



UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

textos

universitarios

MANUAL DE CÁLCULO INTEGRAL Y FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Aplicado a las Ciencias Administrativas, Económicas, Financieras y Contables



Alexis de la Cruz Martínez Nieto

MANUAL DE CALCULO INTEGRAL Y FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES



UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Alexis de la Cruz Martínez Nieto



PUBLICACIONES VICERRECTORADO ACADÉMICO



MANUAL DE CÁLCULO INTEGRAL Y FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Aplicado a las Ciencias Administrativas, Económicas, Financieras y Contables



PUBLICACIONES
VICERRECTORADO ACADÉMICO

Universidad de Los Andes
Mérida 2025 - Venezuela

**MANUAL DE CÁLCULO INTEGRAL
Y FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES**
Aplicado a las Ciencias Administrativas, Económicas, Financieras y Contables

ALEXIS DE LA CRUZ MARTÍNEZ NIETO

COLECCIÓN TEXTOS UNIVERSITARIOS
Sello Editorial Publicaciones del Vicerrectorado Académico
Universidad de Los Andes

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Autoridades universitarias

- **Rector**
Mario Bonucci Rossini
- **Vicerrectora Académica**
Patricia Rosenzweig Levy
- **Vicerrector Administrativo**
Manuel Aranguren Rincón
- **Secretario (I)**
Manuel Joaquín Morocoima

SELLO EDITORIAL PUBLICACIONES DEL VICERRECTORADO ACADÉMICO

- **Presidenta**
Patricia Rosenzweig Levy
- **Coordinadora**
Marysela Coromoto Morillo Moreno
- **Consejo editorial**
Patricia Rosenzweig Levy
Marysela Coromoto Morillo Moreno
María Teresa Celis
Marlene Bauste
Francisco Grisolia
Jonás Arturo Montilva
Joan Fernando Chipia L.
María Luisa Lazzaro
Alix Madrid

COLECCIÓN TEXTOS UNIVERSITARIOS
Sello Editorial Publicaciones del
Vicerrectorado Académico

Los trabajos publicados en esta colección
han sido rigurosamente seleccionados y
arbitrados por especialistas en las diferentes
disciplinas

COLECCIÓN TEXTOS UNIVERSITARIOS

Sello Editorial Publicaciones
Vicerrectorado Académico

MANUAL DE CÁLCULO INTEGRAL Y
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
Aplicado a las Ciencias Administrativas,
Económicas, Financieras y Contables
Primera edición digital, 2025

© Universidad de Los Andes
Sello Editorial Publicaciones del
Vicerrectorado Académico
de la Universidad de Los Andes
© ALEXIS DE LA CRUZ MARTÍNEZ NIETO

Hecho el depósito de ley
Depósito Legal: 2025000217
ISBN: 978-980-112254-8

Corrección de estilo:
Carlos Perdomo Ramírez

Diagramación:
Raquel Morales Soto

Diseño de la portada:
Raquel Morales Soto

Imagen de la portada:
<https://pixabay.com/es/images/search/matem%C3%A1tica%20c%C3%A1lculo%20funciones%20Universidad%20de%20Los%20Andes%20Av.%203%20Independencia,%20Edificio%20Central%20del%20Rectorado,%20M%C3%A9rida,%20Venezuela.%20publicacionesva@ula.ve%20publicacionesva@gmail.com%20http://www2.ula.ve/publicacionesacademicas>

**Prohibida la reproducción total o
parcial de esta obra sin la autorización
escrita de los autores y editores.**

Editado en la
República Bolivariana de Venezuela

COLECCIÓN DE TEXTOS UNIVERSITARIOS

Esta colección contempla la edición de textos académicos que sirven de apoyo docente en las áreas del conocimiento existentes en la Universidad: Ciencias Humanísticas y Sociales, las Ciencias Naturales, la Ingeniería y la Tecnología, la Medicina y las ciencias de la salud y las ciencias agrícolas.

Entre los objetivos específicos de esta colección resaltan:

- Estimular la edición de libros al servicio de la docencia.
- Editar la obra científica de los profesores de nuestra Casa de Estudios.
- Publicar las investigaciones generadas en los centros e institutos de investigación.

Hasta ahora, un número considerable de textos universitarios ha sido publicado por miembros de nuestra planta profesoral, obras de las que se han beneficiado por igual estudiantes y docentes, en la búsqueda del mejoramiento de la calidad de nuestra educación de pre y posgrado.



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES



PUBLICACIONES
VICERRECTORADO ACADÉMICO

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a Dios por haber guiado mi vida por la senda del estudio.

A mis hijos, nietos y estudiantes de ayer, de hoy y de mañana, porque con ellos y para ellos este libro puede cobrar sentido.

AGRADECIMIENTO

A: Jeisson Alexis, María Fabiana, Miguel Adrián, Mateo Sebastián y Samanta Stefanía. Ustedes son mi ancla, mi inspiración y mi mayor alegría. La razón por la que vale la pena cada esfuerzo.

Gracias por ser mi recordatorio constante de que la vida real es la aventura más importante y que cada uno de ustedes son la prolongación de mi vida.

ÍNDICE

	Pág.
DEDICATORIA	5
AGRADECIMIENTO	7
PREFACIO	11
CAPÍTULO I. Integrales Indefinidas	
1.1 Antidiferenciación: Integral Indefinida.....	19
1.2 Fórmulas Básicas de Integración.....	22
1.3 Integrales con Condiciones Iniciales.....	30
1.4 Aplicaciones de la Integral Indefinida.....	34
1.5 Integrales por Sustitución y Aplicaciones.....	41
1.6 Integrales por Partes y Aplicaciones.....	54
1.7 Ejercicios y Problemas Propuestos.....	58
1.8 Integración por Pastes para Integrales Definidas.....	63
1.9. Ejercicios y Problemas de Aplicación Propuestos.....	66
CAPÍTULO II. Integral Definida	
2.1 Integral Definida.....	75
2.2 Teorema Fundamental del Cálculo.....	79
2.3 Propiedades de la Integral Definida.....	82
2.4 Aplicaciones de la Integral Definida.....	82
2.5 Integrales Definidas y las Áreas.....	86
2.6 Áreas entre Curvas.....	95
2.7 Aplicaciones de las Áreas en la Administración y la Economía.....	110
2.8 Integración por medio de Tablas y Programas Matemático Compu- tacionales	134
2.9 Programas Matemáticos Computacionales.....	143

2.10 Métodos Numéricos de Integración.....	147
2.11 Integrales Impropias.....	148
2.12 Aplicaciones de las Integrales Impropias.....	160
2.13 Aplicaciones en las Probabilidades y la Estadística.....	167
2.14 Ejercicios y problemas Propuestos.....	170

CAPÍTULO III. Ecuaciones Diferenciales

3.1 Ecuaciones Diferenciales.....	197
3.2 Método de Separación de Variables.....	198
3.3 Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales.....	204
3.4 Elasticidad de Demanda.....	211
3.5 Ejercicios y Problemas Propuestos.....	212

CAPÍTULO IV. Funciones de Varias Variables

4.1 Definiciones Básicas.....	217
4.2 Derivadas Parciales.....	221
4.3 Aplicaciones de las Derivadas Parciales.....	225
4.4 Derivadas Parciales de Orden Superior.....	231
4.5 Máximos y Mínimos sin Restricciones.....	236
4.6 Máximos y Mínimos con Restricciones.....	247
4.7 Integrales Múltiples.....	254
4.8 Ejercicios y Problemas Propuestos.....	257

GLOSARIO	269
APÉNDICE.....	279
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.....	283
REFERENCIAS	311

PREFACIO

Durante mis treinta años de estudios y trabajo, la asignatura que más me apasiona es la matemática. No es exagerado decir que esta pasión cambió mi vida.

Unos de los motivos que me llevó a escribir éste Manual fue la esperanza de poder dar respuesta a varias interrogantes que tenía como estudiante y a las que tienen muchos estudiantes hoy día, las cuales hacen referencia a: ¿Para qué aprender matemática si mi carrera profesional es la Administración o la Contaduría?, ¿dónde y cuándo se aplica la matemática? Trataremos de dar respuesta a ellas a través de tres epígrafes, donde nuestro discurso será acotado al campo de las ciencias económicas, administrativas y financieras.

La Matemática como una actividad con sentido

Uno de los componentes esenciales en el aprendizaje de la matemática se relaciona con las ideas propias de lo que son las matemáticas. Así, al analizar el aprovechamiento matemático de los estudiantes es importante responder la pregunta “¿qué significa que un estudiante aprenda matemática?”, una respuesta muy conocida relaciona el aprendizaje con una simple acumulación de pedazos de información (conceptos y habilidades) acomodados en una secuencia ordenada. Es decir, aprender matemática significa identificar los artefactos de la disciplina, esto es, sus conceptos y sus procedimientos. Aquí la matemática se le ve como un cuerpo de conocimientos acotado y estático que el estudiante tiene que dominar vía la mecanización. Sin embargo, esta concepción ha sido cuestionada y han empezado a surgir otras perspectivas acerca del aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, la idea que el aprender matemática se relaciona con que el estudiante desarrolle o construya las ideas matemáticas, ubica a esta disciplina como un cuerpo dinámico de conocimientos en constante expansión. Bajo esta perspectiva, el estudiante, al desarrollar matemáticas, se involucra en las actividades propias de esa disciplina. En este proceso, el estudiante recolecta información, descubre o crea relaciones, discute sus ideas, plantea conjeturas y constantemente evalúa y contrasta sus resultados. Es decir, en el aprendizaje de las matemáticas es importante el proceso y el sentido que los estudiantes muestran en el desarrollo o construcción de las ideas matemáticas. Romberg (1992) ilustra la idea de desarrollar o hacer matemáticas con la música: Afirma que la música, al igual que las matemáticas, posee varias ramas organizadas en una variedad de formas (clásica, jazz, rock, instrumental, vocal); también tiene un sistema notacional para preservar y difundir información (notas, claves, y teorías que describen la escritura de las composiciones (escalas, patrones). Sin embargo, no importa cuántos componentes de

la música uno aprenda, esto no es lo mismo que hacer música. De manera similar, en matemática uno puede aprender los conceptos acerca de los números, resolver ecuaciones, graficar funciones, etc., pero eso no es desarrollar matemáticas. Hacer o desarrollar matemáticas incluye el resolver problemas, aplicar los conceptos a situaciones diferentes, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido de las ideas matemáticas. En el proceso de aprender matemática, el estudiante no sólo asimila un conjunto de habilidades matemáticas formales sino también aspectos relacionados con el sentido de las matemáticas. Es decir, aprender matemática es un proceso que incluye el encontrar sentido a las relaciones, separarlas y analizarlas para distinguir y discutir sus conexiones con otras ideas.

Para que los estudiantes vean a la matemática como una actividad con sentido, necesitan aprenderlas en un salón de clases que sea un microcosmos de la cultura matemática. Es decir, clases donde los valores de las matemáticas como una disciplina se reflejen en la práctica cotidiana y en la aplicación de problemas propios de la profesión. Un aspecto esencial en el desarrollo de las ideas matemáticas es el proceso de formular y resolver problemas. En este contexto surge una propuesta para el aprendizaje de las matemáticas en donde actividades tales como identificar, diseñar y resolver problemas desempeñan un papel fundamental durante el estudio de las ideas matemáticas.

Las ventajas del Cálculo y la razón fundamental para su estudio

Cuando nuestros queridos estudiantes entiendan que el cálculo está presente en casi todas las actividades de nuestras vidas o en todas las situaciones donde varíe una magnitud en forma continua (muchos fenómenos naturales son de este tipo); y que podemos recurrir al cálculo diferencial para calcular razones de cambio; y a partir de la razón de cambio, se puede, con los métodos del cálculo integral, encontrar la magnitud inicial. Expresado brevemente, el cálculo integral es un método que permite encontrar la relación entre magnitudes que cambian según ciertas reglas. Por tanto, el cálculo diferencial y el cálculo integral consisten en métodos matemáticos importantes estrechamente ligados entre sí.

Por otra parte, se desea que el estudiante conozca que en el cálculo diferencial nos interesa el “cambio instantáneo” de una magnitud, mientras que en el cálculo integral nos interesa los resultados totales o los procesos de cambio de dichas magnitudes. Se pretende evitar que el estudiante llegue a repetir mecánicamente que la integral de $f(x) = x^2$ es $g(x) = \frac{x^3}{3} + c$ y que la derivada de $g(x) = \frac{x^3}{3} + c$ es otra vez $f(x) = x^2$, sin haber entendido lo que es una derivada ni una integral y que por ejemplo en una cuenta bancaria los movimientos de dinero diarios (depósitos y retiros)

están representados por el concepto de derivada (razón de cambio por día) y que el saldo al final de cada día o de la semana está representado por el concepto de integral (efecto de los cambios diarios).

Del mismo modo, nuestros estudiantes deben saber que utilizando el cálculo integral podemos resolver muchos problemas interesantes en economía, finanzas y administración de empresas, por ejemplo: encontrar funciones de costo total, dada la información sobre los costos marginales y los costos fijos. Los contadores pueden utilizar la regresión lineal para traducir información referente al costo marginal a una ecuación lineal que define la función de costo marginal. Al integrar esta función de costo marginal encontraremos la función que define el costo total. También podemos usar la integración para encontrar las funciones de ingreso marginal con el fin de optimizar la ganancia a partir de la información sobre el costo marginal y el ingreso marginal, igualmente para encontrar las funciones de consumo nacional con base en información acerca de la propensión marginal al consumo. También para pronosticar el crecimiento o decaimiento a partir de expresiones que dan razones de cambio, por ejemplo, podemos determinar ecuaciones para el tamaño de la población con base en la tasa de crecimiento.

Con las integrales definidas hallaremos aproximaciones del valor total, el valor presente y el valor futuro de un flujo de ingreso continuo. Las integrales impropias sirven para encontrar el valor de flujos continuos de ingreso.

Utilizaremos uno de los teoremas más importante en el desarrollo de cálculo como lo es: “el teorema fundamental del cálculo”, para calcular áreas bajo la curva. En un mercado de capitales y competitivo, algunos consumidores están dispuestos a pagar más del precio de equilibrio fijado en el mercado y algunos productores están dispuestos a vender a menos de este precio. Las cantidades ahorradas se llaman superávit del consumidor y superávit del productor, y para calcularlos nos apoyaremos en las áreas bajo la curva de la demanda y la oferta. Así mismo, utilizaremos la Regla de los Trapecios y la Regla de Simpson como dos métodos numéricos para dar soluciones y hallar aproximaciones de algunas integrales definidas.

Al utilizar las derivadas respecto a una de dos o más variables (conocidas como derivadas parciales) encontraremos el costo, la productividad y la demanda marginal, así como otras razones de cambio. Igualmente, encontraremos los máximos y mínimos de funciones de dos o más variables y nos serviremos de los multiplicadores de Lagrange para optimizar las funciones de dos variables, sujetas a condiciones que restringen las variables. Estas capacidades se utilizarán para incrementar al máximo los beneficios, la producción y la utilidad, así como para reducir el costo mínimo.

Una vez conocidas estas ideas y conceptos verán al cálculo diferencial- integral y sus aplicaciones como una herramienta valiosa para resolver situaciones reales y problemáticas que en su mayoría se presentan fuera de la matemática misma, las cuales exigen de los estudiantes la identificación de las correspondientes estructuras matemáticas e igualmente el entendimiento del contexto donde tiene lugar dicha situación problemática.

Rol de la Matemática en las ciencias económicas y administrativas

Para terminar de dar respuesta a las interrogantes planteadas, haremos un pequeño recorrido del papel de las matemáticas en el campo de las ciencias económicas y la aparición de los “modelos matemáticos” como medio para transmitir el conocimiento. La actividad económica y de mercado ha sido parte integrante de la vida humana durante miles de años. La misma palabra “economía” viene del griego clásico y significa “gestión doméstica”. Incluso antes de los griegos, había vendedores y mercaderes que mostraban comprensión de ciertos fenómenos económicos. Por ejemplo, sabían que una cosecha pobre implicaba un aumento del precio de ese rubro. Durante muchos siglos los conceptos económicos básicos se expresaban en términos sencillos, que requerían solamente de una matemática rudimentaria. A los vendedores, mercaderes, agricultores y otros agentes económicos les bastaba conceptos como enteros y fracciones, junto con las cuatro operaciones de la aritmética, para discutir las actividades económicas que afectaban a sus vidas diarias. Con estas herramientas los mercaderes tenían suficiente para su contabilidad y para calcular los precios.

La ciencia de la administración y de la economía dio un giro en redondo en el siglo XVIII con la publicación de trabajos como el de David Hume “Political Discourses” (1752), El Tableau Economique de François Quesnay (1759), o The Wealth of Nations de Adam Smith (1776). Se empezaron a formalizar los razonamientos económicos y a desarrollarlos en teorías. Esto creó la necesidad de expresar interrelaciones e ideas, de complejidad creciente, de una manera automática. Hacia mitad del siglo XIX algunos autores comenzaron a usar las matemáticas para elaborar sus teorías. Entre los primeros estaban economistas como Agustín Cournot (que fue el primero en definir y dibujar una curva de demanda y en usar el cálculo diferencial para resolver problemas de maximización en economía). También descubrieron que muchas de sus ideas se podían formular de forma más efectiva usando un lenguaje matemático, que incluía símbolos algebraicos, diagramas y gráficos sencillos. En verdad, el uso del lenguaje matemático ha hecho posible la introducción de conceptos económicos muchos más sofisticados y de teorías económicas cada vez más complejas.

Las matemáticas en las ciencias económicas, como en otros campos científicos, se consideran como la herramienta fundamental para adquirir y consolidar el

conocimiento, y para ello se han apoyado en los Modelos Matemáticos, los cuales aportan el lenguaje y la estructura conceptual necesaria para expresar reglas generales de comportamiento y obtener predicciones de validez general. Su utilización facilita que los conocimientos adquiridos en las investigaciones sociales puedan transmitirse con precisión, estimulando la comunicación entre investigadores de distintas áreas. Podríamos esperar que cuanto mayor sea la posibilidad en una disciplina de medir sus variables de interés y de establecer reglas generales sobre las relaciones entre ellas, mayor será su contenido matemático.

En las ciencias económicas prácticamente la totalidad de las relaciones con las que nos encontramos son relaciones estadísticas, o relaciones de regresión o en promedio. Por ejemplo, si decimos que el aumento del precio del pan hará disminuir su demanda si todas las demás variables permanecen constantes, estamos haciendo una afirmación que nunca podremos verificar en la práctica, porque nunca en la vida social dos situaciones van a ser idénticas: siempre habrá en la vida social muchas variables que pueden tener efecto en la relación y que no podemos controlar y, con frecuencia, ni incluso medir. Para que sea operativa esta regla debe reformularse como una relación estadística: no esperamos que vaya a cumplirse siempre, sino sólo en promedio.

El núcleo central de la Economía moderna es la Teoría Económica, que consiste en la explicación mediante una firme base matemática de los fenómenos económicos. Consideremos uno de los primeros modelos que se introducen en un libro de economía: la formación del precio de un bien como punto de equilibrio entre las curvas de oferta y demanda. Se supone que la cantidad de un bien que los consumidores están dispuestos a adquirir depende del precio, según una curva de demanda, y que la cantidad que los productores ofertan es también función del precio, según la curva de oferta. El punto de encuentro o de equilibrio entre ambas curvas es el precio. Si consideramos un mundo estático, la existencia de un punto de equilibrio en este tipo de situaciones es central en la teoría económica y es un problema matemático de interés que ha sido extensamente estudiado en la teoría económica.

Si pensamos en el conjunto de bienes de una economía, aparece el problema del Equilibrio General, donde la situación es más compleja al existir la posibilidad de sustituir unos bienes por otros. La teoría del equilibrio general fue planteada por León Walras (1834 - 1910). El análisis del equilibrio y los problemas de las preferencias o utilidades están presentes también en la que es probablemente la mayor contribución a la matemática proveniente de la necesidad de resolver un problema económico: La Teoría de Juegos. Fue desarrollada por Morgenstern y Jhon Von Neuman (1944) y supuso un nuevo planteamiento de las decisiones económicas donde los agentes, en lugar de reaccionar a unos precios que se fijan externamente, eligen su estrategia en un

mundo competitivo frente a otros agentes económicos. La teoría de juegos tiene un avance fundamental por el trabajo del matemático John Nash (1950), que estudió juegos cooperativos de suma no nula y demostró la existencia de equilibrio en estos juegos permitiendo estrategias mixtas, es decir, donde cada jugador selecciona su decisión con una probabilidad dada.

Los problemas de juegos pueden englobarse dentro del campo de la teoría de la decisión, que es otra de las contribuciones fundamentales de la matemática aplicada a la economía. Esta teoría estudia la decisión óptima entre un conjunto de alternativas, conocidas las consecuencias de sus decisiones. La teoría de la decisión ha tenido especial importancia en el campo de las decisiones de inversión. En 1952, Harry Markowitz, demostró, utilizando esta teoría, que el problema de invertir en condiciones de incertidumbre entre muchos activos puede reducirse a contraponer la varianza de la inversión, que mide el riesgo y la rentabilidad esperada.

Cuando pasamos del campo de la macroeconomía al de la microeconomía y la administración de empresas encontramos que las relaciones entre las variables importantes son siempre estadísticas. Por ejemplo, en el área comercial el efecto de una campaña de promoción sobre la demanda de un producto tiene que estimarse estadísticamente, normalmente mediante técnicas de series temporales. Además, los problemas de distribución de redes, de canales de comercialización, etc., han impulsado el desarrollo de las técnicas de Investigación Operativa. En el área de personal la relación entre las características personales y el rendimiento laboral es de nuevo una relación estadística y las técnicas de análisis factorial y de clasificación tienen mucha importancia en Psicometría y en el análisis de comportamiento humano en las organizaciones. En el área de producción, la caracterización del estado de control de un proceso o de la capacidad de un sistema se establece en términos estadísticos y todo el campo moderno de la mejora de la calidad y productividad está basado en estos conceptos. Finalmente, la planificación de la producción ha sido un motor en el desarrollo de la programación matemática, y la investigación operativa ha desarrollado un repertorio de técnicas y modelos para la planificación y gestión de la producción y la distribución de productos.

Propósito del Manual

Los estudiantes de Contaduría, Administración y Economía de nuestras universidades necesitan dominar diversas e importantes herramientas matemáticas. Entre otras, el cálculo, para el estudio de funciones que les permitan buscar buenos modelos de ajustes de datos, estudiar cualitativa y cuantitativamente modelos que surjan de las teorías económicas, y para la resolución de problemas de optimización que les permitan repartir y asignar eficientemente recursos escasos y planificar eficazmente

actividades. Es por ello que el propósito de este Manual es ayudar a los estudiantes a adquirir las habilidades matemáticas necesarias para evidenciar los valores instrumentales, estructurales y formativos que posee la matemática, con la intención de formar profesionales que utilicen a la matemática como una herramienta para solucionar problemas, pero que a su vez logren desarrollar las capacidades de aplicar el pensamiento deductivo, el de análisis, la abstracción y puedan modelar objetos o situaciones a fin de poder modificar los conceptos a nuevos contextos.

Organización

El capítulo I trata de las integrales indefinidas, las fórmulas básicas de integración y problemas con condiciones iniciales, los métodos de cambio de variables e integrales por partes. El capítulo II se estudia la integral definida, se calcula área bajo la curva y sus diferentes aplicaciones, entre ellas: Índice de Gini, excedente de los consumidores y productores, Valor Presente y Futuro de un flujo de ingreso continuo, el método de las fracciones parciales, las integrales por medio de Tablas, los métodos numéricos de integración, las integrales impropias y sus aplicaciones en el campo de las probabilidades y la estadística. El capítulo III hace referencia al estudio de las ecuaciones diferenciales y sus diferentes aplicaciones en el campo de las ciencias económicas. El capítulo IV trata de las funciones de varias variables, en ellas estudiaremos las derivadas parciales y sus distintas aplicaciones, así, como los multiplicadores de Lagrange para hallar máximos y mínimos con restricciones, también veremos integrales múltiples (dobles y triples).

Ejemplos – ejercicios y problemas

Se ha dedicado un gran esfuerzo a la selección de los 164 ejemplos distribuidos en los diferentes capítulos y los 420 ejercicios y problemas de aplicación propuestos. La sección de respuestas incluye las soluciones de todos ellos.

Glosario

Estamos convencidos que el estudiante debe manejar y conocer un conjunto de términos y conceptos propios de las ciencias económicas, administrativas y financieras, que permitirán moverse en su propio entorno y por ende apropiarse de los distintos conocimientos y herramientas en el aprendizaje.

CAPÍTULO I: Integrales Indefinidas

1.1. Antiderivación: La integral indefinida

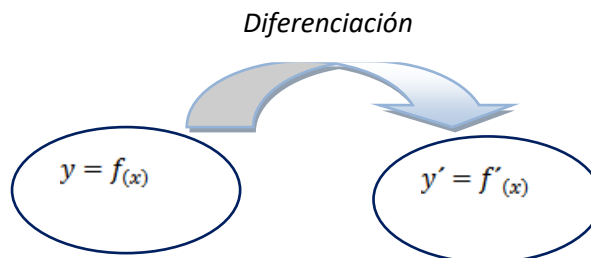
Para cualquier función de costo total podemos encontrar la tasa de cambio instantánea en cualquier nivel de producción (Costo Marginal), a esto se conoce como la Derivada de la Función Costo Total.

$$\begin{array}{ccc} y = C(x) & \longrightarrow & y' = C'(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Costo Total} & & \text{Costo Marginal} \end{array}$$

Del mismo modo, dada la función, $y = x^2$ podemos encontrar su derivada $y' = 2x$

$$\begin{array}{ccc} y = x^2 & \longrightarrow & y' = 2x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Función Primitiva} & & \text{Función Derivada} \end{array}$$

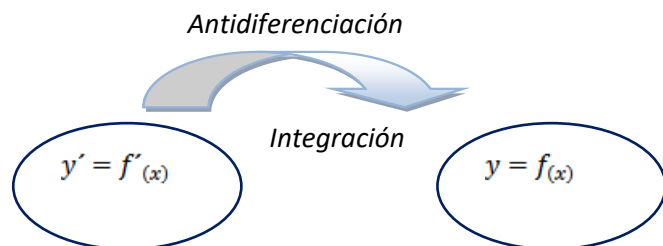
En general, dada una función cualquiera podemos encontrar su derivada. A este proceso se conoce como Diferenciación.



Ahora bien, al revertir el proceso de diferenciación, se puede medir los costos, ingresos y ganancias marginales para encontrar las funciones de costo total, ingresos y ganancias totales.

$$\begin{array}{ccc} y' = C'(x) & \longrightarrow & y = C(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Costo Marginal} & & \text{Costo Total} \end{array}$$

En general, dada la derivada de una función podemos encontrar la función primitiva. A este proceso de obtener una función a partir de su derivada se denomina: Antidiferenciación o Integración.



Definición Una función F recibe el nombre de antiderivada de f si $F'(x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f .

Ejemplo 1

Comprobar que $F(x) = 3x^2 + 5x - 3$ es una antiderivada de $f(x) = 6x + 5$.

Solución

Para comprobar que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, se debe cumplir que $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = 6x + 5 = f(x)$$

Como se requería, por lo tanto, F es una antiderivada de f .

Ejemplo 2

Demostrar que las funciones definidas por $F(x) = x^3$; $G(x) = x^3 - 4$; $H(x) = x^3 + 20$;

$I(x) = x^3 - \frac{3}{4}$; $J(x) = x^3 - 100$, son antiderivadas de $f(x) = 3x^2$.

Solución

Debemos probar que $F'(x); G'(x); H'(x); I'(x); J'(x) = f(x)$

$$F'(x) = 3x^2 = f(x)$$

$$G'(x) = 3x^2 = f(x)$$

$$H'(x) = 3x^2 = f(x)$$

$$I'(x) = 3x^2 = f(x)$$

$J'(x) = 3x^2 = f(x)$, de manera que: F, G, H, I, J son antiderivadas de f .

Del ejemplo anterior, podemos inferir que $f(x) = 3x^2$ tiene un número infinito de antiderivadas y como la derivada de una constante es cero, $x^3 + c$ también es una antiderivada de $3x^2$ para cualquier constante c . Así tenemos que:

$f(x) = 3x^2 = \left\{ x^3; x^3 - 4; x^3 + 20; x^3 - \frac{3}{4}; x^3 - 100; \dots \right\} = x^3 + c$ que se lee: "integral indefinida de $3x^2$ con respecto a x ; y se escribe

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c$$

El símbolo \int se llama Símbolo de la Integral

$3x^2$ es el integrando

dx indica la variable a integrar

x^3 es una antiderivada de $3x^2$

c es la constante de integración

$x^3 + c$ es la antiderivada más general

Como todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante y si F' es cualquier antiderivada de f , entonces

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Definición: Para toda x en el dominio de f se tiene

$$\int f(x) dx = F(x) + c \text{ sí y sólo sí } F'(x) = f(x)$$

Ejemplo 3

Encuentre $\int 3 dx$

Solución

Como se sabe que la derivada de $3x$ es 3 , $3x$ es una antiderivada de 3 . Por lo tanto

$$\int 3 dx = 3x + c \text{ ya que } (3x + c)' = 3$$

Si queremos resolver la $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, podemos darnos cuenta que no es fácil encontrar una función cuya derivada sea $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, es por ello que presentaremos a continuación algunas fórmulas básicas de integración que nos permitirán resolver con mayor facilidad las integrales.

1.2. Fórmulas Básicas de Integración

- | | |
|--|--------------------------|
| 1. $\int k dx = kx + c$ | k es una constante |
| 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ | $n \neq -1$ |
| 3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ | $x > 0$ |
| 4. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$ | k es una constante |
| 5. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$ | $\ln a$ es una constante |
| 6. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ | k es una constante |
| 7. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ | |
| 8. $\int \ln x dx = x \ln x - x + c$ | |

Ejemplo 4

Encuentre $\int 1 dx$

Solución

Como $k = 1$, tenemos $\int 1 dx = x + c$. Usualmente se escribe
 $\int 1 dx = \int dx = x + c$

Ejemplo 5

Encuentre $\int x^3 dx$

Solución

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c \quad \text{fórmula 2}$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Ejemplo 6

Encuentre $\int x^{-3} dx$

Solución

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c \quad \text{fórmula 2}$$

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$\int x^{-3} dx = -\frac{1}{2x^2} + c$$

Ejemplo 7

Encuentre $\int \frac{-5}{2} x dx$

Solución

$$\int \frac{-5}{2} x dx = -\frac{5}{2} \int x dx \quad \text{fórmula 6}$$

$$\int \frac{-5}{2} x dx = -\frac{5}{2} \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} \right) + c_1 \quad \text{fórmula 2}$$

$$\int \frac{-5}{2} x dx = -\frac{5}{2} \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right)$$

$\int \frac{-5}{2} x dx = -\frac{5}{4} x^2 - \frac{5}{2} c_1$, como $\frac{-5}{2} c_1$ es una constante arbitraria, tenemos

$$\frac{-5}{2} c_1 = c$$

$$\int \frac{-5}{2} x dx = -\frac{5}{4} x^2 + c$$

Ejemplo 8

Encuentre $\int 3e^{4x} dx$

Solución

$$\int 3e^{4x} dx = 3 \int e^{4x} dx \quad \text{fórmula 6}$$

$$\int 3e^{4x} dx = \frac{3}{4} e^{4x} + c \quad \text{fórmula 4}$$

Ejemplo 9

Encuentre $\int -\frac{2}{5} e^{-x} dx$

Solución

$$\int -\frac{2}{5} e^{-x} dx = -\frac{2}{5} \int e^{-x} dx \quad \text{fórmula 6}$$

$$\int -\frac{2}{5} e^{-x} dx = \left(-\frac{2}{5} \right) \left(\frac{1}{-1} \right) e^{-x} + c \quad \text{fórmula 4}$$

$$\int -\frac{2}{5}e^{-x}dx = \frac{2}{5}e^{-x} + c$$

Ejemplo 10

Encuentre $\int \frac{-5}{x} dx$

Solución

$$\int \frac{-5}{x} dx = -5 \int \frac{1}{x} dx \quad \text{fórmula 6}$$

$$\int \frac{-5}{x} dx = -5 \ln|x| + c \quad \text{fórmula 4}$$

Ejemplo 11

Encuentre $\int \left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x}\right) dx$

Solución

$$\int \left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x}\right) dx = \int \frac{x}{7} dx + \int \frac{7}{x} dx \quad \text{fórmula 7}$$

$$\int \left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x}\right) dx = \frac{1}{7} \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx \quad \text{fórmula 6}$$

$$\int \left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x}\right) dx = \frac{1}{7} \frac{x^2}{2} + 7 \ln|x| + c \quad \text{fórmula 2 y 4}$$

$$\int \left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x}\right) dx = \frac{1}{14} x^2 + 7 \ln|x| + c$$

Ejemplo 12

Encuentre $\int 2^{3x} dx$

Solución

$$\int 2^{3x} dx = \frac{1}{\ln 2} 2^{3x} + c \quad \text{fórmula 5}$$

Ejemplo 13

Encuentre $\int \left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) dx$

Solución

$$\int \left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) dx = \int x^2 dx - \int \frac{7}{2}x dx \quad \text{fórmula 7}$$

$$\int \left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) dx = \frac{x^3}{3} + c_1 - \frac{7}{2} \frac{x^2}{2} + c_2 \quad \text{fórmula 2 y 6}$$

$$\int \left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2 + c_1 - c_2 \quad (c_1 - c_2 = c)$$

$$\int \left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2 + c$$

En algunos casos, se hace necesario describir la integral o hacer algunas manipulaciones algebraicas que permitan resolver la integral dada.

Ejemplo 14

Encuentre $\int \frac{2}{3x^4} dx$

Solución

$$\int \frac{2}{3x^4} dx = \int \frac{2x^{-4}}{3} dx$$

$$\int \frac{2}{3x^4} dx = \frac{2}{3} \int x^{-4} dx$$

$$\int \frac{2}{3x^4} dx = \frac{2}{3} \left(\frac{x^{-3}}{-3} \right) + c$$

$$\int \frac{2}{3x^4} dx = -\frac{2}{9} x^{-3} + c$$

$$\int \frac{2}{3x^4} dx = -\frac{2}{3x^3} + c$$

Ejemplo 15

Encuentre $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Solución

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{1/2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2x^{1/2} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$$

Ejemplo 16

Encuentre $\int \left(-3\sqrt[4]{x^3} - 7x^{-3} + 2x^{1/2} + \frac{3}{x^2} - 4 \right) dx$

Solución

$$\int \left(-3\sqrt[4]{x^3} - 7x^{-3} + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{x^2} - 4 \right) dx = \int \left(-3x^{\frac{3}{4}} - 7x^{-3} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-2} - 4 \right) dx$$

$$\int \left(-3\sqrt[4]{x^3} - 7x^{-3} + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{x^2} - 4 \right) dx = -3 \left(\frac{x^{7/4}}{7/4} \right) - \frac{7x^{-2}}{-2} + 2 \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} \right) - \frac{3}{x} - 4x$$

$$\int \left(-3\sqrt[4]{x^3} - 7x^{-3} + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{x^2} - 4 \right) dx = \frac{-12}{7} x^{\frac{7}{4}} + \frac{7x^{-2}}{2} + \frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{3}{x} - 4x + c$$

Ejemplo 17

Encuentre $\int z(z^2 - 3)dz$

Solución

$$\int z(z^2 - 3)dz = \int (z^3 - 3z)dz$$

$$\int z(z^2 - 3)dz = \int z^3 dz - 3 \int z dz$$

$$\int z(z^2 - 3)dz = \frac{z^4}{4} - \frac{3}{2}z^2 + c$$

Ejemplo 18

Encuentre $\int \frac{(y+1)(2y-3)}{4} dy$

Solución

$$\int \frac{(y+1)(2y-3)}{4} dy = \frac{1}{4} \int (y+1)(2y-3) dy$$

$$\int \frac{(y+1)(2y-3)}{4} dy = \frac{1}{4} \int (2y^2 - y - 3) dy$$

$$\int \frac{(y+1)(2y-3)}{4} dy = \frac{1}{4} \int 2y^2 dy - \frac{1}{4} \int y dy - \frac{1}{4} \int 3 dy$$

$$\int \frac{(y+1)(2y-3)}{4} dy = \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{8}y^2 - \frac{3}{4}y + c$$

Ejemplo 19

Encuentre $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

Solución

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x+1}{x^{1/2}} dx$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x}{x^{1/2}} dx + \int \frac{1}{x^{1/2}} dx$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c$$

Ejemplo 20

Encuentre $\int (3y-5)^2 dy$

Solución

$$\int (3y-5)^2 dy = \int (9y^2 - 30y + 25) dy$$

$$\int (3y-5)^2 dy = 9 \int y^2 dy - 30 \int y dy + 25 \int dy$$

$$\int (3y-5)^2 dy = 3y^3 - 15y^2 + 25y + c$$

Ejemplo 21

Encuentre $\int \frac{2e^{-x}+3}{e^{-x}} dx$

Solución

$$\int \frac{2e^{-x} + 3}{e^{-x}} dx = 2 \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}} dx + \int \frac{3}{e^{-x}} dx$$

$$\int \frac{2e^{-x} + 3}{e^{-x}} dx = 2 \int dx + 3 \int e^x dx$$

$$\int \frac{2e^{-x} + 3}{e^{-x}} dx = 2x + 3e^x + c$$

1.3. Integrales con Condiciones Iniciales

Las integrales resueltas hasta este momento contienen la constante arbitraria c . Es posible determinar el valor de esta constante si se conoce alguna condición que debe cumplir la función primitiva que se está calculando. Por ejemplo, supongamos que $f'(x) = 2x$ y además que se debe cumplir la condición $f(1) = 5$. Entonces, la solución ya no estaría dada en términos de la constante c , ya que la condición nos permite conocer explícitamente este valor.

El procedimiento consiste en realizar la integración y posteriormente buscar el valor de la constante c , haciendo uso de la condición inicial. En este caso:

Si $f'(x) = 2x$, entonces $f(x) = \int f'(x) dx$

$$f(x) = \int 2x dx$$

$$f(x) = x^2 + c$$

Es decir, cualquier función de la forma $f(x) = x^2 + c$ tiene su derivada igual a $2x$. Ahora consideramos la condición, $f(1) = 5$, lo que significa que cuando sustituimos $x = 1$ también debemos considerar $f(x) = 5$. Así obtenemos:

$$1 = (1)^2 + c \rightarrow c = 4$$

Una vez determinado el valor de la constante, podemos hacerla explícita en $f(x) = x^2 + c$, por lo que la respuesta final es

$$f(x) = x^2 + 4$$

Ejemplo 22

Si $f(x)$ es una función de x tal que $f'(x) = 3x + 1$ y $f(0) = 16$, encuentre $f(x)$

Solución

$$f(x) = \int (3x + 1)dx = \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

$$f(0) = 16 \rightarrow 16 = \frac{3}{2}x^2 + x + c, \text{ es decir}$$

$$16 = \frac{3}{2}(0)^2 + 0 + c \rightarrow c = 16, \text{ por lo que}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + 16$$

Ejemplo 23

Si y es una función de x tal que $y' = 8x - 4$ y $y(2) = 5$, encuentre $y(4)$

Solución

$$y = f(x)$$

$y(2)$ significa que $y = 5$ cuando $x = 2$

La condición inicial es $y(2) = 5$

Como $y' = 8x - 4$, y es una antiderivada de $8x - 4$

$$y = \int y'(x)dx$$

$$y = \int (8x - 4)dx$$

$$y = 8 \int xdx - 4 \int dx$$

$$y = 4x^2 - 4x + c \quad (1)$$

Es posible determinar el valor de c por medio de la condición inicial $y(2) = 5$. Por tanto

$$5 = 4(2)^2 - 4(2) + c$$

$$5 = 16 - 8 + c$$

$$c = -3$$

Al remplazar c por -3 en la ecuación (1), obtenemos

$$y = 4x^2 - 4x - 3$$

Para encontrar $y(4)$, se establece que $x = 4$, luego

$$y = 4(4)^2 - 4(4) - 3$$

$$y = 64 - 16 - 3$$

$$y = 45$$

Ejemplo 24

Si $y''(x) = 4x - 2$

$$y'(0) = 2$$

$$y(2) = 1.$$

Encuentre $y(1)$

Solución

En primer lugar, al integrar $y''(x)$ se obtiene $y'(x)$

$$y'(x) = \int y''(x)dx$$

$$y'(x) = \int (4x - 2)dx$$

$$y'(x) = 2x^2 - 2x + c$$

Ahora al aplicar la primera condición inicial $y' = 2$ cuando $x = 0$, se obtiene

$$2 = 2(0)^2 - 2(0) + c$$

$$2 = c_1$$

Por tanto

$$y'(x) = 2x^2 - 2x + 2$$

Luego, integramos nuevamente para hallar $y(x)$, así

$$y(x) = \int y'(x) dx$$

$$y(x) = \int (2x^2 - 2x + 2) dx$$

$$y(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + c_2$$

Aplicando la segunda condición inicial encontramos el valor de c_2 . Esta segunda condición inicial implica que $y = 1$ cuando $x = 2$, por lo que

$$1 = \frac{2}{3}(2)^3 - (2)^2 + 2(2) + c_2$$

$$1 = \frac{16}{3} + c_2$$

$$c_2 = -\frac{13}{3}$$

Y sustituyendo se obtiene finalmente

$$y(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x - \frac{13}{3}$$

$$y(1) = \frac{2}{3}(1)^3 - (1)^2 + 2(1) - \frac{13}{3}$$

$$y(1) = \frac{2}{3} + 1 - \frac{13}{3}$$

$$y(1) = -\frac{8}{3}$$

1.4. Aplicaciones de la Integral Indefinida en el campo de las Ciencias Sociales

Algunos elementos básicos que es necesario recordar para resolver problemas de aplicación a la administración, economía y ciencias sociales son:

- I) La función derivada la conocemos como:
 - a) Tasa o razón de cambio de una función
 - b) La pendiente de la recta tangente en un punto p
 - c) Función marginal, entiéndase costo marginal, ingreso marginal, utilidad marginal, propensión marginal al ahorro, propensión marginal al consumo, etc.

II) Función de costos

El costo total de producir y vender q unidades de un producto es $c(q)$, que incluye tanto a los costos fijos como a los costos variables; es decir:

$$c_t = c_f + c_v$$

Los costos fijos c_f no dependen del nivel de producción q y permanecen constantes a lo largo de un periodo productivo; estos costos son tales como el pago de alquiler, seguros, seguridad, costos de instalación, etc., y los costos variables c_v son los que dependen del nivel de producción en que se esté operando. Matemáticamente, dada la función de costos totales $c(q)$, la función de costos fijos está determinada por la condición inicial $c(0) = c_f$, es decir cuando $q = 0$ (no se produce ni se vende ningún artículo) los costos de producción serán igual al valor de los costos fijos.

Los costos promedios o costos totales por unidad \bar{c} se definen como los costos totales divididos entre el número total de artículos, es decir

$$\bar{c} = \frac{c(q)}{q}$$

El costo marginal $c'(q)$ en función de la cantidad demandada es el costo de producir una unidad adicional más cuando ya se tiene cierto nivel de producción y está dada por la derivada del costo total respecto al número de unidades, esto es

$$\text{costo marginal} = c'(q)$$

Luego, si conocemos el costo marginal, podemos encontrar el costo total así:

$$c(q) = \int c'(q) dq$$

Al resolver esta integral aparece una constante que debe ajustarse mediante una condición inicial y usualmente se especifican los costos fijos, la condición inicial para la función de costos es

$$c(0) = c_f$$

III) Función de Ingresos

Para una función de demanda $p = f(q)$, el ingreso total es el producto del precio p por unidad multiplicado por el número de unidades a vender. Para esta función de ingresos totales usualmente se usa la letra R , que es la letra inicial de la palabra en inglés "revenue" que significa ingresos. Entonces tenemos:

$$R = p \cdot q$$

El ingreso marginal en función de la cantidad demandada es la derivada del ingreso total respecto a la cantidad q , es decir

$$\text{Ingreso marginal} = R'(q)$$

Recíprocamente, conociendo la función ingreso marginal podemos encontrar el ingreso total integrando

$$R(q) = \int R'(q) dq$$

Y la condición inicial para la función de ingresos es $R(0) = 0$, porque no hay ingresos si $q = 0$, es decir si la cantidad comercializada es nula.

Con frecuencia debemos determinar la función de demanda $p = f(q)$ a partir de la función de ingreso marginal $R'(q)$. Recordemos que el precio es igual al ingreso promedio por unidad, es decir, el precio por unidad es el ingreso total entre el número de unidades vendidas. Así, la ecuación de demanda es

$$p = \frac{R(q)}{q}$$

Al conocer la función de ingresos totales, la función de demanda se obtiene simplemente dividiendo el ingreso total entre la cantidad.

Ejemplo 25

El costo marginal para el producto de un fabricante está dado por $1,16 - 0,005q$ y el costo fijo es de 23,20 Bf. Encuentre la función de costo total y la función de costo promedio.

Solución

El costo total se obtiene integrando

$$c(q) = \int c'(q)dx$$

$$c(q) = \int (1,16 - 0,005q)dq$$

$$c(q) = 1,16q - 0,0025q^2 + k$$

Donde k indica la constante de integración. Aplicando la condición inicial $c(0) = c_f$ obtenemos

$$c(q) = 1,16q - 0,0025q^2 + k$$

$$23,2 = 1,16(0) - 0,0025(0)^2 + k \rightarrow k = 23,2$$

Luego

$$c(q) = 1,16q - 0,0025q^2 + 23,2$$

La función de costo promedio es

$$\bar{c} = \frac{c(q)}{q} = \frac{1,16q - 0,0025q^2 + 23,2}{q}$$

$$\bar{c} = 1,16 - 0,0025q + \frac{23,2}{q}$$

Ejemplo 26

Si la función de ingreso marginal de un producto es $R'(q) = 16 - 12q - 3q^2$, determine la función de ingreso total y la función de demanda.

Solución

$$R(q) = \int R'(q) dq$$

$$R(q) = \int (16 - 12q - 3q^2) dq$$

$$R(q) = 16q - 6q^2 - q^3 + k$$

La condición inicial $R(0) = 0 \rightarrow k = 0$, luego

$$R(q) = 16q - 6q^2 - q^3$$

Y la función de demanda es

$$p = \frac{R(q)}{q}$$

$$p = \frac{16q - 6q^2 - q^3}{q}$$

$$p = 16 - 6q - q^2$$

Ejemplo 27

Una empresa que fabrica y vende materiales de oficina ha determinado que la función de ingreso marginal asociada a la venta de cierto artículo está dada por $R'(q) = -0,0004q + 4$, donde q es el número de unidades y $R'(q)$ se mide en bolívares fuertes por unidad.

Determine

- La función de ingresos asociada con la producción y venta de estos artículos
- La ecuación de demanda del producto
- Los ingresos totales cuando se venden 1000 artículos
- El precio cuando la cantidad demandada es de 5000 artículos.

Solución

$$a. R(q) = \int R'(q) dq$$

$$R(q) = \int (-0,0004q - 4) dq$$

$$R(q) = -0,0002q^2 + 4q + k$$

Como $R(0) = 0 \rightarrow k = 0$, por lo que $R(q) = 0,0002q^2 + 4q$

b. La ecuación de demanda del producto es

$$p = \frac{R(q)}{q} = \frac{-0,0002q^2 + 4q}{q} \rightarrow p = -0,0002q + 4$$

c. Si se venden 1000 unidades

$$\begin{aligned}R(q) &= -0,0002q^2 + 4q \\R(q) &= -0,0002(1000)^2 + 4(1000) \\R(q) &= 3800 \text{ Bf.}\end{aligned}$$

d. El precio puede deducirse de la ecuación de demanda del producto

$$p = -0,0002q + 4$$

Si la cantidad demandada es $q = 5000$, entonces el precio es

$$\begin{aligned}p &= -0,0002(5000) + 4 \\p &= 3 \text{ Bf.}\end{aligned}$$

Ejemplo 28

Una compañía fabrica camisetas. La función de costos marginales diarios asociada con la producción de estos artículos está dada por: $c'(q) = 0,000006q^2 - 0,006q + 5$, donde $c'(q)$ se mide en Bf./unidad y q es la cantidad total de camisetas producidas. Los costos fijos diarios ascienden a 80 Bf. Indique los costos totales diarios cuando se producen 400 unidades por día y el costo promedio por cada unidad.

Solución

$$c(q) = \int c'(q) dq$$

$$c(q) = \int (0,000006q^2 - 0,006q + 5) dq$$

$$c(q) = 0,000002q^3 - 0,003q^2 + 5q + k$$

La condición inicial $c(0) = c_f$ implica que $k = 80$ y sustituyendo se obtiene la función de costo total

$$c(q) = 0,000002q^3 - 0,003q^2 + 5q + 80$$

Ahora bien, el costo de producir 400 camisetas es:

$$c(q) = 0,000002q^3 - 0,003q^2 + 5q + 80$$

$$c(q) = 0,000002(400)^3 - 0,003(400)^2 + 5(400) + 80$$

$$c(q) = 1.728 \text{ Bf.}$$

El costo promedio por unidad es:

$$\bar{c} = \frac{1.728}{400} \rightarrow \bar{c} = 4,32 \text{ Bf.}$$

Ejemplo 29

La razón de cambio del número de millones de usuarios de internet I , se puede modelar mediante: $I'(t) = 23,572t - 142,214$ donde $t = 0$ en el año 2000. Si había 64,01 millones de usuarios de internet en 2006, encuentre la función que modela el número de usuarios de internet

Solución

$$\text{Año 2000} \rightarrow t = 0$$

$$\text{Año 2006} \rightarrow t = 6 \text{ y } I(6) = 64,01$$

$$I(t) = \int I'(t) dt$$

$$I(t) = \int (23,572t - 142,214) dt$$

$$I(t) = 11,786t^2 - 142,214t + k$$

De acuerdo a las condiciones iniciales dadas, tenemos

$$64,01 = 11,786t^2 - 142,214t + k$$

$$64,01 = 11,786(6)^2 - 142,214(6) + k$$

$$64,01 = 424,296 - 853,284 + k$$

$$64,01 = -428,988 + k$$

$k = 493$, luego la función pedida viene dada por

$$I = 11,786t^2 - 142,214t + 493$$

Ejemplo 30

El gasto nacional dedicado al cuidado de la salud S (medido en miles de millones de bolívares fuertes), ha aumentado radicalmente desde 1970, cuando el total era de 26,7 mil millones de Bf. De acuerdo con datos del Ministerio encargado de la salud en Venezuela, la razón de cambio del gasto se puede modelar con

$$S'(t) = -0,0042t^2 + 2,100t - 8,349 \text{ mil millones de Bf. anuales, donde } t = 0 \text{ en } 1970.$$

Encuentre la función que modela el gasto nacional para el cuidado de la salud y utilice este modelo para pronosticar el gasto nacional dedicado al cuidado de la salud para el 2010.

Solución

La función del gasto en el cuidado de la salud se obtiene integrando

$$S = \int S'(t) dt$$

$$S = \int (-0,0042t^2 + 2,100t - 8,349) dt$$

$$S = 0,0014t^3 + 1,05t^2 - 8,349t + k$$

Cuando $t = 0 \rightarrow S = 26,7$, de modo que

$$26,7 = 0,0014(0)^3 + 1,05(0)^2 - 8,349(0) + k$$

$k = 0$, luego

$$S = 0,0014t^3 + 1,05t^2 - 8,349t + 26,7$$

En el año 2006, $t = 40$, de modo que

$$S = 0,0014(40)^3 + 1,05(40)^2 - 8,349(40) + 26,7$$

$$S = 89,6 + 1680 - 333,96 + 26,7$$

$$S = 1.462,35 \text{ mil millones de Bf.}$$

1.5. Integrales por Sustitución y Aplicaciones

No todas las integrales se pueden resolver aplicando directamente algunas de las fórmulas básicas que ya conocemos. Algunas veces ciertas integrales se pueden reducir a una fórmula básica mediante un cambio de variable, este proceso se conoce como “método de sustitución”, el cual está fundamentado en la regla de la cadena para la derivación y es de gran importancia porque nos permite calcular muchas integrales complicadas. Por ejemplo, si queremos resolver la integral $\int (x + 1)^5 dx$ usando algunas de las fórmulas básicas, tendríamos que desarrollar el binomio a la quinta potencia y se obtendría:

$\int (x + 1)^5 dx = \int (x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1) dx$, pero esto sería demasiado tedioso. En lugar de esto, hagamos el cambio de variable $u = x + 1$.

$$u = x + 1 \rightarrow du = u'(x) dx$$

$$du = 1 dx$$

$$du = dx$$

Luego realizamos la sustitución para integrar mediante la fórmula de la potencia, así:

$$\begin{aligned} \int (x + 1)^5 dx &= \int u^5 du \\ &= \frac{u^6}{6} + c \\ &= \frac{1}{6}(x + 1)^6 + c \end{aligned}$$

Ejemplo 31

Encuentre $\int 2x(x^2 + 10)^{50} dx$

Solución

Hacemos $u = x^2 + 10$, entonces $\begin{cases} du = u' dx \\ du = 2x dx \\ dx = \frac{du}{2x} \end{cases}$

Luego hacemos la sustitución y resolvemos

$$\int 2x(x^2 + 10)^{50} dx = \int u^{50} 2x \frac{du}{2x}$$

$$\begin{aligned} &= \int u^{50} du \\ &= \frac{u^{51}}{51} + c \\ &= \frac{1}{51} (x^2 + 10)^{51} + c \end{aligned}$$

Ejemplo 32

Encuentre $\int \sqrt{3x - 6} dx$

Solución

Hacemos $u = 3x - 6$, por lo que $du = 3dx$, luego despejando $dx = \frac{du}{3}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3x - 6} dx &= \int (3x - 6)^{1/2} dx \\ &= \int u^{1/2} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{1/2} du \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{u^{3/2}}{3/2} \right) + c \\ &= \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right) u^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{9} u^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{9} (3x - 6)^{3/2} + c \end{aligned}$$

Ejemplo 33

Encuentre $\int x^2 \sqrt{2x^3 + 1} dx$

Solución

Hacemos $u = 2x^3 + 1$, por lo que $du = 6x^2 dx$, luego $dx = \frac{du}{6x^2}$ y sustituimos

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sqrt{2x^3 + 1} dx &= \int x^2 (2x^3 + 1)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \int u^{\frac{1}{2}} x^2 \frac{du}{6x^2} \\
&= \frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{2}} du \\
&= \frac{1}{6} \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + c \\
&= \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{3}{2} \right) u^{\frac{3}{2}} + c \\
&= \frac{1}{4} (2x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 34

Encuentre $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx$

Solución

Hacemos $\begin{cases} u = 1 + e^x \\ du = e^x dx \\ dx = \frac{du}{e^x} \end{cases}$

Luego sustituimos

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx &= \int \frac{e^x}{(1+e^x)^{\frac{1}{3}}} dx \\
&= \int \frac{e^x}{u^{\frac{1}{3}} e^x} du \\
&= \int u^{-\frac{1}{3}} du \\
&= \frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}} + c
\end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx = \frac{3}{2} (1+e^x)^{2/3} + c$$

Podemos comprobar este resultado usando la regla de la cadena, para ello derivamos

$$\left[\frac{3}{2} (1 + e^x)^{2/3} + c \right]', \text{ y debemos obtener } \frac{e^x}{(1+e^x)^{1/3}}$$

$$\left(\frac{3}{2} \left((1 + e^x)^{2/3} \right) + c \right)' = \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (1 + e^x)^{-1/3} \cdot e^x + 0$$

$$\left(\frac{3}{2} \left((1 + e^x)^{2/3} \right) + c \right)' = e^x (1 + e^x)^{-1/3} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^{1/3}}$$

Ejemplo 35

Encuentre $\int 8x^2(3x^3 - 1)^{16} dx$

Solución

$$\text{Sea } \begin{cases} u = 3x^3 - 1 \\ du = 9x^2 dx \\ dx = \frac{du}{9x^2} \end{cases}$$

Luego sustituimos y obtenemos:

$$\begin{aligned} \int 8x^2(3x^3 - 1)^{16} dx &= \int 8x^2 u^{16} \frac{du}{9x^2} \\ &= \frac{8}{9} \int u^{16} du \\ &= \frac{8}{9} \frac{u^{17}}{17} + c \\ &= \frac{8}{153} (3x^3 - 1)^{17} + c \end{aligned}$$

A medida que el estudiante resuelva muchas integrales, irá adquiriendo una serie de destrezas que le permitirán desenvolverse de manera fácil ante un ejercicio y/o problema, es decir, pondrá en práctica algunos artificios matemáticos válidos, que sólo se aprenden con la práctica.

