

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Mérida - Venezuela

CARACTERIZACIÓN DE ESTRATEGIAS
GANADORAS EN JUEGOS INFINITOS QUE
INVOLUCRAN FILTROS SOBRE \mathbb{N}

www.bdigital.ula.ve

Trabajo Especial de Grado para Obtener el Título de
M. Sc. en Matemáticas

Lic. Viviana Andrea Parada Almeida.
Tutor: Dr. Carlos Uzcátegui.
12 de noviembre de 2013.

*A mis padres,
por quienes decidí emprender esta travesía.
Los amo.*

www.bdigital.ula.ve

Índice general

	2
Agradecimientos	1
Introducción	2
1. Preliminares	5
1.1. Notación y conceptos básicos	5
1.2. Filtros y ultrafiltros	6
1.2.1. Propiedades de filtros	10
2. Juegos Infinitos	12
2.1. Juegos Infinitos	12
2.1.1. Estrategias en juegos de filtros	14
2.2. Otros Juegos de Filtros	15
3. Propiedades de Filtros y Estrategias Ganadoras	17
3.1. Lemas Básicos	17
3.2. Propiedades de Árboles	22
3.2.1. + Ramsey	22
3.2.2. Débilmente Ramsey	24
3.3. Propiedades de Árboles de Conjuntos Finitos	24
3.3.1. P^+ -Tree(\mathcal{F}^+)	24
3.3.2. P^+ -Tree(\mathcal{F})	28
3.4. Propiedades de Selectores Parciales	28
3.4.1. $Q^+(\mathbb{N})$	28
3.5. Propiedades de Pseudo Intersección	29
3.5.1. $P^+(\mathcal{F})$	29
3.5.2. Diagonalizable	30
3.5.3. ω_+ diagonalizable	32
3.5.4. ω -diagonalizable	37

4. Filtros Selectivos	41
4.1. Otras Propiedades de Filtros	43
4.1.1. Q^+	43
4.1.2. $Q^+(\mathcal{F})$	44
4.1.3. P^+	45
4.1.4. Filtros Selectivos	46
4.2. Propiedades de Diagonalización Local	48
4.2.1. Localmente ω -diagonalizable	48
4.2.2. \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable	51
4.3. Resumen	52
4.3.1. Teoremas de caracterización	52
4.3.2. Ejemplos de cada propiedad	53
4.4. Preguntas Abiertas	53
Bibliografía	55

www.bdigital.ula.ve

Agradecimientos

A Dios, porque sin él nada de esto hubiese sido posible. Por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de felicidad.

A mi tutor, el Dr. Carlos Uzcátegui, quien sin conocerme confió en mí. Gracias profe, por su dedicación y paciencia, por dedicar parte de su tiempo a mi formación como matemático.

A mi familia, por acompañarme desde lo lejos y ser la fuente de mi inspiración. A mi madre y hermanas, por ser parte de vida y apoyarme en cada decisión. A mis sobrinos, Alejandro y Catalina, por ser la luz de mi vida.

A Mandius, por su apoyo y comprensión durante todos estos años. A mis amigas, Carolina, Eddy y Deicy, por su apoyo incondicional, por leerme y escucharme durante tantas horas. A mis amigos y colegas, Newman, Eduardo (QED), Richard, Armando e Hiliana, por hacerme sentir como en casa.

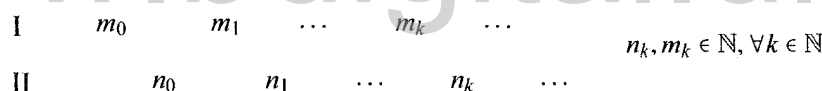
A mis profesores, por su ejemplo y dedicación. A mis compañeros del “grupo chévere”, por compartir experiencias y conocimientos durante cada seminario. Al CILA por darme la oportunidad de conocer y compartir lo bello de la matemática. Al Postgrado en Matemáticas, por abrir sus puertas y darme la oportunidad de crecer como profesional. A Luz y Lenys, por su desinteresado apoyo y colaboración.

A la ULA, por darme la posibilidad de alcanzar esta meta, mi maestría. Al CEP por brindarme apoyo económico en el desarrollo de este proceso y al CDCHTA por su colaboración en la culminación del mismo.

Introducción

Los juegos infinitos entre dos jugadores han sido usados desde hace varios años para abordar problemas o situaciones de diferentes áreas como la economía, biología, sociología y la misma matemática pura. Entre los más conocidos se encuentran los juegos de Banach-Mazur y Gale-Stewart, los cuales han sido usados en Teoría Descriptiva de Conjuntos (ver [5]). A continuación, mostraremos un ejemplo sencillo.

Sea $\mathbb{N}^{[\omega]}$ la colección de todos los subconjuntos infinitos de \mathbb{N} . Denotaremos por $\mathfrak{G}(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^{[\omega]})$ al juego en el cual dos jugadores, I y II, alternan turnos en una sucesión infinita de jugadas tal como se indica en el siguiente diagrama.



Cada partida se prolongará hasta completar una sucesión $\langle m_0, n_0, m_1, n_1, \dots \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Si el conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}^{[\omega]}$, se dirá que el jugador II gana la partida del juego $\mathfrak{G}(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^{[\omega]})$, mientras que si $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \notin \mathbb{N}^{[\omega]}$ el ganador será I.

Además, se dirá que el juego $\mathfrak{G}(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^{[\omega]})$ está determinado, si uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora; es decir, si cuenta con un criterio para determinar cada una de sus jugadas en función de las jugadas anteriores de modo que sin importar cuales sean las jugadas de su adversario, termina ganando la partida. En este juego es obvio que el jugador II tiene una estrategia ganadora en $\mathfrak{G}(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^{[\omega]})$, basta que $n_k < n_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

La determinación de ciertos juegos infinitos, en particular, aquellos cuyo conjunto de apuestas es de Borel, fue un problema que estuvo abierto durante varios años, hasta que en 1962 los matemáticos polacos Jan Mycielski y Hugo Steinhaus tuvieron la audacia de proponer un axioma alternativo para la teoría de conjuntos, el Axioma de Determinación. Sin embargo, aunque ese es uno de los aspectos más importantes e interesantes de la Teoría Descriptiva de Conjuntos, en el

presente trabajo no tocaremos este tema dado que nuestro objetivo principal es continuar la investigación iniciada por Laflamme en [6]; esto es, caracterizar las estrategias ganadoras de varios juegos infinitos que involucran filtros sobre \mathbb{N} en términos de las propiedades combinatorias y estructurales de los filtros.

La introducción de estas propiedades de filtros, tiene como motivación la importancia del rol que han jugado en algunas de las aplicaciones de la Teoría de Conjuntos y en las nociones clásicas de filtros magros, P-filtros y ultrafiltros selectivos. Como por ejemplo, la caracterización de filtros magros dada por Bartoszynski y Scheepers en [1], en la cual tener la propiedad de ser magro es equivalente a afirmar que el jugador I del juego $\mathfrak{G}_1(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F})$ tiene una estrategia ganadora.

En este trabajo sólo consideraremos juegos de la forma $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ donde \mathcal{X} e \mathcal{Y} representan las colecciones de donde juegan I y II, respectivamente; y \mathcal{Z} representa la colección que determina el resultado del juego. Además, sólo consideraremos juegos tales que las colecciones \mathcal{X} y \mathcal{Z} se asocian a un filtro \mathcal{F} . En particular, supondremos que \mathcal{X} es \mathcal{F} , \mathcal{F}_r ó \mathcal{F}^+ , \mathcal{Y} es \mathbb{N} ó $\mathbb{N}^{<\omega}$ y \mathcal{Z} es \mathcal{F} , \mathcal{F}^+ , \mathcal{F}^c ó \mathcal{F}^* .

Aunque las distintas versiones de juegos que producen dichas posibilidades fueron estudiadas por Laflamme en [6], en la primera parte de este trabajo sólo consideraremos aquellos juegos cuyas estrategias ganadoras pueden ser caracterizadas en términos de las propiedades de filtros que se muestran en el siguiente diagrama.

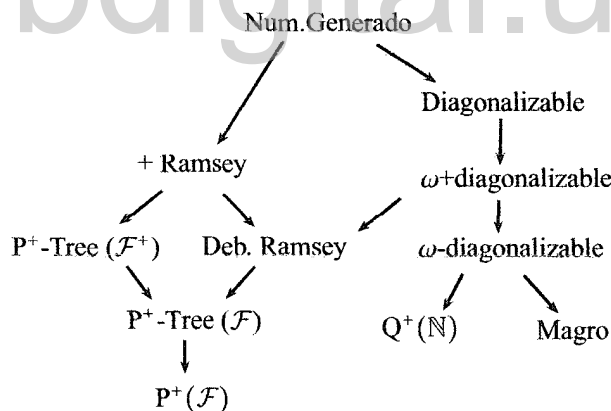


Figura 1: Propiedades de filtros

En trabajos como los de Bartoszynski y Scheepers ([1]), y Laflamme y Leary ([7]) fueron consideradas con el mismo objetivo algunas variaciones de este tipo de juegos. (En la tabla 1 de [7] se resumen los resultados sobre juegos de filtros obtenidos hasta el momento).

A lo largo del capítulo 3, mostraremos que muchas de las propiedades que se muestran en la

figura 1 pueden reducirse a un mismo esquema puramente conjuntista, como es la determinación de ciertos juegos infinitos. Este punto de vista nos proporcionará demostraciones alternativas de algunos resultados que ya conocemos.

No obstante, en el capítulo 4 consideraremos otras propiedades de filtros, que aunque han sido estudiadas bastante en Teoría de Conjuntos y Topología, no fueron abordadas mediante el enfoque de juegos mostrado por Laflamme. *Ver figura 2.*

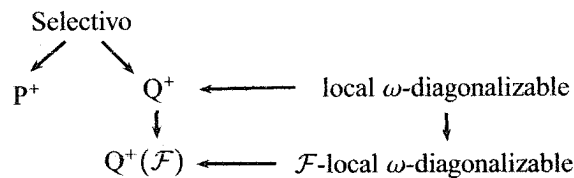


Figura 2: Otras propiedades de filtros

En la sección 4.2.1 introduciremos una variación de los juegos de la forma $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, con el fin de caracterizar algunas de las propiedades que se muestran en la figura anterior, pues hasta donde sabemos, ninguna de estas ha sido caracterizada en términos de las estrategias ganadoras en juegos infinitos que involucran filtros sobre \mathbb{N} . Por último, mostraremos dos cuadros en los que resumiremos algunas de las ideas abordadas en este trabajo, como son: la identificación de las propiedades que cumplen cada uno de los ejemplos de filtros definidos a lo largo del capítulo 3 y los correspondientes teoremas de caracterización mostrados para cada una de estas propiedades.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: en el capítulo 1 se hará una revisión de la notación y de algunos de los conceptos que usaremos a lo largo de este trabajo. En el segundo capítulo, introduciremos el concepto de juegos de filtros y de algunos otros conceptos asociados a éste, como partida legal, estrategia, estrategia ganadora, juego determinado, entre otras. En el capítulo 3, caracterizaremos varias de las propiedades definidas en el capítulo 1. Iniciaremos mostrando algunos lemas deducidos de [6]. Luego, teniendo como guía el diagrama anterior, presentaremos ejemplos de filtros que cumplen con estas propiedades, y de manera simultánea, iremos mostrando cada una de las implicaciones que se indican en el diagrama. En el capítulo 4, estudiaremos algunas propiedades de filtros que no fueron abordadas mediante el enfoque de juegos mostrado por Laflamme, como son: selectivo, P^+ , Q^+ y $Q^+(\mathcal{F})$. De manera análoga a como se hizo en el capítulo 3, mostraremos las relaciones existentes entre cada una de estas propiedades y su relación con las propiedades definidas anteriormente, así mismo, presentaremos ejemplos de dichas propiedades, y finalmente, mostraremos dos cuadros en los que resumiremos los resultados mostrados a lo largo del trabajo.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo haremos una revisión de la notación y de algunos conceptos que usaremos a lo largo del trabajo.

1.1. Notación y conceptos básicos

Denotaremos por \mathbb{N} al conjunto de los números naturales y a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ como la colección de todos los subconjuntos de \mathbb{N} . Dado un conjunto $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, denotaremos por $X^{<\omega}$ y $X^{[\omega]}$ a las colecciones de subconjuntos finitos e infinitos de X , respectivamente. Si A es un subconjunto infinito de X tal que $A \setminus X$ es finito, entonces diremos que A está *casi contenido* en X y lo denotaremos por $A \subseteq^* X$. Definiremos el conjunto $A/n = \{x \in A : x > n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y la *diferencia simétrica* de los conjuntos A y B , como $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ denotará el espacio de todas las sucesiones infinitas de números naturales dotado de la topología producto que resulta de dar a \mathbb{N} la topología discreta. Los términos “nunca denso”, “magro” y “propiedad de Baire”, los cuales estudiaremos más adelante, se refieren a dicha topología. Recordemos que si \mathcal{X} es un espacio topológico y A un subconjunto de \mathcal{X} , entonces se dice que A es *magro* si se escribe como unión numerable de conjuntos *nunca densos*, esto es, si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ donde $\text{int}(\overline{X_n}) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, diremos que A tiene la *propiedad de Baire*, si existe un abierto $O \in \mathcal{X}$ tal que $A \triangle O$ es magro.

Escribiremos como $\mathbb{N}^{<\omega}$ para denotar el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de \mathbb{N} . Si s y t son sucesiones finitas de números naturales y s extiende propiamente a t ; es decir, si $t(n) = s(n)$ para todo n en el dominio de t , entonces diremos que t es un *segmento inicial* de s y lo denotaremos por $t < s$. Para cada $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, denotaremos por $|s|$ a la longitud de s y escribiremos como $s \hat{\ } t$ para denotar la *concatenación* de s y t , esto es, la sucesión que comienza con los elementos de s y continúa con los de t .

Dada una sucesión $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $\alpha \upharpoonright n$ al segmento inicial de α de longitud n y lo escribiremos como $\alpha \upharpoonright n = \langle \alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(n-1) \rangle$. Por convención, denotaremos $\alpha \upharpoonright 0$ como la sucesión vacío.

Para cada sucesión $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ definiremos el conjunto $U_s = \{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s < \alpha\}$. La colección $\{U_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ constituye una base numerable de la topología de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ puesto que el conjunto de sucesiones finitas de \mathbb{N} es numerable.

Diremos que un conjunto $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ es un *árbol* sobre \mathbb{N} , si es *cerrado bajo segmentos iniciales*; es decir, si satisface que: si $t \in T$ y $s < t$, entonces $s \in T$. Si α es una sucesión infinita de elementos de \mathbb{N} tal que $\alpha \upharpoonright n \in T$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces diremos que α es una *rama* de T . Denotaremos por $[T]$ al conjunto de todas las ramas de T .

Análogamente, diremos que S es un *árbol de conjuntos finitos* de \mathbb{N} si S es un conjunto de sucesiones finitas de subconjuntos finitos de \mathbb{N} cerrado bajo segmentos iniciales, y asimismo, que la sucesión $\beta \in (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$ es una *rama* de S , si $\beta \upharpoonright n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Filtros y ultrafiltros

En esta sección introduciremos la noción de filtro y de algunos otros conceptos que se relacionan con éste. Asimismo, mostraremos algunos resultados que usaremos con frecuencia a lo largo del trabajo.

Definición 1.2.1 Una colección \mathcal{F} de subconjuntos de \mathbb{N} es un *filtro* sobre \mathbb{N} si no contiene al conjunto vacío y es cerrada bajo intersecciones finitas y supraconjuntos; es decir, si

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$.
- (ii) Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- (iii) Si $A \in \mathcal{F}$ y B es un subconjunto de \mathbb{N} tal que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Las colecciones $\mathcal{F} = \{\mathbb{N}\}$ y $\mathcal{F}_A = \{X \subseteq \mathbb{N} : A \subseteq X\}$ donde A es un subconjunto no vacío de \mathbb{N} , son algunos ejemplos sencillos de filtros sobre \mathbb{N} . Un ejemplo más interesante, en relación a nuestro trabajo, es el llamado *filtro de Fréchet* que se define como $\mathcal{F}_r = \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ es finito}\}$.

Ahora bien, si adicional a las condiciones anteriores se tiene que (iv) $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$, entonces diremos que \mathcal{F} es un *filtro libre* sobre \mathbb{N} .

Definición 1.2.2 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Diremos que \mathcal{F} es un *ultrafiltro* sobre \mathbb{N} , si no está contenido propiamente en otro filtro. O lo que es equivalente, si para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se tiene que $A \in \mathcal{F}$ o $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$.

Observación 1.2.3 Un ultrafiltro libre es un filtro libre maximal. Se sabe que los ultrafiltros libres existen sólo con la ayuda del Lema de Zorn (ver [3], pág. 5).

Note que \mathcal{F} es un subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, y por lo tanto, es posible identificar, vía funciones características, a cada uno de sus elementos con un elemento de $2^{\mathbb{N}}$, esto es, el espacio de todas las sucesiones infinitas de ceros y unos dotado de la topología producto del espacio discreto $\{0, 1\}$.

Observación 1.2.4 Como $2^{\mathbb{N}}$ está contenido en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, entonces es claro que su topología se genera por los conjuntos U_s , donde s es una sucesión finita de ceros y unos.

En base a esto, enunciaremos a continuación un teorema que nos permitirá caracterizar, en términos combinatorios, dos de las propiedades que definimos en la sección anterior. Para una prueba de este teorema ver [11].

Teorema 1.2.5 (Jaili-Naini, Talagrand). Si \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) \mathcal{F} tiene la propiedad de Baire.
- (ii) \mathcal{F} es magro.
- (iii) Existe una sucesión $n_0 < n_1 < \dots$ tal que para todo $X \in \mathcal{F}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$X \cap [n_k, n_{k+1}) \neq \emptyset \text{ para todo } k \geq m.$$

- (iv) Existe una partición $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ de \mathbb{N} en subconjuntos finitos tal que para todo $X \in \mathcal{F}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X \cap J_k \neq \emptyset$ para todo $k \geq m$. \square

La proposición que demostraremos a continuación es sólo uno de los resultados obtenidos en este trabajo como consecuencia del teorema 1.2.5. En los siguientes capítulos, veremos otros de estos resultados.

Proposición 1.2.6 No existen ultrafiltros magros.

Demostración

Por reducción al absurdo vamos a suponer que \mathcal{F} es un ultrafiltro magro y $\{F_k : k \in \mathbb{N}\}$ es la partición de \mathbb{N} en conjuntos finitos que satisface las condiciones del teorema 1.2.5. Escribamos $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{2i} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{2i+1}$. Como $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$, entonces es claro que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{2i} \in \mathcal{F}$ o $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{2i+1} \in \mathcal{F}$. Supongamos que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{2i} \in \mathcal{F}$ y veamos que esto nos lleva a una contradicción (el otro caso se trata de manera análoga).

