelidad a los carros europeos de bajo costo y comprar de un momento a otro un automóvil totamente opuesto a lo que tenía en mente sólo porque un vendedor desconocido de una agencia que nunca antes había visitado (la que está cercana a su trabajo) le dijo que era la mejor opción. Esto debido a que el postulado de éxito debe ser satisfecho, es decir, la nueva información una vez recibida debe tener prioridad absoluta sobre cualquier creencia existente.

En el año 2008 Pino y Konieczny [10] propusieron una reestructuración de los operadores de revisión en el marco AGM-DP standard que se ajustaran mejor a estas situaciones de convencimiento de un agente respecto a cierta información que recibe iteradamente. La idea fué definir operadores de cambio sobre estados epistémicos que no (necesariamente) satisfacen el postulado de éxito, pero que sin embargo mejoran la plausibilidad de la nueva información en cada iteración hasta que después de un número suficiente de veces sea finalmente aceptada en el conjunto de creencias. Llamaron a estos operadores *Operadores de Mejoramiento de creencias.*

Antes de introducir a los operadores de mejoramiento estudiemos el caso más general sobre operador de cambio de creencias.

3.1. Operadores de Cambio de conocimiento y Modularidad

Así como lo hicieran Booth y Meyer en su marco RAGM, Pino y Konieczny consideran estados epistémicos consistentes para representar las creencias de un agente y fórmulas consistentes para representar la nueva información. Cada estado epistémico Ψ tiene asociada una fórmula consistente $B(\Psi)$ que representa la base de conocimiento del agente en Ψ.

Notemos que hasta el marco DP, cualquier función que enviara estados epistémicos por fórmulas en nuevos estados epistémicos era considerada como un *operador de revisión* que debía satisfacer cierta cantidad de postulados. Pino y Konieczny propusieron que este tipo de funciones no sólo sirven para representar a la revisión de creencias, sino que dependiendo de los postulados que satisfacieran pudieran representar otros tipo de operadores de cambio en el conocimiento de un agente. Los operadores de Contracción de creencias, Operadores de Actualización de creencias, Operadores de Credibilidad Limitada [4] todos sobre estados epistémicos serían ejemplo particulares de operadores de cambio.

Definición 3.1 *Una función* $\circ$: *Estados Epistémicos* $\times$ *Fórmulas* $\longrightarrow$ *Estados Epistémicos que toma un estado epistémico* Ψ *consistente y una fórmula consistente* α *y las envía a un nuevo estado epistémico denotado* $\Psi \circ \alpha$ *es llamado operador de cambio.*

Se denotará:

- $\Psi \circ^n \alpha$ definido como: $$\begin{aligned} \Psi \circ^1 \alpha &= \Psi \circ \alpha \\ \Psi \circ^{n+1} \alpha &= (\Psi \circ^n \alpha) \circ \alpha \end{aligned}$$
- $\Psi \star \alpha = \Psi \circ^n \alpha$, donde n es el primer entero tal que $B(\Psi \circ^n \alpha) \vdash \alpha$.

Como vimos en el capítulo anterior, una manera muy natural de definir a un estado epistémico Ψ es identificándolo con un preórden total $\leq_\Psi$ sobre $\mathcal{W}$ (posiblemente sin una caraterización sintáctica). Donde los modelos de $B(\Psi)$ estarán ubicados en el primer nivel de dicho preorden *i.e.* $B(\Psi) = min(\leq_\Psi)$ y dónde una fórmula será más arraigada que otra si sus modelos están ubicados más abajo que los modelos de la otra en el preorden.

Restrigiéndose a los estados epistémicos como preórdenes totales Pino y Konieczny dividen a los operadores de cambio en dos grandes clases de manera muy natural. La de los operadores de cambio que puede ser definidos localmente, es decir, basta mirar al comportamiento del operador solamente entre información de plausibilidad similar (mirar dos niveles del estado epistémico) para poder definir el comportamiento general, y la clase de los operadores de cambio cuyo comportamiento es global, es decir, hace falta mirar el estado epistémico completo para saber cómo se comporta el operador. Esta propiedad de localidad la llamaron *modularidad.*

Sea f una función booleana, es decir, $f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$, entones las expresiones usadas como entradas del vector de tamaño n deben ser entendidas como condiciones booleanas (es decir, $x \leq y$ arroja 1 si la relación es verdadera y 0 si es falsa).

Definición 3.2 *Sea* $\circ$ *un operador de cambio de creencias. Supongamos que los estados epistémicos son preórdenes totales sobre* $\mathcal{W}$ *tales que los minimales de dichos preórdenes son las creencias de los mismos.*
Sea $\leq_\Psi$ *un estado epistémico y sea* $N_\omega = \{\omega' : \omega' \simeq_\Psi \omega\}$ *y* $N_{\omega+1} = \{\omega' : \omega \ll_\Psi \omega'\}$. *Decimos que el operador* $\circ$ *es modular ssi existe una función booleana* $f : \{0,1\}^6 \longrightarrow \{0,1\}$ *tal que:*

- *Para cualquier* ω, *si* $\omega', \omega'' \in N_\omega \cup N_{\omega+1}$ *entonces*

$$\omega' \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega'' = f(\omega' \leq_\Psi \omega'', \omega'' \leq_\Psi \omega', [\![\alpha]\!] \cap N_\omega = \emptyset, [\![\alpha]\!] \cap N_{\omega+1} = \emptyset, \omega' \models \alpha, \omega'' \models \alpha)$$

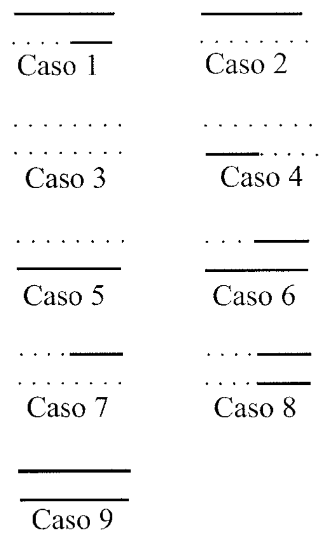
Donde $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ *es el estado epistémico resultante de operar mediante* $\circ$ *una fórmula* α *sobre* $\leq_\Psi$.

De esta manera la propiedad de modularidad establece que para conocer la relación de plausibilidad después de aplicado el operador de cambio sobre el estado epistémico visto como preorden total entre dos modelos que se encuentran entre dos niveles consecutivos basta conocer (los datos de una función booleana): la relación entre las dos interpretaciones antes del mejoramiento (las dos primeras entradas de la función); el hecho de que hay (ó no) modelos de la nueva información en los dos niveles considerados (los consecutivos) (la tercerca y cuarta entrada de la función); y el hecho de que los modelos considerados sean o no modelos de la nueva información (las últimas dos entradas).

Como dijimos antes, intuitivamente esta propiedad expresa el hecho de que para conocer el cambio de plausibilidad entre los modelos después de aplicado el operador de cambio (modular) basta mirar a dos niveles consecutivos.

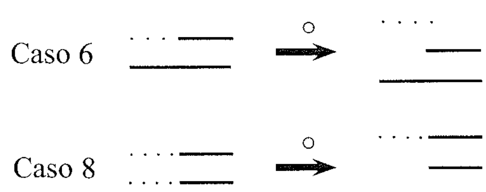
Observación 3.2 *Existen 9 situaciones posibles para la disposición de modelos y no modelos de una fórmula en dos niveles consecutivos de un preorden total representando a un estado epistémico.*

Si los modelos de la fórmula en cuestión están representados por las líneas negras continuas y los no modelos están representados por las líneas punteadas, la figuras a continuación muestran los 9 casos posibles antes mencionados:

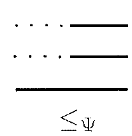


Uno podría pensar entonces que un operador de cambio será modular si al aplicar el operador sobre cada uno de los 9 casos posibles se obtiene la disposición de los modelos y los no modelos en el estado epistémico resultante en cada uno de estos casos. Ya que así, estaríamos diciendo que existe la función booleana de la definición 3.2. Sin embargo esto no es siempre cierto. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3 *Supongamos que $\circ$ es un operador que se comporta en el caso 6 y en el caso 8 de la Observación 3.2 como se muestra en la figura a continuación (los modelos y los no modelos de la nueva información están ilustrados como en la Observación 3.2:*

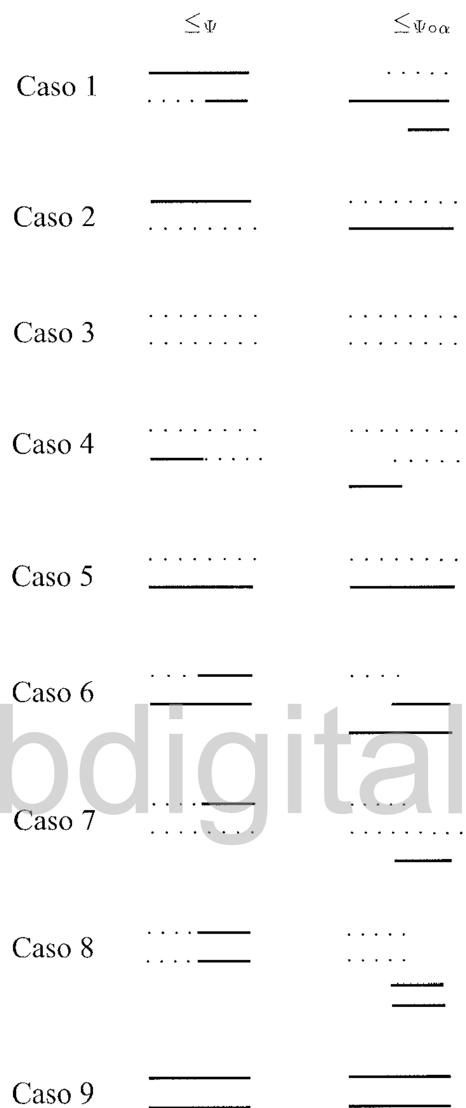


De esta manera si consideramos un estado epistémico como el preorden total $\leq_\Psi$ siguiente (con la ilustración como antes):



Podemos notar que hay un problema de compatibilidad con la definición de $\circ$. Por lo tanto es importante imponer condiciones de compatibilidad sobre los operadores para que la modularidad tenga sentido.

Ejemplo 3.4 *El operador de revisión lexicográfica es un operador de cambio modular ya que por el Teorema 2.7 el operador de revisión lexicográfica satisface la propiedad (R). Esta propiedad nos dice que en cualquiera que sea la relación en el preorden asociado al estado episťemico inicial entre un modelo y un no modelo de la nueva información (inluidos los 9 casos de la Observación 3.2), después de la revisión lexicográfica, el modelo va a estar estrictamente por debajo del no modelo en el preorden asociado al estado epistémico resultante.*
Esto nos dice directamente que la función booleana de la definición 3.2 existe.
Gráficamente, estamos diciendo que para cada uno de los 9 casos mostrados en la observación 3.2 la revisión lexicográfica define precisamente la disposición resultante de los modelos y no modelos de la nueva información en el preorden asociado al estado epistémico revisado. Veamos:



3.2. Operadores de Mejoramiento

Los operadores de mejoramiento son una subclase de los operadores de cambio que como es de esperarse se rige por una serie de postulados que los determinan y enmarcan su naturaleza.

Es importante resaltar que Konieczny y Pino [8] imponen que el operador $\star$ sea total para cualquier operador de cambio, es decir, para cualquier par Ψ, α exisitirá un n tal que $B(\Psi \circ^n \alpha) \vdash \alpha$. Notemos que es claro que hablar de $\star$ no tiene sentido si no existe n tal que $B(\Psi \circ^n \alpha) \vdash \alpha$, por esta razón los autores dan por satisfecha la buena definición de $\star$ para cualquier operador de cambio que consideran. Este hecho importante lo discutiremos en capítulos posteriores.

Las propiedades lógicas básicas que fueron requeridas para que un operador sea de mejoramiento.

Definición 3.3 *Un operador $\circ$ se dice que es un operador de mejoramiento débil si satisface los siguientes postulados:*

(I1) *Existe n tal que $B(\Psi \circ^n \alpha) \vdash \alpha$*

(I2) *Si $B(\Psi) \wedge \alpha \nvdash \bot$, entonces $B(\Psi \star \alpha) \equiv B(\Psi) \wedge \alpha$*

(I3) *Si $\alpha \nvdash \bot$, entonces $B(\Psi \star \alpha) \nvdash \bot$*

(I4) *Para todo entero positivo n si $\alpha_i \equiv \beta_i$ para todo $i \leq n$ y $\gamma \equiv \mu$ entonces*

$$B((\Psi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n) \star \gamma) \equiv B((\Psi \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_n) \star \mu)$$

(I5) $B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta \vdash B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta))$

(I6) *Si $B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta \nvdash \bot$, entonces $B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta)) \equiv B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta$*

Estos postulados se nos hacen muy familiares por su similaridad con los postulados de la reformulación de KM en el marco de Darwiche y Pearl. Sin embargo las diferencias principales las vemos en los postulados (I1), (I4) y en la presencia del operador $\star$.

Entre éstas diferencias la más importante es que el postulado de éxito no se impone sobre los mejoramientos, es decir la propiedad $(R*1)$ donde $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \alpha$ es sutituida por la propiedad más débil (I1) que nos dice que después de una sucesión determinada de mejoramientos por la nueva información, esta finalmente será implicada. De esta manera, el operador $\star$ representa un operador de revisión bien definido por una sucesión finita de mejoramientos $\circ$.

Para el postulado de irrelevancia de sintáxis (I4), Pino y Konieczny realizaron un análisis del postulado $(R*4'')$ propuesto por Booth y Meyer. Como vimos en el capítulo anterior el postulado $(R*4'')$ corrige el mal comportamiento en la iteración que tenía el postulado correspondiente $(R*4)$ del marco DP.

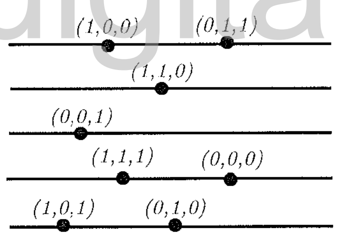
Recordemos estos postulados:

$(R*4)$ Si $(\alpha \equiv \beta)$, entonces$B(\Psi \circ \alpha) \equiv B(\Psi \circ \beta)$

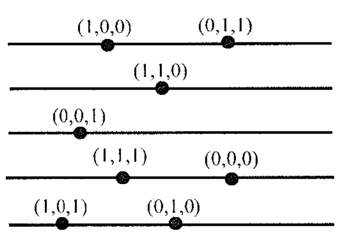
$(R*4'')$ Si $(\alpha \equiv \beta$ & $\gamma \equiv \theta)$, entonces$B(\Psi \circ \alpha \circ \gamma) \equiv B(\Psi \circ \beta \circ \theta)$

Si nos dirigimos al ejemplo 2.7, vemos como Booth y Meyer muestran que $(R*4)$ tiene problemas en la segunda iteración. Pino y Konieczny extendieron fácilmente este ejemplo para mostrar que de la misma manera el postulado $(R*4'')$ tiene problemas en la tercera iteración.

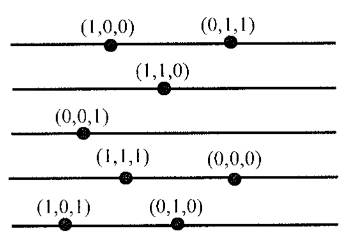
Ejemplo 3.5 *Consideremos el lenguaje proposicional generado por las fórmulas atómicas p,q y r. Fijemos cualquier operador de revisión de Darwiche y Pearl. De esta manera existe una asignación fiel que envía a cada estado epistémico* Ψ *a un preorden total* $\leq_\Psi$ *cumpliendo que* $[[\Psi \circ \mu]] = min([[\mu]], \leq_\Psi)$ *y las condiciones (CR1)-(CR4). Si tomamos esta misma asignación para todos los estados epistémicos salvo en los casos de* Φ, $\Phi \circ (r \vee \neg r)$, $\Phi \circ (p \vee \neg p)$, $\Phi \circ (r \vee \neg r) \circ p$, $\Phi \circ (p \vee \neg p) \circ \neg\neg p$ *a los cuales son asignados respectivamente los preórdenes totales* $\leq_\Phi$, $\leq_{\Phi \circ (r \vee \neg r)}$, $\leq_{\Phi \circ (p \vee \neg p)}$, $\leq_{\Phi \circ (r \vee \neg r) \circ p}$, $\leq_{\Phi \circ (p \vee \neg p) \circ \neg\neg p}$ *como se muestran abajo. Es fácil verificar que estos 5 preórdenes siguen cumpliendo con las condiciones de asignación fiel y por lo tanto la asignación fiel considerada con los pequeños cambios realizados corresponde a un operador de revisión Darwiche Pearl.*



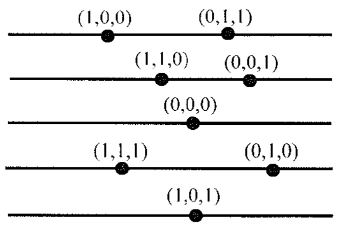
$\leq_\Phi$



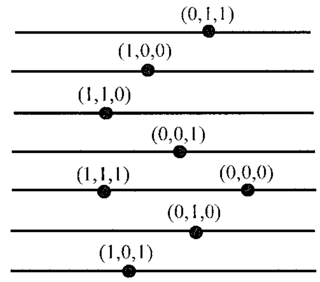
$\leq_{\Phi \circ (r \vee \neg r)}$



$\leq_{\Phi \circ (p \vee \neg p)}$



$\leq_{\Phi\circ(r\vee\neg r)\circ p}$



$\leq_{\Phi\circ(p\vee\neg p)\circ\neg\neg p}$

Pero observemos que $B(((\Phi \circ (r \vee \neg r)) \circ p) \circ q) = \{(1,1,1), (0,1,0)\}$, *mientras que* $B(((\Phi \circ (p \vee \neg p)) \circ \neg\neg p) \circ q) = \{(0,1,0)\}$.

De esta manera Pino y Konieczny se dieron cuenta que para evitar problemas en cada iteración hay que especificar la propiedad para cualquier número de iteraciones que es precisamente lo que expresa (I4). Incluso los operadores de revisión iterada ya conocidos como el de la revisión natural, revisión lexicográfica y revisión SDP satisfacen (I4). Esto se puede comprobar gracias a que en particular estos operadores satisfacen la siguiente propiedad

$$\text{Si } \alpha \equiv \beta \text{ y } \leq_\Psi = \leq_\Phi \text{ entonces } \leq_{\Psi\circ\alpha} = \leq_{\Psi\circ\beta}$$

En presencia de los postulados RAGM, la propiedad anterior implica $(R * 4'')$. Pero la recíproca no es cierta como pudimos ver en el ejemplo anterior.

Pino y Konieczny introducen los operadores de mejoramiento débil como operadores de cambio casi iguales a los operadores de revisión KM para estados epistémicos con la gran diferencia de que el postulado de éxito no es satisfecho por el mejoramiento débil. Sin embargo, estos operadores en ningún momento aseguran que la nueva información "mejora" su plausibilidad bajo sus efectos.

Por esta razón Pino y Konieczny deciden añadir nuevos postulados más específicos para la iteración a los ya satisfechos por los mejoramiento débil, y llaman a estos operadores, operadores de mejoramiento.

Definición 3.4 *Un operador de mejoramiento débil es llamado operador de mejoramiento si sastisface los siguientes postulados:*

(I7) *Si* $\alpha \vdash \mu$, *entonces* $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \equiv B(\Psi \circ \alpha)$

(I8) *Si* $\alpha \vdash \neg\mu$, *entonces* $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \equiv B(\Psi \star \alpha)$

(I9) *Si* $B(\Psi \star \alpha) \nvdash \neg\mu$, *entonces* $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \mu$

Notemos que los postulados (I7) e (I8) corresponden a los postulados (C1) y (C2) del marco DP y el postulado (I9) corresponde al postulado (P) propuesto por Jin,Thielscher,Booth y Meyer. La diferencia entre estos sigue siendo que ahora están definidos para sucesiones de mejoramientos. Podemos observar que estos postulados se expresan en términos tanto de $\circ$ como de $\star$. Esto sucede ya que el operador $\star$ representa un operador de revisión que asegura las buenas propiedades de $\circ$. Ya con la inclusión de estos postulados, los operadores ahora cada vez que es posible "mejoran" en cierta forma la nueva información (gracias a (I9)) de una manera más uniforme gracias a la rigidez entre modelos y no modelos (que proporcionan (I7) e (I8)).

En vías de probar un teorema de representación para los operadores de mejoramiento débil, Pino y Konieczny definieron los asignamientos fuertes y fieles.

Definición 3.5 *Una función* $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ *que envía a cada estado epistémico* Ψ *a un preorden total* $\leq_\Psi$ *sobre los modelos, es llamado una asignación fuerte y fiel si, y sólo si:*

1. *Si* $\omega \models B(\Psi)$ *y* $\omega' \models B(\Psi)$, *entonces* $\omega \simeq_\Psi \omega'$
2. *Si* $\omega \models B(\Psi)$ *y* $\omega' \not\models B(\Psi)$, *entonces* $\omega <_\Psi \omega'$
3. *Para cualquier entero positivo* n *si* $\alpha_i \equiv \beta_i$ *para todo* $i \leq n$ *entonces* $\leq_{\Psi\circ\alpha_1\circ\cdots\circ\alpha_n} = \leq_{\Psi\circ\beta_1\circ\cdots\circ\beta_n}$

Notemos que las condiciones 1 y 2 son suficientes y necesarias para que $[[B(\Psi)]] = min(W, \leq_\Psi)$, y son las mismas que las primeras condiciones satisfechas por una asignación fiel del marco DP. La condición 3 es muy natural ya que relaciona preórdenes asociados con iteración de mejoramientos: de dos sucesiones de mejoramientos de un mismo preorden por fórmulas equivalentes resulta un mismo preorden.

De esta manera, el teorema de representación para operadores de mejoramientos débil propuesto por Pino y Konieczny es el siguiente:

Teorema 3.6 *Un operador de cambio* $\circ$ *es un operador de mejoramiento débil si, sólo si, existe una asignación fuerte y fiel que envía a cada estado epistémico* Ψ *a un preorden total* $\leq_\Psi$ *sobre los mundos tal que*

$$[[B(\Psi \star \alpha)]] = min([[\alpha]]), \leq_\Psi)$$

Demostración: ($\Rightarrow$) Sea $\circ$ un operador de mejoramiento débil. Definimos una asignación $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ de la siguiente manera:

$$\omega \leq_\Psi \omega' \text{ si, y sólo si, } \omega \models B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})$$

Por (I4) la relación $\leq_\Psi$ está bien definida, i.e. no depende de la elección de la fórmula $\varphi_{\omega,\omega'}$. Demostraremos ahora que $\leq_\Psi$ es un preorden total.

Totalidad: Sean ω,ω' dos interpretaciones cualesquiera (eventualmente $\omega = \omega'$). Por (I1), $[[\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'}]] \subseteq \{\omega, \omega'\}$ y por definición $[[\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'}]] \neq \emptyset$, así $\omega \in [[\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'}]]$ ó $\omega' \in [[\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'}]]$ (o ambos), i.e. $\omega \leq_\Psi \omega'$ ó $\omega' \leq_\Psi \omega$.

Transitividad: Supongamos que $\omega \leq_\Psi \omega'$ y que $\omega' \leq_\Psi \omega''$. Queremos ver que $\omega \leq_\Psi \omega''$, es decir, queremos mostrar que $\omega \in [[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega''})]]$.
Bastará entonces demostrar que $\omega \in [[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega',\omega''})]]$ ya que así $B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega',\omega''}) \wedge \varphi_{\omega,\omega''}$ será consistente y de (I4), (I5) e (I6) se obtendrá que $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega',\omega''}) \wedge \varphi_{\omega,\omega''}]] = [[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega''})]]$, y así $\omega \in [[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega''})]]$ como queríamos.

Supongamos por reducción al absurdo que $\omega \notin [[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega',\omega''})]]$. Entonces afirmamos que $\omega' \notin [[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega',\omega''})]]$. En efecto, si este no fuera el caso tendríamos que $B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega',\omega''}) \wedge \varphi_{\omega,\omega'}$ es consistente y así por (I4), (I5) e (I6) se obtendría que $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})]] = \{\omega'\}$, y así $\omega' <_\Psi \omega$ lo cual contradice nuestra hipótesis principal en que $\omega \leq_\Psi \omega'$.
De esta manera por (I3) tenemos que $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega',\omega''})]] = \{\omega''\}$ por lo tanto $B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega',\omega''}) \wedge \varphi_{\omega',\omega''}$ es consistente, luego por (I4), (I5) e (I6) se tiene que $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega',\omega''})]] = \{\omega''\}$, i.e. $\omega'' <_\Psi \omega'$ lo cual contradice la hipótesis principal en que $\omega' \leq_\Psi \omega''$.

Probaremos ahora que $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$.

Primero demostraremos que $[[B(\Psi \star \alpha)]] \subseteq \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$.
Tomemos w en $[[B(\Psi \star \alpha)]]$. Así, $B(\Psi \star \alpha) \wedge \varphi_{w,w'} \not\vdash \bot$ para todo $w' \in [[\alpha]]$. Entonces, por (I5), (I6) e (I4), $B(\Psi \star \alpha) \wedge \varphi_{w,w'} \equiv B(\Psi \star \varphi_{w,w'})$. Por lo tanto $w \in [[B(\Psi \star \varphi_{w,w'})]]$, esto es $w \leq_\Psi w'$ para todo $w' \in [[\alpha]]$ que implica exactamente que $w \in \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$.

Ahora probaremos la inclusión contraria, es decir, $\text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi) \subseteq [[B(\Psi \star \alpha)]]$.
Supongamos que $w \in \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Queremos ver que $w \in [[B(\Psi \star \alpha)]]$. Supongamos por reducción al absurdo que $w \notin [[B(\Psi \star \alpha)]]$. Sea w' un modelo de $B(\Psi \star \alpha)$. Entonces, por (I5), (I6) e (I4), $B(\Psi \star \alpha) \wedge \varphi_{w,w'} \equiv B(\Psi \star \varphi_{w,w'})$. Estamos suponiendo que $w \notin [[B(\Psi \star \alpha)]]$ así $[[B(\Psi \star \varphi_{w,w'})]] = \{w'\}$. Luego $w' <_\Psi w$, contradiciendo la

minimalidad de w en $[\![\alpha]\!]$ respecto a $\leq_\Psi$.

Demostremos ahora las condiciones de la asignación fuerte y fiel. Para demostrar las condiciones 1 y 2 es equivalente demostrar que $[\![B(\Psi)]\!] = \text{mín}(\mathcal{W}, \leq_\Psi)$.
Suponga que $w \models B(\Psi)$. Queremos ver que $w \leq_\Psi w'$ para cualquier interpretación w'. Para esto consideremos w' una interpretación. Notemos que $w \models B(\Psi) \wedge \varphi_{w,w'}$, así $B(\Psi) \wedge \varphi_{w,w'} \not\vdash \bot$. Entonces, por (I2), $B(\Psi \star \varphi_{w,w'}) \equiv B(\Psi) \wedge \varphi_{w,w'}$. Por lo tanto, $w \models B(\Psi \star \varphi_{w,w'})$, *i.e.* $w \leq_\Psi w'$. Esto demuestra que $[\![B(\Psi)]\!] \subseteq \text{mín}(\mathcal{W}, \leq_\Psi)$.
Para la inclusión inversa tomemos $w \in \text{mín}(\mathcal{W}, \leq_\Psi)$. Supongamos por reducción al absurdo que $w \notin [\![B(\Psi)]\!]$. Sea w' un modelo de $B(\Psi)$. Entonces, $[\![B(\Psi) \wedge \varphi_{w,w'}]\!] = \{w'\}$. Así, por (I2), $B(\Psi \star \varphi_{w,w'}) \equiv B(\Psi) \wedge \varphi_{w,w'}$ y de esta manera $[\![B(\Psi \star \varphi_{w,w'})]\!] = \{w'\}$, *i.e.* $w' <_\Psi w$, contradiciendo la minimalidad de w respecto a $\leq_\Psi$.

Para la condición 3 supongamos que $\alpha_i \equiv \beta_i$ para todo $i \leq n$ queremos mostrar que $\leq_{\Psi\circ\alpha_1\circ\ldots\circ\alpha_n} = \leq_{\Psi\circ\beta_1\circ\ldots\circ\beta_n}$.

Demostraremos esto por inducción en $k = 0, \ldots, n$.

Para $k = 0$ es trivial ya que $\leq_\Psi = \leq_\Psi$.

