

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES**  
**Consejo de Estudios de Postgrado**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Postgrado de Ingeniería de Control**

[WWW.BDIGITAL.ULA.VE](http://WWW.BDIGITAL.ULA.VE)

Por

**Ing. Oscar E. Camacho Q.**

**Mérida - Venezuela**  
**Junio, 1992**

Licencia Creative Commons:  
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

**Control Adaptativo de Sistemas Linealizables**

Licencia Creative Commons:  
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

## AGRADECIMIENTO

Al Dr. Heberit Sira Ramírez  
por su valiosa orientación

Licencia Creative Commons:  
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

## DEDICATORIA

WWW.BDIGITAL.ULA.VE  
A mis padres, esposa e hijos.

Licencia Creative Commons:  
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

## CONTENIDO

CAPITULO I	INTRODUCCION .....	1
CAPITULO II	CONTROL ADAPTATIVO ESTATICO DE SISTEMAS NO LINEALES LINEALIZABLES .....	6
	1. INTRODUCCION .....	6
	2. REVISION DE LA TECNICA DE LINEALIZACION EXACTA .....	8
	2.1 TRANSFORMACION LOCAL DE COORDENADAS ...	8
	2.2 LINEALIZACION EXACTA MEDIANTE REALIMENTACION .....	9
	2.3 DINAMICA DE LOS CEROS .....	14
	3. CONTROL ADAPTATIVO DE SISTEMAS LINEALIZABLES DE FASE MINIMA .....	19
	3.1 CASO ENTRADA UNICA SALIDA UNICA GRADO RELATIVO UNO .....	19
	3.2 EXTENSION PARA SISTEMAS ENTRADA UNICA SALIDA UNICA CON GRADO RELATIVO MAYOR QUE UNO .....	26
	3.3 ESQUEMA ADAPTATIVO USANDO EL METODO ERROR AUMENTADO .....	31
	EJEMPLOS ILUSTRATIVOS .....	41

I	MOTOR DC CONTROLADO POR CAMPO .....	41
II	CONTROL DE NIVEL DE DOS TANQUES EN CASCADA .....	52
CAPITULO III	CONTROL ADAPTATIVO DINAMICO DE SISTEMAS NO LINEALES PARA SEGUIMIENTO DE SEÑALES DE RE- FERENCIA .....	64
1.	INTRODUCCION .....	64
2.	CONTROL DINAMICO ADAPTATIVO DE PLANTAS NO LINEALES LINEALIZABLES PARA SEGUIMIENTO DE SEÑALES DE REFERENCIA MEDIANTE ASIGNACION DE POLOS .....	65
2.1	CONTROL DINAMICO DE PLANTAS NO LINEALES LINEALIZABLES PARA SEGUIMIENTO DE SEÑALES DE REFERENCIA MEDIANTE ASIGNACION DE POLOS .....	65
2.2	ESQUEMA DE REGULACION ADAPTATIVO DINAMI- CO PARA SISTEMAS LINEALIZABLES.....	70
	EJEMPLOS ILUSTRATIVOS .....	73
III	MOTOR DC CONTROLADO POR CAMPO .....	73
IV	CONTROL DE CONCENTRACION TOTAL EN UN TANQUE AGITADO CONTINUAMENTE .....	85
V	CONTROL DE NIVEL DE LIQUIDO DE DOS TAN- QUES CONECTADOS EN CASCADA .....	94
3.	CONTROL ADAPTATIVO DINAMICO DE SISTEMAS LI- NEALIZABLES MEDIANTE MODO DESLIZANTE PARA	

SEGUIMIENTO DE SEÑALES DE REFERENCIA.....	103
3.1 GENERALIDADES SOBRE SISTEMAS POR ES- TRUCTURA VARIABLE MEDIANTE MODO DESLI- ZANTE .....	103
3.2 LINEALIZACION POR MODO DESLIZANTE DI- NAMICO .....	105
3.3 ESQUEMA DE REGULACION ADAPTATIVA .....	108
3.4 DETERMINACION DE LA LEY DE ACTUALIZACION DE PARAMETROS .....	112
EJEMPLOS ILUSTRATIVOS	
VI MOTOR DC CONTROLADO POR CAMPO .....	115
VII CONTROL DE CONCENTRACION TOTAL EN UN TANQUE AGITADO CONTINUAMENTE .....	123
VIII CONTROL DE NIVEL DE LIQUIDO DE DOS TAN- QUES CONECTADOS EN CASCADA .....	129
CAPITULO IV CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	137
APENDICES .....	139
APENDICE A LISTADO DE PROGRAMAS SIMULADOS EN SIMNON.....	140
APENDICE B LEMAS .....	170
BIBLIOGRAFIA .....	175

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

El trabajo que se lleva a cabo está enmarcado dentro del área de Control Adaptativo de Sistemas No Lineales, específicamente en el área de sistemas no lineales linealizables exactamente por realimentación.

Primera mente se realiza una descripción de los sistemas adaptativos, en segundo lugar describimos la linealización por realimentación de estado, para luego justificar el uso de técnicas de control adaptativo en los esquemas de linealización exacta. Finalmente se describe el contenido de los capítulos que componen la Tesis.

El término *adaptable*, significa: "Cambiar (a sí mismo) de tal forma que su comportamiento vaya de acuerdo a los cambios o nuevas circunstancias que se presenten", K.J. Aström [3].

El término *control adaptativo*, ha sido usado desde los comienzos de los años 50. Intuitivamente un regulador adaptativo

puede cambiar su comportamiento en respuesta a cambios en la dinámica del proceso.

Las investigaciones sobre *control adaptativo* comienzan con gran actividad en los inicios de la década de los 50, motivado por el diseño de pilotos automáticos para aviación; pero debido a la gran sofisticación que requerían estos reguladores, el entusiasmo decayó; entre las razones que causaron el decaimiento se pueden mencionar : la carencia de una teoría que pudiera sustentar las investigaciones realizadas, y un pobre desarrollo en el campo de la circuitería electrónica que permitiera la implementación práctica de los reguladores propuestos.

En la década de los 60, se realizaron contribuciones muy importantes para la teoría de control, las cuales permitieron continuar el desarrollo del control adaptativo, se introdujeron los conceptos de *espacio de estado*, *teoría de estabilidad*, *identificación de sistemas*, y *estimación de parámetros*.

El interés por el control adaptativo renace en los años 70. Los progresos realizados en la década anterior y el avance de la microelectrónica, hizo posible la implementación de reguladores adaptativos. Actualmente, existe un vigoroso desarrollo de este campo tanto en las universidades como en la industria.

Existe un gran número de estudios de factibilidad de aplicaciones de control adaptativo para la industria, se pueden mencionar entre éstos:

- Pilotos automáticos para aviación, navegación y misiles.
- Reactores químicos
- Intercambiadores de Calor
- Control de pH
- Motores
- Sistemas de potencia

y otros.

En los últimos años ha habido un gran interés en el uso de realimentación de estado, para linealizar exactamente el comportamiento entrada-salida de un sistema no lineal.

La teoría de linealización por control de estado, fue desarrollada entre otros por Singh y Rugh (1972), Freund (1975), Meyer y Cicolani (1980), Isidori, Krener, Gori-Giorgi y Monaco (1981), para el caso continuo.

Se han realizado múltiples aplicaciones utilizando esta técnica, pero los resultados dependen del hecho de que exista una cancelación exacta de los términos no lineales de tal forma de garantizar un comportamiento lineal entrada-salida. Se presentan

problemas cuando existen errores en los términos no lineales del modelo, consecuentemente, la cancelación de los términos no lineales no es exacta y el comportamiento entrada-salida del sistema no es lineal.

En la tesis, se usa *control adaptativo de parámetros* para tratar de hacer más robusta la cancelación de los términos no lineales cuando la incertidumbre es paramétrica, Sastri e Isidori [1]. Adicionalmente se estudia el problema de seguimiento de una señal de referencia para sistemas no lineales (entrada única - salida única), con incertidumbre paramétrica. El problema involucra el diseño de una ley de control que permita a la planta seguir la señal de referencia, S.Behtash [2].

En la literatura se ha enfocado de diversas maneras el desarrollo de controladores adaptativos con plantas con incertidumbre de tipo lineal paramétrico, pero desde el punto de vista de controladores estáticos; lo referente a controladores adaptativos dinámicos constituyen un tópico poco mencionado y poco discutido en la literatura, Sira-Ramírez y Otros [12].

El Resto de la tesis esta organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo II se hace una revisión de la técnica de linealización exacta para sistemas de fase mínima. La versión

adaptativa de las estrategias de control para seguimiento de una señal de referencia, así como toda la sustentación matemática. Se trabajan dos ejemplos de aplicación, uno de grado relativo 1, y otro de grado relativo 2.

En el Capítulo III se hace una revisión de control mediante asignación de polos y control por estructura variable por modo deslizante; así como la versión adaptativa dinámica de las estrategias de control mediante asignación de polos y modo deslizante para seguimiento de una señal de referencia. Se hacen tres ejemplos de aplicación para comprobar las bondades de los controladores propuestos.

El Capítulo IV contiene las conclusiones y recomendaciones. Se proponen trabajos futuros que se pudieran realizar en este campo.

Finalmente se incluyen los Anexos con las demostraciones de algunos teoremas usados en los capítulos II y III, y los listados de los programas realizados con el "paquete" de simulación SIMNON de los ejemplos propuestos.

## CAPITULO II

### CONTROL ADAPTATIVO ESTATICO DE SISTEMAS NO LINEALES LINEALIZABLES.

#### 1. INTRODUCCION

Se sabe que la respuesta (entrada - salida) de un sistema no lineal puede ser linealizado por medio de realimentación de estado. Esto ha sido planteado implícita o explícitamente por varios autores como se mencionó en el Capítulo I.

Varios autores han estudiado el problema de cuando la ecuación diferencial que relaciona la entrada al estado pueda ser linealizada vía realimentación de estado y transformación de coordenadas. El problema fue completamente resuelto por Jakubczyk y Respondek (1980) e, independientemente por Hunt, Su y Meyer (1983). La técnica procedente de diseño es referida como "linealización exacta entrada salida".

En este Capítulo se hace una revisión de la técnica de linealización exacta, se establecen conceptos como los de

Transformación de Coordenadas, Dinámica de los Ceros, la noción de Grado Relativo, A. Isidori [18], así como técnicas de Control Adaptativo para mejorar la linealización entrada-salida de sistemas no lineales con incertidumbres paramétricas [1].

Se trabajan dos problemas para presentar las cualidades de los controladores propuestos. Los ejemplos tratados son: Un Motor DC controlado por Campo, y Control de Nivel de dos Tanques en Cascada.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:  
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

## 2. REVISION DE LA TECNICA DE LINEALIZACION EXACTA

### 2.1 TRANSFORMACION LOCAL DE COORDENADAS.

Comenzaremos con la noción de grado relativo del sistema, el cual es formalmente descrito de la siguiente forma; un sistema no lineal entrada-salida única es :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1}$$

se dice tener un grado relativo  $r$  alrededor del punto  $x_0$  si:

(i)  $L_g L_f^k h(x) = 0$  para todo  $x$  en las vecindades de  $x_0$ , y para todo  $k < r-1$ .

(ii)  $L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$

Es importante hacer notar que pueden existir puntos donde el grado relativo ( $r$ ) pueda no estar definido.

Esto ocurre, cuando la primera función de la secuencia.

$$L_g h(x), L_g L_f h(x), \dots, L_g L_f^k h(x)$$

la cual no es exactamente cero (en una vecindad de  $x_0$ ) tiene un cero en el punto  $x = x_0$ .

Es bien conocido que el entero ( $r$ ) que satisface estas condiciones es exactamente igual a la diferencia entre el grado del polinomio del denominador y del numerador.

## 2.2 LINEALIZACION EXACTA MEDIANTE REALIMENTACION

Una de las razones de esta sección es el análisis y el diseño de leyes de control realimentadas para sistemas no lineales; en casi todas las situaciones, se asume que el estado puede ser medido y que la entrada del sistema depende del estado y posiblemente de una señal de referencia externa. Si el valor del control en el tiempo  $t$  depende sólo de los valores, en el mismo instante de tiempo, del estado  $x$  y de la señal de referencia, el control es llamado "*Modo de control realimentado estático*". De otra forma si el control depende también de un conjunto de variables adicionales de estado, por ejemplo, si este control es así mismo, la salida de un sistema dinámico apropiado teniendo sus propios estados internos, manejado por  $x$  y por la entrada de referencia, se dice que se implementó un "*Modo de control realimentado dinámico*".

En un sistema entrada única - salida única, la estructura más conveniente para un controlador del tipo estático viene dada por:

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v \quad (2)$$

donde  $v$  es la entrada externa de referencia (ver figura 1). En efecto, la composición de este control con un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3)$$

nos quedaría caracterizado por la estructura:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) \alpha(x) + g(x) \beta(x) v \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (4)$$

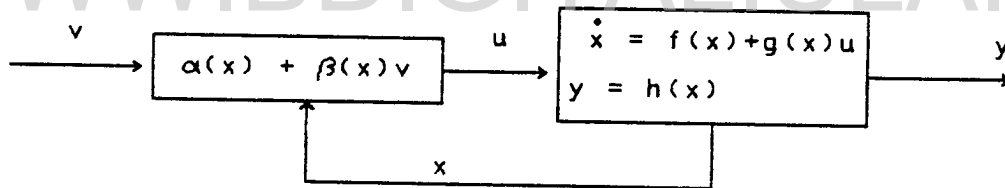


figura 1.

Las funciones  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  que caracterizan el control (2) están definidas sobre un conjunto de valores de  $\mathbb{R}^n$ ;  $\beta(x)$  no debe ser cero para toda  $x$  en este conjunto.

La aplicación que será discutida es el uso de realimentación de estado (y cambio de coordenadas en el espacio - estado) con el propósito de transformar un sistema no lineal controlable a uno linealizado controlable. El punto de partida de este estudio será establecer la forma Canónica Normal.

Consideremos un sistema no lineal que tiene grado relativo  $r \equiv n$ , con iguales dimensiones del estado espacio, en algún punto  $x^0$ . En este caso el cambio de coordenadas requiere construir la forma Canónica Normal, la cual viene dada por:

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

En las nuevas coordenadas

$$z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1} h(x) \quad 1 \leq i \leq n$$

El sistema aparecerá descrito por ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z) u \end{aligned} \quad (5)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

donde  $z = (z_1, \dots, z_n)$ . Recordando también que en el punto  $z^0 = \phi(x^0)$ ,  $z$  está en una vecindad de  $z^0$ , la función  $a(z)$  no debe ser cero.

Supongamos ahora la siguiente ley de control:

$$u = \frac{1}{a(z)} (-b(z) + v) \quad (6)$$

la cual existe y está definido en una vecindad de  $z^0$ . El sistema a Lazo Cerrado es gobernado por las ecuaciones (Figura 2).

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v \end{aligned} \quad (7)$$

el cual es lineal y controlable. De esta forma concluimos que un sistema no lineal con grado relativo  $n$  en algún punto  $x^0$  puede ser transformado en un sistema lineal y controlable, el cual tiene una vecindad en el punto  $z^0 = \phi(x^0)$ . Es importante reafirmar que la transformación en cuestión contiene dos pasos básicos.

- (i) Un cambio de coordenadas, definidas alrededor del punto  $x^0$ .

(ii) Una realimentación de estado, también definida localmente alrededor del punto  $x^0$ .

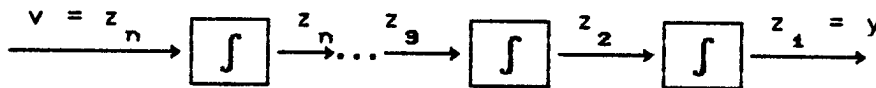


Figura 2

Es fácilmente verificable que las dos transformaciones usadas para obtener el sistema en la forma lineal pueden ser intercambiadas. Se puede cambiar las coordenadas en el espacio de estado; y luego la realimentación, necesariamente, para este propósito es exactamente la misma, pero ahora expresado en las coordenadas  $x$ , como:

$$u = \frac{1}{a(\phi(x))} (-b(\phi(x)) + v) \quad (8)$$

comparando esto con la expresión para  $a(z)$  y  $b(z)$  dada anteriormente, uno observa que la realimentación dada en términos de las funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ , las cuales caracterizan el sistema original tiene la forma:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \left[ -L_f^n h(x) + v \right] \quad (9)$$

Licencia Creative Commons:

y se observa que la realimentación, con el cambio de coordenadas usadas, cumple exactamente con las mismas obtenidas para el sistema lineal controlable.

## 2.3 DINAMICA DE LOS CEROS

En esta parte se introduce y discute un importante concepto, que en muchas circunstancias juega un rol similar que la de los "ceros" de la función de transferencia en un sistema lineal. Anteriormente mencionamos que el grado relativo  $r$  de un sistema lineal puede ser interpretado como la diferencia entre el número de polos y el número de ceros en una función de transferencia. En particular un sistema lineal en el cual  $r$  es estrictamente menor que  $n$ , tiene ceros en su función de transferencia. En el caso contrario si  $r = n$  la función de transferencia no tiene ceros.

Consideremos un sistema no lineal con  $r$  estrictamente menor que  $n$  y veámoslo en su forma normal, escribiéndolo en forma compacta.

$$\eta = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_r \end{bmatrix}$$

Con la ayuda de estas notaciones, la forma normal de un sistema no lineal entrada única - salida única con  $r < n$  puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta) u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{10}$$

Si  $x^0$  es tal que  $f(x^0) = 0$  y  $h(x^0) = 0$ , entonces necesariamente las primeras  $r$  nuevas coordenadas  $z_i$  son cero alrededor de  $x^0$ . Sin pérdida de generalidad, uno puede asumir que  $\xi = 0$  y  $\eta = 0$  alrededor de  $x^0$ . Entonces si  $x^0$  fuese un punto de equilibrio para el sistema en coordenadas originales, su correspondiente punto  $(\xi, \eta) = (0, 0)$  es un punto de equilibrio para el sistema en las nuevas coordenadas y de esto se deduce que:

$$\left. \begin{aligned} b(\xi, \eta) &= 0 \\ g(\xi, \eta) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{alrededor de } (\xi, \eta) = (0, 0)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Ahora se quiere analizar el problema conocido como "de salida a cero". El cual consiste en encontrar, si hay, pares que consten de un estado inicial  $x^0$  y de una función de entrada  $u^0(t)$  definida para todo  $t$  en una vecindad de  $t=0$ , de tal forma que la salida  $y(t)$  del sistema sea idénticamente cero para todo  $t$  en las vecindades de  $t=0$ . Por supuesto se está interesado en encontrar todos los pares  $(x^0, u^0)$  y no simplemente el trivial  $(x^0, u^0) = 0$  (correspondiente a la situación en la cual el sistema está inicialmente en reposo y ninguna entrada es aplicada).

Se desarrollará este análisis a partir de la forma normal del sistema.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Recordando que la forma normal es:

$$y(t) = z_1(t) \quad (11)$$

se observa que la restricción  $y(t) = 0$  para todo  $t$  vincula lo siguiente:

$$\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t) = \dots \dot{z}_r(t) = 0$$

que significa  $\xi(t) = 0$  siempre.

De este modo se observa que la salida del sistema es

idénticamente cero, su estado es restringido a evolucionar en tal forma que también  $\xi(t)$  sea idénticamente cero. En suma, la entrada  $u(t)$  debe ser necesariamente la única solución de la ecuación

$$0 = b(0, \eta(t)) + a(0, \eta(t)) u(t)$$

(recordando que  $a(0, \eta(t)) \neq 0$ , si  $\eta(t)$  es cercano a 0), tanto como la variable lo permita, es claro que, siendo  $\xi(t)$  idénticamente cero, su comportamiento está gobernado por la ecuación diferencial:

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) \quad (12)$$

De este análisis se deduce el siguiente hecho. Si la salida  $y(t)$  ha de ser cero, entonces necesariamente el estado inicial del sistema debe ser un conjunto de valores tal que  $\xi(0)=0$ , por cuanto  $\eta(0) = \eta^0$  puede ser escogido arbitrariamente. De acuerdo al valor de  $\eta^0$ , la entrada debe estar constituida por:

$$u(t) = \frac{-b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))} \quad (13)$$

donde  $\eta(t)$  denota la solución de la ecuación diferencial:

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) \quad \text{condición inicial } \eta(0)=\eta^0$$

Se observa que para cada conjunto de datos iniciales  $\xi=0$  y

$\eta = \eta^0$ , la entrada definida es de esta manera la única entrada capaz de mantener  $y(t)$  en cero para todo  $t$ .