En efecto, si $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{2i} \in \mathcal{F}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{2i} \cap F_k \neq \emptyset$ para todo $k \geq m$, en particular, para todo $k \geq m$ impar, lo cual es una contradicción puesto que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{2i} \cap F_{2n+1} = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

A continuación, veremos como generar filtros a partir de una colección de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} .

Definición 1.2.7 Sea $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de \mathbb{N} . Diremos que:

- \mathcal{B} tiene la propiedad de intersección finita, si la intersección de cualquier cantidad finita de elementos de \mathcal{B} es no vacía.
- \mathcal{B} es una base de filtro, si para cada $A, B \in \mathcal{B}$ existe un $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Proposición 1.2.8 Si $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de \mathbb{N} con la propiedad de intersección finita, entonces la colección

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq \mathbb{N} : \exists B_0, \dots, B_n \in \mathcal{B}, \bigcap_{i \leq n} B_i \subseteq X\}$$

es un filtro sobre \mathbb{N} . □

Denotaremos por $\langle \mathcal{B} \rangle$ al filtro definido en la proposición 1.2.8 y lo denominaremos como el filtro generado por \mathcal{B} .

Definición 1.2.9 Sea \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} . Diremos que \mathcal{F} es numerablemente generado, si existe una familia $\mathcal{B} = \{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$.

Proposición 1.2.10 Sea \mathcal{B} una familia no vacía de elementos de \mathcal{F} . Entonces, $\langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{F}$ si, y solo si, para todo $X \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq X$. □

Ejemplo 1.2.11 \mathcal{F}_r es numerablemente generado.

Para probar que \mathcal{F}_r es numerablemente generado basta considerar la colección $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ donde $B_k = (k, +\infty)$ para todo $k \in \mathbb{N}$; pues es claro que si $X \in \mathcal{F}_r$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n, +\infty) \subseteq X$. Tome $n = \max\{x : x \in \mathbb{N} \setminus X\}$. □

Observe que los generadores de \mathcal{F}_r lucen como se ilustra en la figura 1.3.

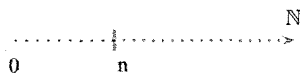


Figura 1.3: Conjuntos generadores de \mathcal{F}_r

Los resultados que expondremos de ahora en adelante serán mostrados para filtros libres sobre \mathbb{N} . Por lo tanto, cada vez que hagamos referencia a un filtro sobre \mathbb{N} el lector debe tener presente que nos estamos refiriendo es a un filtro que contiene a \mathcal{F}_r .

Definición 1.2.12 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si A es un subconjunto de \mathbb{N} tal que $A \cap X \neq \emptyset$ para todo $X \in \mathcal{F}$, entonces diremos que A es un conjunto positivo de \mathcal{F} . Denotaremos por \mathcal{F}^+ a la colección de todos los conjuntos positivos de \mathcal{F} y a su complemento en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ por \mathcal{F}^* .

Observación 1.2.13 Si \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} , entonces (i) \mathcal{F}^+ es cerrado bajo supraconjuntos, (ii) todo conjunto positivo es un subconjunto infinito de \mathbb{N} y (iii) todo elemento del filtro es un conjunto positivo.

La proposición que demostraremos a continuación nos muestra una definición de conjunto positivo equivalente a la definida en 1.2.12.

Proposición 1.2.14 Si \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} , entonces $X \in \mathcal{F}^+$ si, y solo si, $X^c \notin \mathcal{F}$.

Demostración

(\Rightarrow) Por reducción al absurdo vamos a suponer que $X^c \in \mathcal{F}$ y $X \in \mathcal{F}^+$, entonces por 1.2.12 se tiene que $X \cap X^c \neq \emptyset$, lo cual absurdo. Por lo tanto, se tiene que $X^c \notin \mathcal{F}$.

(\Leftarrow) Ahora bien, si $X \notin \mathcal{F}^+$, entonces existe un $Y \in \mathcal{F}$ tal que $Y \cap X = \emptyset$. Note que $Y \subseteq X^c$ y como \mathcal{F} es cerrado bajo supraconjuntos, entonces $X^c \in \mathcal{F}$, pero esto es absurdo, dado que contradice la hipótesis. En consecuencia, se tiene que $X \in \mathcal{F}^+$. \square

De la proposición 1.2.14 y la observación 1.2.13 podemos afirmar lo siguiente.

Proposición 1.2.15 Si \mathcal{F} es un ultrafiltro sobre \mathbb{N} , entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$. \square

El siguiente lema nos muestra como construir un conjunto positivo a partir de la base que genera a un filtro.

Lema 1.2.16 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} y $\mathcal{B} = \{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de \mathbb{N} tal que $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$. Si A es un subconjunto de \mathbb{N} tal que $A \cap B_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $A \in \mathcal{F}^+$.

Demostración

Note que si $X \in \mathcal{F}$, entonces existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $B_i \subseteq X$. Así, dado que $A \cap B_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $A \cap X \neq \emptyset$, y en consecuencia, que $A \in \mathcal{F}^+$. \square

Como consecuencia del lema 1.2.16 podemos afirmar lo siguiente.

Corolario 1.2.17 Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es infinito, entonces $A \in (\mathcal{F}_r)^+$. \square

Lema 1.2.18 Si \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} y $A \in \mathcal{F}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{F}$ para todo $B \subseteq \mathbb{N}$ finito.

Demostración

Note que si B es un subconjunto finito de \mathbb{N} , entonces $B^c \in \mathcal{F}_r$. Luego, como \mathcal{F} es libre, se tiene que $B^c \cap A \in \mathcal{F}$. \square

Los conceptos que definiremos a continuación serán usados con frecuencia a lo largo de este trabajo dada la importancia de su relación con las “estrategias ganadoras” de los “juegos infinitos” que definiremos en el siguiente capítulo.

Definición 1.2.19 Sea \mathcal{X} una colección no vacía de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} y sea T un árbol sobre \mathbb{N} . Diremos que:

- T es un \mathcal{X} -árbol sobre \mathbb{N} , si para toda sucesión $s \in T$ existe un conjunto $Y_s \in \mathcal{X}$ tal que la sucesión $s \hat{\ } n \in T$ para todo $n \in Y_s$.
- T tiene una rama en \mathcal{X} , si existe una sucesión $\alpha \in [T]$ tal que el conjunto $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{X}$.

Análogamente, diremos que el árbol de conjuntos finitos S es un \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , si para toda sucesión $t \in S$, existe un conjunto $Y_t \in \mathcal{X}$ tal que $t \hat{\ } a \in S$ para todo subconjunto finito a de Y_t . Diremos también que S tiene una rama cuya unión está en \mathcal{X} , si existe una sucesión $\beta \in [S]$ tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta(n) \in \mathcal{X}$.

La proposición que enunciaremos a continuación nos muestra una definición de \mathcal{X} -árbol equivalente a la definida en 1.2.19.

Proposición 1.2.20 Sean T un árbol sobre \mathbb{N} y \mathcal{X} una colección no vacía de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} cerrada bajo supraconjuntos. T es un \mathcal{X} -árbol sobre \mathbb{N} si, y solo si, para toda sucesión $s \in T$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : s \hat{\ } n \in T\} \in \mathcal{X}$. □

1.2.1. Propiedades de filtros

Las propiedades combinatorias y estructurales de los filtros han jugado un rol importante en algunas de las aplicaciones de la Teoría de Conjuntos y en las nociones clásicas de filtros magros, P-filtros y ultrafiltros selectivos.

A continuación, definiremos algunas de las propiedades que consideraremos en este trabajo.

Definición 1.2.21 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Diremos que:

- (i) \mathcal{F} es + Ramsey, si todo \mathcal{F}^+ -árbol tiene una rama en \mathcal{F}^+ .
- (ii) \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+), si todo \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} tiene una rama cuya unión está en \mathcal{F}^+ .
- (iii) \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}), si todo \mathcal{F} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} tiene una rama cuya unión está en \mathcal{F}^+ .
- (iv) \mathcal{F} es $P^+(\mathcal{F})$, si para toda sucesión de elementos del filtro $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe un conjunto $A \in \mathcal{F}^+$ tal que $A \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (v) \mathcal{F} es débilmente Ramsey, si todo \mathcal{F} -árbol tiene una rama en \mathcal{F}^+ .
- (vi) \mathcal{F} es $Q^+(\mathbb{N})$, si para toda partición de \mathbb{N} en conjuntos finitos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe un conjunto $S \in \mathcal{F}^+$ tal que $|S \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- (vii) \mathcal{F} es ω -diagonalizable, si existe una colección $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^{[\omega]}$ tal que para todo $Y \in \mathcal{F}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq^* Y$.
- (viii) \mathcal{F} es diagonalizable, si existe un conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $X \subseteq^* Y$ para todo $Y \in \mathcal{F}$.
- (ix) \mathcal{F} es ω +diagonalizable, si existe una colección de conjuntos positivos $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para todo $Y \in \mathcal{F}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq^* Y$.

En el siguiente diagrama se indican las relaciones existentes entre cada una de las propiedades definidas hasta el momento. Note que este diagrama es sólo una parte del mostrado por Laflamme en [6].

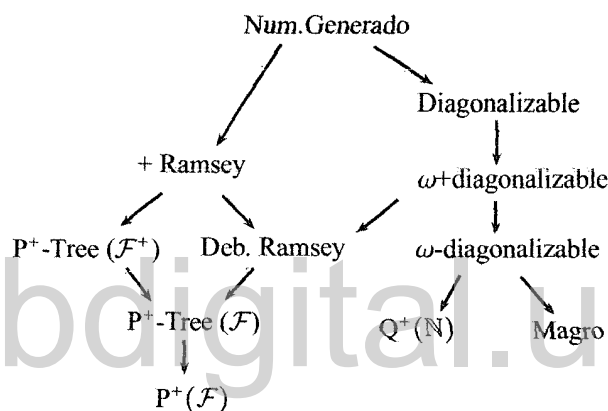


Figura 1.4: Propiedades de filtros

En el capítulo 3 demostraremos cada una de las implicaciones que se muestran en la figura 1.4, probaremos que algunas de esas implicaciones no son estrictas, y finalmente, veremos que varias de estas propiedades se pueden caracterizar a partir de las “estrategias ganadoras” en cierto tipo de “juegos infinitos” que definiremos en el capítulo 2.

En el capítulo 4 estudiaremos algunas propiedades de filtros que no fueron consideradas por Laflamme en [6], como son: selectivo, P^+ , Q^+ y $Q^+(\mathcal{F})$. Adicionaremos dichas propiedades al diagrama anterior, mostraremos las relaciones existentes entre cada una de estas, y por último, enunciaremos y probaremos los teoremas de caracterización de varias de estas propiedades.

CAPÍTULO 2

Juegos Infinitos

Desde principios del siglo XX varios matemáticos abordaron algunos problemas en términos de “juegos”; es decir, de planteamientos en los cuales dos o más jugadores realizan por turnos una sucesión de “jugadas” respetando unas “reglas de juego” con el objetivo de “ganar” una “partida”, [4]. Este planteamiento dio origen a la teoría de juegos, que aunque en sus comienzos fue desarrollada como una herramienta para entender el comportamiento de la economía (por ejemplo, en 1944 von Neumann y Morgensten usaron la teoría de juegos para modelizar determinados comportamientos de agentes económicos), actualmente se usa en otros campos como la biología, la sociología e incluso la matemática pura.

En este capítulo introduciremos la noción de un cierto tipo de juegos infinitos, los juegos de filtros. Estudiaremos varios de los conceptos asociados a éste, así como sus propiedades más relevantes, y finalmente, mostraremos algunos ejemplos encontrados en la literatura.

2.1. Juegos Infinitos

Los *juegos infinitos* son juegos en los que dos o más jugadores alternan turnos en una sucesión infinita de jugadas. Los juegos que consideraremos a lo largo de este trabajo son juegos en los cuales sólo participan dos jugadores, I y II. Matemáticamente, un juego infinito consiste en una terna $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ donde \mathcal{X} e \mathcal{Y} representan las colecciones de donde juegan I y II, respectivamente; y \mathcal{Z} representa la colección que determina el resultado del juego. Diremos que $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ es un *juego de filtro*, si \mathcal{X} y \mathcal{Z} son colecciones que se asocian a un filtro \mathcal{F} . Esta noción se aclarará más adelante.

Observación 2.1.1 *En trabajos como los de Bartoszyński y Scheepers ([1]), y Laflamme y Leary ([7]), se estudiaron juegos en los que los jugadores I y II responden con miembros de \mathbb{N} y \mathcal{F}^+ , respectivamente. No obstante, en este trabajo sólo consideraremos juegos infinitos en donde \mathcal{X} será \mathcal{F} , \mathcal{F}_r ó \mathcal{F}^+ , \mathcal{Y} será \mathbb{N} ó $\mathbb{N}^{<\omega}$ y \mathcal{Z} será igual a \mathcal{F} , \mathcal{F}^+ , \mathcal{F}^c , el complemento de \mathcal{F} en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ o incluso \mathcal{F}^* .*

Cada una de las versiones de juegos que producen dichas posibilidades fueron estudiadas por Laflamme en [6]. Sin embargo, en este trabajo sólo haremos referencia a los juegos infinitos cuyas estrategias ganadoras caracterizaremos en términos de las propiedades de filtros definidas en 1.2.9 y 1.2.21.

Antes de dar una definición formal del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ mostraremos dos ejemplos que nos permitirán hacernos una idea más clara de los mismos.

- $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$ denota el juego en el cual el primer jugador escoge en cada jugada un miembro de \mathcal{F} y el segundo jugador escoge un subconjunto no vacío y finito del conjunto jugado por el primer jugador. Este proceso se repite por ambos jugadores, alternando turnos, en una sucesión infinita de jugadas.

Al final del juego, el segundo jugador será declarado ganador, si el conjunto formado por la unión de sus respuestas es un miembro de \mathcal{F}^+ . En caso contrario, el primer jugador es quien será declarado ganador.

- $\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ denota al juego en el cual el primer jugador escoge en cada jugada un miembro de \mathcal{F}_r y el segundo jugador escoge un número natural perteneciente al conjunto jugado por el primer jugador.

Al final del juego, el segundo jugador será declarado ganador, si el conjunto de naturales formado por sus respuestas es un miembro de \mathcal{F}^+ . En caso contrario, el primer jugador será declarado ganador.

En general, denotaremos por $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{Z})$ al juego de filtro en el cual el jugador I juega en cada turno un miembro de \mathcal{X} y el jugador II responde con un subconjunto finito de ese conjunto; es decir, I escoge en la k -ésima jugada un $X_k \in \mathcal{X}$ y II responde con un subconjunto finito s_k de X_k , ver diagrama de representación en la figura 2.5.

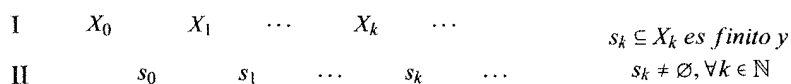


Figura 2.5: Diagrama del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{Z})$

Diremos que la sucesión $\langle X_0, s_0, X_1, s_1, \dots \rangle$ es una *partida legal* del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{Z})$ si ambos jugadores juegan siguiendo las condiciones definidas anteriormente. Si un jugador incumple las condiciones del juego, entonces éste se dará por terminado y el otro jugador será declarado ganador de la partida. En caso contrario, la partida se prolongará infinitamente. El jugador II será declarado el ganador de la partida si $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} s_k \in \mathcal{Z}$, si no diremos que I gana.

Análogamente, denotaremos por $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ al juego de filtro en cuya k -ésima jugada el jugador I escoge un $X_k \in \mathcal{X}$ y el jugador II responde con un $n_k \in X_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, ver *diagrama de representación en la figura 2.6*.

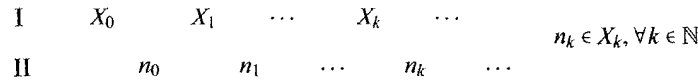


Figura 2.6: Diagrama del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$

Diremos que la sucesión $\langle X_0, n_0, X_1, n_1, \dots \rangle$ es una *partida legal* del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$, si tanto I como II juegan siguiendo las condiciones definidas anteriormente. Si un jugador incumple las condiciones del juego, entonces éste se dará por terminado y el otro jugador será declarado ganador de la partida. En caso contrario, la partida se prolongará infinitamente. II será declarado el ganador de la partida si el conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{Z}$, si no diremos que I gana.

2.1.1. Estrategias en juegos de filtros

Una *estrategia*, para I o II, es una regla que le indica al jugador cual debe ser su próxima jugada dependiendo de cuales hayan sido las jugadas anteriores del otro jugador.

Formalmente, diremos que σ es una *estrategia para el jugador I* en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, si es una función de valores en \mathcal{X} cuyo dominio es la colección de todas las sucesiones finitas de elementos de \mathcal{Y} , ver *diagrama de representación en la figura 2.7*.

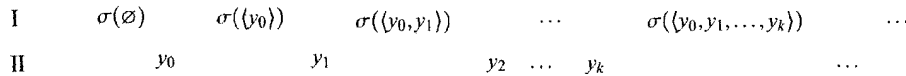


Figura 2.7: Estrategia para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$

Análogamente, diremos que τ es una *estrategia para II* en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, si es una función de valores en \mathcal{Y} cuyo dominio es la colección de todas las sucesiones finitas de elementos de \mathcal{X} y es tal que para toda sucesión $\langle X_0, X_1, \dots, X_k \rangle \in \mathcal{X}^{<\omega}$ se tiene que $\tau(\langle X_0, X_1, \dots, X_k \rangle) \in X_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$, esto en el caso que \mathcal{Y} sea \mathbb{N} . O bien, que $\tau(\langle X_0, X_1, \dots, X_k \rangle) \in X_k^{<\omega}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, en el caso que \mathcal{Y} sea $\mathbb{N}^{<\omega}$, ver *diagrama de representación en la figura 2.8*.

Una *estrategia es ganadora* cuando el jugador para el cual fue definida gana cada partida del juego en la que sigue dicha estrategia.

I	x_0	x_1	\dots	x_k	\dots
II	$\tau(\langle x_0 \rangle)$	$\tau(\langle x_0, x_1 \rangle)$	\dots	$\tau(\langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle)$	\dots

Figura 2.8: Estrategia para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$

Formalmente, diremos que σ es una *estrategia ganadora* para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, si I es declarado ganador en cada partida de $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ en que I usa a σ como estrategia. Análogamente, diremos que τ es una *estrategia ganadora* para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, si II es declarado ganador en cada partida de $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ en que II usa a τ como estrategia.

Diremos que el juego $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ está *determinado* si uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora; es decir, “si cuenta con un criterio para determinar cada jugada en función de las jugadas anteriores, de modo que, sean cuales sean las jugadas del adversario, termina ganando la partida”, [4].