Ejemplo 36Encuentre $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$ **Solución**

Rescribimos la integral dada, así:

$$\int x x^2 (1+x^2)^{1/2} dx, \text{ ya que } x^3 = x \cdot x^2$$

Luego hacemos el cambio de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 1 + x^2 \quad (1) \\ du = 2x dx \\ dx = \frac{du}{2x} \end{array} \right.$$

Como necesitamos a x^2 en términos de u , la despejo en (1), $x^2 = u - 1$, y ahora sustituimos

$$\int x x^2 (1+x^2)^{1/2} dx = \int x (u-1) u^{1/2} \frac{du}{2x}$$

$$\int x x^2 (1+x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \int (u-1) u^{1/2} du$$

$$\int x x^2 (1+x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du$$

$$\int x x^2 (1+x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \left[\int u^{3/2} du - \int u^{1/2} du \right]$$

$$\int x x^2 (1+x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{5/2}}{5/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2} \right] + c$$

$$\int x x^2 (1+x^2)^{1/2} dx = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{5} \right) u^{5/2} - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right) u^{3/2} + c$$

$$\int x x^2 (1+x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{5} (1+x^2)^{5/2} - \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} + c$$

Ejemplo 37

Encuentre $\int \frac{dx}{4x-1}$

Solución

Sea $u = 4x - 1 \rightarrow du = 4dx \rightarrow dx = \frac{du}{4}$

$$\int \frac{dx}{4x-1} = \int \frac{\frac{du}{4}}{u}$$

$$\int \frac{dx}{4x-1} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{dx}{4x-1} = \frac{1}{4} \ln u + c$$

$$\int \frac{dx}{4x-1} = \frac{1}{4} \ln|4x-1| + c$$

Ejemplo 38

Encuentre $\int \frac{dx}{(4x-1)^2}$

Solución

Debemos pensar en la fórmula $\int x^n dx$ por lo que subiremos el denominador de la siguiente manera

$\int \frac{dx}{(4x-1)^2} = \int (4x-1)^{-2} dx$, luego haciendo el cambio de variable tenemos:

$$u = 4x - 1 \rightarrow du = 4 dx \rightarrow dx = \frac{du}{4}$$

$$\int (4x-1)^{-2} dx = \int u^{-2} \frac{du}{4}$$

$$\int (4x-1)^{-2} dx = \frac{1}{4} \int u^{-2} du$$

$$\int (4x-1)^{-2} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{u^{-1}}{-1} \right) + c$$

$$\int (4x - 1)^{-2} dx = -\frac{1}{4} (4x - 1)^{-1} + c$$

Ejemplo 39

Encuentre $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Solución

Rescribimos la integral

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^{x^{\frac{1}{2}}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$\int \frac{e^{x^{\frac{1}{2}}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int e^{x^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

Ahora hacemos el cambio de variable $\left\{ \begin{array}{l} u = x^{\frac{1}{2}} \\ du = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ dx = \frac{2du}{x^{-\frac{1}{2}}} \end{array} \right.$

Sustituyendo obtenemos

$$\int e^{x^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \int e^{x^{\frac{1}{2}}} x^{-1/2} \frac{2du}{x^{-1/2}}$$

$$\int e^{x^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \int e^u du$$

$$\int e^{x^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2e^u + c$$

$$\int e^{x^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2e^{x^{1/2}} + c$$

$$\int e^{x^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

Ejemplo 40

Encuentre $\int \frac{e^{-x}}{3e^{-x}+2} dx$

Solución

Aquí debemos pensar en la fórmula $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ y hacer la sustitución

$$u = 3e^{-x} \rightarrow du = -3e^{-x} dx \rightarrow dx = \frac{du}{-3e^{-x}}$$

$$\int \frac{e^{-x}}{3e^{-x}+2} dx = \int \frac{e^{-x} \left(\frac{du}{-3e^{-x}} \right)}{u}$$

$$\int \frac{e^{-x}}{3e^{-x}+2} dx = \int \frac{\frac{du}{-3}}{u}$$

$$\int \frac{e^{-x}}{3e^{-x}+2} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{e^{-x}}{3e^{-x}+2} dx = -\frac{1}{3} \ln|u| + c$$

$$\int \frac{e^{-x}}{3e^{-x}+2} dx = -\frac{1}{3} \ln|3e^{-x}+2| + c$$

Ejemplo 41

Encuentre $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Solución

Sea $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \rightarrow dx = x du$ y sustituyendo obtenemos

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{u}{x} x du$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} u^2 + c$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + c$$

Ejemplo 42

Encuentre $\int e^{\ln(2x+1)} dx$

Solución

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $e^{\ln x} = x$, obtenemos

$$\int e^{\ln(2x+1)} dx = \int (2x + 1) dx$$

$$\int e^{\ln(2x+1)} dx = x^2 + x + c$$

Ejemplo 43

Encuentre $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1} dx$

Solución

$$u = x^3 + x^2 + x + 1 \rightarrow du = (3x^2 + 2x + 1)dx \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2 + 2x + 1},$$

sustituyendo,

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{u} \frac{du}{3x^2 + 2x + 1}$$

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \int \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \ln|u| + c$$

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \ln|x^3 + x^2 + x + 1| + c$$

Ejemplo 44

Encuentre $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1} dx$

Solución

Aquí el integrando es un cociente de polinomios donde el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador. En tal caso, primero se usa la división larga:

$$\frac{N}{D} = C + \frac{R}{D}, \text{ si se usa la notación de integrales se ve que}$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \left[C(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \right] dx$$

Una vez realizada la división larga, obtenemos: $C(x) = x^2 + x$ y $R(x) = 1$, por tanto

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1} dx = \int \left[x^2 + x + \frac{1}{2x + 1} \right] dx$$

$$\int \left[x^2 + x + \frac{1}{2x + 1} \right] dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int \frac{1}{2x + 1} dx$$

$$\int \left[x^2 + x + \frac{1}{2x + 1} \right] dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \int \frac{1}{2x + 1} dx$$

Haciendo un cambio de variable en la última integral, tenemos

$$u = 2x + 1 \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \left[x^2 + x + \frac{1}{2x + 1} \right] dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \int \frac{\frac{du}{2}}{u}$$

$$\int \left[x^2 + x + \frac{1}{2x + 1} \right] dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

$$\int \left[x^2 + x + \frac{1}{2x + 1} \right] dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln|2x + 1| + c$$

Ejemplo 45

Una empresa sabe que el costo marginal de un producto es $C'(x) = 3x + 20$, que su ingreso marginal es $R'(x) = 44 - 5x$ y que el costo de producción y venta de 80 unidades es 11.400 Bf.

- A) Encuentre el nivel óptimo de producción
- B) Encuentre la función de ganancia
- C) Encuentre la ganancia o pérdida en el nivel óptimo

Solución

- A) El nivel óptimo de producción se debe conseguir cuando $R'(x) = C'(x)$, por tanto

$$44 - 5x = 3x + 20$$

$$-5x - 3x = 20 - 44$$

$$-8x = -24$$

$$x = \frac{-24}{-8}$$

$$x = 3$$

- B) La función de ganancia viene dada así: $G(x) = R(x) - C(x)$ (1) por tanto necesitamos conocer los ingresos y costos totales

$$R(x) = \int R'(x) dx$$

$$R(x) = \int (44 - 5x) dx$$

$$R(x) = 44x - \frac{5}{2}x^2 + k$$

Condición inicial: Si $x = 0 \rightarrow R(0) = 0$, entonces

$$44(0) - \frac{5}{2}(0)^2 + k = 0 \rightarrow k = 0, \text{ por tanto}$$

$$R(x) = 44x - \frac{5}{2}x^2 \quad (2)$$

Hacemos el mismo procedimiento para hallar $C(x)$

$$C(x) = \int C'(x)dx$$

$$C(x) = \int (3x + 20)dx$$

$$C(x) = \frac{3}{2}x^2 + 20x + k$$

Condición inicial: Si $x = 80 \rightarrow C = 11.400$, entonces

$$11.400 = \frac{3}{2}(80)^2 + 20(80) + k$$

$$11.400 = 9.600 + 1.600 + k \rightarrow k = 200$$

$$C(x) = \frac{3}{2}x^2 + 20x + 200 \quad (3)$$

Luego, sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos

$$\begin{aligned} G(x) &= R(x) - C(x) \\ G(x) &= \left(44x - \frac{5}{2}x^2\right) - \left(\frac{3}{2}x^2 + 20x + 200\right) \\ G(x) &= -4x^2 + 24x - 200 \end{aligned}$$

C) La ganancia o pérdida en el nivel óptimo viene dado cuando $x = 3$

$$G(3) = -4(3)^2 + 24(3) - 200$$

$$G(3) = -36 + 72 - 200$$

$$G(3) = -164$$

Es decir la producción y venta de 3 artículos dan como resultado una pérdida de 164 Bf.

Ejemplo 46

Suponga que el ingreso marginal de un producto es $R'(x) = 900$ y el costo marginal es $C'(x) = 30\sqrt{x+4}$ con un costo fijo de 1.000 Bf.; a) encuentre la ganancia o pérdida de la producción y venta de 5 unidades; b) ¿cuántas unidades darán como resultado una ganancia máxima?

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } R(x) &= \int R'(x)dx \rightarrow R(x) = \int 900 dx \rightarrow R(x) = 900x + k \\ \text{Si } x = 0 &\rightarrow R = 0, \text{ por tanto } k = 0, \text{ luego} \\ R(x) &= 900x \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \int C'(x)dx \\ C(x) &= \int 30\sqrt{x+4} dx \\ C(x) &= 30 \int (x+4)^{1/2} dx \rightarrow \begin{cases} u = x+4 \\ du = dx \end{cases} \\ C(x) &= 30 \int u^{1/2} du \\ C(x) &= 30 \frac{u^{3/2}}{3/2} + k \\ C(x) &= 20(x+4)^{3/2} + k \end{aligned}$$

Por la condición inicial: Si $x = 0 \rightarrow C = 1.000$, tenemos

$$\begin{aligned} 1.000 &= 20(0+4)^{3/2} + k \\ k &= 1.000 - 160 \rightarrow k = 840, \text{ por tanto} \\ C(x) &= 20(x+4)^{3/2} + 840 \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) y (2) obtenemos la ganancia o pérdida cuando $x = 5$, así:

$$\begin{aligned} G(5) &= R(5) - C(5) \\ G(5) &= 900(5) - \left[20(5+4)^{3/2} + 840 \right] \\ G(5) &= 4500 - 540 - 840 \\ G(5) &= 3.120 \text{ Bf.} \end{aligned}$$

b) Para que exista una ganancia se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} R'(x) &\geq C'(x), \text{ luego} \\ 900 &= 30(x+4)^{1/2} \\ (x+4)^{1/2} &= \frac{900}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + 4)^{\frac{1}{2}} &= 30 \\ \left[(x + 4)^{\frac{1}{2}} \right]^2 &= (30)^2 \\ x + 4 &= 900 \\ x &= 896\end{aligned}$$

1.6. Consumo y Ahorro Nacional

La propensión marginal al consumo PMC, se define como la fracción del ingreso adicional que una persona o país consume, dado un cierto nivel de ingreso, es decir:

$$PMC = C'(I)$$

Donde I es el ingreso y C es el consumo total.

La función de consumo es uno de los elementos básicos para el estudio de los altos niveles de desempleo o inflación elevada en una economía. Este estudio se conoce como “Análisis de Keynes”.

La propensión marginal al ahorro PMS, se define como la fracción del ingreso adicional que una persona o país ahorra, es decir:

$$PMS = S'(I)$$

Por definición la PMS está relacionada con la PMC por:

$$PMS = 1 - PMC$$

Ya que $I = C + S$. Los ingresos adicionales se gastan o se invierten

Ejemplo 47

Si la propensión marginal al consumo de cierto país está dada por $C'(I) = \frac{1}{2} + \frac{9}{5(\sqrt[3]{3I^2})}$

donde el consumo y el ingreso están medidos en miles de millones de dólares, determine: a) la propensión marginal al consumo cuando el ingreso nacional es $I = 81$ mil millones; b) la función de consumo si se consumen 21 mil millones cuando los ingresos son de 24 mil millones.

Solución

Hallar $C'(81)$

$$C'(81) = \frac{1}{2} + \frac{9}{5(\sqrt[3]{3(81)^2})}$$

$$C'(81) = \frac{1}{2} + \frac{9}{5(\sqrt[3]{19683})}$$

$$C'(81) = \frac{1}{2} + \frac{9}{135}$$

$$C'(81) = 0,5 + 0,0666$$

$$C'(81) = 0,566$$

Hallar $C(I)$ cuando $I = 24$ y $C = 21$

$$C(I) = \int C'(I) dI$$

$$C(I) = \int \left[0,5 + \frac{9}{5(\sqrt[3]{3I^2})} \right] dx$$

$$C(I) = 0,5 \int dI + \frac{9}{5} \int (3I^2)^{-1/3} dI$$

$$C(I) = 0,5I + \frac{9}{5} \int 3^{-1/3} (I)^2^{-1/3} dI$$

$$C(I) = 0,5I + \frac{9}{5\sqrt[3]{3}} \int I^{-2/3} dI$$

$$C(I) = 0,5I + 1,24 \frac{I^{1/3}}{\frac{1}{3}} + k$$

$$C(I) = 0,5I + 3,74 I^{1/3} + k$$

Por condición inicial, sabemos que $C = 21$ cuando $I = 24$ por lo que

$$21 = 0,5(24) + 3,744(24)^{\frac{1}{3}} + k$$

$$21 = 12 + 10,8 + k \rightarrow k = -1,8$$

Luego,

$$C(I) = 0,5I + 3,744I^{\frac{1}{3}} - 1,8$$

Ejemplo 48

La propensión marginal al ahorro (PMS) de cierto país está dado por $S'(I) = \frac{5}{(I+2)^2}$, donde tanto I como S están medidos en millardos de dólares. Si el consumo nacional es de 9 millardos de dólares cuando el ingreso total nacional es de 10 millardos de dólares. ¿Para qué valores de I el ahorro nacional es igual a cero?

Solución

Sabemos que: $I = C + S$

Por lo que $C = I - S$

Por tanto $C'(I) = 1 - S'(I)$. Y al sustituir obtenemos

$$C'(I) = 1 - \frac{5}{(I+2)^2}$$

Luego, integramos para hallar C

$$C = \int C'(I) dI$$

$$C = \int \left[1 - \frac{5}{(I+2)^2} \right] dI$$

$$C = \int dI - 5 \int (I+2)^{-2} dI \rightarrow u = I+2 \rightarrow du = dI$$

$$C = I - 5 \int u^{-2} dI$$

$$C = I - 5 \left(\frac{u^{-1}}{-1} \right) + k$$

$$C = I + \frac{5}{u} + k$$

$$C = I + \frac{5}{I+2} + k \quad (1)$$

Por condiciones iniciales sabemos que: $C = 9$ cuando $I = 10$, por tanto

$$9 = 10 + \frac{5}{10+2} + k$$

$$9 = 10 + \frac{5}{12} + k \rightarrow k = -1,416 \text{ y sustituyendo en (1) resulta}$$

$$C = I + \frac{5}{I+2} - 1,416$$

Ahora $S = I - C$

$$S = I - \left[I + \frac{5}{I+2} - 1,416 \right]$$

$$S = I - I - \frac{5}{I+2} + 1,416$$

$$S = \frac{-5}{I+2} + 1,416 \quad (2)$$

Ahora hallamos el valor de I que hace que el ahorro nacional sea cero, para ello hacemos $S = 0$ en la expresión (2)

$$\frac{-5}{I+2} + 1,416 = 0$$

$$1,416I + 2(1,416) - 5 = 0$$

$$1,416I - 2,168 = 0$$

$$I = \frac{2,168}{1,416} \rightarrow I = 1,53$$

1.7. Método de Integración Por Partes y Aplicaciones

A menudo encontramos integrales tales como $\int x \cdot e^{2x} dx$ cuyo integrando es un producto de dos o más funciones. Sabemos que la derivada de $\frac{1}{2}x^2$ es x , y que la derivada de $\frac{1}{2}e^{2x}$ es e^{2x} , pero la derivada de $\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$ ciertamente no es $x e^{2x}$. En general, la integral de un producto no es el producto de las integrales porque la derivada de un producto no es el producto de las derivadas.

La regla de derivación de un producto de funciones nos permite deducir una regla importante y útil para integrar cuando el integrando tenga la forma de productos de dos o más funciones. Para esta deducción necesitamos recordar que $f(x) = \int f'(x)dx$. Y que la definición de antiderivada nos dice que: G es una antiderivada de g sí y sólo sí $G'(x) = g(x)$ (*)

Derivemos $f(x)G(x)$ con G una antiderivada de g

$$(f(x)G(x))' = f'(x)G(x) + f(x)G'(x)$$

Al integrar ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\int (f(x)G(x))' dx = \int f'(x)G(x)dx + \int f(x)G'(x)dx$$

Pero $\int (f(x)G(x))' dx$ es equivalente a $f(x)G(x)$ ver \textcircled{R} , luego la ecuación nos queda

$$f(x)G(x) = \int f'(x)G(x)dx + \int f(x)g(x)dx$$

Y reordenando se tiene:

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$

A esta última ecuación se le conoce como la fórmula de integración “Por Partes”.

En la práctica lo que se hace es descomponer el integrando, para ello seleccionamos una función para derivar y otra para integrar. Las funciones logarítmicas siempre se escogen para derivarlas y las funciones exponenciales se escogen para integrarlas. Una elección adecuada de las funciones nos permitirá calcular la integral. La intuición nos

llevará a una buena elección, si la hay, vendrá sólo con la práctica. Es frecuente que calculistas experimentados tengan que recurrir al método de prueba y error.

Ejemplo 49

Calcular $\int x e^{-x} dx$

Solución

Sean $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

$g(x) = e^{-x} \rightarrow G(x) = \int e^{-x} dx \rightarrow G(x) = -e^{-x}$, luego aplicando la fórmula de integración por partes y sustituyendo, tenemos

$$\int x e^{-x} dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx$$

$$\int x e^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int (1)(-e^{-x}) dx$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c$$

$$\int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x + 1) + c$$

Ejemplo 50

Calcular $\int x^2 e^{2x} dx$

Solución

Sea $f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \quad g(x) = e^{2x} \quad G(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

Al sustituir en la fórmula tenemos:

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - \int 2x \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) dx$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx \quad (1)$$

La integral que queda pendiente $\int x e^{2x} dx$ requiere a su vez de una integración por partes, lo cual se hará por separado con:

$$f(x_1) = x \quad f'(x) = 1 \quad g(x) = e^{2x} \quad G(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \int x e^{2x} dx &= x \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \end{aligned}$$

Y al sustituirla en (1), nos queda

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right]$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

Y al resolver esta última integral, obtenemos

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

Ejemplo 51

Calcular $\int x \ln x dx$

Solución

Sea $f(x) = \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x$ $G(x) = \frac{1}{2} x^2$, y al sustituir en la fórmula tenemos:

$$\int x \ln x dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx$$

$$\int x \ln x dx = (\ln x) \left(\frac{1}{2} x^2 \right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) dx$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + c$$

Ejemplo 52

Calcular $\int x^3 e^{x^2} dx$

Solución

Aquí no podemos escoger a $f(x) = x^3$ y a $g(x) = e^{x^2}$ porque de esta forma sería imposible integrar para obtener a $G(x)$. Lo que haremos es descomponer a x^3 como $x^2 x$, por tanto, la integral se puede describir como

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2 x e^{x^2} dx$$

Haciendo: $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$; $g(x) = x e^{x^2}$; $G(x) = \int x e^{x^2} dx$

Para hallar a $G(x)$ debemos hacer un cambio de variable:
$$\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x \, dx \\ dx = \frac{du}{2x} \end{cases}$$

$G(x) = \int x e^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{x^2}$, luego al sustituir en la fórmula de integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= \int x^2 x e^{x^2} dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx \\ &= (x)^2 \left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right) - \int (2x) \left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx \quad (\text{ya está resuelta}) \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + c \end{aligned}$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} [x^2 - 1] + c$$

Ejemplo 53

Calcular $\int x\sqrt{2x+1} dx$

Solución

Si reescribimos la integral nos resulta $\int x(2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$ y al hacer:

$$f(x) = x; \quad f'(x) = 1; \quad g(x) = (2x+1)^{\frac{1}{2}}; \quad G(x) = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

Para hallar $G(x)$ debemos hacer el cambio de variable: $\begin{cases} u = 2x + 1 \\ du = 2dx \\ dx = \frac{du}{2} \end{cases}$, luego

$$G(x) = \int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

Luego al aplicar la fórmula de integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2x+1} dx &= \int x(2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx \\ &= (x) \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \int (2x+1)^{\frac{3}{2}} dx \quad (1) \end{aligned}$$

Al resolver esta última integral por sustitución, obtenemos

$$u = 2x + 1; \quad du = 2 dx; \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \int (2x + 1)^{3/2} dx &= \int u^{3/2} \frac{du}{2} = \frac{1}{5} (2x + 1)^{5/2} \text{ y al sustituir en (1), obtenemos} \\
 &= \frac{1}{3} x (2x + 1)^{3/2} - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5} (2x + 1)^{5/2} \right] + c \\
 &= \frac{1}{3} x (2x + 1)^{3/2} - \frac{1}{15} (2x + 1)^{5/2} + c
 \end{aligned}$$

1.8. Integración Por Partes para Integrales Definidas

De la definición de integral definida y de la regla del producto para la derivación, obtenemos

$$\int_a^b [f'(x)G(x) + f(x)G'(x)] dx = \int_a^b [f(x) + G(x)]' dx = f(x)G(x) \Big|_a^b$$

Lo que implica que:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(x)G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx$$

Ejemplo 54

Calcular $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

Solución

Redefinimos la integral

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_a^b x^{-\frac{1}{2}} \ln x dx$$

Sean $f(x) = \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$; $G(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$

Luego aplicando la fórmula, nos queda

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} \ln x dx = \Big|_1^4 f(x)G(x) - \int_1^4 f'(x)G(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\ln x \left(2x^{\frac{1}{2}} \right) - \int_1^4 \frac{1}{x} \left(2x^{\frac{1}{2}} \right) dx \right. \\
&= 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 \\
&= 2x^2 \ln x - 4x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 \\
&= \left[2(4)^2 \ln 4 - 4(4)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[2(1)^2 \ln 1 - 4(1)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= 32 \ln 4 - 8 - 0 + 4 \\
&= -4 + 32 \ln 4 \\
&\approx -4 + 44,36
\end{aligned}$$

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} \ln x dx = 40,36$$

Ejemplo 55

Después de t horas en el trabajo un obrero de una fábrica puede producir $100t e^{-0,5t}$ unidades por hora. ¿Cuántas unidades producirá el trabajador durante las primeras 3 horas?

Solución

Denotamos a t como el tiempo y a $Q(t)$ como el número de unidades en un tiempo t , entonces $Q'(t) = 100t e^{-0,5t}$.

$$Q(t) = \int Q'(t) dt$$

$$Q(t) = \int 100t e^{-0,5t} dt$$

Hagamos: $f(t) = t$; $f'(t) = 1$; $g(t) = e^{-0,5t}$; $G(t) = -2e^{-0,5t}$

Al sustituir en la fórmula, tenemos

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int 100te^{-0,5t} dt = f(t)G(t) - \int f'(t)G(t)dt \\ &= 100[t(-2e^{-0,5t}) - \int -2e^{-0,5t} dt] \\ &= -200te^{-0,5t} + 200 \int e^{-0,5t} dt \\ &= -200te^{-0,5t} - 400e^{-0,5t} + c \end{aligned}$$

Ahora hallamos el valor de c apoyándonos en la condición inicial: $t = 0 \rightarrow Q(t) = 0$

$$Q(t) = -200te^{-0,5t} - 400e^{-0,5t} + c$$

$$0 = -200(0)e^{-0,5(0)} - 400e^{-0,5(0)} + c$$

$$0 = 0 - 400 + c$$

$$c = 400$$

Por tanto

$$Q(t) = -200te^{-0,5t} - 400e^{-0,5t} + 400$$

Y el número de unidades producidas durante las primeras 3 horas será:

$$Q(3) = -200(3)e^{-0,5(3)} - 400e^{-0,5(3)} + 400$$

$$Q(3) = -600e^{-1,5} - 400e^{-1,5} + 400$$

$$Q(3) = 176,87 \text{ unidades}$$

1.9. Ejercicios y Problemas de Aplicación Propuestos

Calcule las siguientes integrales indefinidas

1. $\int dx$

2. $\int x^6 dx$

3. $\int \frac{3}{x^5} dx$

4. $\int \frac{1}{y^{3/4}} dy$

5. $\int (4 + z) dz$

6. $\int (4 + z)^2 dz$

7. $\int (7 + e) dx$

8. $\int \left(\frac{x}{5} - \frac{3}{2} x^3 \right) dx$

9. $\int \sqrt{2} e^x dx$

10. $\int \frac{1}{4 \sqrt[6]{x^2}} dx$

11. $\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3} \right) dx$

12. $\int (y^{3.2} - 6y^3 + 3y^{-4} + y^{-1} - 2e) dy$

13. $\int \frac{3u-4}{5} du$

14. $\int (u^e + e^u) du$

15. $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{2} \sqrt[4]{x} \right) dx$

16. $\int (x - 3)(x^2 + 4) dx$

17. $\int \left(\frac{-3\sqrt{x^2}}{2} - \frac{7}{2\sqrt{x}} \right) dx$

18. $\int \sqrt{x}(x^2 - 3x + 5) dx$

19. $\int u^{-2}(2u^4 + 3u^2 - 2u^{-3})du$
20. $\int \frac{z^4 + 10z^3}{2z^2} dz$
21. $\int \left(\frac{2}{\sqrt[5]{x}} - 1 \right) dx$
22. $\int (5 - 2^{-1}) dx$
23. $\int \frac{1}{12} \left(\frac{1}{3} e^x \right) dx$
24. $\int \frac{-4}{(3x)^3} dx$
25. $\int \frac{9-x^2}{x+3} dx$
26. $\int \left(e^{-2x} - \frac{3}{2x} + \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{7}{5} e^{\frac{7}{3}x} \right) dx$
27. $\int (x^{-0.4} + xe^2 + e) dx$
28. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$
29. $\int (x + 1) \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx$
30. $\int e^{2 \ln x} dx$
31. $\int e^{\ln x} dx$
32. $\int \ln(e^{2x+2}) dx$
33. $\int x^{-1/3} \left(x^{-2} + x^{-1} + \frac{1}{3} e^x \right) dx$
34. $\int \left(2x^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$
35. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx$
36. $\int \frac{\sqrt[4]{z} - \sqrt[3]{z}}{\sqrt{z}} dz$

37. $\int (e^{2y} - e^{-2y}) dy$

38. $\int y(y + 1)^2 dy$

39. $\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x} dx$

40. $\int 3^{1-x} dx$

Problemas de aplicación de la integral indefinida

41. El costo marginal para el producto de un fabricante es $\frac{dc}{dq} = 10 + 24q - 3q^2$ y los costos fijos son $cf = 20$; a) determine la función de costo total; b) el costo de producir 2 unidades; c) el costo promedio por unidad cuando se producen 5 unidades.
42. El ingreso marginal que una empresa recibe de cierto producto es $R(q) = 15 - 9q - 3q^2$. Encuentre las funciones de ingreso y de demanda.
43. Si la función de costo marginal es $c'(q) = 2e^{0,001q}$ y los costos fijos son de 2000. Determine: a) el costo total cuando se producen 200 unidades; b) el costo promedio cuando se producen 50 unidades; c) la función de costo promedio.
44. La ganancia marginal diaria asociada a la producción y venta de cierto tipo de cafetera es $\frac{d\pi}{dq} = -0,003q^3 + 0,02q^2 + 20$. Encuentre la ganancia total por la venta y producción de 220 artículos por día si los costos fijos son de 800.
45. La función de costo marginal de una empresa es $c'(q) = 30 + 0,05q$; a) determine la función de costo total si los costos fijos son de 1000 Bf. al mes; b) ¿cuánto costará producir 180 unidades al mes?; c) si los artículos se pueden vender a 50 Bf. cada uno, ¿cuántos artículos deben producirse para maximizar la ganancia?
46. La función de utilidad marginal de una empresa es $\pi'(q) = 5 - 0,002q$ y al vender 100 unidades la empresa obtiene utilidades por Bf. 350 ¿cuál es la función de utilidad de la empresa?
47. Suponga que la función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por: $\frac{dc}{dq} = \frac{100q^2 - 3998q + 60}{q^2 - 40q + 1}$, donde c es el costo total en Bf. cuando se producen q unidades; a) determine el costo marginal cuando se producen 40

- unidades; b) si los costos fijos son de 10.000 Bf., encuentre el costo total de producir 40 unidades.
48. Si el costo marginal de un producto es $c'(x) = 4x + 2$ y el costo total de producir 10 unidades da como resultado un costo total de 300 Bf; encuentre la función de costo total.
49. El costo promedio de un artículo cambia con una tasa de $\bar{c}'(x) = -6x^{-2} + \frac{1}{6}$ y el costo promedio de 6 unidades es de 10 Bf.; a) encuentre la función de costo promedio; b) encuentre el costo promedio de 12 unidades
50. Un fabricante de bicicletas espera que dentro de t meses los consumidores compren $b(x) = 5000 + 60\sqrt{x}$ bicicletas por mes a un precio de $p(x) = 80 + 3\sqrt{x}$ Bf por bicicleta. ¿Cuál es el ingreso total que el fabricante puede esperar de la venta de bicicletas en los próximos 16 meses?
51. La utilidad marginal de cierta compañía es de $100 - 2q$ dólares por unidad cuando se producen q unidades: si la utilidad de la compañía es de 700 dólares cuando se producen 10 unidades. ¿Cuál es la máxima utilidad posible para la compañía?
52. Un conservacionista halló que la población $p(t)$ de una especie en vía de extinción crece a una razón de $0,51 e^{-0,03t}$, donde t es el número de años después de empezar a llevar registros. Si en la actualidad la población de esa especie es de 500. ¿Cuál será la población en 10 años?

Integrales por sustitución

Utilice el método de sustitución para resolver las siguientes integrales

53. $\int (2 - x)^4 dx$
54. $\int (\frac{1}{2}x + 6)^{\frac{1}{3}} dx$
55. $\int 3x(1 + 3x^2)^{-1/7} dx$
56. $\int \frac{4}{2x+1} dx$
57. $\int x^2 e^{2x^3+6} dx$

58. $\int x^{-1} \ln 3x \, dx$

59. $\int e^{\ln(x+1)+4\ln x} \, dx$

60. $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} \, dx$

61. $\int \frac{(1+e^{-3x})^{1/3}}{e^{3x}} \, dx$

62. $\int \frac{3x+4}{e^{3x^2+8x-5}} \, dx$

63. $\int \frac{6x^2-12}{x^3-6x+1} \, dx$

64. $\int \sqrt[3]{3t+8} \, dt$

65. $\int \frac{t^2}{2+t^3} \, dt$

66. $\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \, dx$ (sugerencia $u = \sqrt{x}$)

67. $\int \frac{1}{\sqrt{y}(\sqrt{y}-4)^3} \, dy$

68. $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$

69. $\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}} \, dw$

70. $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{3\sqrt{x}} \, dx$

71. $\int x^2 \sqrt{e^{x^3}+1} \, dx$

72. $\int \left(\frac{x^3-1}{\sqrt{x^4-4x}} - \ln 7 \right) \, dx$

73. $\int \frac{x}{x+1} \, dx$

74. $\int \frac{x e^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+2}} \, dx$

75. $\int \frac{-1-7x+4x^2-2x^3+x^4}{x^2-2x} \, dx$

76. $\int \frac{4x}{x^2-4} dx$

77. $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x} dx$

78. $\int \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x^3}}} dx$

Problemas de aplicación sobre integrales por sustitución

79. La tasa de memorización del vocabulario de un curso de lengua extranjera para un estudiante promedio está dada por $\frac{dv}{dt} = \frac{40}{t+1}$, donde t es el número de horas continuas de estudio $0 < t \leq 4$ y v es el número de palabras. ¿Cuántas palabras memorizaría en 3 horas el estudiante promedio?
80. La función de costo marginal para el producto de una empresa es $c'(q) = \frac{20}{q+5}$. Determine: a) la función de costo total si los costos fijos son de 4.000; b) el costo total cuando se producen 100 unidades; c) el costo promedio cuando se producen 100 unidades; d) la función de costos promedios.
81. La función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es $R'(q) = \frac{900}{(2q+3)^3}$. Determine el precio cuando la cantidad demandada es de 2.000 unidades.
82. Dado el ingreso marginal $\frac{200}{(q+2)^2}$, encuentre la función de demanda.
83. Dado el costo marginal $c'(q) = \frac{20}{q+5}$, encuentre el costo total, si los costos fijos son de 2000 Bf.
84. Se estima que en t años, contados a partir de ahora, el valor V (Bf.) de un metro cuadrado de tierra en Venezuela se incrementará a una tasa de $\frac{8t^3}{\sqrt{0,2t^4+8000}}$ Bf./año. Si el valor actual de la tierra es de 500 Bf. / m^2 . ¿Cuánto costará dentro de 10 años?
85. La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por $S'(I) = \frac{5}{(I+2)^2}$, donde S e I representan el ahorro y el ingreso nacional, respectivamente, y se miden en millardos de Bf. Si el consumo total nacional es de 7,5 millardos

cuando el ingreso total nacional es de 8 millardos. ¿Para qué valor o valores de I el ahorro total nacional es igual a cero?

86. La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por $\frac{dS}{dI} = \frac{1}{2} - \frac{1,8}{\sqrt[3]{3I^2}}$ donde S e I representan el ahorro y el ingreso total nacional, respectivamente, y se miden en millardos de Bf.; a) determine la propensión marginal al consumo cuando el ingreso total nacional es de 81 millardos de Bf.; b) determine la función de consumo si el ahorro es de 3 millardos de Bf. cuando el ingreso total nacional es de 24 millardos.; c) use el resultado del literal (b) para mostrar que el consumo es de 54,9 millardos cuando el ingreso total nacional es de 81 millardos.
87. Suponga que para cierto producto se determina el costo marginal por medio de $c'(x) = 1,05(x + 180)^{0,05}$ y el ingreso marginal mediante $R'(x) = \frac{1}{\sqrt{0,5x+4}} + 2,8$, en donde x está en miles de Bf. Los costos fijos son de 200.000 Bf. y la producción está limitada a un máximo de 200 mil unidades; a) encuentre $c(x)$ y $R(x)$; b) determine el nivel de producción que da la ganancia máxima y encuentre la ganancia o pérdida mínima.
88. El costo marginal para el producto de un fabricante está dado por $c'(q) = \sqrt{q} \sqrt{0,09q^{3/2} + 9}$ donde $c'(q)$ está dado en Bf. y los costos fijos son de 640 Bf.; a) determine el costo marginal cuando se producen 36 unidades; b) determine el costo total cuando se producen 36 unidades; c) calcule el costo promedio cuando se producen 36 unidades.

Integración por partes

Resolver las siguientes integrales usando el método por partes

89. $\int 7x e^{2x} dx$

90. $\int 4x(2 - x)^{3/2} dx$

91. $\int \ln x dx$

92. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x-2}} dx$

93. $\int \frac{x}{4x-3} dx$

94. $\int \frac{x}{3} e^{3x-4} dx$
95. $\int (x - e^x)^2 dx$
96. $\int \frac{x^3}{2-x^2} dx$
97. $\int x e^{x/2} dx$
98. $\int (3 - 2x)e^{-x} dx$
99. $\int t \ln t dt$
100. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
101. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
102. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$
103. $\int (x + 1)(x + 2)^6 dx$
104. $\int t \ln t^2 dt$
105. $\int_{-1}^1 x^3(x^2 - 1)^{10} dx$
106. Un comerciante descubrió que el costo marginal es $0,5(q + 1)e^{0,3q}$ dólares por unidad cuando se producen q unidades. El costo total de producción de 100 unidades es de 200 dólares. ¿Cuál es el costo total de producción de las primeras 20 unidades?
107. Se proyecta que dentro de t años la población de cierta ciudad cambiará a una razón de $t \ln \sqrt{t + 1}$ miles de personas por año. Si la población actual es de 2 millones. ¿Cuál será la población dentro de 5 años?
108. Después de t horas en el trabajo, un obrero de una fábrica puede producir $100 t e^{-0,5t}$ unidades por hora. ¿Cuántas unidades producirá el obrero durante las primeras 3 horas?
109. Después de t semanas, las contribuciones a una campaña local de recaudación de fondos llegaban a una razón de $t e^{-0,2t}$ dólares por semana. ¿Cuánto dinero se recaudó durante las primeras 5 semanas?

110. Si la función de costo marginal para x unidades de un producto es $c'(x) = 1 + 3 \ln(x + 1)$ dólares por unidad, y si el costo fijo es de 100 dólares, encuentre la función de costo total.

CAPÍTULO II: Integral Definida

2.1. Integral Definida

Mientras que el cálculo diferencial surge y se desarrolla a partir del problema de calcular la pendiente de una recta tangente en un punto dado, el cálculo integral surge del problema de calcular de manera exacta el área bajo una curva dada.

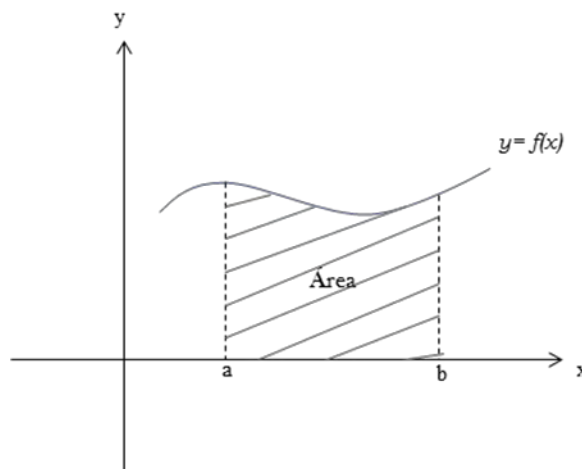


Figura 2.1

El problema de calcular esta área se conocía desde la época de los antiguos griegos, y se sabía también como estimarla con cualquier grado de precisión. Pero no se pudo resolver el problema de manera exacta hasta el desarrollo del cálculo integral, por Newton y Leibniz en el siglo XVIII. Aunque la ciencia está en deuda con el matemático Barrow quien fue maestro de Newton y Leibniz ya que es poco nombrado cuando se habla de este descubrimiento.

Hagamos un poco de historia para ver la aparición del cálculo integral

Hacia el año 300 a.C., el matemático griego Eudoxo inventó un método general para hallar áreas de regiones planas, que fue conocido como el método de Exhaustión. La idea era inscribir y circunscribir a la región (por ejemplo, un círculo) regiones geométricas más sencillas, como rectángulos, triángulos o regiones poligonales generales – cuyas áreas separamos medir. Ahora bien, si el área de la región inscrita y de

la circunscrita tiende al mismo límite cuando se van refinando los polígonos, este límite es, por definición, el área de la región.

Eudoxo y Arquímedes usaron el método de Exhaustión para hallar las áreas de un cierto número de regiones planas concretas. Se desarrollaron métodos similares para hallar longitudes de curvas y volúmenes de sólidos. Sin embargo, ocurrió que el método sólo valía en un número limitado de casos, en parte por la entidad de los problemas algebraicos que el proceso requiere. Pasaron casi 1900 años desde Arquímedes antes de que nadie hiciera progresos significativos en la medición de áreas de figuras planas. Es así como en el siglo XVIII, aparecen estos genios (Barrow, Newton, Leibniz) e inventaron un nuevo método para calcular áreas, llamado **Integración**, que está estrechamente relacionado con el cálculo diferencial.

El demostrar la relación entre derivación e integración es uno de los logros principales del análisis matemático. Se ha dicho incluso que éste es el descubrimiento aislado más importante de la ciencia.

Para encontrar el área de manera exacta, se construyen rectángulos superiores o inferiores y posteriormente se pasa al límite cuando el número de rectángulos es infinito.

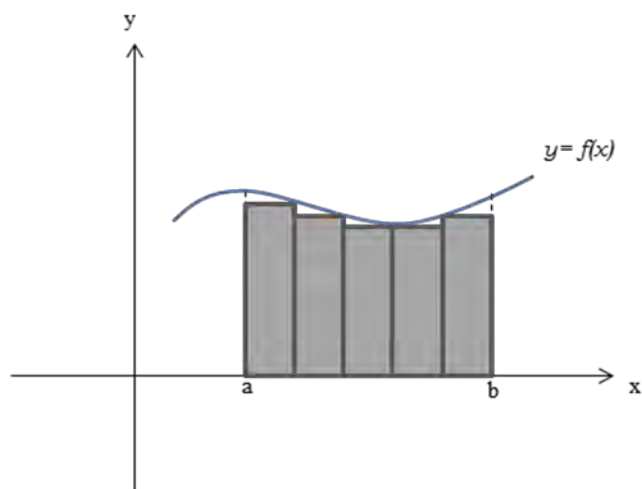


Figura 2.2

La suma de las áreas de los rectángulos inferiores (véase fig. 2.2) es

$$S_{\text{inf}} = \sum_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

Donde A_i es el área del rectángulo i , que está dado por

$$A_i = (\text{base})(\text{altura}) = (\Delta_x)f(x_i)$$

x_i es la parte inferior de la curva en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$

Entonces, se tiene que

$$S_{\text{inf}} = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta_x$$

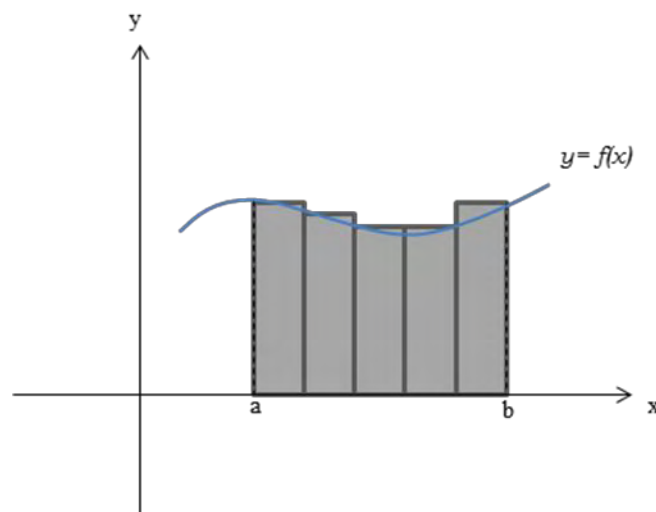


Figura 2.3

De igual manera, la suma de las áreas de los rectángulos superiores (véase figura 2.3) es:

$$S_{\text{Sup}} = \sum_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

En este caso también A_i es el área del rectángulo i , que está dado por:

$$A_i = (\text{base})(\text{altura}) = (\Delta_x)f(x_i)$$

x_i es la parte superior de la curva en el intervalo $[x_i, x_{i-1}]$

Entonces, se tiene que

$$S_{Sup} = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Es claro que

$$S_{inf} \leq \text{área bajo la curva} \leq S_{Sup}$$

El área bajo la curva se define como

$$\text{Área bajo la curva} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Si este límite existe, entonces no importa si se toman las sumas superiores o inferiores: el resultado debe ser el mismo.

Ahora bien, la integral definida de una función $f(x)$ se define como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Es importante hacer algunas aclaraciones respecto a esta definición. La construcción del área bajo la curva se realizó considerando una función positiva $f(x) \geq 0$ y con la condición de que $a < b$.

Si estas condiciones se cumplen, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \text{área bajo la curva}$$

Sin embargo, en la definición de la integral definida no son necesarias estas condiciones; es decir, cuando escribimos $\int_a^b f(x)dx$ nos referimos a cualquier función $f(x)$ que puede ser o no positiva en su dominio. Además, tampoco hay restricción sobre el orden en que debe aparecer a y b. Bien pudiera ocurrir que $b < a$. Por tanto, el resultado de calcular una integral definida puede ser cualquier número positivo,

negativo o cero. Lo cual no debe confundirse con el problema de calcular áreas, porque en este caso sí se exige que las áreas tengan un valor positivo, y por esto el cálculo de áreas es un poco más laborioso que el cálculo de una integral definida.

2.2. Teorema Fundamental del Cálculo

Aunque tenemos un símbolo parecido para las integrales definidas y las indefinidas, es importante hacer notar que conceptualmente son dos cosas muy distintas; por un lado, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ da como resultado un número real - el límite de una suma -, mientras que la integral indefinida $\int f(x)$ da como resultado una función o familia de funciones (antiderivadas).

Usar casi el mismo símbolo para antiderivadas como para integrales no es casualidad, ya que existe una conexión entre los dos problemas que originaron, por un lado, el cálculo integral; es decir, hay una relación entre los procesos de derivación e integración. Esta conexión se enuncia en las dos partes del teorema Fundamental del cálculo.

Definición: Sea f una función continua en $[a, b]$

1. Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $F'_x = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f

Hemos dicho que la diferenciación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo proporciona la relación inversa precisa entre la derivada y la integral y además este teorema permite calcular áreas e integrales con facilidad, sin tener que determinarlas como límites de sumas.

En la parte 1. De la definición del teorema se puede escribir así

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

En la cual se afirma que, si integramos f y, a continuación, derivamos el resultado, regresamos a la función original f , ya que $F'_x = f(x)$

La parte 2. Puede describirse como

$$\int_a^b F'_x dx = F(b) - F(a)$$

Aquí se afirma que si tomamos una función F , la derivamos y luego integramos el resultado, volvemos a la función original F , pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

Ejemplo 1

Calcule $\int_1^2 4x \, dx$

Solución

$$\begin{aligned}\int_1^2 4x \, dx &= 2x^2 \Big|_1^2 = F(2) - F(1) \\ &= [2(2)^2] - [2(1)^2] \\ &= 8 - 2 \\ &= 6\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcule $\int_{-1}^3 (4x - 3) \, dx$

Solución

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 (4x - 3) \, dx &= 2x^2 - 3x \Big|_{-1}^3 \\ &= [2(3)^2 - 3(3)] - [2(-1)^2 - 3(-1)] \\ &= (18 - 9) - (2 + 3) \\ &= 9 - 5 \\ &= 4\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calcule $\int_0^1 \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$

Solución

$$\int_0^1 \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx = \int_0^1 2x^3(1+x^4)^{-1/2} dx$$

Haciendo el siguiente cambio de variables, tenemos $\begin{cases} u = 1 + x^4 \\ du = 4x^3 dx \\ dx = \frac{du}{4x^3} \end{cases}$

$$= \int_0^1 2x^3 u^{-1/2} \frac{du}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{-1/2} du$$

$$= \frac{0,5 u^{0,5}}{0,5} \Big|_0^1$$

$$= u^{0,5} \Big|_0^1$$

$$= (1+x^4)^{0,5} \Big|_0^1$$

$$= [1+(1)^4]^{0,5} - [1+(0)^4]^{0,5}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1}$$

$$\approx 0,41421$$

2.3. Propiedades de la Integral Definida

- Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse como el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$
- $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ "k es una constante"
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, siempre que f sea continua en un intervalo que contenga tanto a , b y c .
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2.4. Aplicaciones de la Integral Definida

Cuando conocemos una función marginal y queremos conocer la variación del valor total de una función, podemos encontrar el resultado mediante una integral definida. Por ejemplo, supongamos que el costo marginal que un producto debe pagar para producir un producto es $c'(q)$ y estamos interesados en conocer cuánto se incrementarán sus costos cuando pase de un nivel de producción q_1 a un nivel q_2 . Supongamos que la función de costos totales es $c(q)$. Es claro que el costo adicional en que se incurre al incrementar el nivel de producción es $\Delta c = c(q_2) - c(q_1)$ y en términos de una integral definida podemos escribir:

$$\Delta c = \int_{q_1}^{q_2} c'(q) dq$$

Situaciones similares se presentan para las funciones de ingresos, utilidades y producción.

Ejemplo 4

Una fábrica de balones de futbol conoce que el ingreso marginal es $R'_{(x)} = -0,2x + 300$, donde x representa la cantidad de balones vendidos.

Encuentre:

- El ingreso total por la venta de 1000 balones
- El ingreso adicional cuando las ventas se incrementan de 500 a 1000.

Solución

a)

$$R(x) = \int_0^{1000} R'_{(x)} dx$$

$$R(x) = \int_0^{1000} (-0,2x + 300) dx$$

$$R(x) = -0,1x^2 + 300x \Big|_0^{1000}$$

$$R(x) = [-0,1(1000)^2 + 300(1000)] - [-(0)^2 + 300(0)]$$

$$R(x) = -100.000 + 300.000$$

$$R(x) = 200.000 \text{ Bf.}$$

b)

$$R(x) = \int_{500}^{1000} (-0,2x + 300) dx$$

$$R(x) = -0,1x^2 + 300x \Big|_{500}^{1000}$$

$$R(x) = [-0,1(1000)^2 + 300(1000)] - [0,1(500)^2 + 300(500)]$$

$$R(x) = 200.000 - 125.000$$

$$R(x) = 75.000 \text{ Bf.}$$

Ejemplo 5

Una tienda de cosméticos se da cuenta que sus ventas cambian a una tasa dada por: $S'_{(t)} = -3t^2 + 300t$, donde t es el número de días después de terminada una campaña publicitaria y $t \in [0,30]$; a) encuentre la venta total durante la primera semana después de que terminó la campaña; b) encuentre la venta total durante la segunda semana después de que se terminó la campaña.

Solución

- a) Durante la primera semana significa que $t \in [0,7]$, por tanto

$$S = \int_0^7 S'_{(t)} dt$$

$$S = \int_0^7 (-3t^2 + 300t) dt$$

$$S = -t^3 + 150t^2 \Big|_0^7$$

$$S = [-(7)^3 + 150(7)^2] - [-(0)^3 + 150(0)^2]$$

$$S = -343 + 7350$$

$$S = 7.007 \text{ Bf.}$$

- b) Durante la segunda semana, tenemos que $t \in [7,14]$, luego

$$S = \int_7^{14} S'_{(t)} dt$$

$$S = \int_7^{14} (-3t^2 + 300t) dt$$

$$S = -t^3 + 150t^2 \Big|_7^{14}$$

$$S = [-(14)^3 + 150(14)^2] - [-(7)^3 + 150(7)^2]$$

$$S = -2.744 + 29.400 + 343 - 7.350$$

$$S = 19.649 \text{ Bf.}$$

Ejemplo 6

Suponga que una compañía de máquinas expendedoras de helados modela su ingreso suponiendo que el dinero fluye de manera continua en las máquinas, cuya tasa de flujo anual está dada por: $f'(t) = 120e^{0,01t}$ en miles de bolívares fuertes al año. Encuentre el ingreso total de las máquinas durante los primeros 3 años.

Solución

$$f(t) = \int_0^3 f'(t) dt$$

$$f(t) = \int_0^3 120e^{0,01t} dt$$

$$f(t) = \frac{120}{0,01} e^{0,01t} \Big|_0^3$$

$$f(t) = 12.000 e^{0,01t} \Big|_0^3$$

$$f(t) = [12.000e^{0,01(3)}] - [12.000e^{0,01(0)}]$$

$$f(t) = 12.000e^{0,03} - 12.000$$

$$f(t) = 12.365,45 - 12.000$$

$$f(t) = 365,45 \text{ mil Bf.}$$

2.5. Integrales Definidas y las Áreas

El cálculo de áreas no es simplemente el cálculo de una integral definida, ya que en todo momento debemos cuidar el hecho de que las áreas son siempre positivas.