La dinámica (13) corresponde a la dinámica que describe el comportamiento interno del sistema cuando la entrada y las condiciones iniciales han sido escogidas de tal forma que obligan a la salida a mantenerse en cero. Esta dinámica es fundamental para el trabajo a desarrollar y es conocida como *dinámica de los ceros*.

Globalmente o localmente, un sistema no lineal es llamado de "Fase Mínima" si la dinámica de los ceros es globalmente o localmente asintóticamente estable.

### 3. CONTROL ADAPTATIVO DE SISTEMAS LINEALIZABLES DE FASE MÍNIMA

En implementaciones prácticas de leyes de control exactamente linealizables, el principal problema es, que ellas están basadas en la cancelación exacta de los términos no lineales. Si existe alguna duda en el conocimiento de las funciones no lineales  $f$  y  $g$ , la cancelación no es exacta y el resultado de la ecuación entrada - salida no es lineal.[1]

Se propone el uso de control adaptativo de parámetros para dar una cancelación asintóticamente exacta.

#### 3.1 CASO ENTRADA ÚNICA-SALIDA ÚNICA, GRADO RELATIVO UNO

##### TEORIA BÁSICA

Una amplia clase de sistemas de control no lineal pueden ser llevados a tener un comportamiento entrada salida lineal a través de una adecuada ley de control de realimentación de estado.

Consideremos el caso de un sistema no lineal de la forma (1), con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $h$  todas ellas funciones no lineales suaves.

Diferenciando y respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h}{\partial x} g(x) u$$

(14)

$$:= L_f h(x) + L_g h(x) u$$

donde  $L_f h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L_g h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $L_g h(x) \neq 0$  para todo  $x$ , se puede establecer la ley de control realimentada:

$$u = \frac{1}{L_g h} \left[ -L_f h + v \right]$$

al reemplazar esta ley de control en (14) se obtiene:

$$\dot{y} = v$$

Ahora si  $L_g h(x) \equiv 0$ , diferenciando una vez más  $\dot{y}$ , se obtiene:

$$\dot{y}' = L_f^2 h(x) + \left[ L_g L_f h(x) \right] u$$

y si  $L_g L_f h(x) \neq 0$  entonces se tiene:

$$u = \frac{1}{L_g L_f h(x)} \left[ -L_f^2 h(x) + v \right]$$

con lo cual:

$$\dot{y}'' = v$$

Licencia Creative Commons:

20

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

y en forma general:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \begin{bmatrix} -L_f^r h(x) + v \\ \end{bmatrix}$$

$$y^r = v$$

De (1) consideremos que  $f(x)$  y  $g(x)$  tienen la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n_1} \theta_i^1 f_i(x) \quad (15)$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n_2} \theta_j^2 g_j(x) \quad (16)$$

con  $\theta_i^1$ ,  $i = 1, \dots, n_1$ ;  $\theta_j^2$ ,  $j = 1, \dots, n_2$ , como parámetros constantes pero desconocidos y las funciones  $f_i(x)$ ,  $g_j(x)$  funciones conocidas de  $x$ .

En el tiempo  $t$ , los estimados de las funciones  $f$  y  $g$  son respectivamente,

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{n_1} \hat{\theta}_i^1 f_i(x) \quad (17)$$

$$\hat{g}(x) = \sum_{j=1}^{n_2} \hat{\theta}_j^2 g_j(x) \quad (18)$$

Licencia Creative Commons:

21

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

con  $\hat{\theta}_i^1(t)$   $\hat{\theta}_j^2(t)$  como los estimados de los parámetros  $\theta_i^1$   $\theta_j^2$  respectivamente en el tiempo  $t$ . En consecuencia la ley de control  $u$  se reemplaza por:

$$u = \frac{1}{L_g \hat{h}} \left[ -L_f \hat{h} + v \right] \quad (19)$$

y  $L_g \hat{h}$ ,  $L_f \hat{h}$  son los estimados de  $L_g h$ ,  $L_f h$  respectivamente, basándonos en (14) (15) nos queda:

$$L_f \hat{h} = \sum_{i=1}^{n_1} \hat{\theta}_i^1(t) L_{f_i} h \quad (20)$$

$$L_g \hat{h} = \sum_{j=1}^{n_2} \hat{\theta}_j^2(t) L_{g_j} h \quad (21)$$

Si definimos  $\theta \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  como los parámetros nominales  $(\theta^{1T}, \theta^{2T})^T$ ,  $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  los parámetros estimados, y  $\phi = \theta - \hat{\theta}$  el error de los parámetros, entonces usando (19) en (14), después de algunos cálculos se obtiene:

$$\dot{y} = v + \phi^{1T} W^{(1)} + \phi^{2T} W^{(2)} \quad (22)$$

donde:

$$W_1^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_1} = \begin{bmatrix} Lf_1 h \\ \vdots \\ Lf_{n_1} h \end{bmatrix}$$

y

$$W_1^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_2} = \begin{bmatrix} Lg_1 h \\ \vdots \\ Lg_{n_2} h \end{bmatrix} \left( \frac{-L_f \hat{h} + v}{Lg h} \right)$$

La ley de control usada para seguimiento de una señal de referencia es:

$$v = \dot{y}_M + \alpha(y_M - y) \quad (23)$$

el error por definición es:

$$e := y - y_M$$

sustituyendo (20) en (19) se obtiene

$$\dot{e} + \alpha e = \phi^{1T} W_1^{(1)} + \phi^{2T} W_1^{(2)}$$

en forma compacta:

$$\dot{e} + \alpha e = \phi^T W \quad (24)$$

con  $\phi^T = (\phi^{1T}, \phi^{2T})^T$  y  $W \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ , ésta definida por la concatenación de  $W_1$  y  $W_2$ , la ecuación (21) puede ser reescrita como:

Licencia Creative Commons:

$$e = \frac{1}{s+\alpha} \left[ \phi^T W \right] \quad (25)$$

### TEOREMA 1. SEGUIMIENTO ADAPTATIVO

Consideremos un sistema no lineal como (1), que sea exponencialmente de fase mínima, con las mismas suposiciones hechas respecto a  $f$ ,  $g$ .

Se define la ley de control

$$u = \frac{1}{L_g \hat{h}} \left[ -L_f \hat{h} + \dot{y}_r + \alpha (y_r - y) \right]$$

Si  $L_g \hat{h}$  es acotada, diferente de cero y  $y_r$  es acotada. Entonces, la ley de actualización tipo gradiente:

$$\dot{\phi} = -e v \quad (26)$$

hace que  $y(t)$  sea acotado y converga asintóticamente a  $y_r(t)$ .

#### PRUEBA:

Consideremos la función candidata de Liapunov

$$V(e, \phi) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \phi^T \phi \quad (27)$$

la derivada en el tiempo es:

$$\dot{V}(e, \phi) = e \dot{e} + \phi^T \dot{\phi}$$

considerando la siguiente ley de adaptación

$$\dot{\phi} = -\hat{\theta} = -e w$$

se obtiene

$$\dot{V}(e, \phi) = -\alpha e^2$$

como se observa la función de Liapunov es decreciente a lo largo de las trayectorias de (24) de esta manera establecemos  $e$  y  $\phi$  acotados.

Usaremos el Lema de Barbalat (ver *apéndice*) para chequear que  $\dot{V}$  presenta continuidad uniforme. La derivada de  $\dot{V}$  es:

$$\dot{\dot{V}} = -2\alpha e \left[ -\alpha e + \phi^T w \right]$$

Se observa que  $\dot{\dot{V}}$  es acotada,  $w$  es acotada por hipótesis,  $e$  y  $\phi$  son acotados como se mostró anteriormente. De aquí  $\dot{V}$  es uniformemente continua. La aplicación del lema de Barbalat entonces indica que  $e \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### COMENTARIO:

El teorema precedente garantiza que  $e$  converge a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Sin embargo no garantiza la convergencia de los parámetros.

$e$  y  $\phi$  convergen a cero exponencialmente si  $W$  es persistentemente excitada. Si existen  $\alpha_1, \alpha_2, \delta > 0$  tal que:

$$\alpha_2 I \geq \int_{t_0}^{t_0+\delta} W W^T dt \geq \alpha_1 I \quad (28)$$

ver Morgan y Narendra [21], G. Kreselmeier [20], B. D. Anderson [11], Boyd y Sastri [10].

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

### 3.2 EXTENSION PARA SISTEMAS ENTRADA UNICA-SALIDA UNICA CON GRADO RELATIVO MAYOR QUE UNO.

Se considerará la extensión de los resultados precedentes para sistemas Entrada Unica - Salida Unica con grado relativo  $r$ ,  $L_g h = L_g L_f h = \dots = L_g L_f^{r-2} h \equiv 0$  con  $L_g L_f^{r-1} h \neq 0$ . La ley de control no adaptativa para linealización es de la forma:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} \left[ -L_f^r h + v \right] \quad (29)$$

Licencia Creative Commons:

26

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Si  $f$  y  $g$  no son completamente conocidas, pero de la forma (17) (18), se necesita reemplazar  $L_f^r \hat{h}$  y  $L_g L_f^{r-1} \hat{h}$  por sus estimados. Nosotros definimos esto de la siguiente manera:

$$L_f^r \hat{h} := L_{\hat{f}}^r h \quad (30)$$

$$L_g L_f^{r-1} \hat{h} = L_{\hat{g}} L_{\hat{f}}^{r-1} h \quad (31)$$

para  $r \geq 2$ , (30) (31) no son lineales en los parámetros desconocidos  $\theta_i$ . Por ejemplo

$$\begin{aligned} L_f^2 \hat{h} &= \sum_{i=1}^{n1} \sum_{j=1}^{n1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial h}{\partial x} f_j \right] f_i \theta_i^{(1)} \theta_j^{(1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n1} \sum_{j=1}^{n1} L_{f_i} (L_{f_j} h) \theta_i^{(1)} \theta_j^{(1)} \end{aligned} \quad (32)$$

y

$$\begin{aligned} L_g L_f \hat{h} &= \sum_{i=1}^{n2} \sum_{j=1}^{n1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial h}{\partial x} f_j \right] g_i \theta_i^{(2)} \theta_j^{(1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n2} \sum_{j=1}^{n1} L_{g_i} (L_{f_j} h) \theta_i^{(2)} \theta_j^{(1)} \end{aligned} \quad (33)$$

El desarrollo de lo anterior puede fácilmente ser repetido si

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

se define cada producto de parámetros como un nuevo parámetro.

En el caso de  $\theta_i^{(1)} \theta_j^{(1)}$  y  $\theta_i^{(2)} \theta_j^{(1)}$  de las expresiones anteriores, se determinan como nuevos parámetros. Sean entonces  $\Theta \in \mathbb{R}^K$  siendo  $K$  un vector de parámetros  $\theta_i^{(1)}, \theta_j^{(2)}, \theta_i^{(1)} \theta_j^{(2)}, \theta_i^{(1)} \theta_j^{(1)}$ , etc. . Así para  $r = 3$ ,  $\Theta$  contiene  $\theta_i^{(1)}, \theta_j^{(2)}, \theta_i^{(1)} \theta_j^{(1)}, \theta_i^{(1)} \theta_j^{(2)}, \theta_i^{(1)} \theta_j^{(1)} \theta_k^{(1)}, \theta_i^{(1)} \theta_j^{(2)}, \theta_i^{(1)} \theta_j^{(1)} \theta_k^{(2)}$ , esto es conocido como sobreparametrización y se discute en [1], [15].

Para el propósito de seguimiento de la señal de referencia la ley implementada es :

$$u = Y_R^{(r)} + \alpha_1 \left[ Y_R^{(r-1)} - Y^{(r-1)} \right] + \dots + \alpha_r \left[ Y_R - Y \right] \quad (34)$$

donde:

$$\dot{y} = L_f h$$

$$\dot{y}^* = L_f^2 h,$$

etc., son términos de la realimentación de estado. En ausencia de una precisa información acerca de  $L_f h, L_f^2 h, \dots$ , etc., la ley de seguimiento a ser implementada es:

$$\hat{u} = Y_R^{(r)} + \alpha_1 \left[ Y_R^{(r-1)} - \widehat{L_f^{r-1} h} \right] + \alpha_r \left[ Y_R - Y \right] \quad (35)$$

La ley de Control Adaptativo es entonces:

$$u = \frac{1}{L_g \widehat{L}_f^{r-1} h} \left[ -(\widehat{L}_f^r h) + \widehat{v} \right] \quad (36)$$

usando la ecuación de error con  $(\tilde{x} = x - \hat{x})$  que representa el error de los parámetros).

$$\begin{aligned} e^r + \alpha_r e^{r-1} + \dots + \alpha_1 e &= \\ &= L_f^r h + \frac{L_g L_f^{r-1} h}{L_g \widehat{L}_f^{r-1} h} \left[ -L_f^r h + \widehat{v} \right] - v \end{aligned}$$

$$= \left[ L_f^r h - \widehat{L}_f^r h \right] + \left[ L_g L_f^{r-1} h - L_g \widehat{L}_f^{r-1} h \right] \left[ \frac{-L_f^r h + \widehat{v}}{L_g \widehat{L}_f^{r-1} h} \right] + \widehat{v} - v$$

$$z = \tilde{x}^T W_1 + \tilde{x} W_2 \quad (37)$$

Los dos términos sobre el lado derecho son respectivamente, la diferencia entre la ley ideal y la actual de linealización, y la diferencia entre la ley de control ideal  $v$  y la ley de seguimiento  $\widehat{v}$ . Como ejemplo consideremos el caso en que  $r = 2$  y  $n_1 = n_2 = 1$ . Entonces:

$$e^T = \left[ e^{(1)}, e^{(2)}, (e^{(1)})^2, e^{(1)} e^{(2)} \right]$$

se obtiene:

$$W_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_{f_1}^2 h & L_{g_1} L_{f_1} h & \frac{-L_{f_1}^2 \hat{z} h + \hat{e}}{L_{g_1} \hat{L}_{f_1} h} \end{bmatrix}$$

y

(38)

$$W_2^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 L_{f_1} h & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$W_1$  y  $W_2$  pueden ser consideradas en un sólo vector regresor  $W$ .

También se nota que  $W$  es función de  $x$ , y  $\Theta(t)$ .

Consideremos ahora la forma (37) de la ecuación de error. Para el propósito de adaptación, se podría usar una señal de la forma:

$$e_1 = \beta_r e^{(r-1)} + \dots + \beta_1 e \quad (39)$$

con la función de transferencia

$$\frac{\beta_r s^{r-1} + \dots + \beta_1}{s^r + \alpha_r s^{r-1} + \dots + \alpha_1} \quad (40)$$

estrictamente real positiva. Ahora si  $e_1$  fuese medible, el teorema básico de seguimiento sería implementado fácilmente. La dificultad para construir (39) es que  $\dot{e}$ ,  $\ddot{e}$ , ...,  $e^{r-1}$  no son medibles.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\dot{e} = L_f^1 h - \dot{Y}_M \quad (41)$$

$$\ddot{e} = L_f^2 h - \ddot{Y}_M \quad (42)$$

y así sucesivamente. Pero  $L_f^i h$  no necesariamente pueden ser conseguidas explícitamente, ya que ellas pueden ser funciones desconocidas de  $x$ . Cuando las  $L_f^i h$  no son accesibles el siguiente procedimiento puede ser usado.

\* Por facilidad de nomenclatura, se considerará  $\theta_i^1$  como  $\theta_i$  ( $i=1..n1$ ) y  $\theta_j^2$  como  $\theta_j$  ( $j=n1+1..n1+n2$ ).

### 3.3 ESQUEMA ADAPTATIVO USANDO EL METODO ERROR AUMENTADO

Se define el polinomio

$$M(s) = \frac{1}{s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \dots + \alpha_r} \quad (43)$$

la ecuación de error (49) puede ser escrita como:

$$e = M(s) \mathcal{L}^T W \quad (44)$$

con la convención que la notación híbrida (44) se refiere a la convolución entre la inversa de Laplace de  $M(s)$  y  $\mathcal{L}W$ .

Se define el error aumentado de la siguiente manera:

$$e_1 = e_0 + (\hat{\Theta}^T M(s) W - M(s) \hat{\Theta}^T W) \quad (45)$$

los dos últimos términos no son iguales y se refieren respectivamente, a cada componente de  $W$  siendo filtradas por  $M(s)$  antes de multiplicarse por  $\hat{\Theta}^T$  y el filtrado de  $\hat{\Theta}^T W$  por  $M(s)$ . Usando el hecho de que las constantes conmutan con  $M(s)$ , se obtiene:

$$e_1 = e_0 + \left[ \hat{\Theta}^T M(s) W - M(s) (\hat{\Theta}^T W) \right] \quad (46)$$

usando (41) en (43) nos da:

$$e_1 = \hat{\Theta}^T M(s) W \quad (47)$$

esta es una ecuación lineal de error, por conveniencia se denota:

$$\zeta := M(s) W$$

De la ecuación (47) varias leyes para la actualización pueden ser sugeridas. Por ejemplo el algoritmo de gradiente normalizado

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\dot{\Theta} = \frac{-e_1 \zeta}{1 + \zeta^T \zeta} \quad (48)$$

Algunas propiedades de  $\dot{\hat{\Theta}}$ ,  $e_1$  se describen inmediatamente, sin

Licencia Creative Commons:

32

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

suposiciones sobre el acotamiento de  $\xi$ . Se usará la siguiente notación.

- i)  $\beta$  es una función genérica  $L_2 \cap L_\infty$  que va a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- ii)  $\tau$  una función genérica  $L_2 \cap L_\infty$ .
- iii)  $K$  es acotado.
- iv)  $\|Z\|_t$  se refiere a la norma  $\sup_{z \leq t} |Z(\tau)|$ , la norma truncada  $L_\infty$ .

**PROPOSICION: PROPIEDADES DEL IDENTIFICADOR.**

Considere la ecuación de error

$$e_1 = \hat{\Phi}^T \xi \quad (49)$$

con la ley de actualización

$$\dot{\hat{\Phi}} = - \frac{e_1 \xi}{1 + \xi^T \xi} \quad (50)$$

entonces:

$$\hat{\Phi} \in L_\infty, \quad \dot{\hat{\Phi}} \in L_2 \cap L_\infty \quad y$$

$$|\hat{\Phi}^T \xi(t)| \leq \tau (1 + \|\xi\|_t) \quad \forall t \quad (51)$$

**PRUEBA:**

Considere la función de Liapunov.

$$V(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{z}$$

se tiene entonces:

$$\dot{V} = \frac{-2 e_1^2}{1 + \mathbf{z}^T \mathbf{z}} \leq 0 \quad (52)$$

entonces  $\mathbf{z} \in L_\infty$  y  $\int \dot{V} dt < \infty$ , además  $e_1 / (1 + \mathbf{z}^T \mathbf{z})^{1/2} \in L_2$ , adicionalmente

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{-\mathbf{z} \mathbf{z}^T \mathbf{z}}{1 + \mathbf{z}^T \mathbf{z}} \quad (53)$$

$$|\dot{\mathbf{z}}|^2 = \frac{e_1^2}{1 + \mathbf{z}^T \mathbf{z}} \cdot \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{z}}{1 + \mathbf{z}^T \mathbf{z}} \quad (54)$$

de donde  $\dot{\mathbf{z}} \in L_2$  (el primer término de (51) es integrable, y el segundo acotado).

Finalmente se define

$$\tau = \frac{e_1}{\sqrt{1 + \mathbf{z}^T \mathbf{z}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \mathbf{z}^T \mathbf{z}}}{1 + \|\mathbf{z}\|_1}$$

el primer término está en  $L_2 \cap L_\infty$  y el segundo es acotado, de éste modo, y está en  $L_2 \cap L_\infty$ . De aquí viene (51).

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Es importante mencionar que las conclusiones de la proposición anterior son propiedades genéricas del identificador. Otros identificadores tales como el de Mínimos Cuadrados Normalizados también tienen estas propiedades.

**TEOREMA 2. TEOREMA BASICO DE SEGUIMIENTO PARA SISTEMAS ENTRADA UNICA - SALIDA UNICA CON GRADO RELATIVO MAYOR QUE UNO.**

Considere las leyes de control (34) y (35) aplicados a un sistema no lineal de fase mínima con incertidumbre en sus parámetros,

Si

$Y_R, \dot{Y}_R, \dots, Y_R^{r-1}$  son acotados

$(L_g L_f^{r-1} h)$  son acotados diferentes de cero.

$f, g, h, L_f^k h, L_g L_f^k h$  son funciones continuas Lipschitz y  $W(x, \theta)$  tiene derivadas acotadas en  $x, \theta$ .