Observación 2.1.2 *No todos los juegos son determinados. En la siguiente sección mostraremos un juego en el cual ningún jugador tiene estrategia ganadora.*

2.2. Otros Juegos de Filtros

En trabajos como los de Bartoszynski y Scheepers ([1]); Laflamme y Leary ([7]), entre otros, fueron consideradas algunas variaciones de los juegos definidos en la sección anterior. En el primero, se analizaron juegos en los que tanto I como II juegan números naturales, mientras que en el segundo, se estudiaron juegos en los cuales II juega miembros de \mathcal{F}^* . El objetivo en ambos trabajos, al igual que en el nuestro, fue caracterizar las estrategias ganadoras de los dos jugadores en términos de las propiedades combinatorias y estructurales de un filtro dado.

En esta sección mostraremos dos variaciones naturales de los juegos de la forma $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$; sin embargo, en la literatura se pueden encontrar variaciones importantes de este tipo de juegos, los cuales han sido estudiados por varios años y resultan de gran interés para la Teoría de Conjuntos, como por ejemplo el juego de Banach-Mazur (ver [5]).

- El juego $\mathfrak{G}_0(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$

Sea \mathcal{Z} una colección no vacía de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} . Denotaremos por $\mathfrak{G}_0(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ al juego infinito en el que tanto I como II juegan números naturales, tal como se indica en el diagrama de la figura 2.9.

El jugador II será declarado ganador, si el conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{Z}$. En caso contrario, diremos que I gana.

CAPÍTULO 3

Propiedades de Filtros y Estrategias Ganadoras

En este capítulo veremos que muchas de las propiedades definidas en 1.2.9 y 1.2.21 pueden reducirse a un mismo esquema puramente conjuntista, como es la determinación de ciertos juegos infinitos. El objetivo en cada caso será caracterizar en términos de dichas propiedades las estrategias ganadoras de varios de los juegos definidos en 2.1 teniendo como base los trabajos desarrollados por Lallamme y, Bartoszynski y Scheepers, en [1] y [2] respectivamente.

Iniciaremos el capítulo mostrando algunos lemas, que aunque no aparecen enunciados explícitamente en los artículos, han sido deducidos de los mismos y son una herramienta útil en la demostración de varios de los resultados aquí expuestos. Luego, teniendo como guía el diagrama de la figura 1.4 iremos presentando ejemplos tanto de filtros que cumplen con dichas propiedades, como ejemplos de filtros que no cumplen con éstas. Posteriormente, mostraremos los teoremas de caracterización de algunas de éstas, y para terminar, presentaremos dos cuadros en los que resumiremos los resultados mostrados a lo largo del capítulo.

3.1. Lemas Básicos

Comenzaremos mostrando tres lemas que nos permitirán asociar estrategias en juegos de la forma $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ a árboles sobre \mathbb{N} , y viceversa.

Lema 3.1.1 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} y \mathcal{Z} una colección no vacía de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} .

- (i) Si τ es una estrategia para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$, entonces existe un \mathcal{F}^+ -árbol \mathbb{T} que satisface que si $\alpha \in [\mathbb{T}]$, entonces el conjunto $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\}$ puede ser jugado por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ en la que II usa a τ como estrategia.
- (ii) Si \mathbb{T} es un \mathcal{F}^+ -árbol sobre \mathbb{N} , entonces existe una estrategia τ para el jugador II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ que satisface que si $\langle A_0, A_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por I en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ en la que II usa a τ como estrategia, entonces $\langle \tau(\{A_0\}), \tau(\{A_0, A_1\}), \dots \rangle \in [\mathbb{T}]$.

Demostración

(i) Supondremos que τ es una estrategia para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ y definiremos por recursión un conjunto $T_k \subseteq \mathbb{N}^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, $Y_t \subseteq \mathbb{N}$ para cada $t \in T_k$ y $A_t^n \in \mathcal{F}$ para cada $t \in T_k$ y para cada $n \in Y_t$. Luego, veremos que $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ es un \mathcal{F}^+ -árbol que satisface las condiciones deseadas.

La recursión inicia con $k = 0$, entonces $T_0 = \{\emptyset\}$ y $Y_{\emptyset} = \{\tau(\langle A \rangle) : A \in \mathcal{F}\}$. Para cada $n \in Y_{\emptyset}$ escojamos un conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $n = \tau(\langle A \rangle)$, y denotémoslo por A_{\emptyset}^n .

Si $k = 1$, entonces $T_1 = \{\langle n \rangle : n \in Y_{\emptyset}\}$ y $Y_{\langle n \rangle} = \{\tau(\langle A_{\emptyset}^n, A \rangle) : A \in \mathcal{F}\}$ para cada sucesión $\langle n \rangle \in T_1$. Luego, para cada $m \in Y_{\langle n \rangle}$ escojamos un conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $m = \tau(\langle A_{\emptyset}^n, A \rangle)$, y denotémoslo por $A_{\langle n \rangle}^m$.

Para tener una idea mas clara de la forma en que se escogen los conjuntos A_t^n para cada $t \in T_k$ y cada $n \in Y_t$, observe el diagrama en la siguiente figura.

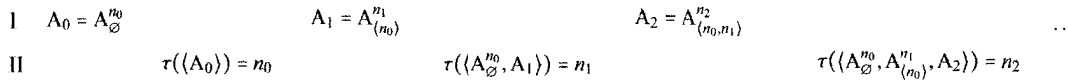


Figura 3.11: Determinación de los conjuntos A_t^n .

Para cada sucesión $s = \langle n_0, \dots, n_k \rangle \in \mathbb{N}^{<\omega}$ usaremos la siguiente notación

$$\vec{A}_s = \left\langle A_{\emptyset}^{n_0}, A_{\langle n_0 \rangle}^{n_1}, A_{\langle n_0, n_1 \rangle}^{n_2}, \dots, A_{\langle n_0, n_1, \dots, n_{k-1} \rangle}^{n_k} \right\rangle.$$

Ahora bien, supongamos que hemos definido los conjuntos $T_k \subseteq \mathbb{N}^k$ para $k \in \mathbb{N}$ y $Y_t = \{\tau(\vec{A}_t \hat{\ } A) : A \in \mathcal{F}\}$ para cada $t \in T_k$, y que además, hemos escogido para cada $n_k \in Y_t$ un conjunto $A_t^{n_k} \in \mathcal{F}$ tal que $n_k = \tau(\vec{A}_t \hat{\ } A_t^{n_k})$. Entonces, definamos los conjuntos $T_{k+1} = \{t \hat{\ } n_k : t \in T_k \text{ y } n_k \in Y_t\}$ y $Y_{t \hat{\ } n_k} = \{\tau(\vec{A}_{t \hat{\ } n_k} \hat{\ } A) : A \in \mathcal{F}\}$. Luego, para cada $n_{k+1} \in Y_{t \hat{\ } n_k}$ escojamos un conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $n_{k+1} = \tau(\vec{A}_{t \hat{\ } n_k} \hat{\ } A)$, y denotémoslo por $A_{t \hat{\ } n_k}^{n_{k+1}}$.

Observe que $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ es un \mathcal{F}^+ -árbol sobre \mathbb{N} ; es decir, que T es un árbol sobre \mathbb{N} tal que para toda sucesión $s \in T$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : s \hat{\ } n \in T\} \in \mathcal{F}^+$. En efecto, si $t \in T$ y $s < t$ tal que $|s| = k + 1$, entonces $s = \langle n_0, \dots, n_k \rangle$ donde $n_i = \tau(\vec{A}_{t \upharpoonright i+1})$ para todo $i = 0, \dots, k$. Note que $n_i \in Y_{t \upharpoonright i}$ para todo $i = 0, \dots, k$, y por lo tanto, $\langle n_0, \dots, n_k \rangle \in T_{k+1}$.

Por otro lado, note que si $s \in T$, entonces $s \hat{\ } n \in T$ para todo $n \in Y_s$, y en consecuencia, $Y_s \subseteq \{n \in \mathbb{N} : s \hat{\ } n \in T\}$. Ahora bien, como $\tau(\vec{A}_s \hat{\ } A) \in Y_s \cap A$ para todo $s \in T$ y para todo $A \in \mathcal{F}$, se tiene que $Y_s \in \mathcal{F}^+$ para todo $s \in T$, y por consiguiente, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : s \hat{\ } n \in T\} \in \mathcal{F}^+$ para todo $s \in T$.

Para terminar, note que si $\alpha \in [T]$, entonces $\alpha \upharpoonright n \in T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $\alpha(n) = \tau(\vec{A}_{\alpha \upharpoonright n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En conclusión, se tiene que $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto jugado por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ en la que II usa a τ como estrategia.

(ii) Supongamos que T es un \mathcal{F}^+ -árbol sobre \mathbb{N} y denotemos por $Y_s = \{n : s \hat{\ } n \in T\}$ para todo $s \in T$. Veamos que la aplicación $\tau : \mathcal{F}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $\tau(\langle A \rangle) = \min\{A \cap Y_\emptyset\}$ para toda $A \in \mathcal{F}$ y $\tau(\langle A_0, \dots, A_{k+1} \rangle) = \min\{A_{k+1} \cap Y_{\langle \tau(A_0), \dots, \tau(A_0, \dots, A_k) \rangle}\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es una estrategia para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$.

Note que τ está bien definida para toda sucesión $t \in \mathcal{F}^{<\omega}$. En efecto, si $\langle A_0, \dots, A_k \rangle \in \mathcal{F}^{<\omega}$, entonces la sucesión $\langle \tau(\langle A_0 \rangle), \dots, \tau(\langle A_0, \dots, A_k \rangle) \rangle \in T$. Luego, como T es un \mathcal{F}^+ -árbol sobre \mathbb{N} , se tiene que $Y_{\langle \tau(A_0), \dots, \tau(A_0, \dots, A_k) \rangle} \in \mathcal{F}^+$, y en consecuencia, que

$$A_{k+1} \cap Y_{\langle \tau(A_0), \dots, \tau(A_0, \dots, A_k) \rangle} \neq \emptyset \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien, supongamos que la sucesión $\langle A_0, A_1, \dots \rangle$ es jugada por I en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ en la que II usa a τ como estrategia (ver diagrama de representación en la figura 3.12). Por un razonamiento análogo al anterior, es claro que $\langle \tau(\langle A_0 \rangle), \dots, \tau(\langle A_0, \dots, A_k \rangle) \rangle \in T$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y finalmente, que la sucesión $\langle \tau(\langle A_0 \rangle), \tau(\langle A_0, A_1 \rangle), \dots \rangle \in [T]$. \square



Figura 3.12: Diagrama de una partida legal del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$

Para probar los siguientes resultados supondremos que \mathcal{X} y \mathcal{Z} son dos colecciones no vacías de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} y \mathcal{X} es cerrada bajo supraconjuntos.

Lema 3.1.2 (i) Si σ es una estrategia para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{[<\omega]}, \mathcal{Z})$, entonces existe un \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos S que satisface que si $\beta \in [S]$, entonces el conjunto $\{\beta(n) : n \in \mathbb{N}\}$ puede ser jugado por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{[<\omega]}, \mathcal{Z})$ en la que I usa a σ como estrategia.

(ii) Si S es un \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , entonces existe una estrategia σ para el jugador I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{[<\omega]}, \mathcal{Z})$ que satisface lo siguiente, si $\langle a_0, a_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{[<\omega]}, \mathcal{Z})$ en la que I usa a σ como estrategia, entonces $\langle a_0, a_1, \dots \rangle \in [S]$.

Demostración

(i) Por una prueba análoga a la realizada en el lema 3.1.1, es claro que si σ es una estrategia para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{[<\omega]}, \mathcal{Z})$, entonces el conjunto $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$, donde $S_0 = \{\emptyset\}$ y $S_{k+1} = \{t \hat{\ } a : t \in S_k \text{ y } a \subseteq \sigma(t)\}$ es finito} para todo $k \in \mathbb{N}$, es un árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} .

Ahora bien, veamos que S es un \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} ; es decir, que para toda sucesión $t \in S$ existe un conjunto $Y_t \in \mathcal{X}$ tal que $t \hat{\ } a \in S$ para todo subconjunto finito a de Y_t . En efecto, considere el conjunto $Y_t = \sigma(t)$ para cada $t \in S$.

Finalmente, note que si $\beta \in [S]$, entonces $\beta \upharpoonright n \in S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto, $\beta(n)$ es un subconjunto finito de $\sigma(\beta \upharpoonright n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En conclusión, se tiene que $\{\beta(n) : n \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto jugado por II en una partida de $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{Z})$ en la que I usa a σ como estrategia.

(ii) Supongamos que S es un \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} y denotemos por $Y_t \in \mathcal{X}$ tal que $Y_t^{<\omega} \subseteq \cup \{a \in \mathbb{N}^{<\omega} : t \hat{\ } a \in S\}$. Consideremos la aplicación $\sigma : (\mathbb{N}^{<\omega})^{<\omega} \rightarrow \mathcal{X}$ tal que $\sigma(t) = \begin{cases} Y_t & \text{si } t \in S \\ \mathbb{N} & \text{si } t \notin S \end{cases}$ y veamos que σ es una estrategia para el jugador I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{Z})$ que satisface las condiciones deseadas.

De la definición de árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , es claro que σ está bien definida y es una estrategia para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{Z})$. Por otro lado, note que si $\langle a_0, a_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{Z})$ en la que I usa a σ como estrategia (ver diagrama de representación en la figura 3.13), entonces los conjuntos a_0 y a_{k+1} son subconjuntos finitos de Y_\emptyset y $Y_{\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle}$, respectivamente. Luego, como S es un \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , se tiene que $\langle a_0, \dots, a_k \rangle \in S$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y en consecuencia, que $\langle a_0, a_1, \dots \rangle \in [S]$. \square

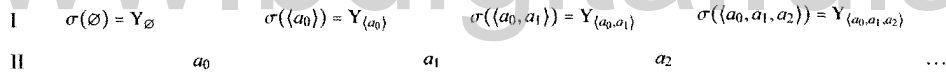


Figura 3.13: Diagrama de una partida legal del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{Z})$

Lema 3.1.3 (i) Si σ es una estrategia para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$, entonces existe un \mathcal{X} -árbol T que satisface que si $\alpha \in [T]$, entonces el conjunto $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\}$ puede ser jugado por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ en la que I usa a σ como estrategia.

(ii) Si T es un \mathcal{X} -árbol sobre \mathbb{N} , entonces existe una estrategia σ para el jugador I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ que satisface que si $\langle n_0, n_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ en la que I usa a σ como estrategia, entonces $\langle n_0, n_1, \dots \rangle \in [T]$.

Demostración

(i) Por una prueba análoga a la realizada en el lema 3.1.1, es claro que si σ es una estrategia para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$, entonces el conjunto $T = \cup_{k \in \mathbb{N}} T_k$, donde $T_0 = \{\emptyset\}$ y $T_{k+1} = \{s \hat{\ } n : s \in T_k \text{ y } n \in \sigma(s)\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es un \mathcal{X} -árbol sobre \mathbb{N} . En efecto, basta observar que $\sigma(s) \subseteq \{n \in \mathbb{N} : s \hat{\ } n \in T\}$ para todo $s \in T$.

Ahora bien, note que si $\alpha \in [T]$, entonces el conjunto $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\}$ es jugado por II en una partida de $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ en la que I usa a σ como estrategia, puesto que $\alpha \upharpoonright n \in T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $\alpha(n) \in \sigma(\alpha \upharpoonright n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Supongamos que T es un \mathcal{X} -árbol sobre \mathbb{N} y definamos para cada sucesión $s \in T$ el conjunto $Y_s^T = \{n \in \mathbb{N} : s \hat{\ } n \in T\}$. De la proposición 1.2.20, es claro que la aplicación $\sigma : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathcal{X}$ dada por $\sigma(s) = \begin{cases} Y_s^T & \text{si } s \in T \\ \mathbb{N} & \text{si } s \notin T \end{cases}$ está bien definida y es una estrategia para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$.

Ahora bien, note que si $\langle n_0, n_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$ en la que I usa a σ como estrategia (ver diagrama de representación en la figura 3.14), entonces $n_0 \in Y_\emptyset^T$ y $n_{k+1} \in Y_{\langle n_0, n_1, \dots, n_k \rangle}^T$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, como T es un \mathcal{X} -árbol sobre \mathbb{N} , se tiene que $\langle n_0, \dots, n_k \rangle \in T$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por tanto, que $\langle n_0, n_1, \dots \rangle \in [T]$. \square

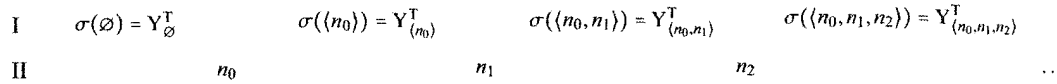


Figura 3.14: Diagrama de una partida legal del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$

El lema que mostraremos a continuación nos permitirá asociar árboles a árboles de conjuntos finitos de \mathbb{N} . Este resultado, al igual que los anteriores, será usado en varias oportunidades a lo largo del capítulo.

Lema 3.1.4 Sea \mathcal{X} una colección no vacía de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} cerrada bajo supraconjuntos. Si S es un \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , entonces existe un \mathcal{X} -árbol T sobre \mathbb{N} tal que para toda sucesión $\alpha \in [T]$, existe una sucesión $\beta \in [S]$ que satisface que $\{\alpha(k) : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \beta(k)$.

Demostración

Supongamos que S es un \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , esto es, que para toda sucesión $t \in S$ existe un conjunto $X_t \in \mathcal{X}$ tal que $t \hat{\ } a \in S$ para todo subconjunto finito a de X_t . Por recursión, definiremos un conjunto $T_k \subseteq \mathbb{N}^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, un elemento $Y_t \in \mathcal{X}$ para cada $t \in T_k$ y una sucesión $s_t \in S$ para cada $t \in T_k$ tal que $|s_t| = k$ y $t(i) \in s_t(i)$ para todo $i = 0, \dots, k - 1$. Luego, mostraremos que $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ es un \mathcal{X} -árbol que satisface las condiciones deseadas.

La recursión inicia con $k = 0$, entonces $T_0 = \{\emptyset\}$, $Y_\emptyset = X_\emptyset$ y $s_\emptyset = \emptyset$. Si $k = 1$, entonces $T_1 = \{\langle n \rangle : n \in Y_\emptyset\}$, $Y_{\langle n \rangle} = X_{\langle a \rangle}$ donde $a = \{n\}$ y $s_{\langle n \rangle} = \langle a \rangle$. Note que a es un subconjunto finito de X_\emptyset , y puesto que S es un \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , entonces la sucesión $\langle a \rangle \in S$.