Definición de Áreas: Si f es una función continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces el área exacta entre $y = f(x)$, y el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ está dado por:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

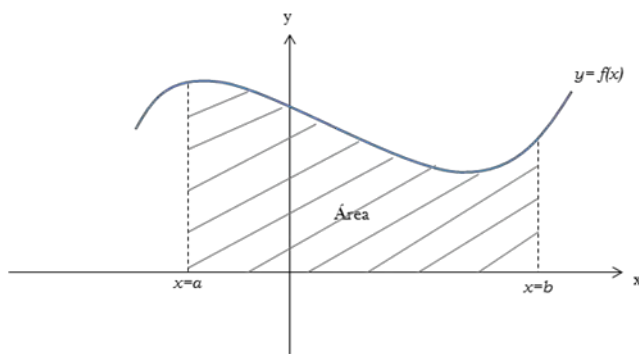


Figura 2.4

A continuación, presentamos algunos referentes importantes para calcular el área bajo la curva. Lo que nos delimita dicha área son los límites de integración que pueden ser dados en un problema o habrá que buscarlos.

Ubicación de los límites de integración:

- En las asíntotas verticales: $x = k$ (k una constante)
- En la intersección de la curva $y = f(x)$ con el eje x
- En la intersección de dos o más curvas

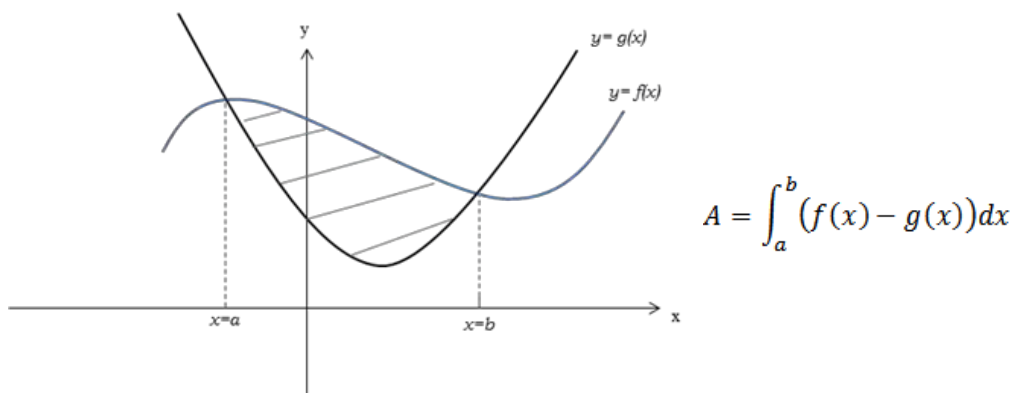
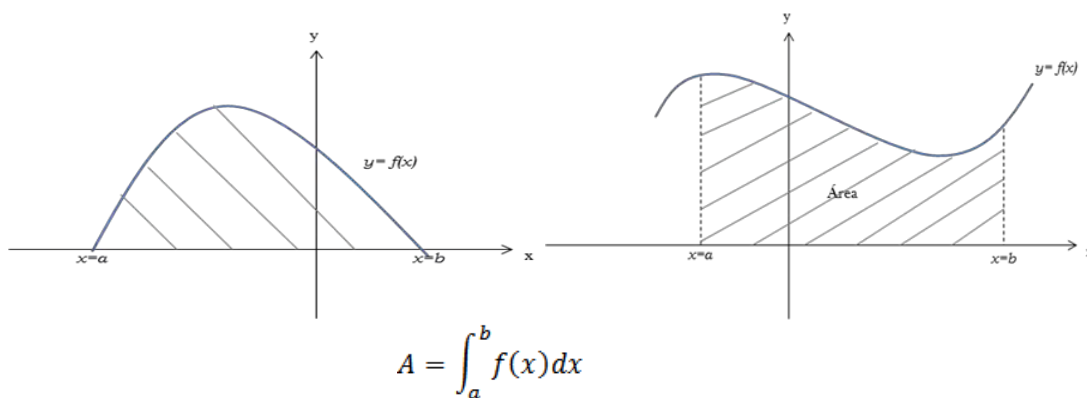


Figura 2.5

Al calcular el área se recomienda hacer un bosquejo de la función, ya que esto permite visualizar el área que hay que evaluar.

Supongamos que queremos calcular el área que se halla entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$, señalado en la siguiente figura:

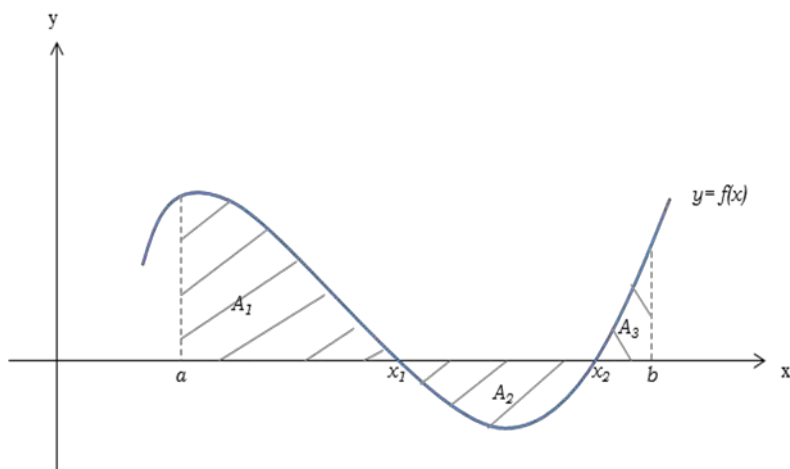


Figura 2.6

Si calculamos únicamente $\int_a^b f(x)dx$, restaríamos el área A_2 de las áreas A_1 y A_3 , debido a que la función $f(x)$ es negativa en el intervalo abierto (x_1, x_2) . Luego el procedimiento correcto es:

$$A_t = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$A_t = \left| \int_a^{x_1} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_2}^b f(x)dx \right|$$

Ejemplo 7

Calcule el área comprendida entre la curva $y = 4 - x^2$ y el eje x en el intervalo que va desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

Solución

En primer lugar, debemos saber que $x = 0$ y $x = 3$ son asíntotas verticales, por lo tanto, son límites de integración. En segundo lugar, debemos calcular las intersecciones de la curva $y = 4 - x^2$ con el eje x , para ello igualamos la función a cero, así:

$$4 - x^2 = 0$$

Factorizando, tenemos

$$(2 - x)(2 + x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow (-2,0)(2,0)$$

En nuestro intervalo de interés, que va desde $x= 0$ hasta $x= 3$, únicamente está la raíz $x = 2$, por lo que ésta también será un límite de integración.

Para poder bosquejar debemos hallar el punto máximo en la parábola que representa a $y = 4 - x^2$, para ello debemos derivar la función. Así:

$$y' = -2x \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Sustituimos este valor en la función dada, así

$$y = 4 - x^2$$

$$y = 4 - (0)^2$$

$$y = 4$$

Por tanto el punto máximo es: $(0,4)$

Bosquejamos

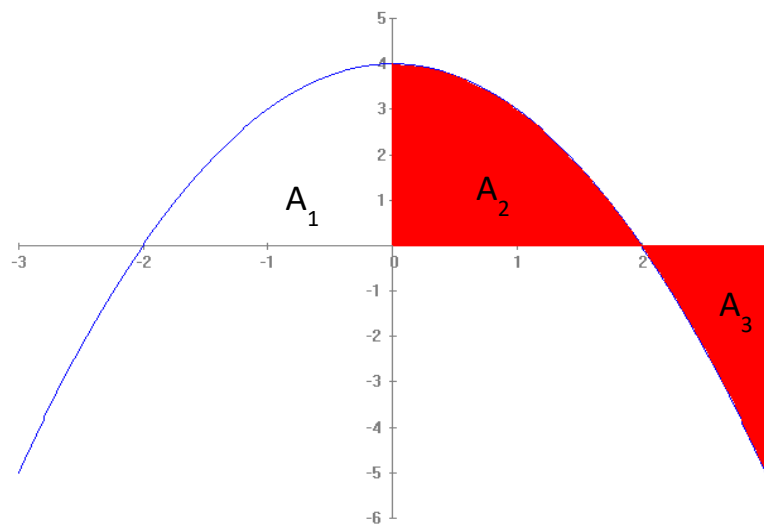


Figura 2.7

Obsérvese que el área A_1 no se encuentra en el intervalo dado $[0,3]$, por tanto se descarta.

$$A_t = |A_2| + |A_3|$$

$$A_t = \left| \int_0^2 (4 - x^2) dx \right| + \left| \int_2^3 (4 - x^2) dx \right|$$

$$A_2 = \int_0^2 (4 - x^2) dx = 4x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2$$

$$A_2 = \left[4(2) - \frac{1}{3}(2)^3 \right] - \left[4(0) - \frac{1}{3}(0)^3 \right]$$

$$A_2 = 8 - \frac{8}{3} - 0$$

$$A_2 = \frac{16}{3} U^2$$

Por otra parte:

$$A_3 = \int_2^3 (4 - x^2) dx = 4x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_2^3$$

$$A_3 = \left[4(3) - \frac{1}{3}(3)^3 \right] - \left[4(2) - \frac{1}{3}(2)^3 \right]$$

$$A_3 = 12 - 9 - 8 + \frac{8}{3}$$

$$A_3 = \frac{-7}{3} U^2$$

Luego el área total es:

$$A_t = \left| \frac{16}{3} \right| + \left| \frac{-7}{3} \right| = \frac{23}{3} U^2$$

U^2 representa cualquier unidad de área.

Ejemplo 8

Encuentre el área comprendida entre la curva $y = -2x^2 - x$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = -1$

Solución

$x = -2$ y $x = -1$ son rectas verticales, por tanto, límites de integración

Determinamos las intersecciones

$$-2x^2 - x = 0 \rightarrow x(2x - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \text{ y } x_2 = \frac{1}{2}$$

Ninguna de estas raíces se encuentra dentro del intervalo de interés, que es $[-2, -1]$. Por tanto, no nos interesan como posibles límites de integración. Al bosquejar obtenemos.

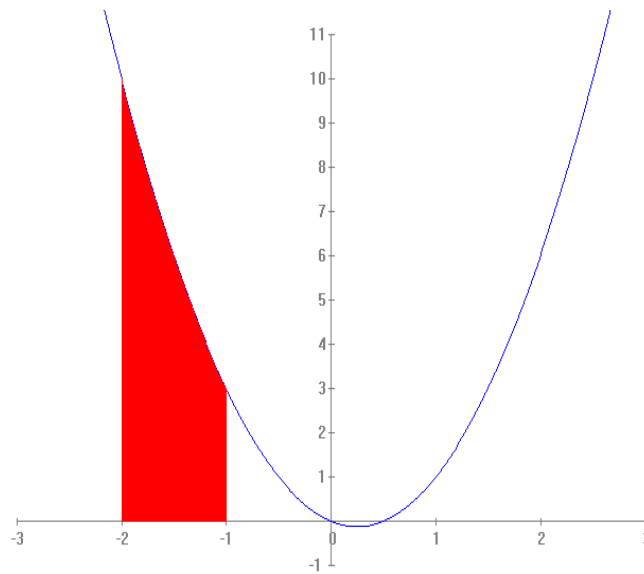


Figura 2.8

$$A_t = \left| \int_{-2}^{-1} (2x^2 - x) dx \right|$$
$$A_t = \left. \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} \right|_{-2}^{-1}$$
$$A_t = \left[\frac{2}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 \right] - \left[\frac{2}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 \right]$$
$$A_t = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{16}{3} + 2$$
$$A_t = \frac{37}{6} U^2$$

Ejemplo 9

Hallar el área encerrada entre la curva $y = 9 - x^2$ y el eje x.

Solución

En este caso no se menciona el intervalo, por lo que debemos deducirlo calculando las intersecciones de la curva $y = 9 - x^2$, con el eje x, es decir, hallamos los límites de integración

$$9 - x^2 = 0 \rightarrow (3 - x)(3 + x) = 0 \rightarrow x_1 = 3 \text{ y } x_2 = -3$$

Bosquejamos y hallamos el punto máximo de la parábola, así:

$$y' = -2x \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 9, \text{ por tanto } P_m = (0,9)$$

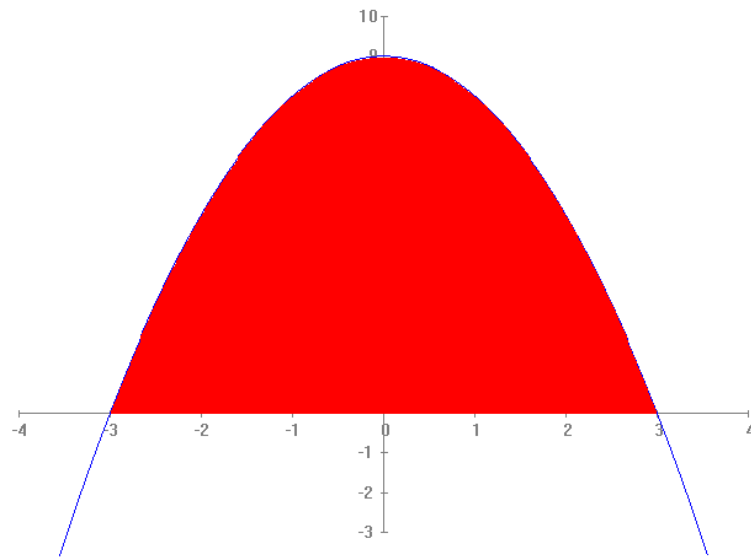


Figura 2.9

$$A = \left| \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx \right|$$

$$A = 9x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-3}^3$$

$$A = \left[9(3) - \frac{1}{3}(3)^3 \right] - \left[9(-3) - \frac{1}{3}(-3)^3 \right]$$

$$A = 27 - 9 + 27 - 9$$

$$A = 36 \text{ U}^2$$

Ejemplo 10

Encuentre el área de la región entre la curva $y = \frac{1}{x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = e$

Solución

$x = 1$ y $x = e$ son asíntotas verticales, por lo tanto límites de integración.

Bosquejamos

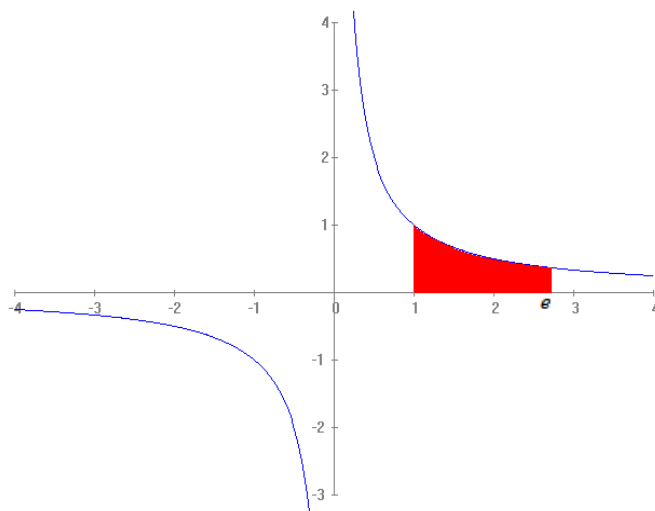


Figura 2.10

El área buscada viene dada por

$$A = \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$A = \ln x \Big|_1^e$$

$$A = \ln e - \ln 1$$

$$A = 1 - 0$$

Ejemplo 11

Encuentre el área de la región entre la curva $y = e^x$, el eje x y $x = 1$ y $x = 2$

Solución

$x = 1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales, por tanto límites de integración

Si bosquejamos

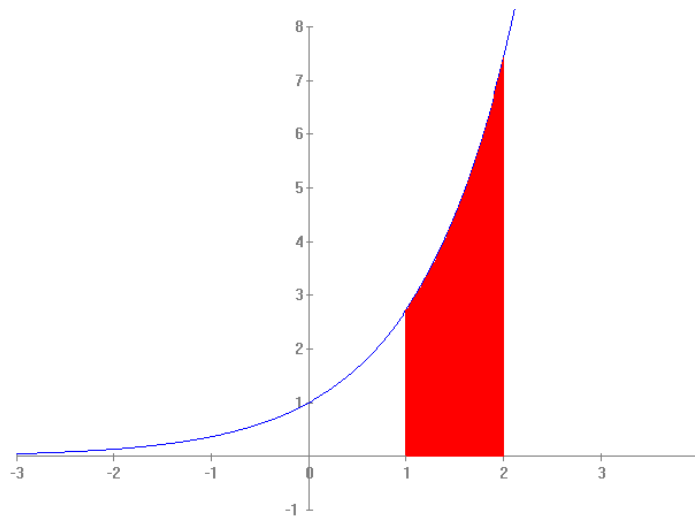


Figura 2.11

El área buscada viene dada por

$$A = \int_1^2 e^x dx$$

$$A = e^x \Big|_1^2$$

$$A = e^2 - e^1$$

$$A = e(e - 1)$$

2.6. Áreas entre Curvas

Si queremos calcular el área comprendida entre dos curvas $y = f(x)$; $y = g(x)$, el integrando debe ser la diferencia entre las dos funciones, es decir

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

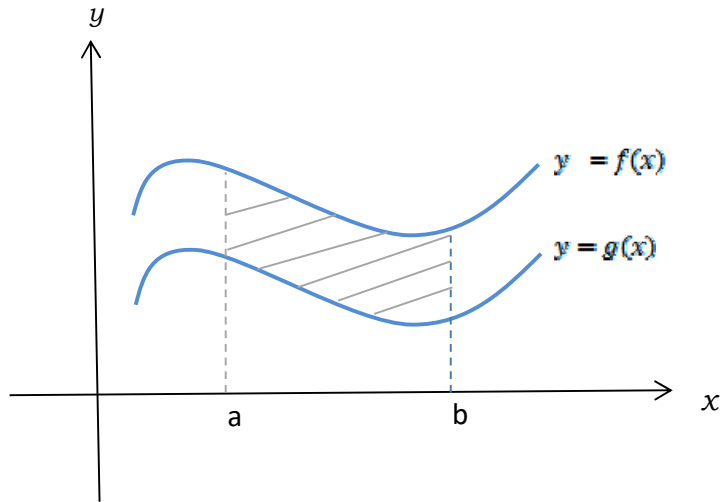


Figura 2.12

Gráficamente es equivalente a decir, que se resta la función que esté por arriba a la función que esté por debajo. Según la figura 2.12 resulta evidente que el resultado es positivo porque en todo el intervalo $f(x) \geq g(x)$, pero esto lo podemos decidir sólo si conocemos la gráfica. En caso de no ser así, basta con tomar el valor absoluto, sin importar el orden en que aparecen $f(x)$ y $g(x)$, por tanto, el área entre las dos curvas está dado por

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Ahora bien, puede ocurrir que las curvas se intercepten en el intervalo de interés, como se observa en la siguiente figura

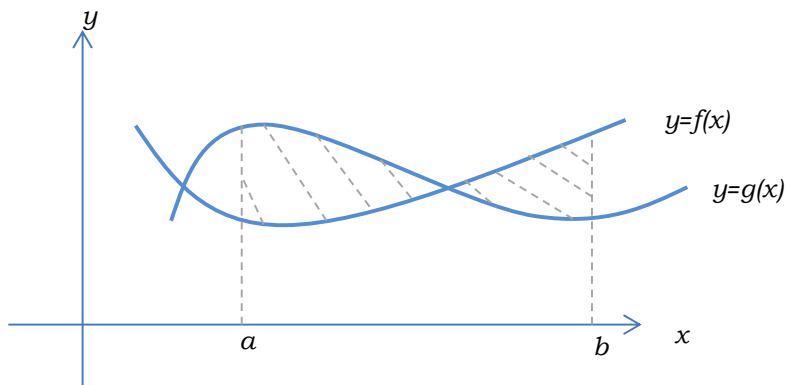


Figura 2.13

En este caso, la diferencia $f(x) - g(x)$ será positiva en una porción del intervalo y negativa en otras partes. Debemos por tanto conocer las intersecciones entre ellas (límites de integración) y partir el intervalo para no sumar áreas negativas.

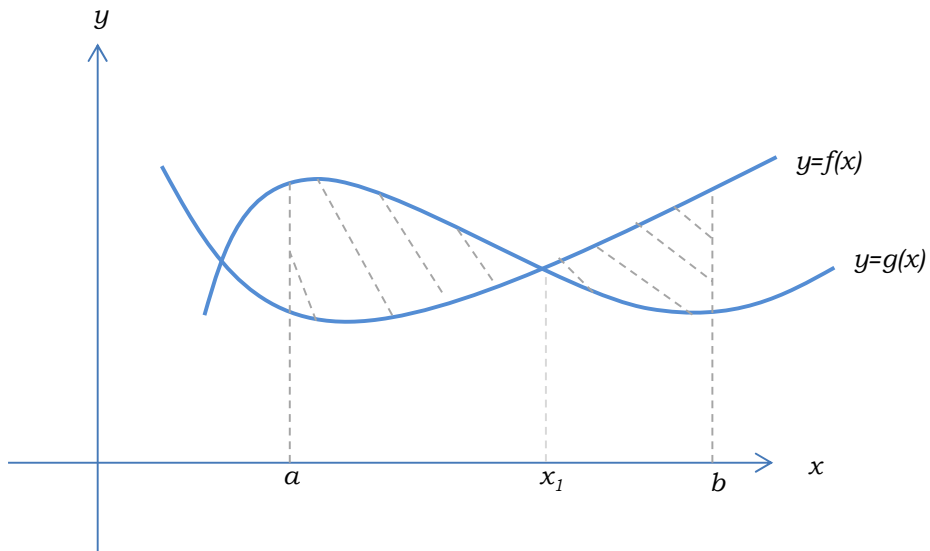


Figura 2.14

El área entre las curvas es:

$$A = \left| \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_{x_1}^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Ejemplo 12

Determine el área entre las curvas $y = -x^2 + 8$ y $y = x^2$, en el intervalo que va desde $x = 0$ hasta $x = 4$

Solución

Recordemos que $x = 0$ y $x = 4$ son asíntotas verticales, por tanto son límites de integración. Debemos verificar si las curvas dadas se interceptan en el intervalo de interés, de ocurrir, dichos puntos serán límites de integración. Para verificar si existe intersección igualamos las funciones, así:

$$-x^2 + 8 = x^2$$

$$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \text{ y } x_2 = -2$$

Por tanto, los puntos de intersección son: $(2,4)$ y $(-2,4)$

En el intervalo $[0,4]$ está la intersección $x_1 = 2$; por tanto, debemos partir el intervalo de integración. La elección sobre cuál debe ser $f(x)$ y cuál $g(x)$ no es relevante, toda vez que se tomarán los valores absolutos de las funciones.

Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 8$, entonces

$$A = \left| \int_0^2 [x^2 - (8 - x^2)] dx \right| + \left| \int_2^4 [x^2 - (8 - x^2)] dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^2 (2x^2 - 8) dx \right| + \left| \int_2^4 (2x^2 - 8) dx \right|$$

Al calcular

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 (2x^2 - 8) dx &= \left. \frac{2x^3}{3} - 8x \right|_0^2 \\
 &= \left[\frac{2}{3}(2)^3 - 8(2) \right] - \left[\frac{2}{3}(0)^3 - 8(0) \right] \\
 &= \frac{16}{3} - 16 \\
 &= \frac{-32}{3}
 \end{aligned}$$

Al calcular

$$\begin{aligned}
 \int_2^4 (2x^2 - 8) dx &= \left. \frac{2x^3}{3} - 8x \right|_2^4 \\
 &= \left[\frac{2}{3}(4)^3 - 8(4) \right] - \left[\frac{2}{3}(2)^3 - 8(2) \right] \\
 &= \frac{112}{3} - 16 \\
 &= \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$

$$A = \left| \frac{-32}{3} \right| + \left| \frac{64}{3} \right| = 32 \text{ U}^2$$

Bosquejamos y hallamos los puntos máximo y mínimo

Para $y = x^2$

$$y' = 2x$$

$$2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto mínimo } (0,0)$$

Para $y = -x^2 + 8$

$$y' = -2x$$

$$-2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 8 \rightarrow \text{Punto máximo } (0,8)$$

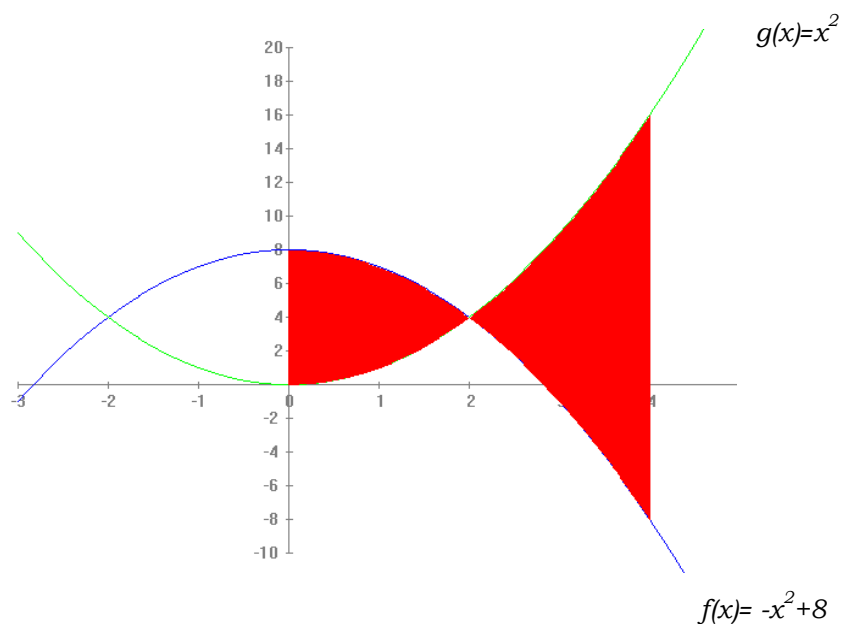


Figura 2.15

Ejemplo 13

Calcule el área encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$

Solución

En este caso no se especifica el intervalo de interés, de modo que el área encerrada estará comprendida entre las intersecciones. Igualando se tiene:

$$x^2 = \sqrt{x}$$

$(x^2)^2 = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x^4 = x \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 1$,
por lo que los puntos de intersección son $(0,0)$ y $(1,1)$

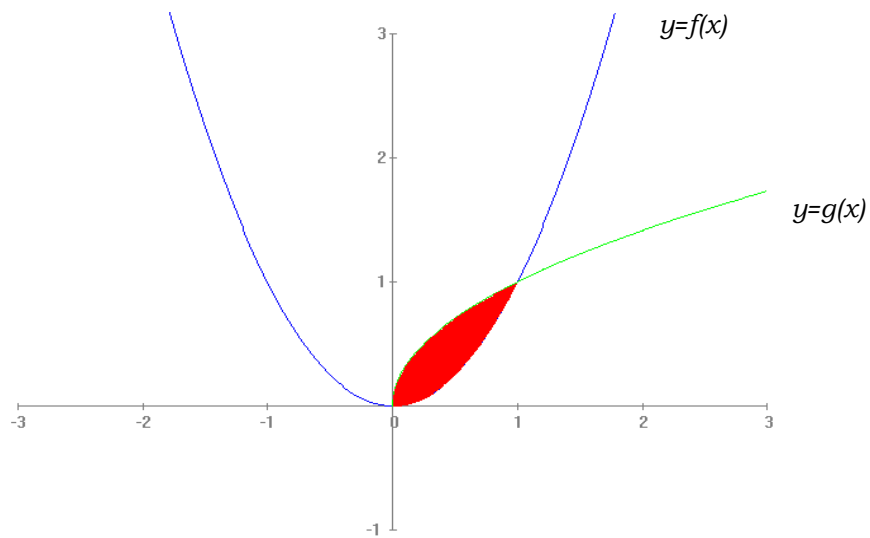


Figura 2.16

El área viene dado por

$$A = \left| \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x}) dx \right|$$

Al calcular

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x}) dx &= \int_0^1 (x^2 - x^{1/2}) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{2}{3}(1)^{3/2} \right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{2}{3}(0)^{3/2} \right] \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por tanto

$$A = \left| \frac{-1}{3} \right| = \frac{1}{3} u^2$$

Ejemplo 14

Encuentre el área de la región encerrada por las curvas $y = x^2 + 2x + 6$;
 $y = x + 12$

Solución

Calculamos las intersecciones para hallar el intervalo de integración, ya que no lo dan.

$$x^2 + 2x + 6 = x + 12$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \rightarrow x = -3 \text{ y } x = 2$$

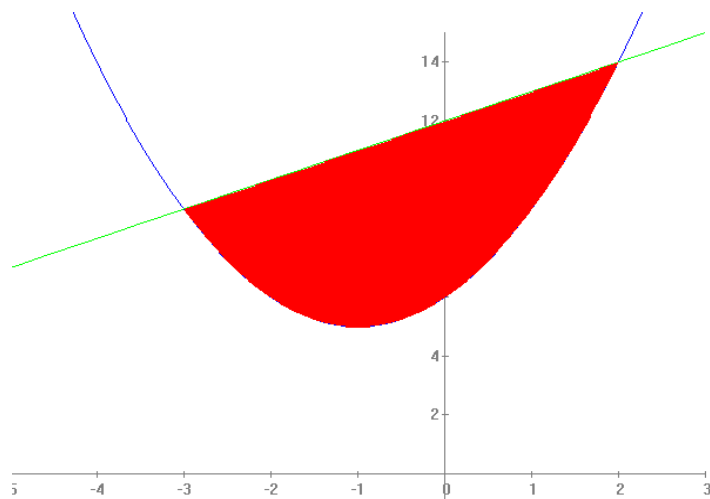


Figura 2.17

Por tanto

$$A = \left| \int_{-3}^2 [(x^2 + 2x + 6) - (x + 12)] dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-3}^2 (x^2 + x - 6) dx \right|$$

Y se calcula

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 (x^2 + x - 6) dx &= \left. \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \right|_{-3}^2 \\ &= \left[\frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} - 6(2) \right] - \left[\frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 6(-3) \right] \\ &= \frac{8}{3} + 2 - 12 + 9 - \frac{9}{2} - 18 \\ &= \frac{-125}{6} \end{aligned}$$

Por tanto

$$A = \left| \frac{-125}{6} \right| = \frac{125}{6} U^2$$

Ejemplo 15

Encuentre el área de la región encerrada por la curva $y = x^2 + 4$ y las rectas $y = x$
 $x = 0$ $x = 3$

Solución

Las rectas $x = 0$ y $x = 3$ por ser asíntotas verticales son límites de integración. Ahora interceptamos la curva $y = x^2 + 4$ con la recta $y = x$. Para ello las igualamos y resolvemos:

$$x^2 + 4 = x \rightarrow x^2 - x + 4 = 0$$

Esta ecuación no posee solución real, por lo que podemos afirmar que las curvas no tienen puntos en común.

Bosquejemos para visualizar el problema

$$y = x^2 + 4 \rightarrow y' = 2x \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4$$

Por lo que el punto mínimo tiene coordenadas **(0,4)**

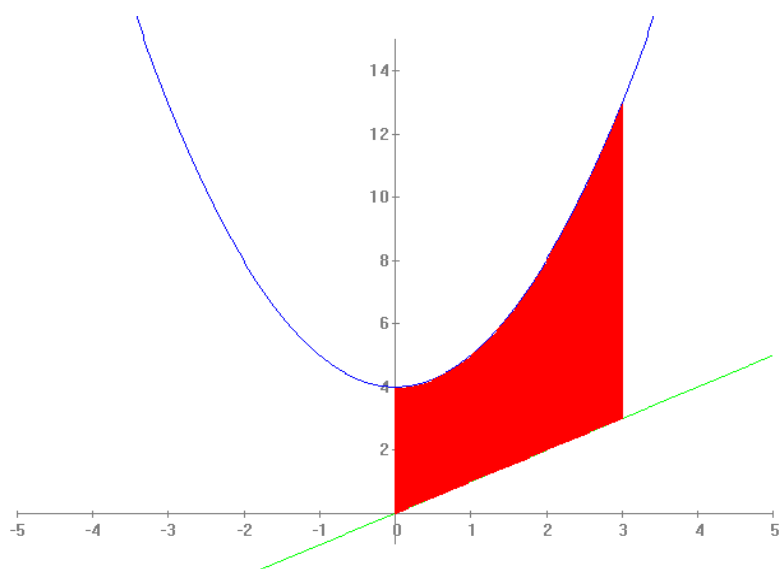


Figura 2.18

Obsérvese que la curva $y = x^2 + 4$ no se intercepta con $y = x$

El área viene dado por

$$A = \left| \int_0^3 [(x^2 + 4) - (x)] dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^3 (x^2 - x + 4) dx \right|$$

Y se calcula

$$A = \int_0^3 (x^2 - x + 4) dx = \left. \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x \right|_0^3$$

$$A = \left[\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2 + 4(3) \right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{2}(0)^2 + 4(0) \right]$$

$$A = 9 - \frac{9}{2} + 12$$

$$A = \frac{31}{2} U^2$$

Ejemplo 16

Encuentre el área de la región encerrada por las gráficas de $y = 2x$ y $y = x^3 - x^2$

Solución

Como no nos dan el intervalo de integración, hallamos la intersección entre las curvas, para ello igualamos

$$x^3 - x^2 = 2x$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x(x - 2)(x + 1) = 0$$

$x = 0$ $x = 2$ $x = -1$, por lo que los puntos de intersección son $(0,0)(2,4)(-1,-2)$

Bosquejamos

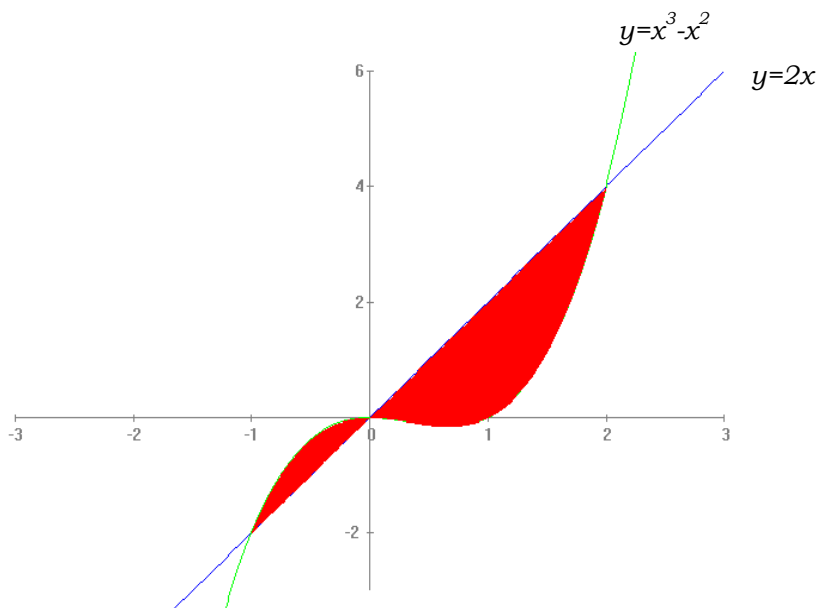


Figura 2.19

El área viene dada por

$$A = \left| \int_{-1}^0 [(x^3 - x^2) - 2x] dx \right| + \left| \int_0^2 [(x^3 - x^2) - 2x] dx \right|$$

Y al calcular las dos áreas por separado, obtenemos

$$A_1 = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx = \left. \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right|_{-1}^0$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 \right] - \left[\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 \right]$$

$$A_1 = 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1$$

$$A_1 = \frac{5}{12} U^2$$

El área A_2 es:

$$A_2 = \int_{-0}^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx = \left. \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right|_0^2$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2 \right] - \left[\frac{1}{4}(-0)^4 - \frac{1}{3}(-0)^3 - (-0)^2 \right]$$

$$A_2 = 4 - \frac{8}{3} - 4$$

$$A_2 = -\frac{8}{3}U^2$$

Luego el área total viene dada por

$$A_t = \left| \frac{5}{12} \right| + \left| \frac{-8}{3} \right| = \frac{37}{12}U^2$$

Ejemplo 17

Hallar el área de la región encerrada por $y = \frac{4}{x}$; $y = 1$; $y = 4$; $x = 0$

Solución

En este ejercicio, como tenemos dos asíntotas horizontales $y = 1$; $y = 4$, debemos integrar en función de y , para que esas asíntotas horizontales se conviertan en límites de integración.

Para ello, trabajamos en función de y : Si $y = \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{4}{y}$, ahora bosquejamos

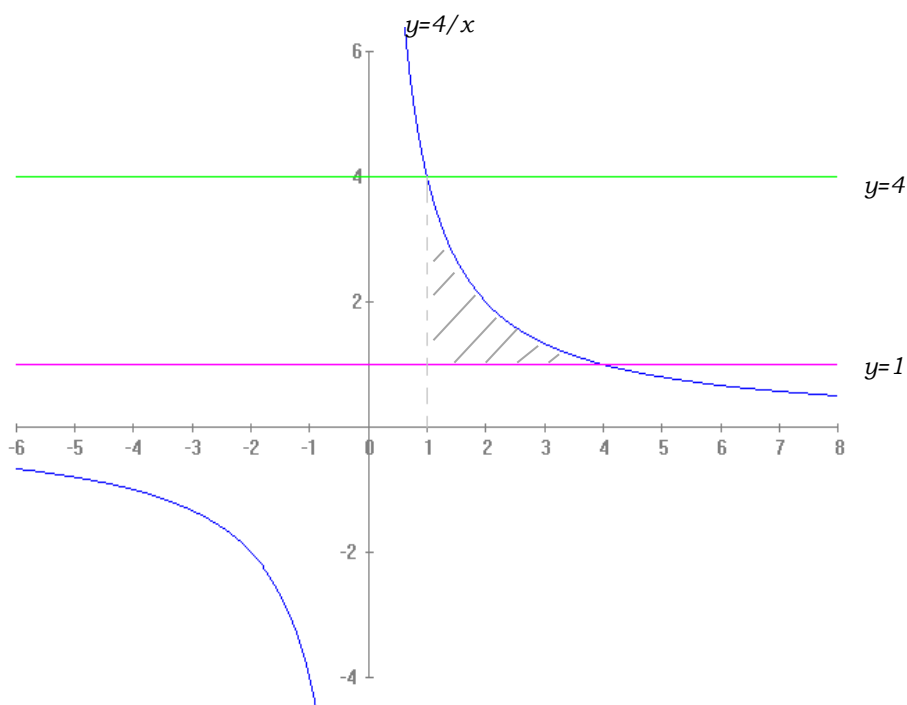


Figura 2.20

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_1^4 \frac{4}{y} dy \right| = 4 \ln|y| \Big|_1^4 \\
 &= [4 \ln 4] - [4 \ln 1] \\
 &\approx 5,545 U^2
 \end{aligned}$$

Ejemplo 18

Encuentre el área encerrada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x - y = 2$

Solución

En este caso, conviene considerar a la variable x como función de y ; es decir, despejando x tendremos dos funciones: $f(y) = y^2$ y $g(y) = y + 2$

Para conocer las intersecciones, igualamos

$$y^2 = y + 2 \rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow (y + 1)(y - 2) = 0 \rightarrow y = -1; y = 2$$

Bosquejamos, para ello hallamos el punto mínimo

$$x = y^2 \rightarrow x' = 2y \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0 \text{ y } x = 0$$

Por lo que el punto mínimo tiene coordenadas: **(0,0)**

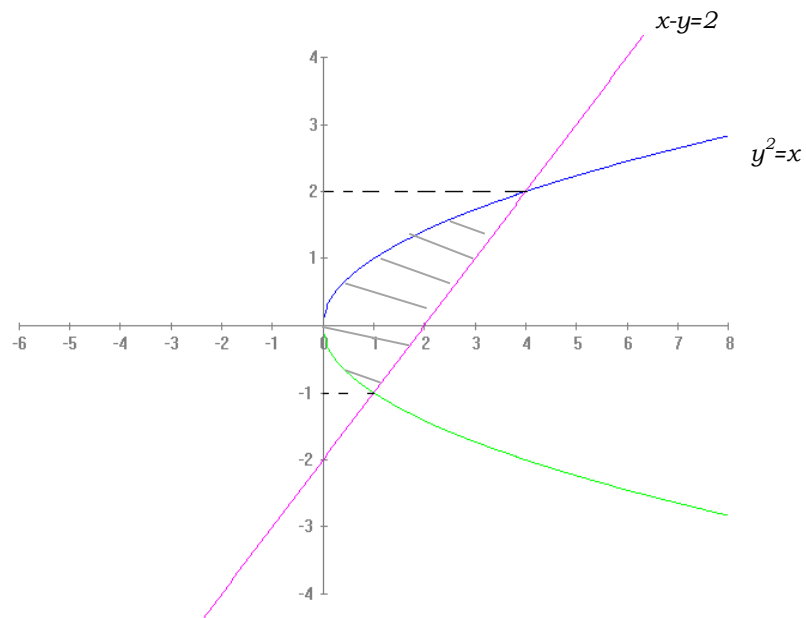


Figura 2.21

El área viene dada por

$$A = \left| \int_{-1}^2 [(y^2) - (y + 2)] dy \right|$$

$$A = \left| \int_{-1}^2 (y^2 - y - 2) dy \right|$$

Que al calcular obtenemos

$$\begin{aligned}A &= \int_{-1}^2 (y^2 - y - 2) dy \\A &= \left. \frac{1}{3}y^3 - \frac{y^2}{2} - 2y \right|_{-1}^2 \\A &= \left[\frac{1}{3}(2)^3 - \frac{(2)^2}{2} - 2(2) \right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) \right] \\A &= \frac{8}{3} - 2 - 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \\A &= -\frac{9}{2}\end{aligned}$$

Entonces

$$A = \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2} U^2$$

2.7. Aplicaciones de las Áreas en la Administración y la Economía

2.7.1. Curva de Lorenz. Índice de Gini

“La única diferencia entre los ricos y otras personas”, dijo en una ocasión Mary Colum a Ernest Hemingway, “es que los ricos tienen más dinero”. Es posible que sea así. Pero esta afirmación deja muchas interrogantes sin respuesta. La diferencia entre los ricos y los pobres es un importante tema de estudio, para los ricos que llevan una vida acomodada, para los pobres en apuros y para la preocupada clase media que aspira a más.

La renta varía de unas personas a otras. Los ingresos de una persona dependen de la oferta y de la demanda de su trabajo, las cuales dependen, a su vez, de la capacidad natural, del capital humano, de la discriminación, etc. Como los ingresos procedentes del trabajo representan entre el 60 y el 80 por 100 de la renta total en casi todas las economías, los factores que determinan los salarios también son en gran medida responsables en la forma en que se distribuye la renta total de la economía entre los diferentes miembros de la sociedad. En otras palabras, de ellos dependen quien es rico y quien es pobre.

Para estudiar distribuciones de ingresos se usa una Curva de Lorenz. Si x es la fracción de los receptores de ingresos que ganan menos y y es la fracción acumulada del total de los ingresos, entonces la línea de igualdad en la distribución de ingresos es la recta $y=x$. En este caso, por ejemplo, 10 % de los receptores de ingresos perciben 10 % de los ingresos totales, 20 % de los receptores reciben 20 % de los ingresos totales, etc. Desde luego, la distribución real del ingreso no es de esta manera, ya que normalmente algunos perciben más que otros; por ejemplo, 20 % de los que menos perciben podrían estar recibiendo sólo 5 % del total de los ingresos, y 50 % de los que menos perciben podrían estar recibiendo sólo 25 % del total. A esta curva real de distribución de ingresos se le conoce como **Curva de Lorenz**.

En la siguiente figura se observan la línea de igualdad y la Curva de Lorenz.

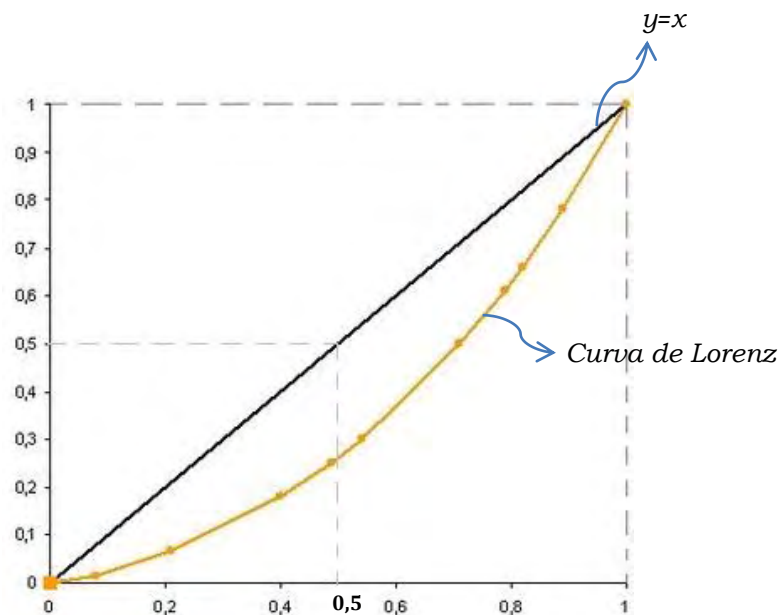


Figura 2.22

La desigualdad en la distribución del ingreso se mide con el “coeficiente de desigualdad o Índice de Gini para una curva de Lorenz dada. Este coeficiente se define como el área entre la curva y la diagonal, dividida entre el área bajo la diagonal, es decir, el coeficiente de desigualdad de Gini es

$$Gini = \frac{\text{área entre la curva y la diagonal}}{\text{área bajo la diagonal}}$$

Observemos que, si todos los ingresos son iguales, la curva de Lorenz coincide con la diagonal y entonces no hay área entre las dos curvas, de modo que el coeficiente de desigualdad es cero. Por otro lado, observemos también que el área bajo la diagonal es el área de un triángulo cuya base es uno, al igual que su altura. Recordando la fórmula del área del triángulo, tenemos:

$$\text{Área} = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$$

Y el área de la diagonal es $\frac{(1)(1)}{2} = \frac{1}{2}$

Entonces, el índice de Gini puede escribirse como

$$\text{Gini} = \frac{\text{área entre la curva y la diagonal}}{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Gini} = 2(\text{área entre la curva y la diagonal})$$

Si $L(x)$ es la curva de Lorenz, entonces el índice de Gini puede escribirse como

$$\text{Gini} = \int_0^1 [x - L(x)] dx$$

Ejemplo 19

Determine el coeficiente de desigualdad o índice de Gini correspondiente a la curva de Lorenz $y = 0,9x^2 + 0,1x$ (*el ingreso de un país en el año 2000*). Si el coeficiente de Gini para el ingreso en el 2005 es 0,378. ¿Durante que año la distribución del ingreso fue más equitativa?

Solución

$$\text{Gini} = 2 \int_0^1 [x - L(x)] dx$$

$$\text{Gini} = 2 \int_0^1 [x - (0,9x^2 + 0,1x)] dx$$

$$Gini = 2 \int_0^1 (x - 0,9x^2 - 0,1x) dx$$

$$Gini = \int_0^1 (0,9x - 0,9x^2) dx$$

$$Gini = 2(0,45x^2 - 0,3x^3) \Big|_0^1$$

$$Gini = [2(0,45(1)^2 - 0,3(1)^3)] - [2(0,45(0)^2 - 0,3(0)^3)]$$

$$Gini = 0,3$$

La equitatividad absoluta del ingreso ocurriría si el índice de Gini para el ingreso fuera cero; y coeficientes más pequeños indican que los ingresos son más equitativos. Por lo tanto, la distribución del ingreso fue más equitativa en el 2000 que en el 2005.

Ejemplo 20

En un esfuerzo por hacer que la distribución del ingreso sea más equitativa, el gobierno de Venezuela aprueba una Ley tributaria que cambia la curva de Lorenz del año 2008 $y = 0,99x^{2,1}$ a $y = 0,32x^2 + 0,68x$. Para el año 2009. Encuentre el coeficiente de desigualdad para el ingreso para ambos años y compare la distribución del ingreso antes y después de que se aprobó la ley tributaria.

Solución

Año 2008

$$Gini = 2 \left[\int_0^1 [x - 0,99x^{2,1}] dx \right]$$

$$Gini = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^{3,1}}{0,32} \right) \Big|_0^1$$

$$Gini = x^2 - 0,64x^{3,1} \Big|_0^1$$

$$Gini = [(1)^2 - 0,64(1)^{3,1}] - [(0)^2 - 0,64(0)^{3,1}]$$

$$Gini = 0,360$$

Año 2009

$$Gini = 2 \left[\int_0^1 [x - (0,32x^2 + 0,68x)] dx \right]$$

$$Gini = 2 \int_0^1 (0,32x - 0,32x^2) dx$$

$$Gini = 2 (0,16x^2 - 0,106x^3) \Big|_0^1$$

$$Gini = 0,32x^2 - 0,212x^3 \Big|_0^1$$

$$Gini = [0,32(1)^2 - 0,212(1)^3] - [0,32(0)^2 - 0,212(0)^3]$$

$$Gini = 0,108$$

Evidentemente la ley tributaria favoreció la distribución de los ingresos en Venezuela para el año 2009.

2.7.2. Excedente de Consumidores y Excedente de Productores

Imaginémonos una persona que posee un álbum de barajitas del mundial de fútbol México 70 (campeón Brasil) y decide venderla. Una manera de hacerlo es realizar una subasta por internet. A ello aparecen 4 coleccionistas: Jeisson, Miguel, Juan y Fabiana. A todos les gustaría tener el álbum, pero la cantidad que cada uno está dispuesto a pagar por él tiene un límite. La tabla 2.1 muestra el precio máximo que pagaría cada uno de los cuatro posibles compradores:

Tabla 2.1. Disposición a pagar de cuatro posibles compradores

Comprador	Disposición a pagar (Bf.)
Jeisson	1000
Miguel	800
Juan	700
Fabiana	500

El máximo de cada uno se llama “Disposición a Pagar” y mide el valor que concede el bien. Cada comprador desearía comprar el álbum a un precio inferior a su disposición a pagar, se negarían a comprarlo a un precio superior a su disposición a pagar y se mostrarían indiferentes ante la posibilidad de comprarlo a un precio exactamente igual a su disposición a pagar.

Para vender el álbum, comienza la subasta con un precio bajo, por ejemplo Bf. 100. Como los cuatro compradores están dispuestos a pagar mucho más, el precio sube rápidamente. La subasta se detiene cuando Jeisson ofrece 800 Bf. (o algo más). En este punto Miguel, Juan y Fabiana han abandonado la subasta, porque no están dispuestos a ofrecer más de 800 Bf. Jeisson paga Bf. 800 y consigue el álbum. Obsérvese que éste ha ido a parar al comprador que le concede el valor más alto. ¿Qué beneficio obtiene Jeisson por la compra del álbum de barajitas de fútbol? En cierto sentido, Jeisson ha encontrado una verdadera ganga: estaba dispuesto a pagar Bf.1000 por el álbum, pero sólo paga Bf. 800. Decimos que recibe un excedente del consumidor de Bf. 200.

El Excedente del Consumidor: es la cantidad que un comprador está dispuesto a pagar por un bien menos la cantidad que paga realmente.

El excedente del consumidor mide el beneficio que obtienen los compradores participando en un mercado. En este ejemplo, Jeisson recibe un beneficio de Bf. 200 por participar en la subasta, pero solo paga Bf. 800 por un bien que valora en Bf. 1000. Miguel, Juan y Fabiana no obtienen ningún excedente por participar en la subasta, ya que la abandonaron sin el álbum y sin pagar nada.

Ahora imaginemos que el propietario de una casa necesita que le hagan todos los servicios del hogar (limpiar, cocinar, lavar, planchar). Recurre a cuatro prestadoras de servicio de limpieza: Adriana, Dayana, Faby y Sofía. Cada una está dispuesta a hacer el trabajo si el precio le conviene. El propietario recibe las ofertas de las cuatro mujeres y adjudicará el trabajo a la que lo haga al precio más bajo posible.

Cada mujer está dispuesta a aceptar el trabajo si el precio que percibe es superior al costo de hacerlo, aquí el costo debe concebirse como el valor que conceden a su propio esfuerzo y tiempo. La tabla 2.2 muestra el costo de cada una.

Tabla 2.2 Costos de cuatro posibles limpiadoras

Limpiadora	Costo (Bf.)
Adriana	90
Dayana	80
Faby	60
Sofía	50

Como el precio más bajo que aceptaría por su trabajo, es una medida de su disposición a vender sus servicios. Cada trabajadora desearía vender sus servicios a un precio superior a su costo, se negaría a hacerlos a un precio inferior a su costo y se mostraría indiferente ante la posibilidad de hacerlo a un precio exactamente igual a su costo.

Cuando el propietario recibe las ofertas de las trabajadoras, el precio puede comenzar siendo alto, pero baja rápidamente cuando éstas compiten por el trabajo. Cuando Sofía ofrece Bf. 60 (o algo menos), es la única que queda, Está contenta de hacer el trabajo a este precio, ya que su costo es de Bf. 50 solamente. Adriana, Dayana y Faby no están dispuestas a hacerlo por menos de Bf. 60. Obsérvese que el trabajo se adjudica a la trabajadora que puede hacerlo al menos costo. ¿Qué beneficio obtiene Sofía al recibir el trabajo? Dado que está dispuesto a hacerlo por Bf. 50, pero obtiene Bf.60, decimos que recibe un excedente del productor de Bf. 10.

El Excedente del Productor es la cantidad que recibe un vendedor menos el costo de producción. Mide el beneficio que obtienen los vendedores por participar en un mercado.