Entonces la ley de actualización

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{-e_A \xi}{1 + \xi^T \xi}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

con  $\xi = L^{-1}(s) W$  tiene seguimiento acotado;  $Y - Y_R$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y  $x$  es acotado.

**PRUEBA:**

La prueba usa tres Lemas técnicos, los cuales están señalados en el Apéndice.

- a) Acotamiento, sobre el error de argumentación. Usando el Lema de Intercambio (ver *apéndice*), con  $M$  (haciendo el papel de  $H = C (SI - A)^{-1} b$ )

$$\dot{\Phi}^T M W - M \dot{\Phi}^T W = - C (SI - A)^{-1} \left\{ \left[ (SI - A)^{-1} b W^T \right] \dot{\Phi} \right\} \quad (55)$$

usando el hecho que  $\dot{\Phi} \in L_2$  y que  $(SI - A)^{-1} b$  es estable (ya que  $M$  es estable), se obtiene

$$\left| \left[ (SI - A)^{-1} b W^T \right] \dot{\Phi} \right| \leq \gamma \| W \|_1 + \tau \quad (56)$$

Ahora usando el Lema 2 del Apéndice y el hecho que  $C (SI - A)^{-1}$  es estrictamente propia, se obtiene.

$$\left| \Phi^T M W - M \Phi^T W \right| \leq \beta \| W \|_1 + \beta \quad (57)$$

- b) regularidad de  $W_1 \Phi^T W$

La ecuación diferencial para

$Z_1 = (y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})^T$  es

$$Z_1 = M(s) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ s^{r-1} \end{bmatrix} \bar{w}^T + \begin{bmatrix} y_R \\ \vdots \\ y_R^{(r-1)} \end{bmatrix} \quad (58)$$

donde  $\bar{w}$  es acotado y  $y_R, \dots, y_R^{(r-1)}$  son acotados por hipótesis y  $s^k M(s)$  son todas funciones propias estables, se obtiene

$$\|Z_1\| \leq K \|W\|_t + K \quad (59)$$

usando (56) en la dinámica exponencial de fase mínima.

$$Z_2 = \psi(Z_1, Z_2) \quad (60)$$

$$\|Z_2\|_t = K \|W\|_t + K \quad (61)$$

combinando (59) y (60) y notando que  $\alpha$  es un difeomorfismo de  $Z_1$  a  $Z_2$ , vemos que:

$$\|\alpha\|_t \leq K \|W\|_t + K$$

y

$$\|\dot{\alpha}\|_t \leq K \|W\|_t + K \quad (62)$$

usando el hecho que  $\|\partial W / \partial W\|$  y  $\|\partial W / \partial \hat{\theta}\|$  son acotadas y (59), se obtiene

$$\|\dot{W}\|_t \leq K \|W\|_t + K \quad (63)$$

Licencia Creative Commons:

de esta forma  $W$  es regular  $\Rightarrow \zeta = M W$  es regular también ( $M$  es estable). De una forma similar  $\Phi^T W$  será regular también.

Considere

$$\frac{d}{dt} \left( \Phi^T W \right) = \dot{\Phi}^T W + \Phi^T \dot{W} \quad (64)$$

usando (60) y  $\Phi, \dot{\Phi} \in L_\infty$  se obtiene que

$$\left\| \frac{d}{dt} \left( \Phi^T W \right) \right\|_t \leq K \|W\|_t + K \quad (65)$$

pero de (58) y (61)

$$\|x\|_t \leq K \|\Phi^T W\|_t + K \quad (66)$$

y así

$$\|x\|_t \leq K \|\Phi W\|_t + K \quad (67)$$

Combinando (67) con (65) se obtiene la regularidad de  $\Phi^T W$ . De la regularidad de  $\zeta$ ,  $\Phi^T W$  se puede establecer que  $\Phi^T \zeta / (1 + \|\zeta\|_t)$  tiene derivadas acotadas y uniformemente continuas.

De (51)

$$\frac{|\Phi^T \zeta(t)|}{1 + \|\zeta\|_t} \in L_1 \cap L_\infty.$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

se observa el hecho que esta va a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . (una función uniformemente continua  $L_1$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ ). De esta forma.

$$|\Phi^T \zeta(t)| \leq \beta (1 + \|\zeta\|_t) \quad (68)$$

c) Prueba de estabilidad

$$e = e_1 + \Phi^T L^{-1} W - L^{-1} \Phi^T W$$

ésta es la ecuación que relaciona el error verdadero con el error aumentado. Usando (58) se obtiene:

$$|e| \leq |e_1| + \beta \|W\|_t + \beta \quad (69)$$

usando (65)

$$|e| \leq |e_1| + \beta \|\Phi^T W\| + \beta \quad (70)$$

aplicando el Lema 1 (ver *apéndice*)

$$e = M(s) \Phi^T W$$

con la ya establecida regularidad de  $\Phi^T W$  se obtiene

$$\|\Phi^T W\|_t \leq K |e| + K \quad (71)$$

usando (70) y (71)

$$|e| < |e_1| + \beta \|e\|_t + \beta \quad (72)$$

usando (69) para  $e_t = \phi^T \xi_t$ ,

$$|e_t| \leq \beta \|e\|_t + \beta + \beta \|\xi\|_t \quad (73)$$

$\xi$  está relacionada con  $W$  por el filtrado estable. De aquí

$$\|\xi\|_t \leq K \|W\|_t + K \quad (74)$$

Usando el estimado (67), seguido (70) en (69) se observa que (73) se puede reescribir como

$$|e_t| \leq \beta \|e\|_t + \beta \quad (75)$$

De aquí  $\beta \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , se ve de (74) que va a cero cuando  $t \rightarrow \infty$

Colocando el modelo en la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u$$

$$h(x) = y$$

donde:

$$f(x) = \begin{bmatrix} (-Ra/La) x_1 + Va/La \\ (-B/J) x_2 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} (-K/La) x_2 \\ (K/J) x_1 \end{bmatrix}$$

$$h(x) = x_2$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Determinación del grado relativo del sistema

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-K/La) x_2 \\ (K/J) x_1 \end{bmatrix}$$

$$L_g h(x) \neq 0$$

el sistema de *grado relativo*  $r = 1$ .

Escribiendo el sistema de acuerdo a la técnica mostrada anteriormente tenemos:

$$\dot{x} = \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x) + \theta_3 f_3(x) + \left[ \theta_4 q_1(x) + \theta_5 q_2(x) \right] u$$

$$y = x_2$$

con:

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad f_2(x) = \begin{bmatrix} Va \\ 0 \end{bmatrix}; \quad f_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$q_1(x) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad q_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\theta_1 = Ra/La; \quad \theta_2 = 1/La; \quad \theta_3 = B/J$$

$$\theta_4 = K/La; \quad \theta_5 = K/J$$

y, hallando las derivadas de Lie

$$L_{f_1} h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_{f_2} h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Va \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_{f_3} h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 \end{bmatrix} = -x_2$$

$$L_{g_1} h(x) = 0$$

$$L_{g_2} h(x) = x_1$$

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= \hat{\theta}_1 L_{f_1} h(x) + \hat{\theta}_2 L_{f_2} h(x) + \hat{\theta}_3 L_{f_3} h(x) \\ &= -\hat{\theta}_3 x_2 \end{aligned}$$

$$L_g h(x) = \hat{\theta}_4 L_{g_1} h(x) + \hat{\theta}_5 L_{g_2} h(x) = \hat{\theta}_5 x_1$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE  
a continuación calcularemos los VECTORES REGRESORES

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_2 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{\theta}_3 x_2 - v \\ \hat{\theta}_5 x_1 \end{bmatrix}$$

el controlador usado es de la forma:

$$u = \frac{(-L_f h + v)}{L_g h}$$

donde  $v$  es la ley de seguimiento dada por

$$v = \dot{y}_R + \alpha_1 (y - y_R)$$

con lo obtenido anteriormente, se harán simulaciones con el *SIMNON*, considerando primeramente el seguimiento de una planta de primer orden, luego el seguimiento de una de segundo orden.

Los parámetros del modelo utilizados para la simulación son:

$$\begin{aligned} R_a &= 7 \, \Omega ; & L_a &= 120 \, \text{mH} ; & V_a &= 5 \, \text{V} ; \\ B &= 6.04 \times 10^{-6} \, \text{N-m-s/rad} ; & J &= 1.06 \times 10^{-6} \, \text{N-m-s}^2/\text{rad} \\ K &= 1.41 \times 10^{-2} \, \text{N-m/A}. \end{aligned}$$

Valores tomados de Sira-Ramírez [13].

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

## EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

En los ejemplos tratados a continuación, se utiliza la teoría expuesta anteriormente, es decir, sistemas de entrada única - salida única para seguimiento de señal de referencia.

### 1) MOTOR D.C. CONTROLADO POR CAMPO.

El modelo es:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{K}{L_a} x_2 u + \frac{V_a}{L_a}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{J} x_2 + \frac{K}{J} x_1 u$$

Donde:

$x_1$  = Representa la corriente del circuito de armadura

$x_2$  = Velocidad Angular

$V_a$  = Voltaje aplicado al circuito de armadura

$u$  = Voltaje en el devanado de campo, actuando como la variable de control.

Licencia Creative Commons:

41

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

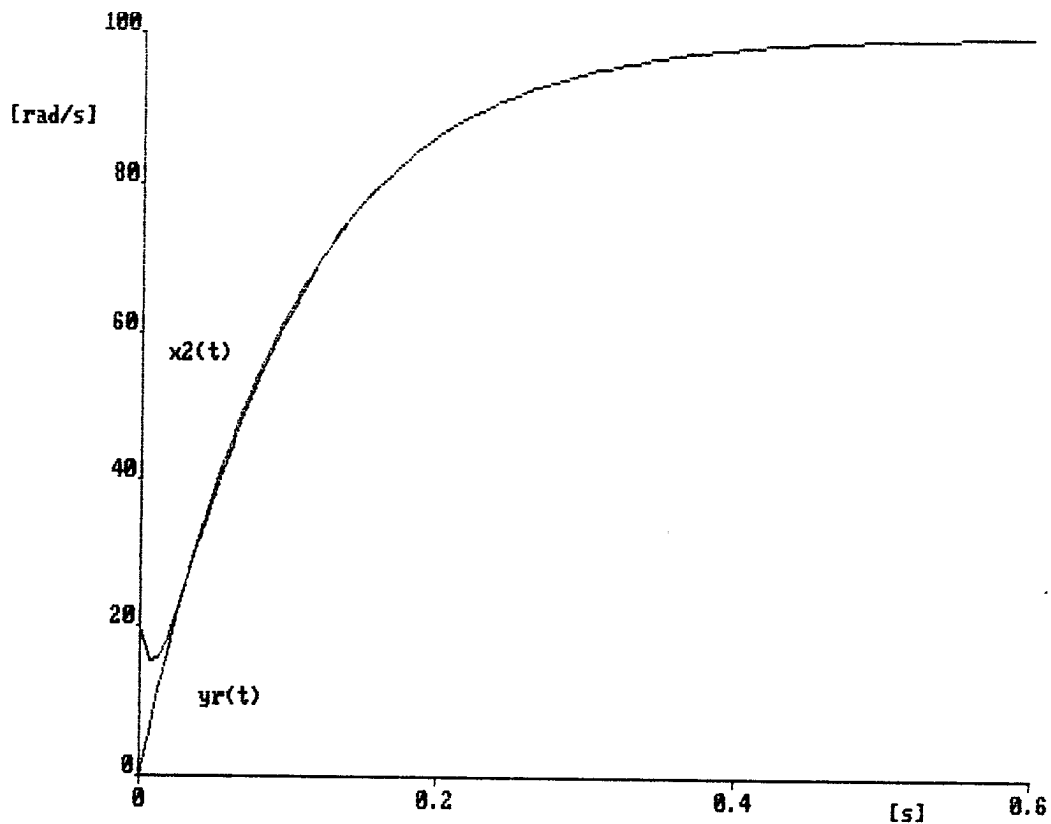


Gráfico 1. Respuesta de la velocidad angular para el seguimiento de un sistema de primer orden, usando control adaptativo estático.

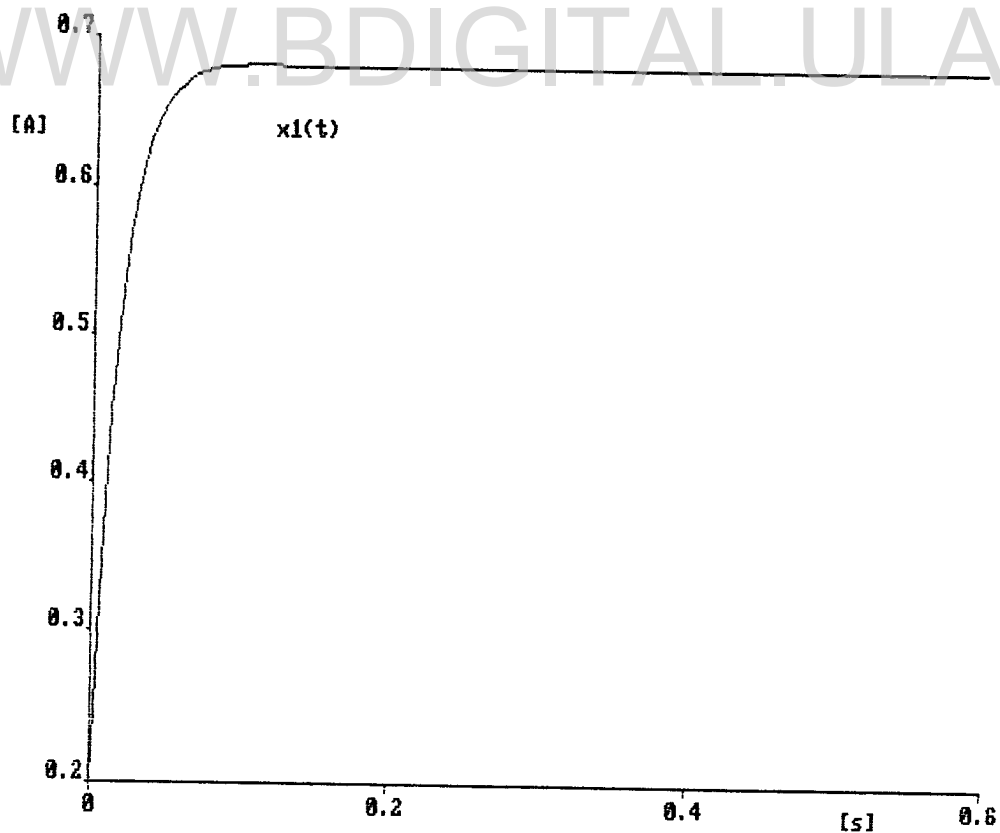


Gráfico 2. Respuesta de la corriente en el circuito de armadura.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

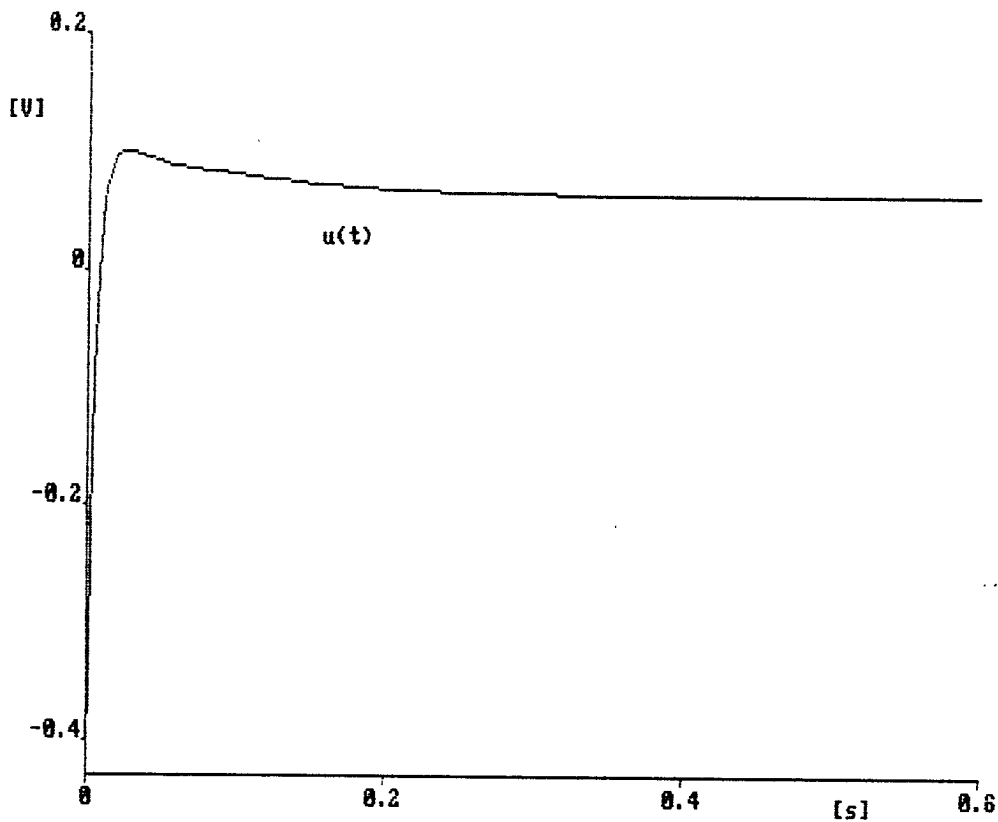


Gráfico 3. Voltaje en el devanado de campo.

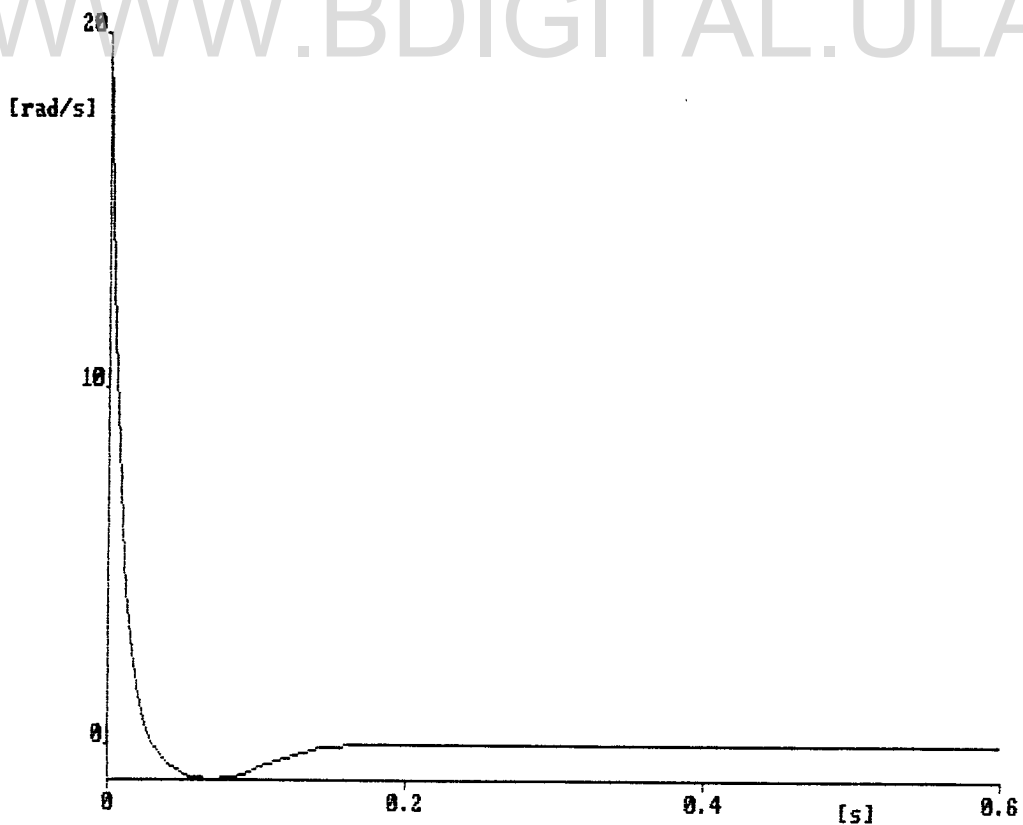


Gráfico 4. Error de seguimiento entre la salida y la referencia.