Ahora bien, supongamos que hemos definido un conjunto $T_k \subseteq \mathbb{N}^k$ para $k \in \mathbb{N}$, $Y_t \in \mathcal{X}$ y $s_t \in S$ para cada $t \in T_k$. Entonces definamos $T_{k+1} = \{t \hat{\ } n_k : t \in T_k \text{ y } n_k \in Y_t\}$, $Y_{t \hat{\ } n_k} = X_{s_t \hat{\ } a_k}$ donde $a_k = \{n_k\}$ y $s_t \hat{\ } n_k = s_t \hat{\ } a_k$. Note que a_k es un subconjunto finito de X_{s_t} , y como S es un \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , entonces la sucesión $s_t \hat{\ } a_k \in S$. Finalmente, observe que si $k \geq 1$ y $t \in T_k$,

entonces $t(i) = n_i$ y $s_t(i) = a_i$ para todo $i = 0, \dots, k-1$, y en consecuencia, $t(i) \in s_t(i)$ para todo $i = 0, \dots, k-1$.

Por una prueba análoga a la realizada en el lema 3.1.1 es claro que $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ es un \mathcal{X} -árbol sobre \mathbb{N} , para ello basta observar que $Y_t = \{n \in \mathbb{N} : t \hat{\ } n \in T\}$ para todo $t \in T$. Por otro lado, note que si $\alpha \in [T]$, entonces $\alpha \upharpoonright k \in T_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $s_{\alpha \upharpoonright k} \in S$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Finalmente, si $\alpha = \langle n_0, n_1, \dots \rangle$ y $s_\alpha = \langle a_0, a_1, \dots \rangle$ donde $a_i = \{n_i\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_k$ y $\beta = \langle a_0, a_1, \dots \rangle \in [S]$. \square

A continuación, estudiaremos cada una de las propiedades definidas en 1.2.21. Iniciaremos clasificándolas en cuatro grupos de acuerdo al conjunto al cual se asocia su definición.

Clasificación de las propiedades de filtros

Las propiedades definidas en 1.2.21 se relacionan en general con cuatro tipos de conjuntos como son los árboles, los árboles de conjuntos finitos de \mathbb{N} , las pseudo intersecciones y los selectores parciales. Teniendo en cuenta dichos conjuntos clasificaremos como sigue las propiedades de filtros.

1. *Propiedades de árboles*: +Ramsey y débilmente Ramsey.
2. *Propiedades de árboles de conjuntos finitos*: P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) y P^+ -Tree(\mathcal{F}).
3. *Propiedades de selectores parciales*: $Q^+(\mathbb{N})$.
4. *Propiedades de pseudo intersección*: Numerablemente generado, $P^+(\mathcal{F})$, diagonalizable, ω -diagonalizable y ω -diagonalizable.

3.2. Propiedades de Árboles

Llamaremos propiedades de árboles al grupo de propiedades de filtros cuyas definiciones se dan en términos de árboles, como son + Ramsey y débilmente Ramsey.

3.2.1. + Ramsey

Recordemos que en la definición 1.2.21 vimos que un filtro \mathcal{F} es + Ramsey si todo \mathcal{F}^+ -árbol tiene una rama en \mathcal{F}^+ ; es decir, que si T es un \mathcal{F}^+ -árbol sobre \mathbb{N} , entonces existe una sucesión $\alpha \in [T]$ tal que $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$.

Ejemplo 3.2.1 \mathcal{F}_r es + Ramsey.

En efecto, si T es un $(\mathcal{F}_r)^+$ -árbol sobre \mathbb{N} , entonces basta considerar una sucesión $\langle n_0, n_1, \dots \rangle$ en $[T]$ tal que $n_0 < n_1 < \dots$. Por el corolario 1.2.17, el conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in (\mathcal{F}_r)^+$. \square

El teorema que mostraremos a continuación nos permitirá caracterizar las estrategias ganadoras del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$ en términos de las propiedades + Ramsey y numerablemente generado.

Teorema 3.2.2 *Dado un filtro \mathcal{F} , considere el juego $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$. Entonces,*

(i) *I tiene estrategia ganadora si, y solo si, \mathcal{F} es numerablemente generado.*

(ii) *II tiene estrategia ganadora si, y solo si, \mathcal{F} no es + Ramsey.*

Demostración

(i) (\Leftarrow) Supongamos que $\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de \mathbb{N} que genera a \mathcal{F} y veamos que la aplicación $\sigma : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathcal{F}$ definida como $\sigma(t) = B_{|t|}$ para todo $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$.

En efecto, si $\langle n_0, n_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$ en la que I usa a σ como estrategia (ver diagrama de representación en la figura 3.15), entonces $n_k \in B_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cap B_m \neq \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego, por el lema 1.2.16, es claro que el conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$, lo cual garantiza que σ es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$.

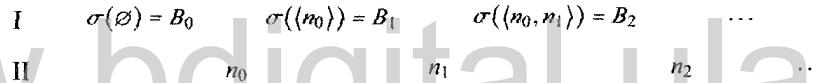


Figura 3.15: Estrategia para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$

(\Rightarrow) Supongamos que σ es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$ y veamos que la colección $\mathcal{B} = \{\sigma(t) : t \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ es una base que genera a \mathcal{F} . [Observe que: como $\sigma(t) \in \mathcal{F}$ para todo $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, entonces la prueba de esta implicación se reduce a mostrar que $\mathcal{F} \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$, puesto que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ y $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \mathcal{F}$].

Por reducción al absurdo vamos a suponer que $\mathcal{F} \not\subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$, esto es, que existe un conjunto $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\sigma(t) \not\subseteq Y$ para todo $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Note que como σ es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$ y $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}^+)^c$, entonces para llegar a una contradicción basta que definamos una partida en la que el jugador I use a σ como estrategia y el jugador II responda con un conjunto disjunto de Y .

En efecto, considere la sucesión $\alpha = \langle \alpha(0), \alpha(1), \dots \rangle$ donde $\alpha(k) = \min\{\sigma(\alpha \upharpoonright k) \setminus Y\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\alpha(k) \in \sigma(\alpha \upharpoonright k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que la sucesión α es jugada por II en una partida de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$ en la que I usa a σ como estrategia, y en consecuencia, que el conjunto $\{\alpha(k) : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$, lo cual es absurdo, puesto que $\{\alpha(k) : k \in \mathbb{N}\} \cap Y = \emptyset$.

(ii) (\Rightarrow) Supongamos que τ es una estrategia ganadora para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$, entonces por el lema 3.1.1 existe un \mathcal{F}^+ -árbol T sobre \mathbb{N} tal que para toda sucesión $\alpha \in [T]$ el conjunto

$\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^*$. Luego, como $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}^+)^c$, se tiene que $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{F}^+$, y en consecuencia, que \mathcal{F} no es +Ramsey.

(\Leftarrow) Si \mathcal{F} no es + Ramsey, entonces existe un \mathcal{F}^+ -árbol T tal que para toda sucesión $\alpha \in [T]$ el conjunto $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{F}^+$. Como T es un \mathcal{F}^+ -árbol sobre \mathbb{N} , entonces por el lema 3.1.1 existe una estrategia τ para el jugador II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$ que satisface que si $\langle A_0, A_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por I en una partida de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$ en la que II usa a τ como estrategia, entonces $\langle \tau(\langle A_0 \rangle), \tau(\langle A_0, A_1 \rangle), \dots \rangle \in [T]$. Por hipótesis, es claro que $\{\tau(\langle A_0, \dots, A_n \rangle) : n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{F}^+$, y en consecuencia, se tiene que τ es una estrategia ganadora para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$. \square

Como consecuencia del teorema 3.2.2 podemos afirmar lo siguiente.

Corolario 3.2.3 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es numerablemente generado, entonces \mathcal{F} es + Ramsey.* \square

3.2.2. Débilmente Ramsey

Recordemos que en la definición 1.2.21 vimos que un filtro \mathcal{F} es *débilmente Ramsey* si todo \mathcal{F} -árbol tiene una rama en \mathcal{F}^+ ; es decir, que si T es un \mathcal{F} -árbol sobre \mathbb{N} , entonces existe una sucesión $\alpha \in [T]$ tal que $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$.

Note que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^+$, y por tanto, las propiedades débilmente Ramsey y + Ramsey se relacionan de manera directa como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.4 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es + Ramsey, entonces \mathcal{F} es débilmente Ramsey.*

De la proposición 3.2.4 y el ejemplo 3.2.1, es claro que \mathcal{F}_r es un filtro débilmente Ramsey.

Más adelante daremos una caracterización de esta propiedad en términos de juegos de filtros (ver teorema 3.5.9).

3.3. Propiedades de Árboles de Conjuntos Finitos

En esta sección estudiaremos las propiedades de filtros cuyas definiciones se dan en términos de árboles de conjuntos finitos de \mathbb{N} , como son: P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) y P^+ -Tree(\mathcal{F}).

3.3.1. P^+ -Tree(\mathcal{F}^+)

Recordemos que en la definición 1.2.21 vimos que un filtro \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) si todo \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} tiene una rama cuya unión está en \mathcal{F}^+ ; es decir, que si S es un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , entonces existe una sucesión $\beta \in [S]$ tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta(n) \in \mathcal{F}^+$.

A continuación, mostraremos un ejemplo de un filtro P^+ -Tree(\mathcal{F}^+).

Ejemplo 3.3.1 *El filtro de los co-selectores.*

Sea $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ una partición de \mathbb{N} en intervalos finitos tales que $|I_n| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que el conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ pertenece a \mathcal{F} (el filtro de los co-selectores) si, y solo si, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|A^c \cap I_n| \leq m$.

Note que los conjuntos generadores de \mathcal{F} lucen como se muestra en la figura 3.16, y además, observe que $X \in \mathcal{F}^+$ si, y sólo si, el $\sup_{n \in \mathbb{N}} |X \cap I_n| = \infty$, esto es, que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|X \cap I_n| > m$.

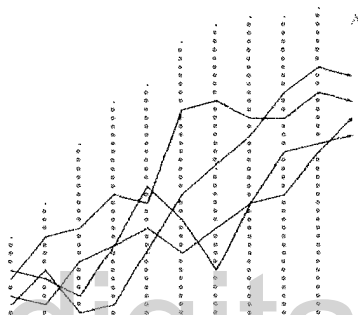


Figura 3.16: Conjuntos generadores del filtro de los co-selectores

Ahora bien, para probar que \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) supondremos que S es un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} y definiremos por recursión una sucesión $\beta \in [S]$ tal que el $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \beta(k) \cap I_n| = \infty$.

Recordemos que si S es un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , entonces para cada $t \in S$ existe un conjunto $X_t \in \mathcal{F}^+$ tal que la sucesión $t \upharpoonright a \in X_t$ para todo subconjunto finito a de X_t .

La recursión inicia con $k = 0$, entonces $\beta \upharpoonright 0 = \emptyset$. Note que como S es un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , entonces $X_\emptyset \in \mathcal{F}^+$, y por tanto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|X_\emptyset \cap I_{n_0}| > 0$. Denotemos por $\beta(0) = \{x_{00}\}$ donde $x_{00} = \min\{X_\emptyset \cap I_{n_0}\}$ y definamos la sucesión $\beta \upharpoonright 1 = \langle \beta(0) \rangle$. Análogamente, como $\beta \upharpoonright 1 \in S$, se tiene que $X_{\beta \upharpoonright 1} \in \mathcal{F}^+$, y por tanto, existe $n_1 > n_0$ tal que $|X_{\beta \upharpoonright 1} \cap I_{n_1}| > 1$. Denotemos por $\beta(1) = \{x_{10}, x_{11}\}$ donde $x_{10} = \min\{X_{\beta \upharpoonright 1} \cap I_{n_1}\}$ y $x_{11} = \min\{(X_{\beta \upharpoonright 1} \cap I_{n_1}) \setminus x_{10}\}$, y definamos la sucesión $\beta \upharpoonright 2 = \langle \beta(0), \beta(1) \rangle$.

Ahora bien, supongamos que hemos definido una sucesión $\beta \upharpoonright k = \langle \beta(0), \dots, \beta(k-1) \rangle \in S$, y veamos que, como S es un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , entonces $X_{\beta \upharpoonright k} \in \mathcal{F}^+$, y por lo tanto, existe un $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $|X_{\beta \upharpoonright k} \cap I_{n_k}| > k$. Denotemos por $\beta(k) = \{x_{ki} : i = 0, \dots, k\}$ donde $x_{k0} = \min\{X_{\beta \upharpoonright k} \cap I_{n_k}\}$ y $x_{ki} = \min\{(X_{\beta \upharpoonright k} \cap I_{n_k}) \setminus x_{k(i-1)}\}$ para todo $i = 1, \dots, k$. Finalmente, definamos la sucesión $\beta \upharpoonright k+1 = \beta \upharpoonright k \frown \beta(k)$. Note que β es una sucesión en $[S]$ que satisface las

condiciones deseadas, y en consecuencia, \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+). \square

En la siguiente proposición mostraremos que si \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} , entonces las propiedades P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) y $+Ramsey$ se relacionan como consecuencia directa del lema 3.1.4.

Proposición 3.3.2 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es $+Ramsey$, entonces \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+).*

Demostración

Supongamos que S es un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} y sea T el \mathcal{F}^+ -árbol dado por el lema 3.1.4. Si \mathcal{F} es $+Ramsey$, entonces existe una sucesión $\alpha \in [T]$, y por consiguiente, una sucesión $\beta \in [S]$ tal que $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$ y $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta(n)$. Como \mathcal{F}^+ es cerrado bajo supraconjuntos, entonces es claro que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta(n) \in \mathcal{F}^+$, y por lo tanto, que el filtro \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+). \square

A partir del siguiente ejemplo, mostraremos que el recíproco de la proposición 3.3.2 no es cierto; es decir, que P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) $\not\Rightarrow +Ramsey$.

Ejemplo 3.3.3 *El filtro de los co-selectores no es $+Ramsey$.*

Ya vimos en el ejemplo 3.3.1 que \mathcal{F} , el filtro de los co-selectores, es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+). A continuación, mostraremos que \mathcal{F} no es $+Ramsey$, esto es, que existe un \mathcal{F}^+ -árbol T tal que para toda sucesión $\alpha \in [T]$ el conjunto $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{F}^+$, o lo que es equivalente, que para toda sucesión $\alpha \in [T]$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \cap I_n| \leq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En primer lugar, definiremos por recursión un conjunto $T_k \subseteq \mathbb{N}^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $X_t \in \mathcal{F}^+$ para cada $t \in T_k$, y luego mostraremos que $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ es un \mathcal{F}^+ -árbol que satisface las condiciones deseadas.

La recursión inicia con $k = 0$, entonces $T_0 = \{\emptyset\}$ y $X_{\emptyset} = \mathbb{N}$. Ahora bien, supongamos que hemos definido un conjunto $T_k \subseteq \mathbb{N}^k$ para $k \in \mathbb{N}$ y $X_t \in \mathcal{F}^+$ para cada $t \in T_k$, entonces definamos $T_{k+1} = \{t \hat{\ } n : t \in T_k \text{ y } n \in X_t\}$ y $X_{t \hat{\ } n} = \bigcup_{m > m_k} I_m$ donde $m_k \in \mathbb{N}$ y es tal que $n \in I_{m_k}$. Note que $\bigcup_{m > m_k} I_m \in \mathcal{F}_r$, y por lo tanto, $X_{t \hat{\ } n} \in \mathcal{F}^+$. Por una prueba análoga a la realizada en el lema 3.1.1 y teniendo en cuenta que $X_t \subseteq \{n \in \mathbb{N} : t \hat{\ } n \in T\}$ para todo $t \in T$, es claro que $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ es un \mathcal{F}^+ -árbol sobre \mathbb{N} .

Finalmente, note que si $\alpha \in [T]$, entonces existe una sucesión $\langle m_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\alpha(k) \in I_{m_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $|\{\alpha(k) : k \in \mathbb{N}\} \cap I_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

El teorema que mostraremos a continuación nos permitirá caracterizar las estrategias ganadoras del primer y segundo jugador de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$ en términos de las propiedades P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) y ω -diagonalizable por conjuntos \mathcal{F}^+ -universal, respectivamente. Sin embargo, dado

que esta segunda propiedad no es objeto de estudio del presente trabajo, en la prueba del teorema mostraremos sólo el ítem que hace referencia a la primera propiedad, P^+ -Tree(\mathcal{F}^+).

Antes de enunciar el teorema de caracterización para filtros P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) veamos la siguiente definición.

Definición 3.3.4 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} y X una colección no vacía de subconjuntos finitos de \mathbb{N} . Diremos que:

- X es un conjunto \mathcal{Z} -universal (usualmente \mathcal{Z} será \mathcal{F} o \mathcal{F}^+), si para cada $Y \in \mathcal{Z}$ existe un conjunto $a \in X \cap Y^{<\omega}$.
- \mathcal{F} es ω -diagonalizable por un conjunto \mathcal{Z} -universal, si existe un conjunto $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ \mathcal{Z} -universal tal que para todo $Y \in \mathcal{F}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \cap Y \neq \emptyset$, excepto para una cantidad finita de $a \in X_n$.

Teorema 3.3.5 Dado un filtro \mathcal{F} , considere el juego $\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$. Entonces,

- (i) I tiene estrategia ganadora si, y solo si, \mathcal{F} no es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+).
- (ii) II tiene estrategia ganadora si, y solo si, \mathcal{F} es ω -diagonalizable por conjuntos \mathcal{F}^+ -universal.

Demostración

(i) (\Rightarrow) Supongamos que σ es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$ y veamos que \mathcal{F} no es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+), esto es, que existe un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos S tal que para toda sucesión $\beta \in [S]$ se tiene que la $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \beta(k) \notin \mathcal{F}^+$.

En primer lugar, note que si σ es una estrategia para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$, entonces por el lema 3.1.2 existe un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos S tal que para toda sucesión $\beta \in [S]$ el conjunto $\{\beta(n) : n \in \mathbb{N}\}$ puede ser jugado por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$ en la que I usa a σ como estrategia. Ahora bien, si σ es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$, entonces la $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \beta(k) \notin \mathcal{F}^+$ para toda $\beta \in [S]$, y por lo tanto, el filtro \mathcal{F} no es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+).

(\Leftarrow) Supongamos que \mathcal{F} no es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) y veamos que la estrategia dado por el lema 3.1.2 es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$.

En efecto, si S es un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , entonces por el 3.1.2 existe una estrategia σ para el jugador I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$ que satisface que: si $\langle a_0, a_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$ en la que I usa a σ como estrategia, entonces $\langle a_0, a_1, \dots \rangle \in [S]$. Note que como \mathcal{F} no es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+), se tiene además que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_k \notin \mathcal{F}^+$, y por lo tanto, que σ es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$. \square

3.3.2. P^+ -Tree(\mathcal{F})

En la definición 1.2.21 vimos que un filtro \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}), si todo \mathcal{F} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} tiene una rama cuya unión está en \mathcal{F}^+ ; es decir, que si S es un \mathcal{F} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , entonces existe una sucesión $\beta \in [S]$ tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta(n) \in \mathcal{F}^+$.