Para simplificar notación hagamos $\Theta_k = \Psi \circ \alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_k$ y $\Gamma_k = \Psi \circ \beta_1 \circ \ldots \circ \beta_k$. De esta manera nuestra hipótesis inductiva es la siguiente: $\leq_{\Theta_k} = \leq_{\Gamma_k}$.
Queremos mostrar que $\leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}} = \leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}}$. Para esto mostraremos que cada nivel de $\leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}}$ es igual al nivel correspondiente de $\leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}}$. Esto lo haremos usando inducción sobre el número de niveles de $\leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}}$. Daremos un bosquejo de la prueba. Para el nivel 0: queremos ver que $min(\mathcal{W}, \leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}}) = min(\mathcal{W}, \leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}})$. Como sabemos que $[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$, tenemos que $min(\mathcal{W}, \leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}}) = [\![B(\Gamma_k \circ \alpha_{k+1})]\!]$ y $min(\mathcal{W}, \leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}}) = [\![B(\Gamma_k \circ \beta_{k+1})]\!]$. Por I4$^+$, $[\![B(\Theta_k \circ \alpha_{k+1})]\!] = [\![B(\Gamma_k \circ \beta_{k+1})]\!]$. Por lo tanto, $min(\mathcal{W}, \leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}}) = min(\mathcal{W}, \leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}})$. Ahora bien, supongamos que los primeros i niveleves de $\leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}}$ corresponden exactamente a los primeros i niveles de $\leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}}$. Demostraremos que el nivel $i+1$ de $\leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}}$ está contenido en el nivel $i+1$ de $\leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}}$ (y con un argumento simétrico probaremos la inclución inversa). Supongamos por reducción al absurdo que w está en el nivel $i+1$ de $\leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}}$ y que w no está en el nivel $i+1$ de $\leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}}$. Tomemos w' en el nivel $i+1$ de $\leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}}$. Como los primeros i niveles de $\leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}}$ and $\leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}}$ son iguales, w' está en algún nivel j, con $j > i$ para el preorden $\leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}}$. Consideremos ahora la fórmula $\varphi_{w,w'}$. Es claro que $w \in min([\![\varphi_{w,w'}]\!], \leq_{\Theta_k\circ\alpha_{k+1}})$ y $w \notin min([\![\varphi_{w,w'}]\!], \leq_{\Gamma_k\circ\beta_{k+1}})$. De lo anterior y de la ecuación $[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$, se sigue que $[\![B(\Theta_k \circ \alpha_{k+1} \circ \varphi_{w,w'})]\!] \neq$

$[\![B(\Gamma_k \circ \beta_{k+1} \circ \varphi_{w,w'})]\!]$, contradiciendo I4$^+$.

($\Leftarrow$) Supongamos que tenemos una asignación fuerte y fiel $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ tal que se cumple $[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$. Queremos ver que I1-I6 se satisfacen.

(I1) Se sigue directamente del hecho que $[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$.

(I2) Mostraremos primero que $B(\Psi) \wedge \alpha \vdash B(\Psi \star \alpha)$. Si $w \models B(\Psi) \wedge \alpha$, esto es, $w \in \text{mín}(\mathcal{W}, \leq_\Psi)$. Así, para cualquier $w' \in \mathcal{W}$, se tiene que $w \leq_\Psi w'$. Esto es en particular cierto para todos los modelos de α, luego $w \in \text{mín}(\alpha, \leq_\Psi)$, y esto es por definición $w \models B(\Psi \star \alpha)$. Probemos ahora que $B(\Psi \star \alpha) \vdash B(\Psi) \wedge \alpha$. Por definición $w \models B(\Psi \star \alpha)$ nos dice que $w \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$. Así $w \models \alpha$. Mostremos que $w \models B(\Psi)$. Supongamos que no es cierto. En este caso, y como por hipótesis $B(\Psi) \wedge \alpha \nvdash \perp$ podemos elegir $w' \in [\![B(\Psi) \wedge \alpha]\!]$. Pero sabemos que $w' \in [\![B(\Psi)]\!]$ y $w \notin [\![B(\Psi)]\!]$, así $w' <_\Psi w$. Y como $w', w \models \alpha$, tenemos que $w \notin \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$. Contradicción.

(I3) Trivial de la hipótesis.

(I4) Supongamos que $\alpha_i \equiv \beta_i$ para todo $i \leq n$ queremos mostrar que

$$B(\Psi \circ \alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_n) \equiv B(\Psi \circ \beta_1 \circ \ldots \circ \beta_n)$$

. Por la ecuación $[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$ esto es equivalente a mostrar que $min([\![\alpha_n]\!], \leq_{\Psi \circ \alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_{n-1}}) = min([\![\beta_n]\!], \leq_{\Psi \circ \beta_1 \circ \ldots \circ \beta_{n-1}})$. Pero esto claro por el hecho de que por S6 tenemos que $\leq_{\Psi \circ \alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_{n-1}} = \leq_{\Psi \circ \beta_1 \circ \ldots \circ \beta_{n-1}}$ y por hipótesis $[\![\alpha_n]\!] = [\![\beta_n]\!]$.

(I5 e I6) Por la ecuación $[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$ tenemos que $[\![B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta))]\!] = \text{mín}([\![\alpha \wedge \beta]\!], \leq_\Psi)$ y $[\![B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \cap [\![\beta]\!]$. Así, es suficiente ver que

$$\text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \cap [\![\beta]\!] = \text{mín}([\![\alpha \wedge \beta]\!], \leq_\Psi)$$

bajo la hipótesis $\text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \cap [\![\beta]\!] \neq \emptyset$. Es bastante claro que $\text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \cap [\![\beta]\!] \subseteq \text{mín}([\![\alpha \wedge \beta]\!], \leq_\Psi)$. Para la otra inclusión tomemos $w \in \text{mín}([\![\alpha \wedge \beta]\!], \leq_\Psi)$. Como w está en $[\![\beta]\!]$ nos que por ver que $w \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$. Sabemos que $w \in [\![\alpha]\!]$. Afirmamos que además es el minimal para $[\![\alpha]\!]$ respecto a $\leq_\Psi$. Supongamos por reducción al absurdo que esto no se cumple. Como $\leq_\Psi$ es un preorden total existe $w' \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$ tal que $w' <_\Psi w$. Por hipótesis, existe $w'' \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \cap [\![\beta]\!]$. Y de nuevo como $\leq_\Psi$ es un preorden total, $w' \sim_\Psi w''$, por lo tanto, $w'' <_\Psi w$ contradiciendo la minimalidad de w en $[\![\alpha \wedge \beta]\!]$ respecto a $\leq_\Psi$. ∎

Notemos que el postulado $(R*1)$ de la revisión AGM-DP o RAGM es un caso particular del postulado $(I1)$ donde $n=1$ esto nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 3.1 *Si $\circ$ es un operador de mejoramiento débil entonces $\star$ es un operador de revisión AGM/DP, es decir, satisface $(R*1)-(R*6)$ de Darwiche y Pearl.*

Como consecuencia del teorema anterior se demostró la siguiente propiedad de tricotomía.

Proposición 3.1 *Sea $\circ$ un operador de mejoramiento débil. Entonces,*

$$B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta)) = \begin{array}{l} B(\Psi \star \alpha) \text{ ó} \\ B(\Psi \star \beta) \text{ ó} \\ B(\Psi \star \alpha) \wedge B(\Psi \star \beta) \end{array}$$

Demostración: Si $\min([[\alpha]], \leq_\Psi)$ and $\min([[\beta]], \leq_\Psi)$ están en el mismo nivel con respecto a $\leq_\Psi$ entonces $\min([[\alpha \vee \beta]], \leq_\Psi) = \min([[\alpha]], \leq_\Psi) \cup \min([[\beta]], \leq_\Psi)$. Por lo tanto, por el Teorema 3.6, $[[B(\Psi \star (\alpha \vee \beta))]] = [[B(\Psi \star \alpha)]] \cup [[B(\Psi \star \beta)]]$. De otra manera, $\min([[\alpha]], \leq_\Psi)$ está en un nivel más bajo que $\min([[\beta]], \leq_\Psi)$ o bien $\min([[\beta]], \leq_\Psi)$ está en un nivel más bajo que $\min([[\alpha]], \leq_\Psi)$. En el primer caso, $\min([[\alpha \vee \beta]], \leq_\Psi) = \min([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Así, por el Teorema 3.6, $[[B(\Psi \star (\alpha \vee \beta))]] = [[B(\Psi \star \alpha)]]$. En el segundo caso, $\min([[\alpha \vee \beta]], \leq_\Psi) = \min([[\beta]], \leq_\Psi)$. Así, por el Teorema 3.6, $[[B(\Psi \star (\alpha \vee \beta))]] = [[B(\Psi \star \beta)]]$. ∎

Definición 3.6 *Sea $\circ$ un operador de mejoramiento débil y $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ su correspondiente asignación fuerte y fiel. La asignación será llamada asignación gradual si las siguentes propiedades son satisfechas:*

(S1) *Si $\omega, \omega' \models \alpha$ entonces $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi \circ \alpha} \omega'$*

(S2) *Si $\omega, \omega' \models \neg\alpha$ entonces $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi \circ \alpha} \omega'$*

(S3) *Si $\omega \models \alpha$, $\omega' \models \neg\alpha$, entonces $\omega \leq_\Psi \omega' \Rightarrow \omega <_{\Psi \circ \alpha} \omega'$*

Las propiedades $(S1)$ y $(S2)$ corresponden a las propiedades usuales $(CR1)$ y $(CR2)$, las cuales aseguran respectivamente la rigidez del orden entre modelos de la nueva información y la rigidez del orden entre no modelos de la nueva información después del mejoramiento. La propiedad $(S3)$ es la correspondiente a la propiedad (PR) del marco de Booth y Meyer y Jin y Thielscher la cual obliga a incrementar la plausibilidad de los modelos de la nueva información.

A continuación el teorema de representación los operadores de mejoramiento.

Teorema 3.7 *Un operador de cambio $\circ$ es un operador de mejoramiento, si y sólo si, existe una asignación gradual tal que*

$$[[B(\Psi \star \alpha)]] = min([[\alpha]], \leq_\Psi)$$

Demostración: ($\Rightarrow$) Por el Teorema 3.6 sabemos que existe una asignación fuerte y fiel $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ tal que $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$ se cumple. De esta manera nos queda demostrar que la asignación es además una asignación gradual *i.e.* satisface S1, S2 y S3.

(S1) Supongamos que $w, w' \in [[\alpha]]$. Así, $\varphi_{w,w'} \vdash \alpha$. By (I7), $B((\Psi \circ \alpha) \star \varphi_{w,w'}) \equiv B(\Psi \star \varphi_{w,w'})$. Entonces como $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$ tenemos que

$$\begin{aligned} w \leq_{\Psi\circ\alpha} w' &\Leftrightarrow w \in \text{mín}(\{w, w'\}, \leq_{\Psi\circ\alpha}) \\ &\Leftrightarrow w \in [[B((\Psi \circ \alpha) \star \varphi_{w,w'})]] \\ &\Leftrightarrow w \in [[B(\Psi \star \varphi_{w,w'})]] \\ &\Leftrightarrow w \in \text{mín}(\{w, w'\}, \leq_\Psi) \\ &\Leftrightarrow w \leq_\Psi w' \end{aligned}$$

(S2) La prueba es análoga a la de (S1) pero usando (I8) en lugar de (I7).

(S3) Supongamos que $w \in [[\alpha]]$, $w' \in [[\neg\alpha]]$ and $w \leq_\Psi w'$. Queremos ver que $w <_{\Psi\circ\alpha} w'$. Como $w \leq_\Psi w'$, necesariamente $w \in \text{mín}(\{w, w'\}, \leq_\Psi)$ lo cual por le hecho de que $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$, significa que $w \in [[B(\Psi \star \varphi_{w,w'})]]$. Entonces $B(\Psi \star \varphi_{w,w'}) \not\vdash \neg\alpha$, así por (I9), $B((\Psi \circ \alpha) \star \varphi_{w,w'}) \vdash \alpha$. Entonces, por (I1) e (I3), $[[B((\Psi \circ \alpha) \star \varphi_{w,w'})]] = \{w\}$. De este hecho y de la ecuación $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$, obtenemos que $w <_{\Psi\circ\alpha} w'$.

($\Leftarrow$) Por el Teorema 3.6 sabemos que $\circ$ es un operador de mejoramiento débil. Por lo tanto, falta por demostrar que (I7), (I8) e (I9) se satisfacen.

(I7) Supongamos que $\alpha \vdash \mu$, *i.e.* $[[\alpha]] \subseteq [[\mu]]$. Queremos ver que $B((\Psi\circ\mu)\star\alpha) \equiv B(\Psi\star\alpha)$. Como $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$ es equivalente demostrar que $\text{mín}([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu}) = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Pero esto es una consecuencia directa de S1 (ya que $[[\alpha]] \subseteq [[\mu]]$) de donde se sigue que $\forall w, w' \models \alpha, w \leq_\Psi w'$ iff $w \leq_{\Psi\circ\mu} w'$.

(I8) Supongamos que $\alpha \vdash \neg\mu$, *i.e.* $[[\alpha]] \subseteq [[\neg\mu]]$. Queremos ver que $B((\Psi\circ\mu)\star\alpha) \equiv B(\Psi\star\alpha)$. Como $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$ es equivalente probar que $min([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu}) = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Así como para (I7), esta es una consecuencia directa que se sigue de S2 (ya que $[[\alpha]] \subseteq [[\neg\mu]]$) $\forall w, w' \models \alpha, w \leq_\Psi w'$ iff $w \leq_{\Psi\circ\mu} w'$.

(I9) Notemos que del hecho de que $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi\circ\mu}$ son preórdenes totales, se obtiene que el postulado S3 es equivalente al siguiente postulado:

(S3') Si $w \in [\![\mu]\!], w' \in [\![\neg\mu]\!]$ entonces $w' \leq_{\Psi\circ\mu} w \quad \Rightarrow \quad w' <_{\Psi} w$

Supongamos ahora que $B(\Psi\star\alpha) \nvdash \neg\mu$. Queremos ver que $B((\Psi\circ\mu)\star\alpha) \vdash \mu$. Supongamos por reducción al absurdo que $B((\Psi\circ\mu)\star\alpha) \nvdash \mu$, *i.e.* existe $w \in [\![B((\Psi\circ\mu)\star\alpha)]\!]$ tal que $w \notin [\![\mu]\!]$. Por la ecuación $[\![B(\Psi\star\alpha)]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi})$, $w \in min([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi\circ\mu})$, así para todo $w' \in [\![(]\!]\alpha)$, $w \leq_{\Psi\circ\mu} w'$. Por hipótesis, existe $w'' \in [\![B(\Psi\star\alpha)]\!] \cap [\![\mu]\!]$. En particualar, por (I1), $w'' \in [\![\alpha]\!]$. Así, $w \leq_{\Psi\circ\mu} w''$. Por otro lado, de la ecuación $[\![B(\Psi\star\alpha)]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi})$ se tiene que $w'' \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi})$.
Como $w \in [\![\neg\mu]\!]$ y $w'' \in [\![\mu]\!]$, y $w \leq_{\Psi\circ\mu} w''$, por S3', $w <_{\Psi} w''$. Además $w \in [\![\alpha]\!]$, y esto contradice la minimalidad de w'' en $[\![\alpha]\!]$ respecto a $\leq_{\Psi}$. ∎

Es claro que el postulado $(R*1)$ de la revisión AGM/DP y la revisión BM/JT es un caso particular del postulado (I1) donde $n = 1$.

Proposición 3.2 *Si $\circ$ es un operador de mejoramiento (es decir, satisface $(I1-I9)$) que satisface $(R{*}1)$, entonces es un operador de revisión admisible (es decir, satisface $(R{*}1-R{*}6)$ y $(C1-C4)$ del marco DP y la (P) de Booth y Meyer y Jin Thielscher).*

3.3. Mejoramiento Suave

Como vimos en las secciones anteriores los operadores de revisión son una subclase bien conocida de los operadores de mejoramiento débil, claramente un operador de revisión es un operador de mejoramiento completamente drástico ya que se satisface el postulado de éxito. Veremos a continuación que el espectro de los operadores de mejoramiento débil es muy grande y variado, en el sentido de que existen operadores que tratan de distintas formas el grado de mejoramiento de la nueva información. Pino y Konieczny empezaron definiendo una subclase de operadores de mejoramiento débil llamados operadores de mejoramiento suave agregando postulados adicionales y demostrando sus correspondientes teoremas de representación.

Definición 3.7 *Un operador de mejoramiento es llamado operador de mejoramiento suave si satisface el siguiente postulado*

(I10) *Si $B(\Psi\star\alpha) \vdash \neg\mu$, entonces $B((\Psi\circ\mu)\star\alpha) \nvdash \mu$*

Este postulado dice literalmente que si una fórmula μ es rechazada por el agente después de varios mejoramientos (suaves) por α, no puede ser aceptada después de un mejoramiento por μ seguido de varios mejoramientos por α.

De hecho, el único cambio de estatus admitido es que la fórmula μ que es rechazada por el agente después de varios mejoramientos por α puede volverse indeterminada después de un mejoramiento débil por μ y varios mejoramientos por α. Será necesario al menos otro paso de mejoramiento por μ para que el agente acepte esta fórmula luego de varios mejoramientos por α. Esto es lo que motivó al nombre de mejoramiento "suave".

Veamos a continuación el teorema de representación para los operadores de mejoramiento suaves:

Definición 3.8 *Sea $\circ$ un operador de mejoramiento débil y $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ su correspondiente asignación fuerte y fiel. La asignación será llamada asignación gradualmente suave si es una asignación gradual y se cumple la siguiente propiedad:*

(S4) *Si $\omega \models \alpha$, $\omega' \models \neg\alpha$, entonces $\omega' <_\Psi \omega \Rightarrow \omega' \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega$*

La propiedad $(S4)$ nos muestra que el incremento de la plausibilidad de los modelos de la nueva información es limitado por los operadores de mejoramiento suaves.

Teorema 3.8 *Un operador de cambio $\circ$ es un operador de mejoramiento suave si, y sólo si, existe una asignación gradualmente suave tal que*

$$[[B(\Psi \star \alpha)]] = min([[\alpha]], \leq_\Psi)$$

Demostración: $(\Rightarrow)$ Por el Teorema 3.7 sabemos que existe una asignación gradual $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ tal que $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$ se cumple. De esta manera nos queda demostrar que la asignación es además una asignación gradualmente suave *i.e.* satisface (S4).

(S4) Supongamos que $w \in [[\alpha]]$, $w' \in [[\neg\alpha]]$ y $w' <_\Psi w$. Queremos mostrar que $w' \leq_{\Psi\circ\alpha} w$. De la hipótesis $w' <_\Psi w$ obtenemos que $\text{mín}(\{w, w'\}, \leq_\Psi) = \{w'\}$. Entonces, como $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$, tenemos que $[[B(\Psi \star \varphi_{w,w'})]] = \{w'\}$. Por lo tanto $B(\Psi \star \varphi_{w,w'}) \vdash \neg\alpha$. Así, por (I10), $B((\Psi \circ \alpha) \star \varphi_{w,w'}) \nvdash \alpha$. Entonces $w' \in [[B((\Psi \circ \alpha) \star \varphi_{w,w'})]]$, y por la ecuación $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$, se tiene que $w' \in \text{mín}(\{w, w'\}, \leq_{\Psi\circ\alpha})$, *i.e.* $w' \leq_{\Psi\circ\alpha} w$.

$(\Leftarrow)$ Por el Teorema 3.7 sabemos que $\circ$ es un operador de mejoramiento. Por lo tanto, falta por demostrar que (I10) se satisface.

(I10) Notemos que el hecho de que $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi\circ\mu}$ sean preórdenes totales implica que el postulado (S4) es equivalente al siguiente postulado:

(S4') Si $w \in [\![\mu]\!], w' \in [\![\neg\mu]\!]$, entonces $w <_{\Psi\circ\mu} w' \quad \Rightarrow \quad w \leq_\Psi w'$

Supongamos que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Queremos mostrar que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \nvdash \mu$. Supongamos por reducción al absurdo que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \mu$. Sean w, w' tales que $w \models B((\Psi \circ \mu) \star \alpha)$ y $w' \models B(\Psi \star \alpha)$. Como estamos suponiendo que $w \in [\![\mu]\!]$ y $w' \in [\![\neg\mu]\!]$. Por la ecuación $[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$, se tiene que $w \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi\circ\mu})$ y $w' \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$.

Estamos suponiendo que $w \not\simeq_{\Psi\circ\mu} w'$ y $w \not\simeq_\Psi w'$, ya que si no $w' \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi\circ\mu})$ o $w \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$. Pero esto es imposible ya que en el primer caso $w' \in [\![\mu]\!]$, una contradicción y en el segundo caso $w \in [\![\neg\mu]\!]$, también una contradicción. De esta manera, necesariamente $w <_{\Psi\circ\mu} w'$ y $w' <_\Psi w$. Y como tenemos que $w \in [\![\mu]\!]$, $w' \in [\![\neg\mu]\!]$ y $w <_{\Psi\circ\mu} w'$, por (S4'), $w \leq_\Psi w'$, lo cual es una contradicción. ∎

Teniendo la representación de los operadores de mejoramiento podemos explicar más claramente su funcionamiento. Por ejemplo, viendo a la información (o los conocimientos del agente) en un estado epistémico clasificada en grados de arraigamiento en una escala discreta, el grado de arraigamiento de μ después de un mejoramiento suave del estado epistémico por μ puede a lo sumo alcanzar el grado inmediatamente inferior (más plausible) al que tenía μ en dicho estado epistémico μ. Esta propiedad de suavidad es muy deseada, ya que se busca siempre incrementar paulatinamente el arraigamiento de una nueva información no muy drásticamente y de una manera uniforme, en este caso, en un rango que no supere un grado completo al grado inmediatamente inferior.

Pino y Konieczny resaltan la importancia de los operadores de mejoramiento suaves y modulares ya que la "suavidad" permite que la modularidad defina completamente al operador. De hecho redefinen modularidad ahora sobre las asignación fuerte y fiel del operador de mejoramiento básico.

Definición 3.9 *Sea $\circ$ un operador de mejoramiento débil. Sea $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ su correspondiente asignación fuerte y fiel. Sea $N_\omega = \{\omega' : \omega' \simeq_\Psi \omega\}$ y $N_{\omega+1} = \{\omega' : \omega << _\Psi \omega'\}$. Decimos que la asignación $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ es modular ssi existe una función booleana $f : \{0,1\}^6 \longrightarrow \{0,1\}$ tal que:*

- *Para cualquier ω, si $\omega', \omega'' \in N_\omega \cup N_{\omega+1}$ entonces*

$$\omega' \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega'' = f(\omega' \leq_\Psi \omega'', \omega'' \leq_\Psi \omega', [[\omega]] \cap N_\omega = \emptyset, [[\omega]] \cap N_{\omega+1} = \emptyset, \omega' \models \alpha, \omega'' \models \alpha)$$

- $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ *está completamente determinado por la igualdad previa y la trasitividad de la relación.*

  Un operador de mejoramiento débil es modular sii su asignación fuerte y fiel asociada es modular.

En el caso de los operadores de mejoramiento suave la modularidad si es una condición que define completamente al operador mediante la igualdad y la relación de transitividad, de hecho existen solo dos operadores de cambio con esas caraterísticas como veremos más adelante (estos operadores están bien caraterizados sintácticamente).

Definición 3.10 *Un operador de mejoramiento suave es modular si su asignación gradualmente suave asociada es modular.*

3.4. Operadores Suaves Modulares

Konieczny y Pino demostraron que el conjunto de los operadores de mejoramiento suave y modular no es grande. De hecho sólo existen dos operadores de este tipo, el uno-mejoramiento y el medio-mejoramiento.
A continuación veremos algunas notaciones introducidas por Konieczny y Pino esenciales para definir éstos operadores y dar un teorema de representación para cada uno de ellos.

Definición 3.11 *Sea $\circ$ un operador de cambio que satisface (I1). Sea α, β y Ψ dos fórmulas y un estado epistémico respectivamente. Decimos que α está por debajo de β con respecto a Ψ, dado $\circ$, denotado $\alpha \prec_\Psi^\circ \beta$ (ó simplemente $\alpha \prec_\Psi \beta$ si no hay ambiguedad sobre $\circ$) si, y sólo si, $\alpha \nvdash \bot$, $\beta \nvdash \bot$, $B(\Psi \star \alpha) \vdash B(\Psi \star (\alpha \vee \beta))$ y $B(\Psi \star \beta) \nvdash B(\Psi \star (\alpha \vee \beta))$. El par (α, β) es Ψ-consecutivo, denotado como $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi^\circ \beta$ (ó simplemente $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \beta$ si no hay ambiguedad sobre $\circ$) si, y sólo si, $\alpha \prec_\Psi \beta$ y no existe una fórmula γ tal que $\alpha \prec_\Psi \gamma \prec_\Psi \beta$.*

La idea de estas nuevas definiciones es que $\alpha \prec_\Psi^\circ \beta$ denota que α es una creencia más arraigada (más plausible) que β en el estado epistémico Ψ. Y $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi^\circ \beta$ denota el hecho que α es una fórmula inmediatamente más arraigada (más plausible) que β.

Con esta nueva notación y usando la proposición 3.1 Pino y Konieczny demostraron los siguientes corolarios útiles para entender mejor las definiciones de $\prec_\Psi$ y $\prec\!\!\prec_\Psi$.

Corolario 3.2 *Sea $\circ$ un operador de mejoramiento débil. Entonces $\alpha \prec_\Psi \beta$, si y sólo si, existen ω, ω' tales que $\omega \in [[B(\Psi \star \alpha)]]$, $\omega' \in [[B(\Psi \star \beta)]]$ y $\omega <_\Psi \omega'$.*

Demostración: ($\Rightarrow$) Asumamos que $\alpha \prec_\Psi \beta$, esto es $B(\Psi \star \alpha) \vdash B(\Psi \star (\alpha \vee \beta))$ y $B(\Psi \star \beta) \not\vdash B(\Psi \star (\alpha \vee \beta))$. Por la proposición 3.1 y su demostración, necesariamente $\text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$ están es un nivel más abajo que $\text{mín}([[\beta]], \leq_\Psi)$. Así, por el teorema 3.6, es suficiente tomar $w \in \text{mín}([[(]]\alpha), \leq_\Psi)$ y $w' \in \text{mín}([[\beta]], \leq_\Psi)$ para obtener que $w \in [[B(\Psi \star \alpha)]]$, $w' \in [[B(\Psi \star \beta)]]$, $w <_\Psi w'$.

($\Leftarrow$) Asumamos que existen w, w' tal que $w \in [[B(\Psi \star \alpha)]]$, $w' \in [[B(\Psi \star \beta)]]$, $w <_\Psi w'$. Entonces, por el Teorema 3.6, $\text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$ está en un nivel más bajo que $\text{mín}([[\beta]], \leq_\Psi)$. Entonces, por la proposición 3.1 y su demostración tenemos que $B(\Psi \star (\alpha \vee \beta)) \equiv B(\Psi \star \alpha)$. Por otro lado sabemos que $B(\Psi \star \beta) \not\vdash B(\Psi \star (\alpha \vee \beta))$ ya que $\text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$ and $\text{mín}([[\beta]], \leq_\Psi)$ no están en el mismo nivel. Por lo tanto $\alpha \prec_\Psi \beta$.
∎

Corolario 3.3 *Sea $\circ$ un operador de mejoramiento débil. Entonces $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \beta$, si y sólo si, existen ω, ω' tales que $\omega \in [[B(\Psi \star \alpha)]]$, $\omega' \in [[B(\Psi \star \beta)]]$ y $\omega <_\Psi \omega'$ y no existe ω'' tal que $\omega <_\Psi \omega'' <_\Psi \omega'$.*

Demostración: ($\Rightarrow$) Asumamos $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \beta$. Por el corolario 3.2, tenemos que w, w' talque $w \in [[B(\Psi \star \alpha)]]$, $w' \in [[B(\Psi \star \beta)]]$, $w <_\Psi w'$. Supongamos por el absurdo que existe w'' tal que $w <_\Psi w'' <_\Psi w'$. Pero es claro por el corolario 3.2 que $\alpha \prec_\Psi \varphi_{w''} \prec_\Psi \beta$ contradiciendo el hecho de que $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \beta$.

($\Leftarrow$) Asumamos que existen w, w' tales que $w \in [[B(\Psi \star \alpha)]]$, $w' \in [[B(\Psi \star \beta)]]$, $w <_\Psi w'$ y que no existe w'' tal que $w <_\Psi w'' <_\Psi w'$. Por el corolario 3.2 tenemos que $\alpha \prec_\Psi \beta$. Así, la única posibilidad para $\alpha \not\prec\!\!\prec_\Psi \beta$, es la existencia de una fórmula γ tal que $\alpha \prec_\Psi \gamma \prec_\Psi \beta$. Y de nuevo por el corolario 3.2, tomando $w'' \in [[B(\Psi \star \gamma)]]$ tenemos que $w <_\Psi w'' <_\Psi w'$, lo cual es una contradicción. ∎

Ahora estamos en condiciones de definir a los operadores de uno-mejoramiento.

3.4.1. Operadores de uno-mejoramiento

Definición 3.12 *Un operador de mejoramiento suave es llamado uno-mejoramiento si satisface el siguiente postulado*

(I11) *Si* $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$ *y* $\alpha \prec\!\!\!\prec_\Psi \alpha \wedge \mu$*, entonces* $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \nvdash \neg\mu$

El postulado (I11) básicamente nos dice que si $\neg\mu$ es aceptado al revisar por α, pero μ es muy plausible dado α, entonces será suficiente un mejoramiento por μ antes de empezar la sucesión de mejoramientos necesaria para revisar por α para asegurar que el resultado será consistente con μ.