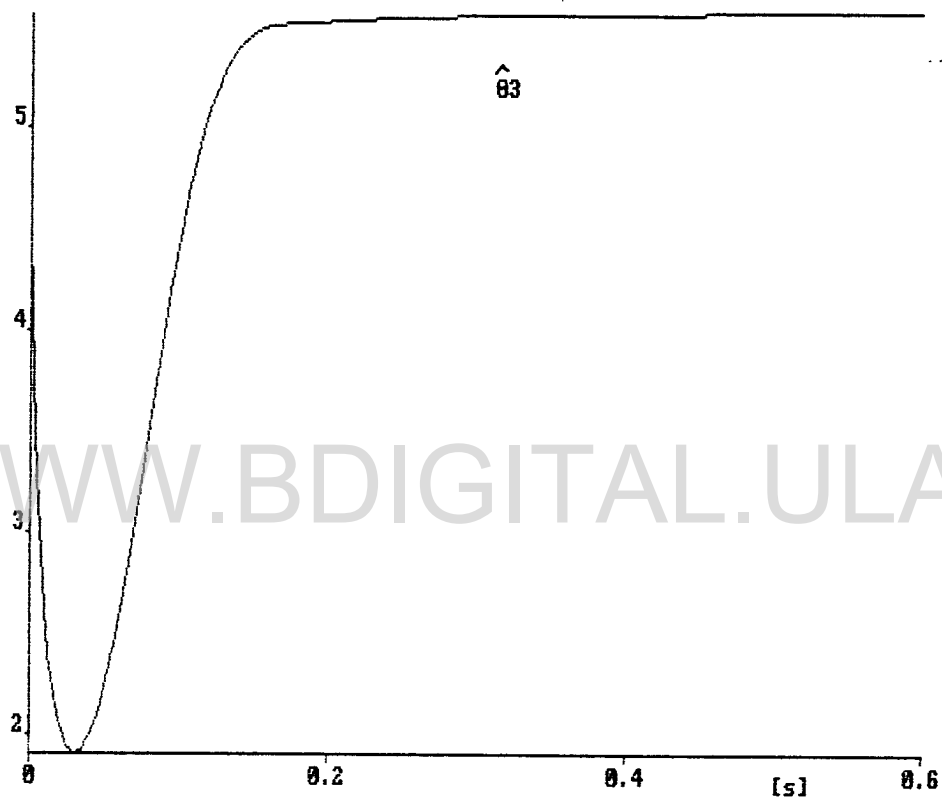


Gráfico 5. Trayectoria del parámetro estimado.

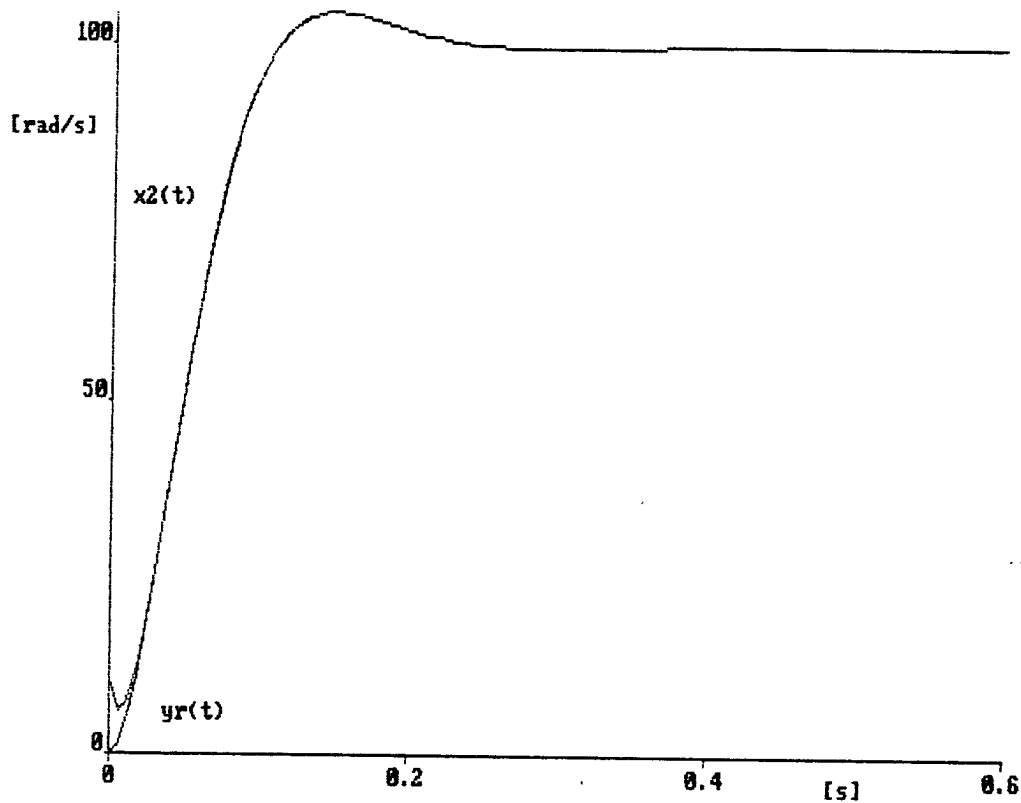


Gráfico 6. Respuesta de la velocidad angular para el seguimiento de un sistema de segundo orden, usando control adaptativo estático.

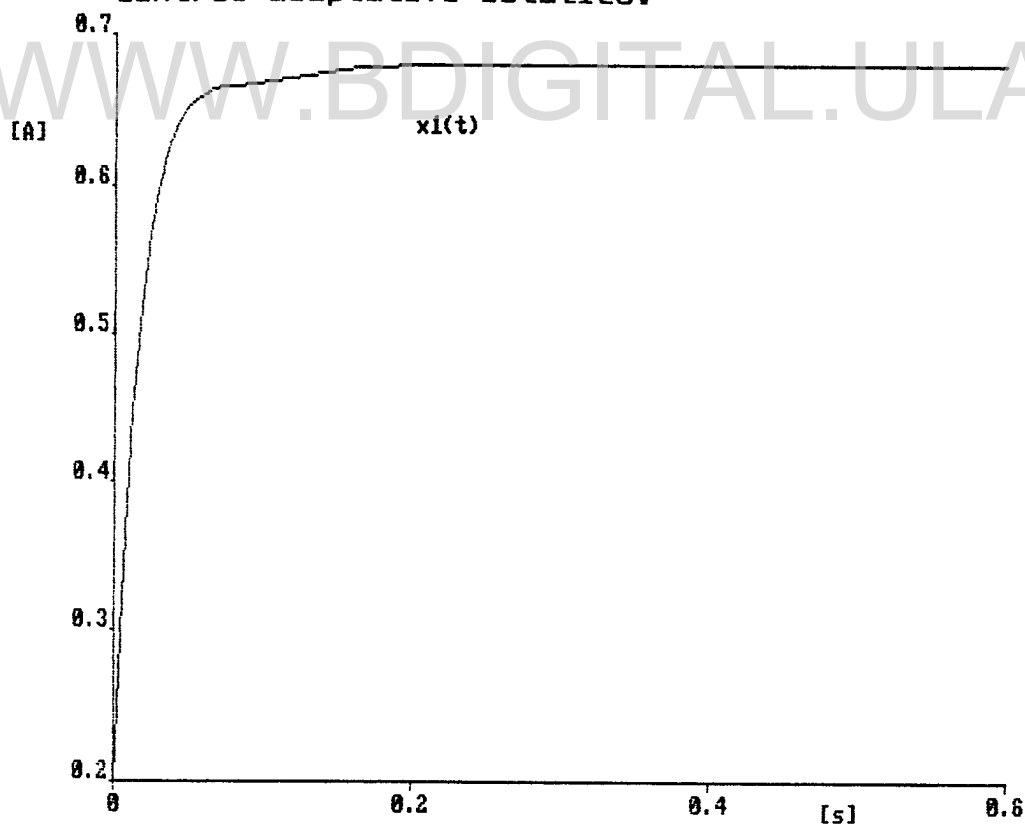


Gráfico 7. Respuesta de la corriente en el circuito de armadura.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

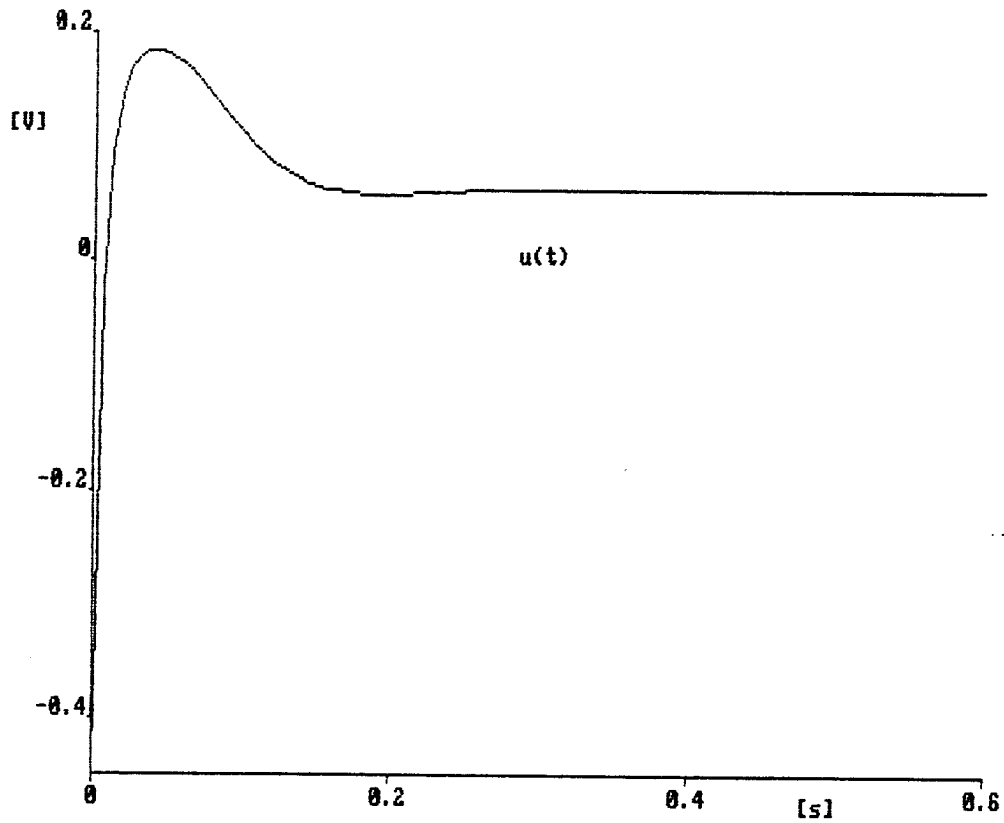


Gráfico 8. Voltaje en el devanado de campo.

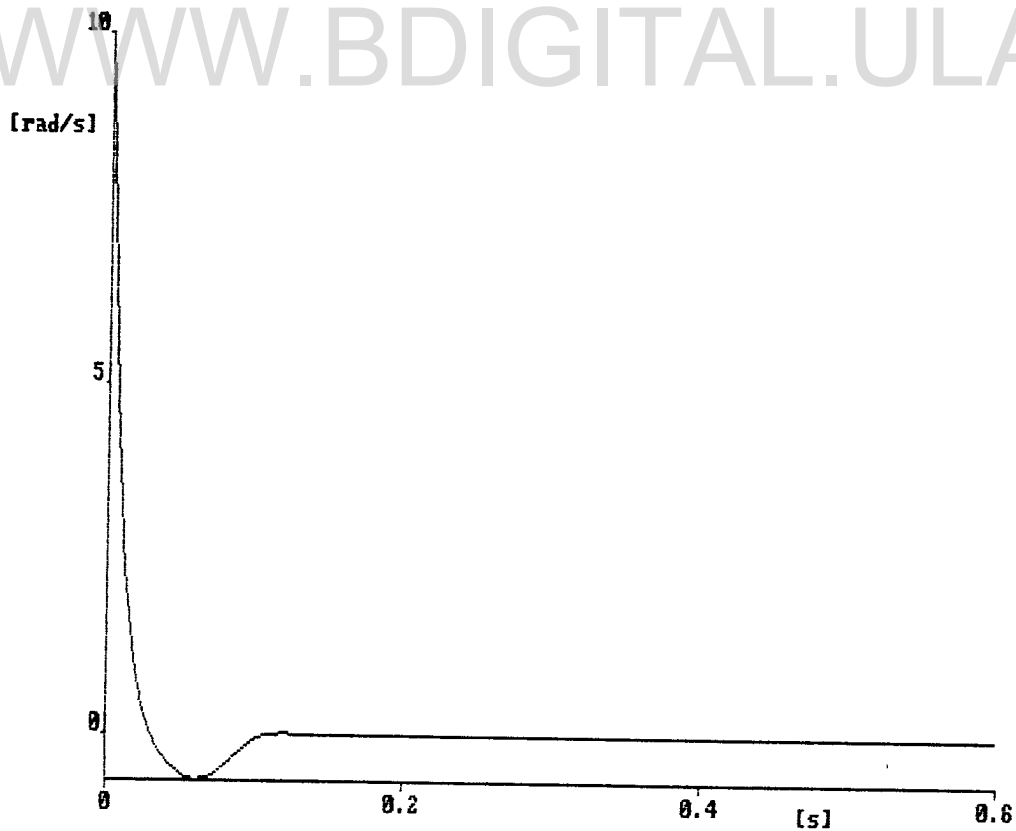


Gráfico 9. Error de seguimiento entre la salida y la referencia.

Licencia Creative Commons:

50

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

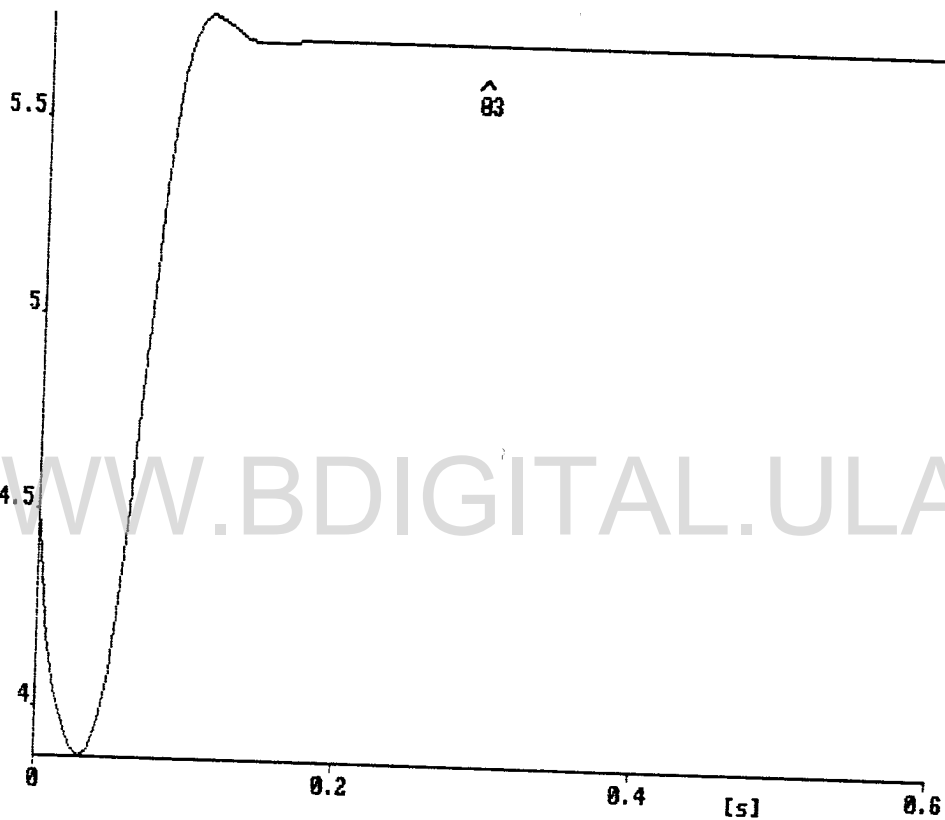


Gráfico 10. Trayectoria del parámetro estimado.

III) CONTROL DE NIVEL DE DOS TANQUES EN CASCADA.

El modelo para este caso es:

$$\dot{x}_1 = \frac{u}{A} - \frac{C}{A} \sqrt{x_1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{C}{A} \sqrt{x_1} - \frac{C}{A} \sqrt{x_2}$$

Donde:

$x_1$  = Representa el nivel del líquido en el tanque # 1

$x_2$  = Representa el nivel del líquido en el tanque # 2

C = Constante de Válvula

A = Área de la sección transversal del tanque.

u = Flujo de entrada al tanque #1, que actúa como la variable de control.

reescribiendo el modelo de la forma siguiente, con el objeto de obtener el grado relativo

$$\dot{x} = f(x) + u g(x)$$

$$h(x) = y = x_2$$

donde:

$$f(x) = \frac{C}{A} \begin{bmatrix} -\sqrt{x_1} \\ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \end{bmatrix}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$g(x) = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_g h(x) = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_f h(x) = (0 \ 1) \begin{bmatrix} -\sqrt{x_1} \\ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \end{bmatrix} = \frac{C}{A} \left[ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right]$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{C}{A} \left[ \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \right] \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{C}{A^2} \left[ \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \right] \neq 0$$

→ el grado relativo del sistema es:  $r = 2$

Escribiendo el sistema de acuerdo a la técnica mostrada anteriormente tenemos:

$$\dot{x} = \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x) + \theta_3 f_3(x) + \theta_4 g_1(x) u$$

donde:

$$\theta_1^1 = \theta_1 = \frac{C}{A}; \quad \theta_2^1 = \theta_2 = \frac{C}{A};$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\theta_3^1 = \theta_9 = \frac{C}{A}; \quad \theta_1^2 = \theta_4 = \frac{1}{A}$$

ahora calcularemos las derivadas de Lie

$$L_{f_1} h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{x_1} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_{f_2} h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{x_1} \end{pmatrix} = \sqrt{x_1}$$

$$L_{f_3} h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{x_2} \end{pmatrix} = -\sqrt{x_2}$$

$$L_{g_1} h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Determinación de  $(L_f^2 h)$

$$(L_f^2 h) = \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} f_j \right) f_i \theta_i^1 \theta_j^1 \right]$$

$$(L_f^2 h) = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_1} h) f_i \theta_i^1 \theta_1^1 + \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_2} h) f_i \theta_i^1 \theta_2^1 + \right.$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_3} h) f_i \theta_i^1 \theta_3^1 \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_1} h) f_1 \theta_1^1 \theta_1^1 + \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_2} h) f_1 \theta_1^1 \theta_2^1 +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (L_{f_3} h) f_1 \theta_1^1 \theta_3^1 + \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_1} h) f_2 \theta_2^1 \theta_1^1 +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (L_{f_2} h) f_2 \theta_2^1 \theta_2^1 + \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_3} h) f_2 \theta_2^1 \theta_3^1 +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (L_{f_1} h) f_3 \theta_3^1 \theta_1^1 + \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_2} h) f_3 \theta_3^1 \theta_2^1 +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (L_{f_3} h) f_3 \theta_3^1 \theta_3^1$$

los términos que incluyen  $L_{f_1} h$  son igual a cero

$$= \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \sqrt{x_1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{x_1} \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1^1 \theta_2^1 + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} -\sqrt{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{x_1} \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1^1 \theta_3^1 +$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{x_1} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{x_1} \end{bmatrix} \theta_2^1 \theta_2^1 + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\sqrt{x_2} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{x_1} \end{bmatrix} \theta_2^1 \theta_3^1 +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{x_1} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{x_2} \end{bmatrix} \theta_3^1 \theta_2^1 + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\sqrt{x_2} \right) \theta_3^1 \theta_3^1$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{x_1} \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1^1 \theta_2^1 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2\sqrt{x_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{x_1} \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1^1 \theta_3^1$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{x_1} \end{bmatrix} \theta_2^1 \theta_2^1 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2\sqrt{x_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{x_1} \end{bmatrix} \theta_2^1 \theta_3^1$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{x_2} \end{bmatrix} \theta_3^1 \theta_2^1 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2\sqrt{x_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{x_2} \end{bmatrix}$$

$$(L_f^2 h) = -\frac{1}{2} \theta_1^1 \theta_2^1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \theta_2^1 \theta_3^1 + \frac{1}{2} \theta_3^1 \theta_3^1$$

$$-\frac{1}{2} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_3 + \frac{1}{2} \hat{\theta}_3 \hat{\theta}_3$$

Licencia Creative Commons:

56

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\begin{aligned}
 (L_g L_f^h)_\bullet &= \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial h}{\partial x} f_j \right] g_i \theta_i^2 \theta_j^1 \\
 &= \sum_{i=1}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_1} h) g_i \theta_i^2 \theta_1^1 + \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_2} h) g_i \theta_i^2 \theta_2^1 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_3} h) g_i \theta_i^2 \theta_3^1 \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_2} h) g_1 \theta_1^2 \theta_2^1 + \frac{\partial}{\partial x} (L_{f_3} h) g_1 \theta_1^2 \theta_3^1$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sqrt{x_1} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1^2 \theta_2^1 + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\sqrt{x_2} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1^2 \theta_3^1$$

$$= \left[ \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \quad 0 \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1^2 \theta_2^1 + \left[ 0 \quad \frac{-1}{2\sqrt{x_2}} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1^2 \theta_3^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \theta_1^2 \theta_2^1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \hat{\theta}_4 \hat{\theta}_2$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
 (CC BY-NC-SA 3.0 VE)

el VECTOR DE PARAMETROS es:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ \theta_{31} \\ \theta_{12} \\ \theta_{22} \\ \theta_{32} \\ \theta_{13} \\ \theta_{23} \\ \theta_{33} \\ \theta_{14} \\ \theta_{24} \\ \theta_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \theta_{13} \\ \theta_{14} \\ \theta_{15} \\ \theta_{16} \end{bmatrix}$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

a partir de lo anterior se determinarán los VECTORES REGRESORES

$$W_1 = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ L_{f_1}(L_{f_1}h) \\ L_{f_1}(L_{f_2}h) \\ L_{f_1}(L_{f_3}h) \\ L_{f_2}(L_{f_1}h) \\ L_{f_2}(L_{f_2}h) \\ L_{f_2}(L_{f_3}h) \\ L_{f_3}(L_{f_1}h) \\ L_{f_3}(L_{f_2}h) \\ L_{f_3}(L_{f_3}h) \\ L_{g_1}(L_{f_1}h) \\ L_{g_1}(L_{f_2}h) \\ L_{g_1}(L_{f_3}h) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \left[ 2 \sqrt{x_1} u \right] \\ 0 \end{bmatrix}$$

WWW.BDIGITALULA.VE



donde  $v$  es la ley de seguimiento dada por

$$v = \dot{y}_R + \alpha_2 (L_f h - \dot{y}_R) + \alpha_1 (y - y_R)$$

con lo obtenido anteriormente, se harán simulaciones con el *SIMNON*, considerando el seguimiento de una planta de primer orden.