En las siguientes proposiciones demostraremos que si \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} , entonces las propiedades débilmente Ramsey y P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) se relacionan de manera directa con P^+ -Tree(\mathcal{F}).

Proposición 3.3.6 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es débilmente Ramsey, entonces \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}).*

Demostración

La prueba de esta proposición es análoga a la realizada en 3.3.2. □

Más adelante, se podrá comprobar que el recíproco de la proposición 3.3.6 no es cierto, esto es, que P^+ -Tree(\mathcal{F}) $\not\Rightarrow$ débilmente Ramsey.

Proposición 3.3.7 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+), entonces \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}).* □

De la proposición 3.3.7 y el ejemplo 3.3.1, es claro que el filtro de los co-selectores es P^+ -Tree(\mathcal{F}).

El teorema que enunciaremos a continuación nos permitirá caracterizar las estrategias ganadores del primer y segundo jugador de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}^{[<\omega]}, \mathcal{F}^+)$ en términos de las propiedades P^+ -Tree(\mathcal{F}) y ω -diagonalizable por conjuntos \mathcal{F} -universal, respectivamente. Dado que la segunda de dichas propiedades tampoco es objeto de estudio del presente trabajo, en la prueba del teorema mostraremos sólo el ítem que hace referencia a la primera propiedad, P^+ -Tree(\mathcal{F}).

Teorema 3.3.8 *Dado un filtro \mathcal{F} , considere el juego $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}^{[<\omega]}, \mathcal{F}^+)$. Entonces,*

- (i) *I tiene estrategia ganadora si, y solo si, \mathcal{F} no es P^+ -Tree(\mathcal{F}).*
- (ii) *II tiene estrategia ganadora si, y solo si, \mathcal{F} es ω -diagonalizable por conjuntos \mathcal{F} -universal.*

Demostración

La prueba de este teorema es análoga a realizada en 3.3.5. □

3.4. Propiedades de Selectores Parciales

En esta sección estudiaremos una de las propiedades de filtros cuyas definiciones se dan en términos de los selectores parciales de una partición.

3.4.1. $Q^+(\mathbb{N})$

En la definición 1.2.21 vimos que un filtro \mathcal{F} es $Q^+(\mathbb{N})$, si para toda partición de \mathbb{N} en conjuntos finitos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe un conjunto $S \in \mathcal{F}^+$ tal que $|S \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A continuación, y a diferencia de la forma en que se han estudiado las propiedades definidas hasta el momento, vamos a iniciar mostrando un ejemplo de un filtro que no cumple con esta propiedad.

Ejemplo 3.4.1 *El filtro de los co-selectores (ejemplo 3.3.1) no es $Q^+(\mathbb{N})$.*

En efecto, basta considerar la partición $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $|I_n| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; pues recordemos que si $S \in \mathcal{F}^+$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|S \cap I_n| > m$. Así, tomando $m = 1$ se tiene que $|S \cap I_n| > 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia, \mathcal{F} no es $Q^+(\mathbb{N})$. \square

Más adelante daremos una caracterización de esta propiedad en términos de juegos de filtros (ver teorema 3.5.17).

3.5. Propiedades de Pseudo Intersección

En esta última sección estudiaremos cuatro de las propiedades de filtros cuyas definiciones se asocian a la pseudo intersección de ciertas colecciones de conjuntos. Dichas propiedades serán clasificadas a la vez en dos grupos que denominaremos como propiedades P y propiedades de diagonalización.

Propiedades P

3.5.1. $P^+(\mathcal{F})$

Recordemos que en la definición 1.2.21 vimos que un filtro \mathcal{F} es $P^+(\mathcal{F})$, si para toda sucesión de elementos del filtro $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe un conjunto $A \in \mathcal{F}^+$ tal que $A \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Iniciaremos mostrando un ejemplo de un filtro sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que no es $P^+(\mathcal{F})$.

Ejemplo 3.5.1 *El filtro $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ no es $P^+(\mathcal{F})$.*

Sea $X_n = \{n\} \times \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que $A \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ si, y solo si, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq^* A$ para todo $n \geq k$.

Observe que los conjuntos generadores de $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ lucen como se muestra en la figura 3.17, y además, note que $Y \in (\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r)^+$ si, y sólo si, el conjunto $X_k \cap Y \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito para una cantidad infinita de $k \in \mathbb{N}$.

Para probar que $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ no es $P^+(\mathcal{F})$ consideraremos la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $A_n = \bigcup_{k \geq n} \{k\} \times \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y mostraremos que si $A \in (\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r)^+$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \setminus A_n$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

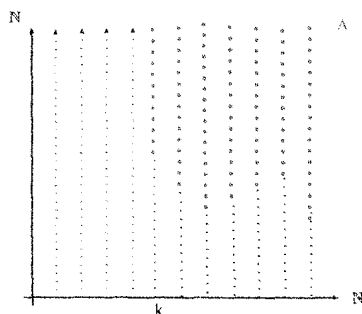


Figura 3.17: Conjuntos generadores de $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$

En efecto, si $A \in (\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r)^+$, entonces el conjunto $X_k \cap A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito para una cantidad infinita de $k \in \mathbb{N}$. Denotemos por $m = \min\{k \in \mathbb{N} : X_k \cap A \text{ es infinito}\}$. Como $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$, es claro que $A \setminus A_{m+1}$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, y por tanto, $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ no es $P^+(\mathcal{F})$. \square

En la siguiente proposición mostraremos la relación que existe entre las propiedades $P^+\text{-Tree}(\mathcal{F})$ y $P^+(\mathcal{F})$.

Proposición 3.5.2 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es $P^+\text{-Tree}(\mathcal{F})$, entonces \mathcal{F} es $P^+(\mathcal{F})$.

Demostración

Supongamos que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de \mathcal{F} y definamos el conjunto $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ donde $S_0 = \{\emptyset\}$ y $S_{k+1} = \{t \hat{^} a : t \in S_k \text{ y } a \subseteq \bigcap_{i=0}^k A_i \text{ es finito}\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por una prueba análoga a la realizada en el lema 3.1.1, y definiendo el conjunto $Y_t = \bigcap_{i=0}^k A_i$ para cada $t \in S_k$, es claro que S es un \mathcal{F} -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} .

Ahora bien, supongamos que \mathcal{F} es $P^+\text{-Tree}(\mathcal{F})$, entonces existe una sucesión $\alpha \in [S]$ tal que la $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) \in \mathcal{F}^+$. Como $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) \setminus A_0 = \emptyset$ y $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) \setminus A_n \subseteq \bigcup_{i=0}^n \alpha(i)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que si $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k)$, entonces $A \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; lo cual garantiza que \mathcal{F} es un filtro $P^+(\mathcal{F})$. \square

De la proposición 3.5.2, es claro que el filtro de los co-selectores es $P^+(\mathcal{F})$.

Propiedades de Diagonalización

3.5.2. Diagonalizable

En la definición 1.2.21 vimos que un filtro \mathcal{F} es diagonalizable, si existe un conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $X \subseteq^* Y$ para todo $Y \in \mathcal{F}$.

En la siguiente proposición, mostraremos la relación que existe entre esta propiedad y la propiedad de ser numerablemente generado.

Proposición 3.5.3 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es numerablemente generado, entonces \mathcal{F} es diagonalizable.*

Demostración

Supongamos que $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base que genera a \mathcal{F} . Fijemos un $x_0 \in B_0$ y un $x_{k+1} \in (\bigcap_{i=0}^{k+1} B_i)/x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y veamos que el conjunto $X = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto infinito de \mathbb{N} que diagonaliza a \mathcal{F} .

En efecto, si $Y \in \mathcal{F}$, entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $X \setminus Y \subseteq X \setminus B_m$. Como $X \setminus B_m = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$, es claro que $X \subseteq^* Y$, y por consiguiente, \mathcal{F} es diagonalizable. \square

De la proposición 3.5.3 y el ejemplo 1.2.11, es claro que \mathcal{F}_r es un filtro diagonalizable.

A continuación mostraremos que el recíproco de la proposición 3.5.3 no es cierto; es decir, que diagonalizable $\not\Rightarrow$ numerablemente generado.

Ejemplo 3.5.4 $(\emptyset \times \text{FIN})^*$ es un filtro diagonalizable que no es numerablemente generado.

Sea X un subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Diremos que $X \in (\emptyset \times \text{FIN})^*$ sí, y sólo sí, $\{m\} \times \mathbb{N} \subseteq^* X$ para todo $m \in \mathbb{N}$. O lo que es equivalente, si existe una función $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que para todo par (m, n) que satisface que $f(m) \leq n$, se tiene que $(m, n) \in X$.

Denote por $A_f = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f(m) \leq n\}$ y observe que la colección $\{A_f : f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una base que genera a $(\emptyset \times \text{FIN})^*$.

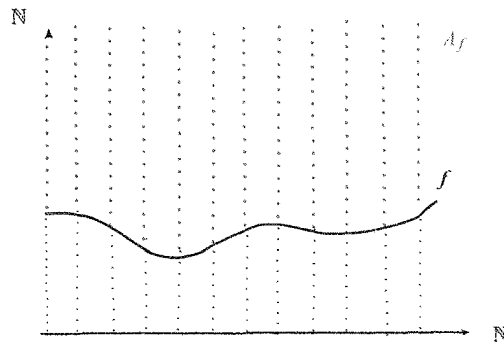


Figura 3.18: Conjuntos generadores de $(\emptyset \times \text{FIN})^*$

Note que los conjuntos generadores de $(\emptyset \times \text{FIN})^*$ lucen como se ilustra en la figura 3.18 y que cualquier conjunto de la forma $\{m\} \times \mathbb{N}$ diagonaliza a $(\emptyset \times \text{FIN})^*$.

Antes de probar que $(\emptyset \times \text{FIN})^*$ no es numerablemente generado, mostraremos el siguiente lema.

Lema 3.5.5 *Si $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una colección en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, entonces existe una función $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_k(n) < g(n)$.*

Demostración

Considere la función $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $g(n) = f_n(n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Ahora bien, veamos que $(\emptyset \times \text{FIN})^*$ no es numerablemente generado, esto es, que para toda colección no vacía $\{B_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq (\emptyset \times \text{FIN})^*$, existe un conjunto $Y \in (\emptyset \times \text{FIN})^*$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $B_k \not\subseteq Y$.

En efecto, note que si $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una colección no vacía de elementos de $(\emptyset \times \text{FIN})^*$ y $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ es la colección de elementos de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $A_{f_k} \subseteq B_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto $Y = \{(m, n) : g(m) \leq n\}$ donde g es la función en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dada por el lema 3.5.5, es un elemento del filtro. Finalmente, note que el par $(k, f_k(k)) \in B_k \setminus Y$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $B_k \not\subseteq Y$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

3.5.3. ω + diagonalizable

Recordemos que en la definición 1.2.21 vimos que un filtro \mathcal{F} es ω +diagonalizable si existe una colección de conjuntos positivos $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para todo $Y \in \mathcal{F}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq^+ Y$.

A continuación, mostraremos la relación que existe entre las propiedades ω +diagonalizable y diagonalizable.

Proposición 3.5.6 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es diagonalizable, entonces \mathcal{F} es ω +diagonalizable.*

Demostración

Para probar que esta proposición es cierta, basta observar que si X es un subconjunto infinito de \mathbb{N} tal que $X \subseteq^+ Y$ para todo $Y \in \mathcal{F}$, entonces $X \in \mathcal{F}^+$. □

Más adelante, mostraremos que el recíproco de la proposición 3.5.6 no es cierto (ver ejemplo 3.5.13).

Observación 3.5.7 *De la proposición 3.5.6 y el ejemplo 3.5.4, se tiene que $(\emptyset \times \text{FIN})^*$ es un filtro ω +diagonalizable.*

A continuación, mostraremos un teorema que nos permitirá caracterizar las estrategias ganadoras del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en términos de las propiedades ω +diagonalizable y débilmente Ramsey. Sin embargo, antes de enunciar el teorema mostraremos el siguiente lema.

Lema 3.5.8 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} y $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} que diagonaliza a \mathcal{F} . Si A es un subconjunto de \mathbb{N} tal que $A \cap X_n$ es infinito para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \in \mathcal{F}^+$.

Demostración

Por reducción al absurdo supondremos que $A \notin \mathcal{F}^+$, entonces existe un conjunto $F \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap F = \emptyset$. Ahora bien, como $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ diagonaliza a \mathcal{F} , entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq^* F$. Note que $X_n \cap A \subseteq X_n \cap F^c$, y por lo tanto, $X_n \cap A$ es un subconjunto finito de \mathbb{N} , lo cual contradice la hipótesis. \square

Teorema 3.5.9 Dado un filtro \mathcal{F} , considere el juego $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$. Entonces,

- (i) I tiene estrategia ganadora si, y solo si, \mathcal{F} no es débilmente Ramsey.
- (ii) II tiene estrategia ganadora si, y solo si, \mathcal{F} es ω_+ diagonalizable.

Demostración

(i) (\Leftarrow) Si \mathcal{F} no es débilmente Ramsey, entonces existe un \mathcal{F} -árbol T tal que para toda sucesión $\alpha \in [T]$ el conjunto $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{F}^+$. Note que esta última afirmación garantiza que la estrategia σ dada por el lema 3.1.3 es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ puesto que satisface que si $\langle n_0, n_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por II en una partida de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en la que I usa a σ como estrategia, entonces $\langle n_0, n_1, \dots \rangle \in [T]$.

(\Rightarrow) Si σ es una estrategia para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$, entonces por el lema 3.1.3 existe un \mathcal{F} -árbol T tal que para toda sucesión $\alpha \in [T]$ el conjunto $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\}$ es jugado por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en la que I usa a σ como estrategia. De esta última afirmación, es claro que si σ es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$, entonces el conjunto $\{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{F}^+$ para todo $\alpha \in [T]$; lo cual garantiza que \mathcal{F} no es débilmente Ramsey.

(ii) (\Leftarrow) Supongamos que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de conjuntos positivos que diagonaliza a \mathcal{F} y fijemos una función sobreyectiva $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\gamma^{-1}(n)$ es un subconjunto infinito de \mathbb{N} , para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que la aplicación $\tau : \mathcal{F}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $\tau(\langle Y_0, \dots, Y_k \rangle) = \min\{Y_k \cap (X_{\gamma(k)} / k)\}$ para toda sucesión $\langle Y_0, \dots, Y_k \rangle \in \mathcal{F}^{<\omega}$, es una estrategia ganadora para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$.

En primer lugar, note que τ está bien definida y es una estrategia para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$, puesto que $X_{\gamma(k)} \in \mathcal{F}^+$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por tanto, $(X_{\gamma(k)} / k) \cap Y \neq \emptyset$ para todo $Y \in \mathcal{F}$.

A continuación, mostraremos que τ es una estrategia ganadora para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$. En efecto, note que si $\langle Y_0, Y_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por I en una partida de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en la que II usa a τ como estrategia (ver diagrama de representación en la figura 3.19), entonces el conjunto $\{\tau(\langle Y_0 \rangle), \tau(\langle Y_0, Y_1 \rangle), \dots\}$ interseca infinitamente a cada X_n , puesto que $\gamma^{-1}(n)$ es un subconjunto infinito de \mathbb{N} para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el lema 3.5.8, se tiene que $\{\tau(\langle Y_0 \rangle), \tau(\langle Y_0, Y_1 \rangle), \dots\} \in \mathcal{F}^+$; lo cual garantiza que τ es una estrategia ganadora para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$.

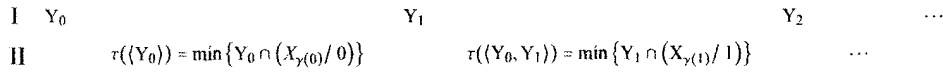


Figura 3.19: Estrategia para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$

(\Rightarrow) Supongamos que τ es una estrategia ganadora para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ y sea T el \mathcal{F}^+ -árbol dado por el lema 3.1.1. Denotemos por $X_s = \{n : s \hat{\ } n \in T\}$ para todo $s \in T$ y veamos que $\{X_s : s \in T\}$ es una colección de conjuntos positivos que diagonaliza a \mathcal{F} .

Por reducción al absurdo vamos a suponer que existe un conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $X_s \setminus A$ es infinito para todo $s \in T$. Como T es un \mathcal{F}^+ -árbol sobre \mathbb{N} , entonces es claro que la sucesión $\alpha = \langle \alpha(0), \alpha(1) \dots \rangle$ donde $\alpha(k) = \min\{X_{\alpha \upharpoonright k} \setminus A\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es una rama de T tal que $\{\alpha(k) : k \in \mathbb{N}\} \cap A = \emptyset$, lo cual es una contradicción puesto que $\{\alpha(k) : k \in \mathbb{N}\}$ corresponde al conjunto jugado por II en una partida legal de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en la que II usa a τ como estrategia. En conclusión, se tiene que $\{X_s : s \in T\}$ es la colección de conjuntos positivos que diagonaliza a \mathcal{F} , y por tanto, \mathcal{F} es ω -diagonalizable. \square

Como consecuencia del teorema 3.5.9 podemos afirmar lo siguiente.

Corolario 3.5.10 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es ω -diagonalizable, entonces \mathcal{F} es débilmente Ramsey.* \square

Antes de probar que el recíproco de la proposición 3.5.6 no es cierto, definiremos el siguiente filtro.

Definición 3.5.11 *Sea \mathcal{G} un filtro sobre \mathbb{N} . Diremos que $A \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$ si, y solo si, $A \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ y $\{m : (n, m) \in A\} \in \mathcal{G}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Note que $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$ es un filtro sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cuyos generadores lucen como se muestra en la figura 3.20. Además, observe que $Y \in (\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G}))^+$ si, y solo si, $Y^c \notin \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ ó bien, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{m : (n, m) \in Y^c\} \notin \mathcal{G}$. O lo que es equivalente, $Y \in (\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G}))^+$ si, y solo si, el conjunto $(\{k\} \times \mathbb{N}) \cap Y \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito para una cantidad infinita de $k \in \mathbb{N}$ ó bien, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{m : (n, m) \in Y\} \in \mathcal{G}^+$.

Observación 3.5.12 *Del corolario 3.5.10, el ejemplo 3.5.1 y las proposiciones 3.5.6, 3.5.2 y 3.3.6, se tiene que $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ es un filtro no diagonalizable.*

Ahora sí, veamos que el recíproco de la proposición 3.5.6 no es cierto; es decir, que ω -diagonalizable $\not\Rightarrow$ diagonalizable.