El precio que los diferentes consumidores estarían dispuestos a pagar por un producto varía dependiendo desde luego de valores como la satisfacción que obtendrán del consumo de dicho producto y del nivel de sus ingresos. La curva de demanda del producto nos indica la cantidad que será demandada a cada precio que se fije del mismo. Análogamente, no todos los productores tienen el mismo sistema de costos de producción y, por tanto, el precio al que los diferentes productores están dispuestos a producir varía de un productor a otro, de modo que es la curva de demanda la que indica el nivel de producción correspondiente a cada nivel de precios.

En una situación de libre competencia, ningún productor puede tener estrategias de precios (tal como sería el caso de un monopolio); esto es, en libre competencia el precio lo fija el mercado sin que nadie pueda interferir en él. Debido a este hecho, habrá consumidores que podrían pagar más del precio fijado por el mercado y consumidores que se quedarán sin consumir el producto porque el precio fijado es superior al precio máximo que ellos pagarían. De igual manera, habrá productores que podrían producir a un precio menor que el precio fijado por el mercado y productores que saldrán del mercado porque sus costos no le permiten vender al precio fijado.

Es claro entonces que en libre competencia hay consumidores que se quedan con un excedente, porque el mercado fijó el precio del producto a un nivel inferior del que ellos estarían dispuestos a pagar y hay productores que también tendrán un excedente, por el hecho de que su sistema de costos les permitiría vender a un precio inferior al precio competitivo.

A continuación deduciremos las fórmulas que nos permitan calcular los excedentes, tanto de consumidores como de productores.

Para ello, partimos del diagrama de oferta y demanda de la siguiente figura

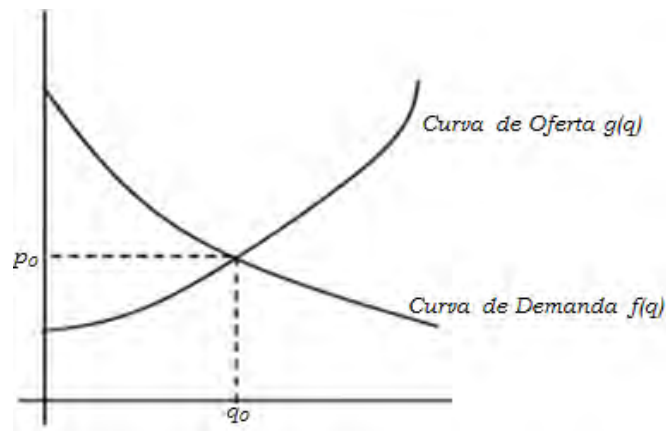


Figura 2.23

El precio que fija el mercado se obtiene como el punto donde se interseca la curva de oferta y la curva de demanda; es decir, el precio competitivo en la figura 2.23 es p_0 y la cantidad de equilibrio de ese precio es q_0 .

El excedente de los consumidores se define como el área comprendida entre la curva de demanda $p = f(q)$ y la línea $p = p_0$. Dicho excedente corresponde al área sombreada de la figura 2.24

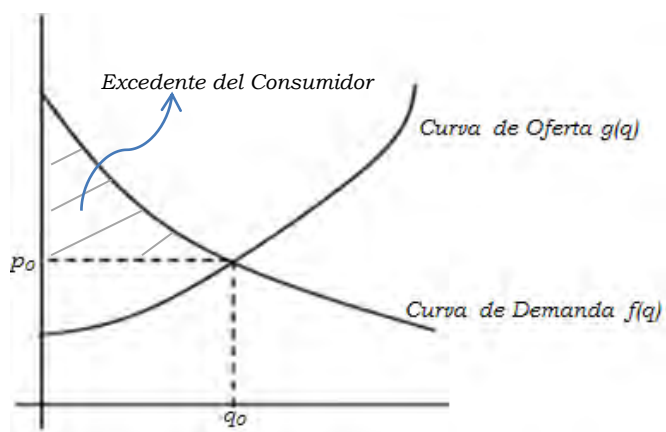


Figura 2.24

Matemáticamente, el excedente de los consumidores es:

$$EC = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0] dq$$

El excedente de los productores es el área que se halla entre la línea $p = p_0$ y la curva de oferta $p = g(q)$, el cual corresponde al área sombreada de la figura 2.25

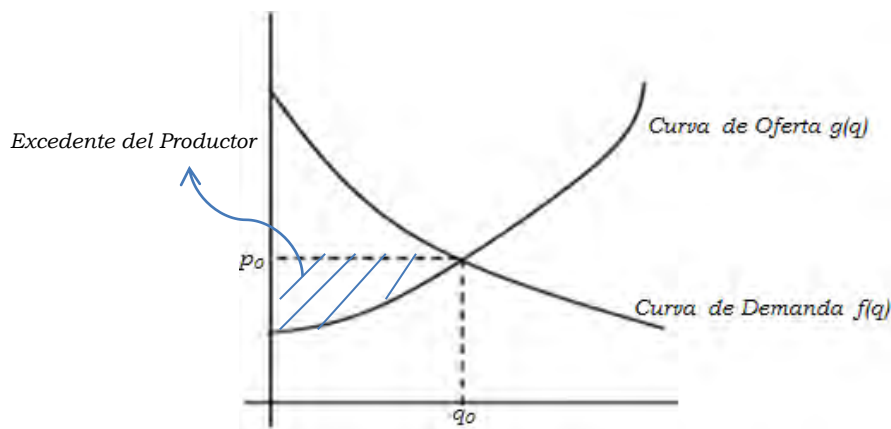


Figura 2.25

Matemáticamente, el excedente de los productores se calcula como:

$$EP = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)] dq$$

Ejemplo 21

La función de demanda para un producto es $p = 34 - x^2$. Si el precio de equilibrio es \$9. ¿Cuál es el excedente del consumidor?

Solución

Primero debemos encontrar la cantidad q_0 que se comprará a este precio. Si suponemos que $p_0 = 9$ y despejamos x , obtenemos:

$$9 = 34 - x^2 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow x_1 = 5 \text{ y } x_2 = -5, \text{ este último valor se descarta por no existir cantidades negativas, por lo que } q_0 = 5.$$

Por lo tanto, el punto de equilibrio es $(9,5)$. El excedente del consumidor está dado por la fórmula

$$EC = \int_0^{x_1} [f(x) - p_0] dx$$

$$EC = \int_0^5 [(36 - x^2) - 9]dx$$

$$EC = \int_0^5 (25 - x^2)dx$$

$$EC = 25x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^5$$

$$EC = \left[25(5) - \frac{1}{3}(5)^3 \right] - \left[25(0) - \frac{1}{3}(0)^3 \right]$$

$$EC = 125 - 41,66$$

$$EC = 83,34 \$$$

Ejemplo 22

La curva de demanda de cierto producto es $p = 40 - 1,6q$ y la de oferta es $p = 8 + 2,4q$. Determine el excedente de los consumidores y el excedente de los productores.

Solución

Debemos determinar el punto de equilibrio competitivo igualando la oferta a la demanda

$$40 - 1,6q = 8 + 2,4q$$

$$40 - 8 = 2,4q + 1,6q$$

$$32 = 4q$$

$$q_0 = 8$$

Y sustituyendo en la ecuación de oferta o la de demanda se obtiene:

$$p = 40 - 1,6(8)$$

$$p = 40 - 12,8q$$

$$p_0 = 27,2$$

Luego de conocer el punto de equilibrio podemos hallar:

$$EC = \int_0^8 [f(q) - p_0]dq$$

$$EC = \int_0^8 (40 - 1,6q) - 27,2 dq$$

$$EC = \int_0^8 (12,8 - 1,6q) dq$$

$$EC = 12,8q - 0,8q^2 \Big|_0^8$$

$$EC = [12,8(8) - 0,8(8)^2] - [12,8(0) - 0,8(0)^2]$$

$$EC = 102,4 - 51,2$$

$$EC = 51,2$$

De igual manera hallamos el excedente de los productores, así

$$EP = \int_0^8 [p_0 - g(q)]dq$$

$$EP = \int_0^8 [27,2 - (8 + 2,4q)]dq$$

$$EP = \int_0^8 (19,2q - 1,2q^2) \Big|_0^8$$

$$EP = [19,2(8) - 1,2(8)^2] - [19,2(0) - 1,2(0)^2]$$

$$EP = 153,6 - 76,8$$

$$EP = 76,8$$

Ejemplo 23

Un monopolio tiene una función de costo total $c = 1000 + 120x + 6x^2$

Para su producto, el cual tiene una función de demanda $p = 360 - 3x - 2x^2$. Encuentre el excedente del consumidor en el punto donde el monopolio tiene una ganancia máxima

Solución

Primero tenemos que hallar el punto donde se maximiza la función de ganancia. Puesto que la demanda de x unidades es $p = 360 - 3x - 2x^2$, el ingreso total es:

$$R(x) = (360 - 3x - 2x^2)(x)$$

$$R(x) = 360x - 3x^2 - 2x^3$$

Por consiguiente la función de ganancia es

$$G(x) = R(x) - C(x)$$

$$G(x) = (360x - 3x^2 - 2x^3) - (1000 + 120x + 6x^2)$$

$$G(x) = -2x^3 - 9x^2 + 240x - 1000$$

Entonces

$$G'(x) = -6x^2 - 18x + 240$$

De modo que

$$-6x^2 - 18x + 240 = 0 \rightarrow x = 5$$

Puesto que

$$p''(5) = -12x - 18$$

$$p'' = -12(5) - 18$$

$$p'' = -60 - 18$$

$$p'' = -78 < 0$$

La ganancia para el monopolista se maximiza cuando se venden $x = 5$ unidades al precio

$$p = 360 - 2x^2$$

$$p = 360 - 3(5) - 2(5)^2$$

$$p = 360 - 15 - 50$$

$$p = 295$$

El excedente del consumidor en $x = 5$ y $p = 295$ está dado por:

$$EC = \int_0^5 [f(x) - p_0] dx$$

$$EC = \int_0^5 (360 - 3x - 2x^2) - (295) dx$$

$$EC = \int_0^5 (360 - 3x - 2x^2) - 295 dx$$

$$EC = \int_0^5 (-2x^2 - 3x + 65) dx$$

$$EC = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 65x \Big|_0^5$$

$$EC = \left[-\frac{2}{3}(5)^3 - \frac{3}{2}(5)^2 + 65(5) \right] - 0$$

$$EC = -83,33 - 37,5 + 325$$

$$EC = 204,17$$

Ejemplo 24

La función de demanda para cierto producto es $p = 144 - 2x^2$ y la función de oferta es $p = x^2 + 33x + 48$. Encuentre el excedente del productor en el punto de equilibrio.

Solución

Debemos determinar el punto de equilibrio competitivo igualando la oferta y la demanda.

$$144 - 2x^2 = x^2 + 33x + 48$$

$$3x^2 + 33x - 96 = 0$$

$$x_1 = q_0 = 2,4$$

$$x_2 = -13,4 \text{ se descarta}$$

Sustituyendo q_0 en la oferta o la demanda, tenemos

$$p_0 = 144 - 2x^2 \rightarrow p_0 = 144 - 2(2,4)^2 \rightarrow p_0 = 132,48$$

$$EP = \int_0^{2,4} [p_0 - g(x)] dx$$

$$EP = \int_0^{2,4} [132,48 - (x^2 + 33x + 48)] dx$$

$$EP = \int_0^{2,4} (-x^2 - 33x + 84,48) dx$$

$$EP = -\frac{x^3}{3} - \frac{33}{2}x^2 + 84,48x \Big|_0^{2,4}$$

$$EP = [-4,608 - 95,04 + 202,752] - 0$$

$$EP = 103,35$$

2.7.3. Valor Promedio de una Función

El valor promedio o media de una función en un intervalo $[a, b]$ se denota por:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Para entender el significado geométrico de esta definición, la escribiremos así:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)\bar{f}$$

El lado derecho de esta igualdad podemos considerarlo como el área de un rectángulo de base $b-a$ y altura \bar{f} . El significado de \bar{f} podemos apreciarlo en la figura 2.26

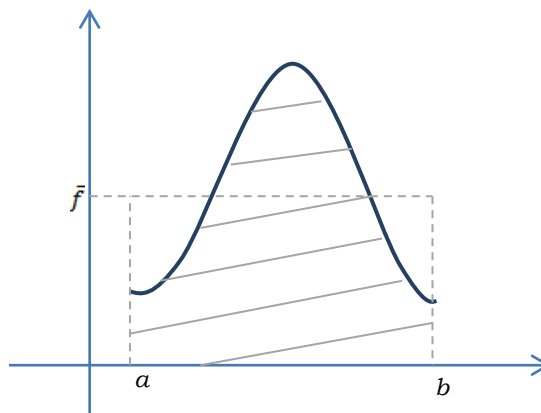


Figura 2.26

El valor promedio \bar{f} es una altura tal que el área del rectángulo es igual al área bajo la curva (ver figura 2.27)

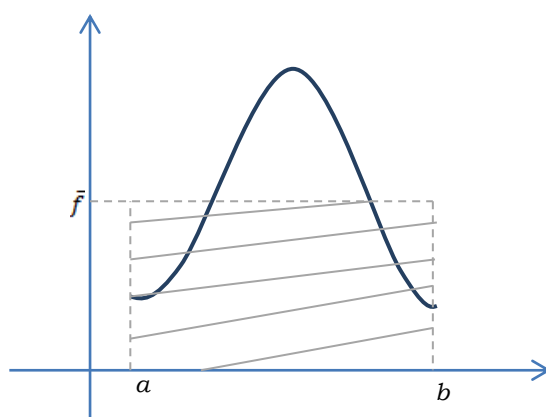


Figura 2.27

Ejemplo 25

Determinar el promedio de la función $f(x) = x^2$ en $[0,1]$

Solución

$$\bar{f} = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2 dx$$

$$\bar{f} = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$\bar{f} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 26

La ganancia g en dólares de un negocio está dado por $g = -800 + 792q - 4,2q^2$.

- ¿cuál es la ganancia cuando se producen 100 unidades?
- ¿cuál es la ganancia promedio en $[100,200]$

Solución

$$g = -800 + 792(100) - 4,2(100)^2$$

$$g = -800 + 79200 - 42000$$

$$g = 79200 - 42800$$

$$g = 36400$$

$$\bar{g} = \frac{1}{200 - 100} \int_{100}^{200} (-800 + 792q - 4,2q^2) dq$$

$$\bar{g} = \frac{1}{100} \int_{100}^{200} (-800 + 792q - 4,2q^2) dq$$

$$\bar{g} = 0,01(-800q + 396q^2 - 1,4q^3) \Big|_{100}^{200}$$

$$\bar{g} = -1600 + 158400 - 112000 + 800 - 39600 + 14000$$

$$\bar{g} = 20.000$$

Ejemplo 27

Considere la función $f(x) = x^2 - 4$ en $[-2,2]$. Determine \bar{f}

Solución

$$\bar{f} = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx$$

$$\bar{f} = \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^2 x^2 dx - 4 \int_{-2}^2 dx \right]$$

$$\bar{f} = \frac{0,25}{3} x^3 - x \Big|_{-2}^2$$

$$\bar{f} = 0,083x^3 - x \Big|_{-2}^2$$

$$\bar{f} = [0,083(2)^3 - (2)] - [0,083(-2)^3 - (-2)]$$

$$\bar{f} = 0,664 - 2 + 0,664 - 2$$

$$\bar{f} = -2,672$$

2.7.4. Flujo de Ingresos Continuos

Las ganancias de un casino (casa de juegos) dependen de la cantidad de dinero que una máquina tragamonedas pueda acumular. Por lo tanto, podemos considerar que las máquinas traga níquel en un casino producen un “flujo de ingreso continuo” para el propietario del casino; y éste flujo es una función dependiente del tiempo, ya que con el tiempo dichas máquinas se deterioran, o dejan de funcionar debido a la interrupción de la energía eléctrica.

Supongamos que $f(t)$ es la tasa de flujo de ingresos anual de una determinada máquina traga níquel; entonces podemos hallar el ingreso total a partir de la tasa de ingresos usando la integración. En general, el ingreso total para n años está dado por:

$$\text{Ingreso Total} = \int_0^n f(t) dt$$

Ejemplo 28

Encuentre el ingreso total durante los siguientes 10 años de un flujo continuo de ingresos que tiene una tasa de flujo anual en el tiempo t dada por:
 $f(t) = 12.000 \text{ Bf/año}$

Solución

$$\text{Ingreso Total} = \int_0^{10} f(t) dt$$

$$\text{Ingreso Total} = \int_0^{10} 12.000 dt$$

$$\text{Ingreso Total} = 12.000 t \Big|_0^{10}$$

$$\text{Ingreso Total} = [(12000)(10)] - [(12000)(0)]$$

$$\text{Ingreso Total} = 12.000 \text{ Bf.}$$

Ejemplo 29

Una franquicia modela la ganancia de su tienda como un flujo continuo de ingresos con una tasa de flujo anual en el tiempo t dada por $f(t) = 3000e^{0,004t}$ Bf. al mes. Cuando se abre una tienda nueva, el desempeño del gerente se evalúa conforme a dicho modelo, con énfasis en el segundo semestre del primer año. Encuentre la ganancia total durante el segundo periodo de 6 meses.

Solución

$$Ganancia\ Total = \int_6^{12} 3000e^{0,004t} dt$$

$$Ganancia\ Total = \frac{3000}{0,004} e^{0,004t} \Big|_6^{12}$$

$$Ganancia\ Total = 750.000e^{0,004t} \Big|_6^{12}$$

$$Ganancia\ Total = [750000e^{0,004(12)}] - [750000e^{0,004(6)}]$$

$$Ganancia\ Total = 750000e^{0,048} - 750000e^{0,024}$$

$$Ganancia\ Total = 786878 - 768218$$

$$Ganancia\ Total = 18.660\ Bf.$$

2.7.5. Valor Presente y Valor Futuro de un Flujo de Ingresos Continuos

El valor presente es el valor actual de un flujo de ingresos continuos que proporcionará el ingreso total en el futuro. Este valor sirve para decidir cuando remplazar maquinaria, el tipo de equipos a elegir, etc., o también para encontrar el valor presente de la utilidad futura de un negocio.

Si $f(t)$ es la tasa de flujo continuo de ingreso que gana una tasa de interés r , compuesta continuamente, entonces el valor presente del flujo de ingreso continuo denotado por A es:

$$\text{Valor Presente} = A = \int_0^k f(t)e^{-rt} dt, \text{ donde } t \in [0, k]$$

Y el valor futuro de un flujo de ingresos continuo, denotado por S , viene dado por:

$$\text{Valor Futuro} = S = e^{rk} \int_0^k f(t)e^{-rt} dt$$

Ejemplo 30

Un flujo de ingreso continuo tiene una tasa de flujo anual en el tiempo t , dada por: $f(t) = 9000e^{0,12t}$ dólares por año. Encuentre el valor presente de este flujo de ingreso para los siguientes 10 años, si el dinero crece a una tasa de 6 % compuesto continuamente.

Solución

$$r = 6\% = 0,06 \text{ y } k = 10$$

$$A = \int_0^{10} f(t)e^{-rt} dt$$

$$A = \int_0^{10} 9000e^{0,12t} \cdot e^{-0,06t} dt$$

$$A = \int_0^{10} 9000e^{0,06t} dt$$

$$A = \frac{9000}{0,06} e^{0,06t} \Big|_0^{10}$$

$$A = [150.000e^{0,06(10)}] - [150.000e^{0,06(0)}]$$

$$A = 150.000e^{0,6} - 150.000e^0$$

$$A = 273.317,8 - 150.000$$

$$A = 123.317,8$$

Ejemplo 31

La ganancia de una agencia de seguros se puede considerar como un flujo continuo de ingresos con una tasa de flujo anual en el tiempo t dada por $f(t) = 84.000$ dólares por año. Encuentre el valor presente y el valor futuro de esta agencia durante los siguientes 12 años, si el dinero crece con una tasa de 8 % compuesto continuamente.

Solución

Valor Presente: $r = 0,08$ $k = 12$

$$A = \int_0^{12} 84.000e^{-0,08t} dt$$

$$A = \frac{84.000}{-0,08} e^{-0,08t} \Big|_0^{12}$$

$$A = -1.050.000e^{-0,08t} \Big|_0^{12}$$

$$A = [-1.050.000e^{-0,08(12)}] - [-1.050.000e^{-0,08(0)}]$$

$$A = -1.050.000e^{-0,96} + 1.050.000e^0$$

$$A = -402.037,5 + 1.050.000$$

$$A = 647.962,5 \$$$

Valor Futuro:

$$S = e^{rk} \int_0^k f(t) e^{-rt} dt$$

$$S = e^{rk} . A$$

$$S = e^{0,08(12)} . (647.962,5)$$

$$S = (2,61)(647.962,5)$$

$$S = 1.691.182,125 \$$$

Con los datos obtenidos, la agencia de seguros puede establecer su precio de venta, si decidiera vender la agencia ahora mismo. El análisis se hizo con base a 12 años.

Ejemplo 32

Suponga que una compañía de máquinas expendedoras piensa vender algunas de ellas. Suponga además que el ingreso de esas máquinas en particular es un flujo continuo con una tasa de flujo anual en el tiempo t , dada por $f(t) = 12e^{-0,4(t+3)}$ en miles de dólares al año. Encuentre el valor presente y el valor futuro de la máquina durante los próximos 5 años si el dinero crece a una tasa de 10 % compuesto continuamente.

Solución

Sea $r = 0,1$ y $k = 5$

El valor presente viene dado por:

$$A = \int_0^5 12e^{-0,4(t+3)} . e^{-0,1t} dt$$

$$A = \int_0^5 12e^{(-0,4t-1,2)} \cdot e^{-0,1t} dt$$

$$A = \int_0^5 12e^{-0,5t-1,2} dt$$

Haciendo un cambio de variable, tenemos:
$$\begin{cases} u = -0,5t - 1,2 \\ du = -0,5 dt \\ dt = -\frac{du}{0,5} \end{cases}$$

$$A = 12 \int_0^5 e^u \frac{du}{-0,5}$$

$$A = -\frac{12}{0,5} \int_0^5 e^u du$$

$$A = -24e^{-0,5t-1,2} \Big|_0^5$$

$$A = [-24e^{-0,5(5)-1,2}] - [-24e^{-0,5(0)-1,2}]$$

$$A = -24e^{-3,7} + 24e^{-1,2}$$

$$A = -0,59 + 7,22$$

$$A = 6,63 \text{ miles de dólares}$$

El valor futuro viene dado por:

$$S = e^{rk} \int_0^k f(t)e^{-rt} dt$$

$$S = e^{rk} \cdot A, \text{ luego}$$

$$S = e^{0,1(5)}(6,63)$$

$$S = e^{0,5}(6,63)$$

$$S = 10,93 \text{ miles de dólares}$$

2.8. Método de Integración de Funciones Racionales mediante Fracciones Parciales

Una función racional es una razón o cociente de polinomios de la forma $\frac{N_x}{D_x}$

Función Racional Propia: Es toda fracción donde el grado del polinomio N_x es menor que el grado del polinomio D_x , es decir: $\text{grad}(N_x) < \text{grad}(D_x)$

Función Racional Impropia: es toda fracción donde el grado del polinomio N_x es mayor o igual que el grado del polinomio D_x , es decir: $\text{grad}(N_x) \geq \text{grad}(D_x)$

Cuando integramos cualquier función racional, debemos expresar a ésta como una suma de fracciones más simples, llamadas Fracciones Parciales.

A fin de ilustrar el método de fracciones parciales, trabajaremos sobre una función racional de la forma $\frac{N_x}{D_x}$.

- I) Si la función racional $\frac{N_x}{D_x}$ es propia, debemos “factorizar al denominador D_x ”, es decir expresarlo como el producto de dos o más factores; y por los conocimientos del álgebra se tiene que a cada factor de la forma $(x-a)$, le corresponde una fracción parcial de la forma $\frac{A}{(x-a)}$, donde A es una constante.

Si se tienen “n” factores lineales distintos, se tendrán n fracciones parciales de la forma:

$$\frac{N_x}{D_x} = \frac{A}{x \pm a} + \frac{B}{x \pm b} + \frac{C}{x \pm c}$$

- II) Si la función racional $\frac{N_x}{D_x}$ es impropia, debemos usar la división larga, hasta obtener un residuo R_x , tal que $\text{grad}(R_x) < \text{grad}(D_x)$, lo cual equivale a

$$\frac{N_x}{D_x} = C_x + \frac{R_x}{D_x}$$

Con:

$C_x = \text{polinomio cociente}$

$R_x = \text{polinomio residuo}$

$D_x \neq 0 \text{ polinomio denominador}$

Ejemplo 33

$$\text{Calcular } \int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$$

Solución

Como el integrando es una función propia debemos factorizar el denominador:

$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, del cual obtenemos dos factores lineales distintos, y por el teorema de las fracciones parciales el cual establece que existen constantes A, B, tales que:

$$\frac{x + 5}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} \quad (1)$$

Para hallar los valores de A y B resolvemos la parte derecha de la ecuación

$$\frac{x + 5}{x^2 + x - 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)}$$

$$x + 5 = A(x + 2)(x - 1) \quad (2)$$

Luego le asignamos a x los valores de las raíces de $D_x = 0$, es decir los valores de x que hacen que $D_x = 0$, esto es:

$$x = 1 \quad y \quad x = -2$$

Con el uso de la ecuación (2) se tiene:

$$\text{Para } x = 1$$

$$x + 5 = A(x - 1) + B(x + 2)$$

$$1 + 5 = A(1 - 1) + B(1 + 2)$$

$$6 = 3B$$

$$B = 2$$

$$\text{Para } x = -2$$

$$x + 5 = A(x - 1) + B(x + 2)$$

$$-2 + 5 = A(-2 - 1) + B(-2 + 2)$$

$$3 = -3A$$

$$A = -1$$

Entonces la ecuación (1) se convierte en

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x+2} dx$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x+2| + c$$

Ejemplo 34

Determine $\int \frac{x^3+x}{x-1} dx$

Solución

Como el integrando es una función impropia, debemos hacer uso de la división larga

$$\frac{x^3+x}{x-1} = x^2+x+2 + \frac{2}{x-1}, \quad \text{donde } C_x = x^2+x+2 \text{ y } R_x = 2$$

Luego,

$$\int \frac{x^3+x}{x-1} dx = \int \left[C_x + \frac{R_x}{D_x} \right] dx$$

$$\int \frac{x^3+x}{x-1} dx = \int C_x dx + \int \frac{R_x}{D_x} dx$$

$$\int \frac{x^3+x}{x-1} dx = \int (x^2+x+2) dx + \int \frac{2}{x-1} dx$$

$$\int \frac{x^3+x}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + c$$

Ejemplo 35

Evalúe $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$

Solución

Estamos en presencia de una fracción propia, por lo que debemos factorizar el denominador

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 2x &= (x)(2x^2 + 3x - 2) \\ &= (x)(2x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

De la factorización resultó 3 factores lineales distintos, por lo que la descomposición del integrando en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Al resolver la parte derecha de la ecuación, obtenemos

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A(2x - 1) + B(x)(x + 2) + C(x)(2x - 1)}{(x)(2x - 1)(x + 2)}$$

Eliminando los denominadores por ser iguales, nos queda

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1) + B(x)(x + 2) + C(x)(2x - 1) \quad (1)$$

Para hallar los valores de A, B y C, buscamos los valores de x que hacen que $D_x = 0$, estos son: $x = 0$ $x = \frac{1}{2}$ $x = -2$, luego

Para $x = 0$ y sustituyendo en (1) obtenemos

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + B(x)(x + 2) + C(x)(2x - 1)$$

$$-1 = 2A \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

Para $x = \frac{1}{2}$

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + B(x)(x + 2) + C(x)(2x - 1)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = A\left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right]\left(\frac{1}{2} + 2\right) + B\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + 2\right) + C\left(\frac{1}{2}\right)\left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right]$$

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{4}B \rightarrow B = \frac{1}{5}$$

Para $x = -2$

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + B(x)(x + 2) + C(x)(2x - 1)$$

$$(-2)^2 + 2 - 1 = 0A + 0B + 10C$$

$$-1 = 10C \rightarrow C = -\frac{1}{10}$$

Luego sustituimos los valores hallados y resolvemos

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{2x - 1} dx + \int \frac{C}{x - 2} dx$$

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{2x - 1} dx - \frac{1}{10} \int \frac{1}{x - 2} dx$$

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{10} \ln|2x - 1| - \frac{1}{10} \ln|x - 2| + c$$

A continuación estudiaremos el caso cuando los factores lineales son iguales, el teorema de la descomposición en fracciones parciales nos dice que a cada factor lineal que se repite le corresponde una fracción parcial de la forma:

$$(x \pm a)^n = \frac{A}{(x \pm a)} + \frac{B}{(x \pm a)^2} + \frac{C}{(x \pm a)^3} + \dots + \frac{M}{(x \pm a)^n}$$

$$(x + 4)^3 = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{(x + 4)^2} + \frac{C}{(x + 4)^3}$$

Ejemplo 36

Calcular $\int \frac{6x^2+13x+6}{x^3+4x^2+5x+2} dx$

Solución

Como el integrando es una fracción propia debemos factorizar el denominador

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 1)^2(x + 2) \quad (\text{Ruffini})$$

Del proceso de factorización obtuvimos dos factores lineales, uno distinto y el otro igual. Al hacer la descomposición del integrando en fracciones parciales, obtenemos

$$\frac{6x^2 + 13x + 6}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 2)}$$

$$\frac{6x^2 + 13x + 6}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \frac{A(x + 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x + 1)^2}{(x + 1)^2(x + 2)}$$

$$6x^2 + 13x + 6 = Ax^2 + 3Ax + 2A + Bx + 2B + Cx^2 + 2Cx + C$$

$$6x^2 + 13x + 6 = (A + C)x^2 + (3A + B + 2C)x + 2A + 2B + C$$

Igualando los coeficientes homólogos en la ecuación, obtenemos

$$\begin{cases} A + C = 6 \\ 3A + B + 2C = 13 \\ 2A + 2B + C = 6 \end{cases}$$

Al resolver el sistema planteado, obtenemos

$$A = 2 \quad B = -1 \quad C = 4, \text{ luego}$$

$$\int \frac{6x^2 + 13x + 6}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} dx = \int \frac{A}{(x + 1)} dx + \int \frac{B}{(x + 1)^2} dx + \int \frac{C}{(x + 2)} dx$$

$$\int \frac{6x^2 + 13x + 6}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} dx = 2 \int \frac{1}{(x + 1)} dx - \int \frac{1}{(x + 1)^2} dx + 4 \int \frac{1}{(x + 2)} dx$$

$$\int \frac{6x^2 + 13x + 6}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} dx = 2 \ln|x + 1| + \frac{1}{x + 1} + 4 \ln|x + 2| + c$$

Si el denominador D_x tiene la forma $x^2 + bx + c$ y no puede expresarse como un producto de factores lineales. Se dice que tal factor es un factor cuadrático irreducible. Por tanto, a cada factor cuadrático irreducible distinto que ocurre una sola vez en D_x , le corresponderá una fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{x^2 + bx + c} + \dots + \frac{Mx + N}{x^2 + bx + c}$$

Si los factores cuadráticos irreducibles son iguales, es decir se repiten, los representaremos de la siguiente manera:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{(x^2 + bx + c)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + bx + c)^3} + \dots + \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^n}$$

Ejemplo 37

Determinar $\int \frac{2x^2+16}{x^3+4x} dx$

Solución

Como el integrando es una fracción impropia, procedemos a factorizar el denominador

$$x^3 + 4x = (x)(x^2 + 4)$$

Observemos que obtenemos dos factores, uno lineal y otro cuadrático, éste último es un factor cuadrático irreducible, luego descomponiendo el integrando en fracciones parciales, obtenemos:

$$\frac{2x^2 + 16}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

$$\frac{2x^2 + 16}{x^3 + 4x} = \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x)}{(x)(x^2 + 4)}$$

$$2x^2 + 16 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$2x^2 + 16 = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

Igualando los coeficientes homólogos en la ecuación, se tiene

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ C = 0 \\ 4A = 16 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, obtenemos que $A = 4$ $B = -2$ $C = 0$, por tanto

$$\int \frac{2x^2 + 16}{x^3 + 4x} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Bx + C}{x^2 + 4} dx$$

$$\int \frac{2x^2 + 16}{x^3 + 4x} dx = 4 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{x}{x^2 + 4} dx \rightarrow \begin{cases} u = x^2 + 4 \\ du = 2x dx \\ dx = \frac{du}{2x} \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2 + 16}{x^3 + 4x} dx = 4 \ln|x| - 2 \int \frac{x du}{u 2x}$$

$$\int \frac{2x^2 + 16}{x^3 + 4x} dx = 4 \ln|x| - \int \frac{1}{u} du$$

$$\int \frac{2x^2 + 16}{x^3 + 4x} = 4 \ln|x| - \ln|x^2 + 4| + c$$

Ejemplo 38

Evaluar $\int \frac{3x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} dx$

Solución

Como el integrando es una fracción propia, debemos factorizar el denominador, pero éste no se puede factorizar por ser un factor cuadrático con repetición irreducible, por lo tanto, la descomposición del integrando en fracciones parciales tiene la forma:

$$\frac{3x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\frac{3x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{(Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D}{(x^2 + 2)^2}$$

$$3x^3 + 8x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$

Igualando los coeficientes homólogos de la ecuación, tenemos:

$$A = 3 \quad B = 0 \quad C = 2 \quad D = 0$$

Luego:

$$\int \frac{3x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} dx = \int \frac{Ax + B}{x^2 + 2} dx + \int \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} dx$$

$$\int \frac{3x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} dx = \int \frac{3x}{x^2 + 2} dx + \int \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} dx$$

$$\int \frac{3x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} dx = 3 \int \frac{x}{x^2 + 2} dx + \int (2x)(x^2 + 2)^{-2} dx$$

Ahora; haciendo cambio de variables en ambas integrales, tenemos:

$$\begin{cases} u = x^2 + 2 \\ du = 2x dx \\ dx = \frac{du}{2x} \end{cases} \quad \begin{cases} w = x^2 + 2 \\ dw = 2x dx \\ dx = \frac{dw}{2x} \end{cases}$$

$$\int \frac{3x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} dx = 3 \int \frac{x du}{u 2x} + \int 2xw^{-2} \frac{dw}{2x}$$

$$\int \frac{3x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{u} du + \int w^{-2} dw$$

$$\int \frac{3x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{3}{2} \ln|u| - w^{-1} + c$$

$$\int \frac{3x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2 + 2| - \frac{1}{x^2 + 2} + c$$

2.9. Integración Por Medio de Tablas y Programas Matemáticos Computacionales

Las tablas de integrales indefinidas son muy útiles cuando estamos ante una integral difícil de evaluar por los métodos básicos estudiados anteriormente (fórmulas básicas, sustitución, por partes, fracciones parciales). Al final del manual (Apéndice), presentamos una serie de 44 integrales agrupadas por formas, siendo oportuno aclarar que la escogencia de la tabla es del autor, ya que en la CRC Mathematical Tables hay una lista de 463 integrales y en la Table of Integrals (New York: Academic Press, 1979) hay una lista de más de 600 integrales.

También es oportuno aclarar que una integral dada puede transformarse usando uno de los métodos que se describen en este Manual, como sustitución o integración por partes, para adecuarla a una integral con la forma registrada en la tabla. En los próximos ejemplos, haremos uso de la tabla de integrales del Apéndice.

Ejemplo 39

Encuentre $\int \frac{dx}{x(6+7x)}$

Solución

Al revisar la tabla, se identifica el integrando con la fórmula 5

$$\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + c$$

Ahora se ve si es posible hacer coincidir de manera exacta el integrando dado con el de la fórmula, para ello sustituimos:

$$u = x \quad a = 6 \quad b = 7 \quad du = dx$$

$$\int \frac{dx}{x(6+7x)} = \int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + c$$

Luego, volvemos a sustituir la integral en términos de x , la cual es la variable original de integración, por lo tanto tenemos:

$$\int \frac{dx}{x(6+7x)} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x}{6+7x} \right| + c$$

Ejemplo 40

Encontrar $\int \sqrt{x^2 - 9} dx$

Solución

Usando la fórmula 23 de la tabla de integrales con:

$$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$$

$$u^2 = x^2 \rightarrow u = x$$

$$du = dx$$

$$\int \sqrt{x^2 - 9} dx = \int \sqrt{x^2 - 3^2} dx$$

$$\text{Pero } \int \sqrt{x^2 - 3^2} dx = \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{2} (u\sqrt{u^2 - a^2} \pm a^2 \ln |u\sqrt{u^2 + a^2}|) + c$$

Y al escribirla en función de x , nos queda

$$\int \sqrt{x^2 - 9} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - 9} - 9 \ln |x\sqrt{x^2 + 9}|) + c$$

Nota: en la fórmula si se usa el signo inferior del símbolo dual “ \pm ” en el lado izquierdo, entonces deberá usarse el mismo signo en el lado derecho.

Ejemplo 41

Encuentre $\int \frac{dx}{(9+2x^2)^{3/2}}$

Solución

Usando la fórmula 19 de la tabla de integrales

$$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + c$$

Y haciendo las respectivas sustituciones para acoplar la integral dada a la fórmula 19, tenemos:

$$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$$

$$u^2 = 2x^2 \rightarrow u = \sqrt{2}x$$

$$du = \sqrt{2}dx \rightarrow dx = \frac{du}{\sqrt{2}}, \text{ luego}$$

$$\int \frac{dx}{(9 + 2x^2)^{3/2}} = \int \frac{\frac{du}{\sqrt{2}}}{(9 + 2x^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(9 + 2x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(9 + 2x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}x}{9\sqrt{9 - 2x^2}} \right) + c$$

$$\int \frac{dx}{(9 + 2x^2)^{3/2}} = \left(\frac{x}{9\sqrt{9 - 2x^2}} \right) + c$$

Ejemplo 42

Encuentre $\int \frac{t dt}{\sqrt{4-5t}}$

Solución

Usando la fórmula 15, la cual es:

$$\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(bu-2a)\sqrt{a+bu}}{3b^2} + c$$

Al hacer las respectivas sustituciones tenemos:

$$a = 4 \quad b = -5 \quad t = u \quad dt = du, \text{ luego}$$

$$\int \frac{t dt}{\sqrt{4-5t}} = \int \frac{u du}{\sqrt{a+(-bu)}} = \frac{2(-5t-8)\sqrt{4-5t}}{3(-5)^2} + c$$

$$\int \frac{t dt}{\sqrt{4-5t}} = \frac{2}{75}(-5t-8)(\sqrt{4-5t}) + c$$

Ejemplo 43

Encuentre $\int w e^{-3w} dw$

Solución

Usando la fórmula 38, tenemos

$$\int u e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^2}(au-1) + c$$

Y al hacer las sustituciones, nos queda:

$$a = -3 \quad w = u \quad dw = du, \text{ luego}$$

$$\int w e^{-3w} dw = \int u e^{au} du = \frac{e^{-3w}(-3w-1)}{(-3)^2} + c$$

$$\int w e^{-3w} dw = \frac{1}{9}(-3w - 1)e^{-3w} + c$$

Ejemplo 44

Encuentre $\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} dx = \int_1^4 \frac{\frac{dx}{2}}{(u^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{du}{(u^2+a^2)^{3/2}}$

Solución

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{2\sqrt{4x^2+2}} \right) \Big|_1^4$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+2}} \right) \Big|_1^4$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} dx = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{4}{\sqrt{4(4)^2+2}} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{4(1)^2+2}} \right) \right]$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} dx = \frac{2}{\sqrt{66}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} dx = 0,042$$

2.10. Programas Matemáticos Computacionales

Existen en el mercado ciertos programas matemáticos entre ellos el Maple, Derive, Matlab, Máxima y el Mathematics que calculan cualquier integral, para ello hacen sustituciones que transforman una integral dada en una que se encuentra entre las fórmulas de integración registradas en las tablas del apéndice. Sin menospreciar el avance de las ciencias, un cálculo manual produce una integral en forma más conveniente que la respuesta del computador, veamos por qué:

Cuando corremos la integral $\int \frac{1}{2x+5} dx$ en los programas matemáticos antes nombrados, obtenemos como respuesta $\frac{1}{2} \ln(2x + 5)$ y si lo hacemos en forma

manual, obtenemos $\int \frac{1}{2x+5} dx$ aplicando un cambio de variable $\begin{cases} u = 2x + 5 \\ du = 2dx \\ dx = du/2 \end{cases}$

$$\int \frac{1}{2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln|2x + 5| + c$$

Al comparar los dos resultados, observamos que la respuesta dada por los programas matemáticos omite la constante de integración, es decir, producen una antiderivada particular y no la más general, como es el caso de la respuesta dada a lápiz. Así pues, al usar la integración por computadora, deberíamos agregar una constante. Por otra parte, la respuesta de la computadora omite el signo de valor absoluto, lo cual se hace necesario si el problema tiene que ver con valores de x menores que $\frac{1}{2}$.

Aquí lo importante es que el estudiante se entere que existen estos programas matemáticos que agilizan el cálculo manual.

2.11. Métodos Numéricos de Integración

Funciones Estándares o Elementales:

Son funciones que pueden obtenerse a partir de polinomios, exponenciales y logaritmos con el uso de operaciones y composiciones algebraicas. Ejemplo.

$$f(x) = x^2 + 3x \qquad f(x) = e^{2x}$$

Podemos afirmar que la derivada de una función estándar también es estándar, pero no podemos afirmar lo mismo cuando se trata de la integración. La consecuencia radica en que a veces es imposible calcular el valor exacto de una integral definida, dicho de otra manera, algunas veces resulta imposible encontrar $\int_a^b f(x) dx$ en términos de las funciones elementales.

Para evaluar $\int_a^b f(x)dx$ con el teorema fundamental del cálculo, necesitamos conocer una antiderivada de f , sin embargo, a veces es difícil, o hasta imposible encontrarla, por ejemplo:

Si tenemos $f(x) = e^{x^2}$. Dado que f es continua, su integral existe, y si definimos la función como $F_x = \int_0^x e^{t^2} dt$, de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo resulta que $F'(x) = e^{x^2}$ por lo tanto, $f(x) = e^{x^2}$ tiene una antiderivada F , pero se ha demostrado que F no es una función estándar o elemental.

Esto significa que a pesar de todo lo que nos esforcemos, nunca llegamos a evaluar $\int e^{x^2} dx$ en términos de funciones que conozcamos. Otros ejemplos de integrales que no se pueden evaluar con exactitud o que carecen de una antiderivada estándar son:

$$\int \frac{e^x}{dx}; \quad \int \frac{1}{\ln x} dx; \quad \int_{-1}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx; \quad \int \frac{\text{sen} x}{x} dx$$

Existen varios métodos numéricos que nos permitirán calcular valores aproximados de las integrales definidas, y son de gran utilidad para calcular el valor de las integrales que no poseen antiderivadas elementales o estándar.

En este manual estudiaremos dos métodos numéricos en particular: Método Trapezoidal o de los Trapecios y el Método de Simpson.

2.11.1. Método o Regla del Trapecio

Debido a que $\int_a^b f(x)dx$ se define como un límite de sumas de la forma $\sum f(x)\Delta_x$, cualquier suma particular bien formado de la forma $\sum f(x)\Delta_x$ puede verse como una aproximación de $\int_a^b f(x)dx$.

Supongamos que f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que $f(x) \geq 0$ en dicho intervalo. Aproximamos la gráfica de f por medio de segmentos de rectas, tal como lo indica la figura 2.28.

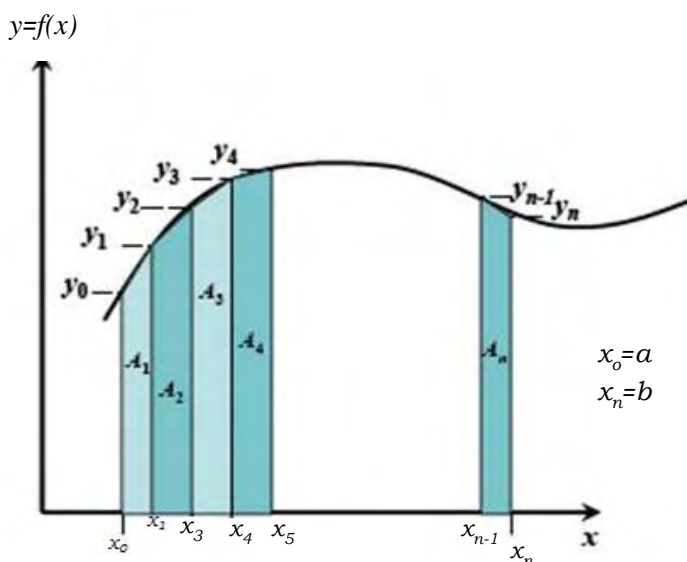


Figura 2.28

En la figura 2.28 el intervalo $[a, b] = [x_0, x_n]$ está dividido en n subintervalos de igual longitud por los puntos

$$a = x_0$$

$$x_1$$

$$x_2$$

$$x_3$$

$$x_{n-1}$$

$$b = x_n$$

Como la longitud o anchura de $[a, b]$ es $b - a$, la longitud de cada subintervalo es $\frac{(b-a)}{n}$, a la cual llamaremos h . Es claro que:

$$x_1 = a + h$$

$$x_2 = a + 2h$$

$$x_3 = a + 3h$$

$$x_n = a + nh = b$$

Es posible asociar un trapecio con cada subintervalo. El área A de la región encerrada por la curva, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f(x)dx$, la cual puede aproximarse mediante las sumas de las áreas de los trapecios determinados por los subintervalos.

Hagamos una abstracción del primer trapecio (ver figura 2.29) que se dibujó en la figura 2.28

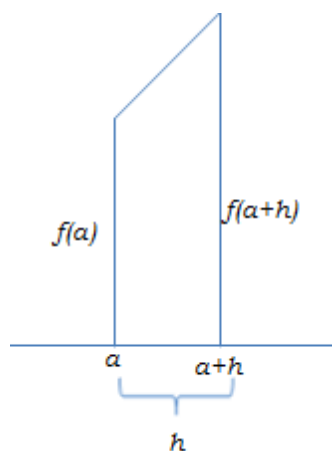


Figura 2.29

Como el área de un trapecio es igual a la mitad de la base multiplicada por la suma de los lados paralelos, este trapecio tiene un área de:

$$\frac{h}{2}[f(a) + f(a + h)]$$

En forma análoga, el segundo trapecio tiene un área $\frac{h}{2}[f(a + h) + f(a + 2h)]$ y el área del tercer trapecio es $\frac{h}{2}[f(a + 2h) + f(a + 3h)]$.

El área bajo la curva se aproxima mediante la suma de las áreas de n trapecios así:

$$A \approx \frac{h}{2}[f(a) + f(a + h)] + \frac{h}{2}[f(a + h) + f(a + 2h)] + \\ \frac{h}{2}[f(a + 2h) + f(a + 3h)] + \dots + \frac{h}{2}[f(a + (n - 1)h) + f(b)]$$

Como $A = \int_a^b f(x)dx$, al simplificar la expresión anterior se obtiene la Regla del Trapecio, la cual se define de la siguiente manera.

2.10.1. Método o Regla del Trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+h) + \dots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)],$$

con $h = \frac{b-a}{n}$; $n = \text{número de subdivisiones de } [a, b]$

Que es equivalente a escribir:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Ejemplo 45

Emplee la regla del trapecio con $n = 5$ para calcular aproximadamente $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, redondee su respuesta a tres decimales.

Solución

$$n = 5 \quad a = 1 \quad b = 2 \quad h = \frac{2-1}{5} = 0,2$$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1,2	1,4	1,6	1,8	2

Según la regla del trapecio, tenemos:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)]$$

$$\int_1^2 f(x)dx \approx \frac{0,2}{2} [f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,1 \left[1 + 2 \left(\frac{1}{2,1} \right) + 2 \left(\frac{1}{1,4} \right) + 2 \left(\frac{1}{1,6} \right) + 2 \left(\frac{1}{1,8} \right) + \frac{1}{2} \right]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,1(1 + 1,666 + 1,429 + 1,250 + 1,111 + 0,500)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,1(6,956)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,6956$$

Cuando usamos la regla de los trapecios o el método trapezoidal, se alcanzan aproximaciones más exactas a medida que n se hace más grande, pero como se necesitan muchas más operaciones aritméticas, el error acumulado por redondeo se hace mayor. Por tanto, existe una fórmula que nos permita calcular la estimación del error acumulado cuando aplicamos el Método o Regla del Trapecio y esta es:

Supongamos que $|f''(x)| \leq k$ cuando $x \in [a, b]$. Si E es el error en que se incurre con la regla del trapecio, entonces

$$|E| \leq \frac{k(b-a)^3}{12n^2}$$

Apliquemos esta estimación de error a la aproximación, con la regla del trapecio del ejemplo 45.

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad y \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Como $x \in [1,2]$, tenemos $-\frac{1}{x^2} \leq 1$ y $|f''(x)| = \left| \frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{2}{1^3} = 2$, luego

$k = 2$; $a = 1$; $b = 2$; $n = 5$ por tanto

$$|E| \leq \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0,0066$$

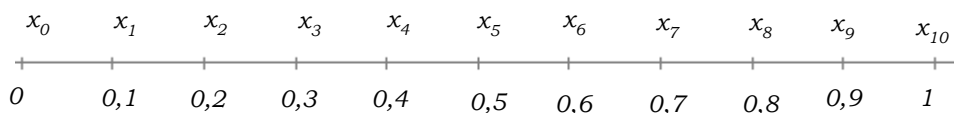
Es decir que se incurrió en un error de 0,0066 al aplicar la regla del trapecio.

Ejemplo 46

Aplice la regla de los trapecios con $n = 10$ para hallar, aproximadamente $\int_0^1 e^{x^2} dx$ y halle el error cometido. Redondee a tres decimales.

Solución

$$n = 10 \quad a = 0 \quad b = 1 \quad h = \frac{1}{10} = 0,1$$



$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_8) + 2f(x_9) + f(x_{10})]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{0,1}{2} [f(0) + 2f(0,1) + 2f(0,2) + 2f(0,3) + \dots + 2f(0,9) + f(1)]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 0,05 [e^{(0)^2} + 2e^{(0,1)^2} + 2e^{(0,2)^2} + 2e^{(0,3)^2} + \dots + 2e^{(0,9)^2} + 2(1)^2]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 0,05 [1 + 2,02 + 2,082 + 2,188 + 2,347 + 2,568 + \dots + 4,496 + 2,718]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 0,05(29,344)$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1,4672$$

Dado que $f(x) = e^{x^2}$, entonces $f'(x) = 2xe^{x^2}$ y $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$ y como $x \in [0,1]$, tenemos $x^2 \leq 1$ y así $0 \leq f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leq 6e$

Con $k = 6e$; $a = 0$; $b = 1$; $n = 10$ tenemos que el error cometido es:

$$|E| = \frac{6e(1)^3}{12(10)^2} = \frac{e}{200} \approx 0,0136$$

Ejemplo 47

Después de t meses en el trabajo, un empleado puede clasificar cartas a la razón de $Q(t) = \frac{e^{-0,4t}}{t}$ cartas por hora. Aplicar la regla trapezoidal con $n = 10$ para estimar la razón a la que el trabajador clasifica cartas desde los meses primero a sexto.

Solución

La integral que debemos resolver es

$$\int_1^6 \frac{e^{-0,4t}}{t} dt \text{ con } n = 10; a = 1; b = 6; h = 0,5$$

$$\int_1^6 \frac{e^{-0,4t}}{t} dt \approx \frac{0,5}{2} [f(t_0) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + 2f(t_3) + \dots + 2f(t_9) + f(t_{10})]$$

$$\int_1^6 \frac{e^{-0,4t}}{t} dt \approx 0,25[f(1) + 2f(1,5) + 2f(2) + 2f(2,5) + \dots + 2f(5,5) + f(6)]$$

$$\int_1^6 \frac{e^{-0,4t}}{t} dt \approx 0,25 \left[\left(\frac{e^{-0,4(1)}}{1} \right) + 2 \left(\frac{e^{-0,4(1,5)}}{1,5} \right) + 2 \left(\frac{e^{-0,4(2)}}{2} \right) + 2 \left(\frac{e^{-0,4(2,5)}}{2,5} \right) \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{e^{-0,4(3)}}{3} \right) + 2 \left(\frac{e^{-0,4(3,5)}}{3,5} \right) + \dots + 2 \left(\frac{e^{-0,4(5,5)}}{5,5} \right) + \left(\frac{e^{-0,4(6)}}{6} \right) \right]$$

$$\int_1^6 \frac{e^{-0,4t}}{t} dt \approx 0,25(0,67 + 0,732 + 0,445 + 0,294 + 0,201 + \dots + 0,04 + 0,015)$$

$$\int_1^6 \frac{e^{-0,4t}}{t} dt \approx 0,25(2,766)$$

$$\int_1^6 \frac{e^{-0,4t}}{t} dt \approx 0,6915$$

2.11.2. Método o Regla de Simpson

El segundo método o regla para aproximar resultados de integrales definidas que utilizaremos en este manual es la Regla de Simpson, la cual emplea segmentos parabólicos en lugar de segmentos de rectas. Este método funciona cuando n es par y arroja resultados más exactos que cuando aproximamos por el método de los trapecios.

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + f(x_n)]$$

$$\text{Con } h = \frac{b-a}{n} \text{ y } n \text{ par}$$

Estimación del Error para la Regla de Simpson

Supóngase que $|f^{(4)}(x)| \leq k$ cuando $x \in [a, b]$.

Si E es el error cometido al aplicar la regla de Simpson, entonces:

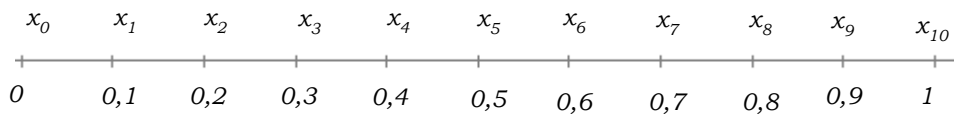
$$E \leq \frac{k(b-a)^5}{180n^4}$$

Ejemplo 48

Use la regla de Simpson para aproximar $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx$. Con $n = 8$. Redondee su respuesta a seis decimales.