Los parámetros del modelo utilizados para la simulación son:

$$C = 1 \text{ m}^{5/2}/\text{min}$$

$$A = 1 \text{ m}^2$$

Los valores de los parámetros fueron tomados de R.Canales y R.Barrera [23].

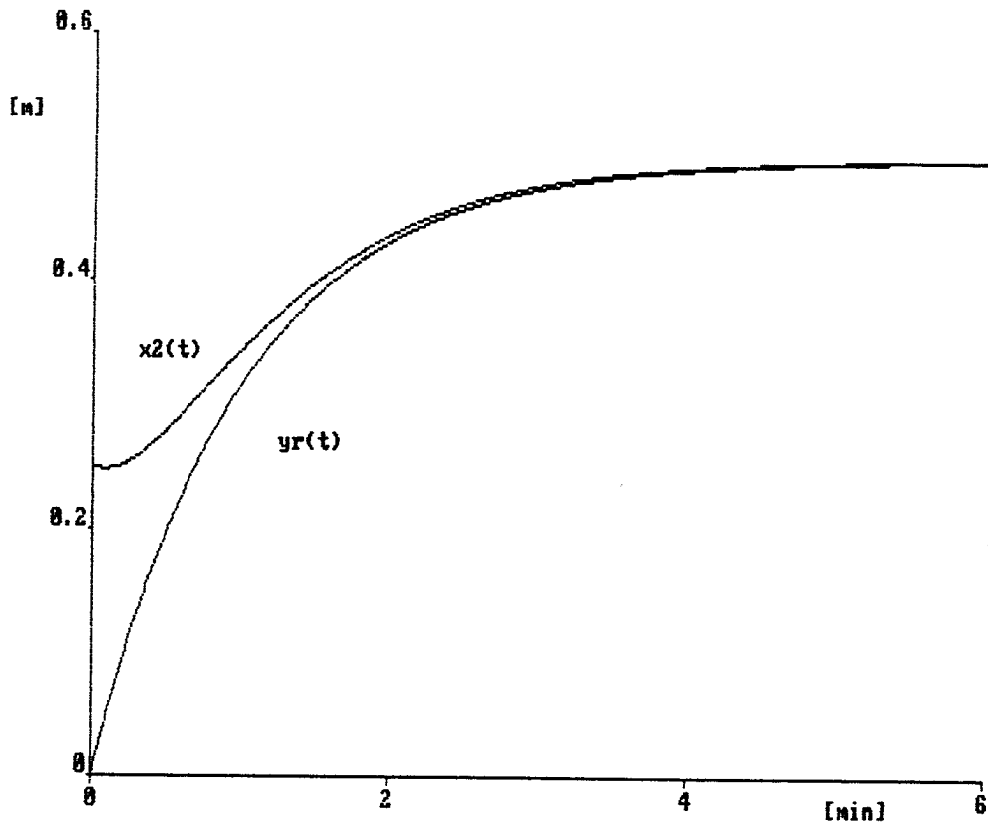


Gráfico 11. Respuesta del nivel del tanque dos para seguimiento de un sistema de primer orden, usando control adaptativo estático.

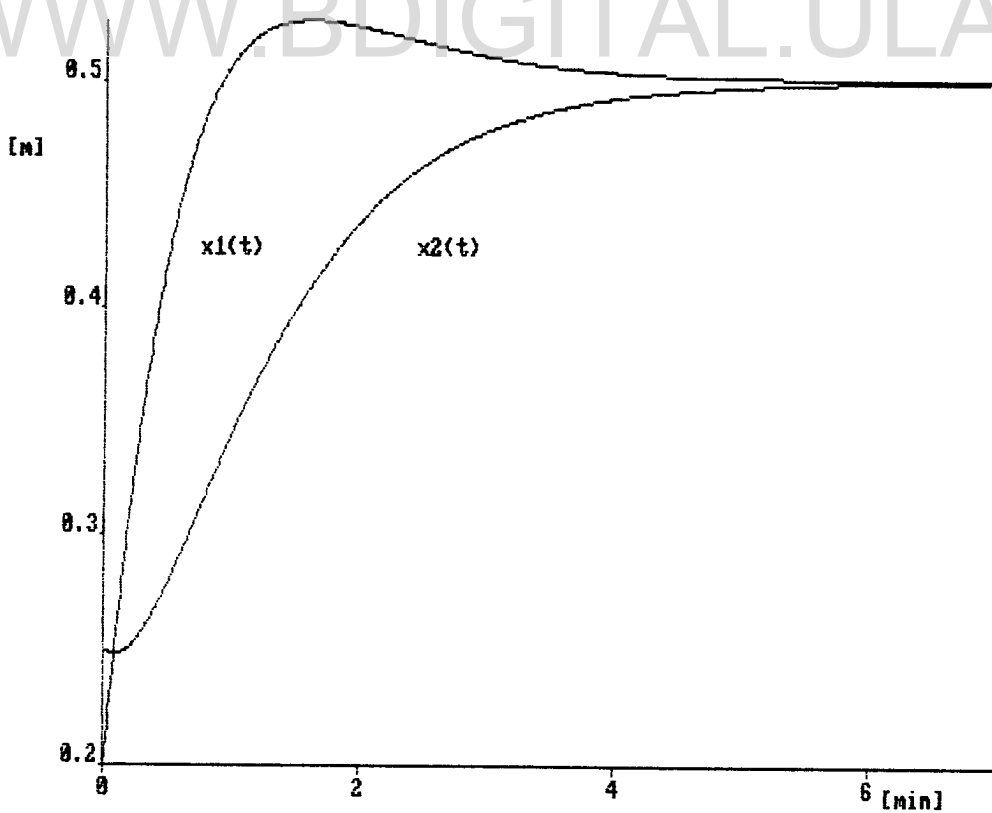


Gráfico 12. Variación del nivel de los tanques uno y dos.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

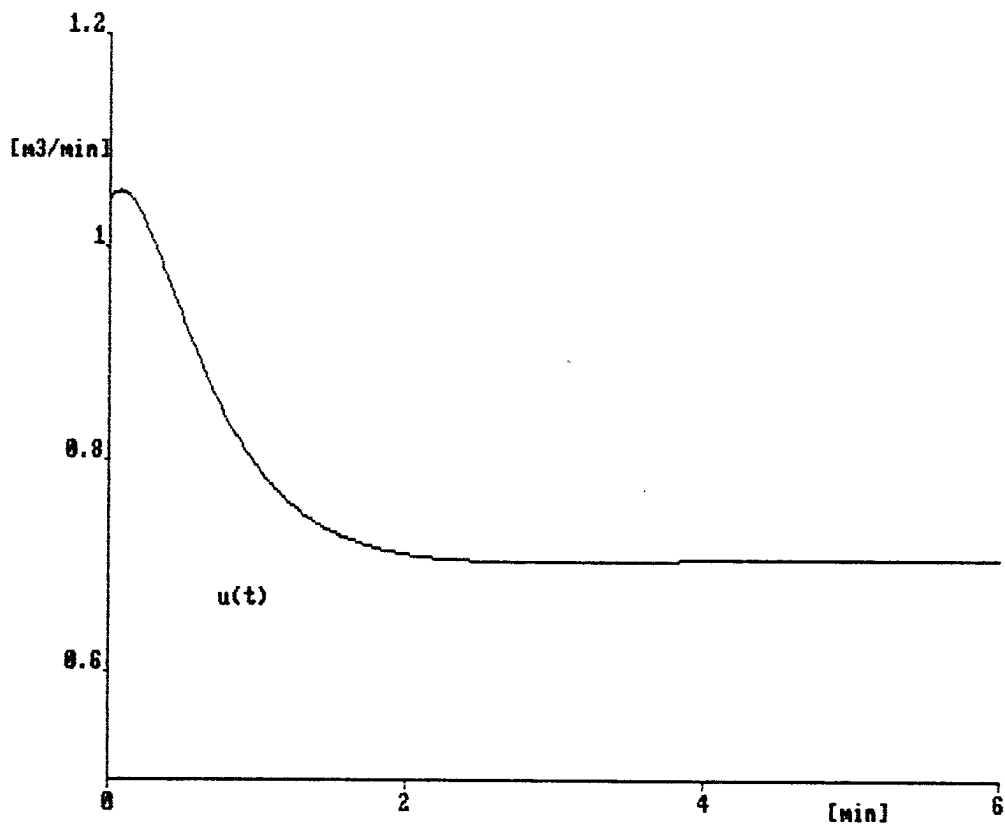


Gráfico 13. Flujo de entrada al tanque uno.

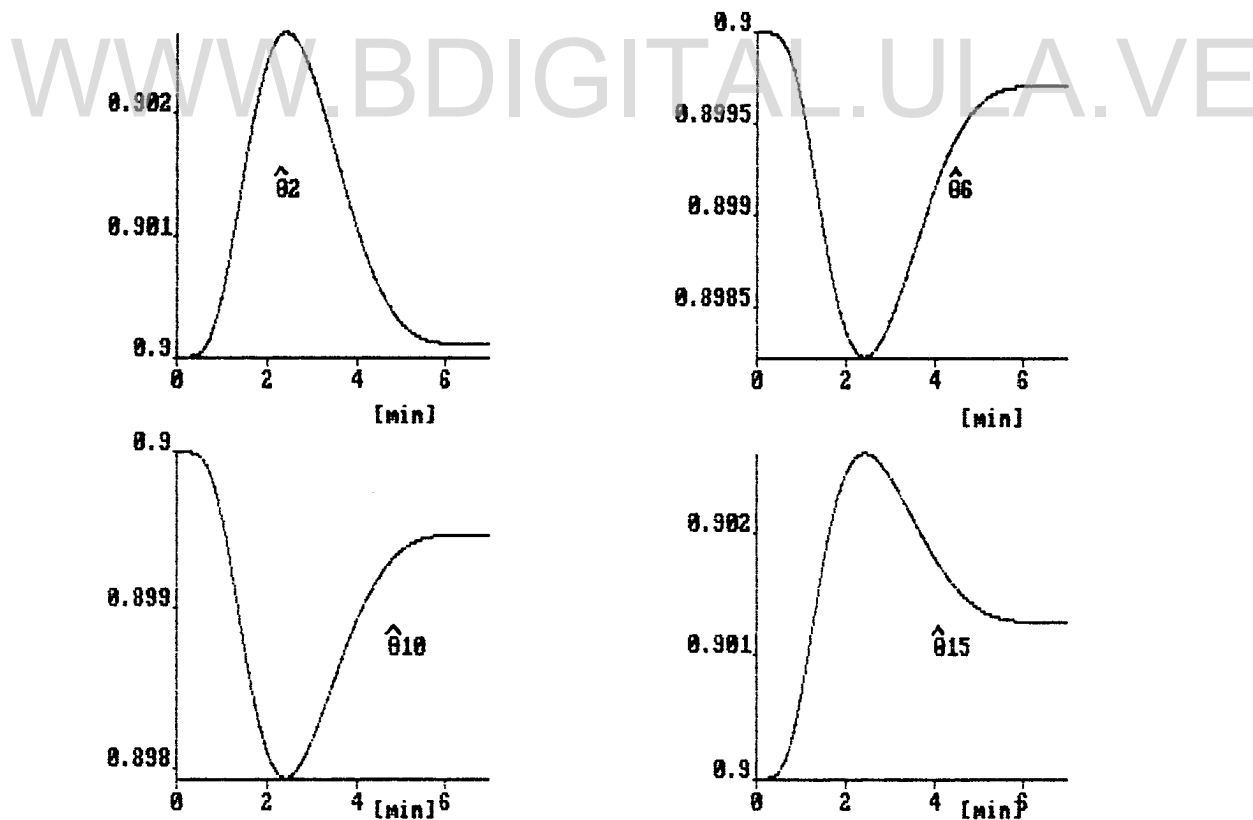


Gráfico 14. Trayectoria de los parámetros estimados.

Licencia Creative Commons:

## CAPITULO III

### CONTROL DINAMICO ADAPTATIVO DE SISTEMAS NO LINEALES PARA SEGUIMIENTO DE SEÑALES DE REFERENCIA.

#### 1. INTRODUCCION

En este capítulo, usando los resultados de [12], nos referiremos al diseño de estrategias de control dinámico continuo y discontinuo para el seguimiento de señales de referencia en plantas no lineales. La clase de sistemas tratados se corresponden con aquella que exhibe incertidumbre del tipo lineal paramétrico. Los controladores dinámicos para seguimiento de señales de referencia se desarrollan mediante linealización exacta, derivando repetidamente la señal de salida.

El controlador dinámico continuo se realiza usando asignación de polos y el discontinuo se realiza mediante modo deslizante.

Se hará una breve descripción de estos controladores, y se comprobará su funcionamiento mediante simulaciones.

## 2. CONTROL DINAMICO ADAPTATIVO DE PLANTAS NO LINEALES, LINEALIZABLES PARA SEGUIMIENTO DE SEÑALES DE REFERENCIA MEDIANTE ASIGNACION DE POLOS.

El método de Asignación de Polos consiste en asegurar que los polos del sistema en lazo cerrado se trasladen a posiciones previamente fijadas por el diseñador teniendo en cuenta criterios de estabilidad y calidad en la regulación [17].

### 2.1 CONTROL DINAMICO DE SISTEMAS NO LINEALES LINEALIZABLES PARA SEGUIMIENTO DE SEÑALES DE REFERENCIA MEDIANTE ASIGNACION DE POLOS

Considere el siguiente sistema no lineal entrada única - salida única:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \theta) + g(x, \theta) u \\ y &= h(x, \theta)\end{aligned}\tag{76}$$

con  $f$ ,  $g$ ,  $h$  todas  $C^\infty$ . Se asume que el sistema tiene grado relativo  $r < n$ , y debe ser de fase mínima. El vector de parámetros  $\theta$  se asume constante y  $f$ ,  $g$ ,  $h$  son funciones lineales de  $\theta$ .

Considerando las derivadas de la función de salida respecto al

tiempo y escribiendo éstas en términos del vector de estado  $x$  y el control  $u$ , se tiene :

$$y^{(i)} = h^{(i)}(x, \theta) = b_i(x, \theta) \quad i < r ; \text{ con } b_0(x, \theta) = h(x, \theta)$$

$$y^{(i)} = b_i(x, \theta, u, u^{(1)}, \dots, u^{(i-r-1)}) + a(x, \theta) u^{(i-r)} \quad (77)$$

para  $r \leq i \leq n$

En forma general, la enésima derivada de la salida es:

$$y^{(n)} = b_n(x, \theta, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n-r-1)}) + a(x, \theta) u^{(n-r)} \quad (78)$$

se asume que la matriz de observabilidad, constituida por (vector fila) los gradientes respecto a  $x$  de  $y^{(i)}$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) es de rango completo.

$$\text{rango } \frac{\partial (y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})}{\partial x} = \text{rango } \frac{\partial (y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})}{\partial x} = n \quad (79)$$

El teorema de la función implícita, H. Nijmeijer y A.J. van der Schaft [22], permite resolver localmente para  $x$ , a partir de (77), en términos de  $u$  y sus derivadas, así como en términos de las derivadas de  $y$ . En otras palabras existe un conjunto de  $n$  funciones independientes  $v_i$ , implícitamente definidas por (77) de tal forma que:

$$x_i = u_i(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n-r-1)}) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (80)$$

De manera general se puede representar (76) de la forma

$$y^{(n)} = C(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}, \theta, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n-r)}) \quad (81)$$

Como se mencionó al inicio, el sistema debe ser de fase mínima, quiere decir que la dinámica de los ceros asociada con (76), está dada por :

$$C(0, \theta, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n-r)}) = 0 \quad (82)$$

y debe ser localmente asintóticamente estable para un punto de operación  $u = u_0$ .

Sea  $y_R(t)$  una función  $C^\infty$ , referida como la señal de referencia, el problema del seguimiento de la señal de referencia, consiste en especificar un controlador dinámico descrito por una ecuación diferencial que sea capaz de producir una solución  $u$ , que obligue a la salida del sistema  $y(t) = h(x, \theta)$  a seguir asintóticamente la señal de referencia  $y_R(t)$ .

La función error  $e(t)$  es la diferencia entre la salida de la planta  $y(t)$  y la señal de referencia  $y_R(t)$

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \quad (83)$$

y sus derivadas con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} e^{(1)}(t) &= y^{(1)}(t) - y_R^{(1)}(t) \\ &\vdots \\ e^{(i)}(t) &= y^{(i)}(t) - y_R^{(i)}(t) \end{aligned} \quad (84)$$

y en forma general la enésima derivada es

$$e^{(n)}(t) = y^{(n)}(t) - y_R^{(n)}(t) \quad (85)$$

**PROPOSICION:**

Sea  $u^{(i)}$  que especifica el conjunto  $\{u, u^{(1)}, \dots, u^{(i)}\}$  de derivadas del control, el controlador dinámico

$$U^{(n-r)} = \frac{-b_n(x, \theta, u^{(n-r-1)})}{a(x, \theta)} + \frac{y_R^{(n)}}{a(x, \theta)} - \frac{\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i [b_i(x, \theta) - y_R^{(i)}]}{a(x, \theta)}$$

$$= \frac{\sum_{j=r}^{n-1} \alpha_j [(b_j(x, \theta, u^{(j-r-1)}) + a(x, \theta) + u^{(j-r)}) - y_R^{(j)}]}{a(x, \theta)}$$

$$\alpha_n = 1 \quad (86)$$

debe manejar la salida del sistema (76) para satisfacer la dinámica linealizada a lazo cerrado de la forma:

$$e^{(n)} + \alpha_{n-1} e^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 e^{(1)} + \alpha_0 e = 0 \quad (87)$$

**PRUEBA :**

Consiste en sustituciones directas, primero en (87) sustituir (83), (84) y (85) de esto resulta :

$$\left[ y^{(n)} - y_R^{(n)} \right] + \alpha_{n-1} \left[ y^{(n-1)} - y_R^{(n-1)} \right] + \dots + \alpha_0 \left[ y - y_R \right] \quad (88)$$

ahora en ésta se reemplaza (77) y (78), y finalmente el controlador propuesto en (86).

Con la garantía previa de que el sistema es de fase mínima, entonces el controlador (86), asegura que la señal de salida  $y(t)$  siga a la señal de referencia  $y_R(t)$  siempre y cuando los coeficientes  $[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]$  sean escogidos apropiadamente de acuerdo a criterios de estabilidad y de calidad de regulación (máximo sobreimpulso, tiempo de subida, tiempo de estabilización, etc.)

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

## 2.2 ESQUEMA DE REGULACION ADAPTATIVA DINAMICO PARA SISTEMAS LINEALIZABLES.

La efectividad del controlador dinámico (86) depende del perfecto conocimiento de los parámetros envueltos en el sistema denotados por  $\theta$ . Es importante mencionar que la exacta cancelación de las no linealidades puede ser posible si el controlador dinámico (86) es calculado usando los valores estimados de los parámetros, los cuales son conocidos con algún error respecto a los valores verdaderos, éstos son constantes pero desconocidos. Los valores estimados de los parámetros son representados como  $\hat{\theta}$ .