Ejemplo 3.5.13 *Si \mathcal{G} es un filtro no diagonalizable, entonces $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$ es un filtro ω -diagonalizable que no es diagonalizable.*

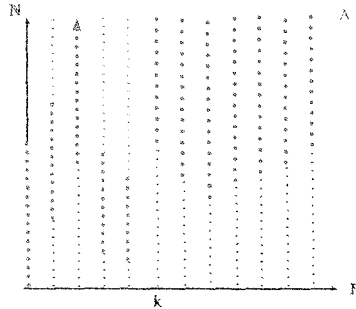


Figura 3.20: Conjuntos generadores de $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$

En primer lugar, mostraremos que $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$ es ω -diagonalizable.

Considere la colección $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $X_n = \{n\} \times \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y note que $X_n \in (\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G}))^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$, puesto que $\{m : (n, m) \in X_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{G}^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, note que si $Y \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$, entonces $Y \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$, y por lo tanto, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_k \subseteq^* Y$ para todo $k \geq n$. De esta última afirmación, se tiene que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de conjuntos positivos que diagonaliza a $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$, y en conclusión, $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$ es ω -diagonalizable.

Ahora bien, veamos que $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$ no es diagonalizable, esto es, que para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ infinito, existe un $X \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$ tal que $A \setminus X$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

En efecto, sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Como $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ no es diagonalizable, entonces existe un conjunto $Z \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ tal que $A \setminus Z$ es infinito. Supongamos que $X_k \subseteq^* Z$ para todo $k \geq n_0$ y notemos $B = (A \setminus Z) \cap (\bigcup_{k \geq n_0} X_k)$ es un subconjunto finito ó infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ver figura 3.21.

A continuación, analizaremos los casos en que B es finito o infinito, y mostraremos que en cualquiera de ellos, es posible definir un conjunto $X \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$ tal que $A \setminus X$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Caso 1: Si B es un subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces basta considerar $X = \left(\bigcup_{k=0}^{n_0-1} X_k \right) \cup Z$.

Note que $X \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$, dado que $Z \subseteq X$ y $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ es cerrado bajo supraconjuntos. Además, observe que $\{m : (n, m) \in X\} = \mathbb{N}$ para todo $n < n_0$ y $\{m : (n, m) \in X\} \in \mathcal{F}_r$ para todo $n \geq n_0$, lo cual garantiza que $\{m : (n, m) \in X\} \in \mathcal{G}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta última afirmación, es claro que $X \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$. Finalmente, note que $A \setminus X = A \cap \left(\bigcup_{k \geq n_0} X_k \right) \cap Z^c = B$, y por lo tanto, $A \setminus X$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

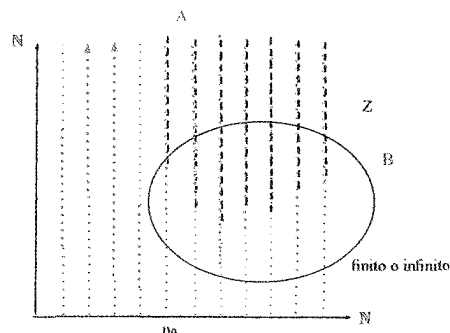


Figura 3.21: Representación del conjunto B

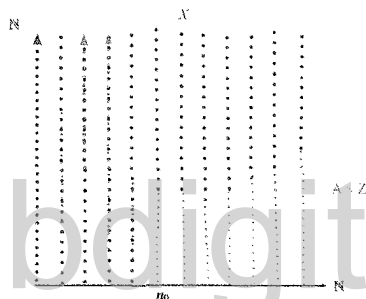


Figura 3.22: Representación del conjunto X

Caso 2: Si B es un subconjunto finito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces existe un $m < n_0$ tal que $X_m \cap A$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Como $\{n : (m, n) \in A\} \subseteq \mathbb{N}$ es infinito y \mathcal{G} no es diagonalizable, entonces existe un conjunto $G \in \mathcal{G}$ tal que $\{n : (m, n) \in A\} \setminus G$ es un subconjunto infinito de \mathbb{N} . Denotemos por $G_m = \{(m, y) : y \in G\}$ y definamos el conjunto

$$X = \left(\bigcup_{k=0}^{n_0-1} X_k \setminus X_m \right) \cup G_m \cup Z.$$

Al igual que en el caso anterior, es claro que $X \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$, puesto que $X \in \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ y el conjunto $\{p : (n, p) \in X\} \in \mathcal{G}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \{p : (n, p) \in X\} &= \mathbb{N} \text{ para todo } n < n_0 \text{ y } n \neq m, \\ \{p : (n, p) \in X\} &= G \text{ para } n = m \text{ y} \\ \{p : (n, p) \in X\} &\in \mathcal{F}_r \text{ para todo } n \geq n_0. \end{aligned}$$

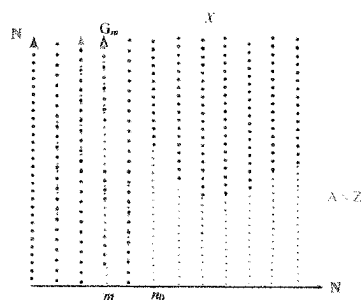


Figura 3.23: Representación del conjunto X

Ahora bien, observe que:

$$\begin{aligned} A \setminus X &= A \cap \left(X_m \cup \bigcup_{k \geq n_0} X_k \right) \cap G_m^c \cap Z^c \\ &= (A \cap G_m^c) \cap \left[(X_m \setminus Z) \cup \left(\bigcup_{k \geq n_0} X_k \setminus Z \right) \right] \end{aligned}$$

Luego, como $m < n_0$, se tiene que $X_m \setminus Z = X_m$, y por tanto,

$$A \setminus X = (A \cap G_m^c \cap X_m) \cup \left[A \cap G_m^c \cap \left(\bigcup_{k \geq n_0} X_k \setminus Z \right) \right]$$

Finalmente, note que $A \cap G_m^c \cap X_m$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, y por consiguiente, $A \setminus X$ es infinito. \square

3.5.4. ω -diagonalizable

En la definición 1.2.21 vimos que un filtro \mathcal{F} es ω -diagonalizable, si existe una colección $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^{[\omega]}$ tal que para todo $Y \in \mathcal{F}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq^* Y$.

Ejemplo 3.5.14 Los filtros $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ y $(\emptyset \times \text{FIN})^*$ son ω -diagonalizables.

En efecto, basta considerar la colección $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $X_n = \{n\} \times \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Note que $\mathcal{F}^+ \subseteq \mathbb{N}^{[\omega]}$, y por lo tanto, las propiedades ω +diagonalizable y ω -diagonalizable se relacionan de manera directa como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.5.15 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es ω +diagonalizable, entonces \mathcal{F} es ω -diagonalizable. \square

Observación 3.5.16 $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ es un ejemplo de un filtro ω -diagonalizable que no es ω -diagonalizable, y por tanto, el recíproco de la proposición 3.5.15 no es cierto.

A continuación, mostraremos un teorema que nos permitirá caracterizar las estrategias ganadoras del juego $\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en términos de las propiedades $Q^+(\mathbb{N})$ y ω -diagonalizable.

Teorema 3.5.17 Dado un filtro \mathcal{F} , considere el juego $\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$. Entonces,

(i) I tiene estrategia ganadora si, y solo si, \mathcal{F} no es $Q^+(\mathbb{N})$.

(ii) II tiene estrategia ganadora si, y solo si, \mathcal{F} es ω -diagonalizable.

Demostración

(i)(\Rightarrow) Sea σ una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$. Supongamos que \mathcal{F} es $Q^+(\mathbb{N})$ y definamos una sucesión $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $[\pi_0, \infty) \subseteq \sigma(\emptyset)$ y

$$[\pi_{n+1}, \infty) \subseteq \bigcap \{ \sigma(\langle n_0, n_1, \dots, n_i \rangle) : n_0 < n_1 < \dots < n_i < \pi_n \} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Note que $\{[\pi_n, \pi_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una partición de \mathbb{N} en intervalos finitos, y por lo tanto, existe un conjunto $S \in \mathcal{F}^+$ tal que $|S \cap [\pi_n, \pi_{n+1})| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Reescribamos S como la unión de los conjuntos $S_0 = S \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\pi_{2n}, \pi_{2n+1})$ y $S_1 = S \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\pi_{2n+1}, \pi_{2n+2})$, y veamos que tanto S_0 como S_1 pueden ser jugados por II en una partida de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en la que I usa a σ como estrategia.

En efecto, supongamos que $S_0 = \{x_0, x_1, \dots\}$. Como $x_0 \in S_0$, entonces es claro que $x_0 \geq \pi_0$, y por tanto, $x_0 \in [\pi_0, \infty) \subseteq \sigma(\emptyset)$. Por otro lado, note que si $x_k \in S_0$, entonces existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_{2j} \leq x_k < \pi_{2j+1}$. Luego, dado que $x_k < x_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_{k+1} \geq \pi_{2j+2}$, y por lo tanto, $x_{k+1} \in [\pi_{2j+2}, \infty) \subseteq \sigma(\langle x_0, \dots, x_k \rangle)$. El otro caso se trata de manera análoga.

Finalmente, note que como σ una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$, entonces S_0 y $S_1 \notin \mathcal{F}^+$, y por tanto, $S \notin \mathcal{F}^+$, lo cual es una contradicción.

(\Leftarrow) Supongamos que \mathcal{F} no es $Q^+(\mathbb{N})$, entonces existe una partición de \mathbb{N} en conjuntos finitos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para todo $S \in \mathcal{F}^+$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|S \cap A_n| > 1$. Definamos la aplicación $\sigma : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathcal{F}_r$ tal que $\sigma(\emptyset) = \mathbb{N}$ y $\sigma(\langle n_0, \dots, n_k \rangle) = \bigcup_{i > m_k} A_i$ donde $m_k \in \mathbb{N}$ y es tal que $n_k \in A_{m_k}$.

Note que σ está bien definida y es una estrategia ganadora para I en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$, puesto que si $\langle n_0, \dots, n_k \rangle$ es la sucesión jugada por II en una partida de $\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en la que I usa a σ como estrategia, entonces $|\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cap A_m| \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, el conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{F}^+$.

(ii)(\Rightarrow) Supongamos que τ es una estrategia ganadora para II en $\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$. Para cada sucesión $s \in \mathcal{F}_r^{<\omega}$ definamos el conjunto $X_s = \{\tau(s \hat{\ } A) : A \in \mathcal{F}_r\}$ y veamos que $\{X_s : s \in \mathcal{F}_r^{<\omega}\}$ es una colección de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} que diagonaliza a \mathcal{F} .

En efecto, basta observar que:

$$(\forall X \in \mathcal{F})(\exists n \in \mathbb{N})(\exists s \in \mathcal{F}_r^n)(\{A \in \mathcal{F}_r : \tau(s \hat{\ } A) \notin X\} \text{ es finito}).$$

(\Leftarrow) La prueba de esta implicación es análoga a la realizada en el teorema 3.5.9. En efecto, basta observar que $X_{\gamma(k)}/k \in \mathcal{F}_r$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $(X_{\gamma(k)}/k) \cap Y \neq \emptyset$ para todo $Y \in \mathcal{F}_r$. \square

Como consecuencia del teorema 3.5.17 podemos afirmar lo siguiente.

Corolario 3.5.18 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es ω -diagonalizable, entonces \mathcal{F} es $Q^+(\mathbb{N})$.* \square

Observación 3.5.19 *Del ejemplo 3.4.1 y el corolario 3.5.18 se tiene que el filtro de los co-selectores (ejemplo 3.3.1) no es ω -diagonalizable.*

En la siguiente proposición, mostraremos la relación que existe entre las propiedades ω -diagonalizable y magro.

Proposición 3.5.20 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es ω -diagonalizable, entonces \mathcal{F} es magro.*

Demostración

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} que diagonaliza a \mathcal{F} . Definamos una sucesión $n_0 < n_1 < \dots$ tal que $|(n_k, n_{k+1}) \cap X_i| = 1$ para todo $i \leq k$, y veamos que si $Y \in \mathcal{F}$, entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $(n_k, n_{k+1}) \cap Y \neq \emptyset$ para todo $k \geq m$.

En efecto, si $Y \in \mathcal{F}$, entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $X_m \subseteq^* Y$. Asimismo, existe un $k \geq m$ tal que $X_m \setminus Y \subseteq \{0, \dots, n_k\}$. Note que $(n_i, n_{i+1}) \cap Y \neq \emptyset$ para todo $i \geq k$, y por el teorema 1.2.5, se tiene que \mathcal{F} es un filtro magro. \square

A continuación, mostraremos que el recíproco de la proposición 3.5.20 no es cierto; es decir, que magro $\not\Rightarrow$ ω -diagonalizable.

Ejemplo 3.5.21 *El filtro de los co-selectores es magro.*

Ya vimos en la observación 3.5.19 que \mathcal{F} , el filtro de los co-selectores, no es ω -diagonalizable. A continuación, mostraremos que \mathcal{F} es magro.

Sea $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ una partición de \mathbb{N} en intervalos finitos tal que $|I_k| \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $I_k \leq I_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, esto es, que el máximo de I_k es igual al mínimo de I_{k+1} . Luego, denotaremos por $\pi_k = \min I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y veremos que la sucesión $\{\pi_k : k \in \mathbb{N}\}$ satisface el ítem (iii) del teorema 1.2.5.

En efecto, si $X \in \mathcal{F}$, entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|X^c \cap I_n| \leq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $|I_n| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro además que $|X \cap I_k| > 1$ para todo $k > m$, y por lo tanto, que $(\pi_k, \pi_{k+1}) \cap X \neq \emptyset$ para todo $k \geq m + 1$. \square

Para terminar, mostraremos dos cuadros en los que resumiremos algunas de las ideas abordadas a lo largo del capítulo. En el primero, identificaremos ejemplos tanto de filtros que cumplen con las propiedades definidas en 1.2.21, como ejemplos de filtros que no cumplen con éstas, y en el segundo, señalaremos los teoremas de caracterización mostrados para cada una de estas propiedades.

Propiedad	\mathcal{F}_r	Co-selectores	$\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$	$(\emptyset \times \text{FIN})^+$	$\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$
Num. Generado	Si Ej.1.2.11	No	No	No Ej.3.5.4	No
+ Ramsey	Si Ej.3.2.1	No Ej.3.3.3	No		
P^+ -Tree(\mathcal{F}^+)	Si	Si Ej.3.3.1	No		
P^+ -Tree(\mathcal{F})	Si	Si	No	Si	Si
P^+ (\mathcal{F})	Si	Si	No Ej.3.5.1	Si	Si
Débilmente Ramsey	Si		No	Si	Si
$Q^+(\mathbb{N})$	Si	No Ej.3.4.1	Si	Si	Si
ω -diagonalizable	Si	No	Si Ej.3.5.14	Si Ej.3.5.14	Si
ω +diagonalizable	Si	No	No	Si	Si Ej.3.5.11
Diagonalizable	Si	No	No Obs.3.5.12	Si Ej.3.5.4	No Ej.3.5.11
Magro	Si	Si Ej.3.5.21	Si	Si	Si

Cuadro 3.1: Ejemplos de cada propiedad.

Teorema	Juego	Propiedad de filtro Estrategia ganadora jugador I	Propiedad de filtro Estrategia ganadora jugador II
3.2.2	$\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^*)$	\mathcal{F} es numerablemente generado	\mathcal{F} no es +Ramsey
3.3.5	$\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} no es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+)	\mathcal{F} es ω -diagonalizable por \mathcal{F}^+ -universal
3.3.8	$\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} no es P^+ -Tree(\mathcal{F})	\mathcal{F} es ω -diagonalizable por \mathcal{F} -universal
3.5.9	$\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} no es débilmente Ramsey	\mathcal{F} es ω +diagonalizable
3.5.17	$\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} no es $Q^+(\mathbb{N})$	\mathcal{F} es ω -diagonalizable

Cuadro 3.2: Teoremas de caracterización.

CAPÍTULO 4

Filtros Selectivos

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de filtros que no han sido abordadas mediante el enfoque de juegos mostrado por Laflamme, como son: selectivo, P^+ , Q^+ y $Q^+(\mathcal{F})$. Lo que nos motiva a ello, es el hecho de que aunque estas propiedades han sido estudiadas bastante en Teoría de Conjuntos y Topología, no fueron consideradas en los trabajos de Laflamme, ni de ninguno de los autores estudiados para la elaboración de este trabajo.

De manera análoga a como se hizo en el capítulo anterior, iniciaremos definiendo las propiedades que estudiaremos en este capítulo, incluyendo dos nuevas propiedades de diagonalización local que surgieron con el fin de caracterizar las estrategias ganadoras de un cierto tipo de juegos infinitos en términos de algunas de estas propiedades. Luego, mostraremos las relaciones existentes entre cada una de estas propiedades y su relación con las propiedades definidas en 1.2.21. Para terminar, presentaremos dos cuadros en los que resumiremos los resultados mostrados a lo largo de este capítulo, los cuales complementarán el trabajo realizado en el capítulo anterior.

A continuación, definiremos cuatro de las propiedades de filtros que consideraremos en este capítulo.

Definición 4.0.1 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Diremos que:

- (i) \mathcal{F} es P^+ , si para toda sucesión decreciente de conjuntos positivos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe un conjunto $A \in \mathcal{F}^+$ tal que $A \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) \mathcal{F} es Q^+ , si para todo $A \in \mathcal{F}^+$ y para toda partición de A en conjuntos finitos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe un conjunto $S \in \mathcal{F}^+$ tal que $S \subseteq A$ y $|S \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) \mathcal{F} es selectivo, si es Q^+ y P^+ .
- (iv) \mathcal{F} es $Q^+(\mathcal{F})$, si para todo $A \in \mathcal{F}$ y para toda partición de A en conjuntos finitos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe un conjunto $S \in \mathcal{F}^+$ tal que $S \subseteq A$ y $|S \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que las propiedades P^+ , Q^+ y $Q^+(\mathcal{F})$ forman parte de dos de los grupos definidos en el capítulo anterior, *Propiedades de pseudo intersección* y *Propiedades de selectores parciales*, respectivamente. No obstante, dada la relevancia del aporte que hace nuestro trabajo a la investigación iniciado por Laflamme en [6], hemos decidido dedicar parte de este capítulo al estudio de las mismas.

Antes de iniciar con el estudio las propiedades definidas en 4.0.1, introduciremos dos nuevos conceptos de diagonalización local, que como lo podremos ver más adelante, nos permitirán caracterizar las estrategias ganadoras de algunas de estas propiedades.

Definición 4.0.2 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Diremos que:

- (i) \mathcal{F} es localmente ω -diagonalizable, si para todo $A \in \mathcal{F}^+$, existe una colección $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos infinitos de A tal que para todo $Y \in \mathcal{F}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq^* Y$.
- (ii) \mathcal{F} es \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable, si para todo $A \in \mathcal{F}$, existe una colección $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos infinitos de A tal que para todo $Y \in \mathcal{F}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq^* Y$.