Daremos a continuación el teorema de representación para los operadores de uno-mejoramiento.

Definición 3.13 *Sea* $\circ$ *un operador de mejoramiento suave y* $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ *su correspondiente asignación gradual suave. La asignación será llamada asignación uno-gradual si la siguiente propiedad es satisfecha:*

(SO) *Si* $\omega \models \neg\alpha$*,* $\omega' \models \alpha$ *y* $\omega \ll_\Psi \omega'$*, entonces* $\omega' \not\leq_{\Psi\circ\alpha} \omega$

Teorema 3.9 *Un operador de cambio* $\circ$ *es un operador de uno-mejoramiento, si y sólo si, existe una asignación uno-gradual tal que*

$$[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Por el Teorema 3.8 sabemos que existe una asignación gradualmente suave $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ tal que $[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$ se cumple. De esta manera nos queda demostrar que la asignación es además una asignación uno-gradual *i.e.* satisface (SO).

(SO) Supongamos que $w \in [\![\alpha]\!]$, $w' \in [\![\neg\alpha]\!]$, $w' <_\Psi w$ y que no existe w'' tal que $w' <_\Psi w'' <_\Psi w$. Queremos mostrar que $w \leq_{\Psi\circ\alpha} w'$. Del hecho $w' <_\Psi w$ tenemos que $\text{mín}(\{w, w'\}, \leq_\Psi) = \{w'\}$, luego del teorema 3.8 tenemos que $[\![B(\Psi \star \varphi_{w,w'})]\!] = \{w'\}$. Así, $B(\Psi \star \varphi_{w,w'}) \vdash \neg\alpha$. Por otro lado, de la hipótesis y del corolario 3.3 se obtiene que $\varphi_{w,w'} \prec\!\!\!\prec_\Psi \varphi_{w,w'} \wedge \alpha$. Entonces, por (I11), $B((\Psi \circ \alpha) \star \varphi_{w,w'}) \nvdash \neg\alpha$, y esto por el teorema 3.8 siginifica que $w \leq_{\Psi\circ\alpha} w'$.

($\Leftarrow$) Por el Teorema 3.8 sabemos que $\circ$ es un operador de mejoramiento suave. Por lo tanto, falta por demostrar que (I11) se satisface.

(I11) Asumamos que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$, $\alpha \wedge \mu \nvdash \bot$ y $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \alpha \wedge \mu$. Queremos ver que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \nvdash \neg\mu$. Por reducción al absurdo supongamos que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Sean w, w' tales que $w' \in [[B(\Psi \star \alpha)]]$ y $w \in [[B(\Psi \star (\alpha \wedge \mu))]]$. De lo que asumimos tenemos que $w' \in [[\neg\mu]]$ and $w \in [[\mu]]$. Por el corolario 3.3, se tiene que $w' <_\Psi w$ y que no existe w'' tal que $w' <_\Psi w'' <_\Psi w$. Por (S5), $w \leq_{\Psi\circ\mu} w'$ y por (S4), $w' \leq_{\Psi\circ\mu} w$. Por lo tanto, $w \simeq_{\Psi\circ\mu} w'$. Esto significa que $[[B(\Psi \star \alpha]]$ y $[[B(\Psi \star \alpha \wedge \mu)]]$ están en el mismo nivel respecto a $\leq_{\Psi\circ\mu}$.
Afirmamos que este nivel es el nivel de $\min([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu})$. Lo cual es una contradicción ya que tenemos que $w \in \min(\min([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu}))$ y por lo tanto $w \models \neg\mu$ que contradice el hecho que $w \models \mu$.
Demostremos entonces nuestra afirmación. Supongamos por reducción al absurdo que dicha afirmación no es cierta. Entonces, necesariamente exite $w'' \in \min([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu})$ tal que $w'' <_{\Psi\circ\mu} w$. Consideramos dos casos: $w'' \in [[\mu]]$ and $w'' \in [[\neg\mu]]$. En el caso en que $w'' \in [[\mu]]$, no se tiene que $w'' <_\Psi w$ ya que $w \in \min([[\alpha \wedge \mu]], \leq_\Psi)$. Por lo tanto, $w \leq_\Psi w''$. Entonces, por (S1), $w \leq_{\Psi\circ\mu} w''$, lo cual es una contradicción. En el caso en que $w'' \in [[\neg\mu]]$, no tenemos que $w'' <_\Psi w'$ ya que $w' \in \min([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Por lo tanto, $w' \leq_\Psi w''$. Entonces, por (S2), $w' \leq_{\Psi\circ\mu} w''$, esto es $w \leq_{\Psi\circ\mu} w''$, lo cual es una contradicción. ∎

Este teorema de representación nos dice que los operadores de uno-mejoramiento mejoran la plausibilidad de la nueva información exactamente un nivel respecto al nivel que tenían en el estado epistémico inicial (de esto su nombre).

Pino y Konieczny demostraron usando este teorema que la relación entre $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ impuesta por la asignación uno-gradual es bastante fuerte. Efectivamente, el preorden total $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ está completamente determinado por $\leq_\Psi$ y α.

Para demostrar este hecho Pino y Konieczny se valieron del siguiente lema:

Lema 3.1 *Sea $\circ$ un operador de uno-mejoramiento y $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ su asignación uno-gradual. Si $\omega <_\Psi \omega'$, $\omega \in [[\neg\alpha]]$, $\omega' \in [[\alpha]]$ y $\omega \not\ll_\Psi \omega'$, entonces $\omega <_{\Psi\circ\alpha} \omega'$.*

Demostración:
Definamos $A = \{w'' \in \mathcal{W} : w <_\Psi w'' <_\Psi w'\}$. Por hipótesis $w <_\Psi w'$ y $w \not\ll_\Psi w'$, así el conjunto A es no vacío. Así $A \cap [[\neg\alpha]] \neq \emptyset$ ó $A \cap [[\alpha]] \neq \emptyset$. Consideremos primero el caso en que $A \cap [[\neg\alpha]] \neq \emptyset$. Tomemos $w'' \in max(A \cap [[\neg\alpha]], \leq_\Psi)$. Por definición de A, se tiene que $w <_\Psi w''$ y $w'' <_\Psi w'$. Consideremos dos subcasos:
- $w'' \ll_\Psi w'$. En esta situación, concluimos por (S4) y (SO) que $w'' \simeq_{\Psi\circ\alpha} w'$. Por (S2), $w <_{\Psi\circ\alpha} w''$. Por lo tanto, por transitividad $w <_{\Psi\circ\alpha} w'$.
- $w'' \not\ll_\Psi w'$. En esta situación tomamos w''' tal que $w'' \ll_\Psi w'''$. Es claro que $w''' <_\Psi w'$ y como $w'' \in max(A \cap [[\neg\alpha]], \leq_\Psi)$, entonces necesariamente $w''' \in [[\alpha]]$.

Por (S4) y (SO), $w'' \simeq_{\Psi\circ\alpha} w'''$ y como $\omega, \omega'' \in [[\neg\alpha]]$ y $\omega <_{\Psi} \omega''$ de (S2) se tiene que $\omega <_{\Psi\circ\mu} \omega''$, así por transitividad, $w <_{\Psi\circ\alpha} w'''$. Por otra parte de (S1) se obtiene que $w''' <_{\Psi\circ\alpha} w'$, luego, por transitividad, $w <_{\Psi\circ\alpha} w'$.
Para el segundo caso, $A \cap [[\alpha]] \neq \emptyset$, procedemos con un razonamiento análogo, pero esta vez tomando $w'' \in min(A \cap [[\alpha]], \leq_{\Psi})$. ∎

Este lema es interesante ya que nos dice la relación faltante entre $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ y $\leq_{\Psi}$. Todas las demás relaciones las da la asignación uno-gradual.

Proposición 3.3 *Sea $\circ$ un operador de uno-mejoramiento y $\Psi \mapsto \leq_{\Psi}$ su asignación uno-gradual. Entonces, para toda fórmula α, el preorden $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ está completamente definido por $\leq_{\Psi}$ y $[[\alpha]]$.*

Demostración: Supongamos por reducción al absurdo que tenemos que $\leq^1_{\Psi\circ\alpha} \neq \leq^2_{\Psi\circ\alpha}$ y que ambos preórdenes satisfacen (S1-S5). Sean w, w' testigos de esta desigualdad. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $w <^1_{\Psi\circ\alpha} w'$ y $w' \leq^2_{\Psi\circ\alpha} w$. Por (S1), no se cumple en este caso que $w, w' \in [[\alpha]]$, como de cualquier manera por el hecho de que $w <^1_{\Psi\circ\alpha} w'$ obtenemos que $w <_{\Psi} w'$ y como $w' \leq^2_{\Psi\circ\alpha} w$ obtenemos que $w' \leq_{\Psi} w$ lo cual es una contradicción.
De manera similar por (S2), no se cumple en este caso que $w, w' \in [[\neg\alpha]]$. Así, las únicas posibilidades son $w \in [[\alpha]]$ y $w' \in [[\neg\alpha]]$ o bien $w \in [[\neg\alpha]]$ and $w' \in [[\alpha]]$.
Consideremos el primer caso, *i.e.* $w \in [[\alpha]]$ y $w' \in [[\neg\alpha]]$. Como $w' \leq^2_{\Psi\circ\alpha} w$, por (S3), $w \not\leq_{\Psi} w'$, *i.e.* $w' <_{\Psi} w$. Si $w' \not\ll_{\Psi} w$ entonces, por el Lema 3.1 se tiene que $w' <^1_{\Psi\circ\alpha} w$, una contradicción. Si $w' \ll_{\Psi} w$, por (S4) y (S5), $w' \simeq^1_{\Psi\circ\alpha} w$, de nuevo una contradicción.
Consideremos ahora el segundo caso, *i.e.* $w \in [[\neg\alpha]]$ and $w' \in [[\alpha]]$. Como $w <^1_{\Psi\circ\alpha} w'$, por (S3), $w' \not\leq_{\Psi} w$, *i.e.* $w <_{\Psi} w'$. Supongamos que $w \ll_{\Psi} w'$. Entonces, por (S5), $w' \leq^1_{\Psi\circ\alpha} w$ lo cual es una contradicción. Luego $w \not\ll_{\Psi} w'$, y por el Lema 3.1, se tiene que $w <^2_{\Psi\circ\alpha} w'$, lo cual es una contradicción. ∎

Esta proposición es muy importante ya que dice, en cierta forma, que existe un único operador de uno-mejoramiento. Ya que es posible definir distintos operadores de uno-mejoramiento asignando diferentes preórdenes al estado epistémico inicial que va a ser uno-mejorado iteradas veces por una misma nueva información, sin embargo, una vez que este preórden es fijado, la proposición 3.3 nos dice que no hay más libertades respecto a la elección de los preórdenes que se asignan en cada iteración subsiguiente.

De esta manera es claro que si se considera a los preórdenes sobre las valuaciones como estados epistémicos, tendremos que existe un único operador de uno-mejoramiento.

Pino y Konieczny denotaron al operador de uno-mejoramiento como $\odot$.

Ejemplo 3.10 *Veamos como funciona el operador de uno-mejoramiento sobre el estado epistémico correspondiente a Gianluca en el ejemplo 3.1.*

Para Gianluca son tres las características en un automóvil: el precio (barato o caro), el tamaño (sedan o camioneta), su procedencia (europeo o americano).

De esta manera el lenguaje de Gianluca respecto a los automóviles está definido por tres variables atómicas proposicionales p, q, r que denotarán:

$$p := carro - barato$$

$$q := carro - sedan$$

$$r := carro - europeo$$

Convenimos que $\neg p := carro - caro$, $\neg q := carro - camioneta$ y $\neg r := carro - americano$.

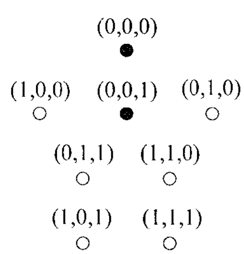
De esta manera si Ψ es el estado epistémico de Gianluca, entonces

$$B(\Psi) \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

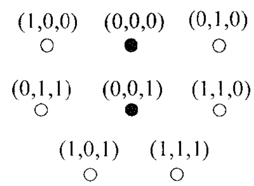
.

En el ejemplo Gianluca va al primer consesionario y recibe la información de que las camionetas americanas fueron el carro del año.
Llamemos entonces $\alpha = carro - camioneta \wedge carro - americano$.

Supongamos entonces que el preorden $\leq_\Psi$ asociado donde los puntos negros representan los modelos de α luce de la siguiente manera:



Aplicando operador de uno-mejoramiento sobre Ψ a la luz de α obtenemos; por el teorema de representación, que el preorden $\leq_{\Psi\odot\alpha}$ asociado a $\Psi \odot \alpha$ luce de la siguiente manera:



Por lo tanto, notamos como los modelos de α en $\leq_{\Psi\odot\alpha}$ mejoran su plausibilidad en exactamente un nivel respecto a $\leq_{\Psi}$. De esta manera, las camionetas americanas ganaron preferencia en el estado epistémico de Gianluca, sin embargo, necesitará que la información α le sea repetida otras veces para poder convencerce por las camionetas americanas mejorando su plausibilidad de un piso en un piso hasta ser aceptada totalmente.

3.4.2. Operadores de medio-mejoramiento

La característica más importante del operador de uno-mejoramiento, es que es un operador de mejoramiento suave (mostraremos que también es modular al final de este sección) que incrementa la plausibilidad de cada modelo de la nueva información exactamente un nivel respecto al estado epistémico inicial. Inspirados en este comportamiento del uno-mejoramiento, Pino y Konieczny buscaron definir un operador incluso más cauteloso que el operador $\odot$, e intentando capturar esta idea, propusieron los siguientes postulados sintácticos.

(H1) Si $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$, $\alpha \prec\!\!\prec_{\Psi} \alpha \wedge \mu$ y $\neg\exists\beta(\beta \vdash \neg\mu$ y $\alpha \prec\!\!\prec_{\Psi} \beta)$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \nvdash \neg\mu$

(H2) Si $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$, $\alpha \prec\!\!\prec_{\Psi} \alpha \wedge \mu$ y $\exists\beta(\beta \vdash \neg\mu$ y $\alpha \prec\!\!\prec_{\Psi} \beta)$, entonces $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \neg\mu$

El postulado (H1) se refiere a que cuando la revisión por α (sucesión de mejoramientos por α hasta el éxito) implica la negación de μ, si μ es apenas menos plausible que su negación a la luz de α, entonces un mejoramiento por μ será suficiente para eliminar su negación de las creencias del agente.

Note que este postulado en un debilitamiento de (I11), dejando clara la búsqueda por parte de los autores de un operador más suave que $\odot$.

El postulado (H2) está muy cercano a (H1), y habla del caso en el cual la revisión por α (sucesión de mejoramientos por α hasta el éxito) implica la negación de μ, pero ambos μ y $\neg\mu$ son apenas menos plausibles que $\neg\mu$, entonces un mejoramiento por μ no será suficiente para eliminar su negación de las creencias del agente.

Agregando estos dos postulado en lugar de (I11) a los operadores de mejoramiento suave Pino y Konieczny definieron los operadores de medio-mejoramiento.

Definición 3.14 *Un operador de mejoramiento suave que satisface (H1) y (H2) es llamado operador de medio mejoramiento.*

Las contrapartes semánticas de (H1) y (H2) definen a lo que llamaron asignación medio-gradual.

Definición 3.15 *Sea $\circ$ un operador de mejoramiento suave y $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ su asignación gradualmente suave correspondiente. La asignación será llamada asignación medio-gradual si las siguientes propiedades (SH1) y (SH2) son satisfechas:*

(SH1) *Si $\omega \models \mu$, $\omega' \models \neg\mu$, $\omega' \ll_\Psi \omega$ y $\nexists \omega'' \models \neg\mu$ tal que $\omega'' \simeq_\Psi \omega$, entonces $\omega \leq_{\Psi\circ\mu} \omega'$.*

(SH2) *Si $\omega \models \mu$, $\omega' \models \neg\mu$, $\omega' \ll_\Psi \omega$ y $\exists \omega'' \models \neg\mu$ tal que $\omega'' \simeq_\Psi \omega$, entonces $\omega' <_{\Psi\circ\mu} \omega$.*

Notemos que tanto (SH1) como (SH2) usan solamente información de la nueva fórmula, la relación vieja $\leq_\Psi$ entre las dos valuaciones en cuestión, y las valuaciones que estaban en el mismo nivel que el modelo ω de la nueva información. Esto a grosso modo nos dice que la asignación medio-gradual es una asignación modular.

Ahora ya podemos enunciar un teorema de representación para operadores de medio-mejoramiento.

Teorema 3.11 *Un operador de cambio $\circ$ es un operador de medio mejoramiento si, y sólo si, existe una asignación gradual media tal que*

$$[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$$

Demostración: ($\Rightarrow$) Por el Teorema 3.8 sabemos que existe una asignación gradualmente suave $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ tal que $[[B(\Psi \star \alpha)]] = \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$ se cumple. De esta manera nos queda demostrar que la asignación es además una asignación medio-gradual *i.e.* satisface (SH1) y (SH2).

(SH1) Sea $\omega \in [[\mu]]$, $\omega' \in [[\neg\mu]]$ tal que $\omega' \ll_\Psi \omega$. Y supongamos que no existe $\omega'' \in [[\neg\mu]]$ tal que $\omega'' \simeq_\Psi \omega$. Consideremos $\alpha = \varphi_{\omega,\omega'}$ y $\mu = \varphi_\omega$. Como $\omega' <_\Psi \omega$, $\text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi) = \{\omega'\}$. Así, por el Teorema 3.6 se tiene que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Y como $\alpha \wedge \mu \nvdash \perp$ y $\{\omega\} = \text{mín}([[\alpha \wedge \mu]], \leq_\Psi)$ del Corolario 3.3, se obtiene que $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \alpha \wedge \mu$.

Supongamos por reducción al absurdo que existe β tal que $\beta \vdash \neg\mu$ y $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \beta$. Por el Corolario 3.3, $\exists\omega''' \in [[B(\Psi \star \alpha)]]$ y $\exists\omega'' \in [[B(\Psi \circ \beta)]]$ tal que $\omega''' \ll_\Psi \omega''$. Como $\omega''' \simeq_\Psi \omega'$, necesariamente $\omega' \ll_\Psi \omega''$. De la hipótesis sabemos que $\omega' \ll_\Psi \omega$, y así necesariamente $\omega \simeq_\Psi \omega''$, pero $\omega'' \models \neg\mu$ lo cual es una contradicción. Así, no existe una fórmula β tal que $\beta \vdash \neg\mu$ y $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \beta$. Entonces, por (H1), $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \nvdash \neg\mu$. Así, por el Teorema 3.6, $\text{mín}([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu}) \not\subseteq [[\neg\mu]]$, *i.e.* $\text{mín}([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu}) \cap [[\mu]] \neq \emptyset$. Entonces, $\text{mín}([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu}) \cap [[\mu]] = \{\omega\}$ y por lo tanto, $\omega \leq_{\Psi\circ\mu} \omega'$.

(SH2) Sean $\omega \in [[\mu]]$, $\omega' \in [[\neg\mu]]$, tales que $\omega' \ll_\Psi \omega$ y supongamos que existe $\omega'' \in [[\neg\mu]]$ tales que $\omega \simeq_\Psi \omega''$. Consideremos $\alpha = \varphi_{\omega,\omega'}$ y $\mu = \varphi_\omega$. Entonces, por el Corolario 3.3, tenemos que $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \alpha \wedge \mu$. Además, $\{\omega'\} = [[B(\Psi \star \alpha)]]$ y $\alpha \wedge \mu \nvdash \perp$. Consideremos la fórmula $\beta = \varphi_{\omega''}$, y notemos que $\beta \vdash \neg\mu$ y $\omega' \ll_\Psi \omega''$. Como $\omega'' \in [[B(\Psi \star \beta)]]$, por el Corolario 3.3, $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \beta$. Entonces, por el postulado (H2), $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Así, $\text{mín}([[\alpha]], <_{\Psi\circ\mu}) \subseteq [[\neg\mu]]$. Entonces, $\text{mín}([[\alpha]], <_{\Psi\circ\mu}) = \{\omega'\}$ y por lo tanto $\omega' <_{\Psi\circ\mu} \omega$.

($\Leftarrow$) Por el Teorema 3.8 sabemos que $\circ$ es un operador de mejoramiento suave. Por lo tanto, falta por demostrar que (H1) y (H2) se satisfacen.

(H1) Supongamos que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$, $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \alpha \wedge \mu$ y que no existe β tal que $\beta \vdash \neg\mu$ y $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \beta$. Queremos ver que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \nvdash \neg\mu$

Como $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \alpha \wedge \mu$, por el Corolario 3.3, existen ω y ω' tales que $\omega \in [[B(\Psi \star (\alpha \wedge \mu))]]$, $\omega' \in [[B(\Psi \star \alpha)]]$ y $\omega' \ll_\Psi \omega$. Esto, junto a la hipótesis, implica que $\omega \in [[\mu]]$ y $\omega' \in [[\neg\mu]]$.
Supongamos por reducción al absurdo, que existe $\omega'' \in [[\neg\mu]]$ tal que $\omega'' \simeq_\Psi \omega$. Consideremos la fórmula $\varphi_{\omega''}$. Entonces $\varphi_{\omega''} \vdash \neg\mu$ y $\omega'' \in [[B(\Psi \star \varphi_{\omega''})]]$. Como $\omega' \ll_\Psi \omega$ y $\omega' \ll_\Psi \omega''$, por el Corolario 3.3, obtenemos que $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \varphi_{\omega''}$, lo cual es una contradicción. Así, $\nexists\omega'' \in [\neg\mu]$ tal que $\omega'' \simeq_\Psi \omega$. Entonces, de (SH1) se sigue que $\omega \leq_{\Psi\circ\mu} \omega'$.

Como $\star$ satisface la propiedad (I10), por el Teorema 3.6, $\star$ también satisface (S4). Por lo tanto, $\omega' \leq_{\Psi\circ\mu} \omega$. Así, $\omega' \simeq_{\Psi\circ\mu} \omega$.

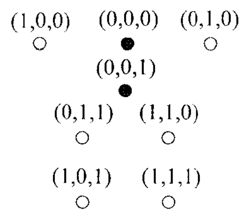
Para demostrar $B((\Psi\circ\mu)\star\alpha) \nvdash \neg\mu$, demostraremos que $[[B((\Psi\circ\mu))\star\alpha]]\cap[[\mu]] \neq \emptyset$. Afirmamos que $\omega \in \text{mín}([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu})$ y como $\omega \models \mu$ obtenemos la desigualdad previa. Supongamos por reducción al absurdo que nuestra afirmación es falsa, *i.e.* existe un modelo $\omega_1 \in \text{mín}([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu})$ tal que $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega$.
Tenemos dos casos: $\omega_1 \models \mu$ o $\omega_1 \models \neg\mu$.
Cas0 1: $\omega_1 \models \mu$. En este caso tenemos que $\omega_1 \models \alpha\wedge\mu$. Como $\omega \in [[B(\Psi\star(\alpha\wedge\mu))]]$, por el Teorema 3.6, necesariamente $\omega \in \text{mín}([[\alpha\wedge\mu]], \leq_\Psi)$. En particular, $\omega \leq_\Psi \omega_1$. Así, por (S1), $\omega \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_1$, lo cual es una contradicción.
Caso 2: $\omega_1 \models \neg\mu$. En este caso tenemos que $\omega_1 \models \alpha\wedge\neg\mu$. Como $\omega' \in [[B(\Psi\star\alpha)]]$, por el Teorema 3.6, necesariamente $\omega' \in \text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi)$. En particular, $\omega' \leq_\Psi \omega_1$. Pero $\omega', \omega_1 \models \neg\mu$, entonces (S2) nos dice que $\omega' \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_1$. Como hemos visto antes, $\omega \simeq_{\Psi\circ\mu} \omega'$. Así, por transitividad, $\omega \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_1$, lo cual es una contradicción.

(H2): Supongamos que $B(\Psi\star\alpha) \vdash \neg\mu$, $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \alpha\wedge\mu$ y que existe β tal que $\beta \vdash \neg\mu$ y $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \beta$. Por el corolario 3.3, existen $\omega \in [[B(\Psi\star(\alpha\wedge\mu))]]$, $\omega', \omega'' \in [[B(\Psi\star\alpha]]$ y $\omega''' \in [[B(\Psi\star\beta)]]$ tales que $\omega' \ll_\Psi \omega$ y $\omega'' \ll_\Psi \omega'''$. Así, por hipótesis, tenemos que $\omega \models \mu$ y $\omega', \omega'', \omega''' \models \neg\mu$.
Como $\omega' \simeq_\Psi \omega''$, en este caso se tiene que $\omega \simeq_\Psi \omega'''$. Así, tenemos un modelo de $\neg\mu$ que está en el mismo nivel que ω, luego por (SH2) se tiene que $\omega' <_{\Psi\circ\mu} \omega$. Si suponemos ahora que existe un modelo $\omega_4 \in [[B((\Psi\circ\mu)\star\alpha)]] \cap [[\mu]]$, entonces $\omega_4 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega$. Pero $\omega \leq_\Psi \omega_4$ como $\omega_4 \models \alpha\wedge\mu$. Entonces, por (S2) y el hecho de que $\omega, \omega_4 \models \mu$, $\omega \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_4$. Así, $\omega \simeq_{\Psi\circ\mu} \omega_4$ pero $\omega' <_{\Psi\circ\mu} \omega$, entonces $\omega' <_{\Psi\circ\mu} \omega_4$, contradiciendo a la minimalidad de ω_4. ∎

Mediante un procedimiento análogo al seguido para demostrar que el uno-mejoramiento es único, Pino y Konieczny mostraron que también existe un único operador de medio mejoramiento. Es decir la asignación medio-gradual define completamente al preorden resultante después del medio-mejoramiento.

Proposición 3.4 *Una vez que el preorden asociado al primer estado epistémico es fijado, existe un único operador de medio mejoramiento. Denotemos este operador como $\oslash$.*

Ejemplo 3.12 *Retomando de nuevo el ejemplo 3.1 y considerando p, q, r, α, Ψ y $\leq_\Psi$ como en el ejemplo 3.7 tenemos que si aplicamos el operador de medio-mejoramiento* *sobre Ψ a la luz de α obtendremos que el preorden total $\leq_{\Psi \oslash \alpha}$ asociado a $\Psi \oslash \alpha$ lucirá de la siguiente manera:*

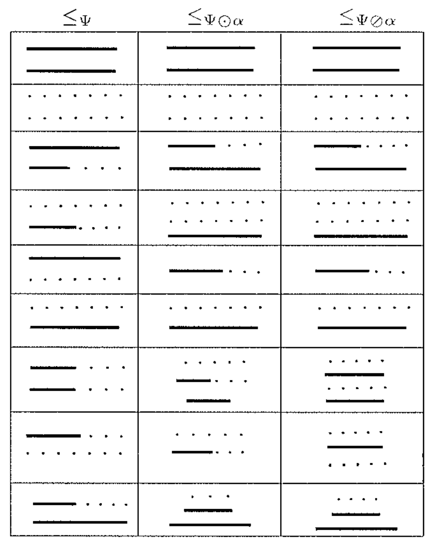


En este caso la plausibilidad de los modelos de α (las camionetas americanas) aumenta exactamente medio nivel en el preorden $\leq_{\Psi \oslash \alpha}$ respecto a $\leq_{\Psi}$. De esta manera, las camionetas americanas comienzan a ganar preferencia en las creencias de Gianluca luego del medio-mejoramiento. A medida que Gianluca reciba la información α repetidas veces, esta irá disminuyendo de medio nivel en medio nivel hasta finalmente ser aceptada.

Para culminar esta sección demostraremos que el operador de uno-mejoramientos y el operador de medio-mejoramiento son en efecto operadores de mejoramiento suaves modulares y además son los únicos operadores que conforman esta clase.

Teorema 3.13 *El operador de uno-mejoramiento y el operador de medio-mejoramiento son operadores de mejoramiento suaves modulares. La clase de los operadores de mejoramiento suave modulares es exactamente el conjunto $\{\oslash, \odot\}$.*

Prueba: La siguiente tabla muestra (en su primera columna) todas las situaciones posibles en dos niveles de un estado epistémico donde las líneas negras representan los modelos de una fórmula α y las líneas punteadas representan sus no modelos. Y muestra además (en la segunda y tercerca columna respectivamente) el comportamiento del operador de uno-mejoramiento y medio-mejoramiento a la luz de α sobre cada uno de estos casos posibles.



Ahora bien, si consideramos la función booleana $f_\odot : \{0,1\}^6 \longmapsto \{0,1\}$ definida como:

$f_\odot(\omega' \leq_\Psi \omega'', \omega'' \leq_\Psi \omega', [[\alpha]] \cap N_\omega = \emptyset, [[\alpha]] \cap N_{\omega+1} = \emptyset, \omega' \in [[\alpha]], \omega'' \in [[\alpha]]) = \omega' \leq_{\Psi\odot\alpha} \omega''$.

donde, $\omega', \omega'' \in N_\omega \cup N_{\omega+1}$, $\omega \in W$ y $\leq_\Psi$ es el preorden asociado a un estado epistémico Ψ por la asignación uno-gradual correspondiente al operador $\odot$.