Solución

$$n = 8; \quad a = -1; \quad b = 1; \quad h = \frac{1 - (-1)}{8} = \frac{2}{8} = 0,25$$



$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + 4f(x_7) + f(x_8)]$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx \approx \frac{0,25}{3} [f(-1) + 4f(-0,75) + 2f(-0,5) + 4f(-0,25) + 2f(0) + 4f(0,25) + 2f(0,5) + 4f(0,75) + f(1)]$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx \approx 0,083 [\sqrt{1+(-1)^3} + 4\sqrt{1+(-0,75)^3} + 2\sqrt{1+(-0,5)^3} + 4\sqrt{1+(-0,25)^3} + 2\sqrt{1+(0)^3} + 4\sqrt{1+(0,25)^3} + 2\sqrt{1+(0,5)^3} + 4\sqrt{1+(0,75)^3} + \sqrt{1+(1)^3}]$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx \approx 0,083 [0 + 3,041381 + 1,870829 + 3,968627 + 2 + 4,031129 + 2,121320 + 4,769696 + 1,414213]$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx \approx 0,083(23,217194)$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx \approx 1,934759$$

Ejemplo 49

La tasa de inflación $r(t)$ es la derivada del índice de precios al consumidor (IPC) que mide precios promedio de artículos de una “canasta básica alimentaria” de consumidores urbanos. La tabla 2.3 proporciona la tasa de inflación (porcentaje) en Estados Unidos de 1981 a 1997. Usaremos la regla de Simpson para calcular el aumento total en porcentaje en el IPC de 1981 a 1997.

Tabla 2.3

t	$r(t)$	t	$r(t)$	t	$r(t)$	t	$r(t)$
1981	10,3	1986	1,9	1991	4,2	1996	2,9
1982	6,2	1987	3,6	1992	3,0	1997	2,3
1983	3,2	1988	4,1	1993	3,0	/	/
1984	4,3	1989	4,8	1994	2,6	/	/
1985	3,6	1990	5,4	1995	2,8	/	/

Solución

Dado que la derivada del IPC es la tasa de inflación $r(t)$, tenemos:

$$IPC = \int_{1981}^{1997} r(t) dt$$

Pero $n = [1981, 1997] \rightarrow n = 16 \leftrightarrow t_0 = 1981$ y $t_{16} = 1997$

$$\int_0^{16} r(t) dt \approx \frac{1}{3} [r(t_0) + 4r(t_1) + 2r(t_2) + 4r(t_3) + 2r(t_4) + 4r(t_5) + 2r(t_6) + 4r(t_7) + 2r(t_8) + 4r(t_9) + 2r(t_{10}) + 4r(t_{11}) + 2r(t_{12}) + 4r(t_{13}) + 2r(t_{14}) + 4r(t_{15}) + r(t_{16})]$$

$$\int_0^{16} r(t) dt \approx 0,333 [10,3 + 4(6,2) + 2(3,2) + 4(4,3) + 2(3,6) + 4(1,9) + 2(3,6) + 4(4,1) + 2(4,8) + 4(5,4) + 2(4,2) + 4(3,0) + 2(3,0) + 4(2,6) + 2(2,28) + 4(2,9) + (2,3)]$$

$$\int_0^{16} r(t) dt \approx 0,333 (10,3 + 24,8 + 6,4 + 17,2 + 7,2 + 7,6 + 7,2 + 16,4 + 9,6 + 21,6 + 8,4 + 12,0 + 6,0 + 10,4 + 5,6 + 11,6 + 2,3)$$

$$\int_0^{16} r(t) dt \approx 0,333 (184,6)$$

$$\int_0^{16} r(t) dt \approx 61,47$$

De modo que el IPC ha crecido en aproximadamente 61,5 % de 1981 a 1997.

Ejemplo 50

El gasto cardíaco se expresa por medio de $F = \frac{A}{\int_0^T c(t)dt}$, donde A es la cantidad de tinte que se inyecta en una aurícula. Si un bolo de colorante de 5mg se inyecta en la aurícula derecha y se mide la concentración del tinte (mg/litro) en la aorta a intervalos de un segundo, como se muestra en la siguiente tabla 2.4

Tabla 2.4

t	c(t)	t	c(t)	t	c(t)
0	0	4	9,8	8	2,3
1	0,4	5	8,9	9	1,1
2	2,8	6	6,1	10	0
3	6,5	7	4,0	/	/

Solución

$$A = 5; \quad n = 10; \quad h = 1; \quad a = 0; \quad b = T = 10$$

$$\int_0^{10} c(t)dt \approx \frac{h}{3} [c(t_0) + 4c(t_1) + 2c(t_2) + 4c(t_3) + 2c(t_4) + 4c(t_5) + 2c(t_6) + 4c(t_7) + 2c(t_8) + 4c(t_9) + c(t_{10})]$$

$$\int_0^{10} c(t)dt \approx \frac{1}{3} [0 + 4(0,4) + 2(2,8) + 4(6,5) + 2(9,8) + 4(8,9) + 2(6,1) + 4(4,0) + 2(2,3) + 4(1,1) + (0)]$$

$$\int_0^{10} c(t)dt \approx 0,333(1,6 + 5,6 + 26,0 + 19,6 + 35,6 + 12,2 + 16,0 + 4,6 + 4,4 +)$$

$$\int_0^{10} c(t)dt \approx 0,333(125,6)$$

$$\int_0^{10} c(t) dt \approx 41,82$$

Luego, aplicando la fórmula del gasto cardíaco tenemos:

$$A = \frac{a}{\int_0^{10} c(t) dt} = \frac{5}{41,82} \approx 0,12 \text{ l/seg}$$

2.12. Integrales Impropias

En este inciso extenderemos el concepto de una integral definida al caso donde el intervalo de integración es infinito y también el caso donde f tiene una discontinuidad infinita en $[a, b]$, en uno y otro caso la integral se llama “integral impropia” y se simboliza así:

$$\int_a^\infty f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

Nótese que uno o los dos límites de integración no son números finitos.

La integral impropia $\int_a^\infty f(x) dx$ con $f(x) \geq 0$, puede interpretarse como el área de la región ubicada bajo la gráfica de f desde $x = a$ hasta $x = \infty$, como esa región tiene una extensión infinita, podría pensarse que su área también es infinita, pero esto no siempre se cumple, ya que puede ocurrir que su área sea finita o infinita, dependiendo de la rapidez con que $f(x)$ se aproxime a cero cuando x crece.

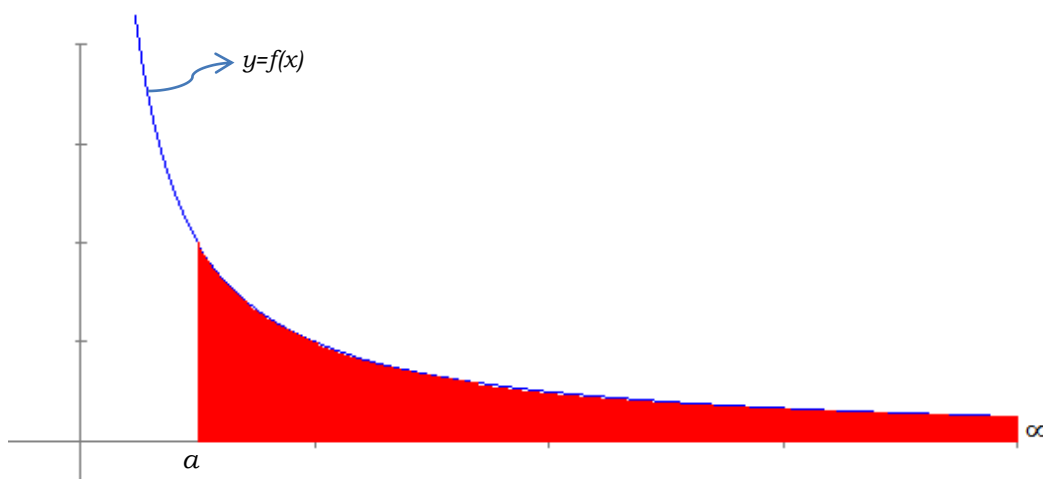


Figura 2.30

Para hallar el área de una región como la de la figura 2.30, escogeremos algún número finito $x = b$ sobre esa región y calculamos el área desde $x = a$ hasta $x = b$ y luego hacemos que b tienda a infinito en la expresión resultante, es decir:

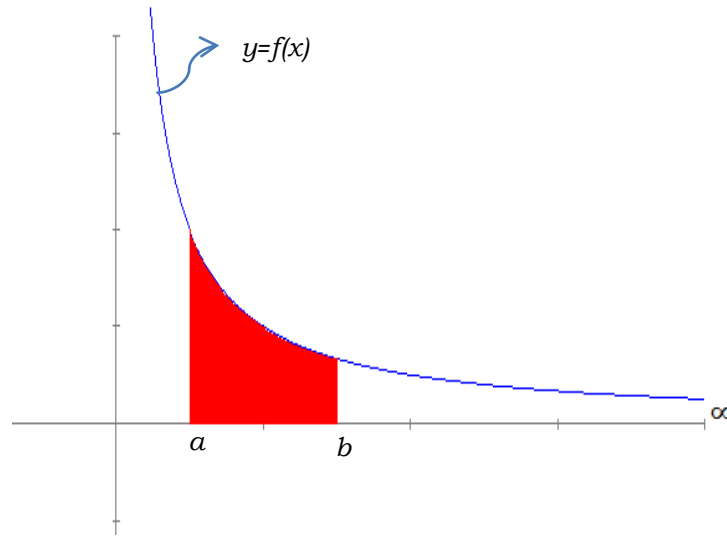


Figura 2.31

$$A = \int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Si existe y es finito el límite de esta integral cuando $b \rightarrow \infty$, decimos que f es integrable sobre $[a, \infty)$ y $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *converge*.

Si no existe el límite, se dice que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *diverge*.

De manera análoga se define

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx \text{ cuando } f \text{ es continua en } (-\infty, b]$$

Se dice que la integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ *converge* si existe este límite, si no, *diverge*.

Si $\int_a^\infty f(x) dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ son convergentes, entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

Ejemplo 51

Calcular $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

Solución

Hacemos b un número cualquiera mayor que 1, luego calculamos el área, así:

$$A = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \int_1^b x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = \left[\frac{-1}{b} \right] - \left[\frac{-1}{1} \right] = 1 - \frac{1}{b}$$

Observemos que cuanto más grande es b , el área se acerca más a 1, por ejemplo si:

$$b = 100 \rightarrow A = 0,99$$

$$b = 1000 \rightarrow A = 0,999$$

$$b = 1000000 \rightarrow A = 0,999999$$

Es decir $A(b) < 1$, sin importar que tan grande sea b .

Ahora podemos representar el área de la región $\frac{1}{x^2}$ a la derecha de $x = 1$, así:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} 1 - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$ a la derecha de $x = 1$ es 1

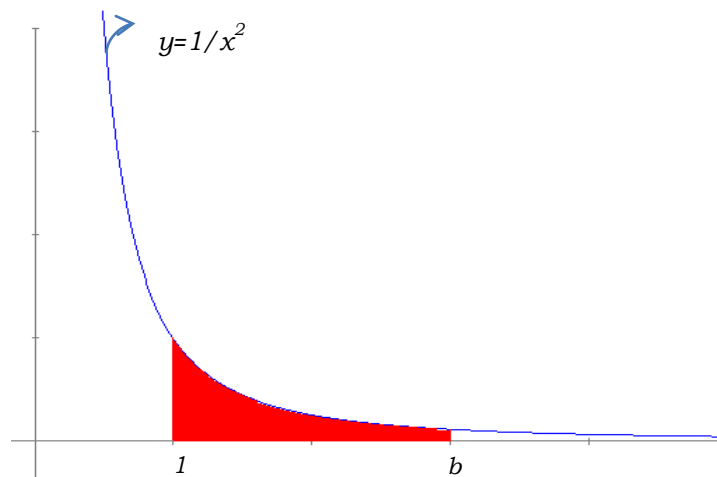


Figura 2.32

Obsérvese también que la integral impropia de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ converge, ya que el límite existe y vale 1.

Ejemplo 52

Calcular $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln|x|) \Big|_1^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|b| - \lim_{b \rightarrow \infty} 1 \\
 &= \infty - 1 \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

Obsérvese que $\ln b$ crece de manera ilimitada cuando $b \rightarrow \infty$, de manera que

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$ y por lo tanto diverge, ya que no existe el límite.

Nota: Para toda potencia p y un número positivo k , se tiene:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (b)^p (e)^{-kb} = 0$$

Ejemplo 53

Calcular $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$

Solución

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x e^x dx$$

Integrando por el método por partes, tenemos:

$$f(x) = x; \quad f'(x) = 1; \quad g(x) = e^x; \quad G(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \int_a^0 x e^x dx &= x e^x \Big|_a^0 - \int_a^0 e^x dx \\ &= x e^x - e^x \Big|_a^0 \\ &= [0e^0 - e^0] - [ae^a - e^a] \\ &= -1 - ae^a + e^a \end{aligned}$$

Sabemos que $e^a \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow -\infty$, de acuerdo con la regla de L'Hopital.

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} ae^a = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{a}{e^{-a}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-a}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-e^a) = 0$$

Luego

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-1 - ae^a + e^a)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} -1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} ae^a + \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a \\
&= -1 - 0 + 0 = -1
\end{aligned}$$

La integral impropia $\int_{-\infty}^0 xe^x dx = -1$ (*converge*)

Ejemplo 54

Calcular $\int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(x^4+3)^2} dx$

Solución

Si hacemos $a = 0$ en la definición $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$, nos queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^4+3)^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(x^4+3)^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^4+3)^2} dx$$

Evaluando las integrales impropias del lado derecho

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(x^4+3)^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \frac{x^3}{(x^4+3)^2} dx$$

Si hacemos la sustitución $u = x^4 + 3$; $du = 4x^3 dx$; $dx = \frac{du}{4x^3}$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(x^4+3)^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \frac{x^3}{u^2} \frac{du}{4x^3}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(x^4+3)^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 u^{-2} du$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(x^4+3)^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{4(x^4+3)} \right] \Big|_{-a}^0$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(x^4+3)^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{-1}{4(0^4+3)} \right) \right] - \left[\left(\frac{-1}{4(-a^4+3)} \right) \right]$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(x^4 + 3)^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1}{12} + \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{4(a^4 + 3)}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(x^4 + 3)^2} dx = \frac{-1}{12} + 0$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(x^4 + 3)^2} dx = \frac{-1}{12}$$

A continuación, resolvemos la otra integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^4 + 3)^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x^3}{(x^4 + 3)^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^4 + 3)^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{4(x^4 + 3)} \right] \Big|_0^b$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^4 + 3)^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{-1}{4(b^4 + 3)} \right) \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{-1}{4(0^4 + 3)} \right) \right]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^4 + 3)^2} dx = 0 + \frac{1}{12}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^4 + 3)^2} dx = \frac{1}{12}$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^4 + 3)^2} dx = \frac{-1}{12} + \frac{1}{12} = 0 \quad (\text{converge})$$

2.13. Aplicaciones de las Integrales Impropias

2.12.1. Valor del Capital de un Flujo de Ingresos Continuos

Usando una integral definida podemos calcular el Valor Presente de un flujo de ingresos continuos en un número fijo de años, así:

$$A = \int_0^k f(t)e^{-rt} dt, \text{ donde } t \in [0, k]$$

Cuando se extiende esta noción a un intervalo de tiempo infinito, el resultado se llama “Valor del Capital” del flujo de ingresos y se denota así:

$$V_c = \int_0^{\infty} f(t)e^{-rt} dt$$

Donde $f(t)$ es la tasa de flujo anual en el momento t ; r es la tasa de interés anual compuesta continuamente.

Ejemplo 55

Suponga que una empresa genera un flujo de ingresos continuos con una tasa de flujo anual en el momento t dada por $f(t) = 120e^{0,04t}$ en miles de bolívares fuertes por año. Si la tasa de interés es de 9 % compuesta continuamente, encuentre el valor del capital de la empresa.

Solución

$$V_c = \int_0^{\infty} f(t)e^{-rt} dt$$

$$V_c = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 120e^{0,04t} e^{-0,09t} dt$$

$$V_c = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 120e^{-0,05t} dt$$

$$V_c = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{120}{-0,05} e^{-0,05t} \right] \Big|_0^b$$

$$V_c = \lim_{b \rightarrow \infty} [-2400e^{-0,05t}] \Big|_0^b$$

$$V_c = \lim_{b \rightarrow \infty} [(-2400e^{-0,05b}) - (-2400e^{-0,05(0)})]$$

$$V_c = \lim_{b \rightarrow \infty} -2400e^{-0,05b} + \lim_{b \rightarrow \infty} 2400$$

$$V_c = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-2400}{e^{0,05b}} + \lim_{b \rightarrow \infty} 2400$$

$$V_c = 0 + 2400$$

$$V_c = 2.400.000 \text{ Bf.}$$

2.12.2. Valor Presente de una inversión a Largo Plazo

El valor presente de una inversión que genera ingresos “perpetuos” o a “largo plazo” está dado por una integral impropia cuya fórmula está determinada por:

$$A_p = \int_0^{\infty} f(t)e^{-rt} dt$$

Ejemplo 56

Se estima que dentro de t años un conjunto de apartamentos producirá utilidades a la razón de $f(t) = 10.000 + 500t$ dólares al año. Si las utilidades se generan a perpetuidad y la tasa de interés anual predominante permanece fija en 10 % capitalizado continuamente. ¿Cuál es el valor presente del conjunto de apartamentos?

Solución

El valor presente a perpetuidad o largo plazo es el límite de esta expresión cuando b tiende a infinito, es decir:

$$A_p = \int_0^{\infty} f(t)e^{-rt} dt$$

$$A_p = \int_0^{\infty} (10.000 + 500t)e^{-0,1t} dt$$

$$A_p = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (10.000 + 500t)e^{-0,1t} dt$$

$$A_p = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 10.000e^{-0,1t} dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 500te^{-0,1t} dt \quad (1)$$

Resolviendo cada integral y tomando el límite cuando $b \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 10.000e^{-0,1t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-10.000}{0,1} e^{-0,1t} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-100.000e^{-0,1t}) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [(-100.000e^{-0,1b}) - (-100.000e^{-0,1(0)})] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-100.000}{e^{0,1b}} + \lim_{b \rightarrow \infty} 100.000 \\ &= 100.000 \end{aligned}$$

De la segunda integral resulta:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 500te^{-0,1t} dt = 500 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b te^{-0,1t} dt$$

Aplicando por partes, con:

$$f(t) = t; \quad f'(t) = 1; \quad g(t) = e^{-0,1t}; \quad G(t) = -10e^{-0,1t}$$

$$\begin{aligned} 500 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b te^{-0,1t} dt &= t(-10e^{-0,1t}) \Big|_0^b - \int_0^b -10e^{-0,1t} dt \\ &= -10te^{-0,1t} - 100e^{-0,1t} \Big|_0^b \end{aligned}$$

$$500 \lim_{b \rightarrow \infty} [(-10be^{-0,1b} - 100e^{-0,1b}) - (-10(0)e^{-0,1(0)} - 100e^{-0,1(0)})]$$

$$500 \lim_{b \rightarrow \infty} (-10b e^{-0,1b}) - 500 \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{100}{e^{0,1b}} + 500 \lim_{b \rightarrow \infty} 100$$

$$500(0) - 500(0) + 50.000$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 500t e^{-0,1t} dt = 50.000$$

Luego, sustituyendo en (1) tenemos:

$$A_p = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 10.000 e^{-0,1t} dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 500t e^{-0,1t} dt$$

$$A_p = 100.000 + 50.000 = 150.000 \$$$

2.14. Aplicaciones de las Integrales Impropias en las Probabilidades y la Estadística

Una de las aplicaciones más importantes de las integrales impropias está relacionada con las probabilidades y la estadística, para abordar este interesante tema, se hace necesario recordar algunos conceptos claves de estas ciencias.

Experimento Aleatorio: proceso de selección tomado al azar.

Variable Aleatoria: es un número asociado al resultado de un experimento aleatorio que no puede predecirse con certeza.

Variable Aleatoria Discreta: son aquellas que sólo pueden tomar valores enteros. Ejemplo: el valor nominal de una ficha de dominó escogida al azar y que ésta sea un doble.

Variable Aleatoria Continua: son aquellas que pueden tomar cualquier valor en un intervalo. Ejemplo: el tiempo que tarda un sujeto, seleccionado aleatoriamente, para hacer un gol por medio de un tiro libre directo en el fútbol.

Probabilidad: es el número de veces que puede esperarse que ocurra un suceso si el experimento se repite un gran número de veces y dicha probabilidad es un número entre 0 y 1. Ejemplo: la probabilidad que se tome un seis (valor nominal) de un conjunto de 7 fichas del dominó es: $\frac{7}{28}$

En un grupo que contiene 15 perros y 11 perras, la probabilidad de que un animal seleccionado al azar sea macho es $\frac{15}{26}$

La probabilidad de un suceso que es seguro que ocurra es 1, mientras que la probabilidad de un suceso imposible de ocurrir es cero. Ejemplo: si se lanza un dado común, la probabilidad que se obtenga un número entre 1 y 6, inclusive, es 1 y la probabilidad que se obtenga un 7 es cero.

Consideremos el siguiente experimento aleatorio. Se escoge una batería no recargable de las existencias del fabricante. Un posible suceso resultante de este experimento es que la batería (pila) seleccionada tenga una carga efectiva entre 15 y 35 horas.

Si X es la variable aleatoria que representa la carga efectiva de una batería seleccionada aleatoriamente, este suceso puede describirse por medio de la desigualdad $15 \leq X \leq 35$ y su probabilidad puede representarse por medio de $P(15 \leq X \leq 35)$. De la misma manera, la probabilidad de que una batería funcione al menos durante 40 horas se representa por $P(X \geq 40) \leftrightarrow P(40 \leq X < \infty)$.

2.14.1. Función de Densidad de Probabilidad

Si $f(x) \geq 0$ para todas las x , entonces f es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua X sí y sólo sí

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Si uno de los valores de a y b son infinitos, la probabilidad correspondiente está dada por:

$$P(X \geq a) = P(a \leq X \leq \infty) = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

$$P(X \leq b) = P(-\infty \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

La suma de las probabilidades para una distribución de probabilidad (una función de densidad de probabilidad) es igual a 1. En particular, diremos que el área bajo la curva de probabilidad normal es 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Función de densidad Uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Función de Densidad Exponencial

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 57

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X, utiliza la integración y halla las probabilidades indicadas:

- a) $P(0 \leq X \leq 2)$
- b) $P(1 \leq X \leq 2)$
- c) $P(0 \leq X \leq 1)$

Solución

$$P(0 \leq X \leq 2) = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = \left[\frac{(2)^2}{4} \right] - \left[\frac{(0)^2}{4} \right] = 1$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = \left[\frac{(2)^2}{4} \right] - \left[\frac{(1)^2}{4} \right] = \frac{3}{4}$$

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 = \left[\frac{(1)^2}{4} \right] - \left[\frac{(0)^2}{4} \right] = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 58

Sea $f(x)$ una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0,1e^{-0,1x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ hallar}$$

- a) $P(0 \leq X \leq \infty)$
- b) $P(X \leq 2)$
- c) $P(X \geq 5)$

Solución

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq \infty) &= \int_0^{\infty} 0,1e^{-0,1x} dx \\ &= 0,1 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-0,1x} dx \\ &= 0,1 \lim_{b \rightarrow \infty} (-10e^{-0,1x}) \Big|_0^b \\ &= -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{0,1b}} + \lim_{b \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= \int_0^2 0,1e^{-0,1x} dx \\ &= 0,1 \int_0^2 e^{-0,1x} dx \\ &= -e^{-0,1x} \Big|_0^2 \\ &= 0,1813 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= \int_5^{\infty} 0,1e^{-0,1x} dx \\ &= 0,1 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_5^b e^{-0,1x} dx \\ &= - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-0,1x} \Big|_5^b \\ &= 0,6065 \end{aligned}$$

Ejemplo 59

La vida de un electrodoméstico se mide por una variable aleatoria X cuya función de densidad de probabilidad es $f(x) = 0,2e^{-0,2x}$, donde x denota la vida (en meses) del electrodoméstico seleccionado al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el electrodoméstico seleccionado al azar dure entre 10 y 15 meses?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la vida del electrodoméstico seleccionado al azar sea menor de 8 meses?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la vida del electrodoméstico seleccionado al azar sea mayor de 1 año?

Solución

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 15) &= 0,2 \int_{10}^{15} e^{-0,2x} dx \\ &= -e^{-0,2x} \Big|_{10}^{15} \\ &= 0,0855 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X < 8) &= 0,2 \int_0^8 e^{-0,2x} dx \\ &= -e^{-0,2x} \Big|_0^8 \end{aligned}$$

$$= 0,7981$$

$$\begin{aligned}
 P(X > 12) &= 0,2 \int_{12}^{\infty} e^{-0,2x} dx \\
 &= 0,2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{12}^b e^{-0,2x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-0,2x}) \Big|_{12}^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} [(-e^{-0,2b}) - (e^{-0,2(12)})] \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{e^{0,2b}} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-2,4}) \\
 &= 0 + \lim_{b \rightarrow \infty} 0,0907 \\
 &= 0,0907
 \end{aligned}$$

Ejemplo 60

Durante la hora matinal de mayor afluencia de tránsito, los vagones del metro de Caracas con dirección a Palo Verde circulan cada 20 minutos. Se llega al azar a la estación a esta hora y no se encuentra ningún vagón en la parada. Si los vagones circulan según el horario, utilizar una función de densidad uniforme apropiada para hallar la probabilidad de que se deba esperar el vagón del metro al menos 8 minutos.

Solución

Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo (en minutos) que debe esperarse. Como todos los tiempos de espera entre 0 y 20 minutos son “igualmente probables”, X está distribuida uniformemente en el intervalo $0 \leq X \leq 20$. Por tanto la función de densidad uniforme será:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & \text{si } 0 \leq X \leq 20 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Luego, la probabilidad buscada es:

$$\begin{aligned} P(8 \leq X \leq 20) &= \int_8^{20} \frac{1}{20} dt \\ &= \frac{1}{40} t \Big|_8^{20} \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

Ejemplo 61

La vida X (en meses) de cierto electrodoméstico es una variable aleatoria que está distribuida exponencialmente y su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 0,08e^{-0,08x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donde X es el número de meses de duración del electrodoméstico y éste tiene garantía por un año. Si se adquiere uno de estos aparatos, seleccionados al azar en los almacenes del fabricante, hallar la probabilidad que la garantía expire antes de que el aparato se dañe.

Solución

12 meses = 1 año

$$\begin{aligned} P(X > 12) &= \int_{12}^{\infty} 0,08e^{-0,08x} dx \\ &= 0,08 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{12}^b e^{-0,08x} dx \\ &= -\lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-0,08x}) \Big|_{12}^b \\ &= -\lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-0,08b}) - (-\lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-0,08(12)})) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-1}{e^{0,08b}} + \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-0,96} \end{aligned}$$

$$= 0 + \lim_{b \rightarrow \infty} 0,3829$$

$$= 0,3829$$

2.14.2. Valor Esperado (o media) de una Variable Aleatoria X

Si X es una variable aleatoria continua con una función de densidad de probabilidad f , entonces la media de la distribución de probabilidad es

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Xf(x)dx$$

Ejemplo 62

Sea X una variable aleatoria que mide la duración de llamadas telefónicas en San Cristóbal y supóngase que una función de densidad de probabilidad para X es

$$f(x) = \begin{cases} 0,5e^{-0,5x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donde X representa la duración (en minutos) de una llamada seleccionada aleatoriamente. Halla el valor esperado de la variable aleatoria X.

Solución

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Xf(x) dx$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0,5xe^{-0,5x} dx$$

$$E(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 0,5xe^{-0,5x} dx$$

Integramos por partes. $f(x) = x$; $f'(x) = 1$; $g(x) = 0,5e^{-0,5x}$; $G(x) = -e^{-0,5x}$

$$E(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} (-xe^{-0.5x}) \Big|_0^b - \int_0^b -e^{-0.5x} dx$$

$$E(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-xe^{-0.5x} - \frac{1}{0,5} e^{-0.5x} \right] \Big|_0^b$$

$$E(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} [(-be^{-0.5b} - 2e^{-0.5b}) - (-e^{-0.5(0)} - 2e^{-0.5(0)})]$$

$$E(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} -be^{-0.5b} - \lim_{b \rightarrow \infty} 2e^{-0.5b} + \lim_{b \rightarrow \infty} 0 + \lim_{b \rightarrow \infty} 2$$

$$E(x) = 2 \text{ minutos}$$

La duración esperada (media) de las llamadas telefónicas en San Cristóbal es de 2 minutos.

2.15. Ejercicios y Problemas de Aplicación sobre Integrales Definidas

Calcula la integral en los siguientes ejercicios:

1. $\int_{-2}^0 3x^2 dx$

2. $\int_2^4 (1 - x^2) dx$

3. $\int_{-3}^1 (2x + 3)^3 dx$

4. $\int_3^{11} \sqrt{2x + 3} dx$

5. $\int_4^5 \frac{2}{(x-3)^2} dx$

6. $\int_1^5 \left(2x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx$

7. $\int_0^1 (e^x - e^{-2x}) dx$

8. $\int_1^2 \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$

9. $\int_1^3 (x + 1)e^{x^2+2x} dx$
10. $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx$
11. $\int_0^1 e^5 dx$
12. $\int_2^4 (1 - e) dx$
13. $\int_{\pi}^e 3(x^{-2} + x^{-3} - x^{-4}) dx$
14. $\int_{-8}^8 \sqrt[3]{x^4} dx$
15. Si $\int_1^3 f(x) dx = 4$ y $\int_3^2 f(x) dx = 3$, encuentre $\int_1^2 f(x) dx$
16. $\int_7^7 e^{x^2} dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{3\sqrt{2}} dx$
17. La función de ingreso marginal para el producto de un fabricante está dado por $R'_{(q)} = -1,5q^2 + 45q + 125$. Determine el cambio en el ingreso total cuando la producción crece de 20 a 40 unidades.
18. El costo marginal de cierta empresa está dado por $c'_{(q)} = 30 - 0,0004q$, mientras que su ingreso marginal es $R'_{(q)} = 40 - 0,008q$. Determine el cambio en las ganancias cuando las ventas se incrementan de 1000 a 1200 unidades.
19. En un estudio sobre mutación genética, aparece la integral siguiente $\int_0^{10^{-4}} x^{-1/2} dx$. Evalúe esta integral.
20. El valor presente (dólares) de un flujo continuo de ingreso de \$ 2000 al año durante 5 años al 6 % compuesto continuamente está dado por $\int_0^5 2000e^{-0,06t} dt$. Evalúe el valor presente.
21. Para cierta población, suponga que l es una función tal que $l(x)$ es el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Esta función se llama Función de la Tabla de Vida. Bajo condiciones apropiadas, la integral $\int_x^{x+n} l(t) dt$ proporciona el número esperado de personas en la población que tienen entre x y $x + n$ años, inclusive. Si $l(x) = 10.000\sqrt{100 - x}$. Determine el número de personas entre 36 y 64 años, inclusive. De su respuesta al entero más cercano, puesto que las respuestas fraccionarias carecen de sentido.

22. Una socióloga estudia la tasa de crímenes en la gran Caracas. Estima que t meses después del principio del próximo año, el número total de crímenes cometidos se incrementará a razón de $8t + 10$ crímenes por mes; a) Determine el número total de crímenes que se esperan el próximo año; b) ¿Cuántos crímenes pueden esperarse que se cometan durante los últimos 6 meses de ese año?
23. Para cierto país, la cantidad de exportaciones está dada por $E = \int_{-R}^R \frac{i}{2} [e^{-k(R-x)} + e^{-k(R+x)}] dx$ donde i, k son constantes ($k \neq 0$). Evalúe E
24. En un análisis de la seguridad en el tráfico, se puede considerar cuánta aceleración puede tolerar una persona sin que sufra lesiones serias. El Índice de Severidad se define como $I.S = \int_0^T \alpha^{5/2} dt$ donde α se considera una constante implicada con la aceleración media ponderada y T es la duración del choque. Encuentre el índice de severidad.
25. Suponga que el dinero de una máquina tragamonedas de un casino fluye de manera continua y crece con una tasa que se obtiene por medio de $A'(t) = 100e^{0.1t}$ donde t es el tiempo en horas y $0 \leq t \leq 10$. Encuentre la cantidad total que se acumula en la máquina durante el periodo de 10 horas, si no se paga dinero alguno.
26. Un estudio indica que dentro de x meses la población de cierta ciudad aumentará a razón de $3\sqrt[3]{x^2} + 5$ personas por mes. ¿Cuánto crecerá la población en los próximos 8 meses?
27. Los promotores de una feria de pueblo estiman que si las puertas se abren a las 9.00 am, t horas después los visitantes entran a la feria a razón de $-4(t + 2)^3 + 54(t + 2)^2$ personas por hora. ¿Cuántas personas entrarán a la feria entre las 10.00 am y el mediodía?
28. Cierta pozo petrolero que produce 400 barriles de crudo al mes se secará en dos años. En la actualidad el precio del barril de petróleo crudo es de 18 dólares y se espera que aumente a una razón constante de 3 centavos mensuales por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo. ¿Cuál será el ingreso futuro total obtenido del pozo?
29. Una compañía determina que el ingreso marginal de la producción de x unidades es $R'(x) = \frac{11-x}{\sqrt{14-x}}$ cientos de dólares por unidad y el correspondiente costo marginal es $c'(x) = x^2 + x + 2$ cientos de dólares por unidad. ¿Cuánto cambia la utilidad cuando el nivel de producción aumenta de 5 a 9 unidades?

Área Bajo la Curva

30. Calcule el área que se encuentra entre la recta $y = 2x + 3$, el eje x , en el intervalo $[1,4]$
31. Calcule el área situada entre la recta $y = 3x - 9$, el eje x ; $x = 2$ y $x = 5$
32. Calcule el área comprendida entre la curva $y = 3x^2 - 4$; $y = 0$; $x = 2$ y $x = -1$
33. Calcule el área situada entre la curva $y = e^x$ y el eje x en el intervalo $[1,3]$
34. Calcule el área entre la curva $y = x^3 + 3x^2$ y las rectas $y = 0$; $x = -2$ y $x = 2$
35. Calcule el área encerrada entre las curvas $y = x$ y $y = x^3$
36. Calcule el área encerrada entre las curvas $y = 2 - x^2$ y $y = x$
37. Calcule el área entre las curvas $x = -y^2$; $x - y = 4$; $y = -1$ y $y = 2$
38. Calcule el área encerrada entre $x = y^2 + 2$; $y = 6$, el eje x y el eje y
39. Calcule el área encerrada entre las curvas $y = x$ y $y = 0,9x^2 + 0,1x$
40. Calcule el área entre las curvas $y = x^2 - 2x$ y el eje x
41. Calcule el área limitada por la curva $y = -x^2 - 6x - 5$ y el eje x
42. Calcule el área entre las curvas $y = \frac{1}{x^2}$ y las rectas $y = x$ y $y = \frac{x}{8}$
43. Calcule el área limitada por $y = x^2 - 2x$ y $y = -x^2 + 4$
44. Calcule el área encerrada entre la curva $y = e^{-x}$, el eje x , $x = -1$ y $x = 1$
45. Calcule el área limitada por $y = -x^2 + 3x - 2$, el eje x , $x = 1$ y $x = 2$
46. Calcule el área situada entre la curva $y = x^2$, y $y = 2x$
47. Calcule el área encerrada entre la curva $y = 10 - x^2$ y la recta $y = 4$
48. Calcule el área limitada por $x = 8 + 2y$; $x = 0$; $y = -1$; $y = 3$

49. Calcule el área limitada por $y = 4 - x^2$ y $y = -3x$
50. Calcule el área encerrada por las curvas $y^2 = 4x$; $y = 2x - 4$
51. Calcule el área limitada por $2y = 4x - x^2$; $2y = x - 4$
52. Calcule el área situada entre la curva $y = 8 - x^2$; $y = x^2$; $x = -1$ y $x = 1$
53. Calcule el área situada entre la curva $y = x^2$ y las rectas $y = 2$; $y = 5$
54. Calcule el área limitada por la curva $y = x^3 - 1$ y la recta $y = x - 1$
55. Calcule el área de la región entre las curvas $y = x - 1$; $y = 5 - 2x$ con $x \in [0,4]$
56. Calcule el área de la región limitada por $y = x^2$; $y = x + 6$
57. Calcule el área de la región limitada por $y = x^2 - x$; $y = 2x$; $x = 4$
58. Calcule el área de la región limitada por $y = 1 - x^2$; $y = x - 1$; $y = 1$
59. Calcule el área de la región limitada por $y = x^2$ y $y = 2x$

Curva de Lorenz

60. Se pensó que los cambios tributarios en los EE.UU. durante la década de 1980 ayudarían en gran medida a los ricos a expensas de los pobres. Las curvas de Lorenz para la distribución del ingreso para 1980 y en 1990 se presentan a continuación: Encuentre el coeficiente de Gini para el ingreso para ambos años y determine si la distribución del ingreso es más o menos equitativa en 1990 que en 1980.

$$1980 \quad y = 0,916x^{1,821}$$

$$1990 \quad y = 0,896x^{1,878}$$

61. Un estudio realizado en los Estados Unidos generaron las curvas de Lorenz para la distribución del ingreso en 1996 entre los negros y los blancos. Encuentre el coeficiente de Gini del ingreso para ambos grupos y determine en cuál de ellos el ingreso del grupo se distribuye más manera más equitativa.

$$\text{Blancos} \quad y = 0,8693x^{1,8556}$$

$$\text{Negros} \quad Y = 0,8693 x^{2,0982}$$

62. La distribución de ingreso de cierto país está descrita por la función de Lorenz:
 $f(x) = \frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x$.
- Calcule $f(0,2)$ e intérprete con palabras este resultado
 - Calcule el coeficiente de desigualdad correspondiente a esa curva de Lorenz.
63. La distribución de ingresos de cierto país está descrito por la curva de Lorenz
 $f(x) = \frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x$
- ¿Qué proporción de los ingresos totales del país recibe 50 % de la población más pobre?
 - Determine el coeficiente de desigualdad correspondiente a esa curva de Lorenz.
64. Dadas las curvas de Lorenz para la distribución del ingreso $L(x) = x^2$ y $L(x) = x^3$, calcular el índice de Gini para cada una de las curvas de Lorenz.

Excedente de los Consumidores y Productores

65. Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando la función de demanda es $p = 30 - 4x$ y la de oferta $p = 6 + 2x$
66. Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando la función de demanda es $p = \frac{140}{q+2}$ y la de oferta es $p = 10 + 1,25q$
67. La función de demanda de un producto es $p = \sqrt{49 - 6x}$ y su función de oferta es $p = x + 1$, donde p se da en Bf. Y x es el número de unidades. Encuentre el punto de equilibrio y el excedente del consumidor.
68. Suponga que la función de la oferta para x unidades de un producto es $p = x^2 + x$ Bf. Si el punto de equilibrio es Bf.20. ¿Cuál es el excedente del productor?
69. Suponga que para cierto producto, la función de demanda es $p = 200e^{-0,01x}$ y la función de oferta es $p = \sqrt{200x + 49}$; a) encuentre el excedente del consumidor; b) encuentre el excedente del productor.
70. Determine el excedente de los consumidores de un artículo cuando la función de demanda es $p = 2(64 - q^2)$ dólares por unidad, si el precio de mercado del artículo es $p_0 = 110 \$/unidad$

71. Determine el excedente de los consumidores de un artículo cuando la función de oferta es $p = \frac{300}{(0,1q+1)^2}$ dólares por unidad, si el precio del mercado del artículo es $q_0 = 12$ \$/unidad.
72. Los repuestos para una pieza de maquinaria pesada los vende el fabricante en unidades de mil. El precio en dólares por unidades q está dado por $p = 110 - q$ y el costo total de producción de tales q unidades es $C(q) = q^3 - 25q^2 + 2q + 3000$
- ¿Para qué valor de q se maximizan las ganancias del fabricante?
 - Hallar el excedente de los consumidores cuando el precio corresponde a la ganancia máxima.
73. Suponga que la función de demanda de cierto artículo es $p = 32 - q^2$ y que la función de oferta para el mismo artículo es $p = \frac{1}{3}q^2 + 2q + 5$. Si la cantidad vendida y el precio correspondiente se determinan de manera que la oferta es igual a la demanda. Hallar el correspondiente excedente de los consumidores.

Valor Promedio de una Función

74. Suponga que el costo en dólares de un producto, esta dado por $C(x) = 400 + x + 0,3x^2$, donde x es el número de unidades.
- ¿Cuál es el valor promedio de $C(x)$ de 10 a 20 unidades?
 - Encuentre el costo promedio unitario si se producen 40 unidades.
75. El costo de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = x^2 + 400x + 2000$
- Use $C(x)$ para hallar el costo promedio de producir 1000 unidades
 - Encuentre el valor promedio de la función $C(x)$ sobre el intervalo de 0 a 1000.
76. El número de ventas diarias de un producto está dado por $V = 100xe^{-x^2} + 100$, x días después de iniciarse una campaña publicitaria para este producto.
- Encuentre las ventas diarias promedio durante los primeros 20 días de la campaña.
 - Si no se inició una nueva campaña publicitaria. ¿Cuál es el número promedio de ventas por día durante los próximos 10 días?

77. Si un capital de Bf. 2000 se invierte en una cuenta que paga 12% compuesto continuamente, entonces el valor presente V de la inversión después de t años está dado por $V(t) = 2000e^{0.12t}$. Encuentre el valor promedio de la inversión durante los siguientes cinco años.
78. Suponga que la demanda de un producto está dada por $p = 80 - 0,2q$. Encuentre el ingreso promedio en el intervalo de venta desde $q = 0$ hasta $q = 100$.
79. La población de un pueblo era de 20.000 habitantes en 1991 y creció en los siguientes diez años según la fórmula $N(t) = 20.000e^{0.04t}$, donde t es el tiempo en años a partir de 1991 que corresponde a $t = 0$.
- encuentre el tamaño de la población en el año 2000
 - encuentre el tamaño de la población en 1995
 - encuentre el tamaño promedio de la población durante los 10 años que van desde 1991 a 2000
80. La ecuación $y = 0,001441x^4 - 0,0593608x^3 + 0,740741x^2 - 2,573133x + 6,941375$ describe las tasas de interés para los años de 1970 a 1989, donde $x = 0$ en 1970. Use una integral definida de 0 a 19 para calcular la tasa de interés promedio durante el periodo.

Flujo de Ingresos Continuos

81. Una pequeña compañía petrolera considera el bombeo continuo de un pozo como un flujo de ingresos continuo con una tasa de flujo anual en el tiempo t dado por $f(t) = 600e^{-0.2t}$ en miles de dólares al año. Encuentre un estimado del ingreso total por este pozo durante los próximos 10 años.
82. La Coca Cola considera la producción de su máquina embotelladora como un flujo de ingreso continuo con una tasa de flujo anual en el tiempo t dada por $f(t) = 80e^{-0.1t}$ en miles de dólares por año. Encuentre el ingreso de este flujo durante los próximos 10 años.
83. Suponga que una compañía acerera visualiza la producción de su colado continuo como un flujo continuo de ingresos con una tasa de flujo mensual en el tiempo t , dada por $f(t) = 24.000e^{0.03t}$ dólares mensuales. Encuentre el ingreso total de este colado en el primer año.

Valor Presente y Futuro de un Flujo de Ingresos continuos

84. Suponga que la compañía Petróleos de Venezuela (PDVSA), que se encarga de la producción, explotación y venta del petróleo, decide vender un pozo petrolero a una compañía cubana. Suponga además que PDVSA quiere usar el valor presente del pozo durante los próximos 10 años para establecer su precio de venta. Si PDVSA determina que la tasa de flujo anual es $f(t) = 600e^{-0.2(t+5)}$ en miles de dólares por año y si el dinero crece con una tasa de 10 % compuesta continuamente, encuentre este valor presente.
85. Si la tasa de ingreso de un activo es $1000e^{0.02t}$, en millones de dólares por año, y si el ingreso se invierte a una tasa de interés de 6 % compuesto continuamente, encuentre el valor futuro del activo dentro de 4 años.
86. El dinero de una cadena establecida de lavanderías automáticas para el público es un flujo continuo con una tasa de flujo anual en el tiempo t dada por $f(t) = 63.000$ dólares por año. Si el dinero crece a una tasa de 7 % compuesto continuamente, encuentre el valor presente y el valor futuro de esta cadena de lavanderías durante los próximos 5 años.
87. Suponga que una empresa de impresión considera la producción de sus prensas como un flujo continuo de ingreso. Si la tasa de flujo anual en el tiempo t está dada por $f(t) = 97,5e^{-0.2(t+3)}$ dólares al año y si el dinero crece a una tasa de 6 % compuesto continuamente, encuentre el valor presente y el valor futuro de las prensas durante los siguientes 10 años.
88. Una pareja de 58 años piensa abrir un negocio propio. Van a comprar una tienda establecida de ropa infantil o abrir una tienda de video. La tienda de ropa infantil tiene un flujo continuo de ingreso con una tasa de flujo anual en el tiempo t dada por $g(t) = 30.000$ dólares por año y la tienda de video tiene un flujo continuo de ingreso con una tasa de flujo anual proyectada en el tiempo t dada por $V(t) = 21.000e^{0.08t}$ dólares por año. La inversión inicial es igual para ambos negocios y el dinero crece a una tasa de 10 % compuesto continuamente. Encuentre el valor presente de cada negocio durante los próximos 7 años para saber cuál es la mejor compra, en este caso.

Integrales por el método de Fracciones Parciales

Descomponga en fracciones parciales cada una de las siguientes funciones dadas. No evalúe los valores numéricos de los coeficientes

89.
$$\frac{3}{(2x+3)(x-1)}$$

90. $\frac{x^2+9x-12}{(3x-1)(x+6)^2}$
91. $\frac{1}{x^4-x^3}$
92. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$
93. $\frac{t^4+t^2+1}{(t^2+1)(t^2+4)^2}$
94. $\frac{3-11x}{(x-2)^3(x^2+1)(2x^2+5x+7)^2}$
95. $\frac{x^4}{(x^2+9)^3}$
96. $\frac{10x}{x^2+7x+6}$
97. $\frac{x^2+3}{x^3+x}$
98. $\frac{2x^2}{x^2+5x+6}$

Evalúe las siguientes Integrales utilizando el método de las Fracciones Parciales

99. $\int \frac{5x-2}{x^2-x} dx$
100. $\int \frac{x+10}{x^2-x-2} dx$
101. $\int \frac{3x^3-3x+4}{4x^2-4} dx$
102. $\int \frac{3x-4}{x^3-x^2-2x} dx$
103. $\int \frac{2(3x^5+4x^3-x)}{x^6+2x^4-x^2-2} dx$
104. $\int \frac{2x^2-5x-2}{(x-2)^2(x-1)} dx$
105. $\int \frac{-x^3+8x^2-9x+2}{(x^2-1)(x-3)^2} dx$

$$106. \int \frac{14x^3+24x}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$$

$$107. \int \frac{2-2x}{x^2+7x+12} dx$$

$$108. \int \frac{2x^4-3x^3-4x^2-17x-6}{x^3-2x^2-3x} dx$$

$$109. \int \frac{x^5}{(x^2+4)^2} dx$$

$$110. \int \frac{2x+1}{3x^2-27} dx$$

$$111. \int \frac{-2x-4}{x^3+x^2+x} dx$$

$$112. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$$

$$113. \int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2} dx$$

$$114. \int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)} dx$$

$$115. \int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx$$

$$116. \int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)} dy$$

$$117. \int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2} dx$$

$$118. \int \frac{2t^3-t^2+3t-1}{(t^2+1)(t^2+2)} dt$$

Integrales Por medio de Tablas

Encuentre las integrales, usando la tabla del apéndice

119.
$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16x^2 + 3}}$$

120.
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 9}}$$

121.
$$\int \frac{x dx}{(2+3x)(4+5x)}$$

122.
$$\int \frac{dx}{5+2e^{3x}}$$

123.
$$\int \frac{7 dx}{x(5+2x)^2}$$

124.
$$\int \sqrt{x^2 - 3} dx$$

125.
$$\int_0^{1/12} x e^{12x} dx$$

126.
$$\int x^2 e^x dx$$

127.
$$\int \frac{\sqrt{5x^2+1}}{2x^2} dx$$

128.
$$\int \frac{x dx}{(1+3x)^2}$$

129.
$$\int \frac{dx}{7-5x^2}$$

130.
$$\int 36 x^5 \ln(3x) dx$$

131.
$$\int \frac{dx}{x(16x^2+3)^{0.5}}$$

132.
$$\int 7x^2 \ln(4x) dx$$

133.
$$\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$$

Regla de los Trapecios y de Simpson

Use (a) la regla de los trapecios (b) la regla de Simpson para aproximar la integral con el valor especificado de n (redondee a 6 decimales).

134. $\int_1^2 e^{1/x} dx, \quad n = 4$

135. $\int_0^1 x^5 e^x dx, \quad n = 10$

136. $\int_0^3 \frac{1}{1+y^5} dy, \quad n = 6$

137. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx, \quad n = 6$

138. $\int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad n = 4$

139. $\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad n = 10$

Aproximar la integral dada y estimar el error E , usando (a) la regla trapezoidal (b) la regla de Simpson con el número de subintervalos dado.

140. $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx, \quad n = 4$

141. $\int_0^2 x^3 dx, \quad n = 8$

142. $\int_1^2 \ln x dx, \quad n = 4$

143. $\int_0^{0.5} e^{x^3} dx, \quad n = 6$

144. La Tabla de Vida es una función que se usa en demografía para el estudio de nacimientos, matrimonios, mortalidad, etc., en una comunidad y se denota por L . En una población de 100.000 personas o nacimientos en cualquier año, $L(x)$ representa el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Por ejemplo si $L(20) = 98.857$, significa que el número de personas que llegan a los 20 años en cualquier año es 98.857. Suponga que la función L se aplica a todas las personas nacidas en un intervalo largo de tiempo. El número de personas en

la población que tienen entre x y $x + m$ años inclusive, está dado por:

$$\int_x^{x+m} L(t) dt.$$

La siguiente tabla proporciona valores de $L(x)$ para hombres y mujeres de Venezuela. Aproxime el número de mujeres en el grupo de 20 a 35 años de edad con la regla del trapecio con $n = 3$

Edad	L(x)		Edad 'x'	L(x)		Edad	L(x)	
	Hombres	Mujeres		Hombres	Mujeres		Hombres	Mujeres
0	100000	100000	30	96970	98350	60	84188	90700
5	99066	99220	35	96184	97964	65	77547	86288
10	98967	99144	40	95163	97398	70	68375	79926
15	98834	99059	45	93717	96582	75	56288	70761
20	98346	98857	50	91616	95392	80	42127	58573
25	97648	98627	55	88646	93562	-	-	-

145. Use la regla trapezoidal y los datos siguientes para estimar el valor de $\int_1^{3,2} y dy$

X	Y	X	Y
1,0	4,9	2,2	7,3
1,2	5,4	2,4	7,5
1,4	5,8	2,6	8,0
1,6	6,2	2,8	8,2
1,8	6,7	3,0	8,3
2,0	7,0	3,2	8,3

146. José necesita conocer el área de su piscina. Suponer que José realiza las mediciones que aparecen en la tabla siguiente con intervalos de 4 pies a lo largo de la base de la piscina. Calcule el área utilizando la regla de Simpson.

Pies de cada medición	0	4	8	12	16	20	24	28	32
Medida en pies	0	10	9	8	9	11	13	12	8

147. María Fabiana y Jeisson viajan en un auto con el odómetro (instrumento que mide las distancias) roto. Para determinar la distancia que recorren entre las 2 y las 3 pm; Fabiana lee el velocímetro cada 5 minutos.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
Después de las 2 pm	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Lectura del velocímetro	45	48	37	39	55	60	60	55	50	67	58	45	49

Utilice la regla trapezoidal para calcular la distancia total recorrida por la pareja durante la hora dada.

148. Una clínica de salud mental, acepta inicialmente 300 personas para tratamiento y planea aceptar nuevos pacientes a la razón de 10 por mes. Sea $f(t)$ la fracción de personas que reciben tratamiento continuo al menos t días. En los primeros 60 días, los registros se mantienen y se obtienen los siguientes valores correspondientes de $f(t)$.

t(días)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
f(t)	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$

¿Cuántos pacientes ingresarían en la clínica o la abandonarían mensualmente?
Use la regla trapezoidal

Integrales Impropias

Calcule las siguientes integrales

149. $\int_{-\infty}^4 e^{3x} dx$

150. $\int_1^{\infty} x^{-3/2} dx$

151. $\int_1^{\infty} x^{-2/3} dx$

152. $\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} dx$

153. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

154. $\int_1^{\infty} e^{1-x} dx$

155. $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3+2} dx$

156. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$

157. $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$

158. $\int_0^{\infty} xe^{1-x} dx$

159. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

160. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

161. $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

162. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{10}{x^2} dx$

163. $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx$

Problemas de Aplicación de Integrales Impropias

164. Un negocio tiene un flujo continuo de ingreso con una tasa de flujo anual en el momento t dada por $f(t) = 56.000e^{0.02t}$ (Bf./año). Si la tasa de interés es de 6 % compuesta continuamente, encuentre el valor del capital del negocio.
165. Suponga que una organización quiere establecer un fondo fiduciario que proporcionará un flujo continuo de ingreso con una tasa de flujo anual en el momento t dada por $f(t) = 10.000$ dólares al año. Si la tasa de interés permanece fija igual a 10 % compuesto continuamente, encuentre el valor del capital del fondo.