En el siguiente diagrama, se indican las relaciones existentes entre cada una de las propiedades definidas en 4.0.1 y 4.0.2.



Figura 4.24: Propiedades de filtros

Observe que las flechas horizontales son las que necesitan mayor trabajo y que las demás se obtienen como consecuencia de sus definiciones ó del hecho que \mathcal{F} está contenido en \mathcal{F}^+ . Asimismo, note que al incluir este diagrama en el de la figura 1.4 se dan nuevas relaciones entre cada una de estas propiedades y las definidas en 1.2.21, como es el caso de la relación entre las propiedades asociadas a árboles y las propiedades de selectores parciales. Ver diagrama en la figura 4.25.

Note que todas las implicaciones que se indican con las flechas negras han sido probadas en el capítulo 3, y por lo tanto, en este capítulo sólo serán probadas aquellas que se indican con flechas azules.

A lo largo de este capítulo, y de manera análoga a como se hizo en el capítulo anterior, demostraremos cada una de las implicaciones que se muestran en la figura 4.25, probaremos que algunas de esas implicaciones no son estrictas, y finalmente, mostraremos los teoremas de caracterización de algunas de estas propiedades.

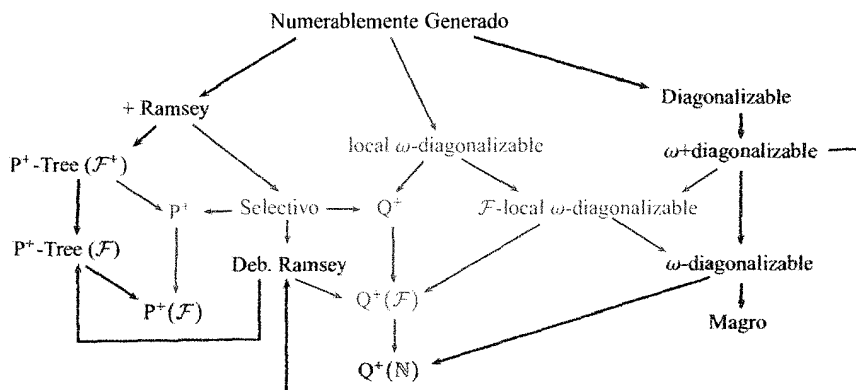


Figura 4.25: Propiedades de filtros

4.1. Otras Propiedades de Filtros

En esta sección estudiaremos cada una de las propiedades definidas en 4.0.1. Iniciaremos con las propiedades de selectores parciales.

4.1.1. Q^+

Recordemos que un filtro \mathcal{F} es Q^+ , si para todo $A \in \mathcal{F}^+$ y para toda partición de A en conjuntos finitos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe un conjunto $S \in \mathcal{F}^+$ tal que $S \subseteq A$ y $|S \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A continuación mostraremos un ejemplo de un filtro Q^+ .

Ejemplo 4.1.1 $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ es Q^+ .

Sea A un conjunto positivo de $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ y $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una partición de A en subconjuntos finitos. Fijemos una función $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\text{rango}(\gamma) = \{k \in \mathbb{N} : (\{k\} \times \mathbb{N}) \cap A \text{ es infinito}\}$ y $\gamma^{-1}(n)$ es un subconjunto infinito de \mathbb{N} para todo $n \in \text{rango}(\gamma)$. Definamos una sucesión $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $k_0 = \min\{n : (\gamma(0) \times \mathbb{N}) \cap A_n \neq \emptyset\}$ y $k_{i+1} = \min\{n : n > k_i \text{ y } (\gamma(i+1) \times \mathbb{N}) \cap A_n \neq \emptyset\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y denotemos por $y_i = \min\{n : (\gamma(i), n) \in A_{k_i}\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Dado que el conjunto $\gamma^{-1}(n) \subseteq \mathbb{N}$ es infinito para todo $n \in \text{rango}(\gamma)$, entonces es claro que $S = \{(\gamma(i), y_i) : i \in \mathbb{N}\} \in (\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r)^+$, y además, que como la sucesión $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, entonces $|S \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, se tiene que $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ es Q^+ . \square

En la siguiente proposición mostraremos la relación que existe entre las propiedades + Ramsey y Q^+ .

Proposición 4.1.2 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es + Ramsey, entonces \mathcal{F} es Q^+ .

Demostración

Supongamos que \mathcal{F} es + Ramsey. Sea A un conjunto positivo y $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una partición de A en conjuntos finitos. Definamos por recursión un conjunto $T_k \subseteq \mathbb{N}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $X_t \in \mathcal{F}^+$ para todo $t \in T_k$, y notemos que el conjunto $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ es un \mathcal{F}^+ -árbol que satisface las condiciones deseadas.

En efecto, considere $T_0 = \{\emptyset\}$ y $X_{\emptyset} = A$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denote el conjunto $T_{k+1} = \{s \hat{\ } n : s \in T_k \text{ y } n \in X_s\}$ y considere como $X_{s \hat{\ } n} = \bigcup_{m > m_k} A_m$ para todo $s \in T_k$, donde m_k es un elemento en \mathbb{N} tal que $n \in A_{m_k}$.

Por una prueba análoga a la realizada en el ejemplo 3.3.3, es claro que T es un \mathcal{F}^+ -árbol sobre \mathbb{N} , y por lo tanto, existe una sucesión $\alpha \in [T]$ tal que $\{\alpha(k) : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$. Finalmente, note que $|\{\alpha(k) : k \in \mathbb{N}\} \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia, se tiene que \mathcal{F} es Q^+ . \square

Observación 4.1.3 (i) + Ramsey $\Rightarrow P^+(\mathcal{F})$ y como consecuencia del ejemplo 3.5.1, se tiene que $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ no es + Ramsey. (ii) Dado que $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ es Q^+ (ejemplo 4.1.1), se tiene que el recíproco de la proposición 4.1.2 no es cierto; es decir, que $Q^+ \not\Rightarrow$ + Ramsey.

Más adelante daremos una caracterización de esta propiedad en términos de juegos de filtros (ver teorema 4.2.3).

4.1.2. $Q^+(\mathcal{F})$

Recordemos que en la definición 4.0.1 vimos que un filtro \mathcal{F} es $Q^+(\mathcal{F})$, si para todo $A \in \mathcal{F}$ y para toda partición de A en conjuntos finitos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe un conjunto $S \in \mathcal{F}^+$ tal que $S \subseteq A$ y $|S \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A continuación, mostraremos la relación que existe entre las propiedades $Q^+(\mathcal{F})$ y débilmente Ramsey.

Proposición 4.1.4 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es débilmente Ramsey, entonces \mathcal{F} es $Q^+(\mathcal{F})$.

Demostración

La prueba de esta proposición es análoga a la realizada en 4.1.2. \square

De la proposición 4.1.4, se tiene que $(\emptyset \times \text{FIN})^*$ y $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$ son filtros $Q^+(\mathcal{F})$.

Ahora bien, note que en las siguientes proposiciones, cuyas demostraciones son inmediatas, se tiene que si \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} , entonces las propiedades débilmente Ramsey y Q^+ se relacionan de manera directa con $Q^+(\mathcal{F})$.

Proposición 4.1.5 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es $Q^+(\mathcal{F})$, entonces \mathcal{F} es $Q^+(\mathbb{N})$. \square

Proposición 4.1.6 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es Q^+ , entonces \mathcal{F} es $Q^+(\mathcal{F})$. □

Observación 4.1.7 (i) Débilmente Ramsey $\Rightarrow P^+(\mathcal{F})$ y como consecuencia del ejemplo 3.5.1, se tiene que $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ no es débilmente Ramsey. (ii) Del ejemplo 4.1.1 y la proposición 4.1.6, se tiene además que $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$ es $Q^+(\mathcal{F})$.

De la observación 4.1.7 es claro que el recíproco de la proposición 4.1.4 no es cierto; es decir, que $Q^+(\mathcal{F}) \not\Rightarrow$ débilmente Ramsey.

Más adelante daremos una caracterización de esta propiedad en términos de juegos de filtros (ver teorema 4.2.10).

4.1.3. P^+

La propiedad que estudiaremos a continuación, es una de las propiedades de pseudo intersección definidas en 4.0.1.

Recordemos que un filtro \mathcal{F} es P^+ , si para toda sucesión decreciente de conjuntos positivos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe un conjunto $A \in \mathcal{F}^+$ tal que $A \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En las siguientes proposiciones, demostraremos las relaciones que existen entre P^+ y algunas de las propiedades definidas anteriormente.

Proposición 4.1.8 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+), entonces \mathcal{F} es P^+ .

Demostración

Supongamos que \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+) y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos positivos de \mathcal{F} . Por recursión, definiremos un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos S tal que para toda sucesión $\beta \in [S]$ se tiene que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \beta(k) \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La definición de S se hará de manera análoga a como se hizo en la proposición 3.5.2; es decir, definiremos un conjunto $S_k \subseteq \left(\mathbb{N}^{<\omega}\right)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $X_t \in \mathcal{F}^+$ para cada $t \in S_k$. Luego, mostraremos que $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ es un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} que satisface las condiciones deseadas.

La recursión inicia con $k = 0$, entonces $S_0 = \{\emptyset\}$ y $X_{\emptyset} = A_0$. Ahora bien, supongamos que hemos definido los conjuntos $S_k \subseteq \left(\mathbb{N}^{<\omega}\right)^k$ para $k \in \mathbb{N}$ y $X_t \in \mathcal{F}^+$ para cada $t \in S_k$, entonces definamos $S_{k+1} = \{t \hat{\ } a : t \in S_k \text{ y } a \subseteq X_t \text{ es finito}\}$ y $X_{t \hat{\ } a} = A_{k+1} \setminus a$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Por una prueba análoga a la realizada en el lema 3.1.1, es claro que $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ es un \mathcal{F}^+ -árbol de conjuntos finitos de \mathbb{N} , puesto que $X_t \in \mathcal{F}^+$ para todo $t \in S$. Finalmente, note que si $\beta \in [S]$,

entonces $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \beta(k) \setminus A_0 = \emptyset$ y $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \beta(k) \setminus A_{n+1} \subseteq \bigcup_{i=0}^n \beta(i)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual garantiza que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \beta(k) \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia, se tiene que \mathcal{F} es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+). \square

De la proposición 4.1.8, se tiene que \mathcal{F}_r y el filtro de los co-selectores son P^+ .

Proposición 4.1.9 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es P^+ , entonces \mathcal{F} es $P^+(\mathcal{F})$.*

Demostración

La prueba de esta proposición es inmediata, dado que \mathcal{F} es cerrado bajo intersecciones finitas y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^+$. \square

4.1.4. Filtros Selectivos

La propiedad de ser Selectivo ha sido estudiada bastante en Teoría de Conjuntos y Topología. En esta sección relacionaremos esta propiedad con algunas de las propiedades consideradas en el capítulo 3. Es importante aclarar, que aunque en la definición 4.0.1 vimos que un filtro \mathcal{F} es selectivo si es Q^+ y P^+ , la manera original como se definió este concepto, es la reformulación dada en la parte (ii) del siguiente lema, ver[8].

Lema 4.1.10 *Si \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) \mathcal{F} es selectivo.

(ii) Para toda sucesión decreciente de conjuntos positivos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe un conjunto $B \in \mathcal{F}^+$ tal que $B/n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Para toda colección $A_s \subseteq \mathbb{N}$ con $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ tal que $\bigcap_{s \in F} A_s \in \mathcal{F}^+$ para todo subconjunto finito F en $\mathbb{N}^{<\omega}$, existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A \in \mathcal{F}^+$ y $A/\max(s) \subseteq A_s$ para todo $s \in A$ finito.

Demostración

(i) \Rightarrow (ii) Sea \mathcal{F} un filtro selectivo y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de conjuntos positivos de \mathcal{F} . Como \mathcal{F} es P^+ , entonces existe un conjunto $B \in \mathcal{F}^+$ tal que $B \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta última afirmación, es fácil definir una sucesión $n_0 < n_1 < \dots$ que particione a B en subconjuntos finitos de \mathbb{N} y satisfaga que $B \setminus A_{n_k} \subseteq \{0, 1, \dots, n_{k+1} - 1\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, note que como \mathcal{F} es Q^+ , entonces existe un conjunto $C \in \mathcal{F}^+$ tal que $C \subseteq B$ y $|C \cap [n_k, n_{k+1})| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Partamos C en dos pedazos como se hizo en el teorema 3.5.17, y sin pérdida de generalidad, supongamos que $C \cap [n_{2i+1}, n_{2i+2}) = \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Note que si $k \in C$, entonces existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $n_{2j} \leq k < n_{2j+1}$. Por otro lado, note que si $m \in B/k$, entonces $m \geq n_{2j+2}$, y en consecuencia, $m \in A_{n_{2j+1}}$. Luego, como $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente, se tiene que $A_{n_{2j+1}} \subseteq A_k$, y finalmente, $m \in A_k$ para todo $k \in C$.

(ii) \Rightarrow (iii) Sea $\{A_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ una colección de subconjuntos de \mathbb{N} tal que $\bigcap_{s \in F} A_s \in \mathcal{F}^+$ para todo $F \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ finito. Note que la colección $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde $B_n = \bigcap_{\text{máx}(s) \leq n} A_s$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión decreciente de conjuntos positivos de \mathcal{F} , y por hipótesis, existe un conjunto $A \in \mathcal{F}^+$ tal que $A/n \subseteq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, observe que si s es un subconjunto finito de A tal que $n = \text{máx}(s)$, entonces $A/\text{máx}(s) \subseteq B_n \subseteq A_s$, y por lo tanto, $A/\text{máx}(s) \subseteq A_s$.

(iii) \Rightarrow (i) Para probar que \mathcal{F} es selectivo primero mostraremos que \mathcal{F} es P^+ .

Supongamos que $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos positivos de \mathcal{F} y definamos para cada $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ el conjunto $A_s = B_{\text{máx}(s)}$. Como $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente, es claro que $\bigcap_{s \in F} A_s \in \mathcal{F}^+$ para todo subconjunto finito $F \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, y por hipótesis, existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A \in \mathcal{F}^+$ y $A/\text{máx}(s) \subseteq A_s$ para todo subconjunto finito $s \subseteq A$.

Note que si $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un $m \in A$ tal que $m \geq n$, y por lo tanto, $A/m \subseteq A_{\{m\}} = B_m$. Luego, como $B_m \subseteq B_n$ se tiene que $A/m \subseteq B_n$ para todo $m \geq n$, y en consecuencia, $A \setminus B_n \subseteq \{0, \dots, m\}$ para todo $m \geq n$.

Ahora bien, veamos que \mathcal{F} es Q^+ .

Sea $B \in \mathcal{F}^+$ y $\{F_k : k \in \mathbb{N}\}$ una partición de B en conjuntos finitos de \mathbb{N} . Denotemos por $B_n = \bigcup_{k \geq n} F_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y veamos que $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos positivos de \mathcal{F} . Por un razonamiento análogo al anterior, observe que si definimos el conjunto $A_s = B_{\text{máx}(s)}$ para cada $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, entonces existe un conjunto $A \in \mathcal{F}^+$ tal que $A/n \subseteq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, note que $|A \setminus B_n| = |A \cap (F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_{n-1})| \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $|A \cap F_k| \leq 1$ para todo $k < n$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual garantiza que A es un selector parcial de la partición $\{F_k : k \in \mathbb{N}\}$. \square

En las siguientes proposiciones mostraremos las relaciones existentes entre las propiedades + Ramsey, débilmente Ramsey y selectivo.

Proposición 4.1.11 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es + Ramsey, entonces \mathcal{F} es selectivo.*

Demostración

La prueba de esta proposición es consecuencia directa de los lemas 3.3.2, 4.1.8 y 4.1.2. \square

De la proposición 4.1.11, se tiene que \mathcal{F}_r es un filtro selectivo.

Proposición 4.1.12 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es selectivo, entonces \mathcal{F} es débilmente Ramsey.*

Demostración

Sea \mathcal{F} un filtro selectivo y T un \mathcal{F} -árbol sobre \mathbb{N} . Denotemos por $X_s = \{n : s \hat{\ } n \in T\}$ para todo $s \in T$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos el conjunto $A_k = X_\emptyset \cap \bigcap_{s \in T} X_s$ donde $s = \langle n_0, n_1, \dots, n_i \rangle$ y $n_0 < n_1 < \dots < n_i \leq k$. Note que $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de elementos del filtro, y por el lema 4.1.10, existe un conjunto $B \in \mathcal{F}^+$ tal que $B/k \subseteq A_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Ahora bien, supongamos que $B = \{b_0 < b_1 < \dots\}$ y veamos que la sucesión $\beta = \langle b_1, b_2, \dots \rangle \in [T]$; es decir, que $\beta \upharpoonright n \in T$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, si $n = 0$, entonces $\beta \upharpoonright 0 = \emptyset$, y por lo tanto, $\beta \upharpoonright 0 \in T$. Denotemos por $\beta \upharpoonright n = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ para $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\beta \upharpoonright n \in T$. Entonces, como $b_{n+1} > b_n$, se tiene que $b_{n+1} \in B/b_n \subseteq A_{b_n}$, y a su vez, que $A_{b_n} \subseteq X_{\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle}$. Note que esto último, garantiza que $b_{n+1} \in X_{\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle}$, y por lo tanto, $\beta \upharpoonright n + 1 = \langle b_1, b_2, \dots, b_{n+1} \rangle \in T$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

4.2. Propiedades de Diagonalización Local

Las propiedades de filtros que introduciremos a continuación surgieron con el fin de caracterizar las estrategias ganadoras de un cierto tipo de juegos infinitos en términos de dos de las propiedades de selectores parciales estudiadas en este capítulo, Q^+ y $Q^+(\mathcal{F})$. Hasta donde sabemos, ninguna de estas propiedades ha sido abordada mediante el enfoque de juegos mostrado por Laflamme ni por ninguno de los autores de los artículos revisados en la elaboración del presente trabajo.

4.2.1. Localmente ω -diagonalizable

En la definición 4.0.2 vimos que un filtro \mathcal{F} es localmente ω -diagonalizable, si para todo $A \in \mathcal{F}^+$, existe una colección $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos infinitos de A tal que para todo $Y \in \mathcal{F}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq^* Y$.

En la siguiente proposición, mostraremos la relación que existe entre las propiedades numeralemente generado y localmente ω -diagonalizable.