Mirando la Tabla obtenemos que:

$f_\odot(1,1,1,1,1,1) = X$
$f_\odot(1,1,1,1,1,0) = X$
$f_\odot(1,1,1,1,0,1) = X$
$f_\odot(1,1,1,0,1,1) = 1$
$f_\odot(1,1,0,1,1,1) = 1$
$f_\odot(1,0,1,1,1,1) = X$
$f_\odot(0,1,1,1,1,1) = X$
$f_\odot(0,0,1,1,1,1) = X$
$f_\odot(0,1,0,1,1,1) = X$
$f_\odot(0,1,1,0,1,1) = X$
$f_\odot(0,1,1,1,0,1) = X$
$f_\odot(0,1,1,1,1,0) = X$
$f_\odot(1,0,0,1,1,1) = X$

$f_{\odot}(1,0,1,0,1,1) = X$
$f_{\odot}(1,0,1,1,0,1) = X$
$f_{\odot}(1,0,1,1,1,0) = X$
$f_{\odot}(1,1,0,0,1,1) = 1$
$f_{\odot}(1,1,0,1,0,1) = 0$
$f_{\odot}(1,1,0,1,1,0) = 1$
$f_{\odot}(1,1,1,0,0,1) = 0$
$f_{\odot}(1,1,1,0,1,0) = 1$
$f_{\odot}(1,1,1,1,0,0) = 1$
$f_{\odot}(0,0,0,1,1,1) = X$
$f_{\odot}(0,0,1,0,1,1) = X$
$f_{\odot}(0,0,1,1,0,1) = X$
$f_{\odot}(0,0,1,1,1,0) = X$
$f_{\odot}(0,1,0,0,1,1) = 1$
$f_{\odot}(0,1,0,1,0,1) = 1$
$f_{\odot}(0,1,0,1,1,0) = X$
$f_{\odot}(0,1,1,0,0,1) = X$
$f_{\odot}(0,1,1,0,1,0) = 1$
$f_{\odot}(0,1,1,1,0,0) = 0$
$f_{\odot}(1,0,0,0,1,1) = 1$
$f_{\odot}(1,0,0,1,0,1) = X$
$f_{\odot}(1,0,0,1,1,0) = 1$
$f_{\odot}(1,0,1,0,0,1) = 1$
$f_{\odot}(1,0,1,0,1,0) = X$
$f_{\odot}(1,0,1,1,0,0) = 1$
$f_{\odot}(1,1,0,0,0,1) = 0$
$f_{\odot}(1,1,0,0,1,0) = 1$
$f_{\odot}(1,1,0,1,0,0) = 1$
$f_{\odot}(1,1,1,0,0,0) = 1$
$f_{\odot}(0,0,0,0,1,1) = X$
$f_{\odot}(0,0,0,1,0,1) = X$
$f_{\odot}(0,0,0,1,1,0) = X$
$f_{\odot}(0,0,1,0,0,1) = X$
$f_{\odot}(0,0,1,0,1,0) = X$
$f_{\odot}(0,0,1,1,0,0) = X$
$f_{\odot}(0,1,0,0,0,1) = 1$
$f_{\odot}(0,1,0,0,1,0) = 1$
$f_{\odot}(0,1,0,1,0,0) = 0$

$f_{\odot}(0,1,1,0,0,0) = 0$
$f_{\odot}(1,0,0,0,0,1) = 1$
$f_{\odot}(1,0,0,0,1,0) = 1$
$f_{\odot}(1,0,0,1,0,0) = 1$
$f_{\odot}(1,0,1,0,0,0) = 1$
$f_{\odot}(1,1,0,0,0,0) = 1$
$f_{\odot}(0,0,0,0,0,1) = X$
$f_{\odot}(0,0,0,0,1,0) = X$
$f_{\odot}(0,0,0,1,0,0) = X$
$f_{\odot}(0,0,1,0,0,0) = X$
$f_{\odot}(0,1,0,0,0,0) = 0$
$f_{\odot}(1,0,0,0,0,0) = 1$
$f_{\odot}(0,0,0,0,0,0) = X$

Haciendo una inspección extensiva, vemos que el preorden total $\leq_{\Psi\odot\alpha}$ está totalmente determinado por la definición de $f_{\odot}$ y la trasitividad de la igualdad (Notemos que la función toma valor X en las situaciones imposibles). Lo cual quiere decir que la asignación uno-gradual asociada al operador $\odot$ es modular, luego, el operado de uno-mejoramiento es un operador modular.

Analogamente, observando la tabla y calculando los valores que toma la función booleana $f_{\oslash} : \{0,1\}^6 \longmapsto \{0,1\}$ definida como:

$f_{\oslash}(\omega' \leq_{\Psi} \omega'', \omega'' \leq_{\Psi} \omega', [\![\alpha]\!] \cap N_{\omega} = \emptyset, [\![\alpha]\!] \cap N_{\omega+1} = \emptyset, \omega' \in [\![\alpha]\!], \omega'' \in [\![\alpha]\!]) = \omega' \leq_{\Psi\oslash\alpha} \omega''$.

donde, $\omega', \omega'' \in N_{\omega} \cup N_{\omega+1}$, $\omega \in W$ y $\leq_{\Psi}$ es el preorden asociado a un estado epistémico Ψ por la asignación medio-gradual correspondiente al operador $\oslash$.

$f_{\odot}(1,1,1,1,1,1) = X$
$f_{\odot}(1,1,1,1,1,0) = X$
$f_{\odot}(1,1,1,1,0,1) = X$
$f_{\odot}(1,1,1,0,1,1) = 1$
$f_{\odot}(1,1,0,1,1,1) = 1$
$f_{\odot}(1,0,1,1,1,1) = X$
$f_{\odot}(0,1,1,1,1,1) = X$
$f_{\odot}(0,0,1,1,1,1) = X$
$f_{\odot}(0,1,0,1,1,1) = X$
$f_{\odot}(0,1,1,0,1,1) = X$
$f_{\odot}(0,1,1,1,0,1) = X$

$f_\odot(0,1,1,1,1,0) = X$
$f_\odot(1,0,0,1,1,1) = X$
$f_\odot(1,0,1,0,1,1) = X$
$f_\odot(1,0,1,1,0,1) = X$
$f_\odot(1,0,1,1,1,0) = X$
$f_\odot(1,1,0,0,1,1) = 1$
$f_\odot(1,1,0,1,0,1) = 0$
$f_\odot(1,1,0,1,1,0) = 1$
$f_\odot(1,1,1,0,0,1) = 0$
$f_\odot(1,1,1,0,1,0) = 1$
$f_\odot(1,1,1,1,0,0) = 1$
$f_\odot(0,0,0,1,1,1) = X$
$f_\odot(0,0,1,0,1,1) = X$
$f_\odot(0,0,1,1,0,1) = X$
$f_\odot(0,0,1,1,1,0) = X$
$f_\odot(0,1,0,0,1,1) = 1$
$f_\odot(0,1,0,1,0,1) = 1$
$f_\odot(0,1,0,1,1,0) = X$
$f_\odot(0,1,1,0,0,1) = X$
$f_\odot(0,1,1,0,1,0) = 1$
$f_\odot(0,1,1,1,0,0) = 0$
$f_\odot(1,0,0,0,1,1) = 1$
$f_\odot(1,0,0,1,0,1) = X$
$f_\odot(1,0,0,1,1,0) = 1$
$f_\odot(1,0,1,0,0,1) = 1$
$f_\odot(1,0,1,0,1,0) = X$
$f_\odot(1,0,1,1,0,0) = 1$
$f_\odot(1,1,0,0,0,1) = 0$
$f_\odot(1,1,0,0,1,0) = 1$
$f_\odot(1,1,0,1,0,0) = 1$
$f_\odot(1,1,1,0,0,0) = 1$
$f_\odot(0,0,0,0,1,1) = X$
$f_\odot(0,0,0,1,0,1) = X$
$f_\odot(0,0,0,1,1,0) = X$
$f_\odot(0,0,1,0,0,1) = X$
$f_\odot(0,0,1,0,1,0) = X$
$f_\odot(0,0,1,1,0,0) = X$
$f_\odot(0,1,0,0,0,1) = 1$

$f_{\odot}(0,1,0,0,1,0) = 1$
$f_{\odot}(0,1,0,1,0,0) = 0$
$f_{\odot}(0,1,1,0,0,0) = 0$
$f_{\odot}(1,0,0,0,0,1) = 1$
$f_{\odot}(1,0,0,0,1,0) = 1$
$f_{\odot}(1,0,0,1,0,0) = 1$
$f_{\odot}(1,0,1,0,0,0) = 1$
$f_{\odot}(1,1,0,0,0,0) = 1$
$f_{\odot}(0,0,0,0,0,1) = X$
$f_{\odot}(0,0,0,0,1,0) = X$
$f_{\odot}(0,0,0,1,0,0) = X$
$f_{\odot}(0,0,1,0,0,0) = X$
$f_{\odot}(0,1,0,0,0,0) = 0$
$f_{\odot}(1,0,0,0,0,0) = 1$
$f_{\odot}(0,0,0,0,0,0) = X$

Obtenemos que el preorden total $\leq_{\Psi\oslash\alpha}$ está completamente definido por $f_{\oslash}$ y la transitividad de la igualdad lo que quiere decir que el operador de medio-mejoramiento es un operador modular.

Por otra parte, observando cuidadosamente la tabla nos damos cuenta que en las columnas 2 y 3 encontramos todos los comportamiento posibles de un operador suave y modular en cada una de las situaciones que refleja la columna uno. Luego, los operadores de uno-mejoramiento y medio-mejoramiento, son los único operadores de mejoramiento suave y modular.

3.5. Mejor Mejoramiento Suave

Ya sabiendo que la clase de los operadores de mejoramiento suave y modular está compuesta por exactamente el operador de uno-mejoramiento y el operador de medio-mejoramiento, Pino y Konieczny definieron un operador de mejoramiento suave que no satisface la propiedad de modularidad.

Para poder representar este operador introdujeron el concepto de fórmulas separadas en un estado epistémico.

Definición 3.16 *μ es separada in Ψ sii $\forall\beta(B(\Psi \star \beta) \vdash \mu$ ó $B(\Psi \star \beta) \vdash \neg\mu)$.*

La separación de una fórmula en un estado espitémico significa que de la revisión (y de cada mejoramiento) de este estado epistémico por cualquier nueva información siempre resultarán estados epistémicos que están informados sobre esta fórmula (i.e la fórmula o su negación podrán ser inferidos).

Definición 3.17 *Un operador de mejoramiento suave que satisface los siguientes dos postulados es llamado un operador de mejor mejoramiento*

(B1) *Si μ es separado en Ψ, $B(\Psi\star\alpha)\vdash\neg\mu$ y $\alpha \not\ll_{\Psi} \alpha\wedge\mu$, entonces $B((\Psi\circ\mu)\star\alpha)\nvdash\neg\mu$*

(B2) *Si μ no es separado en Ψ y $B(\Psi\star\alpha)\vdash\neg\mu$, entonces $B((\Psi\circ\mu)\star\alpha)\vdash\neg\mu$*

El postulado (B1) se asemeja a los postulados (H1) e (I11), sin embargo, este se cumple sólo cuando la fórmula es separada en el estado epistémico.

El postulado (B2) establece que cuando la fórmula no es separada en el estado epistémico (que es el caso más común) el cambio es el mismo que ocurre con el postulado (H2).

Pino y Konieczny dieron las contrapartes semánticas de estos postulados y definieron a la asignaciones mejor-graduales.

Definición 3.18 *μ es s-separado en $\leq_{\Psi}$ sii $\nexists\omega_1\models\mu$, $\omega_2\models\neg\mu$ tales que $\omega_1\simeq_{\Psi}\omega_2$.*

Definición 3.19 *Sea $\circ$ un operador de mejoramiento suave y $\Psi\mapsto\leq_{\Psi}$ su correspondiente asignación gradualmente suave. La asignación será llamada una asignación mejor-gradual si satisface las siguientes propiedades*

(SB1) *Si μ es s-separado en $\leq_{\Psi}$, $\omega\models\mu$, $\omega'\models\neg\mu$ y $\omega'\ll_{\Psi}\omega$, entonces $\omega\leq_{\Psi\circ\mu}\omega'$.*

(SB2) *Si μ no es s-separado en $\leq$, $\omega\models\mu$, $\omega'\models\neg\mu$ y $\omega'<_{\Psi}\omega$, entonces $\omega'<_{\Psi\circ\mu}\omega$.*

Lema 3.2 *Sea $\circ$ un operador de mejoramiento débil. Entonces, μ es separado en Ψ sii es s-separado en $\leq_{\Psi}$.*

Demostración: Supongamos que μ es s-separado en $\leq_{\Psi}$. Supongamos por reducción al absurdo que μ no es separado en $\leq_{\Psi}$. Así, podemos encontrar una fórmula β tal que $B(\Psi\star\beta)\nvdash\mu$ and $B(\Psi\star\beta)\nvdash\neg\mu$, esto es, existen modelos $\omega_1,\omega_2\in[[B(\Psi\star\beta)]]$ tales que $\omega_1\in[[\mu]]$ and $\omega_2\in[[\neg\mu]]$. Pero el hecho de que $\omega_1,\omega_2\in[[B(\Psi\star\beta)]]$ implica, por el teorema 3.6 que $\omega_1 \simeq_\Psi \omega_2$, lo que contradice nuestra hipótesis.

De manera contraria, supongamos que μ es separado en $\leq_\Psi$. Supongamos por reducción al absurdo que μ no es s-separado en $\leq_\Psi$. Entonces, podemos conseguir modelos ω_1, ω_2 tales que $\omega_2 \models \neg\mu$ y $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_1 \simeq_\Psi \omega_2$. Pongamos $\beta = \varphi_{\omega_1,\omega_2}$. Por la hipótesis, $\text{mín}([[\beta]], \leq_\Psi) = \{\omega_1, \omega_2\}$. Así, por el Teorema 3.6, $B(\Psi \star \beta) \not\vdash \mu$ y $B(\Psi \star \beta) \not\vdash \neg\mu$ contradiciendo la separabilidad de μ en $\leq_\Psi$. ∎

De esta manera estamos en condiciones de enunciar un teorema de representación para los operadores de mejor mejoramiento.

Teorema 3.14 *Un operador de cambio $\circ$ es un mejor mejoramiento si, y sólo si, existe una mejor asignación gradual tal que*

$$[[B(\Psi \star \alpha)]] = min([[\alpha]], \leq_\Psi)$$

Demostración: ($\Rightarrow$) Sea $\circ$ un operador de mejor-mejoramiento, *i.e.* un operador de mejoramiento suave que satisface (B1) y (B2). Queremos demostrar que $\circ$ y su respectiva asignación gradual suave satisfacen las condiciones (SB1) and (SB2).

(SB1): Sea $\omega \in [[\mu]]$, $\omega' \in [[\neg\mu]]$ tal que $\omega' \ll_\Psi \omega$. Además, supongamos que μ es s-separado en Ψ. Queremos mostrar que $\omega \leq_\Psi \omega'$. Consideremos $\alpha = \varphi_{\omega,\omega'}$. Como $\omega' <_\Psi \omega$, $\text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi) = \{\omega'\}$. Así, por el teorema 3.6, $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Como $\alpha \wedge \mu \not\vdash \perp$, y $\{\omega\} = \text{mín}([[\alpha \wedge \mu]], \leq_\Psi)$, por el Corolario 3.3, $\alpha \prec\!\!\prec_\Psi \alpha \wedge \mu$. Más aún, por el Lema 3.2, μ es separado en Ψ. De esta manera las hipótesis de (B1) se cumplen y podemos concluir que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \not\vdash \neg\mu$. Luego, por el Teorema 3.6 obtenemos que $\text{mín}([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu}) \not\subseteq \neg\mu$, *i.e.* $\omega \leq_{\Psi\circ\mu} \omega'$.

(SB2): Supongamos que μ es no s-separado en Ψ. Además, supongamos que $\omega \models \mu, \omega' \models \neg\mu$ y $\omega' <_\Psi \omega$. Queremos mostrar que $\omega' <_{\Psi\circ\mu} \omega$. Consideremos $\alpha = \varphi_{\omega,\omega'}$. Como $\omega' <_\Psi \omega$, se tiene que $\text{mín}([[\alpha]], \leq_\Psi) = \{\omega'\}$. Así, por el Teorema 3.6, $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Por el Lema 3.2, tenemos que μ no es separado en Ψ. Entonces, por (B2), $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Así, por el Teorema 3.6, $\omega \notin \text{mín}([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu})$, y como por (I3) sabemos que $\text{mín}([[\alpha]], \leq_{\Psi\circ\mu}) \neq \emptyset$, concluimos que $\omega' <_{\Psi\circ\mu} \omega$.

($\Leftarrow$) Por el Teorema 3.6 sabemos que $\circ$ es un operador de mejoramiento suave. Nos queda demostrar que $\circ$ satisface (B1) y (B2).

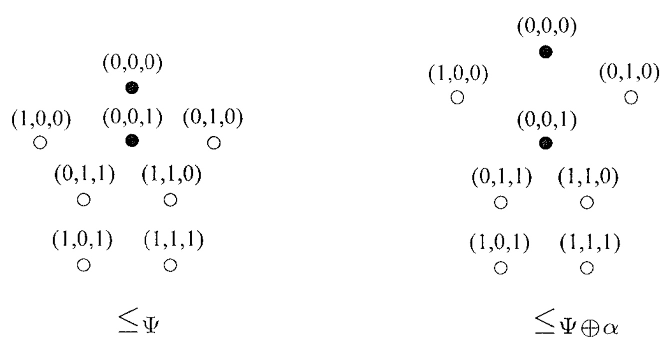
(B1) Supongamos que μ es separado en Ψ, que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$ y que $\alpha \not\ll_{\Psi} \alpha \wedge \mu$. Queremos mostrar que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \not\vdash \neg\mu$.
Sea $\omega \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi})$. Por el Teorema 3.6, $\omega \models \neg\mu$. Por hipótesis y el Corolario 3.3, existe $\omega' \in [\![\alpha \wedge \mu]\!]$ tal que $\omega \ll_{\Psi} \omega'$. Entonces, por (SB1), $\omega' \leq_{\Psi\circ\mu} \omega$.
De hecho, tenemos que $\omega' \simeq_{\Psi\circ\mu} \omega$. Notemos que después de un mejoramiento suave por μ los elementos minimales de $[\![(]\!]\alpha)$ respecto a $\leq_{\Psi\circ\mu}$ están en el nivel de ω. Por lo tanto, $\omega' \in \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi\circ\mu})$. Luego, por el Teorema 3.6, $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \not\vdash \neg\mu$.

(B2) Supongamos que μ no es separado en Ψ y $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Queremos ver que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Por reducción al absurdo supongamos que existe $\omega' \in [\![B((\Psi \circ \mu) \star \alpha)]\!] \cap [\![\mu]\!]$. De la hipótesis y el Teorema 3.6, $\text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi}) \subseteq [\![\neg\mu]\!]$. Así $\omega' \notin \text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi})$. Sea ω un modelos en $\text{mín}([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi})$. Entonces, $\omega <_{\Psi} \omega'$. Como, por el Lema 3.2, μ no es separado en $\leq_{\Psi}$, por (SB2) tenemos que $\omega <_{\Psi\circ\mu} \omega'$ lo que contradice la minimalidad de $\omega' \in [\![\alpha]\!]$ respecto a $\leq_{\Psi\circ\mu}$. ∎

Así como lo hicieramos para los operadores de uno-mejoramiento y medio-mejoramiento, se demostró que existe un único operador de mejor mejoramiento.

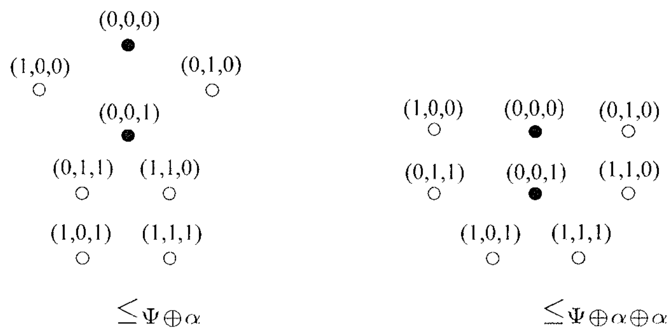
Proposición 3.5 *Una vez que el preorden asociado al primer estado epistémico es fijado, existe un único mejor mejoramiento. Denotamos a este operador con* $\oplus$.

Ejemplo 3.15 *Considerando* p, q, r, α, Ψ *y* $\leq_{\Psi}$ *como en el ejemplo 3.7 tenemos que si aplicando el operador de mejor-mejoramiento sobre* Ψ *a la luz de* α *obtendremos que el preorden total* $\leq_{\Psi\oplus\alpha}$ *asociado a* $\Psi \oplus \alpha$ *luce de la siguiente manera:*



Podemos observar que como α *no es una fórmula separada en* Ψ *el operador de mejor-mejoramiento mejora un poco la plausibilidad de sólo los modelos de la nueva información* α *que comparten nivel con no modelos. Si volviésemos a aplicar el operador de mejor-mejoramiento ahora sobre el nuevo estado epistémico* $\Psi \oplus \alpha$

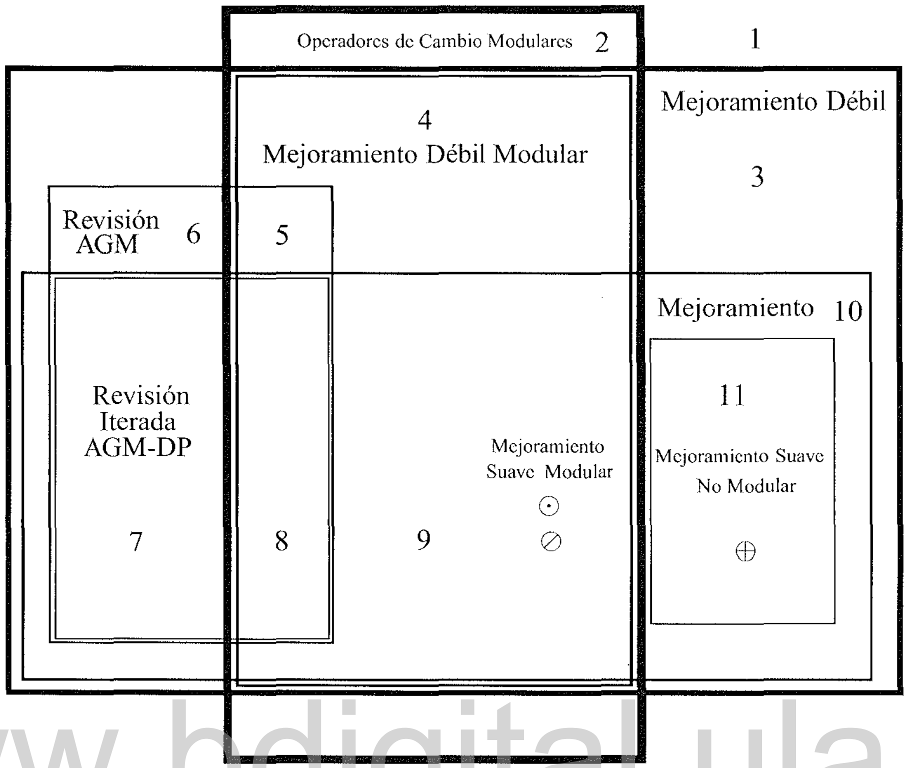
obtendríamos que el preorden $\leq_{\Psi \oplus \alpha \oplus \alpha}$ *asociado al estado epistémico resultante* $\Psi \oplus \alpha \oplus \alpha$ *luce de la siguiente forma:*



Por lo tanto, si el operador de mejor-mejoramiento es aplicado sobre un estado epistémico a luz de una fórmula separada en dicho estado epistémico, en este caso α, *tenemos que los modelos de* α *mejoran exactamente un nivel en plausibilidad respecto al preorden asociado al estado epistémico anterior (note que en este caso el operador de mejor-mejoramiento se comporta de manera modular).*

3.6. Mapa de los operadores de mejoramiento

La figura a continuación, muestra un mapa de todos los operadores de cambio conocidos hasta ahora. Cada región está enumerada por un número natural, y daremos un ejemplo de operador en cada una de estas regiones.



Para cada uno de los ejemplos a continuación representaremos a los estados epistémicos como preordenes totales tales que las creecias de los estados epistémicos serán los elementos minimales del preorden total respectivo que los representa.

(Región 1) Operador de cambio no modular que no es de mejoramiento débil.

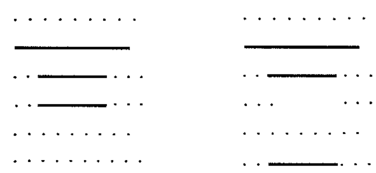
Ejemplo: Sea $\circ$ un operador de cambio tal que para cada estado epistémico $\leq_\Psi$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $max(\leq_{\Psi\circ\alpha}) = min([[\alpha]], \leq_\Psi)$.

(ii) Si $\omega, \omega' \notin min([[\alpha]], \leq_\Psi)$ entonces, $\omega \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_\Psi \omega'$.

Dicho en palabras este operador se comporta como la Revisión Natural al revés(Ver Teorema 2.3), es decir, los minimales de la nueva información no bajan a ser lo minimales del estado epistemico después de la revisión sino

que suben a ser los maximales. Y el resto del estado epistémico se mantiene inmóvil.
Este operador claramente no satisface la propiedad (I1) *i.e.* no es de mejoramiento débil y también es claro que este operador tampoco es modular.



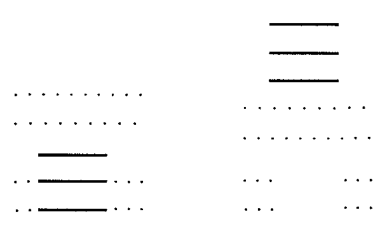
$\leq_\Psi$ $\leq_{\Psi\circ\alpha}$

(Región 2) Operador de cambio modular que no es de mejoramiento débil.

Ejemplo: Sea $\circ$ un operador de cambio tal que para cada estado epistémico $\leq_\Psi$ se satiface las siguientes condiciones:

(i) Si $\omega \models \alpha$ y $\omega' \models \neg\alpha$, entonces $\omega' <_{\Psi\circ\alpha} \omega$.
(ii) Si $\omega, \omega' \in [[\alpha]]$ entonces, $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega'$
(iii) Si $\omega, \omega' \in [[\neg\alpha]]$ entonces, $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega'$

Dicho en palabras el operador $\circ$ se comporta como la Revisión Lexicográfica al revés (Ver Teorema 2.5), es decir, los modelos de la nueva información suben en bloque por encima de los no modelos después de la operación.
Este operador es modular (por el mismo argumento que la revisión lexicográfica es modular) y claramente no puede satisfacer el postulado (I1) *i.e.* $\circ$ no es de mejoramiento débil.



$\leq_\Psi$ $\leq_{\Psi\circ\alpha}$

(Región 3) Operador de mejoramiento débil no modular que no es de revisión y no es de mejoramiento.

Ejemplo: Sea $\circ$ un operador de cambio tal que para cada estado epistémico $\leq_\Psi$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Si para todo $\omega' \in [\![\neg\alpha]\!]$ se tiene que $\{\omega \in min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) : \omega' \simeq_\Psi \omega\} = \emptyset$, entonces, $\omega_1 \simeq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$ si $\omega_2 \ll_\Psi \omega_1$, $\omega_1 \in min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$ y $\omega_2 \in [\![\neg\alpha]\!]$.

(ii) Si $\{\omega \in min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) : \omega' \simeq_\Psi \omega\} \neq \emptyset$ para algún $\omega' \in [\![\neg\alpha]\!]$ entonces, $\omega_1 \ll_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$ si $\omega_1 \in min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$ y $\omega_2 \simeq_\Psi \omega_1$.

(iii) Para todo $\omega, \omega' \in [\![\alpha]\!] \backslash min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$. Si $\omega \leq_\Psi \omega' \Rightarrow \omega' \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega$.

(iv) Para todo $\omega, \omega' \in [\![\neg\alpha]\!]$ entonces, $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega'$.

Dicho en palabras el operador $\circ$ mejora lo menos posible la plausibilidad de los modelos minimales de la nueva inforación, invierte el orden de los modelos de la nueva información que no son minimales y lo demás lo deja igual.
Este operador claramente no es modular y satisface (I1), no es de revisión y no satisface el postulado (I7), es decir, no hay rigidez en los modelos de la nueva información, por lo tanto, no es un operador de mejoramiento.

$\leq_\Psi$ $\qquad$ $\leq_{\Psi\circ\alpha}$

(Región 4) Operador de mejoramiento débil modular que no es de revisión y no es de mejoramiento.

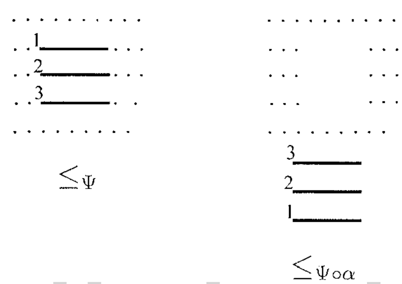
Ejemplo: Sea $\circ$ un operador de cambio tal que para cada estado epistémico $\leq_\Psi$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Si $\omega \models \alpha$ y $\omega' \models \neg\alpha$, entonces $\omega <_{\Psi\circ\alpha} \omega'$.