Por otro lado la linealidad de  $f, q$  y  $h$  respecto a  $\theta$ , origina que las cantidades " $a$ " y " $b$ " de (77) sean funciones multilineales de los  $\theta_i$  que componen  $\theta$ , por lo cual resulta conveniente definir un nuevo vector  $\Theta$ , conteniendo todos los productos de los parámetros  $\theta_i$ , que estará compuesto por nuevos componentes  $\Theta_i$ , similar al caso de sistemas linealizables estáticamente [1], mencionado en el capítulo anterior.

Si se reemplaza  $\theta$  por  $\hat{\theta}$  en (86) se obtiene el controlador estimado siguiente:

$$U^{(n-r)} = \frac{-b_n(x, \hat{\theta}, u^{(n-r-1)})}{a(x, \hat{\theta})} + \frac{y_R^{(n)}}{a(x, \hat{\theta})} - \frac{\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i [b_i(x, \hat{\theta}) - y_R^{(i)}]}{a(x, \hat{\theta})} - \frac{\sum_{j=r}^{n-1} \alpha_j [(b_j(x, \hat{\theta}, u^{(j-r-1)}) + a(x, \hat{\theta}) + u^{(j-r)}) - y_R^{(j)}]}{a(x, \hat{\theta})} \quad (89)$$

si el controlador (89) es utilizado para regular la evolución de (87), la expresión que queda después de algunas manipulaciones:

$$\begin{aligned} & (y_R^{(n)} - y_R^{(n)}) + \alpha_{n-1} (y_R^{(n-1)} - y_R^{(n-1)}) + \dots + \alpha_1 (y_R^{(1)} - y_R^{(1)}) + \alpha_0 (y_R - y_R) \\ & = b_n(x, \theta, u^{(n-r-1)}) - b_n(x, \hat{\theta}, u^{(n-r-1)}) + \\ & \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i [b_i(x, \theta) - b_i(x, \hat{\theta})] + \sum_{j=r}^{n-1} \alpha_j \{ b_j(x, \theta, u^{(j-r-1)}) - \\ & b_j(x, \hat{\theta}, u^{(j-r-1)}) \} + [a(x, \theta) - a(x, \hat{\theta})] u^{j-r} + \\ & + [a(x, \theta) - a(x, \hat{\theta})] u^{(n-r)} \quad (90) \end{aligned}$$

donde  $u^{(n-r)}$  representa el controlador estimado dado por (89).

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

La expresión (90) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$e^{(n)} + \alpha_{(n-1)} e^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 e^{(2)} + \alpha_0 e = (\theta - \hat{\theta})^T W(x, \hat{\theta}, u^{(n-r-1)})$$

$$= \phi^T W(x, \hat{\theta}, u^{(n-r-1)}) \quad (91)$$

Donde  $W$  es el vector regresor, que depende del estado  $x$ , así como de  $\hat{\theta}$ , de  $u$ , y de las derivadas de  $u$  de orden  $n-r-1$ . De aquí en adelante se reemplazará  $\hat{\theta}_i$  por  $\theta_i$ , porque éstos últimos serán los parámetros que necesitaremos estimar.

Ahora, para encontrar los parámetros estimados  $\theta_i$  se aplicará la ley de actualización de parámetros:

$$\dot{\hat{\theta}} = - \dot{\theta} = - \frac{e_1 \zeta_1}{1 + \zeta^T \zeta}$$

Esta ley de actualización fue descrita con detalle en el capítulo anterior. A continuación se harán ejemplos de aplicación mediante simulación.

## EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

En esta parte se pretende comprobar el funcionamiento de los controladores adaptativos dinámicos por asignación de polos para seguimiento de señales de referencia, se trabajarán 3 problemas los cuales se muestran a continuación incluyendo sus simulaciones.

### III). MOTOR DC CONTROLADO POR CAMPO

El modelo es:

$$\dot{x}_1 = -\theta_1 x_1 - \theta_4 x_2 u + \theta_2 v_a$$

$$\dot{x}_2 = -\theta_3 x_2 + \theta_5 x_1 u$$

Donde el significado de las variables de estado son las mismas que en el ejemplo I del Capítulo II.

El controlador es de la forma:

$$a(x, \hat{\theta}) u^{(n-r)} = -b_n(x, \hat{\theta}, u^{(n-r-1)}) + y_R^{(n)} - \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i [b_i(x, \hat{\theta}) - \text{sigue...}]$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

...viene

$$Y_R^{(i)} - \sum_{j=r}^{n-1} \alpha_j \left[ b_j(x, \hat{\theta}, u^{(j-r-1)}) + a(x, \hat{\theta}) u^{(j-r)} \right] - Y_R^{(j)}$$

El sistema es de grado relativo = 1, como se obtuvo en el ejemplo 1.

Cálculo de los coeficientes b (Derivadas de la salida)

$$y = x_2 = b_0$$

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = -\hat{\theta}_3 x_2 + \hat{\theta}_5 x_1 u ; \quad b_2 = -\hat{\theta}_3 x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{\dot{x}}_2 = -\hat{\theta}_3 \dot{x}_2 + \hat{\theta}_5 \dot{x}_1 u ;$$

$$= -\hat{\theta}_3 (-\hat{\theta}_3 x_2 + \hat{\theta}_5 x_1 u) + \hat{\theta}_5 (-\hat{\theta}_1 x_1 - \hat{\theta}_4 x_2 u - \hat{\theta}_2 V_a) u$$

$$b_2 = \hat{\theta}_3 \hat{\theta}_3 x_2 - \hat{\theta}_3 \hat{\theta}_5 x_1 u - u \hat{\theta}_5 \hat{\theta}_1 x_1 - \hat{\theta}_4 \hat{\theta}_5 x_2 u^2 + \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_5 V_a u$$

$$a = \hat{\theta}_5 x_1$$

Entonces reemplazando en la expresión del controlador se obtiene:

$$\dot{u} = \hat{\theta}_3 \hat{\theta}_3 x_2 - \hat{\theta}_3 \hat{\theta}_5 x_1 u - u \hat{\theta}_5 \hat{\theta}_1 x_1 - \hat{\theta}_4 \hat{\theta}_5 x_2 u + u \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_5 V_a + \text{sigue}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

...viene

$$\dot{Y}_R - \alpha_0 [x_2 - Y_R] - \alpha_1 [(-\hat{\theta}_3 x_2 + \hat{\theta}_5 x_1 u) - \dot{Y}_R] / (\hat{\theta}_5 x_1)$$

Necesitamos, ahora, que el controlador regule la dinámica del sistema a lazo cerrado de la siguiente manera:

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 e = [\phi_1 \dots \phi_{20}] \begin{bmatrix} w_1(x, \hat{\theta}, u) \\ \vdots \\ w_{20}(x, \hat{\theta}, u) \end{bmatrix}$$

debido a que en el vector regresor, así como el vector de parámetros están incluidos todos sus componentes, la dimensión de estos no caben en esta página, por lo cual aparecen en la página siguiente.

donde:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \\ \Sigma_7 \\ \Sigma_8 \\ \Sigma_9 \\ \Sigma_{10} \\ \Sigma_{11} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{13} \\ \Sigma_{14} \\ \Sigma_{15} \\ \Sigma_{16} \\ \Sigma_{17} \\ \Sigma_{18} \\ \Sigma_{19} \\ \Sigma_{20} \end{bmatrix}; \theta = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_4 \\ \hat{\theta}_5 \\ \hat{\theta}_1^2 \\ \hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_1\hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_1\hat{\theta}_4 \\ \hat{\theta}_1\hat{\theta}_5 \\ \hat{\theta}_2^2 \\ \hat{\theta}_2\hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_2\hat{\theta}_4 \\ \hat{\theta}_2\hat{\theta}_5 \\ \hat{\theta}_3^2 \\ \hat{\theta}_3\hat{\theta}_4 \\ \hat{\theta}_3\hat{\theta}_5 \\ \hat{\theta}_4^2 \\ \hat{\theta}_4\hat{\theta}_5 \\ \hat{\theta}_5^2 \end{bmatrix}; \Theta = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_4 \\ \hat{\theta}_5 \\ \hat{\theta}_6 \\ \hat{\theta}_7 \\ \hat{\theta}_8 \\ \hat{\theta}_9 \\ \hat{\theta}_{10} \\ \hat{\theta}_{11} \\ \hat{\theta}_{12} \\ \hat{\theta}_{13} \\ \hat{\theta}_{14} \\ \hat{\theta}_{15} \\ \hat{\theta}_{16} \\ \hat{\theta}_{17} \\ \hat{\theta}_{18} \\ \hat{\theta}_{19} \\ \hat{\theta}_{20} \end{bmatrix}$$

Ahora se hará la determinación de los componentes del vector regresor:

$$\begin{aligned} \ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 e &= \phi_{15} x_2 - \phi_{17} x_1 u + \phi_{10} x_1 u - \phi_{19} x_2 u^2 + \phi_{14} V_a u \\ &- (\phi_{92} x_2 + \phi_{51} x_1 u) \alpha_1 + \frac{\phi_5}{\hat{\theta}_5} \left[ -\hat{\theta}_{92} \hat{\theta}_{92} x_2 + \hat{\theta}_{951} \hat{\theta}_{951} x_1 u + \right. \\ &u \hat{\theta}_{541} \hat{\theta}_{541} x_1 + \hat{\theta}_{452} \hat{\theta}_{452} x_2 u^2 - u \hat{\theta}_{25} \hat{\theta}_{25} V_a + \dot{Y}_R - \alpha_0 [x_2 - Y_R] - \\ &\left. \alpha_1 [-\hat{\theta}_{92} x_2 + \hat{\theta}_{51} x_1 u - \dot{Y}_R] \right] \end{aligned}$$

donde los componentes serán:

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

$$W_9 = -\alpha_1 x_2$$

$$\begin{aligned} W_5 &= \alpha_1 x_1 u + \frac{1}{\hat{\theta}_5} \left[ -\hat{\theta}_{92} \hat{\theta}_{92} x_2 + \hat{\theta}_{951} \hat{\theta}_{951} x_1 u + u \hat{\theta}_{541} \hat{\theta}_{541} x_1 + \hat{\theta}_{452} \hat{\theta}_{452} x_2 u^2 \right. \\ &\left. - u \hat{\theta}_{25} \hat{\theta}_{25} V_a + \dot{Y}_R - \alpha_0 [x_2 - Y_R] - \alpha_1 [-\hat{\theta}_{92} x_2 + \hat{\theta}_{51} x_1 u - \dot{Y}_R] \right] \end{aligned}$$

$$W_{10} = -x_1 u$$

$$W_{14} = V_a u$$

$$W_{15} = x_2$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$W_{17} = -x_1 u$$

$$W_{18} = -x_2 u^2$$

A continuación se determinarán los parámetros

$$e_1 = \sum_{i=1}^{20} \phi_i \xi_i$$

$$\xi = M(s) W$$

$$\xi_i = \frac{1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} W_i$$

$$\ddot{\xi}_i + \alpha_1 \dot{\xi}_i + \alpha_0 \xi_i = W_i$$

$$Z_i = \frac{d\xi_i}{dt}$$

Tenemos que (condiciones iniciales cero) para

$$\dot{Z}_9 = W_9 - \alpha_1 Z_9 - \alpha_0 \xi_2$$

$$\dot{\xi}_9 = Z_9$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\dot{z}_5 = w_5 - \alpha_1 z_5 - \alpha_0 \xi_5$$

$$\dot{\xi}_5 = z_5$$

$$\dot{z}_{10} = w_{10} - \alpha_1 z_{10} - \alpha_0 \xi_{10}$$

$$\dot{\xi}_{10} = z_{10}$$

$$\dot{z}_{14} = w_{14} - \alpha_1 z_{14} - \alpha_0 \xi_{14}$$

$$\dot{\xi}_{14} = z_{14}$$

$$\dot{z}_{15} = w_{15} - \alpha_1 z_{15} - \alpha_0 \xi_{15}$$

$$\dot{\xi}_{15} = z_{15}$$

$$\dot{z}_{17} = w_{17} - \alpha_1 z_{17} - \alpha_0 \xi_{17}$$

$$\dot{\xi}_{17} = z_{17}$$

$$\dot{z}_{19} = w_{19} - \alpha_1 z_{19} - \alpha_0 \xi_{19}$$

$$\dot{\xi}_{19} = z_{19}$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

y, finalmente

$$\dot{\phi}_1 = -\dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{e_1 \xi_1}{1 + \xi^T \xi}$$

$$\dot{\phi}_9 = -\dot{\hat{\theta}}_9 = \frac{-e_1 \xi_9}{1 + \xi^T \xi}$$

$$\dot{\phi}_5 = -\dot{\hat{\theta}}_5 = \frac{-e_1 \xi_5}{1 + \xi^T \xi}$$

$$\dot{\phi}_{10} = -\dot{\hat{\theta}}_{10} = \frac{-e_1 \xi_{10}}{1 + \xi^T \xi}$$

$$\dot{\phi}_{14} = -\dot{\hat{\theta}}_{14} = \frac{-e_1 \xi_{14}}{1 + \xi^T \xi}$$

$$\dot{\phi}_{15} = -\dot{\hat{\theta}}_{15} = \frac{-e_1 \xi_{15}}{1 + \xi^T \xi}$$

$$\dot{\phi}_{17} = -\dot{\hat{\theta}}_{17} = \frac{-e_1 \xi_{14}}{1 + \xi^T \xi}$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

$$\dot{\hat{\theta}}_{19} = -\hat{\theta}_{19} = \frac{-e_1 \xi_{19}}{1 + \xi^T \xi}$$

Donde

$$e_1 = \phi_9 \xi_9 + \phi_5 \xi_5 + \phi_{10} \xi_{10} + \phi_{14} \xi_{14} + \phi_{15} \xi_{15} + \phi_{17} \xi_{17} + \phi_{19} \xi_{19}$$

y

$$\xi^T \xi = \xi_9 \xi_9 + \xi_5 \xi_5 + \xi_{10} \xi_{10} + \xi_{14} \xi_{14} + \xi_{15} \xi_{15} + \xi_{17} \xi_{17} + \xi_{19} \xi_{19}$$

Los parámetros utilizados para hacer la simulación son los mismos utilizados en la simulación del ejemplo I del Capítulo II.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

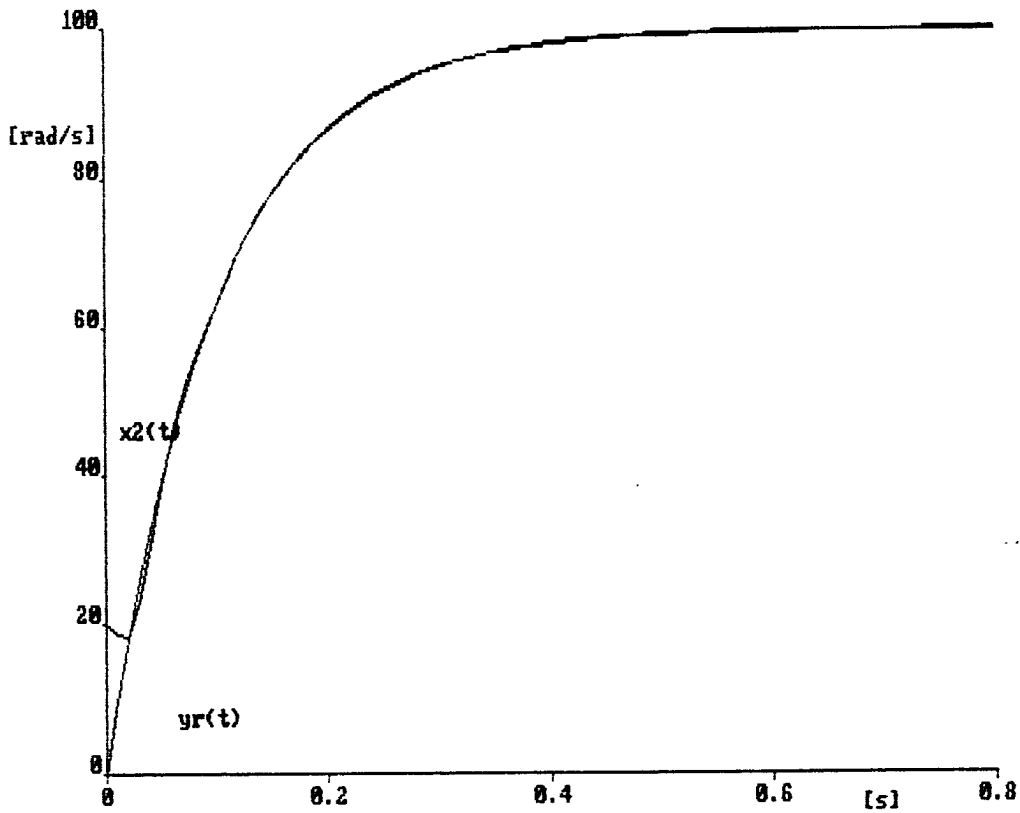


Gráfico 15. Respuesta de la velocidad angular para el seguimiento de un sistema de primer orden, usando control adaptativo dinámico por asignación de polos.

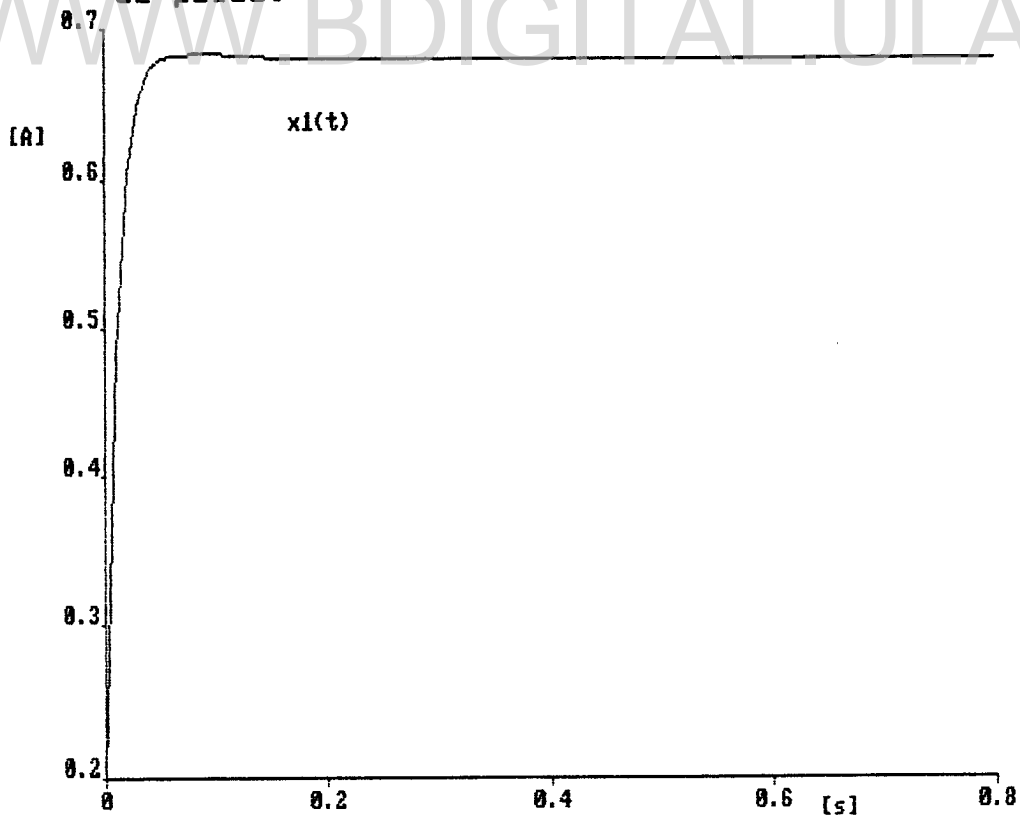


Gráfico 16. Respuesta de la corriente en el circuito de armadura.