166. Una persona desea hacer una donación a un colegio, de la cual éste puede retirar a perpetuidad 7.000 dólares al año para financiar el funcionamiento de un laboratorio de computación. Suponiendo que la tasa de interés anual predominante permanecerá fija en 10 % capitalizado continuamente, ¿cuánto deberá dar el donante al colegio? Es decir, ¿cuál es el valor presente de la donación?
167. Una inversión generará 2400 Bf. anuales a perpetuidad. Si el dinero se retira continuamente a lo largo del año y la tasa de interés anual predominante permanece fija en 12 % compuesto continuamente. ¿Cuál es el valor presente de la inversión?
168. Subway, cadena nacional de puntos de venta de comidas rápidas desea vender una franquicia permanente en San Cristóbal, estado Táchira. La experiencia obtenida en otras ciudades indica que dentro de t años la franquicia generará utilidades a la razón de $f(t) = 900t + 12.000$ Bf. por año. Si la tasa de interés predominante permanece fija en 10 % capitalizado continuamente. ¿Cuál es el valor presente de la franquicia?
169. Dada $f(x)$ como una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria particular X , definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Hallar

- a) $P(0 \leq x \leq 4)$
b) $P(1 \leq x \leq 2)$
c) $P(x \leq 1)$
170. Dada la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Hallar

- a) $P(0 \leq x < \infty)$
- b) $P(2 \leq x \leq 4)$
- c) $P(x \geq 6)$

171. La vida de una bombilla fabricada por una determinada compañía se mide por una variable aleatoria X , cuya función de densidad de probabilidad es $f(x) = 0,01e^{-0,01x}$, donde x denota la vida (en horas) de una bombilla seleccionada aleatoriamente. (a) ¿cuál es la probabilidad de que la vida de la bombilla seleccionada al azar esté entre 50 y 60 horas? (b) ¿cuál es la probabilidad de que la vida de la bombilla seleccionada al azar sea menor o igual a 60 horas? (c) ¿cuál es la probabilidad de que la vida de la bombilla seleccionada al azar sea mayor que 60 horas?
172. La duración de llamadas telefónicas en cierta ciudad se mide mediante una variable aleatoria X cuya función de densidad de probabilidad es $f(x) = 0,5e^{-0,5x}$, donde x denota la duración en minutos de una llamada telefónica seleccionada al azar.
- a) ¿Qué porcentaje de las llamadas se esperaría que durara entre 2 y 3 minutos?
 - b) ¿2 minutos o menos?
 - c) ¿Más de 2 minutos?
173. Cierta semáforo permanece en rojo 45 segundos cada vez. Si al llegar (al azar) al semáforo se encuentra en rojo, emplear una función de densidad uniforme apropiada para hallar la probabilidad de que el semáforo cambie a verde en menos de 15 segundos.
174. Suponer que el tiempo (en minutos) que tarda una rata de laboratorio en atravesar cierto laberinto es una variable aleatoria X distribuida exponencialmente y cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x/3} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donde x es el número de minutos que una rata seleccionada al azar gasta en el laberinto. Hallar la probabilidad que una rata seleccionada al azar requiera más de 3 minutos para cruzar el laberinto.

175. El tiempo x (en minutos) que un cliente gasta haciendo cola en cierto banco es una variable aleatoria que está distribuida exponencialmente y su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donde x es el número de minutos que un cliente seleccionado al azar debe esperar en la fila. Hallar la probabilidad de que un cliente seleccionado al azar en el banco tenga que hacer cola al menos 8 minutos.

176. (a) Hallar el tiempo medio de espera para los automóviles que llegan al semáforo cuando está en rojo del problema 173. (b) Hallar el tiempo medio requerido por las ratas para atravesar el laberinto del problema 174. (c) Hallar el tiempo medio de espera de los clientes en el banco del problema 175.

CAPÍTULO III: Ecuaciones Diferenciales

3.1. Ecuaciones Diferenciales

La teoría de las ecuaciones diferenciales es uno de los campos más fascinantes de las matemáticas, y también de enorme importancia práctica. Las ecuaciones diferenciales juegan un papel fundamental en física porque con ellas se pueden describir muchas leyes de la naturaleza. Esta es la razón por la que Newton y Leibniz comenzaron a estudiar sistemáticamente las ecuaciones diferenciales en el siglo XVII. Importancia grande poseen en el campo de la economía y finanzas.

¿Qué es una ecuación diferencial? Como su nombre indica, es una ecuación. A diferencia de las ecuaciones algebraicas, en una ecuación diferencial ocurre que:

- La incógnita es una función
- La ecuación contiene a una o más derivadas de la función

Con estas características podemos definir de una manera más formal a una ecuación diferencial.

Definición: Una ecuación diferencial es aquella que relaciona a una función y con su variable x y sus derivadas y' , y'' , etc. Por ejemplo:

$$y' + xy'' + 2y = 3x$$

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = x + t$$

Resolver una ecuación diferencial significa determinar una función tal que al sustituirla en la ecuación se convierta en una identidad. Por ejemplo, una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - y = 0$ es $y = e^x$, porque su derivada es $\frac{dy}{dx} = e^x$ y al sustituirla en la ecuación diferencial resulta

$$e^x - e^x = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Una ecuación diferencial tiene en general infinitas soluciones, vimos que una solución de $\frac{dy}{dx} - y = 0$ era $y = e^x$. Sin embargo, también podemos demostrar que $y = 2e^x$; $y = 3e^x$ y en general $y = ce^x$ (cuando c es cualquier número real) son soluciones de ésta ecuación diferencial.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial se llama la Solución General de la ecuación diferencial cualquiera que sea la constante c .

Llamamos Solución particular a aquella solución que carece de la constante c , en nuestro ejemplo

$$y = ce^x \quad (\text{Solución general})$$

$$y = 2e^x \quad (\text{Solución particular})$$

$$y = 3e^x \quad (\text{Solución particular})$$

Las soluciones particulares se obtienen cuando el problema posee condiciones iniciales. Los problemas de valores iniciales surgen naturalmente en muchos modelos económicos. Por ejemplo, supongamos que un modelo de crecimiento económico necesita una ecuación diferencial para describir la acumulación de capital a lo largo del tiempo. El stock inicial de capital es normalmente un dato, y así se determinará una única solución de la ecuación.

3.2. Método de Separación de Variables

Para resolver una ecuación diferencial por el método de separación de variables, manipulamos algebraicamente para que en un miembro de la ecuación aparezca solo una variable y en el otro miembro éste la otra: $f(y)dy = g(x)dx$

Para hacer esto es necesario iniciar con la notación $\frac{dy}{dx}$ en lugar de y' para la derivada de la función. Una vez separada las variables, se integran ambos miembros de la ecuación y, de ser posible, se despeja la variable que nos interesa. Un par de observaciones son importantes en este punto; en primer lugar, no es necesario escribir la constante de integración en ambos lados, la escribiremos en uno sólo, y en segundo lugar no siempre se puede despejar la incógnita que nos interesa; en este caso decimos que tenemos una solución implícita.

Ejemplo 1

Resolver $\frac{dy}{dx} - y = 0$ con la condición inicial $y(0) = 4$

Solución

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y \rightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

Ya tenemos separadas las variables, porque en el primer miembro sólo aparece la variable y , igual para x en el segundo miembro. A continuación integramos a ambos lados:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + c$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x+c}$$

$$|y| = e^x e^c \rightarrow y = \pm e^c e^x$$

Ahora observemos que tanto e^c como $-e^c$ son constantes arbitrarias y podemos redefinir $\pm e^c = c$, por lo que finalmente se tiene la solución general $y = ce^x$.

Ahora podemos encontrar la solución particular que satisface la condición inicial $y(0) = 4$ si sustituimos $x = 0$ cuando $y = 4$ en la ecuación

$$4 = ce^0 \rightarrow c = 4$$

Entonces la solución particular es: $y = 4e^x$

Ejemplo 2

Resuelva la ecuación diferencial $y' + 2xy = 0$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2} + c$$

$$y = \pm e^{-x^2+c}$$

$$y = \pm e^c e^{-x^2}$$

$$y = ce^{-x^2}$$

Ejemplo 3

Resolver $\frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x^6+1}$

Solución

$$(x^6 + 1)dx = t^3 dt$$

$$\int (x^6 + 1)dx = \int t^3 dt$$

$$\frac{1}{7}x^7 + x = \frac{1}{4}t^4 + c \quad (\text{Solución implícita})$$

Nota: Normalmente decimos que se ha resuelto una ecuación diferencial aun cuando la función incógnita no se pueda expresar explícitamente, como los ejemplos anteriores. El punto importante es que hemos encontrado una ecuación que contiene a la función incógnita sin su derivada.

Ejemplo 4

Resolver $\frac{dx}{dt} = -2x^2t$

Solución

$$\frac{dx}{x^2} = -2t dt$$

$$\int x^{-2} dx = -2 \int t dt$$

$$-\frac{1}{x} = -t^2 + c$$

$$\frac{1}{x} = t^2 + c$$

$$x = \frac{1}{t^2 + c}$$

Ejemplo 5

Resolver $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$, si $y = 0$ cuando $x = 0$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = e^x dx$$

$$\int e^y dy = \int e^x dx$$

$$e^y = e^x + c$$

$$\ln e^y = \ln(e^x + c)$$

$$y = \ln(e^x + c)$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 0$, tenemos

$$0 = \ln(e^0 + c)$$

$$0 = \ln(1 + c)$$

$$e^0 = e^{\ln(1+c)}$$

$$1 = 1 + c \rightarrow c = 0$$

Sustituyendo c en la ecuación, obtenemos

$$y = \ln(e^x + c)$$

$$y = \ln e^x$$

$$y = x$$

Ejemplo 6

Resolver $4 \frac{dy}{dx} + y = 2$

Solución

$$4 \frac{dy}{dx} + y = 2$$

$$4 \frac{dy}{dx} = 2 - y$$

$$\frac{4 dy}{2 - y} = dx$$

$$4 \int \frac{1}{2-y} dy = \int dx,$$

Integramos por sustitución haciendo $u = 2 - y \quad du = -dy$.

$$-4 \int \frac{1}{u} du = x + c$$

$$-4 \ln|u| = x + c$$

$$-4 \ln|2 - y| = x + c$$

$$\ln|2 - y| = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}c$$

$$e^{\ln|2-y|} = e^{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}c}$$

$$2 - y = e^{-\frac{1}{4}x} \cdot e^{-\frac{1}{4}c}$$

$$2 - y = c e^{-\frac{1}{4}x} \text{ con } e^{-\frac{1}{4}c} = c$$

$$y = 2 + c e^{-1/4 x}$$

Ejemplo 7

Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{4x\sqrt{1+y^2}}{y}$, $y > 0$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x\sqrt{1+y^2}}{y}$$

$$\frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = 4x dx$$

$$\int \frac{y}{(1+y^2)^{1/2}} dy = 4 \int x dx \rightarrow \begin{cases} u = 1 + y^2 \\ du = 2y dy \\ dy = \frac{du}{2y} \end{cases}$$

$$\int \frac{y}{u^{1/2}} \frac{du}{2y} = 2x^2 + c$$

$$\frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = 2x^2 + c$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2)u^{1/2} = 2x^2 + c$$

$$u^{1/2} = 2x^2 + c$$

$$(1 + y^2)^{1/2} = 2x^2 + c$$

$$1 + y^2 = (2x^2 + c)^2$$

$$y^2 = (2x^2 + c)^2 - 1$$

$$y = \sqrt{(2x^2 + c)^2 - 1}$$

3.3. Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales

3.3.1. Crecimiento poblacional

Un modelo de crecimiento poblacional asume que la rapidez con que crece una población de individuos por unidad de tiempo es proporcional al tamaño de la población, lo cual puede expresarse matemáticamente como $\frac{dN}{dt} = kN$, donde N es el tamaño actual de la población, $\frac{dN}{dt}$ es la rapidez de crecimiento y k se conoce como constante de crecimiento y puede especificarse a partir de las condiciones mismas del problema.

Al resolver la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt} = kN$, se obtiene la llamada:

“Ley de Crecimiento Exponencial” $N = N_0 e^{kt}$; donde N_0 es la población inicial cuando $t = 0$

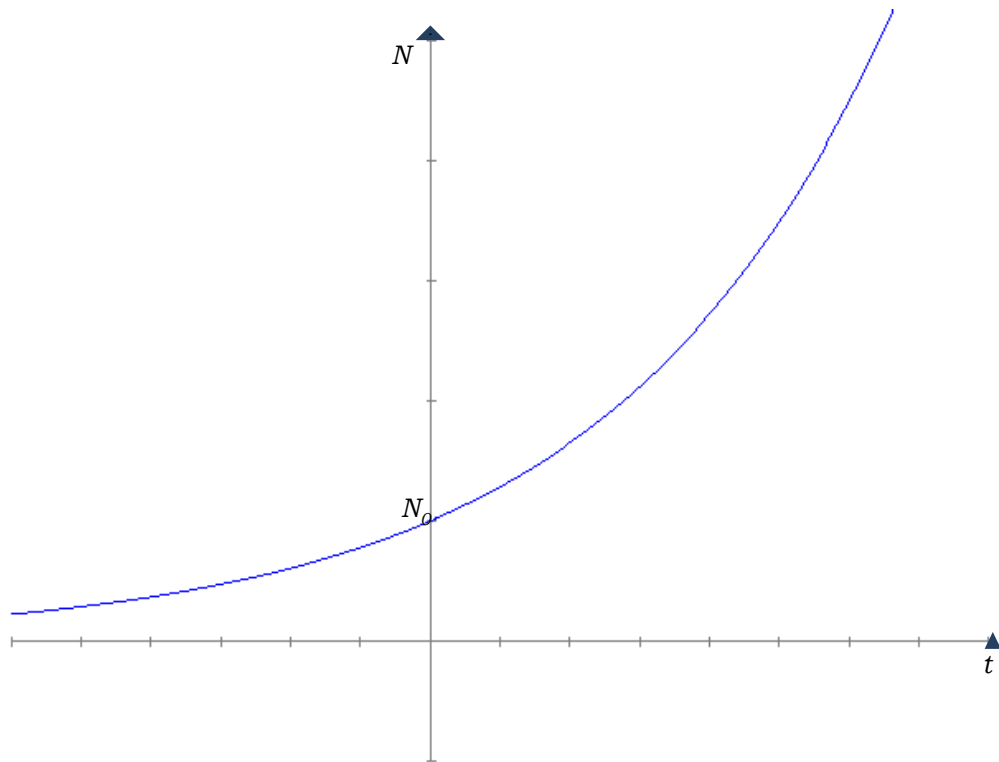


Figura 3.1

Si k es positiva, la cantidad sigue una ley de crecimiento exponencial.

Si k es negativa, la cantidad sigue una ley de decaimiento exponencial.

Ejemplo 8

La población de la ciudad de Caracas era de 3 millones de habitantes en 1991 y de 4 millones en el 2000. Suponga una ley de crecimiento exponencial para determinar la población que se espera para el año 2010.

Solución

Si medimos el tiempo a partir de 1991, cuando $t = 0$, entonces $N_0 = 3$ millones. Como en el año 2000 la población era de 4 millones, se tiene la condición inicial $N = 4$, cuando $t = 10$. Aplicando esta condición podemos encontrar el valor de la constante de crecimiento:

$$N = N_0 e^{kt}$$

$$4 = 3 e^{k(10)}$$

$$\frac{4}{3} = e^{10k}$$

$$\ln \frac{4}{3} = \ln e^{10k}$$

$$\ln \frac{4}{3} = 10k$$

$$k = \frac{\ln \frac{4}{3}}{10} \rightarrow k \approx 0,02877$$

La ley de crecimiento poblacional en Caracas es $N(t) = 3 e^{0,02877t}$, donde N está expresada en millones de habitantes y t los años a partir de 1991. Particularmente para el año 2010, cuando $t = 20$, la población que predice este modelo es:

$$N(20) = 3 e^{0,02877(20)} \approx 5,33 \text{ millones de habitantes}$$

3.3.2. Decaimiento Radiactivo

La razón a la que un elemento radiactivo decae en un tiempo cualquiera es proporcional a la cantidad presente de ese elemento. Si N es la cantidad de sustancia radiactiva en el tiempo t , entonces la tasa de decaimiento está dada por:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

La cantidad positiva λ (lambda), se llama constante de decaimiento y el signo menos indica que $N \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por tanto se tiene un decaimiento exponencial.

Si resolvemos la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, obtenemos la siguiente solución:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Si $t = 0$, entonces $N = N_0$, por lo que N_0 representa la cantidad de sustancia radiactiva presente cuando $t = 0$.

El tiempo que se requiere para que una sustancia radiactiva se reduzca a la mitad se llama Vida Media de la sustancia y está dada por:

$$\text{Vida Media} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,69315}{\lambda}$$

Ejemplo 9

Si después de 100 segundos queda el **30%** de la cantidad inicial de una muestra radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento radiactivo.

Solución

Cuando $t = 0 \rightarrow N = N_0$ y si $t = 100 \rightarrow N = 0,30N_0$, luego

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$0,30 N_0 = N_0 e^{-\lambda(100)}$$

$$0,3 = e^{-100 \lambda}$$

$$\ln 0,3 = \ln e^{-100\lambda}$$

$$-100 \lambda = \ln 0,3$$

$$\lambda = 0,01203$$

Por tanto

$$N = N_0 e^{-0,01203t}$$

La vida media está dada por:

$$\text{Vida Media} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,69314}{0,01203} \approx 57,6 \text{ segundos}$$

3.3.3. Crecimiento Logístico

Es claro que una población no puede crecer indefinidamente, por lo que el modelo de crecimiento exponencial se ajustará sólo en cierto intervalo de tiempo, y la tasa de crecimiento terminará disminuyendo. Si existe un número M que representa el máximo tamaño al que la población se puede acercar, entonces la función de crecimiento esperado sería como se muestra en la figura

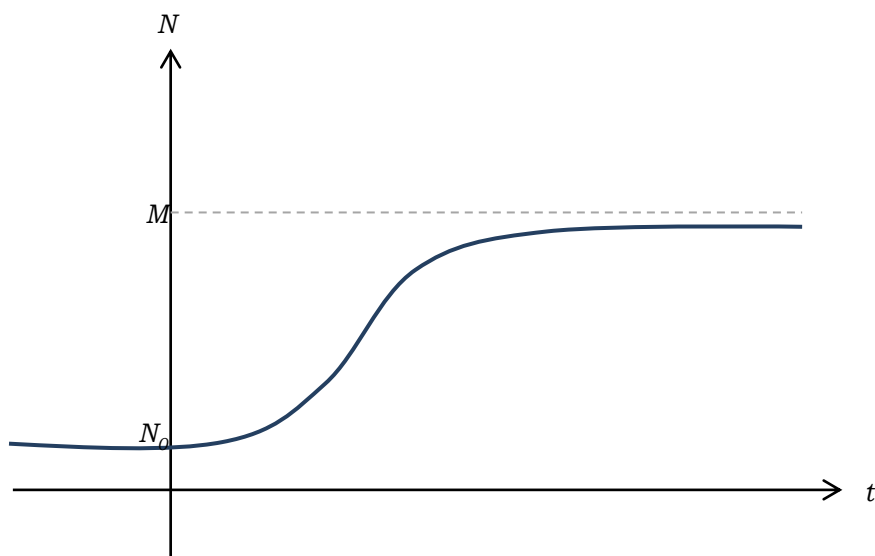


Figura 3.2

Para encontrar la forma funcional necesitamos las siguientes condiciones:

1. $\frac{dN}{dt} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$
2. $N \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow \infty$
3. $\frac{dN}{dt} \rightarrow kN$ cuando $N < M$

Este modelo se obtiene multiplicando el lado derecho de la ecuación $\frac{dN}{dt} = kN$ por el factor $\frac{M-N}{M}$, de manera que el modelo de crecimiento logístico pueda expresarse con la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = kN \left(\frac{M - N}{M} \right)$$

O más sencillamente, como

$$\frac{dN}{dt} = kN (M - N) \text{ donde } k = \frac{k}{M}$$

La solución de esta ecuación diferencial requiere de la integración por fracciones parciales o el uso de la siguiente identidad:

$$\frac{1}{y(a - y)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a - y} \right)$$

La solución de la ecuación de crecimiento logístico $\frac{dN}{dt} = kN(M - N)$ es:

$$N = \frac{M}{1 + c e^{-bt}} \text{ (c, b constantes)}$$

Esta solución se denomina Función Logística o Función Logística de Verhuist- Pearl

Ejemplo 10

Debido a limitaciones de espacio, el número máximo de socios que puede tener cierto club es de 1200. Hace un año, el número inicial de socios era de 70 y ahora es de 150. Si el número de socios crece como una función logística. ¿Cuántos socios habrá dentro de 5 años?

Solución

La función logística es:

$$N = \frac{M}{1 + c e^{-bt}}$$

Donde el número máximo de socios es $M = 1200$. Además, tenemos dos condiciones: $N(0) = 70$ $N(1) = 150$

Sustituyendo la primera condición se tiene

$$70 = \frac{1200}{1 + c e^{-b(0)}}$$

$$70(1 + c) = 1200$$

$$1 + c = \frac{1200}{70}$$

$$c = 17,143 - 1$$

$$c = 16,143$$

Sustituyendo ahora la segunda condición, tenemos

$$150 = \frac{1200}{1 + 16,143 e^{-b(1)}}$$

$$16,143 e^{-b} + 1 = \frac{1200}{150}$$

$$16,143 e^{-b} = 8 - 1$$

$$e^{-b} = 0,4336$$

$$\ln e^{-b} = \ln 0,4336$$

$$-b = -0,8356$$

$$b = 0,8356$$

Entonces la función de crecimiento logístico es

$$N = \frac{1200}{1 + 16,143 e^{-0,8356 t}}$$

El número de socios para dentro de 5 años será:

$$N(5) = \frac{1200}{1 + 16,143 e^{-0,8356(5)}}$$

$$N(5) = 962 \text{ socios.}$$

3.4. Elasticidad de Demanda

La elasticidad —precio de un producto— es un parámetro que mide la sensibilidad de la cantidad demandada frente a un cambio en el precio de un producto; así, por ejemplo, si un incremento de 10 % en el precio hace que la cantidad demandada caiga también en 10 %, decimos que la elasticidad es unitaria, pero si un incremento de 10 % en el precio ocasiona un decremento porcentualmente superior decimos que la demanda es elástica y, en caso contrario, se dice que la demanda es inelástica o rígida.

Matemáticamente, la elasticidad puntual η se define como:

$$\eta = \frac{p/q}{dp/dq}$$

También podemos escribir esta ecuación como:

$$\eta \frac{dp}{dq} = \frac{p}{q}$$

Esta es una ecuación diferencial cuya solución produce la función de demanda

$$p = f(q)$$

Ejemplo 11

La elasticidad de demanda de cierto artículo es $\eta = -0,5$. Determine la función de demanda si se venden 500 artículos cuando el precio unitario es 4 Bf.

Solución

Sabemos que

$$\eta \frac{dp}{dq} = \frac{p}{q}$$

Entonces,

$$-0,5 \frac{dp}{dq} = \frac{p}{q}$$

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{p}{0,5q}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{0,5q}$$

$$\int \frac{1}{p} dp = -2 \int \frac{1}{q} dq$$

$$\ln p = -2 \ln q + c$$

$$e^{\ln p} = e^{-2 \ln q + c}$$

$$p = \frac{c}{q^2}$$

La condición inicial $p = 4$ cuando $q = 500$, implica que

$$4 = \frac{c}{(500)^2}$$

$$c = 1.000.000$$

Entonces la función de demanda es:

$$p = \frac{1.000.000}{q^2}$$

3.5. Ejercicios y Problemas de Aplicación sobre Ecuaciones Diferenciales

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x}{y}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{1+x^2}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2}{3y^2}$

4. $\frac{dy}{dx} = e^y x$

5. $\frac{dx}{dt} = \frac{xt}{2t+1}$

6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

7. $\frac{dy}{dx} = xy^2$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}$ $y(1) = 1$
10. $e^y \frac{dy}{dx} - x^2 = 0$ $y(0) = 0$
11. $(3x^2 + 2)^3 \frac{dy}{dx} - xy^2 = 0$ $y(0) = 1,5$
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x\sqrt{1+y^2}}{y}$; $y > 0$; $y(1) = \sqrt{8}$
13. $2 \frac{dy}{dx} = \frac{x e^{-y}}{\sqrt{x^2+3}}$ $y(1) = 0$
14. $\frac{dy}{dx} - 3x \sqrt{x^2 + 1} = 0$
15. $\frac{dx}{dt} = xt \sqrt{t + 1}$ $x = 1$ cuando $t = 0$
16. La población mundial en el año 1930 era aproximadamente 2000 millones de habitantes y en 1960 de 3000 millones. Suponiendo una ley de crecimiento exponencial, determine cuál era la población proyectada para el año 2000.
17. Si se supone una ley de crecimiento exponencial, ¿en cuánto tiempo se triplicará una población que se duplica en 40 años?
18. En cierta ciudad, la razón a la que la población crece en cualquier tiempo, es proporcional al tamaño de la población. Si el tamaño era de 125.000 en 1970 y de 140.000 en 1990, ¿cuál es la población esperada para el año 2010?
19. Si después de 50 días queda el 60 % de una sustancia radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.
20. Suponga que una población tiene un crecimiento exponencial dado por $\frac{dN}{dt} = kN$ para $t \geq t_0$. Suponga también que $N = N_0$ cuando $t = t_0$. Encuentre N, el tamaño de la población en el tiempo t.
21. En un bosque ocurre el depósito natural de basura, tal como ramas, y hojas caídas, animales muertos, etc. Sea $A = A(t)$ la cantidad de basura presente en el tiempo t, donde $A(t)$ se expresa en gramos por metro cuadrado y t está en años. Suponga que no hay basura en $t = 0$, es decir $A(0) = 0$. Suponga que: a) la basura cae al suelo continuamente a razón constante de 200 gramos por metro

cuadrado cada año; b) La basura acumulada se descompone continuamente a razón del 50 % de la cantidad presente por año ($0,50A$). La diferencia de las dos tasas es la razón de cambio de la cantidad presente de basura con respecto al tiempo, es decir

$$\left(\begin{array}{l} \text{tasa de cambio de} \\ \text{la basura presente} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{tasa de} \\ \text{caída al suelo} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{tasa de} \\ \text{descomposición} \end{array} \right)$$

Por tanto,

$$\frac{dA}{dt} = 200 - 0,50x$$

- a) despeje A al gramo más cercano, b) determine la cantidad de basura por metro cuadrado después de un año.
22. El año pasado la matrícula de cierto colegio era de 10.000 estudiantes y este año es de 11.000. Si la matrícula de este colegio sigue un crecimiento logístico y puede albergar como máximo 20.000 estudiantes. ¿Cuál será la matrícula esperada para el próximo año?
23. En una ciudad de 50.000 habitantes, la Corporación de Salud detecta un brote de gripe. Hay 200 casos al inicio y 500 una semana después. Suponiendo una ley de crecimiento logístico, determine el número de infectados a las 4 semanas que de detectó el brote de gripe.
24. En una universidad de 40.000 estudiantes, el rectorado sostiene reuniones para analizar la idea de traer una banda sinfónica para el fin de semana de regreso a clases. Antes de anunciar oficialmente los planes, el rectorado difunde la información acerca del evento como un rumor. Al final de una semana, 100 personas conocen el rumor. Suponga un crecimiento logístico. ¿Cuánta gente conocerá el rumor después de dos semanas?
25. En una universidad que tiene una población electoral de 10.000 personas (profesores, estudiantes, obreros, personal administrativo) se realizarán elecciones para elegir al Decano en el año 2013. Unos de los aspirantes a dicho cargo poseen 800 votos al comenzar la campaña (2011). Un año después posee 1500 votos. Suponga un crecimiento logístico, estime el número de votos dos años después de que comenzó la campaña (2013)
26. Un pequeño pueblo decide realizar una colecta para comprar un camión de bomberos que cuesta Bf. 200.000. La cantidad inicial es de Bf. 50.000. Con base

a colectas anteriores, se determinó que t meses después del inicio la razón $\frac{dx}{dt}$ con la que se recibe dinero es proporcional a la diferencia entre la cantidad deseada de Bf. 200.000 y la cantidad total x en el fondo en ese momento. Después de un mes se tiene Bf. 100.000 en el fondo. ¿Cuánto se tendrá después de 3 meses?

27. El gobierno de un país decide reemplazar billetes viejos en circulación por billetes nuevos, por lo cual proporciona a los bancos la cantidad suficiente de billetes nuevos, de tal manera que a cada persona que llegue al banco a cobrar se le pagará únicamente con billetes nuevos, y los billetes viejos recogidos irán al banco central del país para ser destruidos. A medida que haya más billetes nuevos en circulación, menos billetes viejos llegarán a los bancos para ser destruidos. Suponga que la rapidez con la que se está destruyendo el papel moneda viejo para reemplazarlo por nuevo es proporcional a la cantidad de papel viejo en circulación. Es decir, $\frac{dy}{dt} = ky$, donde y es la cantidad de papel viejo existente en el tiempo t . Si al inicio existe 200 millones de dólares circulando en billetes viejos y cada semana se pagan 20 millones (en papel viejo o nuevo) es decir, 10 % del total en circulación, entonces, después de la primera semana sólo queda 90 % de billetes viejos en circulación porque al inicio sólo había billetes viejos. Determine el tiempo en semanas necesario para reemplazar el 95 % de los billetes viejos por nuevos, de manera que solo haya en circulación 5 % de los billetes viejos.
28. Cuando un capital gana intereses que se compone continuamente, la rapidez de crecimiento de dicho capital es proporcional al monto del capital $k(t)$ en todo momento. Es decir, $\frac{dk}{dt} = rk$, donde r es la tasa nominal. Si en estas condiciones se invierten Bf. 50.000 a una tasa de interés de 15 % ($r = 0,15$), determine el monto del capital a los 3 años.
29. La elasticidad de demanda de cierto producto es $\eta = -2$. Encuentre la función de demanda si $q = 4$ cuando $p = 0,5$
30. Determine la función de demanda, cuya elasticidad es $\eta = -1,5$ y se venden 40 unidades a un precio $p = 2$.

CAPÍTULO IV: Funciones de Varias Variables

4.1. Definiciones Básicas

Hemos trabajado con funciones que dependen de una sola variable, sin embargo, en la práctica son pocas las situaciones que se pueden describir por medio de una sola variable. Por ejemplo, la cantidad demandada de un producto no depende exclusivamente del precio que se fije para el mismo, también depende entre otras cosas, de la inversión que se haga en publicidad, en canales de distribución, etc. Esta situación la podemos representar como una función

$$q = f(P, A, B)$$

Donde la cantidad demandada es q , el precio es p , los gastos en publicidad se representan por A y los gastos de distribución del producto por la variable B .

En un modelo simplificado de una función de producción podemos considerar que ésta depende de la cantidad utilizada de mano de obra y de capital, es decir:

$$P = g(L, K)$$

Donde P representa el nivel de producción, L el número de unidades utilizadas de mano de obra y K las unidades de capital.

Estos son dos ejemplos de una diversidad de situaciones que requieren de funciones de dos o más variables para su explicación.

Definición Una función de n variables es aquella cuyo dominio consta de n - ordenadas $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de números reales y su imagen es un subconjunto de números reales.

Suponga que un almacén vende dos artículos, A y B . Entonces, el ingreso total depende de las unidades vendidas tanto de A como de B . En la siguiente tabla se representa un modelo que indica el ingreso total por la venta de los artículos. Por ejemplo, cuando se venden 3 unidades de A y 5 de B , el ingreso total I es 25. En esta situación lo que estamos haciendo es asociar al número 25 con el par ordenado $(3,5)$. El primer elemento del par ordenado, 3, representa el número de unidades vendidas de A , mientras que el segundo elemento del par, 5, representa el número de unidades vendidas de B , es decir

$$(3,5) \rightarrow 25$$

Tabla 4.1

Número de unidades Vendidas de A	Número de unidades Vendidas de B	Ingreso Total r
3	5	25
10	8	40
6	4	28
8	4	35

Esta correspondencia puede considerarse como una relación Entrada - Salida, donde las entradas son los pares ordenados (3,5) (10,8) (6,4) (8,4) y las salidas son los números reales asociados con una única entrada, es decir:

$$f(3,5) = 17$$

$$f(10,8) = 40$$

$$f(6,4) = 28$$

$$f(8,4) = 35$$

En notación funcional el modelo de ingreso total descrito en la tabla 4.1, puede describirse mediante $r = f(a, b)$, que es una función de dos variables independientes a y b, y una variable dependiente r.

Consideremos la siguiente ecuación $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$, podemos ver que z es una función de x e y.

Definición El dominio de una función de n variables es el conjunto máximo de puntos de la forma $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ para los cuales la fórmula que define a dicha función tiene sentido. Por ejemplo, el dominio de $f(x, y, z) = 2x + 3y + 5z$ o de $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ es el conjunto de todas las tétradas posibles, respectivamente, porque estas fórmulas se pueden aplicar para cualesquiera valores de x, y, z o de x_1, x_2, x_3, x_4 .

El dominio de la función $h(x, y) = \sqrt{x + y}$ es un conjunto de puntos tal que $x + y \geq 0$, porque la raíz de un número negativo no existe en los números reales.

El dominio de la función $Z = f(x, y) = \frac{5}{x^2 + y^2}$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) para los cuales la ecuación está definida, cuando el primero y segundo elementos de (x, y) se sustituyen por x e y , respectivamente, en la ecuación. Por tanto, el dominio de Z es el conjunto de todos los pares ordenados excepto $(0, 0)$

Definición La imagen de una función de varias variables es el subconjunto de números reales que se obtienen al aplicar la fórmula que define la regla de correspondencia de la función. Por ejemplo, la imagen de la función $f(x, y, z) = 2x + 3y + 5z$ es el conjunto de todos los números reales, porque se obtiene cualquier número real al aplicar la fórmula; en cambio, la imagen de $g = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ es el conjunto de los números reales no negativos (R^+) porque con una suma de cuadrados de números reales jamás se puede tener un número negativo. Igualmente, la imagen de $h(x, y) = \sqrt{x + y}$ es el conjunto de números reales positivos y la imagen de $Z = f(x, y) = \frac{5}{x^2 + y^2}$ es el conjunto de reales con $x^2 + y^2 \neq 0$.

Es posible tener una representación gráfica de una función de dos variables en un espacio tridimensional en donde se reserva el plano xy para los elementos del dominio y en el eje z estará la imagen de cada punto del dominio. Para hacer esta representación, es necesario tener en cuenta las leyes de la perspectiva para representar en dos dimensiones una situación que está en tres. Por ejemplo, para localizar el punto $(3, 4, 5)$ buscamos primero las intersecciones con los ejes, es decir, los puntos $(3, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ y $(0, 0, 5)$ y completamos una caja rectangular donde el punto buscado es el opuesto al origen, como se muestra en la figura.

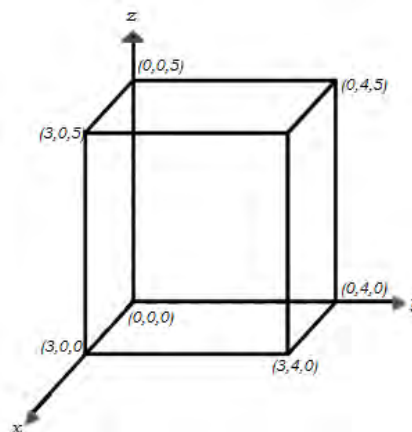


Figura 4.1

Ejemplo 1

Bosqueje el plano $2x + 3y + z = 6$

Solución

El plano interseca al eje x cuando $y = 0$ e $z = 0$, por lo tanto $x = 3$

Si $x = 0$ y $z = 0$, entonces $y = 2$

Si $x = 0$ y $y = 0$, entonces $z = 6$

Por lo tanto las intersecciones con los ejes son: $(3,0,0)(0,2,0)(0,0,6)$

Después de graficar estos puntos, se pasa un plano por ellos, así:

Para bosquejar una superficie, lo que hacemos es graficar sus trazas (intersecciones de la superficie con los planos coordenados). Es decir, para el plano $2x + 3y + z = 6$, la traza en el plano xy se obtiene al hacer $z = 0$, de esto resulta $2x + 3y = 6$ que es la ecuación de una recta en el plano xy . En forma similar, al hacer $x = 0$ se obtiene la traza en el plano yz , la recta $3y + z = 6$. La Traza xz es la recta $2x + z = 6$.

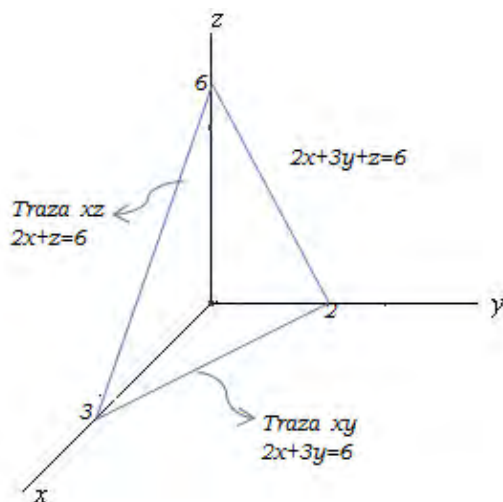


Figura 4.2

Ejemplo 2

Bosqueje la superficie $2x + z = 4$

Solución

Las intersecciones x e z son $(2,0,0)$ y $(0,0,4)$ y no hay intersección y , porque x y z no pueden ser cero al mismo tiempo.

La traza xz será $2x + z = 4 (y = 0)$

La intersección de la superficie con cualquier plano $y = k$ es también $2x + z = 4$, luego

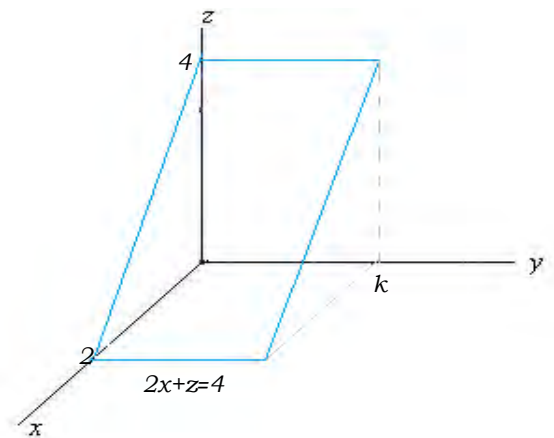


Figura 4.3

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ó $(f_y)_x = f_{yx}$ significa que primero derivamos respecto a y , y posteriormente respecto a x .

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ó $(f_x)_x = f_{xx}$ significa que derivamos las dos veces respecto a la variable x .

4.2 Derivadas Parciales

La derivada parcial de una función $f(x, y)$, respecto a x , denotado por $\frac{\partial f}{\partial x}$ es la función dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

siempre que el límite exista. De igual manera, la derivada parcial respecto a y es:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Otra notación para las derivadas parciales es:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y).$$

La definición misma de las derivadas parciales sugiere un método para calcularlas, es decir, en la derivada parcial con respecto a x, la variable y permanece constante, y con respecto a y, permanece constante la variable x. Por lo tanto, para calcular una derivada parcial respecto a una variable, se efectúa una derivación normal respecto a la variable de interés, y las demás variables se consideran constantes.

Ejemplo 3

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ si $f(x, y) = 3x^2y^4 + 2xy - 3x + 2y + 4$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^4 + 2y - 3 \quad (\text{y es constante})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^3 + 2x + 2 \quad (\text{x es constante})$$

Ejemplo 4

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ si $f(x, y, z) = x^3y^2z + 3xyz^2 - 2xy + 3$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2z + 3yz^2 - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz + 3xz^2 - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^3y^2 + 6xyz$$

Ejemplo 5

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ si $f(x, y) = \frac{x+2x^2y^3}{2y-x}$

Solución

Aplicando la regla del cociente obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(1 + 4xy^3)(2y - x) - (x + 2x^2y^3)(-1)}{(2y - x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y - x + 8xy^4 - 4x^2y^3 + x + 2x^2y^3}{(2y - x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y + 8xy^4 - 2x^2y^3}{(2y - x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(6x^2y^2)(2y - x) - (x + 2xy)(4)}{(2y - x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{12x^2y^3 - 6x^3y^2 - 2x - 4x^2y^3}{(2y - x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{8x^2y^3 - 6x^3y^2 - 2x}{(2y - x)^2}$$

Ejemplo 6

Si $f(x, y, z, w) = \frac{xyw}{(xz^2 + y^2z)^2}$, encuentre $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \big|_{(0,1,1,1)}$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(xw)(xz^2 + y^2z) - (xyw)(2yz)}{(xz^2 + y^2z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2z^2w + xy^2zw - 2xy^2zw}{(xz^2 + y^2z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xzw(xz + y^2 - 2y^2)}{(xz^2 + y^2z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(xzw)(xz - y^2)}{(xz^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(xzw)(xz - y^2)}{z^2(xz + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(xw)(xz - y^2)}{z(xz + y^2)^2}$$

Para calcular $\frac{\partial f}{\partial z}$ se puede escribir a f como $f(x, y, z, w) = (xyw)(xz^2 + y^2z)^{-1}$

Utilizando la regla del producto, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (0)(xz^2 + y^2z)^{-1} + (xyw)(-1)(xz^2 + y^2z)^{-2}(2xz + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xyw (xz^2 + y^2z)^{-2}(2xz + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-(xyw)(2xz + y^2)}{(xz^2 + y^2z)^2} \Big|_{(0,1,1,1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-(0)(1)(1)(2(0)(1) + (1)^2)}{[(0)(1) + (1)^2(1)]^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{0}{1} = 0$$

4.3. Aplicaciones de las Derivadas Parciales

4.3.1. Las Derivadas Parciales como Tasa de Cambio

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables, la derivada parcial respecto a x , $\frac{\partial z}{\partial x}$ es la pendiente de la recta tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en la dirección x , por lo que podemos interpretar a $\frac{\partial z}{\partial x}$ como la razón de cambio de la variable z respecto a la variable x . Lo análogo podemos afirmar para la variable y .

$\frac{\partial z}{\partial x}$ es la razón de cambio de z respecto a x cuando la variable y permanece constante.

$\frac{\partial z}{\partial y}$ es la razón de cambio de z respecto a y cuando la variable x permanece constante.

4.3.2. Costos Marginales

Supongamos que una empresa produce dos artículos (1,2) y que éstos compiten dentro de la empresa en la utilización de recursos, de manera que una variación en la producción de uno puede afectar la producción del otro; entonces al definir el costo marginal de un artículo debemos considerar que la producción del otro permanece constante. De esta manera, si $c(q_1, q_2)$ es la función de costos conjunta de producir q_1 unidades del producto 1 y q_2 unidades del producto 2, entonces las derivadas parciales pueden interpretarse como:

$\frac{\partial c}{\partial q_1} \Big| (a, b)$, es el costo de producir una unidad adicional del producto 1 cuando el nivel de producción es $q_1 = a$, y el nivel de producción del artículo 2 permanece constante en $q_2 = b$

$\frac{\partial c}{\partial q_2} \Big| (a, b)$ es el costo de producir una unidad adicional del producto 2 cuando el nivel de producción es $q_2 = b$, y el nivel de producción del artículo 1 permanece constante en $q_1 = a$

Ejemplo 7

Una compañía fabrica dos tipos de aceite para motor, el normal y el óptimo. Suponga que la función de costos conjuntos de producir x litros del modelo normal y y litros del modelo óptimo por semana es: $c = (x, y) = 7x + 0,3y^2 + 2y + 900$ donde c se expresa en bolívares fuertes. Determine los costos marginales de $\frac{\partial c}{\partial x}$ y $\frac{\partial c}{\partial y}$ cuando $x = 20$ y $y = 30$

Solución

Los costos marginales son:

$$\frac{\partial c}{\partial x} \Big| (20, 30) = 7$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} \Big| (20, 30) = 0,6y + 2 \Big| (20, 30) = [0,6(30) + 2] = 20$$

De los resultados obtenidos se deduce:

- Al aumentar la producción del modelo de aceite normal de 20 a 21, mientras se mantiene en 30 la producción del modelo óptimo, aumentan los costos aproximadamente en 7 Bf. De hecho como $\frac{\partial c}{\partial x}$ es una función constante, el costo marginal con respecto a x es de 7 Bf en todos los niveles de producción.
- Al aumentar la producción del modelo de aceite para motor óptimo de 30 a 31, mientras se mantiene en 20 la producción del modelo normal, aumentan los costos aproximadamente en 20 Bf.

Ejemplo 8

Una empresa fabrica dos tipos de productos A y B. La función de costos conjuntos de producir x unidades de A y y unidades de B, está dado por:

$c(x, y) = 3x^2 + 3250x + 3750y + 50000$, donde c está dada en bolívars fuertes. Determine los costos marginales cuando $x = 20$ y $y = 10$. Interprete los resultados

Solución

Los costos marginales son:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 6x + 500$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 3750$$

Evalutando en $x = 20$ y $y = 10$ se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{(20,10)} = 6(20) + 500 = 6620$$

Cuando se han producido 20 unidades del artículo A y 10 unidades del artículo B, costará 6620 Bf incrementar en una unidad la producción de A, manteniendo constante en 10 unidades la producción de B.

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 3750$$

Cuando se han producido 20 unidades del artículo A y 10 unidades del artículo B, costará 3750 Bf incrementar en una unidad la producción de B, manteniendo constante en 20 unidades la producción de A.

4.3.3. Productividad Marginal

En un modelo simplificado de función de producción se considera que la cantidad producida Q de un producto depende únicamente de dos factores: capital y trabajo. Supongamos que L es el número de unidades que se utilizan para la mano de obra y K el número de unidades de capital (inversión en edificios, maquinaria y otras herramientas utilizadas en la producción), es decir: $Q = Q(L, K)$

Aquí se tiene una competencia entre la parte del presupuesto que se utiliza en mano de obra y la cantidad usada en capital. Las derivadas parciales de la función de producción podemos interpretarlas de la siguiente manera:

$\frac{\partial Q}{\partial L} | (L, K)$, representa el incremento en la producción cuando el número de unidades de mano de obra es L y se incrementa en una unidad manteniendo constante en K el número de unidades de capital, es decir. El presupuesto total que se incrementó en una unidad y se utilizó en mano de obra, se le conoce como “productividad marginal de la mano de obra”.

$\frac{\partial Q}{\partial K} | (L, K)$, representa el incremento en la producción cuando el número de unidades de capital K se incrementa en una unidad manteniendo constante en L el número de mano de obra, es decir, el presupuesto total se incrementó en una unidad y se utilizó al incrementar al capital. Esto se le conoce como “productividad marginal al capital”.

Ejemplo 9

Suponga que la función de producción de cierta industria es: $P = 50L^{0.4}K^{0.6}$

Donde P es la producción, L es el número de unidades de mano de obra y K es el número de unidades de capital. Encuentre las productividades marginales del trabajo y del capital cuando $L = 10$ y $K = 10$

Solución

La productividad marginal del trabajo es:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 50(0,4)L^{-0,6}K^{0,6} = 20 \left(\frac{K}{L}\right)^{0,6}, \text{ evaluando en } L = 10 \text{ y } K = 10, \text{ obtenemos}$$

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 20 \left(\frac{10}{10}\right)^{0,6} = 20$$

La interpretación de este problema es que una unidad más de trabajo produce 20 unidades adicionales de producto con 10 unidades de trabajo y 10 unidades de capital.

La productividad marginal del capital es:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 50(0,6)L^{0,4}K^{-0,4}, \text{ evaluando en } L = 10 \text{ y } K = 10, \text{ obtenemos}$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 30 \left(\frac{10}{10}\right)^{0,4} = 30$$

Y su interpretación es una unidad de capital produce 30 unidades adicionales de producto cuando se emplean 10 unidades de trabajo y 10 unidades de capital.

Ejemplo 10

La utilidad por hectárea en cierto cultivo de maíz es:

$U = 60L + 7,5S + 30F - 4,5L^2 - 1,5S^2 - 3F^2 - 6SF$, donde L es el costo de la mano de obra, F es el costo de los fertilizantes y S el costo de las semillas. Calcule las tres derivadas parciales, evalúelas en $L = 12$ $F = 6$ y $S = 5$ e interprete los resultados.

Solución

$$\frac{\partial U}{\partial L} = 60 - 9L, \text{ evaluando}$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = 60 - 9L \mid (12,6,5) = 60 - 9(12) = -48$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = 30 - 6F - 5S, \text{ evaluando}$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = 30 - 6F - 5S \mid (12,6,5) = 30 - 6(6) - 6(5) = -36$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = 7,5 - 3S - 6F, \text{ evaluando}$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = 7,5 - 3S - 6F \mid (12,6,5) = 30 - 3(5) - 6(6) = -21$$

Interpretación: La utilidad disminuye en 48 unidades si se aumenta en una unidad la cantidad de mano de obra; la utilidad disminuye en 36 unidades si se aumenta en una unidad la cantidad de fertilizantes, la utilidad disminuye en 21 unidades si se aumenta en una unidad la cantidad de semilla. Todo lo anterior se cumple, siempre y cuando las otras variables permanezcan constantes.

4.3.4. *Productos Competitivos y Productos Complementarios*

Ciertos productos pueden estar relacionados de tal manera, que las variables en el precio de uno afectan a la demanda del otro. Supongamos que las funciones de demanda para los productos A y B son:

$$q_A = f(P_A, P_B) \text{ y } q_B = f(P_A, P_B), \text{ entonces,}$$

$\frac{\partial q_A}{\partial P_A}$, es la demanda marginal del artículo A con respecto a su propio precio P_A .

$\frac{\partial q_A}{\partial P_B}$, es la demanda marginal del artículo A con respecto al precio P_B .

$\frac{\partial q_B}{\partial P_A}$, es la demanda marginal del artículo B con respecto al precio P_A .

$\frac{\partial q_B}{\partial P_B}$, es la demanda marginal del artículo B con respecto a su propio precio P_B .

Si consideramos artículos con demanda normal, entonces

$\frac{\partial q_A}{\partial P_A} < 0$ y $\frac{\partial q_B}{\partial P_B} < 0$ Ya que un incremento en el precio ocasiona que la cantidad demandada disminuya y una disminución en el precio causa que la demanda aumente, es decir, hay una relación inversa entre la cantidad demandada de un producto y su propio precio.

Sin embargo $\frac{\partial q_A}{\partial P_B}$ y $\frac{\partial q_B}{\partial P_A}$ pueden ser positivas o negativas. Si ambas $\frac{\partial q_A}{\partial P_B}$ y $\frac{\partial q_B}{\partial P_A}$ son positivas, se dice que los productos son “sustitutos o competitivos”, es decir, si ocurre un incremento en el precio de A manteniendo constante el precio de B, entonces se incrementará la demanda de B y viceversa. Podemos decir que cuando los productos son competitivos hay una relación directa entre el precio de uno y la demanda del otro. Tal es el caso, por ejemplo de la leche con crema y la descremada; si el precio de la leche con crema se incrementa y el precio de la leche descremada no, entonces se incrementará la demanda de la leche descremada, en detrimento de la demanda de la leche con crema. En cambio, si ambas $\frac{\partial q_A}{\partial P_B}$ y $\frac{\partial q_B}{\partial P_A}$ son negativas, entonces se dice que los productos son “complementarios” y, en este caso, habrá una relación inversa entre el precio de un producto y la demanda del otro; por ejemplo, se podría esperar que si se incrementa demasiado el precio de los planes de telefonía celular, esto desataría la compra de teléfonos celulares y viceversa.

Ejemplo 11

Las funciones de demanda para los productos A y B están dados por:

$q_A = 150 + 2,5P_B - 3,5P_A^2$ y $q_B = 125 - 4,5P_B + P_A$, donde las cantidades demandadas son q_A y q_B y los precios son P_A y P_B para los productos A y B, respectivamente.

- Encuentre las cuatro funciones de demanda marginal
- Determine si los productos son competitivos o complementarios entre sí.

Solución

a) Las demandas marginales son:

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -7P_A$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = -2,5$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = 1$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_B} = -4,5$$

b) Los productos son competitivos porque las demandas cruzadas son positivas, es decir, un incremento en el precio de un producto produce un efecto de sustitución que eleva la demanda del otro.

4.4. Derivadas Parciales de Orden Superior

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, también $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ son funciones de la misma variable x e y .

Si a estas nuevas funciones $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ las derivamos, estaríamos hablando de “segundas derivadas” de $f(x, y)$, y así podríamos continuar calculando terceras derivadas, cuartas derivadas, etc. La notación que se usa son:

$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ó $(f_x)_y = f_{xy}$ y significa que primero derivamos respecto a x , y posteriormente respecto a y .

Análogamente:

$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$ ó $(f_y)_y = f_{yy}$ significa que derivamos las dos veces respecto a la variable y .

En este manual trabajaremos con la siguiente hipótesis de continuidad:

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x}$ son continuas, entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} = \frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x}$, es decir que está derivada cruzada mixta, será la misma, independientemente del orden en que se realice.