(ii) Si $\omega_1, \omega_2 \in [\![\alpha]\!]$ y $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ entonces $\omega_2 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_1$.

(iii) Si $\omega_1, \omega_2 \in [\![\neg\alpha]\!]$ entonces, $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

Dicho en palabras el opeador $\circ$ se comporta como la Revisión Lexicográfica salvo que invierte el orden entre los modelos de la nueva información después de la iteración. De esta manera los modelos minimales de la nueva información en el estado epistémico inicial no son las creencias del estado epistémico resultante ya que pasan a ser los modelos maximales entre los modelos de la nueva información en el estado epistémico resultante. Por lo tanto $\circ$ no es de revisión y claramente $\circ$ tampoco es de mejoramiento ya que no existe rigidez entre los modelos de la nueva información *i.e.* (I7) no se satisface. Sin embargo, claramente el postulado (I1) se satisface y además es modular por la naturaleza lexicográfica del operador.



(Región 5) Operador de mejoramiento débil modular y de revisión AGM que no es de mejoramiento.

Ejemplo: Sea $\circ$ un operador de cambio tal que para cada estado epistémico $\leq_\Psi$ se satisfacen las siguientes condiciones:

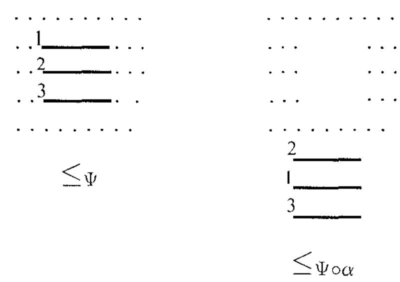
(i) Si $\omega \models \alpha$ y $\omega' \models \neg\alpha$, entonces $\omega <_{\Psi\circ\alpha} \omega'$.

(ii) Si $\omega, \omega' \in [[\alpha]] \backslash min([[\alpha]], \leq_\Psi)$ y $\omega \leq_\Psi \omega'$ entonces, $\omega' \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega$.

(iii) Si $\omega, \omega' \in min([[\alpha]], \leq_\Psi)$ entonces $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega'$.

(iv) Para todo $\omega, \omega' \in [[\neg\alpha]]$ entonces, $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega'$.

Dicho en palabras el operador $\circ$ se comporta como la revisión lexicográfica salvo que invierte el orden en los modelos de la nueva información en el estado epistémico resultante que no son minimales en el estado epistémico inicial. De esta manera el operador es claramente de revisión AGM y por lo tanto de mejoramiento débil, es modular por su naturaleza lexicográfica y no es de mejoramiento porque claramente no satisface (I7).



(Región 6) Operador de mejoramiento débil y de revisión AGM que no es modular y no es de mejoramiento.

Ejemplo: La revisión natural es un operador de revisión AGM (y por lo tanto de mejoramiento débil) que no es modular y que no satisface la condición (I9), ya que para el caso de un estado epistémico $\leq_\Psi$ donde modelos y no modelos compartan nivel puede pasar que después de la revisión la relación entre estos se mantenga igual (Ver figura del Teorema 2.3).

(Región 7) Operador de mejoramiento y de revisión iterada DP que no es modular.

Ejemplo: La revisión restringida es un operador de revisión iterada DP que satisface (I7), (I8) e (I9) (Ver Definición 2.9) *i.e.* es un operador de mejoramiento. Y claramente no es modular.

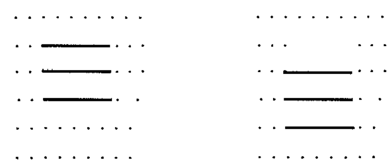
(Región 8) Operador de mejoramiento modular y de revisión AGM.

Ejemplo: La revisión Lexicográfica es un operador de revisión AGM que satisface (I7), (I8) e (I9) *i.e.* de mejoramiento y sabemos que es un operador de cambio modular (Ver Ejemplo 2.3).

(Región 9) Operador de mejoramiento Suave y modular que no es de revisión.

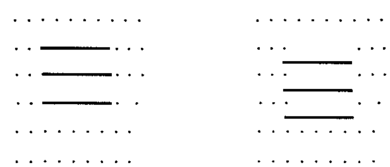
Ejemplo: Los operador de uno-mejoramiento y medio-mejoramiento son operadores de mejoramiento suaves y modulares que no son de revisión.

Uno-mejoramiento



$\leq_{\Psi}$ $\leq_{\Psi\odot\alpha}$

Medio-mejoramiento



$\leq_{\Psi}$ $\leq_{\Psi\oslash\alpha}$

(Región 10) Operador de mejoramiento que no es suave, no es modular y no es de revisión.

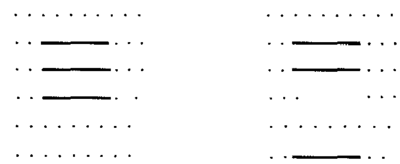
Ejemplo: Sea $\circ$ un operador de cambio tal que para cada estado epistémico $\leq_{\Psi}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\omega <_{\Psi\circ\alpha} \omega'$ si $\omega_2 \ll_{\Psi} \omega_1$, $\omega \in min([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi})$ y $\omega' \in [\![\neg\alpha]\!]$.

(ii) Si $\omega, \omega' \in [\![\alpha]\!]$ entonces, $\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

(iii) Si $\omega, \omega' \in [\![\neg\alpha]\!]$ entonces, $\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

Dicho en palabras, el operador $\circ$ mejora estrictamente a los modelos minimales de la nueva información respecto a los no modelos inmediatamente por debajo y deja igual el resto del preorden. Este operador claramente no es de revisión. Claramente satisface (I1) *i.e.* es de mejoramiento, no es modular y no satisface el postulado (I10) ya que los modelos minimales mejoran más de un nivel, por lo tanto no es un operador de mejoramiento suave.



$\leq_{\Psi}$ $\leq_{\Psi \circ \alpha}$

(Región 11) Operador de mejoramiento suave no modular que no es de revisión.

Ejemplo: El operador de mejor-mejoramiento es un operador de mejoramiento suave que no es modular y que no es de revisión (Ver Ejemplo 3.15).

Capítulo 4

Minimalidad

En el capítulo 1 vimos que uno de los principios fundamentales de los operadores de revisión en marco el AGM es el del cambio minimal, el cual se refiere, a *grosso modo*, a minimizar los cambios entre los conjuntos de fórmulas que representan los conjuntos de creencias antes y después de la revisión. Sin embargo, existen otras interpretaciones para el cambio minimal. Los operadores de cambio definidos por Pino y Konieczny (def 3.1) en donde el perfil de un agente está representado por un estado epistémico Ψ (Revisión DP, Revisión DP-BM, Mejoramiento) también están fundamentados en el cambio minimal y esta traslación de conjuntos de creencias a estados espistémicos acepta que el cambio minimal pueda pensarse en términos de la menor cantidad posible de cambios sobre el preorden de plausibilidad asociado $\leq_\Psi$. Es decir, dado un estado epistémico Ψ y una nueva información μ, el cambio minimal en la revisión se logra haciendo a los preórdenes totales $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi\circ\mu}$ dados por la respectiva representación lo más similares posible.

Con ésta interpretación semántica del cambio minimal podemos saber, de manera intuitiva, con una mirada a las gráficas qué operador de cambio es más conservatido que otro. Por ejemplo, según la gráfica del operador de revisión natural pareciera ser el más conservativo entre todos los operadores de Darwiche-Pearl vistos hasta ahora. Lo contrario pasa si vemos la gráfica de la revisión lexicográfica: parece el operador menos conservativo de los operadores Darwiche-Pearl, mientras que las gráficas de los operadores de mejoramiento nos dicen claramente que el mejoramiento es en general mucho más conservativo que la revisión.

Pino y Konieczny mostraron que existe una medida muy natural para estudiar el cambio entre un preorden y otro. La distacia de Kemeny [7] entre el preorden inicial (el preorden asociado al estado epistémico inicial) y el preorden resultante luego de aplicar el operador de cambio.

Definición 4.1 *La Distancia de Kemeny es la función*

$$d_K : \textit{Preorden Total x Preorden Total} \longmapsto \mathbb{N}$$

definida como:

dados $\leq_1, \leq_2$ *dos preordenes totales,* $d_K(\leq_1, \leq_2)$ *es el cardinal de la diferencia simétrica de los preŕdenes, i.e. el número de elementos en* $\leq_1$ *que no están en* $\leq_2$ *más el número de elementos en* $\leq_2$ *que no están en* $\leq_1$*. En símbolos tenemos*

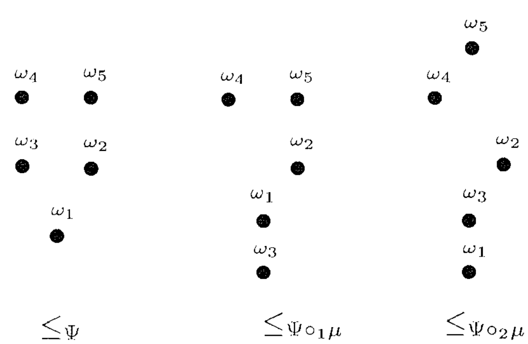
$$d_K(\leq_1, \leq_2) = |(\leq_1 \setminus \leq_2) \cup (\leq_2 \setminus \leq_1)|$$

Definición 4.2 *Sean* $\circ_1$ *y* $\circ_2$ *dos operadores de cambio. Decimos que* $\circ_1$ *produce menos cambio que* $\circ_2$ *si para cualquier estado epistémico* Ψ *y cualquier fórmula* μ*:*

$$d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\circ_1\mu}) \leq d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\circ_2\mu})$$

Veamos ejemplos de cómo funciona esta distancia sobre operadores de cambio:

Ejemplo 4.1 *Consideremos el conjunto de mundos* $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$*. Y considere dos operadores de cambio* $\circ_1$ *y* $\circ_2$*. Donde* $\circ_1$ *es el operador de Boutilier (Revisión Natural) y* $\circ_2$ *es un operador de mejoramiento débil que satisface la propiedad (I1) para un* $n > 1$*. Sea* Ψ *un estado epistémico con* $\leq_\Psi$ *su preorden total asociado por la asignación fuerte y fiel (ver figura más abajo). Sea* μ *una fórmula tal que* $[\![\mu]\!] = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$*. Suponga que los preórdenes* $\leq_{\Psi\circ_1\mu}$ *y* $\leq_{\Psi\circ_2\mu}$ *son los resultados de la revisión natural* $\circ_1$ *y el mejoramiento* $\circ_2$ *de* Ψ *por* μ *respectivamente.*



Viendo a los preórdenes como conjuntos de pares ordenados, tenemos que

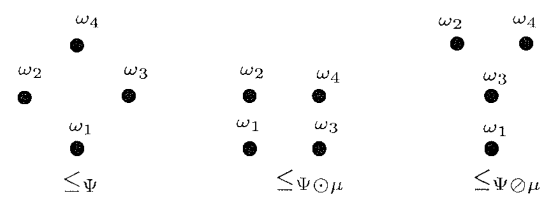
$$\begin{aligned}
\leq_\Psi = \ & \{(\omega_1,\omega_2),(\omega_1,\omega_3),(\omega_1,\omega_4),\\
& (\omega_1,\omega_5),(\omega_2,\omega_3),(\omega_2,\omega_4),(\omega_2,\omega_5),\\
& (\omega_3,\omega_2),(\omega_3,\omega_4),(\omega_3,\omega_5),(\omega_4,\omega_5),\\
& (\omega_5,\omega_4)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq_{\Psi\circ_1\mu} = \ & \{(\omega_1,\omega_2),(\omega_1,\omega_4),(\omega_1,\omega_5),\\
& (\omega_2,\omega_4),(\omega_2,\omega_5),(\omega_3,\omega_1),(\omega_3,\omega_2),\\
& (\omega_3,\omega_4),(\omega_3,\omega_5),(\omega_4,\omega_5),(\omega_5,\omega_4)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq_{\Psi\circ_2\mu} = \ & \{(\omega_1,\omega_2),(\omega_1,\omega_3),(\omega_1,\omega_4),\\
& (\omega_1,\omega_5),(\omega_2,\omega_4),(\omega_2,\omega_5),(\omega_3,\omega_2),\\
& (\omega_3,\omega_4),(\omega_3,\omega_5),(\omega_4,\omega_5)\}
\end{aligned}$$

De esta manera tenemos que $d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\circ_1\mu}) = 3$ *y* $d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\circ_2\mu}) = 2$. *Por lo tanto, en este ejemplo, es decir, para este estado epistémico* Ψ *el operador de mejoramiento débil* $\circ_1$ *produce menos cambio que el operador de revisión natural de Boutilier.*

Ejemplo 4.2 *Considere el conjunto de mundos* $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. *Sea* Ψ *un estado epistémico donde* $\leq_\Psi$ *es su respectivo preorden dado por la asignación gradual (ver la figura más abajo). Sea* μ *una fórmula tal que* $[\![\mu]\!] = \{\omega_3, \omega_4\}$. *Analizaremos los preordenes* $\leq_{\Psi\odot\mu}$ *y* $\leq_{\Psi\oslash\mu}$ *respectivos a los estados epistémicos resultantes* $\Psi \odot \mu$ *y* $\Psi \oslash \mu$ *del uno-mejoramiento y el medio-mejoramiento de* Ψ *por* μ *respectivamente.*



Viendo a los elementos de los preórdenes como pares ordenados, tenemos que:

$$\leq_\Psi = \{(\omega_1,\omega_2),(\omega_1,\omega_3),(\omega_1,\omega_4),(\omega_2,\omega_3),(\omega_2,\omega_4),(\omega_3,\omega_2),(\omega_3,\omega_4)\}$$

$$\leq_{\Psi\odot\mu} = \{(\omega_1,\omega_2),(\omega_1,\omega_3),(\omega_1,\omega_4),(\omega_2,\omega_4),(\omega_4,\omega_2),(\omega_3,\omega_1),(\omega_3,\omega_2),(\omega_3,\omega_4)\}$$

$$\leq_{\Psi\oslash\mu} = \{(\omega_1,\omega_2),(\omega_1,\omega_3),(\omega_1,\omega_4),(\omega_2,\omega_4),(\omega_4,\omega_2),(\omega_3,\omega_2),(\omega_3,\omega_4)\}$$

De esta manera tenemos que $d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\odot\mu}) = 3$ y $d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\oslash\mu}) = 2$. Por lo tanto, en este ejemplo, es decir, para este estado epistémico Ψ el operador $\oslash$ produce menos cambio que el operador $\odot$.

Pino y Konieczny demostraron que para cualquiera que sea el estado epistémico el operador de medio-mejoramiento produce menos cambio que el operador de uno mejoramiento.

Proposición 4.1 *Sea Ψ un estado epistémico (un preorden total). Entonces para toda fórmula μ,*

$$d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\oslash\mu}) \leq d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\odot\mu})$$

Demostración: La idea para demostrar las proposiciones 4.1 y 4.2, viene de analizar el número de elementos en la diferencia simétrica entre el estado epistémico viejo y el estado epistémico nuevo: cada unidad en $d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\circ\mu})$ está originada por dos operaciones: *creación* y *destrucción*. La *creación* corresponde al hecho de que exista una nueva pareja en $\leq_{\Psi\circ\mu}$ que no está en $\leq_\Psi$; la *destrucción* corresponde al hecho de que había un pareja en $\leq_\Psi$ que no está $\leq_{\Psi\circ\mu}$.
Más precisamente, diremos que la pareja (ω, ω') es creada por un operator $\circ$ (en el contexto $\leq_\Psi$, μ) si $\omega \leq_{\Psi\circ\mu} \omega'$ y $\omega \not\leq_\Psi \omega'$.
Diremos que la pareja (ω, ω') es destruida por un operador $\circ$ (en el contexto $\leq_\Psi$, μ) si $\omega \not\leq_{\Psi\circ\mu} \omega'$ y $\omega \leq_\Psi \omega'$.
El siguiente resultado, cuya demostración es directa, resume esta discusión:

Lema 4.1 *$d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\circ\mu})$ es el número de parejas creadas más el número de parejas destruidas.*

Ahora tenemos las herramientas para establecer los resultados claves que nos permitirán demostrar las proposiciones 4.1 and 4.2.

Lema 4.2 *Consideremos el contexto $\leq_\Psi$ y μ. Entonces,*
(i) Cada pareja creada por $\oslash$ es también creada por $\odot$.
(ii) Cada pareja destruida por $\oslash$ es también destruida por $\odot$.

Demostración:
Primero demostraremos la parte (i). Supongamos que la pareja (ω, ω') ha sido creada por $\oslash$, esto es $\omega \leq_{\Psi\oslash\mu} \omega'$ y $\omega \not\leq_\Psi \omega'$. Entonces, por la totalidad de $\leq_\Psi$, $\omega' <_\Psi \omega$. Necesariamente, $\omega \in [[\mu]]$, $\omega' \notin [[\mu]]$ y $\omega' \ll_\Psi \omega$. Por lo tanto, $\omega \leq_{\Psi\odot\mu} \omega'$, *i.e.* la pareja (ω, ω') ha sido también creada por $\odot$.

Ahora probaremos la parte (ii). Supongamos que la pareja (ω, ω') ha sido destruida por $\oslash$, esto es $\omega \not\leq_{\Psi\oslash\mu} \omega'$ y $\omega \leq_\Psi \omega'$. Por la totalidad de $\leq_{\Psi\oslash\mu}$, tenemos que $\omega' <_{\Psi\oslash\mu} \omega$. Necesariamente, $\omega' \in [[\mu]]$, $\omega \notin [[\mu]]$ y $\omega' \simeq_\Psi \omega$. Así, por (S3), $\omega' <_{\Psi\odot\mu} \omega$. Por la totalidad de $\leq_{\Psi\odot\mu}$, $\omega \not\leq_{\Psi\odot\mu} \omega'$, *i.e.* la pareja (ω, ω') ha sido también destruida por $\odot$. ∎

Lema 4.3 *Consideremos el contexto $\leq_\Psi$ y μ. Entonces,*
(i) Cada pareja creada por $\oplus$ es también creada por $\oslash$.
(ii) Cada pareja destruida por $\oplus$ es también destruida por $\oslash$.

Demostración:
Probaremos primero la parte (i). Supongamos que la pareja (ω, ω') ha sido creada por $\oplus$, esto es, $\omega \leq_{\Psi\oplus\mu} \omega'$ y $\omega \not\leq_\Psi \omega'$. Entonces, por la totalidad de $\leq_\Psi$, $\omega' <_\Psi \omega$. Entonces, la única posibilidad de creación llega cuando $\omega' \ll_\Psi \omega$, $\omega \in [[\mu]]$, $\omega' \notin [[\mu]]$ y para cualesquiera modelos ω_1 y ω_2 tal que $\omega_1 \in [[\mu]]$ y $\omega_2 \notin [[\neg\mu]]$, tenemos que $\omega_1 \not\simeq_\Psi \omega_2$ (aplicación de SB1). En este caso, es claro que podemos aplicar (SH1) y obtener que $\omega \leq_{\Psi\oslash\mu} \omega'$, *i.e.* la pareja (ω, ω') también ha sido creada por $\oslash$.
Probaremos ahora la parte (ii). Supongamos que la pareja (ω, ω') han sido destruidas por $\oplus$, esto es, $\omega \not\leq_{\Psi\oplus\mu} \omega'$ y $\omega \leq_\Psi \omega'$. Por la totalidad de $\leq_{\Psi\oplus\mu}$, tenemos que $\omega' <_{\Psi\oslash\mu} \omega$. Necesariamente, $\omega' \in [[\mu]]$, $\omega \notin [[\mu]]$ y $\omega' \simeq_\Psi \omega$. Así, por (S3), $\omega' <_{\Psi\oslash\mu} \omega$. Por la totalidad de $\leq_{\Psi\oslash\mu}$, $\omega \not\leq_{\Psi\oslash\mu} \omega'$, *i.e.* la pareja (ω, ω') ha sido también destruida por $\oslash$. ∎

La proposición 4.1 se obtiene directamente de los Lemas 4.1 y 4.2. ∎

De la proposición 4.1 y el teorema 3.10 obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.1 *El operador de medio mejoramiento es el operador minimal dentro de la clase de operadores de mejoramiento suaves modulares.*

Proposición 4.2 *Sea Ψ un estado epistémico (un preorden total). Entonces para toda fórmula μ,*

$$d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\oplus\mu}) \leq d_K(\leq_\Psi, \leq_{\Psi\oslash\mu})$$

Esto es, el operador $\oplus$ produce menos cambio que el operador $\oslash$.

Demostración: Esta proposición se sigue directamente de los lemas 4.3 y 4.1. ∎

Como corolario de las proposiciones previas obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.3 *Entre los operadores $\odot$, $\oslash$ y $\oplus$, el operador $\oplus$ es el operador que produce cambio minimal.*

Capítulo 5

Operadores de Mejoramiento Básico

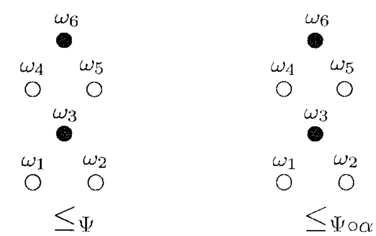
5.1. Definición y ejemplos

La familia de operadores de mejoramiento propuesta por Pino y Konieczny estudiada en el capítulo anterior apunta a mejorar la plausibilidad de la nueva información sin satisfacer el postulado de éxito AGM. Esto lo expresan mediante la noción de estados epistémicos y la representación semántica de los mismos mediante asignaciones (debilmente fiel, gradual, uno-gradual, etc). Vimos también en el capítulo anterior cómo se establecieron teoremas de representación para cada uno de los operadores de mejoramiento conocidos y además se dió una clasificación de los mismos.
Sin embargo, como vimos en el capítulo 2, Pino y Konieczny imponen una hipótesis muy fuerte sobre todos los operadores de cambio que consideran en su trabajo. Ellos asumen que todos los operadores de cambio satisfacen el postulado de éxito iterado (postulado (I1)), suposición que da cierta ambiguedad a los teoremas de representación propuestos, ya que efectivamente en ningún momento *representan* al postulado de éxito iterado (I1). De hecho, a continuación mostraremos un ejemplo que muestra cuan determinante es esta suposición para la validez del marco del mejoramiento de creencias.

Ejemplo 5.1 *En este ejemplo nos restringiremos a los estados epistémicos como preórdenes totales donde las creencias son los modelos minimales de dichos preórdenes.*

Supongamos que existe una asignación gradual (Ver definición 3.6) para un operador de cambio $\circ$ del cual no sabemos si satisface o no el postulado (I1).

Consideremos el estado epistémico $\leq_\Psi$ definido sobre $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ (Ver figura) y supongamos que $\alpha = \{\omega_3, \omega_6\}$. Podemos ver que α es separada en $\leq_\Psi$ en el sentido de la definición 3.18.
Supongamos que el preorden $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ dado por la asignación gradual de la hipótesis es exactamente el mismo estado epistémico $\leq_\Psi$ (Ver figura).



Notemos que el ejemplo 5.1 modela una situación de asignación gradual para el operador $\circ$ ya que no contradice ninguna de las propiedades de la definición. Sin embargo, es claro que este operador no va a satisfacer la propiedad (I1) ya que no importa cuántas veces iteremos (mejoremos) por α al estado epistémico inicial $\leq_\Psi$, será siempre el mismo, y por lo tanto, los modelos de α nunca alcanzarán el primer nivel de $\leq_\Psi$ para ningún número $n \in \mathbb{N}$ de iteraciones por α.

De esta manera, hemos demostrado que sin la suposición de que los operadores de cambio satisfacen (I1), la representación precisa de los operadores de mejoramiento, en el marco actual de Pino y Konieczny, no es posible.

Notemos que el ejemplo 5.1 muestra también que a pesar que su naturaleza drástica, el postulado (S3) de la asignación fiel que corresponde al postulado (P) de Booth y Meyer no es suficiente para garantizar el éxito iterado en el operador. Necesitamos entonces sustituir este postulado por otro que pida que la plausibilidad de la nueva información mejore mientras esta no esté en la creencias del agente. Ateniéndonos al cambio minimal, en lugar de pedir que necesariamente toda la nueva información incremente su plausibilidad después de un paso de mejoramiento, quisiéramos más bien un postulado expresando que *al menos* una parte de la nueva información incremente su plausibilidad en cada paso de mejoramiento.

De esta manera propondremos un postulado *básico* sin duda más fuerte que el postulado (S1) de la asignación gradual, ya que pide que en cualquiera de los casos en que haya algo por mejorar de la nueva información exista *una parte*, no importa cuan pequeña sea, que mejore en cada paso de mejoramiento, pero en ciertos casos un poco más débil ya que no pide que *toda* la nueva información que pueda mejorar mejore en cada iteración.

Sin embargo, veremos que para que el hecho de que en cada paso de mejoramiento "algo" mejora implique (I1), se debe también asegurar que nada desmejora, es decir, la nueva información no puede disminuir su plausibilidad en ningún paso de mejoramiento bajo ninguna circunstancia. Será entonces natural incluir dos nuevos postulados que equivalen a los postulados (CR3) y (CR4) del marco de la revisión DP, los cuales capturan perfectamenta la idea de que nada desmejora en la nueva información en cada paso de iteración.

A continuación mostraremos nuestra lista de postulados propuestos para definir una nueva clase de operadores que permitirán la representación total de los mejoramientos de creencias:

Definición 5.1 *Sea $\circ$ un operador de cambio. Este será llamado operador de mejoramiento básico si satisface los siguientes postulados:*

(BI1) *Existe n tal que* $B(\Psi \circ^n \alpha) \vdash \alpha$

(BI2) *Si* $B(\Psi) \wedge \alpha \nvdash \bot$, *entonces* $B(\Psi \star \alpha) \equiv B(\Psi) \wedge \alpha$

(BI3) *Si* $\alpha \nvdash \bot$, *entonces* $B(\Psi \star \alpha) \nvdash \bot$

(BI4) *Para todo entero positivo n si $\alpha_i \equiv \beta_i$ para todo $i \leq n$ y $\gamma \equiv \mu$ entonces*

$$B((\Psi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n) \star \gamma) \equiv B((\Psi \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_n) \star \mu)$$

(BI5) $B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta \vdash B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta))$

(BI6) *Si* $B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta \nvdash \bot$, *entonces* $B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta)) \equiv B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta$

(BI7) *Si* $\alpha \vdash \mu$ *entonces* $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \equiv B(\Psi \star \alpha)$

(BI8) *Si* $\alpha \vdash \neg\mu$ *entonces* $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \equiv B(\Psi \star \alpha)$

(BI9) *Si* $B(\Psi \circ \alpha) \vdash \mu$, *entonces* $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \mu$

(BI10) *Si* $B(\Psi \circ \alpha) \nvdash \neg\mu$, *entonces* $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \nvdash \neg\mu$

(I11) *Si existe β tal que β es consistente con α, β es consistente con $\neg\alpha$ y $B(\Psi \star \beta) \nvdash \alpha$, entonces al menos una de las siguientes condiciones se cumple:*

(a) $\exists\gamma$ *tal que* $B(\Psi \star \gamma)$ *es consistente con* α, $B(\Psi \star \gamma)$ *es consistente con* $\neg\alpha$ *y* $B((\Psi \circ \alpha) \star \gamma)$ *es inconsistente con* $\neg\alpha$ *pero consistente con* α

(b) $\exists\gamma$ *tal que* $B(\Psi \star \gamma) \vdash \neg\alpha$ *y* $B((\Psi \circ \alpha) \star \gamma)$ *es consistente con* α

La mayoría de estos postulados son los mismos postulados requeridos por Pino y Konieczny para un operador de mejoramiento, antes llamados (In) con n un número natural. Como estamos proponiendo este nuevo marco para operadores de mejoramiento básico, agregando nuevos postulados y quitando otros que estaban en el marco de operadores de mejoramiento preferimos denominar por (BIn) con n un número natural a estos nuevos postulados de mejoramiento básico. Explicaremos a continuación su correspondencia con los postulados ya conocidos y sus significados.

Los postulados (BI1), (BI2), (BI3), (BI4), (BI5), (BI6), (BI7), (BI8) son los exactamente los mismos postulados (I1)-(I8) satisfechos por los operadores de mejoramientos, fué necesario mantenerlos para la definición de los operadores de mejoramiento básico por sus buenas propiedades para representar la iteración del operador, heredados del marco AGM y el marco AGM-DP.
Los postulados (BI9) y (BI10) son los postulados correspondientes al hecho de que la nueva información no empeora después de la revisión y corresponden a los postulados (C3) y (C4) del marco AGM-DP. Estos postulados, como dijimos antes, son nuevos en el marco de la revisión de creecias y no habían sido considerados en trabajos previos sobre operadores de revisión porque estos son una consecuencia del postulado (I9) de ese marco (postulado (P) de AGM-DP).
El postulado (BI11) es nuevo. Este expresa el hecho de que al menos una parte de la nueva información mejora después de un mejoramiento siempre que haya algo por mejorar. La forma disjuntiva que tiene la conclusión de este postulado se debe a que corresponde a tipos posibles de mejoramiento. Cabe destacar que este postulado es, en cierta forma, más preciso que el postulado (I9) de los operadores de mejoramiento vistos en el capítulo 2.