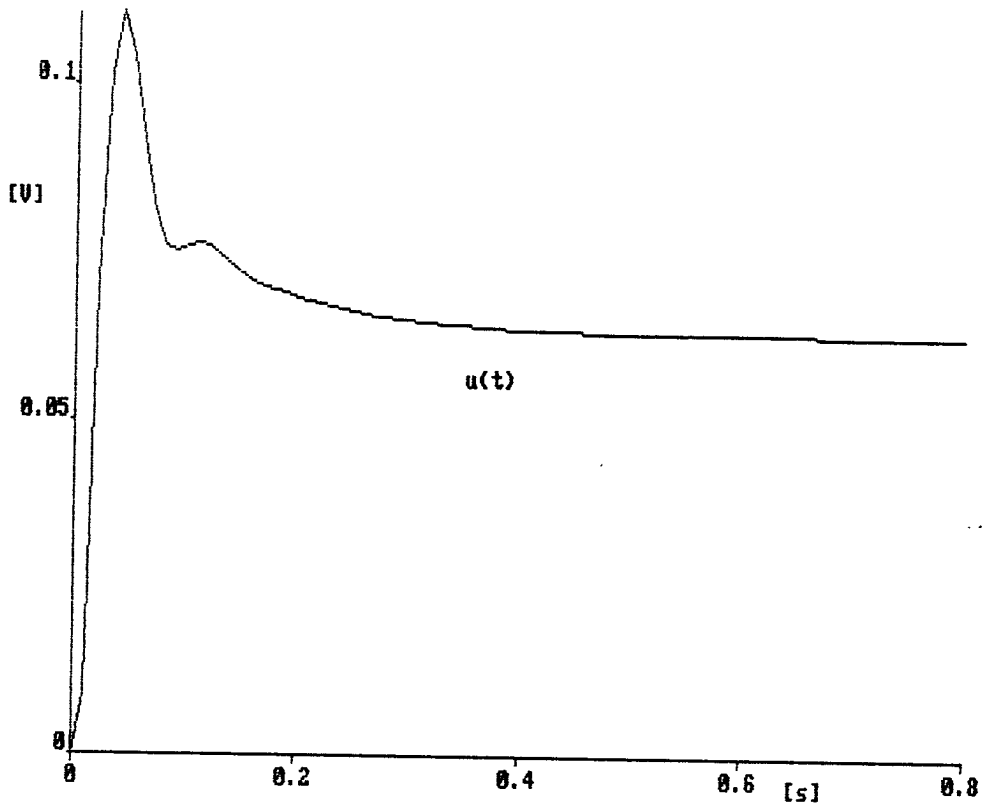


Gráfico 17. Voltaje en el devanado de campo.

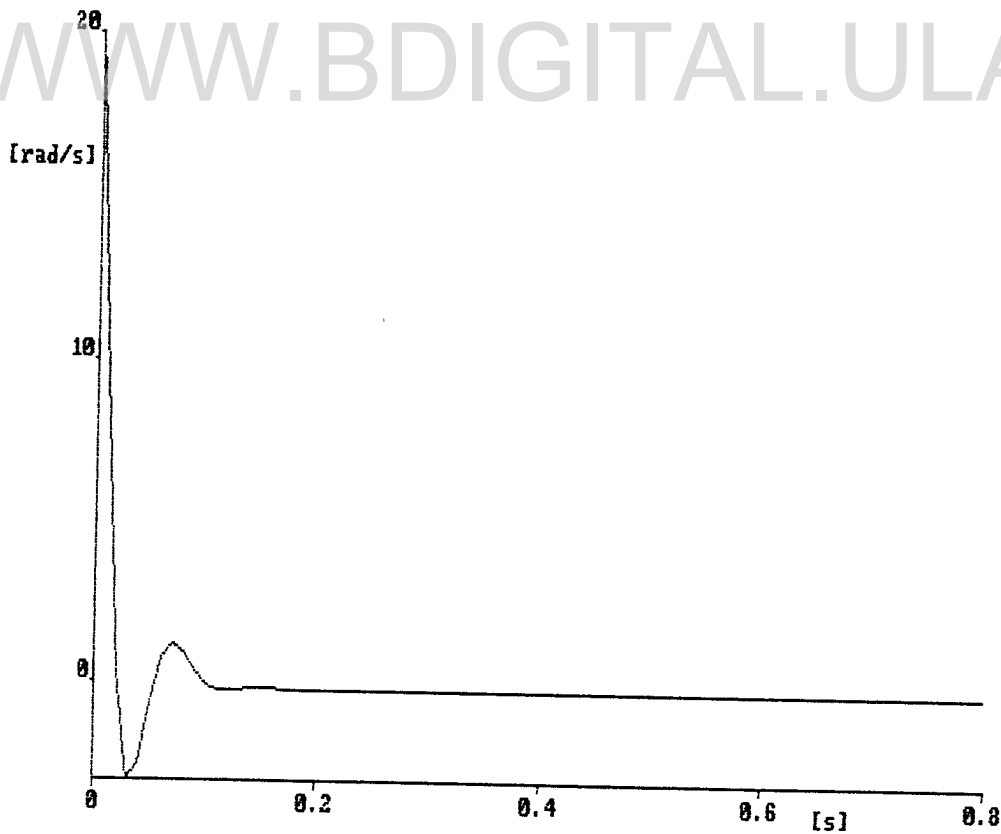


Gráfico 18. Error de seguimiento entre la salida y la referencia.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

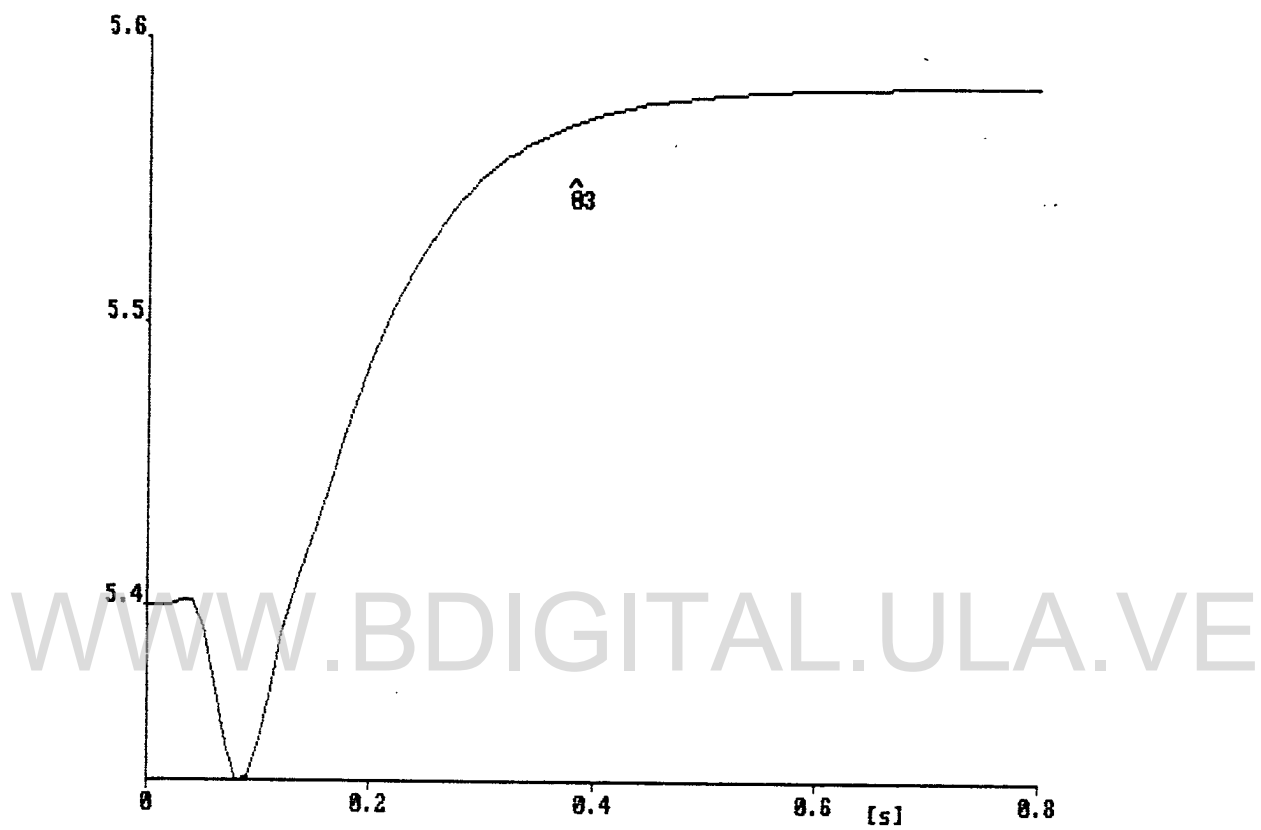


Gráfico 19. Trayectoria del parámetro estimado.

IV) CONTROL DE CONCENTRACION TOTAL EN UN TANQUE AGITADO  
CONTINUAMENTE

El modelo es:

$$\dot{x}_1 = -(1 + Da_1) x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = Da_1 x_1 - x_2 - Da_2 x_2$$

$$y = x_1 + x_2$$

Donde :

$x_1$  representa la concentración normalizada (sin dimensiones)  $C_p/C_{p0}$  de una especie P en el reactor.

$x_2$  representa la concentración normalizada (sin dimensiones)  $C_q/C_{q0}$  de la especie Q en el reactor.

$u$  representa la variable de control la cual es definida como la relación entre  $N_{PR}/(FC_{p0})$  donde  $N_{PR}$  es la relación molar volumétrica por unidad,  $F$  es la variación volumétrica en  $m^3 s^{-1}$ .

$Da_1$ ,  $Da_2$  son definidos respectivamente como  $k_1 V/F$  y  $k_2 V C_{p0}/F$  siendo  $V$  el volumen del reactor, y  $k_1$  y  $k_2$  son las constantes de variación primer orden.

Se asume que especie Q es altamente ácida y la especie P neutro, es importante regular la concentración total y, de acuerdo

a la trayectoria prefijada y un punto preestablecido para evitar problemas de corrosión.

Determinación del grado relativo:

Sea

$$f(x) = \begin{bmatrix} -(1 + D\alpha_1) x_1 \\ D\alpha_1 x_1 - x_2 - D\alpha_2 x_2^2 \end{bmatrix} ; y$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces calculando las derivadas de Lie:

$$L_f h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(1 + D\alpha_1) x_1 \\ D\alpha_1 x_1 - x_2 - D\alpha_2 x_2^2 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$L_g h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(1 + D\alpha_1) x_1 \\ D\alpha_1 x_1 - x_2 - D\alpha_2 x_2^2 \end{bmatrix} \neq 0$$

Se observa que el grado relativo es  $r = 1$ , considerando los parámetros del sistema como:

$$D\alpha_1 = \theta_1 \quad D\alpha_2 = \theta_2$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Procederemos a calcular las derivadas de la salida para posteriormente reemplazarlas en el controlador.

$$y = x_1 + x_2$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = - (1 + D\alpha_1)x_1 + u + D\alpha_1 x_1 - x_2 - D\alpha_2 x_2^2$$

$$\dot{y} = -x_1 - \theta_1 x_1 + u + \theta_1 x_1 - x_2 - \theta_2 x_2^2$$

$$\dot{y} = - (x_1 + x_2) + u - \theta_2 x_2^2 = - (x_1 + x_2 + \theta_2 x_2^2) + u$$

$$\ddot{y} = - (x_1 + x_2) + \dot{u} - 2 \theta_2 x_2 \dot{x}_2$$

$$\ddot{y} = - \left[ - (x_1 + x_2) + u - \theta_2 x_2^2 \right] + \dot{u} - 2 \theta_2 x_2 \left[ \theta_1 x_1 - x_2 - \theta_2 x_2^2 \right]$$

$$\ddot{y} = - \left[ x_1 + x_2 - u + \theta_2 x_2^2 - 2 \theta_1 \theta_2 x_1 x_2 + 2 \theta_2 x_2^2 + \theta_2 \theta_2 x_2^3 \right] + \dot{u}$$

El controlador, entonces, será:

$$\dot{u} = - \left[ x_1 + x_2 - u + 3 \hat{\theta}_2 x_2^2 - 2 \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 x_1 x_2 + \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_2 x_2^3 \right] + \dot{y}_R$$

$$- \alpha_0 \left[ x_1 + x_2 - y_R \right] - \alpha_1 \left[ - (x_1 + x_2 + \hat{\theta}_2 x_2^2) + u - \dot{y}_R \right]$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_1^2 \\ \theta_1\theta_2 \\ \theta_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \\ \Theta_5 \end{bmatrix}$$

Se determinarán los componentes del vector regresor a partir de la dinámica:

$$\begin{aligned} \ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 e = & \left[ x_1 + x_2 - u + \theta_2 x_2^2 - 2 \theta_1 \theta_2 x_1 x_2 + \right. \\ & 2 \theta_2 x_2^2 + \theta_2 \theta_2 x_2^3 - x_1 - x_2 + u - \hat{\theta}_2 x_2^2 + \\ & \left. 2 \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 x_1 x_2 - 2 \hat{\theta}_2 x_2^2 - \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_2 x_2^3 \right] + \\ & \alpha_1 \left[ \theta_2 x_2^2 - \hat{\theta}_2 x_2^2 \right] \end{aligned}$$

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 e = 3 \phi_2 x_2^2 - 2 \phi_4 x_1 x_2 + \phi_5 x_2^3 + \alpha_1 \phi_2 x_2^2$$

Entonces los componentes de  $W$  serán:

$$W_2 = 3 x_2^2 + \alpha_1 x_2^2 = x_2^2 (3 + \alpha_1)$$

$$W_4 = -2 x_1 x_2$$

$$W_5 = x_2^3$$

Licencia Creative Commons:

88

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

todos los demás  $w_i = 0$ .

Ley de actualización de parámetros.

$$\dot{z}_2 = w_2 + \alpha z_2 - \alpha \xi_2$$

$$\dot{\xi}_2 = z_2$$

$$\dot{z}_4 = w_4 - \alpha z_4 - \alpha \xi_4$$

$$\dot{\xi}_4 = z_4$$

$$\dot{z}_5 = w_5 - \alpha z_5 - \alpha \xi_5$$

$$\dot{\xi}_5 = z_5$$

$$e_1 = \phi_2 \xi_2 + \phi_4 \xi_4 + \phi_5 \xi_5$$

$$\xi^T \xi = \xi_2 \xi_2 + \xi_4 \xi_4 + \xi_5 \xi_5$$

y

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \frac{-e_1 \xi_2}{1 + \xi^T \xi}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_4 = \frac{-e_1 \xi_4}{1 + \xi^T \xi}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\dot{\hat{\theta}}_5 = \frac{-e_1 \xi_5}{1 + \xi^T \xi}$$

Los valores de los parámetros considerados para este caso son  $D_{a1} = 1$  y  $D_{a2} = 1$ , los cuales se tomaron de Sira-Ramírez [14].

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

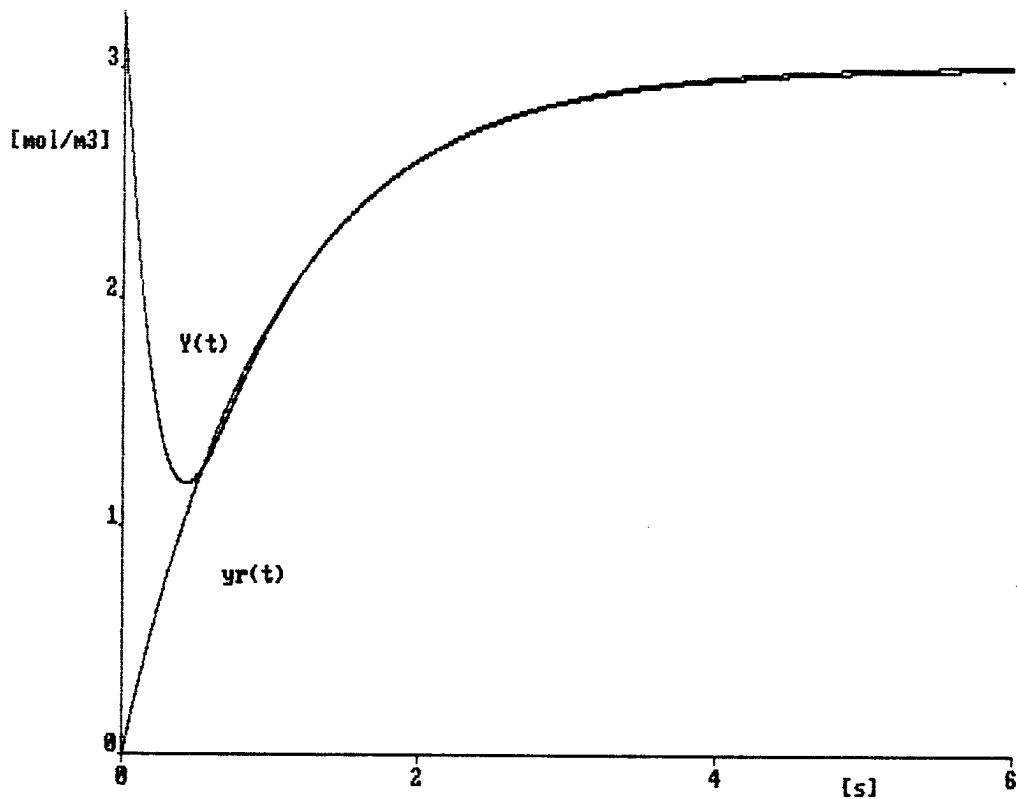


Gráfico 20. Respuesta de la concentración total en el reactor para seguimiento de un sistema de primer orden, usando control adaptativo dinámico por asignación de polos.

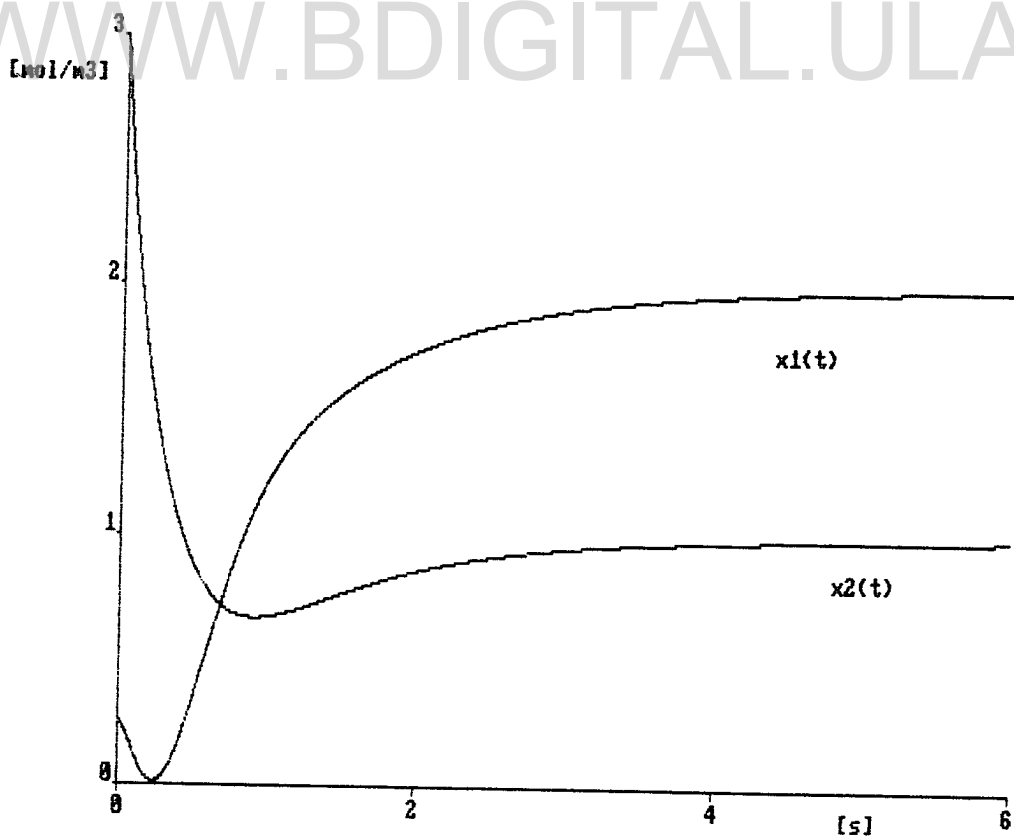


Gráfico 21. Respuesta de las variables de estado.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

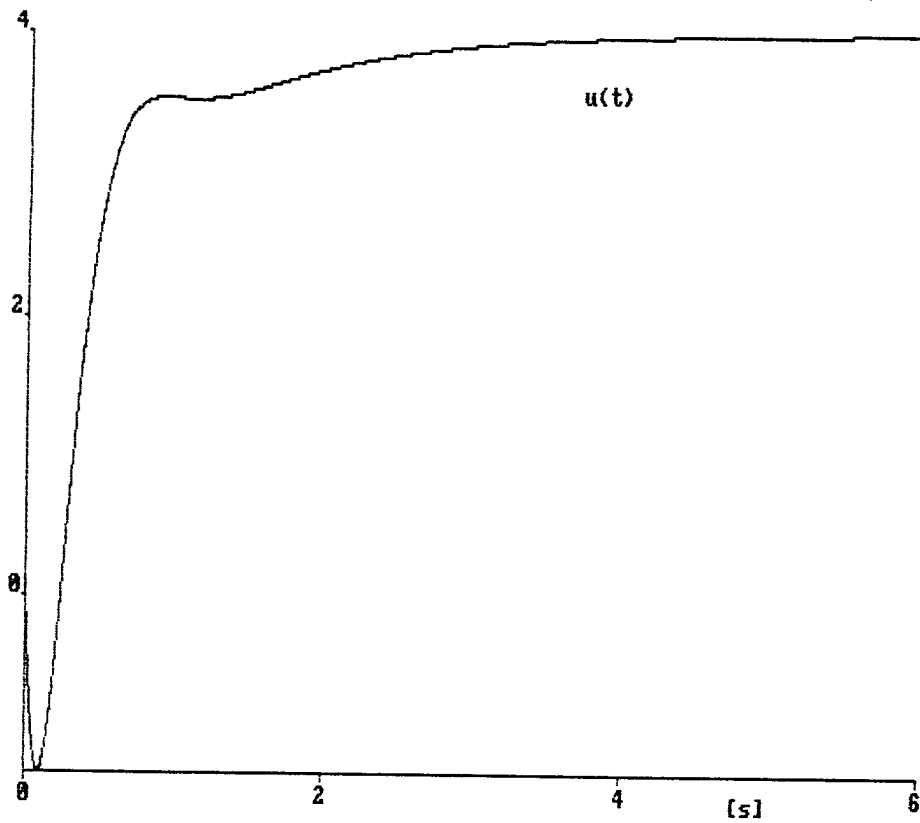


Gráfico 22. Trayectoria del controlador.