Ejemplo 12

Encuentre las segundas derivadas de $f(x, y) = x^2y^4 - x^3y + 4xy - 3y$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 - 3x^2y + 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (2xy^4 - 3x^2y + 4y)$$

$$= 2y^4 - 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x} = \frac{\partial}{\partial_y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial_y} (2xy^4 - 3x^2y + 4y)$$

$$= 8xy^3 - 3x^2 + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^3 - x^3 + 4x - 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} (4x^2y^3 - x^3 + 4x - 3)$$

$$= 12x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_{xy}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial y} (4x^2y^3 - x^3 + 4x - 3) \\
 &= 8xy^3 - 3x^2 + 4
 \end{aligned}$$

Obsérvese que se cumple la igualdad de las derivadas parciales mixtas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} = \frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x}$$

Ejemplo 13

Determine $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x}$ si $f(x, y) = (2x - 3y)^3$

Solución

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= 3(2x - 3y)^2(2) \\
 &= 6(2x - 3y)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6(2x - 3y)(2) \\
 &= 24x - 36y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x} &= 6(2x - 3y)(-3) \\
 &= 54y - 36x
 \end{aligned}$$

Ejemplo 14

Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ si $f(x, y, z) = xy^2z^3$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial z} = 6xyz^2$$

4.4.1. Regla de la Cadena

Sea $Z = f(x, y)$ donde x e y son funciones de r y s dadas por:

$$x = x(r, s) \text{ y } y = y(r, s).$$

Si f, x e y tienen derivadas parciales continuas, entonces Z es una función de r y s , y

$$\frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Ejemplo 15

Si $Z = 5x + 3y$ $x = 2r + 3s$ $y = r - 2s$ Hallar $\frac{\partial Z}{\partial r}$, $\frac{\partial Z}{\partial s}$

Solución

Como x, y son funciones de r y s , entonces por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (5)(2) + (3)(1) \quad \frac{\partial z}{\partial s} = (5)(3) + (3)(-2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 13 \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = 9$$

Ejemplo 16

Si $z = (x^2 + xy^2)^3$ $x = r + s + t$ $y = 2r - 3s + 8t$ Hallar $\frac{\partial z}{\partial t}$

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = [(3)(x^2 + xy^2)^2(2x + y^2)](1) + [(3)(x^2 + xy^2)^2(2xy)](8)$$

$$= 3(x^2 + xy^2)^2(2x + y^2 + 16xy)$$

Ejemplo 17

Si $z = e^{xy}$ $x = r - 4s$ $y = r - s$ Hallar $\frac{\partial z}{\partial r}$ en términos de r y s

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= (ye^{xy})(1) + (xe^{xy})(1)$$

$$= (x + y)e^{xy}$$

Ejemplo 18

Para un fabricante de cámaras y películas, el costo total c de producir q_c cámaras y q_f rollos de películas está dado por: $c = 30q_c + 0,015q_cq_f + q_f + 900$. Las funciones de demanda para las cámaras y los rollos de películas están dados por:

$$q_c = \frac{9000}{P_c\sqrt{P_f}} \quad y \quad q_f = 2000 - P_c - 400P_f$$

Donde P_c es el precio por cámara y P_f el precio por rollo de película. Encuentre la tasa de cambio del costo total con respecto al precio de la cámara cuando $P_c = 50$ y $P_f = 2$

Solución

Primero hallamos $\frac{\partial c}{\partial P_c}$ por la regla de la cadena

$$\frac{\partial c}{\partial P_c} = \frac{\partial c}{\partial q_c} \frac{\partial q_c}{\partial P_c} + \frac{\partial c}{\partial q_f} \frac{\partial q_f}{\partial P_c}$$

$$\frac{\partial c}{\partial P_c} = (30 + 0,015q_f) \left[\frac{-9000}{P_c^2\sqrt{P_f}} \right] + (0,015q_c + 1)(-1)$$

Cuando $P_c = 50$ y $P_f = 2$, tenemos

$$q_c = 90\sqrt{2} \quad y \quad q_f = 1150, \quad \text{luego}$$

$$\frac{\partial c}{\partial P_c} \Big|_{(50,2)} = (30 + 0,015(1150)) \left[\frac{-9000}{(50)^2\sqrt{2}} \right] + (0,015(90\sqrt{2}) + 1)(-1)$$

$$= -123,2$$

4.5. Máximos y Mínimos sin restricciones**Definición**

Se dice que una función $f(x, y)$ tiene un máximo relativo en un punto (x_0, y_0) si para cada punto (x, y) suficientemente cercano a (x_0, y_0) se tiene que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$

Definición

Se dice que una función $f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en un punto (x_0, y_0) si para cada punto (x, y) suficientemente cercano a (x_0, y_0) se tiene que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$

La idea geométrica de un punto máximo o mínimo puede verse en la figura 4.4

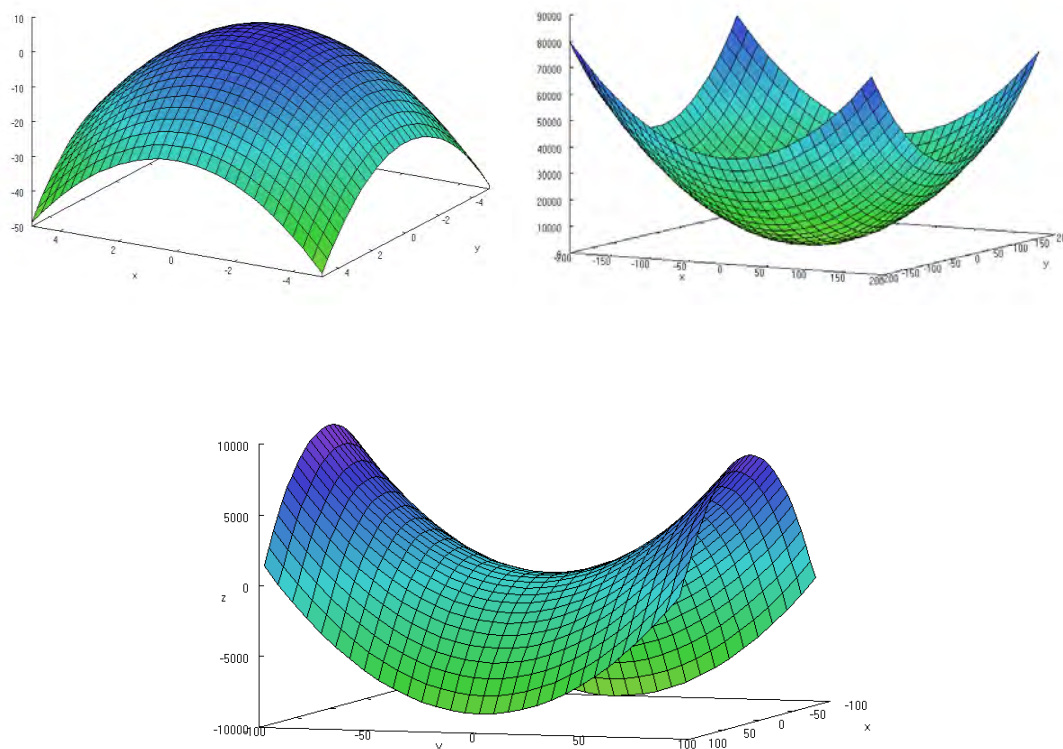


Figura 4.4

4.5.1. Puntos Críticos

Se llaman puntos críticos de una función $f(x, y)$ los puntos donde se anulan todas sus derivadas parciales, es decir, si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$

Un punto crítico puede ser máximo, mínimo o punto silla y se puede determinar de cuál se trata con el criterio de la segunda derivada que se resume de la siguiente manera

1. Se calculan todas las derivadas parciales f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}

2. Se construye la expresión $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ llamada “Determinante Hessiano”
3. Se evalúa al Hessiano en el punto crítico (a, b) y se decide de acuerdo con el siguiente criterio:

Si:

$D_{(a,b)} > 0$, $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(x, y)$ tiene un mínimo

$D_{(a,b)} > 0$, $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(x, y)$ tiene un máximo

$D_{(a,b)} < 0$, entonces $f(x, y)$ tiene un punto silla

$D_{(a,b)} = 0$, entonces el criterio no permite hacer conclusiones

Ejemplo 19

Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5x - 4y + xy$, determine los puntos críticos, máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

Solución

Calculamos los puntos críticos igualando a cero las derivadas parciales

$$f_x = 2x - 5 + y = 0$$

$f_y = 2y - 4 + x = 0$, del cual se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}, \text{ resolviendo se tiene } x = 2 \text{ y } y = 1, \text{ luego el punto crítico es } (2, 1)$$

Para decidir si se trata de un máximo, mínimo o un punto silla se calculan las segundas derivadas

$$f_{xx} = 2$$

$$f_{yy} = 2$$

$$f_{xy} = 1$$

El determinante hessiano está dado por $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$

$$D_{(2,1)} = (2)(2) - (1)^2$$

$$D_{(2,1)} = 3$$

Observamos que $D_{(2,1)} > 0$ y además $f_{xx}(2,1) = 2 > 0$, por lo que concluimos que f tiene un mínimo en $(2,1)$. El valor mínimo lo podemos encontrar evaluando la función en ese punto, así:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 5x - 4y + xy$$

$$f(x, y) = (2)^2 + (1)^2 - 5(2) - 4(1) + (2)(1)$$

$$f(x, y) = -7$$

Ejemplo 20

Determine los puntos críticos de la función $f(x, y) = 2x^3 + 4y^3 - 24x - 48y + 6$

Y clasifíquelos como máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

Solución

Calculamos los puntos críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 24 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12y^2 - 48 = 0$$

Despejando tenemos un par de ecuaciones independientes $x^2 = 4$ $y^2 = 4$, cuyas soluciones son $x = \pm 2$ $y = \pm 2$, como los resultados son independientes, los puntos críticos son: $(2,2)(-2, -2)(2, -2)(-2,2)$. Cada uno de estos pueden ser máximos, mínimos o puntos silla y debemos aplicarles la prueba de la segunda derivada.

Calculamos las segundas derivadas parciales

$$f_{xx} = 12x$$

$$f_{yy} = 24y$$

$$f_{xy} = 0$$

El determinante hessiano está dado por

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (12x)(24y) - (0)^2 = 288xy$$

Debemos evaluarlos en cada uno de los puntos críticos

$$D_{(2,2)} = 288(2)(2) > 0$$

$$D_{(-2,-2)} = 288(-2)(-2) > 0$$

$$D_{(-2,2)} = 288(-2)(2) < 0$$

$$D_{(2,-2)} = 288(2)(-2) < 0$$

Podemos concluir que hay un punto silla en $(-2,2)$ y en $(2,-2)$ porque en estos puntos el hessiano es negativo. En $(2,2)$ y $(-2,-2)$ el hessiano es positivo y para concluir debemos fijarnos en el signo de f_{xx}

$$f_{xx}(2,2) = 12x \big|_{(2,2)} = 12(2) > 0 \text{ hay un mínimo en } (2,2)$$

$$f_{xx}(-2,-2) = 12x \big|_{(-2,-2)} = 12(-2) < 0 \text{ hay un máximo en } (-2,-2)$$

$$\text{El mínimo local es: } f_{(2,2)} = 2(2)^3 + 4(2)^3 - 24(2) - 48(2) + 6 = -90$$

$$\text{El máximo local es: } f_{(-2,-2)} = 2(-2)^3 + 4(-2)^3 - 24(-2) - 48(-2) + 6 = 102$$

Los valores de la función en los puntos silla no son importantes porque no son puntos óptimos, es decir, no son ni máximos ni mínimos.

Ejemplo 21

Determine los puntos críticos de la función $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy$ y clasifiquelos como máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

Solución

Calculamos los puntos críticos

$$f_x = \frac{-1}{x^2} - y = 0 \rightarrow y = \frac{-1}{x^2}$$

$$f_y = \frac{-1}{y^2} - x = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{y^2}$$

Sustituyendo una en la otra ecuación

$$y = -\frac{1}{\left(\frac{-1}{y^2}\right)^2} \rightarrow y = -y^4 \rightarrow y^4 + y = 0 \rightarrow y(y^3 + 1) = 0 \rightarrow y = 0 \quad y = -1$$

La solución con $y = 0$ no es válida porque la función se vuelve indeterminada en tal punto y al punto $y = -1$ le corresponde $x = -\frac{1}{(-1)^2} \rightarrow x = -1$

El único punto crítico es $(-1, -1)$

Vamos ahora a calcular las segundas derivadas

$$f_{xx} = \frac{2}{x^3}$$

$$f_{yy} = \frac{2}{y^3}$$

$$f_{xy} = -1$$

El determinante hessiano es $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$

$$= \left(\frac{2}{x^3}\right)\left(\frac{2}{y^3}\right) - (-1)^2$$

$$= \frac{4}{x^3y^3} - 1$$

Evaluando en el punto crítico se tiene

$$D_{(-1,-1)} = \frac{4}{x^3y^3} - 1 \Big|_{(-1,-1)}$$

$$D_{(-1,-1)} = \frac{4}{(-1)^3(-1)^3} - 1 = 3 > 0$$

Además,

$f_{xx}(-1, -1) = \frac{1}{(-1)^3} = -1 < 0$, por lo tanto, se trata de un máximo local. Este máximo local está dado por:

$$f(-1, -1) = \frac{1}{(-1)} + \frac{1}{(-1)} - (-1)(-1) = 1$$

Ejemplo 22

Determine los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 + y + 4$ y clasifíquelos como máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

Solución

Calculamos los puntos críticos

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0$$

$$f_y = -3x - 2y + 1 = 0$$

Despejamos y de la primera y la sustituimos en la segunda, así

$y = x^2 \rightarrow -3x + 2(x^2) + 1 = 0 \rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Esta ecuación se resuelve mediante la fórmula general y se obtienen dos raíces, a saber: $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$.

Sustituyendo en la primera de las ecuaciones ahora podemos determinar los valores correspondientes de y

$$\text{Para } x = 1 \rightarrow y = (1)^2 = 1$$

$$\text{Para } x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Entonces los puntos críticos son: $(1,1)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Ahora debemos calcular las segundas derivadas parciales

$$f_{xx} = 6x$$

$$f_{yy} = 2$$

$$f_{xy} = -3$$

El hessiano es: $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$

$$= (6x)(2) - (-3)^2$$

$$= 12x - 9$$

Evaluando en los puntos críticos

$$D_{(1,1)} = 12(1) - 9 = 3 > 0$$

$$D_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = 12\left(\frac{1}{2}\right) - 9 = -3 < 0$$

Podemos concluir que existe un punto silla en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y para el otro punto nos falta determinar si es un máximo o un mínimo, para lo cual calculamos

$$f_{xx}(1,1) = 6(1) > 0$$

Hay un mínimo en $(1,1)$ y el valor mínimo es

$$f(1,1) = (1)^3 - 3(1)(1) + (1)^2 + (1) + 4 = 4$$

Ejemplo 23

Suponga que $P = f(L, K) = 1,08L^2 - 0,03L^3 + 1,68K^2 - 0,08K^3$ es una función de producción para una compañía. Encuentre las cantidades de entrada L y K que maximizan la producción P .

Solución

Encontramos los puntos críticos

$$f_L = 2,16L - 0,09L^2 = 0$$

$$f_L = 0,09L(24 - L) = 0 \rightarrow L = 0 \text{ y } L = 24$$

$$f_K = 3,36K - 0,24K^2 = 0$$

$$f_K = 0,24K(14 - K) = 0 \rightarrow K = 0 \text{ y } K = 14$$

Hay cuatro puntos críticos: $(0,0)$ $(0,14)$ $(24,0)$ $(24,14)$

Ahora aplicamos la segunda derivada a cada punto crítico

$$P_{LL} = 2,16 - 0,18L$$

$$P_{KK} = 3,36 - 0,48K$$

$$P_{LK} = 0$$

El hessiano es

$$D(L, K) = P_{LL}P_{KK} - (P_{LK})^2$$

$$D(L, K) = (2,16 - 0,18L)(3,36 - 0,48K) - (0)^2$$

Evaluable los puntos críticos, tenemos

- En $(0,0)$

$$D(0,0) = (2,16 - 0,18(0))(3,36 - 0,48(0)) = (2,16)(3,36) > 0$$

Como $D(0,0) > 0$ y $P_{LL} = 2,06 > 0$, se tiene un mínimo local en $(0,0)$

- Evaluamos en $(0,14)$

$$D(0,14) = (2,16 - 0,18(0))(3,36 - 0,48(14)) = (2,16)(-3,36) < 0$$

Como $D(0,14) < 0$, no existe ningún extremo local en $(0,14)$

- Evaluamos en $(24,0)$

$$D(24,0) = (2,16 - 0,18(24))(3,36 - 0,48(0)) = (-2,16)(3,36) < 0$$

Como $D(24,0) < 0$, no existe ningún extremo local en $(24,0)$

- Evaluamos en $(24,14)$

$$D(24,14) = (2,16 - 0,18(24))(3,36 - 0,48(14)) = (-2,16)(-3,36) > 0$$

Como $D(24,14) > 0$ y $P_{LL} = -2,16 < 0$, se tiene máximo relativo en $(24,14)$.

Por lo tanto la producción máxima se obtiene cuando $L = 24$ y $K = 14$

Ejemplo 24

Una compañía produce dos variedades de dulces, A y B, para los cuales los costos promedios de producción son constantes de **60 y 70** (centavos por libra), respectivamente. Las funciones de demanda para **A y B** están dadas por

$$q_A = 5(P_B - P_A) \quad q_B = 500 + 5(P_A - 2P_B)$$

Encuentre los precios de venta P_A y P_B que maximicen la utilidad de la compañía.

Solución

La utilidad total está dada por

$$P = \left(\begin{array}{c} \text{utilidad por} \\ \text{libras de A} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{libras de A} \\ \text{vendidas} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{utilidad por} \\ \text{libras de B} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{libras de B} \\ \text{vendidas} \end{array} \right)$$

Para A y B , la utilidad por libra es:

$P_A - 60$ y $P_B - 70$, respectivamente. Así

$$P = (P_A - 60)q_A + (P_B - 70)q_B$$

$$P = (P_A - 60)(5(P_B - P_A)) + (P_B - 70)(500 + 5(P_A - 2P_B))$$

Obsérvese que P se expresa como función de dos variables P_A y P_B . Para maximizar P , sus derivadas parciales se igualan a cero:

$$\frac{\partial P}{\partial P_A} = (P_A - 60)(5(-1)) + (5(P_B - P_A))(1) + (P_B - 70)(5(1)) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial P_A} = -10P_A + 10P_B - 50 = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial P_B} = (P_A - 60)(5(1)) + (1)(500 + 5(P_A - 2P_B)) + (P_B - 70)(-10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial P_B} = 10P_A - 20P_B + 900, \text{ luego resolviendo el sistema}$$

$$\begin{cases} -10P_A + 10P_B = 50 \\ 10P_A - 20P_B = -900 \end{cases} \rightarrow P_B = 85 \text{ y } P_A = 80$$

Además se encuentra que

$$\frac{\partial_P^2}{\partial P_A^2} = -10$$

$$\frac{\partial_P^2}{\partial P_B^2} = -20$$

$$\frac{\partial_P^2}{\partial P_B \partial P_A} = 10$$

Por lo tanto

$$D(80,85) = (-10)(-20) - (10)^2$$

$$D(80,85) = (-200) - 100 < 0, \text{ como}$$

$\frac{\partial_P^2}{\partial P_A^2} < 0$, se tiene un máximo y la empresa debería vender el dulce **A** a 80 centavos de dólar por libra y el **B** a 85 centavos por libra.

Ejemplo 25

Suponga que un monopolista practica discriminación en los precios al vender el mismo producto a dos mercados separados, a distintos precios. Sea q_A el número de unidades vendidas en el mercado **A**, donde la función de demanda es $P_A = f(q_A)$ y sea q_B el número de unidades vendidas en el mercado **B**, donde la función de demanda es $P_B = g(q_B)$. Entonces las funciones de ingreso para los dos mercados son:

$$r_A = q_A f(q_A) \quad \text{y} \quad r_B = q_B g(q_B)$$

Suponga que todas las unidades se producen en una planta, y que la función de costos por producir $q = q_A + q_B$ unidades es $c = c(q)$. Recuerde que r_A es una función de q_A y r_B es una función de q_B . La utilidad P del monopolista es $P = r_A + r_B - c$.

Solución

Para maximizar P con respecto a las producciones q_A y q_B sus derivadas parciales se igualan a cero. Se iniciará con

$$\frac{\partial P}{\partial q_A} = \frac{dr_A}{dq_A} + 0 - \frac{r_c}{\partial q_A}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_A} = \frac{dr_A}{dq_A} - \frac{d_c}{d_q} \frac{\partial q}{\partial q_A} = 0 \quad (\text{Regla de la cadena})$$

Como $\frac{\partial q}{\partial q_A} = \frac{\partial}{\partial q_A}(q_A + q_B) = 1$ se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial q_A} = \frac{dr_A}{dq_A} - \frac{d_c}{d_q} = 0$$

De manera similar

$$\frac{\partial P}{\partial q_B} = \frac{dr_B}{dq_B} - \frac{d_c}{d_q} = 0$$

De estas dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$\frac{dr_A}{dq_A} = \frac{d_c}{d_q} = \frac{dr_B}{dq_B}$$

Pero $\frac{dr_A}{dq_A}$ y $\frac{dr_B}{dq_B}$ son ingresos marginales y $\frac{d_c}{d_q}$ es el costo marginal. Por lo tanto, para maximizar la utilidad (y distribuir la producción) de manera que los ingresos marginales en ambos mercados sean los mismos y, en términos simples, también sean iguales al costo de la última unidad producida en la planta.

4.6. Máximos y Mínimos con restricciones

4.6.1. Multiplicadores de Lagrange

En muchas aplicaciones prácticas, la maximización o minimización requiere la consideración de ciertas restricciones, por ejemplo, si maximizamos una función de producción debemos considerar que tenemos un presupuesto restringido, o la cantidad de insumos a los que se puede tener acceso es limitada, etc. Así, cuando queremos minimizar costos, muchas veces tenemos como restricción el hecho de que debemos producir una cantidad fija.

En problemas de inversiones financieras, por ejemplo, podemos fijar nuestro nivel de riesgo, que sería nuestra restricción, y maximizar nuestro rendimiento o, por el

contrario, podríamos fijar el rendimiento esperado y con dicho rendimiento minimizamos el riesgo.

El procedimiento más utilizado para resolver el problema de calcular extremos (máximos o mínimos) restringidos de una función, se conoce como el “Método de multiplicadores de Lagrange”. La estructura de un problema de maximización restringida para dos variables y una sola restricción es:

$$\text{máx } f(x, y) \text{ sujeta a } g(x, y) = 0.$$

A la función $f(x, y)$ se le llama “función objetivo” y $g(x, y) = 0$ es la “ecuación de restricción”. Para resolver el problema construimos la función auxiliar:

$$f(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Que se le llama “langrangeana” y el parámetro λ se le conoce como “multiplicador de Lagrange”.

Si $f(x, y)$ tiene un valor extremo bajo la restricción $g(x, y) = 0$, entonces λ existe, y el extremo buscado ocurre en los valores de $x \wedge y$ que corresponden al punto crítico de la langrangeana. La clasificación del valor extremo en máximo o mínimo requiere de un análisis que está fuera de los propósitos de este manual; por esto, simplemente usaremos la intuición o diremos de antemano si es un máximo o un mínimo.

El procedimiento también es válido para más de dos variables y para más de una restricción, en cuyo caso la langrangeana se escribe como:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) - \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ - \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) - \dots - \lambda_k g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Ejemplo 26

Determine los extremos (máximos o mínimos) de la $f(x, y) = 10x^2 + 12y^2$, con la restricción $x + 2y = 26$

Solución

La restricción debe escribirse como una ecuación igualada a cero, es decir:

$$g(x, y) = x + 2y - 26 = 0$$

La langrangeana es:

$$F(x, y, \lambda) = 10x^2 + 12y^2 - \lambda(x + 2y - 26)$$

Ahora calculamos los puntos críticos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 20x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 24y - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x - 2y + 26 = 0$$

De las dos primeras ecuaciones despejamos λ , e igualando se obtiene:

$$\lambda = 20x$$

$$\lambda = 12y \rightarrow 20x = 12y \rightarrow x = 0,6y$$

La tercera ecuación siempre es equivalente a la ecuación de restricción, sustituyendo el resultado anterior en dicha ecuación, obtenemos

$$0,6y + 2y = 26 \rightarrow y = 10 \rightarrow x = 6$$

Por lo que el valor extremo de $f(x, y)$ está en el punto **(6,10)**. Intuitivamente sabemos que corresponderá a un mínimo porque $f(x, y) = 10x^2 + 12y^2$ corresponde a parábolas que abren hacia arriba en ambas variables.

Ejemplo 27

Encuentre los valores extremos de $f(x, y) = 12xy - 3x^2 - y^2$ con la restricción $x + y = 16$

Solución

La restricción es $g(x, y) = x + y - 16 = 0$, por lo que

$$F(x, y, \lambda) = 12xy - 3x^2 - y^2 - \lambda(x + y - 16)$$

Derivando

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 12y - 6x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 12x - 2y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x - y - \lambda + 16 = 0$$

De las primeras dos ecuaciones se obtiene

$$12y - 6x = 12x - 2y \rightarrow 14y = 18x \rightarrow y = \frac{9}{7}x$$

Sustituyendo en la restricción

$$x + y = 16 \rightarrow x + \frac{9}{7}x = 16 \rightarrow x = 7, \text{ y por tanto, } y = 9. \text{ Concluimos que la función tiene un extremo en } (7,9)$$

Ejemplo 28

Minimice la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la condición $2x - y + 3z = -24$

Solución

La langrangeana es $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(2x - y + 3z + 24)$

Derivando

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 3\lambda = 0$$

De la primera de estas ecuaciones se tiene que $\lambda = x$.

De la segunda $\lambda = -2y$

De la tercera $\lambda = -\frac{2}{3}z$, sustituyendo estos valores en la restricción se tiene

$$2(-2y) - y + 3(-3y) = -24$$

$$-4y + y - 9y = -24$$

$$-12y = -24$$

$y = 2$, por lo que $x = -4$ y $z = -6$

Entonces, el valor mínimo es

$$f(-4, 2, -6) = (-4)^2 + (2)^2 + (-6)^2 = 56$$

Ejemplo 29

La función de producción de Cobb- Douglas para cierto producto es:

$$P(L, K) = 32L^{1/4}K^{3/4}$$

L es el número de unidades de mano de obra y K el número de unidades de capital para producir P unidades de un producto. Cada unidad de mano de obra le cuesta a la empresa 50 Bf y cada unidad de capital 100 Bf. Determine la producción máxima con un presupuesto de 500000 Bf.

Solución

La restricción presupuestaria puede escribirse como $50x + 100y = 500000$

La langrangeana es $F(L, K, \lambda) = 32L^{-3/4}K^{3/4} - (50x + 100y - 500000)$

Derivando

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 8L^{-3/4}K^{3/4} - 50\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{4}{25}L^{-3/4}K^{3/4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 24L^{1/4}K^{-1/4} - 100\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{6}{25}L^{1/4}K^{-1/4}$$

Igualando

$$\frac{4}{25}L^{-3/4}K^{3/4} = \frac{6}{25}L^{1/4}K^{-1/4} \rightarrow \frac{6}{25}\frac{L^{1/4}}{K^{1/4}} \rightarrow K = 1,5L$$

Sustituyendo en la restricción

$50L + 100(1,5L) = 500000 \rightarrow L = 2500$ y entonces $K = 3750$ y la producción máxima es: $P(2500, 3750) = 1.085.432,24$

Ejemplo 30

Suponga que una empresa ha recibido un pedido por 200 unidades de su producto y desea distribuir su fabricación entre dos de sus plantas, planta 1 y planta 2. Sea q_1 y q_2 las producciones de las plantas 1 y 2, respectivamente, y suponga que la función de costo total está dada por: $c = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200$. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?

Solución

Se minimiza $c = f(q_1, q_2)$ dada la restricción $q_1 + q_2 = 200$ se tiene

$$f(q_1, q_2, \lambda) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200 - \lambda(q_1 + q_2 - 200)$$

Derivando

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = 4q_1 + q_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_2} = q_1 + 2q_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = -q_1 - q_2 + 200 = 0$$

De las dos primeras ecuaciones tenemos

$$\lambda = 4q_1 + q_2$$

$$\lambda = q_1 + 2q_2 \quad \rightarrow \quad 3q_1 - q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad q_2 = 3q_1$$

Sustituimos este valor en la tercera ecuación

$$-q_1 - 3q_1 + 200 = 0$$

$$-4q_1 = -200$$

$$q_1 = 50$$

Luego $q_2 = 150$. Por lo tanto, la planta 1 debe producir 50 unidades y la planta 2 debe producir 150, para minimizar los costos.

Ejemplo 31

Suponga que una empresa debe producir una cantidad dada P_0 de un producto de la manera más barata posible. Si se tienen dos factores de entrada L y K , y los precios por unidad se fijan en P_L y P_K respectivamente, analice el significado económico de combinar las entradas para lograr el menor costo. Esto es, describa la combinación de entradas para el costo mínimo.

Solución

Sea $P = f(L, K)$ la función de producir. Entonces se debe minimizar la función costo $c = LP_L + KP_K$ sujeta a $P_0 = f(L, K)$

Se construye

$$F(L, K, \lambda) = LP_L + KP_K - \lambda[f(L, K) - P_0]$$

Derivando

$$\frac{\partial f}{\partial L} = P_L - \lambda \frac{\partial}{\partial L} [f(L, K)] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial K} = P_K - \lambda \frac{\partial}{\partial K} [f(L, K)] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = -[f(L, K)] + P_0 = 0$$

De las dos primeras ecuaciones se tiene

$$\lambda = \frac{P_L}{\frac{\partial}{\partial L} [f(L, K)]} = \frac{P_K}{\frac{\partial}{\partial K} [f(L, K)]} \rightarrow \frac{P_L}{P_K} = \frac{\frac{\partial}{\partial L} [f(L, K)]}{\frac{\partial}{\partial K} [f(L, K)]}$$

Se concluye que cuando se usa la combinación de factores para costo mínimo, la razón de las productividades marginales de los factores de entrada debe ser igual a la de sus precios unitarios correspondientes.

4.7. Integrales Múltiples

Son Integrales definidas de funciones de dos o más variables llamadas “Integrales múltiples” y se calculan mediante un proceso relacionado con la antiderivación parcial repetida. Estas integrales involucran el proceso de integración sobre una región en el plano.

A las integrales múltiples también se les conoce como “integrales repetidas” y su notación es la siguiente:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Para resolver una integral doble, primero se calcula la integral indefinida interna, en este caso $\int_c^d f(x, y) dy$ tomando la antiderivada de f con respecto a y mientras x permanece constante. El resultado será una función de una sólo variable x , la cual se integrará con respecto a x , entre $x = a$ y $x = b$

Ejemplo 32

Calcular la siguiente integral doble $\int_0^1 \int_1^2 x^2 y dx dy$

Solución

Primero resolvemos la integral interna $\int_1^2 x^2 y dx$ en términos de x y tomando a y como constante, es decir:

$$\int_1^2 x^2 y dx = \frac{x^3}{3} y = \left[\frac{2^3}{3} y \right] - \left[\frac{1^3}{3} y \right] = \frac{8}{3} y - \frac{1}{3} y = \frac{7}{3} y$$

En segundo lugar, resolvemos la integral externa; en términos de la variable y , así:

$$\int_0^1 \frac{7}{3} y dy = \frac{7}{3} \int_0^1 y dy = \frac{7}{6} y^2 = \frac{7}{6}$$

Ejemplo 33

Calcular $\int_2^3 \int_{-1}^1 (x + 2y) dy dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x + 2y) dy &= \int_{-1}^1 x dy + \int_{-1}^1 2y dy \quad (x \text{ es constante}) \\ &= xy + y^2 \\ &= [x(1) + (1)^2] - [x(-1) + (-1)^2] \\ &= x + 1 + x - 1 \\ &= 2x \end{aligned}$$

$$\int_2^3 2x dx = x^2 = [(3)^2] - [(2)^2] = 9 - 4 = 5$$

Ejemplo 34

Calcular $\int_1^e \int_0^{\ln x} xy dy dx$

Solución

$$\int_0^{\ln x} xy dy = \frac{xy^2}{2} = \left[\frac{x(\ln x)^2}{2} \right] - \left[\frac{x(0)^2}{2} \right] = \frac{1}{2} x(\ln x)^2$$

$$\int_1^e \frac{1}{2} x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_1^e x(\ln x)^2 dx$$

Resolviendo y aplicando el método por partes, obtenemos

$$f(x) = (\ln x)^2 \quad f'(x) = 2(\ln x) \frac{1}{x} \quad g(x) = x \quad G(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int_1^e x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int_1^e \frac{2}{x} \ln x \cdot \frac{x^2}{2} dx \right] =$$

$$\frac{1}{4} x^2 (\ln x)^2 - \frac{1}{2} \int_1^e x \ln x dx$$

Resolviendo nuevamente por partes, obtenemos

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = x \quad G(x) = \frac{x^2}{2}, \text{ luego}$$

$$\frac{1}{4}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx \right] =$$

$$\frac{1}{4}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{4}x^2 \ln x + \frac{1}{4} \int_1^e x dx =$$

$$\frac{1}{4}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{4}x^2 \ln x + \frac{1}{8}x^2 =$$

$$\left[\frac{1}{4}(e)^2(\ln e)^2 - \frac{1}{4}(e)^2 \ln e + \frac{1}{8}e^2 \right] - \left[\frac{1}{4}(1)^2(\ln 1)^2 - \frac{1}{4}(1)^2 \ln 1 - \frac{1}{8}(1)^2 \right] =$$

Como $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$, tenemos

$$\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(e^2 - 1)$$

Ejemplo 35

Resolver $\int_0^1 \int_0^1 x^2 e^{xy} dy dx$

Solución

$\int_0^1 x^2 e^{xy} dy = x^2 \int_0^1 e^{xy} dy = \frac{x^2}{x} e^{xy} = x e^{xy}$, sustituyendo y en $[0,1]$ obtenemos

$$\int_0^1 x^2 e^{xy} dy = [x e^{x(1)}] - [x e^{x(0)}] = x e^x - x$$

Ahora integrando nuevamente en términos de x

$$\int_0^1 (x e^x - x) dx = \int_0^1 x e^x dx - \int_0^1 x dx$$

Integramos por partes y obtenemos,

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1 \quad g(x) = e^x \quad G(x) = e^x \text{ luego}$$

$$\int_0^1 x e^x dx - \int_0^1 x dx = x e^x - \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x dx$$

$$\begin{aligned}
&= xe^x - e^x - \frac{x^2}{2} \\
&= \left[1e^1 - e^1 - \frac{1^2}{2}\right] - \left[0e^0 - e^0 - \frac{0^2}{2}\right] \\
&= e - e - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 36

Calcular $\int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \int_1^2 6xy^2z^3 dx dy dz$

Solución

Primero resolvemos la integral $\int_1^2 6xy^2z^3 dx$, (y, z constantes)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 6xy^2z^3 dx &= 3x^2y^2z^3 = [(3(2)^2y^2z^3 - (3(1)^2y^2z^3))] = 12y^2z^3 - 3y^2z^3 \\
&= 9y^2z^3
\end{aligned}$$

Ahora resolvemos la segunda integral $\int_{-1}^2 9y^2z^3 dy$ (z constante)

$$\int_{-1}^2 9y^2z^3 dy = 3y^3z^3 = [(3(2)^3z^3) - (3(-1)^3z^3)] = 24z^3 + 3z^3 = 27z^3$$

Por último, resolvemos la integral $\int_{-1}^0 27z^3 dz$

$$\int_{-1}^0 27z^3 dz = \frac{27}{4}z^4 = \left[\frac{27}{4}(0)^4 - \frac{27}{4}(-1)^4\right] = -\frac{27}{4}$$

4.8. Ejercicios y Problemas de Aplicación Propuestos**Definiciones Básicas**

Determine el valor de la función en el punto que se indica

1. $f(x, y) = 3x + y$ en $f(2,1)$
2. $f(x, y) = 3xe^y$ en $f(1,0)$
3. $f(x, y, z) = x + y \ln z$ en $f(1,2,1)$

4. $f(x, y, z, w) = x + yz + xyz^3\sqrt{w}$ en $f(1,2,3,4)$

5. $f(x, y, z, w) = \frac{3x-2y}{zw^2}$ en $f(3,2,3,2)$

Determine el dominio y la imagen de las siguientes funciones

6. $f(x, y) = x + y$

7. $f(x, y) = x^2 + y^2$

8. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$

9. $f(x, y, z) = \ln(2x - y)$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$

Derivadas Parciales

Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones

11. $f(x, y) = x^3y + 4x^2y^3 + 2x + y^2 + 4$

12. $f(x, y) = 5x^2y^2 + xy^3 - x^2 - y + 6$

13. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 5x}$

14. $f(x, y) = 2ye^{2x+y}$

15. $f(x, y) = (x + y)e^x$

Calcule la derivada parcial en el punto indicado

16. $f(x, y) = 3x^2y^2 - 2xy^3 + 8$ $f_x(1,2)$

17. $f(x, y) = \sqrt{2x + y^2}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)$

18. $f(x, y) = \frac{2x-3y}{x^2+4}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$

19. $f(x, y) = x^3 y \ln(x + 2y)$ $f_y(2,3)$

20. $f(x, y, z) = \ln xy + \ln xz + \ln yz$ $f_z(2,1,2)$

Derivadas Parciales de Orden Superior

Calcule las derivadas indicadas en cada función

21. $f(x, y) = 3x^2 y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

22. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3 - xy$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

23. $f(x, y) = \sqrt{3x^2 - y^3}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

24. $f(x, y) = 3x^2 \ln(2y^3)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

25. $f(x, y) = 4x^2 e^{2y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

26. $f(x, y, z) = x^2 y^3 z$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$

27. $f(x, y, z) = (x^2 + 3y - z)^3$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$

28. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^3$ $f_{xy}(1,2)$

29. $f(x, y) = 3y^2 e^x + \ln(xy)$ $f_{xy}(1,1)$

30. $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 3x - 2y + 4$ $f_{xy}(3,2)$; $f_{xx}(3,2)$

31. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x - 9y^2 x^4$ $f_{xy}(1,2)$; $f_{xx}(1,2)$

32. $f(x, y) = 2x + 3y$ $f_{yy}(3,4)$

33. $f(x, y) = \sqrt{3x^2 - 2y}$ $f_{yy}(3,1)$; $f_{yx}(3,1)$

Encuentre las derivadas indicadas mediante la Regla de la Cadena

$$34. \quad z = e^{x+y} \quad x = t^2 + 3 \quad y = \sqrt{t^3} \quad \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$35. \quad w = x^2z^2 + xyz + yz^2 \quad x = 5t \quad y = 2t + 3 \quad z = 6 - t \quad \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$w = x^2 + xyz + z^2 \quad x = r^2 - s^2 \quad y = rs \quad z = r^2 + s^2 \quad \frac{\partial w}{\partial s}$$

$$36. \quad y = x^2 - 7x + 5 \quad x = 19rs + 2s^2t^2 \quad \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$37. \quad \text{Si } z = (4x + 3y)^3 \text{ donde } x = r^2s \quad y = r - 2s \quad \frac{\partial z}{\partial r} \text{ cuando } r = 0 \quad s = 1$$

$$\text{Si } w = e^{2x+3y}(x^2 + 4z^2), \text{ donde } x = rs \quad y = 42s - 3r \quad z = r + s,$$

$$\text{evalúe } \frac{\partial w}{\partial s} \text{ cuando } r = 1 \quad y \quad s = 0$$

Máximos y Mínimos sin Restricciones

Determine los puntos críticos de las funciones, clasifíquelos como máximos, mínimos o puntos silla y calcule los valores máximos o mínimos, en caso de existir.

$$38. \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3y + 2$$

$$39. \quad f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

$$40. \quad f(x, y) = 9x^2 - 6xy + y^2 + 3y - 10$$

$$41. \quad f(x, y) = -4x^2 - 8y^2 - 2xy + 36x + 40y$$

$$42. \quad f(x, y) = x^3 - 3kxy + y^3$$

$$43. \quad f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 + xy - 9x - 5$$

$$44. \quad f(x, y) = xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

$$45. \quad f(x, y) = 6x^2 + 12x + y^2 - 4y$$

$$46. \quad f(x, y) = 6 + 4x + 6y - x^2 - 3y^2$$

$$47. \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$$

Máximos y mínimos con Restricciones

Determine los puntos críticos de la función con la restricción indicada

48. $f(x, y) = \frac{200x}{5+x} + \frac{100y}{10+y}$ restricción $x + y = 25$
49. $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - xy$ restricción $x + y = 21$
50. $f(x, y) = -10x^2 + y^2$ restricción $x - y = -18$
51. $f(x, y, z) = xyz$ restricción $x + 2y + 3z = 18$ $xyz \neq 0$
52. $f(x, y, z) = x^2 + xy + 2y^2 + z^2$ restricción $x - 3y - 4z = 16$
53. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ restricción $2x + 3y + 4z = 29$
54. $f(x, y) = -3x + 4y$ restricción $2x + 5y = 3$
55. $f(x, y, z) = x + y + z$ restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 12$
56. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ restricción $2x - y + 3z = -28$
57. $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ restricción $x + 2y = 24$
58. q_A y q_B son funciones de demanda para los productos A y B respectivamente. Encuentre $\frac{\partial q_A}{\partial P_A}$, $\frac{\partial q_A}{\partial P_B}$, $\frac{\partial q_B}{\partial P_A}$, $\frac{\partial q_B}{\partial P_B}$ y determine si A y B son competitivos, complementarios o ni uno ni otro
- a) $q_A = 1000 - 5P_A + 2P_B$ $q_B = 500 + 4P_A - 20P_B$
- b) $q_A = \frac{100}{P_A \sqrt{P_B}}$ $q_B = \frac{500}{P_B \sqrt[3]{P_A}}$
59. Una estimación de la función de producción para las granjas lecheras en Venezuela está dada por: $P = A^{0.27} B^{0.01} C^{0.01} D^{0.23} E^{0.09} F^{0.27}$ donde P es la producción, A es el terreno, B el trabajo, C son mejoras, D activos líquidos, E activos de trabajo y F gastos de operaciones en efectivo. Encuentre las productividades marginales para el trabajo y las mejoras.
60. En un estudio sobre el éxito alcanzado por jóvenes graduados con título de maestría en Administración de Empresas (MAE), se estimó que para gerentes, contadores, analistas, etc., la compensación actual (en Bf) estaba dada por:

$z = 43900 + 4480x + 3492y$ donde x e y son el número de años de experiencia en el trabajo antes y después de recibir su título de MAE, respectivamente. Encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ e intérprete su resultado.

61. En ocasiones se desea evaluar el grado de legibilidad de un documento escrito y la siguiente función de dos variables nos permite evaluar dichos documentos:

$R = f(w, s) = 206,835 - (1,01w + 0,846s)$ donde a R se le llama calificación de facilidad de lectura, w es el número promedio de palabras por oración en muestras de 100 palabras, y s es el número promedio de sílabas en tales muestras. Se afirma que un artículo para el cual $R = 0$ es “prácticamente ilegible”, pero que uno con $R = 100$ es “fácil para cualquier persona que sepa leer”

- a) Encuentre $\frac{\partial R}{\partial w}$ y $\frac{\partial R}{\partial s}$
 b) ¿Qué es más fácil de leer: un artículo para el cual $w = w_0$ y $s = s_0$ u otro para el cual $w = w_0$ y $s = s_0$?

62. Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dados por $q_A = 10 \sqrt{\frac{P_B}{P_A}}$ y $q_B = 3 \sqrt[3]{\frac{P_A}{P_B}}$ donde P_A y P_B son las cantidades demandadas de A y de B, y P_A y P_B son los precios correspondientes (Bf.)/unidad.

- a) Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto A cuando $P_A = 9$ y $P_B = 16$
 b) Si P_B se reduce de 14 a 16, con P_A fijo en 9, use el resultado del literal a) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto A.

63. Para las elecciones al Congreso de EE.UU. en 1974, el porcentaje republicano R del voto republicano - democrático en un distrito está dado por:

$$R = f(E_r, E_d, I_r, I_d, N)$$

$$= 15,4725 + 2,5945E_r - 0,0804E_r^2 - 2,3648E_d + 0,0687E_d^2 + 2,1914I_r - 0,0912I_r^2 - 0,8096I_d + 0,0081I_d^2 - 0,0277E_rI_r + 0,0493E_dI_d + 0,8579N - 0,0061N^2$$

E_r y E_d son los gastos de campaña (en unidades de \$10.000) de los republicanos y demócratas, respectivamente; I_r e I_d el número de periodos en lo que han estado en el Congreso, mas uno, para los candidatos republicano y

demócrata, respectivamente, y N es el porcentaje del voto presidencial de los dos partidos que Richard Nixon obtuvo en el distrito en 1968. La variable N proporciona una medida de la fuerza de los republicanos en ese distrito.

- a) En la ley de 1974 de la campaña federal de elecciones, el congreso estableció un límite de \$188.000 para los gastos de campaña. Tras analizar $\frac{\partial R}{\partial E_r}$, ¿habría aconsejado usted a un candidato republicano con nueve periodos en el congreso, gastar \$188.000 en su campaña?
- b) Encuentre el porcentaje por encima del cual el voto de Nixon tuvo un efecto negativo sobre R ; esto es, encuentre N cuando $\frac{\partial R}{\partial N} < 0$. De su respuesta al porcentaje entero más cercano.

64. Suponga que el costo c de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B esta dado por: $c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}$ y que las funciones de demanda para los productos están dados por: $q_A = 10 - P_A + P_B^2$ $q_B = 20 + P_A - 11P_B$.

Use la Regla de la Cadena para evaluar $\frac{\partial c}{\partial P_A}$ y $\frac{\partial c}{\partial P_B}$ cuando $P_A = 25$ y $P_B = 4$

- a) Suponga que w es una función de x e y , y que a su vez x e y son funciones de s y t . Establezca una regla de la cadena que exprese $\frac{\partial w}{\partial t}$ en términos de las derivadas de éstas funciones.
- b) Sea $w = 2x^2 \ln|3x - 5y|$, donde $x = s\sqrt{t^2 + 2}$ e $y = t - 3e^{2-x}$, use el literal a) para evaluar $\frac{\partial w}{\partial t}$ cuando $s = 1$ y $t = 0$

66. Sea P una función de producción dada por:

$$P = f(l, k) = 0,54l^2 - 0,02l^3 + 1,89k^2 - 0,09k^3$$

Donde l y k son las cantidades de trabajo y capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Encuentre los valores de l y k que maximizan P .

67. Suponga que $P = f(l, k) = 1,08l^2 - 0,03l^3 + 1,68k^2 - 0,08k^3$ es una función de producción para una compañía. Encuentre las cantidades de entrada l y k que maximizan la producción P .
68. Una empresa produce dos tipos de chocolate, A y B, cuyos costos constantes de producción son de \$20 y \$30 por kilogramo, respectivamente. Las cantidades

q_a y q_b (en libras) de A y B que pueden venderse cada semana están dadas por las siguientes funciones de demanda conjuntas

$$q_a = 400(p_b - p_a)$$

$$q_b = 800(9 + p_a - 2p_b)$$

Donde p_a y p_b son los precios de venta (en dólares por libra) de A y B, respectivamente. Determine los precios de venta que maximizan la utilidad de la empresa.

69. Suponga que $p_3 = f(l, k) = 6l^2 - 2l^3 + 8k^2 - 0,4k^3$ es una función de producción para una empresa. Encuentre las cantidades de entrada l y k , que maximizan la producción p .
70. Para producir cierta manufactura, las máquinas A y B utilizan x y y horas, respectivamente. Si la producción diaria Q es una función de x e y , dada por $Q = 6x + 4y - 0,6x^2 - 1,2y^2 + 0,6xy$, encuentre los valores de x y y que maximizan a Q .
71. Los costos promedios de producir dos tipos de dulces a y b, son constantes de 80 y 90 centavos por gramo, respectivamente. Las funciones de demanda para A y B están dadas por

$$q_a = 20(p_b - p_a)$$

$$q_b = 400 + 4(p_a - 2p_b)$$

Encuentre los precios de venta p_a y p_b que maximizan la ganancia de la empresa.

72. Un monopolista está practicando discriminación del precio al vender el mismo producto en dos mercados distintos a diferentes precios. En el mercado A la función de demanda es $p_a = 100 - q_a$ y en B es $p_b = 49 - q_b$, donde q_a y q_b son las cantidades vendidas por semana en A y en B; p_a y p_b son los precios respectivos por unidad. Si la función de costos del monopolista es $c = 800 + 4(q_a + q_b)$. ¿Cuánto debe vender en cada mercado para maximizar la utilidad? ¿Qué precios de venta dan la utilidad máxima? Encuentre la utilidad máxima.
73. La función de costos conjunta para los productos A y B es $C = 2q_a^2 + 6q_b^2$ y las funciones de demanda son $p_a = 30 - q_a^2$ y $p_b = 30 - q_b^2$. Encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad.

74. Las ecuaciones de demanda de un monopolista que vende dos productos competitivos son

$$p_a = 38 - q_a^2 + q_b$$

$$p_b = 25 - q_b^2 + q_a$$

La función de costos conjunta es

$$C = -20 - 2q_a^3 + 3q_aq_b + 30q_a + 12q_b + \frac{1}{2}q_a^2.$$

- a) ¿Cuántas unidades de A y B tienen que venderse para que el monopolista obtenga una utilidad máxima relativa? Use la prueba de la segunda derivada para justificar su respuesta; b) determine los precios de venta requeridos para obtener la utilidad máxima relativa; c) encuentre la utilidad máxima relativa.
75. El número de franelas que puede vender el equipo Real Madrid por semana es $\frac{4x}{5+x} + \frac{2y}{10+y}$, donde x e y representan sus gastos semanales (en dólares) por publicidad en periódicos y TV, respectivamente. La utilidad es de 125 dólares por franela vendida, menos el costo de la publicidad, de modo que su utilidad semanal P está dada por $P = 125 \left[\frac{4x}{5+x} + \frac{2y}{10+y} \right] - x - y$. Encuentre las cantidades de publicidad en periódico y de publicidad en TV, y , a fin de maximizar la utilidad.
76. Una empresa ha recibido un pedido por 400 unidades de su producto. Puede distribuir su fabricación entre sus dos plantas; planta 1 y planta 2. Sean q_1 y q_2 las producciones de las plantas 1 y 2, respectivamente y suponga que la función de costo total está dada por $C = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200$. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?
77. La función de producción de una empresa está dado por $C = 3q_1^2 + q_1q_2 + 26q_2^2$ donde q_1 y q_2 son las cantidades que se producen en las plantas 1 y 2, respectivamente. Encuentre las cantidades que debe producir cada planta si la producción total es 1.400 unidades y queremos que el precio sea mínimo.
78. La función de producción de una empresa es $f(l, k) = 24l + 40k - 2l^2 - 6k^2$ donde el costo de l y k es de \$3 y \$6 por unidad, respectivamente. Si la empresa quiere que el costo total de insumos sea \$12.960, encuentre la producción máxima posible sujeta a este control presupuestario.

79. Cuando se invierten l unidades de trabajo y k unidades de capital, la producción q total de un fabricante está dada por la función Cobb-Douglas de producción $q = 10l^{1/5}k^{4/5}$. Cada unidad de trabajo cuesta \$15 y cada unidad de capital \$45. Si se van a gastar exactamente \$60.000 en la producción. Determine las unidades de trabajo y de capital que deben invertirse para maximizar la producción. (suponga que el máximo se presenta en el punto crítico obtenido).
80. La función de producción de un fabricante está dada por:

$$q = \frac{1}{16}[100 - 3(l - 4)^2 - 2(k - 5)^2]$$

y su costo es de \$12 por unidad de trabajo y de \$8 por unidad de capital. El precio de venta del producto es de \$32 por unidad: a) determine la función de utilidad y encuentre todos los puntos críticos. Aplique la prueba de la segunda derivada en cada punto crítico. Si la utilidad es un máximo relativo en un punto crítico, calcule la utilidad máxima relativa correspondiente; b) la utilidad puede considerarse como una función de l , k y q (esto es: $\pi = 32q - 12l - 8k$) sujeta a la restricción

$$q = \frac{1}{16}[65 - 4(l - 4)^2 - 2(k - 5)^2]$$

Use el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos críticos de

$\pi = 32q - 12l - 8k$ sujeta a la restricción.

81. Empleando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa elabora P unidades de su producto con $P(L, K) = 150L^{2/3}K^{1/3}$. A la empresa \$30 la mano de obra de cada unidad y \$90 por cada unidad de capital empleado y dispone \$270.000 para propósitos de producción; a) determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe utilizar con objeto de maximizar su producción; b) demuestre que en éste nivel máximo de producción la razón de los costos marginales de mano de obra y de capital es igual a la razón de sus costos promedio.
82. Una empresa puede destinar su planta a la elaboración de dos tipos de productos, A y B. Obtiene una utilidad de %10 por unidad de A y de \$20 por unidad de B. las unidades de los dos tipos que puede producir en su planta están restringidos por la siguiente ecuación de transformación del producto $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 120 = 0$. Sean x y y los millares de unidades de A y B, respectivamente, producidas por semana. Halle las cantidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la utilidad.

83. El costo de producir x modelo de un producto y , y modelos de otro, está dado por la función conjunta $C(x, y) = 4x^2 + 6y^2 + 1000$. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben producirse a fin de minimizar los costos totales si la empresa decide producir un total de 600 unidades?
84. Una empresa puede elaborar su producto en dos de sus plantas. El costo de producir x unidades en su primera planta y y unidades en la segunda está dado por la función conjunta de costos $C(x, y) = 6x^2 + 3y^2 + 15xy + 600$. Si la empresa tiene una orden de suministrar 2000 unidades. ¿Cuántas unidades debe producir en cada planta para minimizar el costo total?
85. La función de producción de una empresa es $Q(L, K) = 80 L^{3/4} K^{1/4}$, donde L y K representan el número de unidades de mano de obra y capital utilizadas y P es el número de unidades elaboradas del producto. Cada unidad de mano de obra tiene un costo de \$50, cada unidad de capital cuesta \$200 y la empresa dispone de \$40.000 destinados a la producción; a) aplicando el método de multiplicadores de Lagrange determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe emplear a fin de obtener una producción máxima; b) demuestre que cuando la mano de obra y el capital están en sus niveles máximos, la razón de sus productividades marginales es igual a la razón de sus costos unitarios.
86. La función de producción de una empresa es $P(L, K) = 800\sqrt{3L^2 + 1,5K^2}$. Los costos unitarios de la mano de obra y del capital son de \$250 y de \$50 y la empresa dispone de \$13.500 para gastos de producción. Determine la combinación de unidades y mano de obra que maximiza la producción.
87. La función de producción de una empresa es $Q(L, K) = 100L + 15K - 2L^2 - 3K^2$ y los costos unitarios de la mano de obra y del capital son \$40 y \$90, respectivamente. El presupuesto está restringido a \$7.000: encuentre las cantidades de mano de obra L y capital K que maximicen la producción.
88. La función de producción de una empresa es $P(L, K) = 144L + 60K + 10LK - 4L^2 - 6K^2$. Los costos unitarios de la mano de obra y del capital son de \$80 y \$150, respectivamente. El presupuesto está restringido a \$5640. Encuentre las cantidades de mano de obra L y de capital K que se necesitan para maximizar la producción.
89. La función de producción de una empresa es $P(L, K) = 30\sqrt{5(L^2 + K^2)}$ y los costos unitarios de mano de obra y de capital son \$200 y \$100, respectivamente. La empresa decide producir 9.000 unidades; a) halle el número de insumos de mano de obra y de capital que deben emplearse con objeto de minimizar el

costo total; b) demuestre que, en este nivel de producción, la razón de costos marginales de mano de obra y de capital es igual a la razón de sus promedios.