La siguiente noción de asignación básica será la clave para comprender semánticamente el teorema de representación de operadores de mejoramiento básico.

Definición 5.2 *Una función* $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ *que envía cada estado espistémico* Ψ *a un preorden total* $\leq_\Psi$ *sobre los mundos se dice asignación básica si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:*

(BS1) *Si* $\omega \models B(\Psi)$ *y* $\omega' \models B(\Psi)$, *entonces* $\omega \simeq_\Psi \omega'$

(BS2) *Si* $\omega \models B(\Psi)$ *y* $\omega' \not\models B(\Psi)$*, entonces* $\omega <_\Psi \omega'$

(BS3) *Para cualquier entero positivo* n *si* $\alpha_i \equiv \beta_i$ *para todo* $i \leq n$*, entonces* $\leq_{\Psi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n} = \leq_{\Psi \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_n}$

(BS4) *Si* $\omega, \omega' \in [\![\mu]\!]$ *entonces* $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$

(BS5) *Si* $\omega, \omega' \in [\![\neg\mu]\!]$ *entonces* $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$

(BS6) *Si* $\omega \models \mu$ *y* $\omega' \models \neg\mu$ *entonces* $\omega <_\Psi \omega' \Rightarrow \omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$

(BS7) *Si* $\omega \models \mu$ *y* $\omega' \models \neg\mu$ *entonces* $\omega \leq_\Psi \omega' \Rightarrow \omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$

(BS8) *Si* $\omega \in [\![\mu]\!]$ *y* $\omega' \in [\![\neg\mu]\!]$ *y* $\omega' \leq_\Psi \omega$ *entonces al menos una de las siguientes condiciones se cumple:*

(i) $\exists \omega_1, \omega_2$ *tales que* $\omega_1 \models \mu$ $\omega_2 \models \neg\mu$, $\omega_1 \simeq_\Psi \omega_2$ *y* $\omega_1 <_{\Psi \circ \mu} \omega_2$

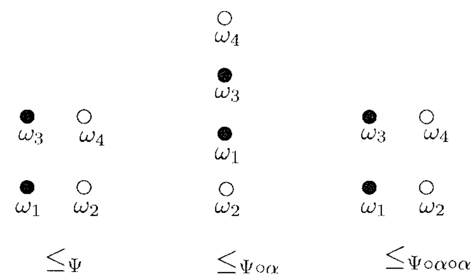
(ii) $\exists \omega_1, \omega_2$ *tales que* $\omega_1 \models \mu$ $\omega_2 \models \neg\mu$, $\omega_2 <_\Psi \omega_1$ *y* $\omega_1 \leq_{\Psi \circ \mu} \omega_2$

Las condiciones (BS1), (BS2), (BS3), (BS4), (BS5) son exactamente las mismas que las condiciones 1,2,3,(S1),(S2) que satisface las asignaciones graduales de los operadores de mejoramiento. Las condiciones (BS6) y (BS7) expresan que los modelos de μ no empeoran con respecto a los modelos de $\neg\mu$ luego del mejoramiento por α. Estas corresponden a las condiciones $(CR3)$ y $(CR4)$ del marco AGM-DP. Finalmente la condición (BS8) expresa el hecho básico para poder representar el postulado de éxito iterado que si existe la posibilidad de mejorar algún modelo de μ entonces exisitirá algun modelo que mejorará luego de la revisión por μ.

A continuación veremos un ejemplo que ilustra la necesidad que pedir que una asignación básica satisfaga con los postulados (BS6) y (BS7) para segurar el buen funcionamiento del postulado (BS8)

Ejemplo 5.2 *Nos restrigimos nuevamente a los estados epistémicos como preórdenes totales donde los minimales de dicho preordenes representan a las creencias de dichos estados epistémicos.*
Supongamos que para un operador de cambio $\circ$ *del cual no sabemos si satisface el postulado de éxito iterado, existe un asignación que satisface todas las propiedades de una asignación gradual (ver definición 5.2) excepto los postulados (BS6) y (BS7).*

Consideremos al estado epistémico $\leq_\Psi$ *sobre* $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ *como lo muestra la figura y sea* α *una fórmula tal que* $[\![\alpha]\!] = \{\omega_1, \omega_3\}$.
Supongamos que los estados epistémicos $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ *y* $\leq_{\Psi\circ\alpha\circ\alpha}$ *de la asignación dada por la hipótesis son los que muestra la figura.*



Notemos que esta situación es compatible con la hipótesis ya que en $\leq_{\Psi\circ\alpha}$, ω_3 *es un modelo de* α *que mejora satisfaciendo al postulado (BS8), sin embargo,* ω_1 *es un modelo de* α *que desmejora, lo cual es posible ya que estamos suponiendo la asignación no satisface los postulados (BS6) y (BS7).*
De forma análoga en $\leq_{\Psi\circ\alpha\circ\alpha}$ *tenemos ahora que* ω_1 *mejora pero que* ω_3 *desmejora, de lo que se obtiene que* $\leq_{\Psi\circ\alpha\circ\alpha} = \leq_\Psi$.

De esta manera vamos a tener que $\leq_\Psi = \leq_{\Psi\circ^{2n}}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *lo que quiere decir que para ninguna iteración por* α *del estado epistémico* $\leq_\Psi$ *sus modelos minimales estarán contenidos en los modelos* α*. Luego (I1) no se satisface para* $\circ$.

Veamos a continuación el Teorema de representación:

Teorema 5.3 *Si* $\circ$ *es un operador de mejoramiento básico, es decir, que satisface los postulados (BI1)-(BI11), entonces existe una asignación básica que envía a cada estado epistémico* Ψ *en un preorden total* $\leq_\Psi$ *tal que*

$$[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \tag{5.1}$$

Recíprocamente, supongamos que $\circ$ *es un operador de cambio y supongamos para el cual existe una asignación básica que envía a cada estado epistémico* Ψ *en un preorden total* $\leq_\Psi$*, entonces el operador* $\circ$ *es operador de mejoramiento básico y la ecuación (5.1) se satisface para esta asignación básica.*

Antes de demostrar el teorema daremos ejemplos de este tipo de operadores.

Ejemplo 5.4 *Los operadores* $\odot$, $\oslash$ *y* $\oplus$ *estudiados en el capítulo 2 llamados uno-mejoramiento, medio-mejoramiento y mejor-mejoramiento respectivamente son operadores de mejoramiento básico.*

5.2. La demostración

Empezaremos demostrando el siguiente lema que nos será muy útil en la demostración principal.

Lema 5.1 *Sea $\circ$ un operador que satisface (BI1). Y supongamos que existe una función que envía cada estado epistémico Ψ a un preorden total $\leq_\Psi$ sobre $\mathcal{W}$ que satisface las mismas propiedades (BS1), (BS2) y (BS3) de una asignación básica. Más aún, supongamos que la ecuación 5.1 se satisface. Entonces, para toda fórmula μ y toda fórmula α consistente, se tiene que, $B(\Psi \star \alpha) \vdash \mu$ si, y sólo si, existe una valuación ω tal que $\omega \in [[\mu \wedge \alpha]]$ y $\omega <_\Psi \omega'$ para todo $\omega' \in [[\alpha \wedge \neg\mu]]$.*

Demostración: ($\Leftarrow$) Supongamos que existe $\omega \in [[\mu \wedge \alpha]]$ tal que $\omega <_\Psi \omega'$ para todo $\omega' \in [[\alpha \wedge \neg\mu]]$. Queremos ver que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \mu$ lo cual por hipótesis es equivalente a demostrar que $min([[\alpha]], \leq_\Psi) \subset [[\mu]]$. Supongamos por reducción al absurdo que existe $\omega' \in min([[\alpha]], \leq_\Psi)$ y $\omega' \notin [[\mu]]$. Como $\omega \in [[\alpha]]$, tenemos que $\omega' \leq_\Psi \omega$. Pero $\omega' \in [[\alpha]] \cap [[\neg]]\mu$. Lo cual es una contradicción.

($\Rightarrow$) Supongamos que α es consistente y que $B(\Psi\star\alpha) \vdash \mu$. Por la hipótesis tenemos que $min([[\alpha]], \leq_\Psi) \subseteq [[\alpha]]$. Tomemos entonces $\omega \in min([[\alpha]], \leq_\Psi)$, así $\omega min([[\alpha]], \leq_\Psi)$, así $\omega \in [[\alpha]] \cap [[\mu]]$. Afirmamos que $\omega <_\Psi \omega'$ para todo $\omega' \in [[\alpha \wedge \neg\mu]]$. En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que existe $\omega' \in [[\alpha]] \cap [[\neg\mu]]$ tal que $\omega' \leq_\Psi \omega$. Así $\omega' \in min([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Lo cual es una contradicción ya que $min([[\alpha]], \leq_\Psi) \subseteq [[\mu]]$ y $\omega' \in [[\neg\mu]]$. ∎

Continuemos con la demotración del Teorema 5.3.

Demostración: ($\Rightarrow$) Supongamos que un operador satisface los postulados (BI1)-(BI12) y definimos para cada estado epistémico Ψ una relación correspondiente $\leq_\Psi$ de la siguiente manera:

$$\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \models B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})$$

donde $\varphi_{\omega,\omega'}$ denota una fórmula tal que $[[\varphi_{\omega,\omega'}]] = \{\omega, \omega'\}$. Mostremos que $\leq_\Psi$ es un preorden total.

Totalidad: Sean ω, ω' valuaciones. Como $[[\varphi_{\omega,\omega'}]] \neq \emptyset$ la condición (BI3) nos dice que $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})]] \neq \emptyset$ además por (BI1) tenemos que $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})]] \subseteq [[\varphi_{\omega,\omega'}]]$, así o bien $\omega \models B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})$ o bien $\omega' \models B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})$, *i.e.* $\omega \leq_\Psi \omega'$ o bien $\omega' \leq_\Psi \omega$. Lo cual demuestra la totalidad de $\leq_\Psi$.

Transitividad: Sean $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ valuaciones tales que $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ y $\omega_2 \leq_\Psi \omega_3$. Queremos ver que $\omega_1 \leq \Psi\omega_3$. Se consideran tres casos:

(Caso 1) $\omega_1 \models B(\Psi)$
En este caso $B(\Psi)$ y $\varphi_{\omega_1,\omega_3}$ son mutuamente consistentes ya que comparten el modelo ω_1, luego por (BI2) tenemos que $B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_3} \equiv B(\Psi) \wedge \varphi_{\omega_1,\omega_3}$. Por lo tanto $\omega_1 \models B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_3})$, y así $\omega_1 \leq_\Psi \omega_3$.

(Caso 2) $\omega_1 \not\models B(\Psi)$ y $\omega_2 \models B(\Psi)$
Por hipótesis tenemos que $[[B(\Psi) \wedge \varphi_{\omega_1,\omega_2})]] = \{\omega_2\}$. Así por (BI2), tenemos que $[[B(\Psi) \star \varphi_{\omega_1,\omega_2}]] = \{\omega_2\}$, pero $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ *i.e.* $\omega_1 \models B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2})$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto este caso no sucede.

(Caso 3) $\omega_1, \omega_2 \not\models B(\Psi)$
Como $[[\varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}]] \neq \emptyset$ por (BI3) obtenemos que $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})]] \neq \emptyset$. Por (BI1) tenemos que $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})]] \subseteq \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Consideramos ahora dos subcasos.

(Caso 3.1) $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})]] \cap \{\omega_1, \omega_2\} = \emptyset$.
En esta caso necesariamente tenemos que $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})]] = \{\omega_3\}$. Entonces $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})]] \cap [[\varphi_{\omega_2,\omega_3}]] = \{\omega_3\} \neq \emptyset$. Se sigue de (BI5) y (BI6) que $[[B(\Psi \star (\varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} \wedge \varphi_{\omega_2,\omega_3}))]] = [[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \wedge \varphi_{\omega_2,\omega_3}]] = [[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})]] \cap [[\varphi_{\omega_2,\omega_3}]] = \{\omega_3\}$. Por lo tanto $[[B(\Psi \star (\varphi_{\omega_2,\omega_3}))]] = \{\omega_3\}$, esto en particular implica que $\omega_3 \leq_\Psi \omega_2$ y $\omega_2 \not\leq_\Psi \omega_3$, lo cual contradice la hipótesis incial.

(Caso 3.2) $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})]] \cap \{\omega_1, \omega_2\} \neq \emptyset$
En este caso $B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})$ y $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ son consistentes entre si. Luego, por (BI5) y (BI6), tenemos que $B(\Psi \star (\varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} \wedge \varphi_{\omega_1,\omega_2})) \equiv B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \wedge \varphi_{\omega_1,\omega_2}$ i.e. $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2})]] = [[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})]] \cap \{\omega_1, \omega_2\}$. Notemos que por hipótesis, $\omega_1 \models B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2})$, así $\omega_1 \models B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \wedge \varphi_{\omega_1,\omega_2}$. En particular $\omega_1 \models B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})$ así $\omega \in [[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})]] \cap [[\varphi_{\omega_1,\omega_3}]]$ *i.e.* $B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})$ y $\varphi_{\omega_1,\omega_3}$ son mutuamente consistentes. De nuevo por (BI5) y (BI6) tenemos que $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_3})]] = [[B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})]] \cap \{\omega_1, \omega_3\}$. Como $\omega_1 \models \{\omega_1, \omega_3\}$ y $\omega_1 \models B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})$ tenemos que $\omega_1 \models B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_3})$ i.e. $\omega_1 \leq_\Psi \omega_3$. Como queríamos.

Probaremos ahora que la asignación $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ es en efecto una asignación básica:

Condición (BS1): Es suficiente ver que si $\omega \models B(\Psi)$ entonces $\omega \leq_\Psi \omega'$ para todo $\omega' \in \mathcal{W}$. Si ω es un modelo de $B(\Psi)$ entonces $\omega \models B(\Psi) \wedge \varphi_{\omega,\omega'}$. Por (BI2) tenemos que $B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'}) \equiv B(\Psi) \wedge \varphi_{\omega,\omega'}$, así $\omega \models B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})$ esto es $\omega \leq_\Psi \omega'$.

Condición (BS2): Supongamos que $\omega \models B(\Psi)$ y que $\omega' \not\models B(\Psi)$. Queremos mostrar que $\omega <_\Psi \omega'$. Por (BI2), $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})]] = \{\omega\}$ *i.e.* $\omega' \not\leq_\Psi \omega$. Y por la condición anterior se tiene que $\omega \leq_\Psi \omega'$. Así, $\omega <_\Psi \omega'$.

Condición (BS3): Sea n un entero positivo tal que $\alpha_i \equiv \beta_i$ para todo $i \leq n$. Queremos ver que $\leq_{\Psi\circ\alpha_1\circ\cdots\circ\alpha_n} = \leq_{\Psi\circ\beta_1\circ\cdots\circ\beta_n}$
Notemos que para cualesquiera valuaciones ω y ω' se tiene que

$$\omega \leq_{\Psi\circ\alpha_1\circ\cdots\circ\alpha_n} \omega' \Leftrightarrow \omega \models B((\Psi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n) \star \varphi_{\omega,\omega'})$$

y que

$$\omega \leq_{\Psi\circ\beta_1\circ\cdots\circ\beta_n} \omega' \Leftrightarrow \omega \models B((\Psi \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_n) \star \varphi_{\omega,\omega'})$$

Más aún por (BI4) $B((\Psi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n) \star \varphi_{\omega,\omega'}) \equiv B((\Psi \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_n) \star \varphi_{\omega,\omega'})$. Lo que claramente implica que $\leq_{\Psi\circ\alpha_1\circ\cdots\circ\alpha_n} = \leq_{\Psi\circ\beta_1\circ\cdots\circ\beta_n}$

Con lo demostrado hasta ahora podemos demostrar que la ecuación 5.1 se satisface, i.e.

$$[[B(\Psi \star \alpha)]] = min([[\alpha]], \leq_\Psi)$$

De hecho, si α es inconsistente ambos lados de la igualdad son el conjunto vacío y por lo tanto se cumple. Supongamos ahora que α es consistente. Para mostrar la ecuación 5.1 mostremos primero que $[[B(\Psi \star \alpha)]] \subseteq min([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Supongamos por reducción al absurdo que dicha contención no ocurre, i.e. existe ω tal que $\omega \models B(\Psi \star \alpha)$ y $\omega \notin min([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Por (BI1) tenemos que $\omega \models \alpha$ pero $\omega \notin min([[\alpha]], \leq_\Psi)$ así existe $\omega' \models \alpha$ tal que $\omega' <_\Psi \omega$. Consideramos dos casos siguientes:

(Caso 1) $\omega' \models B(\Psi)$
Como $\omega' \models \alpha$, se tiene que $\omega' \models B(\Psi) \wedge \alpha$, así por (BI2) tenemos que $\omega' \models B(\Psi \star \alpha) \equiv B(\Psi) \wedge \alpha$. Pero $\omega \models B(\Psi \star \alpha)$, por lo tanto $\omega \models B(\Psi)$. Por la condición (BS1), $\omega \leq_\Psi \omega'$, lo cual contradice que $\omega' <_\Psi \omega$.

(Caso 2) $\omega' \not\models B(\Psi)$
Como $\omega' <_\Psi \omega$ tenemos que $[[\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'}]] = \{\omega'\}$. Notemos que ω y ω' son modelos de α, por lo tanto, $\alpha \wedge \varphi_{\omega,\omega'} \equiv \varphi_{\omega,\omega'}$. Entonces, por (BI5) y (BI4) tenemos que $B(\Psi \star \alpha) \wedge \varphi_{\omega,\omega'} \vdash B(\Psi \star (\alpha \wedge \varphi_{\omega,\omega'}))$ *i.e.* $[[B(\Psi \star \alpha)]] \cap \{\omega, \omega'\} \subseteq [[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})]]$. Pero $[[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})]] = \{\omega'\}$, por lo tanto $\omega \not\models [[B(\Psi \star \alpha)]]$, lo cual es una contradicción

con la hipótesis inicial.

Probemos ahora que $min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \subseteq [\![B(\Psi \star \alpha)]\!]$. Consideremos $\omega \in min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$. Supongamos por reducción al absurdo que $\omega \not\models B(\Psi \star \alpha)$. Como α es consistente, tenemos por (BI3) que existe una valuación ω' en $[\![B(\Psi \star \alpha)]\!]$. Por (BI1) $\omega' \models \alpha$. Como $\omega, \omega' \in [\![\alpha]\!]$, tenemos que $\alpha \wedge \varphi_{\omega,\omega'} \equiv \varphi_{\omega,\omega'}$. Notemos además que $\omega' \in [\![B(\Psi \star \alpha)]\!] \cap \{\omega, \omega'\}$ luego $B(\Psi \star \alpha) \wedge \varphi_{\omega,\omega'}$ es consistente. Entonces, por (BI5), (BI6) y (BI4), se tiene que $B(\Psi \star \alpha) \wedge \varphi_{\omega,\omega'} \equiv B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})$ *i.e.* $[\![B(\Psi \star \alpha)]\!] \cap \{\omega, \omega'\} = [\![B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})]\!]$. Como $\omega \not\models B(\Psi \star \alpha)$ tenemos que $\{\omega'\} = [\![B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})]\!]$, *i.e.* $\omega' <_\Psi \omega$, contradiciendo la minimalidad de ω en $[\![\alpha]\!]$ respecto a $\leq_\Psi$.

Hemos demostrado que la ecuación 5.1 se cumple. Esta ecuación nos será útil en las demostraciones del resto de las condiciones de la asignación básica.

Condición (BS4): Supongamos que $\omega, \omega' \in [\![\mu]\!]$. Queremos ver que $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$. Consideremos una fórmula α tal que $[\![\alpha]\!] = \{\omega, \omega'\}$. Así $\alpha \vdash \mu$. Por (BI7) tenemos que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \equiv B(\Psi \star \alpha)$ *i.e.* $min([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi \circ \mu}) = [\![B(\Psi \circ \mu) \star \alpha]\!] = [\![B(\Psi \star \alpha)]\!] = min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$. En particular $min([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi \circ \mu}) = min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$. De esta ecuación obtenemos fácilmente $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$.

Condición (BS5): Esta condición se demuestra de manera análoga a la condición (BS4).

Condición (BS6): Sean ω y ω' valuaciones tales que $\omega \models \mu$ y $\omega' \models \neg\mu$. Supongamos que $\omega <_\Psi \omega'$. Queremos ver que $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$. Consideremos la fórmula proposicional α tal que $[\![\alpha]\!] = \{\omega, \omega'\}$. Notemos que $\omega \models \alpha \wedge \mu$, $\omega <_\Psi \omega'$ y $[\![\alpha]\!] \cap [\![\neg\mu]\!] = \{\omega'\}$. Luego, por el Lema 5.1, tenemos que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \mu$. Por lo tanto, de (BI9) se sigue que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \mu$. De nuevo, por el Lema 5.1, se tiene que $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$, ya que $[\![\alpha \wedge \mu]\!] = \{\omega\}$ y $[\![\alpha \wedge \neg\mu]\!] = \{\omega'\}$. Como queríamos.

Condición (BS7): Notemos que esta condición es equivalente (bajo la suposición de que las relaciones $\leq_\Phi$ son preórdenes totales para cualquier estado epistémico Φ) a la siguiente condición:

(S7') Si $\omega \models \mu$ y $\omega' \models \neg\mu$ entonces $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega' \Rightarrow \omega' <_\Psi \omega$.

Para probar (S7') supongamos que $\omega \models \mu$, $\omega' \models \neg\mu$ y $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$. Queremos ver que $\omega' <_\Psi \omega$. Sea α una fórmula tal que $[\![\alpha]\!] = \{\omega, \omega'\}$. Notemos que $[\![\alpha \wedge \mu]\!] = \{\mu\}$

y $[\![\alpha \wedge \neg\mu]\!] = \{\omega'\}$. Como $\omega' <_{\Psi\circ\mu} \omega$, por el Lema 5.1, $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Usando la contrapositiva de (BI10), i.e.

(I10') Si $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \neg\mu$, entonces $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$

se tiene que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Nuevamente por el Lema 5.1, tenemos que $\omega' <_{\Psi} \omega$, ya que $[\![\alpha]\!] \cap [\![\neg\mu]\!] = \{\omega'\}$ y $[\![\alpha]\!] \cap [\![\mu]\!] = \{\omega\}$.

Condición (BS8): Supongamos que existen mundos ω y ω' tales que $\omega \models \mu$ y $\omega' \models \neg\mu$ tales que $\omega' \leq_{\Psi} \omega$. Queremos ver que al menos una de las siguientes condiciones se satisface:

(i) $\exists\omega_1, \omega_2$ tales que $\omega_1 \models \mu$ $\omega_2 \models \neg\mu$, $\omega_1 \simeq_{\Psi} \omega_2$ y $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$

(ii) $\exists\omega_1, \omega_2$ tales que $\omega_1 \models \mu$ $\omega_1 \models \neg\mu$, $\omega_2 <_{\Psi} \omega_1$ y $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$

Consideremos la fórmula $\varphi_{w,w'}$ cuyos únicos modelos son ω, ω'. Como $\omega' \leq_{\Psi} \omega$ tenemos que $\omega' \in min([\![\varphi_{w,w'}]\!], \leq_{\Psi})$. Por la ecuación (5.1), $\omega' \models B(\Psi \star \varphi_{w,w'})$. Como $\omega' \models \neg\mu$ se tiene que $[\![B(\Psi \star \varphi_{w,w'})]\!] \not\subseteq [\![\mu]\!]$, *i.e.* $B(\Psi \star \varphi_{w,w'}) \not\vdash \mu$. Así, por (BI11) una de las siguientes condiciones se satisface:

(a) $\exists\gamma$ tal que $B(\Psi \star \gamma)$ es consistente con μ y también es consistente con $\neg\mu$ y $B((\Psi \circ \mu) \star \gamma)$ es inconsistente con $\neg\mu$ pero consistente con μ.

(b) $\exists\gamma$ tal que $B(\Psi \star \gamma) \vdash \neg\mu$ y $B((\Psi \circ \mu) \star \gamma)$ es consistente con μ.

En el caso en que (a) se cumpla, tenemos que $\exists\omega_1, \omega_2$ tal que $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_2 \models \neg\mu$ y $\omega_1, \omega_2 \models B(\Psi \star \gamma)$. Por la ecuación (5.1), $\omega_1, \omega_2 \in min([\![\gamma]\!], \leq_{\Psi})$. Así, $\omega_1 \simeq_{\Psi} \omega_2$. Por la condición (BS7) tenemos que $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Afirmamos que $\omega_2 \not\leq_{\Psi\circ\mu} \omega_1$. Supongamos razonando por el absurdo que $\omega_2 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_1$. Entonces $\omega_1 \simeq_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. Como $[\![B(\Psi \circ \mu) \star \gamma]\!] = min([\![\gamma]\!], \leq_{\Psi\circ\mu})$ no contiene modelos de $\neg\mu$, necesariamente $\omega_1 \notin min([\![\gamma]\!], \leq_{\Psi\circ\mu})$ (de lo contrario ω_2 sería también minimal). Pero $B(\Psi \circ \mu) \star \gamma$ es consistente con μ, así existe $\omega_3 \models \mu$ tal que $\omega_3 \models min([\![\gamma]\!], \leq_{\Psi\circ\mu})$. Por lo tanto $\omega_3 <_{\Psi\circ\mu} \omega_1$. Como $\omega_1 \in min([\![\gamma]\!], \leq_{\Psi})$ y $\omega_3 \models \gamma$ tenemos que $\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_3$. Como $\omega_1, \omega_3 \models \mu$, por (BS4), $\omega_1 \leq_{\Psi\circ\mu} \omega_3$, lo cual es una contradicción. Así, $\omega_1 <_{\Psi\circ\mu} \omega_2$. De esta manera, hemos visto que (i) se cumple.

En caso que (b) se cumpla, $\exists\omega_1$ tal que $\omega_1 \models \mu$ y $\omega_1 \models B((\Psi \star \mu) \star \gamma)$. Por la ecuación (5.1), $\omega_1 \in min([[\gamma]], \leq_{\Psi \circ \mu})$.Como $B(\Psi \star \gamma) \vdash \neg\mu$, se tiene que $min([[\gamma]], \leq_{\Psi}) \subseteq [[\neg\mu]]$. Por lo tanto, existe $\omega_2 \models \gamma \wedge \neg\mu$ tal que $\omega_2 <_{\Psi} \omega_1$. Como $\omega_1 \in min([\gamma], \leq_{\Psi \circ \mu})$ y $\omega_2 \models \gamma$ se tiene que $\omega_1 \leq_{\Psi \circ \mu} \omega_2$. Lo cual es exactamente la condición (ii). Como queríamos.

Hemos concluido entonces la parte *sólo si* de la demostración de Teorema 5.3. ∎

Antes de continuar con la implicación que falta en la demostración del Teorema 5.3 quisiéramos hacer algunos comentarios sobre cómo se desarrollará.
Primero que nada, notemos que esta parte del teorema de representanción es distinta a cómo usualmente son los teoremas de representación vistos hasta ahora. La diferencia está en el hecho de que no asumiremos que la ecuación (5.1) se cumple. De hecho no podemos asumir esta ecuación sin antes haber establecido que el operador $\star$ tiene sentido. Para esto necesitamos demostrar que el postulado (BI1) se satisface. Así nuestra primera tarea será demostrar este postulado y después si podremos obtener que la ecuación (5.1) se cumple. Finalmente, con la ayuda de esta ecuación, demostraremos al resto de los postulados, *i.e.* (BI2)-(BI11).
Con el fin de demostrar que el postulado (BI1) se cumple, desarrollaremos cierta técnicas y estableceremos algunos resultados que serán muy útiles para nuestro propósito. A partir de ahora supondremos que $\circ$ es un operador para el cual $\Psi \mapsto \leq_{\Psi}$ es una asignación básica.
Comenzemos haciendo las siguientes observaciones:

Observación 5.5 *Por iteraciones sucesivas de la condición (BS4) es fácil ver que para todo $i \in \mathbb{N}$ si $\omega, \omega' \models \alpha$ entonces,*

$$\omega \leq_{\Psi} \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi \circ^i \alpha} \omega'$$

.

De igual manera, por iteraciones sucesivas de (BS5), para todo $i \in \mathbb{N}$ si $\omega, \omega' \models \neg\alpha$ entonces,

$$\omega \leq_{\Psi} \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi \circ^i \alpha} \omega'$$

Dada una fórmula α y un preorden $\leq_{\Psi}$ definiremos un relación $\sim_{\alpha}$ sobre $\mathcal{W}$ de la siguiente manera.

Definición 5.3 $\omega \sim_{\alpha} \omega'$ *si, y sólo si,* $\omega, \omega' \models \alpha$ *y* $\omega \simeq_{\Psi} \omega'$ *o bien* $\omega, \omega' \models \neg\alpha$ *y* $\omega \simeq_{\Psi} \omega'$.