Proposición 4.2.1 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es numeralemente generado, entonces \mathcal{F} es localmente ω -diagonalizable.*

Demostración

Supongamos que A es un conjunto positivo y $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base que genera a \mathcal{F} . Como $B_k \in \mathcal{F}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces es claro que $A \cap B_k$ es un subconjunto infinito de A para todo $k \in \mathbb{N}$. Denotemos por $X_n = A \cap B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y veamos que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos infinitos de A que diagonaliza a \mathcal{F} .

En efecto, si $Y \in \mathcal{F}$, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_k \subseteq Y$. Como $B_k \cap A \subseteq A \cap Y \neq \emptyset$, se tiene que $X_k \subseteq Y$, lo cual garantiza que $X_k \subseteq^* Y$. \square

De la proposición 4.2.1 y el ejemplo 1.2.11, se tiene que \mathcal{F}_r es un filtro localmente ω -diagonalizable.

Antes de mostrar el teorema de caracterización de esta última propiedad, definiremos el siguiente juego:

Definición 4.2.2 Sea A es un subconjunto infinito de \mathbb{N} . $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ denotará al juego infinito en el cual tanto I como II juegan números naturales y II juega como se indica en el siguiente diagrama.

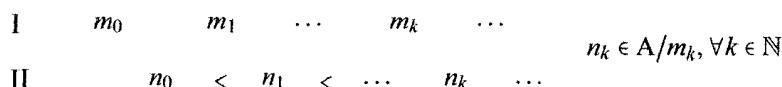


Figura 4.26: Diagrama del juego $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$

II será declarado ganador de $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$, si $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^+$. En caso contrario, diremos que I gana.

Teorema 4.2.3 Si \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} , entonces

- (i) I tiene estrategia ganadora en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ para algún $A \in \mathcal{F}^+$ si, y solo si, \mathcal{F} no es Q^+ .
- (ii) II tiene estrategia ganadora en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ para todo $A \in \mathcal{F}^+$ si, y solo si, \mathcal{F} es localmente ω -diagonalizable.

Demostración

La prueba de este teorema es análoga a la realizada en 3.5.17.

(i)(\Leftarrow) Si \mathcal{F} no es Q^+ , entonces existe un conjunto $A \in \mathcal{F}^+$ y una partición de A en conjuntos finitos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para todo $S \in \mathcal{F}^+$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|S \cap A_n| > 1$. Definamos una aplicación $\sigma : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}$ como $\sigma(\emptyset) = 0$ y $\sigma(\langle n_0, n_1, \dots, n_k \rangle) = \max \left\{ \bigcup_{i=0}^k A_i \right\} + 1$ donde $n_k \in A_{m_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y veamos que es una estrategia ganadora para I en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$.

En efecto, si $\langle n_0, n_1, \dots, n_k \rangle$ es la sucesión jugada por II en una partida de $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en la que I usa a σ como estrategia, entonces $|\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por consiguiente, $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{F}^+$.

(\Rightarrow) Sea σ una estrategia ganadora para I en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$. Supongamos que \mathcal{F} es Q^+ y definamos una sucesión $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\pi_0 \in A/\sigma(\emptyset)$ y

$$\pi_{n+1} \in A / \max \{ \sigma(\langle n_0, n_1, \dots, n_i \rangle) : n_0 < n_1 < \dots < n_i < \pi_n \} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Note que $\{[\pi_n, \pi_{n+1}) \cap A\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una partición de A en subconjuntos finitos de \mathbb{N} , y por lo tanto, existe un conjunto $S \in \mathcal{F}^+$ tal que $S \subseteq A$ y $|S \cap [\pi_n, \pi_{n+1})| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Reescribamos S como la unión de los conjuntos $S_0 = S \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([\pi_{2n}, \pi_{2n+1}) \cap A)$ y $S_1 = S \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([\pi_{2n+1}, \pi_{2n+2}) \cap A)$, y veamos que tanto S_0 como S_1 pueden ser jugados por II en una partida de $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en la I usa a σ como estrategia.

Supongamos que $S_0 = \{x_0, x_1, \dots\}$ y veamos que $x_{k+1} > \sigma(\langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En efecto, como $x_0 \in S_0$, entonces $x_0 \geq \pi_0$, y por tanto, $x_0 > \sigma(\emptyset)$. Ahora bien, note que si $x_k \in S_0$, entonces existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_{2j} \leq x_k < \pi_{2j+1}$. Además, como $x_k < x_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_{k+1} \geq \pi_{2j+2}$, y por lo tanto, $\sigma(\langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle) < \pi_{2j+2} \leq x_{k+1}$. El otro caso se trata de manera análoga.

Finalmente, note que como σ una estrategia ganadora para I en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$, entonces los conjuntos S_0 y $S_1 \notin \mathcal{F}^+$, y en consecuencia, $S \notin \mathcal{F}^+$, lo cual es una contradicción.

Antes de mostrar la segunda parte del teorema 4.2.3, enunciaremos dos lemas que resultan útiles en la demostración del mismo. En este capítulo, no presentaremos detalles de ninguna de ninguna de las pruebas, dado que éstas son análogas a las realizadas en 3.5.8.

Lema 4.2.4 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} y $A \in \mathcal{F}^+$. Si τ es una estrategia ganadora para II en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$, entonces $(\forall X \in \mathcal{F})(\exists s \in \mathbb{N}^{<\omega})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \geq n)(\tau(s \hat{\ } m) \in X)$.

Lema 4.2.5 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} y $A \in \mathcal{F}^+$. Si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos infinitos de A que diagonaliza a \mathcal{F} y B es un subconjunto infinito de \mathbb{N} que interseca infinitamente a cada X_n , entonces $B \in \mathcal{F}^+$.

(ii)(\Rightarrow) Supongamos que $A \in \mathcal{F}^+$ y sea τ una estrategia ganadora para II en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$. Por un razonamiento análogo al realizado en 3.5.17 y como consecuencia del lema 4.2.4, es claro que si definimos como $X_s = \{\tau(s \hat{\ } m) : m \in \mathbb{N}\}$ para cada $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, entonces $\{X_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ es una colección de subconjuntos infinitos de A que diagonaliza a \mathcal{F} , y por lo tanto, \mathcal{F} es localmente ω -diagonalizable.

(\Leftarrow) Sea $A \in \mathcal{F}^+$ y $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos infinitos de A que diagonaliza a \mathcal{F} . Fijemos una función sobreyectiva $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{-1}(n)$ es un subconjunto infinito de \mathbb{N} para todo $n \in \mathbb{N}$, y definamos una aplicación $\tau : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\tau(\langle n_0, \dots, n_k \rangle) = \min \{(X_{\varphi(k)} \setminus n_k) \cap A\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

En primer lugar, note que τ es una estrategia para II en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$, puesto que $X_{\varphi(k)} \setminus n_k \in \mathcal{F}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, $(X_{\varphi(k)} \setminus n_k) \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}^+$. Además, note que como $\varphi^{-1}(n)$ es un subconjunto infinito de \mathbb{N} para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces τ es una estrategia ganadora para II en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$, puesto que si $\langle n_0, n_1, \dots \rangle$ es la sucesión jugada por I en una partida de $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en la que II usa a τ como estrategia, entonces el conjunto $\{\tau(\langle n_0 \rangle), \tau(\langle n_0, n_1 \rangle), \dots\}$

interseca infinitamente a cada X_n , y por el lema 4.2.5, $\{\tau(\langle n_0 \rangle), \tau(\langle n_0, n_1 \rangle), \dots\} \in \mathcal{F}^+$. \square

Como consecuencia del teorema 4.2.3 podemos afirmar lo siguiente.

Corolario 4.2.6 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es localmente ω -diagonalizable, entonces \mathcal{F} es \mathcal{Q}^+ .*

4.2.2. \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable

Recordemos que en la definición 4.0.2 vimos que un filtro \mathcal{F} es \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable, si para todo $A \in \mathcal{F}$, existe una colección $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos infinitos de A tal que para todo $Y \in \mathcal{F}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subseteq^* Y$.

A continuación, mostraremos la relación que existe entre esta propiedad y algunas de las propiedades estudiadas anteriormente.

Proposición 4.2.7 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es ω -diagonalizable, entonces \mathcal{F} es \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable.*

Demostración

Sea A un elemento del filtro y $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos positivos que diagonaliza a \mathcal{F} . Como $Y_k \in \mathcal{F}^+$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces es claro que $A \cap Y_k$ es un subconjunto infinito de A para todo $k \in \mathbb{N}$. Denotemos por $X_n = A \cap Y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y veamos que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos infinitos de A que diagonaliza a \mathcal{F} .

En efecto, si $B \in \mathcal{F}$, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $Y_k \subseteq^* B$. Luego, como $A \cap Y_k \cap B^c$ es un subconjunto finito de A , se tiene que $X_k \setminus B$ es finito, lo cual garantiza que $X_k \subseteq^* B$. \square

De la proposición 4.2.7, se tiene que $(\emptyset \times \text{FIN})^*$ y $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$ son filtros \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizables.

Las siguientes proposiciones, cuyas demostraciones son inmediatas, nos dicen además que si \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} , entonces las propiedades localmente ω -diagonalizable y ω -diagonalizable se relacionan de manera directa con esta última propiedad. Para ello, basta considerar que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^+$.

Proposición 4.2.8 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es localmente ω -diagonalizable, entonces \mathcal{F} es \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable.* \square

Proposición 4.2.9 *Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable, entonces \mathcal{F} es ω -diagonalizable.* \square

Para terminar, enunciaremos un teorema que nos permitirá caracterizar las estrategias ganadoras del juego $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ en términos de las propiedades \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable y $\mathcal{Q}^+(\mathcal{F})$. La prueba de este teorema es análoga a la realizada en 4.2.3.

Teorema 4.2.10 Si \mathcal{F} es un filtro sobre \mathbb{N} , entonces

- (i) I tiene estrategia ganadora en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ para algún $A \in \mathcal{F}$ si, y solo si, \mathcal{F} no es $Q^+(\mathcal{F})$.
- (ii) II tiene estrategia ganadora en $\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$ para todo $A \in \mathcal{F}$ si, y solo si, \mathcal{F} es \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable. □

Como consecuencia del teorema 4.2.10 podemos afirmar lo siguiente.

Corolario 4.2.11 Sea \mathcal{F} un filtro sobre \mathbb{N} . Si \mathcal{F} es \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable, entonces \mathcal{F} es $Q^+(\mathcal{F})$. □

4.3. Resumen

En esta sección mostraremos dos cuadros en los se complementará el trabajo realizado en el capítulo anterior.

4.3.1. Teoremas de caracterización

Teorema	Juego	Propiedad de filtro Estrategia ganadora jugador I	Propiedad de filtro Estrategia ganadora jugador II
3.2.2	$\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} es numerablemente generado	\mathcal{F} no es +Ramsey
3.3.5	$\mathfrak{G}(\mathcal{F}^+, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} no es P^+ -Tree(\mathcal{F}^+)	\mathcal{F} es ω -diagonalizable por \mathcal{F}^+ -universal
3.3.8	$\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} no es P^+ -Tree(\mathcal{F})	\mathcal{F} es ω -diagonalizable por \mathcal{F} -universal
3.5.9	$\mathfrak{G}(\mathcal{F}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} no es débilmente Ramsey	\mathcal{F} es ω +diagonalizable
3.5.17	$\mathfrak{G}(\mathcal{F}_r, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} no es $Q^+(\mathbb{N})$	\mathcal{F} es ω -diagonalizable
4.2.3	$\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} no es Q^+	\mathcal{F} es local ω -diagonalizable
4.2.10	$\mathcal{G}_A(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F}^+)$	\mathcal{F} no es $Q^+(\mathcal{F})$	\mathcal{F} es \mathcal{F} -local ω -diagonalizable

Cuadro 4.3: Teoremas de caracterización.

4.3.2. Ejemplos de cada propiedad

Propiedad	\mathcal{F}_r	Co-selectores	$\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$	$(\emptyset \times \text{FIN})^*$	$\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(\mathcal{G})$
Numerablemente generado	Si Ej.1.2.11	No	No	No Ej.3.5.4	No
+ Ramsey	Si Ej.3.2.1	No Ej.3.3.3	No		
P^+ -Tree(\mathcal{F}^+)	Si	Si Ej.3.3.1	No		
P^+ -Tree(\mathcal{F})	Si	Si	No	Si	Si
P^+ (\mathcal{F})	Si	Si	No Ej.3.5.1	Si	Si
Débilmente Ramsey	Si	No	No	Si	Si
$Q^+(\mathbb{N})$	Si	No Ej.3.4.1	Si	Si	Si
ω -diagonalizable	Si	No	Si Ej.3.5.14	Si Ej.3.5.14	Si
ω +diagonalizable	Si	No	No	Si	Si Ej.3.5.11
Diagonalizable	Si	No	No Obs.3.5.12	Si Ej.3.5.4	No Ej.3.5.11
Magro	Si	Si Ej.3.5.21	Si	Si	Si
P^+	Si	Si	No		
Q^+	Si	No	Si Ej.4.1.1		
Selectivo	Si	No	No		
$Q^+(\mathcal{F})$	Si	No	Si	Si	Si
Local ω -diagonalizable	Si	No			
\mathcal{F} local ω -diagonalizable	Si	No		Si	Si

Cuadro 4.4: Ejemplos de cada propiedad.

Finalizaremos este capítulo formulando algunas preguntas que surgieron durante la realización de este trabajo.

4.4. Preguntas Abiertas

Aunque a lo largo de los capítulo 3 y 4 se demostraron cada una de las implicaciones que se muestran en la figura 4.25, quedan pendientes algunas de las pruebas de que estas implicaciones

no son estrictas. Los interrogantes que enunciaremos a continuación hacen referencia a algunas de dichas implicaciones.

- $\mathcal{P}^+(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{P}^+\text{-Tree}(\mathcal{F})?$
- $\mathcal{P}^+(\mathcal{F})$ y $\mathcal{Q}^+(\mathcal{F}) \Rightarrow$ débilmente Ramsey?
- Débilmente Ramsey $\Rightarrow \omega$ -diagonalizable?
- $\mathcal{Q}^+(\mathbb{N}) \Rightarrow \omega$ -diagonalizable?
- localmente ω -diagonalizable \Rightarrow Numerablemente generado?
- $\mathcal{Q}^+ \Rightarrow$ localmente ω -diagonalizable?
- ω -diagonalizable $\Rightarrow \mathcal{F}$ -localmente ω -diagonalizable?
- \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable $\Rightarrow \omega$ -diagonalizable?

Otros de los interrogantes que surgieron durante la realización de este trabajo se relacionan con la caracterización de propiedades como selectivo, \mathcal{P}^+ , $\mathcal{P}^+(\mathcal{F})$ y diagonalizable. Es decir, ¿existen juegos de la forma $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ tal que las estrategias ganadoras de cada uno de sus jugadores pueden ser caracterizadas en términos de dichas propiedades?

Bibliografía

- [1] T. Bartoszynski y M. Scheepers. *Filter and Games*. Proc. American Mathematical Society, 123(8) : 2529-2534, 1995.
- [2] C. A. Di Prisco y C. E. Uzcátegui. *Una introducción a la Teoría Descriptiva de Conjuntos*. IV Escuela Venezolana de Matemáticas. Asociación Matemática Venezolana. Ediciones IVIC, 1991.
- [3] S. García. *Ultrafiltros sobre \mathbb{N} y Sistemas Dinámicos Discretos*. XXIII Escuela Venezolana de Matemáticas. Asociación Matemática Venezolana. Ediciones IVIC, 2010.
- [4] C. Ivorra. *Teoría Descriptiva de Conjuntos* [en línea]; documento electrónico recuperado de internet. 2011 [fecha de consulta: 16 de marzo de 2013]. Disponible en: <http://www.uv.es/ivorra/Libros/TDC.pdf>.
- [5] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Springer-Verlag, 1994.
- [6] C. Laflamme. *Filter Games and Combinatorial Properties of Strategies*. Proc. American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, 192 : 51-67, 1996.
- [7] C. Laflamme y C.C. Leary. *Filter games on ω and the dual ideal*. Fundamenta Mathematicae, 173 : 159-173, 2002.
- [8] A.R.D. Mathias. *Happy families*. Ann. Math. Logic, 12 : 59-111, 1977.
- [9] P. Sharma. *Some characterizations of W -spaces and w -spaces*. General Topology Appl, 9(3) : 289-293, 1997.
- [10] M. Talagrand. *Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables*. Studia Mathematica, 67 : 13-43, 1980.
- [11] S. Todorćević. *Topics in Topology*. Lecture Notes in Mathematics Vol. 1652. Springer-Verlag, 1997.

Índice alfabético

- $2^{\mathbb{N}}$, 7
- A/n , 5
- $A \triangle B$, 5
- $X^{<\omega}$, 5
- $X^{[\omega]}$, 5
- $[T]$, 6
- \mathcal{F}^* , 8
- \mathcal{F}^+ , 8
- \mathcal{F}_r , 6
- $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$, 29
- $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r(G)$, 34
- $\mathfrak{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, 12
- $\mathfrak{G}_0(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{Z})$, 15
- $\mathfrak{G}_1(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathcal{F})$, 16
- \mathbb{N} , 5
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 5
- $\mathbb{N}^{<\omega}$, 5
- $\alpha \uparrow n$, 6
- $\alpha \uparrow 0$, 6
- $\langle B \rangle$, 8
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, 5
- \subseteq^* , 5
- $s \hat{=} t$, 5
- $t < s$, 5
- árbol, 6
 - \mathcal{X} -árbol, 10
- árbol de conjuntos finitos, 6
 - \mathcal{X} -árbol de conjuntos finitos, 10
- casi contenido, 5
- cerrado bajo
 - segmentos iniciales, 6
 - supraconjuntos, 6
- conjunto
 - magro, 5
 - positivo, 8
- estrategia
 - ganadora, 15
 - para el jugador I, 14
 - para el jugador II, 14
- filtro, 6
 - + Ramsey, 10, 22
 - \mathcal{F} -localmente ω -diagonalizable, 42, 51
 - ω -diagonalizable, 11, 37
 - ω +diagonalizable, 11, 32
 - P^+ , 41, 45
 - P^+ -Tree(\mathcal{F}), 10, 28
 - P^+ -Tree(\mathcal{F}^+), 10, 24
 - $P^+(\mathcal{F})$, 10, 29
 - Q^+ , 41, 43
 - $Q^+(\mathcal{F})$, 41, 44
 - $Q^+(\mathbb{N})$, 10, 28
 - débilmente Ramsey, 10, 24
 - de Fréchet, 6
 - diagonalizable, 11, 30
 - localmente ω -diagonalizable, 42, 48
 - magro, 7
 - numerablemente generado, 8
 - selectivo, 41, 46
- juegos
 - de filtros, 12
 - determinado, 15
 - infinitos, 12
- partida legal, 14
- propiedad de

Filtros Selectivos

Baire, 5, 7

rama, 6

ultrafiltro, 6

www.bdigital.ula.ve