90. Cuatro acciones A, B, C y D dan rendimientos anuales de $\sqrt{q_A}$, $\sqrt{1,2q_B}$, $\sqrt{1,3q_C}$ y $\sqrt{1,5q_D}$ cuando se invierten q_A, q_B, q_C y q_D en dólares, respectivamente. Una persona desea invertir \$120.000 dólares en esas cuatro inversiones. ¿Cuánto deberá invertir en cada una de ellas a fin de maximizar el rendimiento anual?
91. Cuando cierta empresa gasta una cantidad x (en dólares) en publicidad en la ciudad de Tampa, sus ventas potenciales (en miles de dólares) en esta ciudad están dadas por $\frac{600x}{x+10}$. Si se gasta y miles de dólares en Orlando, sus ventas potenciales (en miles de dólares) están dadas por $\frac{1000y}{y+15}$. Si la utilidad es 30% de las ventas y la empresa dispone de una restricción del presupuesto de \$33.000 destinados a publicidad en las dos ciudades, ¿Cuánto deberá gastar en cada ciudad con objeto de maximizar la utilidad neta de la empresa?

Integrales Múltiples

Resolver las siguientes integrales

92. $\int_0^3 \int_0^4 x \, dy \, dx$
93. $\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy$
94. $\int_1^3 \int_1^2 (x^2 - y) \, dx \, dy$
95. $\int_0^1 \int_0^2 (x + y) \, dy \, dx$
96. $\int_1^4 \int_0^{5x} y \, dy \, dx$
97. $\int_0^1 \int_{3x}^{x^2} 14x^2y \, dy \, dx$
98. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y \, dy \, dx$
99. $\int_{-1}^1 \int_x^{1-x} 3(x + y) \, dy \, dx$
100. $\int_0^1 \int_0^y e^{x+y} \, dx \, dy$
101. $\int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \int_1^2 6xy^2z^3 \, dx \, dy \, dz$
102. $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} dz \, dy \, dx$

GLOSARIO

Acciones. Derecho a la propiedad parcial de una empresa.

Ahorro nacional (ahorro). Renta total de la economía que queda una vez pagado el consumo y las compras del Estado.

Ahorro privado. La cantidad de renta que les queda a los hogares una vez pagados sus impuestos y su consumo.

Ahorro público. La cantidad de ingresos fiscales que le queda al Estado una vez pagado su gasto.

Apreciación. Aumento del valor de una moneda expresado en la cantidad de divisas que pueden comprarse con ella.

Arancel. Impuesto sobre los bienes producidos en el extranjero y vendidos en el interior.

Balanza comercial. Valor de las exportaciones de un país menos el valor de las importaciones; también llamadas exportaciones netas.

Banco central. Institución destinada a vigilar el sistema bancario y regular la cantidad de dinero que hay en la economía.

Beneficio. Ingreso total menos costo total.

Bono. Certificado de endeudamiento.

Cambios marginales. Pequeños ajustes adicionales de un plan de acción.

Cantidad de equilibrio. Cantidad ofrecida y demandada cuando el precio se ha ajustado para equilibrar la oferta y la demanda.

Cantidad demandada. Cantidad de un bien que los compradores quieren y pueden comprar.

Cantidad ofrecida. Cantidad de un bien que los vendedores quieren y pueden vender.

Capital físico. Stock de equipo y estructuras que se utiliza para producir bienes y servicios.

Capital humano. Conocimientos y cualificaciones que adquieren los trabajadores por medio de la educación, la formación y la experiencia.

Capital. Equipo y estructuras utilizados para producir bienes y servicios.

Colusión. Acuerdo entre las empresas de un mercado sobre las cantidades que van a producir o los precios que van a cobrar.

Complementarios. Dos bienes son complementarios cuando la subida del precio de uno de ellos provoca una disminución de la demanda del otro.

Compras del estado. Gasto de la administración central y de las locales en bienes y servicios.

Consumo. Gasto de los hogares en bienes y servicios, con la excepción de las compras de nueva vivienda.

Costo fijo medio. Costos fijos divididos por la cantidad de producción.

Costo marginal. Aumento que experimenta el costo total cuando se produce una unidad más.

Costo Total. Cantidad que paga una empresa para comprar los factores de producción.

Costo. Valor de todo aquello a lo que debe renunciar un vendedor para producir un bien.

Costos Fijos. Costos que no varían cuando varía la cantidad producida.

Costos Variables. Costos que varían cuando varía la cantidad producida.

Curva de Demanda. Gráfico de la relación entre el precio de un bien y la cantidad demandada.

Curva de Indiferencia. Curva que muestra cestas de consumo que reportan al consumidor el mismo nivel de satisfacción.

Curva de Oferta. Gráfico de la relación entre el precio de un bien y la cantidad ofrecida.

Curva de Phillips. Disyuntiva o intercambio a corto plazo entre la inflación y el desempleo.

Déficit Comercial. Exceso de las importaciones sobre las exportaciones.

Déficit Presupuestario. Exceso del gasto público sobre los ingresos del Estado.

Deflactor del PIB. Indicador del nivel de precios que se calcula dividiendo el PIB nominal por el PIB real y multiplicando el resultado por cien.

Depósito de Valor. Artículo que pueden utilizar los individuos para transferir poder adquisitivo del presente al futuro.

Depósitos a la Vista. Saldo de cuentas bancarias a los que los depositantes tienen acceso a la vista extendiendo un cheque.

Depreciación. Disminución del valor de una moneda expresado en la cantidad de divisas que pueden comprarse con ellas.

Depresión. Grave recesión.

Dinero. Conjuntos de activos de la economía que utilizan los individuos normalmente para comprar bienes y servicios a otras personas.

Dinero-Mercancía. Dinero que adopta la forma de una mercancía que tiene un valor intrínseco.

Discriminación de Precios. Práctica de las empresas consistente en vender el mismo bien a precios diferentes **a los distintos clientes.**

Disposición a Pagar. Cantidad máxima que pagaría un comprador por un bien.

Economía de Mercado. Economía que asigna los recursos por medio de las decisiones descentralizadas de muchas empresas y hogares conforme interactúan en los mercados de bienes y servicios.

Economía. Estudio del modo como la sociedad gestiona sus recursos escasos.

Economías de Escala. Propiedad según la cual el costo total medio a largo plazo disminuye conforme se incrementa la cantidad de producción.

Efectivo. Billetes y monedas en manos del público.

Efecto Multiplicador. Desplazamientos adicionales que experimenta la demanda agregada cuando una política fiscal expansiva eleva la renta y, por lo tanto, el gasto de consumo.

Eficiencia. Propiedad según la cual la sociedad aprovecha de la mejor manera posible sus recursos escasos.

Elasticidad- Precio de la Demanda. Medida del grado en que la cantidad demandada de un bien responde a una variación de su precio; se calcula dividiendo la variación porcentual de la cantidad demandada por la variación porcentual de precio.

Elasticidad- Precio de la Oferta. Medida del grado en que la cantidad ofrecida de un bien responde a una variación de su precio; se calcula dividiendo la variación porcentual de la cantidad ofrecida por la variación porcentual de precio.

Elasticidad. Medida de la sensibilidad de la cantidad demandada o de la cantidad ofrecida a uno de los determinantes.

Equidad. Propiedad según la cual la prosperidad económica se distribuye equitativamente entre los miembros de la sociedad.

Equilibrio. Situación en que la oferta y la demanda se igualan.

Escasez. Carácter limitado de los recursos de la sociedad.

Excedente del Consumidor. Disposición a pagar de un comprador menos cantidad que paga realmente.

Excedente del Productor. Cantidad que percibe un vendedor por un bien menos el costo de producción.

Exceso de Demanda. Situación en que la cantidad demandada es mayor que la ofrecida.

Exceso de Oferta. Situación en que la cantidad ofrecida es mayor que la demandada.

Exportaciones. Bienes producidos en el interior y vendidos en el extranjero.

Factores de Producción. Factores utilizados para producir bienes y servicios.

Fallo del Mercado. Situación en la que un mercado no asigna eficientemente los recursos por sí solo.

Fondo de Inversión. Institución que vende participaciones al público y utiliza los ingresos para comprar una cartera de acciones y bonos.

Huelga. Retirada organizada de trabajo de una empresa por parte de un sindicato.

Huida de Capitales. Gran y repentina reducción de la demanda de activos de un país.

Importaciones. Bienes producidos en el extranjero y vendidos en el interior.

Impuesto de la Inflación. Ingreso que recauda el Estado creando dinero.

Impuesto Sobre la Renta. Sistema tributario que recauda ingresos de los hogares e instituciones de renta alta y realiza transferencias a los de renta baja.

Índice de Precios al Consumidor (IPC). Medida del costo total de los bienes y servicios comprados por un consumidor representativo.

Índice de Precios al por Mayor. Indicador del costo de una cesta de bienes y servicios comprada por las empresas.

Indiciación. Corrección automática por ley o por contrato de una cantidad monetaria para tener en cuenta los efectos de la inflación.

Inflación. Aumento del nivel general de precios de la economía.

Ingreso Marginal. Variación que experimenta el ingreso total cuando se vende una cantidad más.

Ingreso Medio. Ingreso total dividido por la cantidad vendida.

Ingreso Total (en un mercado). Cantidad pagada por los compradores y percibidas por los vendedores de un bien; se calcula multiplicando el precio del bien por la cantidad vendida.

Ingreso Total (en una empresa). Cantidad que recibe una empresa por la venta de su producción vendida.

Intermediarios Financieros. Instituciones financieras a través de las cuales los ahorradores pueden suministrar fondos indirectamente a los prestatarios.

Inversión. Gasto en equipo de capital, existencias y estructuras, incluidas las compras de nueva vivienda por parte de los hogares.

Ley de la Demanda. Ley que establece que manteniéndose todo lo demás constante, la cantidad demandada de un bien disminuye cuando sube su precio.

Ley de la Oferta y de la Demanda. Ley que establece que el precio de un bien se ajusta para equilibrar su oferta y su demanda.

Ley de la Oferta. Ley que establece que manteniéndose todo lo demás constante, la cantidad ofrecida de un bien aumenta cuando sube su precio.

Liberalismo. Filosofía política según la cual el Estado debe elegir la política que se considere justa tal como la evaluaría un observador imparcial tras un «velo de ignorancia»

Liquidez. Facilidad con que puede convertirse un activo en medio de cambio de la economía.

Macroeconomía. Estudio de los fenómenos que afectan al conjunto de la economía, el desempleo y el crecimiento económico.

Medio de Cambio. Artículo que los compradores entregan a los vendedores cuando quieren comprar bienes y servicios.

Mercado Competitivo. Mercado en el que hay muchos compradores y muchos vendedores, por lo que cada uno de ellos ejerce una influencia insignificante en el precio del mercado.

Mercado. Grupo de compradores y vendedores de un bien o de un servicio.

Mercados Financieros. Instituciones financieras a través de las cuales los ahorradores pueden suministrar directamente fondos a los prestatarios.

Microeconomía. Estudio del modo en que los hogares y las empresas toman decisiones y de la forma en que interactúan en los mercados.

Monopolio. Empresa que es la única que vende un producto que no tiene sustitutivos cercanos.

Multiplicador del Dinero. Cantidad de dinero que genera el sistema bancario con cada dólar de reservas.

Oferta Monetaria. Cantidad de dinero de que dispone la economía.

Oligopolio. Estructura del mercado en la que sólo unos cuantos vendedores ofrecen productos similares o idénticos.

Operaciones de Mercado Abierto. Compraventa de bonos del Estado por parte del banco central.

Paridad del Poder Adquisitivo. Teoría de los tipos de cambio según la cual una unidad de una moneda debe ser capaz de comprar la misma cantidad de bienes en todos los países.

PIB Nominal. Producción de bienes y servicios valorada a los precios de cada momento.

PIB Real. Producción de bienes y servicios valorada a precios constantes.

Población Activa. Número total de trabajadores, incluidos los ocupados como los desempleados.

Poder de Mercado. Capacidad de un único agente económico (o de un pequeño grupo de ellos) para influir considerablemente en los precios de mercado.

Política Comercial. Política del gobierno que influye directamente en la cantidad de bienes y servicios que importa o exporta un país.

Política Monetaria. Fijación de la oferta monetaria por parte de las autoridades monetarias del banco central.

Precio de Equilibrio. Precio que equilibra la oferta y la demanda.

Precio Máximo. Precio legal más alto al que puede venderse un bien.

Precio Mínimo. Precio legal más bajo al que puede venderse un bien.

Precio Mundial. Precio de un bien vigente en el mercado mundial de ese bien.

Productividad. Cantidad de bienes y servicios producidos con cada hora de trabajo.

Producto Interno Bruto (PIB). Valor de mercado de todos los bienes y servicios finales producidos en un país durante un determinado periodo de tiempo.

Producto Marginal. Aumento que experimenta la producción con cada unidad adicional de factor.

Producto Nacional Bruto (PNB). Valor de mercado de todos los bienes y servicios finales producidos por los residentes permanentes de un país durante un determinado periodo de tiempo.

Recesión. Período de disminución de las rentas reales y de aumento de desempleo.

Recursos Comunes. Bienes que son rivales pero no excluibles.

Recursos Naturales. Factores que intervienen en la producción de bienes y servicios y que son aportados por la naturaleza, como la tierra, los ríos y los yacimientos naturales.

Renta Permanente. Renta normal de una persona.

Reservas Exigidas. Cantidad mínima de reservas que deben tener los bancos para respaldar los depósitos.

Reservas. Depósitos que los bancos han recibido, pero no han prestado.

Seguro de Desempleo. Programa público que protege parcialmente la renta de los trabajadores cuando se quedan desempleados.

Sindicato. Asociación de trabajadores que negocia con los empresarios sobre los salarios y las condiciones de trabajo.

Sistema Financiero. Grupo de instituciones de la economía que ayudan a conectar el ahorro de una persona y la inversión de otra.

Superávit Comercial. Exceso de las exportaciones sobre las importaciones.

Sustitutivos. Dos bienes son sustitutivos cuando la subida del precio de uno de ellos provoca un aumento de la demanda del otro.

Tabla de Demanda. Cuadro que muestra la relación entre el precio de un bien y la cantidad demandada.

Tabla de Oferta. Cuadro que muestra la relación entre el precio de un bien y la cantidad ofrecida.

Tasa de Actividad. Porcentaje de la población adulta que pertenece a la población activa.

Tasa de Desempleo. Porcentaje de la población activa que está desempleada.

Tasa de Inflación. Variación porcentual que experimenta el índice de precios al consumidor con respecto al periodo anterior.

Tasa de Pobreza. Porcentaje de la población cuya renta familiar se encuentra por debajo de un nivel absoluto llamado umbral de pobreza.

Tasa Natural de Desempleo. Tasa normal de desempleo en torno a la cual fluctúa la tasa de desempleo.

Teoría Cuantitativa del Dinero. Teoría según la cual la cantidad disponible de dinero determina el nivel de precios y la tasa de crecimiento de la cantidad disponible de dinero determina la inflación.

Teoría de los Juegos. Estudio del modo de comportamiento de los individuos en situaciones estratégicas.

Tipo de Cambio Nominal. Relación a la que una persona puede intercambiar la moneda de un país por la de otro.

Tipo de Cambio Real. Relación a la que una persona puede intercambiar los bienes y servicios de un país por los de otro.

Tipo de Descuento. Tipo de interés de los préstamos que concede el banco central a los bancos comerciales.

Tipo de Interés Nominal. Tipo de interés que suele anunciarse sin corregirlo para tener en cuenta los efectos de la inflación,

Tipo de Interés Real. Tipo de interés corregido para tener en cuenta los efectos de la inflación.

Umbral de Pobreza. Nivel absoluto de renta fijado por los gobiernos para cada tamaño de familia por debajo del cual se considera que una familia está en pobreza.

Utilidad. Medida de la felicidad o de la satisfacción.

Utilitarismo. Filosofía política según la cual el Estado debe elegir la política que maximice la utilidad total de todos los miembros de la sociedad.

Variables Nominales. Variables expresadas en unidades monetarias.

Variables Reales. Variables expresadas en unidades físicas.

Velocidad del dinero. Tasa a la que el dinero cambia de manos.

Ventaja Absoluta. Comparación entre los productores de un bien de acuerdo con su productividad.

Ventaja Comparativa. Comparación entre los productores de un bien de acuerdo con su costo de oportunidad.

APÉNDICE

Tabla de integrales seleccionadas

Formas racionales que contienen (a+bu)

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
2. $\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b} \ln|a+bu| + c$
3. $\int \frac{u du}{a+bu} = \frac{u}{b} - \frac{a}{b^2} \ln|a+bu| + c$
4. $\int \frac{u^2 du}{a+bu} = \frac{u^2}{2b} - \frac{au}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} \ln|a+bu| + c$
5. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + c$
6. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + c$
7. $\int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left(\ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu} \right) + c$
8. $\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{u}{b^2} - \frac{a^2}{b^3(a+bu)} - \frac{2a}{b^3} \ln|a+bu| + c$
9. $\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + c$
10. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)^2} = -\frac{a+2bu}{a^2u(a+bu)} + \frac{2b}{a^3} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + c$
11. $\int \frac{du}{(a+bu)(c+ku)} = \frac{1}{bc-ak} \ln \left| \frac{a+bu}{c+ku} \right| + c$
12. $\int \frac{u du}{(a+bu)(c+ku)} = \frac{1}{bc-ak} \left[\frac{c}{k} \ln|c+ku| - \frac{a}{b} \ln|a+bu| \right] + c$

Formas que contienen $\sqrt{a+bu}$

13. $\int u \sqrt{a+bu} du = \frac{2(3bu-2a)(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{15b^2} + c$
14. $\int u^2 \sqrt{a+bu} du = \frac{2(8a^2-12abu+15b^2u^2)(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{105b^3} + c$
15. $\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(bu-2a)\sqrt{a+bu}}{3b^2} + c$
16. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(3b^2u^2-4abu+8a^2)\sqrt{a+bu}}{15b^3} + c$
17. $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}} \right| + c ; a > 0$
18. $\int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

Formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$

19.
$$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + c$$

20.
$$\int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + c$$

21.
$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + c$$

22.
$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2} du}{u} = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + c ; a > 0$$

Formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

23.
$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{2} \left(u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| \right) + c$$

24.
$$\int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + c$$

25.
$$\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2} du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + c$$

26.
$$\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2} du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} + \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$$

27.
$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + c$$

28.
$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u} \right| + c$$

29.
$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{1}{2} \left(u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| \right) + c$$

30.
$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\pm \sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + c$$

31.
$$\int (u^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm 5a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + c$$

32.
$$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + c$$

33.
$$\int \frac{u^2 du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + c$$

Formas racionales que contienen $a^2 - u^2$ y $u^2 - a^2$

34.
$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c$$

35.
$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$$

Formas exponenciales y logarítmicas

36. $\int e^u du = e^u + c$

37. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1$

38. $\int ue^{au} du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + c$

39. $\int u^n e^{au} du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$

40. $\int \frac{e^{au} du}{u^n} = -\frac{e^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{au}}{u^{n-1}} du, \quad n \neq 1$

41. $\int \ln u du = u \ln u - u + c$

42. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1} \ln u}{n+1} - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + c, \quad n \neq -1$

43. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln|\ln u| + c$

44. $\int \frac{du}{a+be^{cu}} = \frac{1}{ac}(cu - \ln|a+be^{cu}|) + c$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Capítulo I

Integrales Indefinidas

1. $x + c$

2. $\frac{1}{7}x^7 + c$

3. $\frac{3}{4}x^{-4} + c$

4. $4y^{1/4} + c$

5. $\frac{1}{2}z^2 + 4z + c$

6. $\frac{1}{3}z^3 + 4z^2 + 4z + c$

7. $(7 + e)x + c$

8. $\frac{-3}{8}x^4 + \frac{1}{10}x^2 + c$

9. $\sqrt{2}e^x + c$

10. $\frac{3}{8}x^{2/3} + c$

11. $\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^{-2} + c$

12. $\frac{1}{4.2}y^{4.2} - \frac{3}{2}y^4 - y^{-3} + \ln|y| - 2\pi y + c$

13. $\frac{3}{10}u^2 - \frac{4}{5}u + c$

14. $\frac{u^{e+1}}{e+1} + e^u + c$

15. $\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{6}{5}x^{5/4} + c$

16. $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x^2 - 12x + c$

17. $\frac{-3}{10}x^{5/3} - 7\sqrt{x} + c$

18. $\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{6}{5}x^{5/2} + \frac{10}{3}x^{3/2} + c$

19. $\frac{2}{3}u^3 + 3u + \frac{1}{2}u^{-4} + c$

20. $\frac{1}{6}z^3 + \frac{5}{2}z^2 + c$

21. $\frac{5}{2}x^{4/5} - x + c$

22. $\frac{9}{2}x + c$

23. $\frac{1}{36}e^x + c$

24. $\frac{2}{27}x^{-2} + c$

25. $\frac{-1}{2}x^2 + 3x + c$

26. $\frac{3}{10}e^{1/3x} - \frac{3}{2}\ln|x| + 2\sqrt{x} + c$

27. $\frac{1}{0.6}x^{0.6} + \frac{e^2x^2}{2} + \pi x + c$

28. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + c$

29. $\frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + c$

30. $\frac{1}{3}x^3 + c$

31. $\frac{1}{2}x^2 + c$

32. $x^2 + 2x + c$

33. $\frac{-3}{4}x^{-4/3} - 3x^{-1/3} + \frac{1}{2}x^{2/3} + c$

34. $6x^{1/3} + 6x^{2/3} + c$
35. $\frac{4}{3}z^{3/4} - \frac{6}{5}z^{5/6} + c$
36. $\frac{1}{2}e^{2y} + \frac{1}{2}e^{-2y} + c$
37. $\frac{1}{4}y^4 + \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + c$
38. $\frac{2^x}{\ln 2} + c$
39. $x + e^x + c$
40. $\frac{3^{1-x}}{\ln 3} + c$

Problemas de aplicación de integrales indefinidas

41. a) $C(q) = -q^3 + 12q^2 + 10q + 20$
 b) $C(2) = 80$
 c) $\bar{C}(5) = 9$
42. $R(q) = -q^3 - \frac{9}{2}q^2 + 15q$ $p = -q^2 - \frac{9}{2}q + 15$
43. a) $C(q) = 2000 e^{0,001q}$
 b) $C(200) = 2.442,8$
 c) $\bar{C}(50) = 42,051$
 d) $\bar{C}(q) = \frac{2000e^{0,001q}}{q}$
44. $\pi(220) = 3.019,2$
45. a) $C(q) = 0,025q^2 + 30q + 1000$
 b) $C(180) = 7.210$

c) $q = 400$

46. $\pi(5) = -0,001q^2 + 5q - 140$

47. a) $C'(q) = 140$ por unidad

b) $C(40) = 14.000$

48. $C(x) = 2x^2 + 2x + 80$

49. a) $\bar{C}(x) = 6x^{-1} + \frac{1}{6}x + 8$

b) $\bar{C}(12) = 10,167$

50. $R(x) = 7.267,84$

51. $G(x) = 2.300$

52. $P(10) = 504$ especies

Ejercicios de integrales por sustitución

53. $\frac{-1}{5} (2 - x)^5 + c$

54. $3\left(\frac{1}{2}x + 6\right)^{2/3} + c$

55. $\frac{-7}{12} (1 - 3x^2)^{6/7} + c$

56. $2 \ln|2x + 1| + c$

57. $\frac{1}{6} e^{2x^3+6} + c$

58. $\frac{1}{2} \ln^2 3x + c$

59. $\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + c$

60. $\ln|x^2 + 2x + 3| + c$

61. $\frac{-9}{4}(1 + e^{-3x})^{4/3} + c$
62. $\frac{-1}{2}e^{-3x^2-8x+5} + c$
63. $2 \ln|x^3 - 6x + 1| + c$
64. $\frac{1}{4}(3t + 8)^{4/3} + c$
65. $\frac{1}{3} \ln|2 + t^3| + c$
66. $\sqrt{x} \ln|\sqrt{x}| + c$
67. $\frac{-1}{(\sqrt{y}-2)^2} + c$
68. $\ln|\ln x| + c$
69. $\frac{-10}{\sqrt{\ln w}} + c$
70. $\frac{2}{9}(\sqrt{x} + 2)^3 + c$
71. $\frac{2}{3}e^{(x^3+1)/2} + c$
72. $\frac{\sqrt{x^4-4x}}{2} - (\ln 7)x + c$
73. $x - \ln|x + 1| + c$
74. $\sqrt{e^{x^2+2}} + c$
75. $\frac{1}{3}x^3 + 4x + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x| + c$
76. $2 \ln|x^2 - 4| + c$
77. $\ln|x^3 - 2x| + c$
78. $\frac{-2}{3}e^{-\sqrt{x^3}} + c$

Problemas de aplicación de integrales por sustitución

79. 55

80. a) $C(q) = 20 \ln(q + 5) + 3967,8$

b) $C(100) = 4.060,9$

c) $\bar{C}(100) = 40.609$

d) $\bar{C}(q) = \frac{20}{q} \ln(q + 5) + \frac{3.967,8}{q}$

81. $p = 0,0125$

82. $p = \frac{-200}{q(q+2)}$

83. $C(q) = 20 \ln(q + 5) + 1.967,8$

84. $V(10) \approx 711/m^2$

85. $I = 3$

86. a) $C'(81) = 0,5667$

b) $C(I) = \frac{1}{2}I + 3,744\sqrt[3]{I} - 1,8$

87. a) $C(x) = (x + 180)^{1,05} - 33,365$ $R(x) = 4\sqrt{0,5x + 4} + 2,8x - 8$

b) $G(x) = 114,74 \rightarrow x = 200 \text{ mil unidades}$

88. a) $C'(36) = 32$

b) $C(36) = 1.255,86$

c) $\bar{C}(36) = 34,88$

Ejercicios de integrales por partes

89. $\frac{7}{2}xe^{2x} - \frac{7}{4}e^{2x} + c$

90. $\frac{-8}{5}x(2-x)^{5/2} - \frac{16}{35}(2-x)^{7/2} + c$

91. $x \ln x - x + c$

92. $2(2+x)\sqrt{x-2} - \frac{4}{3}(x-2)^{3/2} + c$

93. $\frac{1}{4}x + \frac{3}{16}\ln|4x-3| + c$

94. $\frac{1}{9}xe^{3x-4} - \frac{1}{27}e^{3x-4} + c$

95. $\frac{1}{3}x^3 + e^x(2-2x) + \frac{1}{2}e^{2x} + c$

96. $\frac{-1}{2}x^2 - \ln|x^2-2| + c$

97. $2e^{x/2}(x-2) + c$

98. $(2x-1)e^{-x} + c$

99. $\frac{1}{2}t^2 \left(\ln 2t - \frac{1}{2} \right) + c$

100. $\frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c$

101. $4\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + c$

102. $x(2x+1)^{1/2} - \frac{(2x+1)^{3/2}}{3} + c$

103. $\frac{1}{7}(x+1)(x+2)^7 - \frac{1}{56}(x+2)^8 + c$

104. $t^2 \ln t - \frac{t^2}{2} + c$

105. $\frac{x^2}{22}(x^2-1)^{11} - \frac{1}{264}(x^2-1)^{12} + c$

Problemas de aplicación del método por partes.

106. $C(20) = 7,3 \$$

107. $P(t) = \frac{t^2}{4} \ln(t+1) - \frac{(t+1)^2}{8} - \frac{1}{4} \ln(t+1) + 2000,125 \approx 2010$ personas

108. $Q(3) = 176,87$

109. 13.202.06 \$

110. $C(x) = x + 3 [x \ln(x+1) - (x+1) + \ln(x+1)] + 103$

Capítulo II

Ejercicios sobre integrales definidas

1.. 8

2. $-50/3$

3. 68

4. $98/3$

5. 1

6. 22,718

7. 1,2859

8. 6,7279

9. $\frac{e^3}{2} (e^{12} - 1)$

10. $\frac{1}{2} (e + e^{-1} - 1)$

11. e^5

12. $2(1 - e)$

13. $\frac{1}{e^3} - \frac{3}{e} - \frac{3}{2e^2} + \frac{3}{\pi} + \frac{3}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}$

14. 109,714

15. 7

16. $1/3$

Problemas de aplicación de las integrales definidas

17. 1500

18. 328

19. 0,02

20. 8639 \$

21. 1973, 33

22. a) 696 b) 492

23. $\frac{1}{k} [1 - e^{-2KR}]$

24. $\alpha^{5/2} T$

25. 1728,28 Bf

26. 98 personas

27. 1220 personas

28. 176,256 \$

29. - 231,373 \$

Ejercicios sobre cálculo de áreas

30. $24 u^2$

31. $7,5 u^2$

32. $42 u^2$

33. $17,367 u^2$

34. $16 u^2$

35. $1/12 u^2$

36. $4,5 u^2$

37. $33/2 u^2$

38. $84 u^2$

39. $0,15 u^2$

40. $4/3 u^2$

41. $22/3 u^2$

42. $0,75 u^2$

43. $9 u^2$

44. $\frac{e^2-1}{e} u^2$

45. $1/6 u^2$

46. $4/3 u^2$

47. $8\sqrt{6} u^2$

48. $40 u^2$

49. $125/6 u^2$

50. $9 u^2$

51. $125/12 u^2$

52. $44/3 u^2$

53. $\frac{4}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) u^2$

54. $0,5 u^2$

- 55. $12 u^2$
- 56. $125/6 u^2$
- 57. $19/3 u^2$
- 58. $5/6 u^2$
- 59. $4/3 u^2$

Problemas de aplicación de las áreas

Curva de Lorenz

- 60. a) CG (1980) = 0,35
b) CG (1990) = 0,37

Fue más equitativa en 1980, por tanto, el efecto de las leyes tributarias no fue tan eficiente

- 61. a) CG (blancos) = 0,391
b) CG (negros) = 0,431

Para los blancos es más equitativo.

- 62. a) **0,051** , *el 20% de los perceptores ganan 5,1 % del ingreso*
b) **0,31**
- 63. a) **26,19 %**
b) **0,317**
- 64. a) 0,33
b) **0,5**

Excedente de los consumidores y productores

65. $EC = 32$ $EP = 16$

66. $EC = 89,081$ $EP = 22,5$

67. a) $x = 4$

b) $EC = 4,22$

68. $EP = 50,67$

69. a) $EC = 2.438,17$

b) $EP = 2.178,10$

70. $EC = 36 \$$

71. $EC = 1.920$

72. a) $q = 18$

b) $EC = 162$

73. a)

b) $EC = 33,34$

Valor promedio de una función

74. a) **485**

b) $\bar{C}(40) = 23 \$$

75. a) **1.402 unidades**

b) 535.333,33

76. a) **102,5 unidades**

b) **100 unidades**

77. 2.740,4
78. **4.833,3**
79. a) **29.836**
b) **24.428**
c) **24.591**
80. **7,40 %**

Problemas de aplicación sobre flujo de ingresos continuos

81. **2.594.000 \$ aproximadamente**
82. **506.000**
83. **346.664 \$**

Problemas de aplicación sobre valor presente y futuro de un flujo de ingresos

84. **$V_p = 699.000 \$$**
85. **$V_f = 4.699,05 \text{ millones de } \$$**
86. **$V_p = 265.781$ $V_f = 377.161$**
87. **$V_p = 190.519$ $V_f = 347.148$**
88. **Tienda ropa infantil 151.024; Tienda de video 141.093**

La tienda de video es una mejor compra

Ejercicios sobre integrales por fracciones parciales

89. $\frac{A}{2x+3} + \frac{B}{x-1}$

$$90. \frac{x^2+9x-12}{(3x-1)(x+6)^2}$$

$$91. \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1}$$

$$92. 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$93. \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^2}$$

$$94. \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)} + \frac{Fx+G}{(2x^2+5x+7)} + \frac{Hx+I}{(2x^2+5x+7)^2}$$

$$95. \frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+9)^3}$$

$$96. \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+6}$$

$$97. \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$98. \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$$99. 2 \ln|x| + 3 \ln|x-1| + c$$

$$100. \ln \left| \frac{(x-2)^4}{(x+1)^3} \right| + c$$

$$101. \frac{1}{4} \left[\frac{3x^2}{2} + \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 \right] + c$$

$$102. \ln \left| \frac{x^2 \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x+1)^7}} \right| + c$$

$$103. \ln|x^6 + 2x^4 - x^2 - 2| + c$$

$$104. \frac{4}{x-2} + \ln \left| \frac{(x-2)^7}{(x-1)^5} \right| + c$$

$$105. -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{x-3} + c$$

$$106. \ln[(x^2 + 1)^5(x^2 + 2)^2] + c$$

$$107. 18 \ln 4 - 10 \ln 5 - 8 \ln 3 + c$$

108. $x^2 + x + 2\ln|x| + 3\ln|x + 1| - \ln|x - 3| + c$

109. $\frac{x^2}{2} - 4\ln(x^2 + 4) - \frac{8}{x^2+4} + c$

110. $\frac{1}{3} \left(\frac{5}{6} \ln|x + 3| + \frac{7}{6} \ln|x - 3| \right) + c$

111. $\ln \left[\frac{(x^2+x+1)^2}{x^4} \right] + c$

112. $\frac{(1-\ln 2)}{2}$

113. $2\ln 2 + 0,5$

114. $-\frac{1}{36} \ln|x + 5| + \frac{1}{6} \frac{1}{(x+5)} + \frac{1}{36} \ln|x - 1| + c$

115. $\ln|x + 1| + \frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c$

116. $\frac{27}{5} \ln 2 - \frac{9}{5} \ln 3 + c$

117. $2\ln|x| + 3\ln|x + 2| + x^{-1} + c$

118. $0,5 \ln(t^2 + 1) + 0,5 \ln(t^2 + 2) - \frac{1}{\sqrt{2}} t g^{-1}(t) + c$

Ejercicios de integrales por medio de tablas

119. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{16x^2+3}-\sqrt{3}}{4x} \right| + c$

120. $0,33 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} \right| + c$

121. $\frac{1}{2} \left[\frac{4}{5} \ln|4 + 5x| - \frac{2}{3} \ln|2 + 3x| \right] + c$

122. $\frac{1}{15} [3x - \ln(5 + 2e^{3x})] + c$

123. $7 \left[\frac{1}{5(5+2x)} + \frac{1}{25} \ln \left| \frac{x}{5+2x} \right| \right] + c$

124. $0,5(x\sqrt{x^2 - 3} - 3\ln|x + \sqrt{x^2 - 3}|) + c$

125. $\frac{1}{144}$

126. $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$

127. $\frac{\sqrt{5}}{2} \left(-\frac{\sqrt{5x^2+1}}{\sqrt{5x}} + \ln|\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 1}| \right) + c$

128. $\frac{1}{9} \left(\ln|1 + 3x| + \frac{1}{1+3x} \right) + c$

129. $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}x}{\sqrt{7} - \sqrt{5}x} \right| \right) + c$

130. $\frac{4}{81} \left[\frac{(3x)^6 \ln 3x}{6} - \frac{(3x)^6}{36} \right] + c$

131. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{16x^2+3} - \sqrt{3}}{4x} \right| + c$

132. $\frac{7x^3}{9} (3 \ln(4x) - 1) + c$

133. $\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + c$

Ejercicios sobre regla de los trapecios y Simpson

134. a) **3,283**

b) **3,240**

135. a) **0,743**

b) **0,747**

136. a) **7,132**

b) **7,197**

137. a) R_T : **6,8895**

b) R_S : **6,9978**

138. a) $R_T: 0,7430$
b) $R_S: 0,7469$
139. a) $R_T: 0,8991$
b) $R_S: 0,8990$
140. a) $0,5090$; $|E_4| \leq 0,0313$
b) $0,5004$; $|E_4| \leq 0,0026$
141. a) $0,5090$; $|E_9| \leq 0,125$
b) $0,5004$
142. a) $0,5090$; $|E_4| \leq 0,0052$
b) $0,5004$; $|E_4| \leq 0,0021$
143. a) $0,5090$; $|E_6| \leq 0,0005$
b) $0,5004$; $|E_6| \leq 3,33 \times 10^{-5}$

Problemas de aplicación sobre métodos numéricos de integración

144. **1.746.937,5**
145. **15,4**
146. **312 pies²**
147. **51,71 millas**
148. **21 pacientes**

Ejercicios sobre integrales impropias

149. $1/3^{12}$

150. **2**

151. ∞

152. ∞

153. **1**

154. **1**

155. ∞

156. **0,5**

157. **1**

158. e

159. ∞

160. ∞

161. **0,5**

162. **10**

163. **0**

Problemas de aplicación de integrales impropias

164. **700.000 Bf**

165. **100.000 Bf**

166. **70.000 Bf**

167. **20.000 Bf**

168. **210.000 Bf**

169. a) **1** b) $\frac{11}{32}$ c) $\frac{5}{32}$

170. a) 1 b) 0,3298 c) 0,1991
171. a) 0,0577 b) 0,4512 c) 0,5488
172. a) 14,47 % b) 63,21 % c) 36,79 %
173. 0,3333
174. 0,3679
175. 0,1353
176. a) $\frac{45}{2}$ seg
- b) 3 minutos
- c) 4 minutos

Capítulo III

Ecuaciones diferenciales

1. $y = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + c\right)^2$
2. $y = c(1 + x^2)$
3. $y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{3} + 2x + c}$
4. $y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$
5. $x = \frac{c e^{\frac{1}{4}(2t+1)}}{(2t+1)^{\frac{1}{4}}}$
6. $y = \frac{c}{x}$
7. $y = -\frac{2}{x^2+c}$
8. $y = c x$

9. $y = \sqrt[3]{3x - 2}$

Problemas de aplicación sobre ecuaciones diferenciales

10. $y = \ln \frac{x^3 + 3}{3}$

11. $y = \frac{48(3x^2 + 2)^2}{4 + 31(3x^2 + 2)^2}$

12. $y = \sqrt{\left(\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - 1}$

13. $y = \ln(0,5 \sqrt{x^2 + 3})$

14. $y = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$

15. $x = \frac{c e^{0,4(t+1)^{2,5}}}{e^{0,66}}$

16. 4.441,53 millones

17. 63,40 años

18. 156.800

19. $\lambda = 0,01022$ $V_M = 67,82$ dias

20. $N = N_0 e^{K(t-t_0)}$ $t \geq t_0$

21. a) $A = 400(1 - e^{-0,5})$ b) 157 g/m^2

22. 11.980

23. 6.923

24. 500

25. 2.637 votos

26. 155.555,56 \$

27. $28,43 \text{ semanas}$

28. $78.415,61$

29. $p = \frac{1}{\sqrt{q}}$

30. $p = \frac{23,39}{\sqrt[3]{q^2}}$

Capítulo IV

Definiciones básicas

1. 7

2. 3

3. 1

4. 115

5. $\frac{5}{12}$

6. $\text{Dominio} = R^2 = \left\{ \frac{x,y}{x} \in R, y \in R \right\}; \quad \text{Imagen} = R$

7. $\text{Dominio} = R^2 ; \quad \text{Imagen} = [0, \infty)$

8. $\text{Dominio} = \{x, y\} \in R^2 / x^2 + y \geq 0\}; \quad \text{Imagen} = [0, \infty)$

9. $\text{Dominio} = \{x, y\} \in R^2 / 2x - y > 0\}; \quad \text{Imagen} = R$

10. $\text{Dominio} = \{(x, y) \in R^2 / 4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\} \text{Imagen} = [0, 2]$

Derivadas parciales

11. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 8xy^3 + 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 12x^2y^2 + 2y$

12. $\frac{\partial f}{\partial x} = 10xy^2 + y^3 - 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 10x^2y + 3xy^2 - 1$

$$13. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2+4y^2-5x}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2-5x}}$$

$$14. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4ye^{2x+y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(1+y)e^{2x+y}$$

$$15. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = (1+x+y)e^x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y$$

16. **8**

17. **1**

18. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

19. **22,636**

20. **2**

Derivadas parciales de orden superior

$$21. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial_x} = 6x$$

$$22. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} = -1$$

$$23. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-3y^3}{(3x^2-y^3)^{3/2}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} = \frac{3y^4-36xy}{4(3x^2-y^3)^{3/2}}$$

$$24. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\ln 2 y^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} = \frac{18x}{y}$$

$$25. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16x^2 e^{2y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} = 16x e^{2x}$$

$$26. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 z \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial_x \partial_y \partial_z} = 6xy^2$$

$$27. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 54(x^2 + 3y - z) \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial_x \partial_y \partial_z} = -36x$$

28. $f_{xy}(1,2) = -12$

29. $f_{xy}(1,1) = 6e$

30. $f_{xy}(3,2) = 0$ $f_{xx}(3,2) = 2$

31. $f_{xy}(1,2) = -156$ $f_{xx}(1,2) = -426$

32. $f_{yy}(3,4) = 0$

33. $f_{yy}(3,1) = \frac{1}{125}$ $f_{yx}(3,1) = \frac{9}{125}$

Regla de la cadena

34. $\left[2t + \frac{3\sqrt{t}}{2}\right]e^{x+y}$

35. $5(2xz^2 + yz) + 2(xz + z^2) - (2x^2z + xy + 2yz)$

36. $-2s(2x + yz) + r(xz) + 2s(xy + 2z)$

37. $19s(2x - 7)$

38. 324

39. $\frac{40}{e^9}$

Máximos y mínimos sin restricciones

40. $f(x, y)$ tiene un mínimo en $(-1,2)$ y el valor mínimo es $f(-1,2) = -1$

41. $f(x, y)$ tiene un punto silla en $(0,0)$

42. $f(x, y)$ no tiene máximo, mínimo ni punto silla

43. $f(x, y)$ tiene un máximo en $(4,2)$ y el valor máximo es $f(4,2) = 112$

44. $f(x, y)$ tiene un mínimo en (k, k) y el valor mínimo es $f = -k^3$
 $f(x, y)$ tiene un mínimo en $(3,9)$ y un punto silla en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$
y el valor mínimo es $f(3,9) = -59$

45. $f(x, y)$ tiene un mínimo en $(-1, 1)$ y el valor mínimo es $f(-1, 1) = 3$
46. $f(x, y)$ tiene un mínimo en $(-1, 2)$ y el valor mínimo es $f(-1, 2) = -10$
47. $f(x, y)$ tiene un máximo en $(2, 1)$ y el valor máximo es $f = 13$
48. Los puntos críticos de $f(x, y)$ son $(2, 1); (-2, -1); (-2, 1); (2, -1);$
Son puntos silla $(-2, 1); (2, -1)$, el valor mínimo es $f(2, 1) = -18$
y el valor máximo es $f(-2, -1) = 18$

Máximo y mínimos con restricciones

49. Punto crítico $(15, 10)$
50. Punto mínimo $(\frac{17}{2}, 4)$
51. Punto crítico $(2, 20)$
52. Punto crítico $(6, 3, 2)$
53. Punto crítico $(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3})$
54. Punto crítico $(2, 3, 4)$
55. No posee puntos críticos
56. Máximo $f(2, 2, 2) = 6$ Mínimo $f(-2, -2, -2) = -6$
57. Mínimo $f(-4, 2, -6) = 56$
58. Mínimo $f(6, 9) = 612$

Problemas de aplicación

59. a) $\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -50$ $\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -50$ $\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -50$ $\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -50$ *Competitivo*

$$b) \frac{\partial q_A}{\partial P_A} = \frac{-100}{P_A^2 P_B^{0,3}} \quad \frac{\partial q_A}{\partial P_B} = \frac{-50}{P_A P_B^{1,3}} \quad \frac{\partial q_B}{\partial P_B} = \frac{-500}{P_B^2 P_A^{0,33}} \quad (\text{Complementarios})$$

$$61. \quad \frac{\partial P}{\partial B} = 0,01A^{0,27}B^{-0,99}C^{0,01}D^{0,23}E^{0,09}F^{0,27}$$

$$\frac{\partial P}{\partial C} = 0,01A^{0,27}B^{0,01}C^{-0,99}D^{0,23}E^{0,09}F^{0,27}$$

62. 4.480; Si un gerente con grado de MAE tiene un año adicional de experiencia en el trabajo antes del grado, recibirá 4480 Bf. por año adicionales.

$$63. \quad a) -1,015 \quad -0,846 \quad b) \text{uno para el cual } w = w_0 \text{ y } s = s_0$$

$$64. \quad a) \text{ Cuando } P_A = 9 \text{ y } P_B = 16; \quad \frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -\frac{20}{27} \quad y \quad \frac{\partial q_A}{\partial P_B} = \frac{5}{12}$$

b) La demanda de A disminuye en aproximadamente $\frac{5}{6}$ unidades

65. a) No

b) 70%

$$66. \quad \text{Cuando } P_A = 25 \text{ y } P_B = 4, \text{ entonces } \frac{\partial c}{\partial P_A} = -\frac{1}{4} \quad y \quad \frac{\partial c}{\partial P_B} = \frac{5}{4}$$

$$67. \quad a) \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$b) -\frac{20}{3\sqrt{2}+15e}$$

$$68. \quad L = 18 \text{ y } K = 14$$

$$69. \quad L = 24 \text{ y } K = 14$$

$$70. \quad P_A = 5,1 \quad P_B = 7,625$$

$$71. \quad L = 2 \quad K = 13,333$$

$$72. \quad x = \frac{20}{3} \quad y = \frac{10}{3}$$

73. $P_a = 96,25$ $P_b = 163,75$
74. $q_a = 48$ $q_b = 22,5$ $P_a = 52$ $P_b = 26,5$ $\pi_{Max} = 2010,3$
75. $q_a = 2,565$ $q_b = 1,572$
76. a) $q_a = 3$ $q_b = 5$
b) $P_a = 34$ $P_b = 23$
c) *Utilidad máxima* = 64,5
77. $x = 45$ $y = 40$
78. $q_1 = 100$ $q_2 = 300$
79. $q_1 = 1275$ $q_2 = 125$
80. $L = 1852$ $K = 1234$
81. $L = 800$ $K = 1066,67$
82. a) $L = 3$ $K = 4$
b) $L = 3$ $K = 4$, $q = 3040$
83. a) $L = 6000$ $K = 1000$
b) ambas razones valen $\frac{1}{3}$
84. $x = 7$ $y = 11$
85. $L = 360$ $K = 240$
86. $L = 1500$ $K = 500$
87. a) $L = 60$ $K = 5$
b) ambas razones valen $\frac{1}{4}$
88. $L = 50$ $K = 20$

89. $L = 58 \quad K = 52$

90. $L = 33 \quad K = 20$

91. a) $L = 120 \quad K = 60$

b) $C_{Mgx} = C_{promx} = 200$

c) $C_{Mgy} = C_{promy} = 100$

92. $q_A = 24.000 \$ \quad q_B = 28.800 \$ \quad q_C = 31.200 \$ \quad q_D = 36.000 \$$

93. $x = 11.023 \$ \quad y = 21.997 \$$

Ejercicios sobre integrales múltiples

94. 18

95. 0,25

96. $\frac{2}{3}$

97. 3

98. $\frac{525}{2}$

99. $-\frac{58}{5}$

100. 9

101. -1

102. $0,5e^2 - e + 0,5$

103. $\frac{-27}{4}$

104. $\frac{1}{24}$

REFERENCIAS

- Adam, E. y Ebert, R. (1991). *Administración de la Producción y las Operaciones. Conceptos, modelos y funcionamiento*. Cuarta edición. Prentice Hall.
- Albaladejo, P. (2009). *Problemas de cálculo para la Economía y la Empresa*. Editorial Tébar. México.
- Anfossi, A. (2009). *Cálculo Diferencial e Integral Preparatoria*. Editorial Progreso. México.
- Arya, J. y Lardner, R. (1992). *Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Sociales*. Tercera edición. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana. S.A.
- Beyer, W. (1998). Algunas Precisiones acerca de la Resolución de Problemas y de su Implementación en el Aula. *Paradigma XIX*, N° 1, p. 39- 55
- D´Amore, B. (1997). *Problemas. Pedagogía de la Matemática en la Actividad de Resolución de Problemas*. Editorial Síntesis, S.A. España.
- Edwards, C. y Penney, D. (2000). *Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera*. Tercera edición. Editorial Prentice Hall.
- Haeussler, E.; Paul, R. y Wood, R. (2008). *Matemática para Administración y Economía*. Decimosexta edición. Prentice Hall. Pearson.
- Harshbarger, R. y Reynolds, J. (2004). *Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales*. Séptima edición. McGraw Hill.
- Hoffmann, L y Bradley, G. (1998). *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. Sexta edición. Editorial McGraw Hill.
- Mankiw, N. (1998). *Principios de Microeconomía*. McGraw Hill.
- Mora, D. ((2002). *Didáctica de las Matemáticas*. Universidad Central de Venezuela. Ediciones de la Biblioteca EBUC. Caracas.
- Mora, D. (1996b). *Procesos de Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática enfocados en las Aplicaciones*. Manuscrito. Caracas, 20 p.
- Mora, E y del Rio, F. (2009). *Cálculo Diferencial e Integral. Ciencias Sociales y Económicas Administrativas*. Editorial Santillana. México.

Nunes, T. y Bryant, P. (1997). *La Matemática y su Aplicación: la perspectiva del niño*. México.

Pozo, J.; Pérez, M. y otros. (1998). *La Solución de Problemas. Aula XIX*. Editorial Santillana. Madrid. España.

Santos Trigo, L. (2008). *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de la Matemática*. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica.

Soler, F. y Núñez, R. (2005). *Cálculo Integral con Aplicaciones a las Ciencias Económicas y Administrativas*. ECOE Ediciones. Universidad Sergio Arboleda. Colombia.

Stewart, J. (1999). *Cálculo de una Variable. Transcendentes Tempranas*. Cuarta edición. Editorial Thomson- Learning

Sydsaeter, K. y Hammond, P. (2003). *Matemática para el Análisis Económico. Volumen II*. Editorial Félix Varela. Cuba.

Wenzelburger, E. (1994). *Cálculo Integral*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Whipkey, K. y Nell, M. (1997). *Introducción al Cálculo en Administración y Ciencias Sociales*. Editorial Limusa. México.

Zill, D. (1995). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda edición.

EL AUTOR

ALEXIS DE LA CRUZ MARTÍNEZ NIETO

Núcleo Universitario Pedro Rincón Gutiérrez (NUT)

San Cristóbal Estado Táchira

El autor es licenciado en educación mención matemáticas, egresado de la Universidad de Los Andes Dr. Pedro Rincón Gutiérrez, donde es profesor Titular - Jubilado. Ha ejercido cargos como coordinador Secretario, Académico, jefe de Departamento y de áreas.

Es Magíster en Enseñanza de las Ciencias Básicas, menciones matemáticas de la Universidad Nacional Experimental del Táchira y Doctor en Ciencias Pedagógicas de la Universidad de Oriente. Cuba.

Durante varios años ha estado al frente de la cátedra matemáticas en la carrera de administración y contaduría. Además, ha sido profesor de cursos de postgrado en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Rubio, estado Táchira. Tutor y evaluador de trabajos de grado.



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
VENEZUELA



PUBLICACIONES
VICERRECTORADO ACADÉMICO

Sin duda uno de los problemas importantes cuando se estudia el cálculo diferencial e integral es el escaso uso de las aplicaciones, sembrando en los estudiantes la duda de donde aplicar los conocimientos aprendidos en la carrera y en la vida cotidiana. Conocedores de esta problemática, el propósito de este manual es presentar las habilidades y conceptos matemáticos, para aplicarlos a ideas importantes para los estudiantes en la administración, economía, la vida y las ciencias sociales; igualmente, ayudar a adquirir las habilidades matemáticas necesarias para evidenciar los valores instrumentales, estructurales y formativos que posee la matemática, con la intención de formar profesionales que utilicen la matemática como una herramienta para solucionar problemas, pero a su vez logren desarrollar las capacidades de aplicar el pensamiento deductivo, el de análisis, la abstracción y puedan modelar objetos o situaciones a fin de modificar los conceptos a nuevos contextos. Para ello, todos los capítulos del manual contienen variados ejemplos, ejercicios resueltos de aplicación y ejercicios propuestos con sus respectivas respuestas.

El manual presenta la siguiente organización: Capítulo I, trata las integrales indefinidas, fórmulas básicas de integración y problemas con condiciones iniciales, los métodos de cambios de variables e integrales por partes. Capítulo II se estudia la integral definida, el cálculo de áreas bajo la curva y sus diferentes aplicaciones, entre ellas: índice de Gini, excedente de los consumidores y productores, valor presente y futuro de un flujo de ingresos continuos, fracciones parciales, integrales por medio de tablas, métodos numéricos de integración, integrales impropias y sus aplicaciones en el campo de las probabilidades y la estadística. Capítulo III hace referencia al estudio de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones en el campo de las ciencias económicas. Capítulo IV trata de las funciones de varias variables, en ellas estudiaremos las derivadas parciales y sus aplicaciones, multiplicadores de Lagrange para hallar máximos y mínimos con restricciones, integrales múltiples.

Debido a la sencillez y claridad de su exposición, esta obra es un valioso instrumento motivador a la creatividad e imaginación en el aprendizaje matemático basado en sus aplicaciones que permitirá formar ideas nuevas y emocionantes de manera continua.