Esta relación es claramente de equivalencia ya que por definición hereda la simetría, la reflexividad y la transitividad de la relación $\simeq_\Psi$. También notemos que cada clase de equivalencia está totalmente contenida en $[\![\alpha]\!]$ o bien está totalmente contenida en $[\![\neg\alpha]\!]$ ya que, por definición, un modelo de α nunca está relacionado (bajo $\sim_\alpha$) con un modelo de $\neg\alpha$.
Esta observación nos permite particionar al conjunto de las clases de equivalencia $\mathcal{W}/\sim_\alpha$ en dos subconjuntos disjuntos: el conjunto de las clases cuyos elementos son modelos de α, denotado por $C(\alpha)$ y el conjunto de las clases cuyos elementos son modelos de $\neg\alpha$, denotado por $C(\neg\alpha)$.

Consideremos la relación $\leq_\Psi^\sim$ sobre $\mathcal{W}/\sim_\alpha$ definida de la siguiente manera:

$$[\omega] \leq_\Psi^\sim [\omega'] \Leftrightarrow \omega \leq_\Psi \omega'$$

Claramente $\leq_\Psi^\sim$ define un preorden total sobre $\mathcal{W}/\sim_\alpha$ ya que hereda la totalidad, transitividad de $\leq_\Psi$.

La relación de indiferencia asociada a $\leq_\Psi^\sim$ será denotada por $\simeq_\Psi^\sim$.

Observación 5.6 *La relación $\leq_\Psi^\sim$ restringida a $C(\alpha)$ es un orden lineal.*

Demostración: Sabemos que $\leq_\Psi^\sim$ es simétrica, transitiva y total. Bastará demostrar que $\leq_\Psi^\sim$ satisface antisimetría. Sean $[\omega], [\omega'] \in C(\alpha)$. Supongamos que $[\omega] \leq_\Psi^\sim [\omega']$ y $[\omega'] \leq_\Psi^\sim [\omega]$. Entonces, por definición, $\omega \leq_\Psi \omega'$ y $\omega' \leq_\Psi \omega$, *i.e.* $\omega \simeq_\Psi \omega'$ Pero $\omega, \omega' \models \alpha$, así $\omega \sim_\alpha \omega'$, *i.e.* $[\omega] = [\omega']$. ∎

Con un argumento análogo al anterior podemos probar lo siguiente:

Observación 5.7 *La relación $\leq_\Psi^\sim$ restringida a $C(\neg\alpha)$ es un orden lineal.*

Así como lo hicimos en la Definición 5.3, definiremos una relación $\sim_{\alpha^i}$ para cada entero positivo i. Específicamente, dada una fórmula α y el preorden total $\leq_{\Psi\circ^i\alpha}$ definiremos una relación $\simeq_{\alpha^i}$ sobre $\mathcal{W}$ de la siguiente manera.

Definición 5.4 *$\omega \sim_{\alpha^i} \omega'$ si, y sólo si, $\omega, \omega' \models \alpha$ y $\omega \simeq_{\Psi\circ^i\alpha} \omega'$, o bien $\omega, \omega' \models \neg\alpha$ y $\omega \simeq_{\Psi\circ^i\alpha} \omega'$.*

Así como en la relación $\sim_\alpha$, las relaciones $\sim_{\alpha^i}$ son relaciones de equivalencia ya que heredan las propiedades de $\simeq_{\Psi\circ^i\alpha}$.

Como lo hecho anteriormente, podemos particionar al conjunto $\mathcal{W}/\sim_{\alpha^i}$ en dos conjuntos disjuntos definidos como sigue:

$$\begin{array}{rcl} C^i(\alpha) & = & \{[\omega] : \omega \in [\![\alpha]\!]\} \\ C^i(\neg\alpha) & = & \{[\omega] : \omega \in [\![\neg\alpha]\!]\} \end{array}$$

Definiremos, como lo hicimos antes, la relación $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$ sobre $\mathcal{W}/\sim_{\alpha^i}$ haciendo

$$[\omega] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega'] \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi\circ^i\alpha} \omega'$$

Y nuevamente, usando argumentos similares de los anteriores en el caso de la relación $\leq^{\sim}_{\Psi}$, podemos ver que $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$ es un preorden total sobre $\mathcal{W}/\sim_{\alpha^i}$ y, más aún, para cada entero positivo i la relación restringida a $C^i(\alpha)$ es un orden lineal y la relación restringida a $C^i(\neg\alpha)$ es también un orden lineal.

La relación de indiferencia asociada a $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$ se denotará por $\simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$.

Observación 5.8 *Para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $\sim_\alpha = \sim_{\alpha^i}$. Más aún, $C(\alpha) = C^i(\alpha)$, $C(\neg\alpha) = C^i(\neg\alpha)$, los órdenes lineales $(C(\alpha), \leq^{\sim}_{\Psi})$ y $(C^i(\alpha), \leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha})$ coinciden y también los órdenes lineales $(C(\neg\alpha), \leq^{\sim}_{\Psi})$ and $(C^i(\neg\alpha), \leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha})$ coinciden.*

Demostración: De la definición de $\sim_\alpha$ y $\sim_{\alpha^i}$ (Definiciones 5.3 y 5.4) y de la observación 5.5, se obtiene directamente que $\sim_\alpha = \sim_{\alpha^i}$, $C^i(\alpha) = C(\alpha)$ y $C(\neg\alpha) = C^i(\neg\alpha)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
Y de nuevo por la observación 5.5, y las definiciones de $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$ y $\leq^{\sim}_{\Psi}$ tenemos para todo $[\omega], [\omega'] \in C(\alpha)$ que $[\omega] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega'] \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi\circ^i\alpha} \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi} \omega' \Leftrightarrow [\omega] \leq^{\sim}_{\Psi} [\omega']$. Por lo tanto $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} = \leq^{\sim}_{\Psi}$ sobre $C(\alpha)$.

Usando un razonamiento análogo al anterior podemos ver que $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} = \leq^{\sim}_{\Psi}$ sobre $C(\neg\alpha)$. ∎

La siguiente definición es muy importante ya que nos permite asociar un peso a un elemento de $C(\alpha)$ (alias $C^i(\alpha)$) en la iteración i.

Definición 5.5 *Si $[\omega] \in C(\alpha)$. Para cada entero positivo $i \in \mathbb{N}$, definiremos $D^i([\omega])$ al conjunto de las clases $[\omega'] \in C(\neg\alpha)$ tales que $[\omega'] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega]$, es decir,*

$$D^i([\omega]) = \{[\omega'] \in C(\neg\alpha) : [\omega'] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega]\}$$

Definiremos para cada $i \in \mathbb{N}$ una función $\alpha^i : C(\alpha) \to N$ tal que

$$\alpha^i([\omega]) = |D^i([\omega])|$$

De hecho, $\alpha^i([\omega])$ cuenta el número de niveles que contienen modelos de $\neg\alpha$ comenzando a contar desde el nivel de ω hasta nivel minimal en el preorden total $\leq_{\Psi \circ^i \alpha}$.
Escencialmente, la siguiente proposición nos dice que este peso asignado no se incrementa a medida que iteramos.

Observación 5.9 *Para cada entero positivo $i \in \mathbb{N}$, si $[\omega] \in C(\alpha)$, entonces $D^{i+1}([\omega]) \subseteq D^i([\omega])$.*

Demostración: Sea $[\omega'] \in D^{i+1}([\omega])$. Queremos ver que $[\omega] \in D^i([\omega])$, es decir, queremos ver que $[\omega'] \leq^{\sim}_{\Psi \circ^i \alpha} [\omega]$. Sabemos por hipótesis que $[\omega'] \in C(\neg\alpha)$, $[\omega] \in C(\alpha)$ y $[\omega'] \leq^{\sim}_{\Psi \circ^{i+1} \alpha} [\omega]$, por lo tanto, de la definición de $\leq^{\sim}_{\Psi \circ^{i+1} \alpha}$ obtenemos que $\omega' \leq_{\Psi \circ^{i+1} \alpha} \omega$ y del contrarrecíproco de la condición (BS6) obtenemos que $\omega' \leq_{\Psi \circ^i \alpha} \omega$. Esto por definición implica que $[\omega'] \leq^{\sim}_{\Psi \circ^i \alpha} [\omega]$. Como queríamos. ∎

Como consecuecia directa de la observación anterior tenemos el siguiente resultado:

Observación 5.10 *Para cada entero positivo $i \in \mathbb{N}$, $\alpha^{i+1}([\omega]) \leq \alpha^i([\omega])$.*

La siguente observación es bastante intuitiva. Dice escencialmente que mientras más abajo en el preorden total $\leq_{\Psi \circ^i \alpha}$ esté el modelo de α, más bajo será su peso.

Observación 5.11 *Para cada entero positivo $i \in \mathbb{N}$, si $[\omega], [\omega'] \in C(\alpha)$ y $[\omega] \leq^{\sim}_{\Psi \circ^i \alpha} [\omega']$, entonces $\alpha^i([\omega]) \leq \alpha^i([\omega'])$.*

Demostración: Si $\alpha^i([\omega]) = 0$, entonces $\alpha^i([\omega]) \leq \alpha^i([\omega'])$. Supondremos entonces que $\alpha^i([\omega]) \neq 0$.
Por lo tanto, tenemos que $D^i([\omega]) \neq \emptyset$. Sea entonces $[\omega''] \in D^i([\omega])$. Por definición, se tiene que $[\omega''] \leq^{\sim}_{\Psi \circ^i \alpha} [\omega]$, luego por transitividad, tenemos que $[\omega''] \leq^{\sim}_{\Psi \circ^i \alpha} [\omega']$ lo que quiere decir que $[\omega''] \in D^i([\omega'])$.
De esta manera hemos probado que $D^i([\omega]) \subseteq D^i([\omega'])$. Por lo tanto $\alpha^i([\omega]) \leq \alpha^i([\omega'])$. ∎

Sabemos por la observación 5.6, que $\leq_{\Psi}^{\sim}$ es un orden lineal sobre $C(\alpha)$. Notemos que $|C(\alpha)|$ es finito pues $\mathcal{W}$ es finito. Hagamos $m = |C(\alpha)|$. Así, podemos enumerar los elementos de $C(\alpha)$ de tal manera que $C(\alpha) = \{[\omega'_1], \ldots, [\omega'_m]\}$ y $[\omega'_j] <_{\Psi}^{\sim} [\omega'_{j+1}]$ para $j \in \{1, ..., m-1\}$.
De igual manera, por la observación 5.7, podemos enumerar los elementos de $C(\neg\alpha) = \{[\omega''_1], \ldots, [\omega''_n]\}$, donde $n = |C(\neg\alpha)|$, de tal manera que $[\omega''_j] <_{\Psi}^{\sim} [\omega''_{j+1}]$ para $j \in \{1, ..., n-1\}$.

Por el hecho de que los órdenes lineales entre los elementos de $C(\alpha)$ coinciden para todo $\leq_{\Psi \circ^i \alpha}^{\sim}$ (Observación 5.8), tenemos que $[\omega'_j] <_{\Psi \circ^i \alpha}^{\sim} [\omega'_{j+1}]$ para todo $j \in \{1, ..., m-1\}$. Así, por la Observación 5.11 tenemos que $\alpha^i([\omega'_j]) \leq \alpha^i([\omega'_{j+1}])$ para todo $j \in \{1, ..., m-1\}$.

Las dos siguientes observaciones serán útiles más adelante.

Observación 5.12 *Para todo $i \in \mathbb{N}$, $min(\leq_{\Psi \circ^i \alpha}^{\sim})$ es o bien $\{[\omega'_1]\}$ o bien $\{[\omega''_1]\}$ o bien $\{[\omega'_1], [\omega''_1]\}$.*

Demostración: Por la Observacíon 5.8 existen al menos dos elementos en $min(\leq_{\Psi \circ^i \alpha}^{\sim})$. Y por la misma observación las únicas posibilidades son $\{[\omega'_1]\}$ ó $\{[\omega''_1]\}$ ó $\{[\omega'_1], [\omega''_1]\}$. ∎

Observación 5.13 *Para todo $i \in \mathbb{N}$, $min(\leq_{\Psi \circ^i \alpha}) = \bigcup min(\leq_{\Psi \circ^i \alpha}^{\sim})$.*

Por las observaciones anteriores, para cada $i \in \mathbb{N}$, el vector

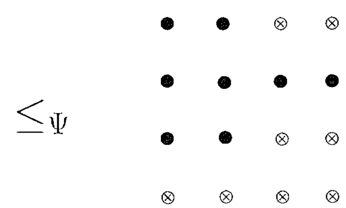
$$(\alpha^i([\omega'_1]), \alpha^i([\omega_2]), ..., \alpha^i([\omega'_m]))$$

es un arreglo ordenado no decreciente de números naturales. Estos vectores serán decisivos en el resto de la prueba.

Antes de continuar a establecer los resultados que nos llevarán a la demostración del postulado (BI1), introduciremos un ejemplo que ilustrará los conceptos y mostrará el comportamiento que tiene la asignación básico en la iteración.

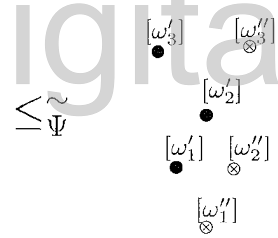
Ejemplo 5.14 *Supongamos $|\mathcal{W}| = 16$. Sea α una fórmula tal que $|[[\neg\alpha]]| = 8$ y $|[[\alpha]]| = 8$. Sea Ψ un estado epistémico el cuál es enviado por el asignamiento básico al preorden total $\leq_{\Psi}$ sobre $\mathcal{W}$ representado en la figura de abajo. Los modelos de*

α están representados por circulos negros y los modelos de $\neg\alpha$ están representados por los circulos marcados con x. Mientras más abajo un modelo esté en esta representación, más preferido será. Por lo tanto los modelos minimales de $\leq_\Psi$ son los cuatro modelos de $\neg\alpha$ en el nivel del fondo.



Si consideramos ahora $\mathcal{W}/\sim$ tendremos que las clases de equivalencia estarán formadas por conjuntos de modelos de α indiferentes entre si (en el mismo nivel en la figura) y por los conjuntos de modelos de $\neg\alpha$ que son indiferentes entre si. El primer conjunto de clases equivalencia es $C(\alpha)$, y el segundo conjunto de clases de equivalencia es $C(\neg\alpha)$.

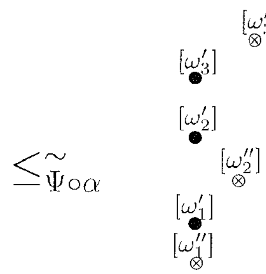
La siguiente figura representa el preorden total $\leq_\Psi^\sim$ sobre $\mathcal{W}/\sim_\alpha$.



De esta figura, usando la Definición 5.5, tenemos que $\alpha^0([\omega_1']) = 2$, $\alpha^0([\omega_2']) = 2$ y $\alpha^0([\omega_3']) = 3$. Así, al comienzo del proceso el arreglo es el siguiente

$$(\alpha^0([\omega_1]), \alpha^0([\omega_2]), \alpha^0([\omega_3])) = (2, 2, 3)$$

Supongamos que después de una iteración el preorden total $\leq_{\Psi\circ\alpha}^\sim$ correspondiente al preorden total $\leq_{\Psi\circ\alpha}$ está representado por la figura de abajo:



Entonces tenemos que $\alpha^1([\omega_1']) = 1$, $\alpha^1([\omega_2']) = 2$ *y* $\alpha^1([\omega_3']) = 2$. *Así, después de una iteración el arreglo es el siguiente*

$$(\alpha^1([\omega_1']), \alpha^1([\omega_2']), \alpha^1([\omega_3'])) = (1, 2, 2)$$

Supongamos ahora que después de dos iteraciones el preorden total $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^2\alpha}$ *correspondiente al preorden total* $\leq_{\Psi\circ^2\alpha}$ *está representado por la figura a continuación:*

Así $\alpha^2([\omega_1']) = 0$, $\alpha^2([\omega_2']) = 1$ *y* $\alpha^2([\omega_3']) = 2$. *Por lo tanto, después de dos iteraciones el arreglo es el siguiente*

$$(\alpha^2([\omega_1']), \alpha^2([\omega_2']), \alpha^2([\omega_3'])) = (0, 1, 2)$$

∎

Este ejemplo insinúa que luego de un cierto número k de iteraciones obtendremos que $\alpha^k([\omega_1]) = 0$ (en el ejemplo k=2). En ese caso, se demostrará que $[[B(\Psi \circ^k \alpha)]] = [\omega_1]$ y por lo tanto (BI1) se satisface ya que $[\omega_1'] \subset [[\alpha]]$.

Observación 5.15 *Si existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\alpha^k([\omega_1']) = 0$ *entonces*

$$[[B(\Psi \circ^k \alpha)]] = [\omega_1']$$

Demostración: Como $\alpha^k([\omega_1']) = 0$ no hay clases en $C(\neg\alpha)$ que estén por debajo o al mismo nivel que $[\omega_1]$ respecto al preorden $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^k\alpha}$. Esto nos dice que $\text{mín}(\leq^{\sim}_{\Psi\circ^k\alpha}) = [\omega_1']$. Así, por definición de $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^k\alpha}$ obtenemos que $\text{mín}(\leq_{\Psi\circ^k\alpha}) = [\omega_1']$. Pero sabemos por las condiciones (BS1) y (BS2) que $\text{mín}(\leq_{\Psi\circ^k\alpha}) = [[B(\Psi \circ^k \alpha)]]$. Por lo tanto, $[[B(\Psi \circ^k \alpha)]] = [\omega_1]$. ∎

Observación 5.16 *Si existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\alpha^k([\omega_1']) = 0$ *entonces el postulado (BI1) se cumple.*

Demostración: Por la Observación 5.15, $[[B(\Psi \circ^k \alpha)]] = [\omega_1']$. Notemos que $[\omega_1'] \subset [[\alpha]]$, luego $[[B(\Psi \circ^k \alpha)]] \subset [[\alpha]]$. Lo cual implica directamente (BI1). ∎

Dada la observación previa, nuestra meta ahora será demostrar que existe un entero k tal que $\alpha^k([\omega_1']) = 0$. Para esto, comenzaremos demostrando que nuestros arreglos eventualmente decrecen con respecto al orden lexicográfico.

Proposición 5.1 *Si* $\alpha^i([\omega_1']) \neq 0$, *entonces existe* $j \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$(\alpha^i([\omega_1']), \ldots, \alpha^i([\omega_m'])) >_{lex} (\alpha^{i+j}([\omega_1']), \ldots, \alpha^{i+j}([\omega_m']))$$

Demostraremos este crucial resultado haciendo inducción en el número de clases en $C(\alpha)$ que no son indiferentes a elementos de $C(\neg\alpha)$ con respecto a $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$. Específicamente definiremos al conjunto S^i_α de dichas clases como sigue:

$$S^i_\alpha := \{[\omega] \in C(\alpha) : \nexists [\omega'] \in C(\neg\alpha) \text{ y } [\omega'] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega]\}$$

Cuando una clase de $C(\alpha)$ está en S^i_α decimos que está *aislada* en el preorden total $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$.
La inducción será aplicada sobre la cardinalidad s^i_α de este conjunto ($s^i_\alpha = |S^i_\alpha|$), pero primero ilustraremos estos conceptos a través de los preórdenes totales del Ejemplo 5.14.

Ejemplo 5.17 *Sea* α, $\leq^{\sim}_{\Psi}$, $\leq^{\sim}_{\Psi\circ\alpha}$ *y* $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^2\alpha}$ *como en el Ejemplo 5.14. Tenemos que* $s^0_\alpha = 1$ *ya que* $[\omega_2']$ *es la única clase aislada en* $\leq^{\sim}_{\Psi}$; $s^1_\alpha = 3$ *ya que* $[\omega_1']$, $[\omega_2']$ *y* $[\omega_3']$ *son las clases aisladas en en* $\leq^{\sim}_{\Psi\circ\alpha}$. *Finalmente* $s^2_\alpha = 2$ *ya que* $[\omega_1']$ *y* $[\omega_2']$ *son las clases aisladas en* $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^2\alpha}$.

Antes de demostrar esta proposición necesitaremos algunas observaciones y resultados que mostraremos a continuación. 5.1.

Observación 5.18 *Si* $\alpha^i([\omega_1']) \neq 0$ *entonces al menos una de las siguientes condiciones se satisface:*

(I) $\exists [\omega], [\omega']$ *tales que* $[\omega] \in C(\alpha)$, $[\omega'] \in C(\neg\alpha)$, $[\omega] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega']$ *y* $[\omega] <^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega']$

(II) $\exists [\omega], [\omega']$ *tales que* $[\omega] \in C(\alpha)$ $[\omega'] \in C(\neg\alpha)$, $[\omega'] <^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega]$ *y* $[\omega] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega']$

Demostración: Sabemos por hipótesis que $\alpha^i([\omega_1]) \neq 0$, lo que quiere decir que existe $[\omega'] \in C(\neg\alpha)$ tal que $[\omega'] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega_1]$. Por lo tanto existe $\omega' \models \neg\alpha$ tal que $\omega' \leq_{\Psi\circ^i\alpha} \omega_1$, tenemos entonces que la condición (BS8) se satisface. De esta manera, al menos una de las dos siguientes condiciones se satisface:

(i) $\exists\omega, \omega'$ tales que $\omega \models \alpha$, $\omega' \models \neg\alpha$, $\omega \simeq_{\Psi\circ^i\alpha} \omega'$ y $\omega <_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} \omega'$

(ii) $\exists\omega, \omega'$ tales que $\omega \models \alpha$, $\omega' \models \neg\alpha$, $\omega' <_{\Psi\circ^i\alpha} \omega$ y $\omega \leq_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} \omega'$

Por definición de las clases de equivalencia y de las relaciones $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$, $\simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$ y $<^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$, las condiciones previas se traducen fácilmente en (I) y (II) respectivamente. Completando así la demostración. ∎

Definición 5.6 *Diremos que (en $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$) ocurre un cambio de tipo (I) si después de una iteración más la condición (I) se cumple. Diremos que (en $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$) ocurre un cambio de tipo (II) si después una iteración más la condición (II) se cumple.*

Lema 5.2 *Si no ocurre un cambio tipo (I) sobre $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$, entonces $S^{i+1}_\alpha \subseteq S^i_\alpha$ y por lo tanto $s^{i+1}_\alpha \leq s^i_\alpha$.*

Demostración: Notemos que las clases en S^{i+1}_α pueden ser particionadas en dos tipos: las clases de $C(\alpha)$ que estaban en S^i_α, es decir, aquellas clases de $C(\alpha)$ que no son indiferentes a ninguna clase de $C(\neg\alpha)$ respecto a $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$ y continúan siéndolo aisladas respecto a $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha}$ y las nuevas clases. Note que las nuevas clases eran clases no aisladas en $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$ y ahora están aisladas. Supongamos que $[\omega]$ es una de estas nuevas clases. Así, necesariamente, existe $[\omega']$ en $C(\neg\alpha)$ tal que $[\omega] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega']$ y como $[\omega]$ está aislado en $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha}$ tenemos que $[\omega] <^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega']$ o $[\omega'] <^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega]$. Pero la última opción no puede ocurrir debido a la condición (BS7). Así, la única manera de que tengamos nuevos elementos en S^{i+1}_α es que ocurra un cambio de tipo (I) lo cual es imposible por hipótesis. De esta manera no existe nuevas clases en S^{i+1}_α. Luego, $s^{i+1}_\alpha \leq s^i_\alpha$. ∎

Ahora estamos listos para empezar la demostración de la proposición 5.1.

Demostración de la Proposición 5.1: Procederemos haciendo inducción sobre s^i_α.
Empezaremos con el caso básico de la inducción cuando $s^i_\alpha = 0$. Esto significa que no hay elementos aislados en $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$, *i.e.*

$$\forall[\omega] \in C(\alpha), \exists[\omega'] \in C(\neg\alpha) \ tal \ que [\omega] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega']$$

Afirmamos que

$$(\alpha^i([\omega'_1]), \ldots, \alpha^i([\omega'_m]) >_{lex} (\alpha^{i+1}([\omega'_1]), \ldots, \alpha^{i+1}([\omega'_m])$$

Notemos que en virtud de la Observación 5.18 ocurre o bien un cambio de tipo (I) o bien un cambio de tipo (II). Por lo tanto, consideraremos dos casos.

Caso 1: Ocurre un cambio de tipo (I).
Sea $[\omega'_c]$ la clase de $C(\alpha)$ que produce un cambio de tipo (I) en el nivel más bajo. Así, existe $[\omega''] \in C(\neg\alpha)$ tal que $[\omega'_c] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega'']$ y $[\omega'_c] <^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$. De esto, se sigue claramente que $[\omega''] \in D^i([\omega'_c])$ y $[\omega''] \notin D^{i+1}([\omega'_c])$. Juntando todo esto y la Observación 5.9 tenemos que $D^{i+1}([\omega'_c]) \subsetneq D^i([\omega_c])$. Por lo tanto $|D^{i+1}(\omega'_c)| < |D^i(\omega'_c)|$, *i.e.* $\alpha^{i+1}([\omega'_c]) < \alpha^i([\omega'_c])$. Por la Observación 5.10, tenemos que $\alpha^{i+1}([\omega_i]) \leq \alpha^i([\omega_i])$ para todo $i \leq 0 < c$.

Luego, necesariamente

$$(\alpha^i([\omega'_1]), ..., \alpha^i([\omega'_c]), ..., \alpha^i([\omega'_m])) >_{lex} (\alpha^{i+1}([\omega'_1]), ..., \alpha^{i+1}([\omega'_c]), ..., \alpha^{i+1}([\omega'_m]))$$

.

Caso 2: Ocurre un cambio de tipo (II).
Sea $[\omega'_c]$ la clase de $C(\alpha)$ en el nivel más bajo que produce un cambio de tipo (I). Así, existe $[\omega''] \in C(\neg\alpha)$ tal que, $[\omega''] <^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega'_c]$ y $[\omega'_c] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$. Como $S^i_\alpha = 0$ se tiene que existe $[\omega'''] \in C(\neg\alpha)$ tal que $[\omega'_c] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega''']$. Luego, por definición, $\omega'_c \simeq_{\Psi\circ^i\alpha} \omega'''$. Por hipótesis tenemos que $[\omega''] <^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega'_c]$ entonces $[\omega''] <_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega''']$. Así, $\omega'' <_{\Psi\circ^i\alpha} \omega'''$. De esta manera, por la condición (BS5) tenemos que $\omega'' <_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} \omega'''$, pero notemos que $\omega'_c \leq_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} \omega''$ ya que $[\omega'_c] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$. Luego, por transitividad, tenemos que $\omega'_c <_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} \omega'''$, así $[\omega'_c] <^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega''']$. Por lo tanto ocurre un cambio de tipo (I), pero ya sabemos que la afirmación es verdadera en ese caso.
Esto completa la demostración para el caso $s^i_\alpha = 0$.

Supongamos ahora que la proposición es cierto cuando $s^i_\alpha \leq k$, es decir, si $s^i_\alpha \leq k$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\alpha^i([\omega'_1]), \ldots, \alpha^i([\omega'_m]) >_{lex} (\alpha^{i+j}([\omega'_1]), \ldots, \alpha^{i+j}([\omega'_m])$$

Queremos ver que el resultado se cumple cuando $s^i_\alpha = k + 1$. Por la Observación 5.18 sabemos que o bien ocurre un cambio de tipo (I) o bien ocurre un cambio de tipo

(II) o ambos. Consideraremos dos casos: Ocurre un cambio de tipo (I) o no ocurre un cambio de tipo (I).

Caso 1: Ocurre un cambio de tipo (I).
Supongamos que $[\omega'_c]$ es la menor clase de $C(\alpha)$ que produce un cambio de tipo (I) en $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$. Mediante un razonamiento análogo al realizado en el (Caso 1) del caso básico obtenemos que $\alpha^{i+1}([\omega'_c]) < \alpha^i([\omega'_c])$. Por la Observación 5.10, se tiene que $\alpha^{i+1}(\omega'_p) \leq \alpha^i(\omega'_p)$ para todo $p < c$. Luego, necesariamente

$$(\alpha^i([\omega'_1]), ..., \alpha^i([\omega'_c]), ..., \alpha^i([\omega'_m])) >_{lex} (\alpha^{i+1}([\omega'_1]), ..., \alpha^{i+1}([\omega'_c]), ..., \alpha^{i+1}([\omega'_m]))$$

Caso 2: No ocurre un cambio de tipo (I).
Por la Observación 5.18 ocurre un cambio de tipo (II).
Sea $[\omega'_c]$ la menor clase de $C(\alpha)$ que produce un cambio de tipo (II) en $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$. Así, existe $[\omega''] \in C(\neg\alpha)$ tal que $[\omega''] <^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega'_c]$ y $[\omega'_c] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$. Afirmamos que $[\omega'_c]$ está aislada en $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$, *i.e.* no existe $[\omega'''] \in C(\neg\alpha)$ tal que $[\omega''] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega'_c]$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $[\omega''] \in C(\neg\alpha)$ tal que $[\omega''] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega'_c]$. Así, $[\omega''] <^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega''']$. Entonces $\omega'' <_{\Psi\circ^i\alpha} \omega'''$. Por la condición (BS5) tenemos que $\omega'' <_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} \omega'''$, lo cual por definición es equivalente a que $[\omega''] <^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega''']$. Por hipótesis tenemos que $[\omega'_c] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$. De esta manera, por transitividad, tenemos que $[\omega'_c] <^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega''']$. Por lo tanto $[\omega'_c]$ produce un cambio de tipo (I), contradiciedo la hipótesis de que este tipo de cambio no ocurre.

Como $[\omega'_c] \leq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$ tenemos que dos posibilidades: O bien $[\omega'_c] <^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$ or bien $[\omega'_c] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$. Las analizeremos por separado.

Caso 2.1: $[\omega'_c] <^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$
Como $[\omega''] <^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega'_c]$, tenemos que $[\omega''] \in D^i([\omega'_c])$. Por hipótesis tenemos que $[\omega'_c] <^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$, así, $[\omega''] \notin D^{i+1}([\omega'_c])$. Esto junto a la Observación 5.9 nos dice que $D^{i+1}([\omega'_c]) \subsetneq D^i([\omega'_c])$, es decir, $\alpha^{i+1}([\omega'_c]) < \alpha^i([\omega'_c])$. Por la Observación 5.10, tenemos que $\alpha^{i+1}(\omega'_p) \leq \alpha^i(\omega'_p)$ para todo $p < c$. Así, necesariamente

$$(\alpha^i([\omega'_1]), ..., \alpha^i([\omega'_c]), ..., \alpha^i([\omega'_m])) >_{lex} (\alpha^{i+1}([\omega'_1]), ..., \alpha^{i+1}([\omega'_c]), ..., \alpha^{i+1}([\omega'_m]))$$

Caso 2.2: $[\omega'_c] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$
Como no ocurre cambio de tipo (I), podemos aplicar el Lema 5.2 y obtener que $s^{i+1}_\alpha \leq s^i_\alpha$.

Afirmamos que $s_\alpha^{i+1} \leq k$. Para ver esto, notemos que $[\omega'_c]$ está aislado en $\leq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha}$. Por lo tanto,

$$[\omega'_c] \in S_\alpha^i = \{[\omega] \in C(\alpha) : \nexists[\omega'] \in C(\neg\alpha) \text{ y } [\omega'] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^i\alpha} [\omega]\}$$

Sin embargo, por hipótesis tenemos que $[\omega'_c] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega'']$. Por lo tanto,

$$[\omega_c] \notin S_\alpha^{i+1} = \{[\omega] \in C(\alpha) : \nexists[\omega'] \in C(\neg\alpha) \text{ y } [\omega'] \simeq^{\sim}_{\Psi\circ^{i+1}\alpha} [\omega]\}$$

De esto y del Lema 5.2, tenemos que $S_\alpha^{i+1} \subsetneq S_\alpha^i$. Entonces $s_\alpha^{i+1} < s_\alpha^i = k+1$. Por lo tanto $s_\alpha^i = k+1 \leq k$. Así, por hipótesis de inducción, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\alpha^{i+1}([\omega'_1]), \ldots, \alpha^{i+1}([\omega'_m])) >_{lex} (\alpha^{i+1+j}([\omega'_1]), \ldots, \alpha^{i+1+j}([\omega'_m)])$$

Por la Observación 5.10, tenemos que

$$(\alpha^i([\omega'_1]), \ldots, \alpha^i([\omega'_m])) \geq_{lex} (\alpha^{i+1}([\omega'_1]), \ldots, \alpha^{i+1}([\omega'_m)])$$

Luego, por transitividad de $\geq_{lex}$ tenemos que

$$(\alpha^i([\omega'_1]), \ldots, \alpha^i([\omega'_m])) >_{lex} (\alpha^{i+1+j}([\omega'_1]), \ldots, \alpha^{i+1+j}([\omega'_m)])$$

lo cual completa la demostración de la Proposición 5.1.

∎

Notemos que de las condiciones (BS1) y (BS2) se sigue directamente la siguiente observación:

Observación 5.19 *Para todo estados epistémico Ψ, $[[B(\Psi)]] = min(\leq_\Psi)$. En particular, para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $[[B(\Psi \circ^i \alpha)]] = min(\leq_{\Psi\circ^i\alpha})$.*

Ahora estamos listos para demostrar la implicación que falta del Teorema 5.3.

Demostración del Teorema 5.3 ($\Leftarrow$):

Mostraremos primero que el postulado (BI1) se cumple.

Notemos que por la Observación 5.16 el postulado (BI1) se satisface siempre y cuando exista k tal que $\alpha^k([\omega'_1]) = 0$. Afirmamos que dicho k existe. De lo contrario, por la Proposición 5.1, podemos construir un sucesión infinita de arreglos $(\alpha^{r_n}([\omega'_1]), \ldots, \alpha^{r_n}([\omega'_m]))$ (donde $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de enteros) tales que

$$(\alpha^{r_n}([\omega'_1]), \ldots, \alpha^{r_n}([\omega'_m])) >_{lex} (\alpha^{r_{n+1}}([\omega'_1]), \ldots, \alpha^{r_{n+1}}([\omega'_m)]).$$

Pero esto contradice el hecho de que el orden lexicográfico está bien fundado sobre la m-uplas de números naturales.

Ahora mostraremos que la Ecuación (5.1) se satisface.
Sea k el mínimo número natural tal que $B(\Psi \circ^k \alpha) \vdash \alpha$, en particular $\Psi \star \alpha = \Psi \circ^k \alpha$. Notemos que

$$\begin{aligned} k &= min\{n : B(\Psi \circ^n \alpha) \vdash \alpha\} \\ &= min\{n : [[B(\Psi \circ^n \alpha)]] \subseteq [[\alpha]]\} \\ &= min\{n : min(\leq_{\Psi \circ^n \alpha}) \subseteq [[\alpha]]\} \end{aligned}$$

la última igualdad se cumple por la Observación 5.19. Y por la Observación 5.13, se tiene que

$$min(\leq_{\Psi \circ^n \alpha}) = \bigcup min(\leq^{\sim}_{\Psi \circ^n \alpha}).$$

De esto obtenemos que

$$min(\leq_{\Psi \circ^n \alpha}) \subseteq [[\alpha]].$$

Por la Observación 5.12, la última expresión es equivalente a

$$min(\leq^{\sim}_{\Psi \circ^n \alpha}) = [\omega'_1].$$

Pero, por definición, $[\omega'_1]$ es exactamente $min([[\alpha]], \leq_\Psi)$.
Por lo tanto $[[B(\Psi \star \alpha)]] = min([[\alpha]], \leq_\Psi)$, *i.e.* la Ecuación (5.1) se satisface.

Demostraremos ahora los postulados (BI2)-(BI11).

Postulado (BI2):
Supongamos que $B(\Psi) \wedge \alpha$ es consistente. Queremos ver que $B(\Psi \star \alpha) \equiv B(\Psi \wedge \alpha)$. Por la Ecuación (5.1) bastará ver que $[[B(\Psi) \wedge \alpha]] = min([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Para demostrar esta igualdad, mostraremos primero que $[[B(\Psi) \wedge \alpha]] \subseteq min([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Sea ω un elemento de $[[B(\Psi)]] \cap [[\alpha]]$. Por las condiciones (BS1) y (BS2), tenemos que $\omega \leq_\Psi \omega'$ para toda valuación ω'. En particular, ω es minimal en $[\alpha]$ respecto a $\leq \Psi$. Como queríamos.
Ahora mostremos que $min([[\alpha]], \leq_\Psi) \subseteq [[B(\Psi) \wedge \alpha]]$. Supongamos que $\omega \in min([[\alpha]], \leq_\Psi)$ y buscando una contradicción supongamos que $\omega \not\models B(\Psi) \wedge \alpha$. Como $\omega \models \alpha$ tenemos que $\omega \not\models B(\Psi)$. Como $[[B(\Psi) \wedge \alpha]] \neq \emptyset$, existe ω' tal que $\omega' \in [[B(\Psi) \wedge \alpha]]$. Por lo demostrado anteriormente, $\omega' \in min([[\alpha]], \leq_\Psi)$. Como $\omega' \models B(\Psi)$ y $\omega \not\models B(\Psi)$, la condición (BS2) nos dice que $\omega' <_\Psi \omega$, lo cual contradice la minimalidad de ω.

Postulado (BI3):
Supongamos que $[\![\alpha]\!] \neq \emptyset$. Queremos ver que $B(\Psi \star \alpha)$ es consistente. Comoo estamos en el caso finito, $[\![\alpha]\!]$ es finito. Así $min([\alpha], \leq_\Psi) \neq \emptyset$. Luego, por la ecuación (5.1) $B(\Psi \star \alpha)$ es consistente.

Postulado (BI4):
Sea n un entero positivo y sean α_i, β_i, γ y μ fórmulas tales que $\gamma \equiv \mu$ y para todo $i \leq n$ $\alpha_i \equiv \beta_i$. Queremos ver que

$$B((\Psi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n) \star \gamma) \equiv B((\Psi \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_n) \star \mu)$$

Por la condición (BS3) tenemos que $\leq_{\Psi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n} = \leq_{\Psi \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_n}$. Por hipótesis tenemos que $[\![\gamma]\!] = [\![\mu]\!]$ entonces $min([\![\gamma]\!], \leq_{\Psi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n}) = min([\![\mu]\!], \leq_{\Psi \circ \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_n})$ lo cual por la Ecuación (5.1) es equivalente a lo que queríamos probar.

Postulado (BI5):
Queremos ver que $B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta \vdash B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta))$ o equivalentemente $[\![B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta]\!] \subseteq [\![B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta))]\!]$. Si $B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta))$ es inconsistente el resultado es obvio. Supongamos ahora que $B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta$ es consistente. Tomemos $\omega \in [\![B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta]\!]$ supongamos por reducción al absurdo que $\omega \notin [\![B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta))]\!]$. Por la Ecuación (5.1), ω es minimal de α respecto a $\leq_\Psi$, $\omega \models \beta$ y ω no es minimal de $\alpha \wedge \beta$ respecto a $\leq_\Psi$. Por lo tanto, existe $\omega' \in [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$, tal que $\omega' <_\Psi \omega$. Pero en particular $\omega' \models \alpha$ lo cual contradice la minimalidad de ω en $[\![\alpha]\!]$ respecto a $\leq_\Psi$.

Postulado (BI6):
Supongamos que $B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta$ es consistente. Queremos ver que $B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta)) \vdash B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta$. Será suficiente demostrar la contraparte semántica equivalente de este postulado: $[\![B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta))]\!] \subseteq [\![B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta]\!]$. Supongamos por reducción al absurdo que la inclusión no se cumple, *i.e.* existe $\omega \models B(\Psi \star (\alpha \wedge \beta))$ tal que $\omega \not\models B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta)$. Por la Ecuación (5.1), tenemos que $\omega \in min([\![\alpha \wedge \beta]\!], \leq_\Psi)$ y $\omega \notin min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \cap [\![\beta]\!]$. Como $\omega \models \beta$, tenemos que $\omega \not\models min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$. Como $[\![B(\Psi \star \alpha) \wedge \beta]\!] \neq \emptyset$, existe $\omega' \in min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) \cap [\![\beta]\!]$. Como $\omega \in min([\![\alpha \wedge \beta]\!], \leq_\Psi)$ y $\omega' \models \alpha \wedge \beta$, tenemos que $\omega \leq \Psi \omega'$. Pero $\omega' \in min([\![\alpha]\!], \leq \Psi)$, luego $\omega \in min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$, la cual es la contradicción que buscábamos.

Postulado (BI7):
Supongamos que $\alpha \vdash \mu$. Queremos ver que $B(\Psi \star \alpha) \equiv B((\Psi \circ \mu) \star \alpha)$. La condición (BS4) nos dice $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi \circ \mu}$ coinciden sobre $[\mu]$. Como $[\![\alpha]\!] \subseteq [\![\mu]\!]$, tenemos que

$$min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi) = min([\![\alpha]\!], \leq_{\Psi \circ \mu})$$

Entonces, por la Ecuación (5.1) obtenemos que $B(\Psi \star \alpha) \equiv B((\Psi \circ \mu) \star \alpha)$.

Postulado (BI8):
La demostración de este postulado es completamente análoga a la demostración del postulado anterior.

Postulado (BI9):
Supongamos que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \mu$. Queremos ver que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \mu$. De la hipótesis y del Lema 5.1 obtenemos que existe $\omega \in [\![\alpha]\!] \cap [\![\mu]\!]$ tal que $\omega <_{\Psi} \omega'$ para todo $\omega' \in [\![\alpha]\!] \cap [\![\neg\mu]\!]$. Así, por la condición (BS6) se tiene que $\omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$ para todo $\omega' \in [\![\alpha]\!] \cap [\![\neg\mu]\!]$. Luego de nuevo por el Lema 5.1 obtenemos que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \alpha$ como queríamos.

Postulado (BI10):
Notemos que el postulado (BI10) es equivalente al siguiente postulado llamado (BI10'):
(BI10') Si $B(\Psi \circ \mu) \star \alpha \vdash \neg\mu$
Por lo tanto bastará demostrar (BI10'). Notemos que la condición (BS7) es equivalente a la siguiente condición:
(S7') Si $\omega \models \mu$ y $\omega' \models \neg\mu$, entonces $\omega' <_{\Psi \circ \mu} \omega \Rightarrow \omega' <_{\Psi} \omega$.
Supongamos que $B((\Psi \circ \mu) \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Queremos ver que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Por el Lema 5.1 tenemos que existe $\omega \in [\![\alpha \wedge \neg\mu]\!]$ tal que $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$ para todo $\omega' \in [\![\alpha \wedge \mu]\!]$. De esto y de la condición (S7') obtenemos que $\omega <_{\Psi} \omega'$ para todo $\omega' \in [\![\alpha \wedge \mu]\!]$. Luego, de nuevo por el lema 5.1, tenemos que $B(\Psi \star \alpha) \vdash \neg\mu$. Como queríamos.

Postulado (BI11):
Supongamos que exite β consistente con α y consistente con $\neg\alpha$ tal que $B(\Psi \star \beta) \not\vdash \alpha$. Queremos ver que al menos una de las siguientes condiciones se satisface:

(a) $\exists\gamma$ tal que $B(\Psi \star \gamma)$ es consistente con α, $B(\Psi \star \gamma)$ es consistente con $\neg\alpha$ y $B((\Psi \circ \alpha) \star \gamma)$ es inconsistente con $\neg\alpha$ pero consistente con α.

(b) $\exists\gamma$ tal que $B(\Psi \star \gamma) \vdash \neg\alpha$ y $B((\Psi \circ \alpha) \star \gamma)$ es consistente con α y con $\neg\alpha$.

Por hipótesis tenemos que β es consistente. Luego, por (BI3) (ya demostrado), tenemos que $B(\Psi \star \beta) \not\vdash \bot$, *i.e.* $[\![B(\Psi \star \beta)]\!] \neq \emptyset$. Por hipótesis sabemos que $[\![B(\Psi \star \beta)]\!] \not\subset [\![\alpha]\!]$. Así, $\exists\omega' \models B(\Psi \star \beta) \wedge \neg\alpha$. Luego, por la ecuación (5.1) se tiene que $\omega' \in min([[[\beta]], \leq_\Psi)$, por lo tanto, $\omega' \leq_\Psi \omega$. Luego, las hipótesis de la condición (BS8) se satisfacen (tomando α en lugar de μ). Por lo tanto al menos una de las siguientes condiciones se cumple:

(i) $\exists \omega_1, \omega_2$ tal que $\omega_1 \models \alpha$ $\omega_2 \models \neg\alpha$, $\omega_1 \simeq \Psi\omega_2$ y $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

(ii) $\exists \omega_1, \omega_2$ tal que $\omega_1 \models \alpha$ $\omega_2 \models \neg\alpha$, $\omega_1 < \Psi\omega_2$ y $\omega_1 <_{\Psi\circ\alpha} \omega_2$.

Supongamos que la condición (i) se cumple: Consideramos la fórmula $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$, tenemos que $min([[\varphi_{\omega,\omega'}]], \leq_\Psi) = \{\omega_1, \omega_2\}$. De esto, y de la Ecuación (5.1), se sigue que $B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})$ es consistente con α y también consistente con $\neg\alpha$. Más aún $min([[\varphi_{\omega_1,\omega_2}]], \leq_{\Psi\circ\alpha}) = \{\omega_1\}$. Así, por la Ecuación (5.1), $B((\Psi \circ \alpha) \star \varphi_{\omega_1,\omega_2})$ es consistente con α y es inconsistente con $\neg\alpha$. De esta manera y si hacemos $\gamma = \varphi_{\omega_1,\omega_2}$ la condición (a) se cumple.

Supongamos que la condición (ii) se cumple. Considerando nuevamente la fórmula $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ tenemos que $min([[\varphi_{\omega_1,\omega_2}]], \leq_\Psi) = \{\omega_2\} \subseteq [\neg\alpha]$. Así, por la ecuación (5.1), $B(\Psi \star \varphi_{\omega_1,\omega_2}) \vdash \neg\alpha$. También por Ecuación (5.1), $\omega \in min([[\varphi_{\omega_1,\omega_2}]], \leq_{\Psi\circ\alpha})$. Así, $B((\Psi \circ \alpha) \star \varphi_{\omega_1,\omega_2})$ es consistente con α. De esta manera haciendo $\gamma = \varphi_{\omega_1,\omega_2}$ se satisface la condición (b).

∎

5.3. Aplicaciones

Observación 5.20 *Si para todo β consistente con α y con $\neg\alpha$ se tiene que $B(\Psi\star\beta) \vdash \alpha$, entonces para todo γ se tiene $B(\Psi \star \gamma) \equiv B((\Psi \circ \alpha) \star \gamma)$ si y sólo si, Si para todo $\omega \in [\mu]$ y $\omega' \in [\mu]$ se tiene que $\omega <_\Psi \omega'$, entonces $\leq_\Psi = \leq_{\Psi\circ\mu}$*

Demostración: Supongamos entonces $\neg A$, esto es, para todo $\omega \in [\alpha]$ y $\omega' \in [\alpha]$ se tiene que $\omega <_\Psi \omega'$ y $\leq_\Psi \neq \leq_{\Psi\circ\alpha}$.

Afirmamos que para toda fórmula β consistente con α y con $\neg\alpha$ se tiene que $B(\Psi \star \beta) \vdash \alpha$ y que $\exists\gamma$ tal que $B(\Psi \star \gamma) \not\equiv B((\Psi \circ \alpha) \star \gamma)$.

En efecto,

Demostremos la primera parte de la afirmación.
Supongamos que existe una fórmula θ consistente con α y con $\neg\alpha$ tal que $B(\Psi\star\theta) \nvdash \alpha$ y lleguemos a una contradicción. Por (I3) y la representación tenemos que

$min([\theta], \leq_\Psi) \neq \emptyset$ y además que $min([\theta], \leq_\Psi) \not\subseteq [\alpha]$ de esta manera existe $\omega' \models \neg\alpha$ tal que $\omega' \in min([\theta], \leq_\Psi)$. Por otra parte como θ es consistente con α tenemos que existe $\omega \models \alpha \wedge \theta$. Como en particular $\omega \models \beta$ tenemos que $\omega' \leq_\Psi \omega$. De esta manera tenemos que $\omega \models \alpha$, $\omega' \models \neg\alpha$ y $\omega \not<_\Psi \omega'$ lo cual contradice la suposición inicial de que para todo $\omega \in [\alpha]$ y $\omega' \in [\alpha]$ se tiene que $\omega <_\Psi \omega'$.
Así, tenemos que para toda fórmula β consistente con α y con $\neg\alpha$ se tiene que $B(\Psi \star \beta) \vdash \alpha$.

Para la segunda parte de la afirmacipor representación bastará ver que $\exists\gamma$ tal que $min([\gamma], \leq_\Psi) \neq min([\gamma], \leq_{\Psi\circ\alpha})$. Por hipótesis $\leq_\Psi \neq \leq_{\Psi\circ\alpha}$ de esta manera sin perdida de generalidad existen valuaciones ω, ω' tales que $\omega \leq \Psi\omega'$ y $\omega \not\leq_{\Psi\circ\alpha} \omega'$. Consideremos la fórmula $\varphi_{\omega,\omega'}$ cuyos únicos modelos son ω y ω'. Así, $\omega \in min([\varphi_{\omega,\omega'}], \leq_\Psi)$ y $\omega \notin min([\varphi_{\omega,\omega'}], \leq_{\Psi\circ\alpha})$. De esta manera $min([\gamma], \leq_\Psi) \neq min([\gamma], \leq_{\Psi\circ\alpha})$ como queríamos.

Supongamos entonces $\neg A$, esto es, para todo β consistente con α y con $\neg\alpha$ se tiene que $B(\Psi \star \beta) \vdash \alpha$ y $\exists\gamma$ tal que $B(\Psi \star \gamma) \not\equiv B((\Psi \circ \alpha) \star \gamma)$

Sean ω, ω' valuaciones cualesquiera tales que $\omega \models \alpha$ y $\omega' \models \neg\alpha$. De nuestra suposición obtenemos que la fórmula $\varphi_{\omega,\omega'}$ cuyos únicos modelos son ω y ω' satisface que $B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'}) \vdash \alpha$, este último hecho junto a (I1) implica que $[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})] \subseteq [\alpha \wedge \varphi_{\omega,\omega'}]$ así por (I3) tenemos que $[B(\Psi \star \varphi_{\omega,\omega'})] = \{\omega\}$, lo que por representación nos dice que $\omega <_\Psi \omega'$.
Pero supusimos además que $\exists\gamma$ tal que $B(\Psi \star \gamma) \not\equiv B((\Psi \circ \alpha) \star \gamma)$ esto por representación nos dice que $min([\gamma], \leq_\Psi) \neq min([\gamma], \leq_{\Psi\circ\alpha})$ lo cual implica que $\leq_\Psi \neq \leq_{\Psi\circ\alpha}$.

∎

Recordemos que lo operadores definidos en el capítulo 2 $\odot$, $\oslash$ y $\oplus$, son operadores de mejoramiento básico. Por lo tanto, podemos obtener un teorema de representación más fuerte para estos operadores teniendo en cuenta dos factores:

El primer factor es que la condición (S3) implica a las condiciones (BS6) y (BS7).

El segundo factor es que el resto de las condiciones de la asignación para estos operadores implican la condición (BS8).

Por lo tanto las asignaciones asociadas a estos operadores (uno-gradual, medio-gradual y mejor-gradual) son en efecto asignaciones básicas que satisfacen otras condiciones específicas. De esta manera tenemos los siguientes tres resultados:

Teorema 5.21 *Si $\circ$ es un operadores de uno-mejoramiento, es decir, satisface los postulados (I1)-(I11), entonces existe una asignación uno-gradul (una asignación que satisface las condiciones 1, 2, 3, S1, S2, S3, S4 and SO) que envía a cada estado epistémico Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$ tal que*

$$[[B(\Psi \star \alpha)]] = min([[\alpha]], \leq_\Psi) \tag{5.2}$$

Recíprocamente, supongamos que $\circ$ es un operador de cambio para el cual existe una asignación uno-gradual que envía a cada estado espitémico Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$, entonces el operador $\circ$ es un operador de mejoramiento y la ecuación (5.2) se satisface para esta asignación gradual.

Teorema 5.22 *Si $\circ$ es un operador de medio mejoramiento, es decir, satisface los postulados (I1)-(I10),(H1),(H2) entonces existe una asignación medio gradual (una asignación que satisface las condiciones 1, 2, 3, S1, S2, S3, S4, SH1 and SH2) que envía a casa estado epistémico Ψ a un preorden total $\leq_\Psi$ tal que*

$$[[B(\Psi \star \alpha)]] = min([[\alpha]], \leq_\Psi) \tag{5.3}$$

Recíprocamente, supongamos que $\circ$ es un operador de cambio para el cual existe una asignación medio gradual que envía a cada estado epistémico Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$, entonces el operador $\circ$ es un operador de mejoramiento y la ecuación (5.3) se sastisface para esta asignación gradual.

Teorema 5.23 *Si $\circ$ es un operador de mejor mejoramiento, es decir, satisface los postulados (I1)-(I1),(B1),(B2) entonces existe una asignación mejor gradual (una asignación que satsiface las condiciones 1, 2, 3, S1, S2, S3, S4, SB1 y SB2) que envía a cada estado epistémico Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$ tal que*

$$[[B(\Psi \star \alpha)]] = min([[\alpha]], \leq_\Psi) \tag{5.4}$$

Recíprocamente, supongamos que $\circ$ es un operador de cambio para el cual existe una asignación mejor gradul que envía a cada estado epistémico Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$, entonces el operador $\circ$ es un operador de mejoramiento y la ecuación (5.4) se cumple para esta asignación gradual.

Capítulo 6

Observaciones finales y perspectivas

En este trabajo dimos un resumen sobre el proceso de revisión de creencias dentro del marco AGM [1] rentringiéndonos al caso finito, repasamos los trabajos de Darwiche y Pearl [3] introduciendo la noción de estados epistémico de un agente y todo el nuevo marco DP con el que corrigieron varios defectos del marco AGM. También revisamos el trabajo propuesto por Jin y Thielscher y Booth y Meyer donde realizan mejorías al marco DP.

Más adelante, estudiamos una nueva clase de operadores de cambio de creencias llamados "Operadores de Mejoramiento" propuesto por Pino y Konieczny [10]. Estos operadores no satisfacen el postulado de éxito que caracteriza a todos los operadores de mejoramiento hasta ahora conocidos. Como su nombre lo sugiere, en el mejoramiento de creencias, la información mejora en mayor o en menor cantidad en cada iteración dándonos garantía de que luego de un número finito de iteraciones esta información será finalmente aceptada en las creencias del agente.

Esta nueva clase de operadores obedece mucho más al principio del cambio minimal (desde el punto de vista de Kemeny) que los operadores de revisión. Presentamos y mostramos sus respectivos teoremas de representación de todas las clases de operadores de mejoramiento, los operadores más generales llamados Operadores de mejoramiento débil y Operadores de mejoramiento [8]. Luego a los operadores de mejoramiento suave, los operadores de uno-mejoramiento, medio-mejoramiento y mejor-mejoramiento. Estudiamos la clasificación de estos operadores de acuerdo al cambio minimal notando que el mejor-mejoramiento era el operador que generaba menos cambio en las creencias de un agente, seguido por los operadores de uno-mejoramiento y medio-mejoramiento y notamos que este hecho tiene que ver con que el operador de mejor-mejoramiento se comporta de manera no-modular, lo contrario al uno-mejoramiento y al medio-mejoramiento.

Nuestro aporte en este trabajo fué dar un teorema de representación para los operadores de mejoramiento sin suponer de antemano el postulado de éxito iterado ya que pareciera ser una hipótesis muy fuerte para una representación que se basa escencialmente en ese hecho. Para esto agregamos nuevos postulados a la lista de postulados de mejoramiento débil y sus correspondientes contrapartes semánticas en la asignación fuerte y fiel. A estos operadores los llamados "Operadores de mejoramiento básico". Con estos operadores como punto de partida pudimos también demostrar teoremas de representación para todas las demás clases de operadores de mejoramiento, teoremas que a nuestro juicio si representan completamente el proceso de mejoramiento de creencias.

Las perspectivas de este trabajo apuntan a la búsqueda de el operador de mejoramiento que genere el cambio minimal definitivo, es decir, el operador de mejoramiento (básico) que genere menos cambio según Kemeny respecto a todos los ya aquí presentados. Tenemos una idea semántica clara de cómo sería este operador, este operador sería un operador de mejoramiento básico no modular, que tendría la capacidad de ubicar en el estado epistémico dónde hayan menos modelos y no modelos en un mismo nivel y mejorar como lo hace el mejor-mejoramiento dicho nivel. Es decir, este operador mejora solo el nivel que de antemano sabe que producirá menos cambios al mejorarlo, cumpliendo con esto todos los postulados de un operador de mejoramiento y además asegurando su minimalidad absoluta. El problema está en conseguir una representación sintáctica de estos operadores que llamaríamos de "Mejoramiento Optimal".

Bibliografía

[1] Gärdenfors P. Alchourrón, E. and D. Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[2] R. Booth and T. Meyer. Admissible and restrained revision. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 26:127–151, 2007.

[3] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial Intelligence*, 89:1–29, 1997.

[4] S. O. Hansson. What's new isn't always best. *Theoria. Special issue on non-prioritized belief revision*, 41:1–13, 1997.

[5] Y. Jin and M. Thielscher. Iterated belief revision, revised. *Artificial Intelligence*, 171:1–18., 2007.

[6] H. Katsuno and O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52:263–294, 1991.

[7] J. G. Kemeny. Mathematics without numbers. *Daedalus*, 88:571–5913, 1959.

[8] Medina M. Konieczny, S. and R. Pino. Taxonomy of improvement operators and the problem of minimal change. 2010.

[9] A.C. Nayak. Iterated belief change based on epistemic entrenchment. *Erkenntnis*, 41:353–390, 1994.

[10] Konieczny S. and R . Pino. Improvement operators. *In Proceedings of the Eleventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 177–187, 2008.

[11] W. Spohn. Ordinal conditional functions: A dynamic theory of epistemic states. *W.L. Harper and B.skyrms, editors, Causation in Decision: Belief Change and Statistics*, 41:105–134, 1988.