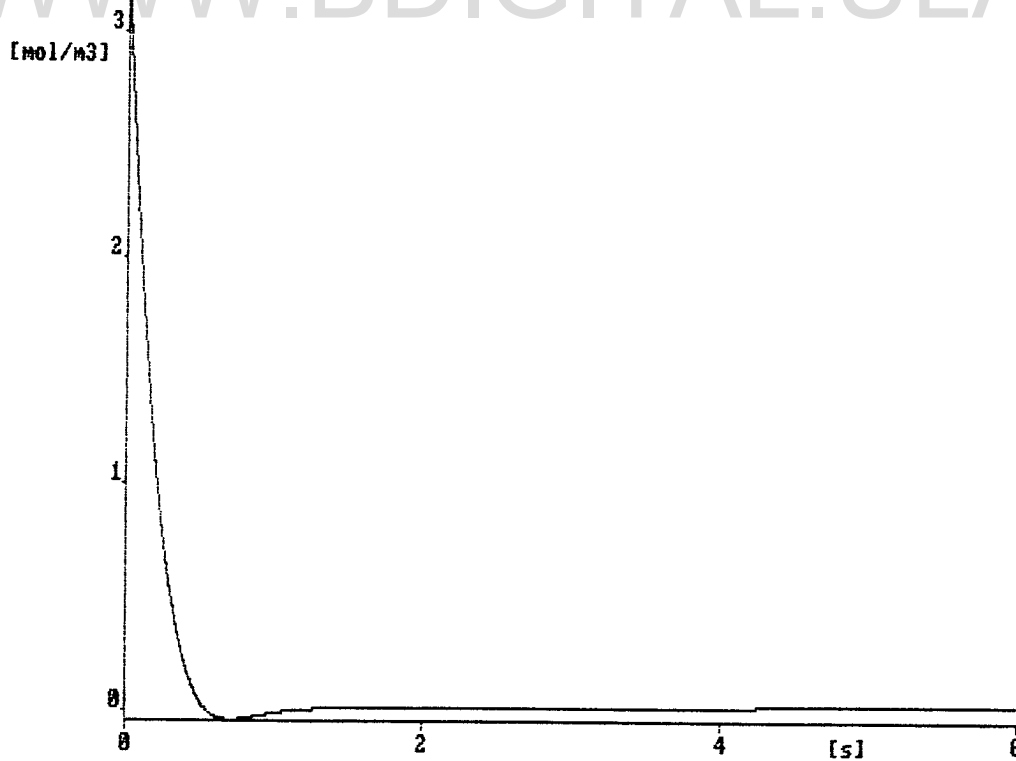


Gráfico 23. Error de seguimiento.

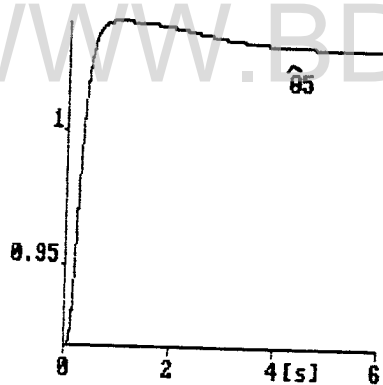
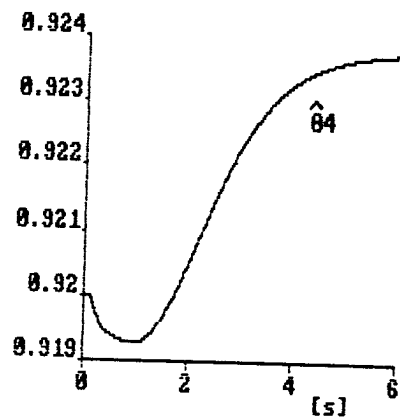
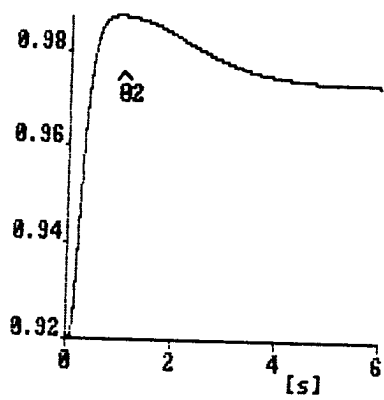


Gráfico 24. Trayectoria de los parámetros estimados.

## V) CONTROL DE NIVEL DE LIQUIDO DE DOS TANQUES CONECTADOS EN CASCADA

El modelo es:

$$\dot{x}_1 = -\theta_1 \sqrt{x_1} + \theta_2 u$$

$$\dot{x}_2 = \theta_1 \sqrt{x_1} - \theta_1 \sqrt{x_2}$$

debido a que el grado relativo del sistema es 2, igual que el orden del sistema, utilizaremos el sistema extendido [22], para realizar el controlador propuesto en esta sección.

El nuevo estado agregado es:

$$\dot{u} = u$$

y la salida del sistema es:

$$h = y = x_2$$

Procederemos a realizar el cálculo de las derivadas de la salida:

$$y = b_0 = x_2$$

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = \theta_1 \left( \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right) = b_1$$

$$\ddot{y} = \left[ -\frac{\theta_1 \theta_1}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \right] + \frac{\theta_1 \theta_2 u}{2\sqrt{x_1}}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & \frac{\theta_1 \theta_2 \dot{u}}{2\sqrt{x_1}} + \frac{\theta_1 \theta_1 \theta_2 u}{4x_1} - \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_2 u^2}{4x_1 \sqrt{x_1}} - \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_2 u}{4\sqrt{x_1} \sqrt{x_2}} + \frac{\theta_1 \theta_1 \theta_1}{4\sqrt{x_2}} \\ & + \frac{\theta_1 \theta_1 \theta_1 x_1}{4x_2 \sqrt{x_2}} - \frac{\theta_1 \theta_1 \theta_1 x_1}{4x_2 \sqrt{x_1}} \end{aligned}$$

El controlador propuesto tiene la siguiente configuración:

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

$$\dot{u} = \frac{2\sqrt{x_1}}{\Theta_4} \left[ -\frac{\Theta_7 u}{4x_1} + \Theta_8 \left( \frac{u^2}{4x_1 \sqrt{x_1}} + \frac{u}{4\sqrt{x_1} \sqrt{x_2}} \right) \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{\Theta_6}{4} \left[ \frac{-\sqrt{x_1} x_2 + x_1 \sqrt{x_1} - x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 x_2} x_2} \right] + \ddot{y}_R - \dots$$

$$\dots - \alpha_2 \left[ \frac{\Theta_4 u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{\Theta_9}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \ddot{y}_R \right] + \dots$$

Licencia Creative Commons:

95

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\dots - \alpha_1 \left[ \Theta_1 \left[ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right] - \dot{y}_R \right] - \alpha_0 \left[ x_2 - y_R \right]$$

El vector de parámetros será:

$$\theta = \left[ \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_1 \theta_1 \quad \theta_1 \theta_2 \quad \theta_2 \theta_2 \quad \theta_1 \theta_1 \theta_1 \quad \theta_1 \theta_1 \theta_2 \quad \theta_1 \theta_2 \theta_2 \quad \theta_2 \theta_2 \theta_2 \right]^T$$

→

$$\Theta = \left[ \Theta_1 \quad \Theta_2 \quad \Theta_3 \quad \Theta_4 \quad \Theta_5 \quad \Theta_6 \quad \Theta_7 \quad \Theta_8 \quad \Theta_9 \right]^T$$

El controlador estimado consiste en el reemplazo de  $\Theta$  por  $\hat{\Theta}$ .

Con un procedimiento análogo al utilizado en los problemas anteriores, se determinaron los componentes del vector regresor, los cuales son:

$$W_1 = \alpha_1 \left[ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right]$$

$$W_3 = -\frac{\alpha_2}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

$$W_4 = \frac{1}{\hat{\Theta}_4} \left[ -\frac{\Theta_7 u}{4 x_1} + \Theta_8 \left( \frac{u^2}{4 x_1 \sqrt{x_1}} + \frac{u}{4 \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}} \right) + \dots \right]$$

$$\dots + \frac{\Theta_6}{4} \left( \frac{-\sqrt{x_1} x_2 + x_1 \sqrt{x_1} - x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 x_2} x_2} \right) + \dot{y}_R - \dots$$

Licencia Creative Commons:

96

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\dots - \alpha_2 \left[ \frac{\Theta_4 u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{\Theta_3}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \ddot{y}_R \right] + \dots$$

$$\dots - \alpha_1 \left[ \Theta_1 \left[ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right] - \dot{y}_R \right] - \alpha_0 \left[ x_2 - y_R \right] + \dots$$

$$\dots + \alpha_2 \frac{u}{2\sqrt{x_1}}$$

$$W_6 = \frac{-\sqrt{x_1} x_2 + x_1 \sqrt{x_1} - x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 x_2} x_2}$$

$$W_7 = \frac{u}{4x_1}$$

$$W_8 = - \left[ \frac{u^2}{4x_1 \sqrt{x_1}} + \frac{u}{4\sqrt{x_1} \sqrt{x_2}} \right]$$

Ley de actualización de parámetros

$$\xi_i = \frac{1}{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} W_i$$

$$\ddot{\xi}_i + \alpha_2 \dot{\xi}_i + \alpha_1 \xi_i + \alpha_0 \xi_i = W_i$$

$$Z = \frac{d\xi}{dt}$$

$$\dot{z}_i + \alpha_2 z_i + \alpha_1 z_i + \alpha_0 \xi_i = W_i$$

$$x = \frac{dz}{dt}$$

$$(1) \quad \dot{x}_i + \alpha_2 x_i + \alpha_1 z_i + \alpha_0 \xi_i = W_i$$

$$(2) \quad \dot{z}_i = x_i$$

$$(3) \quad \dot{\xi}_i = z_i$$

Con condiciones iniciales igual a cero:

$$\dot{m}_1 = W_1 - \alpha_2 m_1 - \alpha_1 z_1 - \alpha_0 \xi_1$$

$$\dot{z}_1 = m_1$$

$$\dot{\xi}_1 = z_1$$

...

de esta manera se consiguen  $\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_7, \xi_8$

donde

$$\zeta^T \zeta = \zeta_1 \zeta_1 + \zeta_2 \zeta_2 + \zeta_3 \zeta_3 + \zeta_4 \zeta_4 + \zeta_7 \zeta_7 + \zeta_8 \zeta_8$$

$$e_1 = \phi_1 \zeta_1 + \phi_2 \zeta_2 + \phi_3 \zeta_3 + \phi_4 \zeta_4 + \phi_7 \zeta_7 + \phi_8 \zeta_8$$

ahora utilizando el método del error aumentado para obtener los parámetros, se obtiene, para el caso de  $\hat{\Theta}_1$ :

$$\dot{\phi}_1 = -\dot{\hat{\Theta}}_1 = \frac{-e_1 \zeta_1}{1 + \zeta^T \zeta}$$

procedimiento similar es utilizado para determinar los otros parámetros que se necesitan.

Para realizar las simulaciones se utilizan los valores del ejemplo II del Capítulo II.

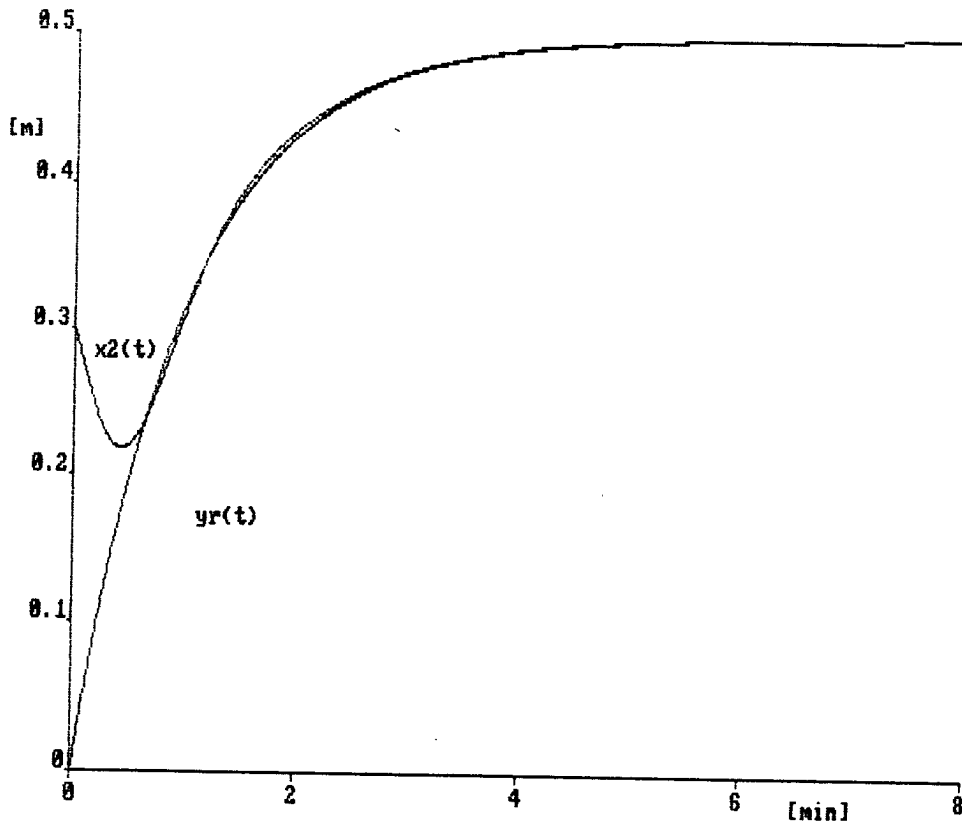


Gráfico 25. Respuesta del nivel del tanque dos para seguimiento de un sistema de primer orden, usando control adaptativo dinámico por asignación de polos.

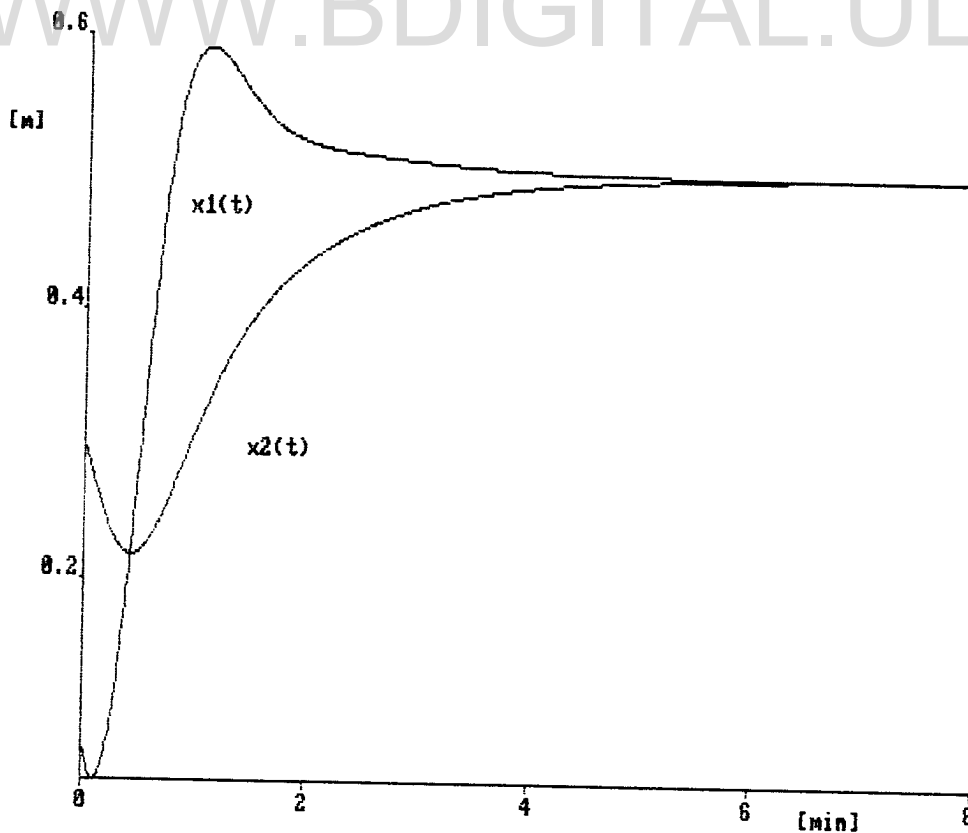


Gráfico 26. Variación del nivel de los tanques uno y dos.

Licencia Creative Commons.

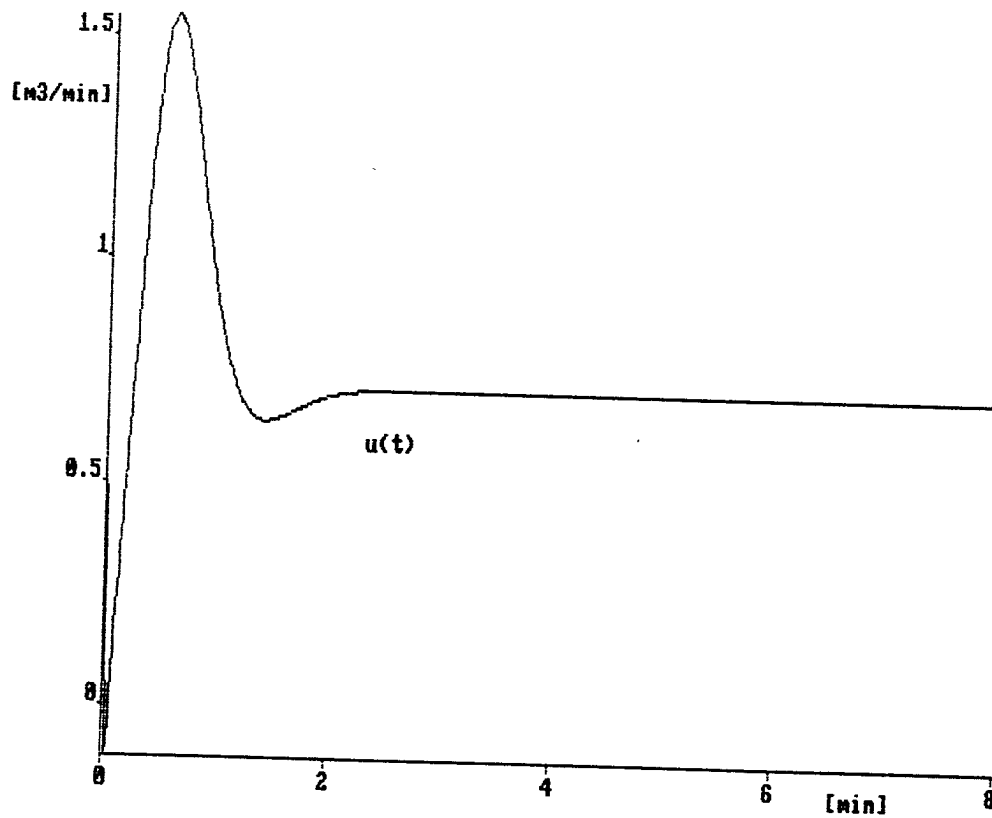


Gráfico 27. Flujo de entrada al tanque uno.

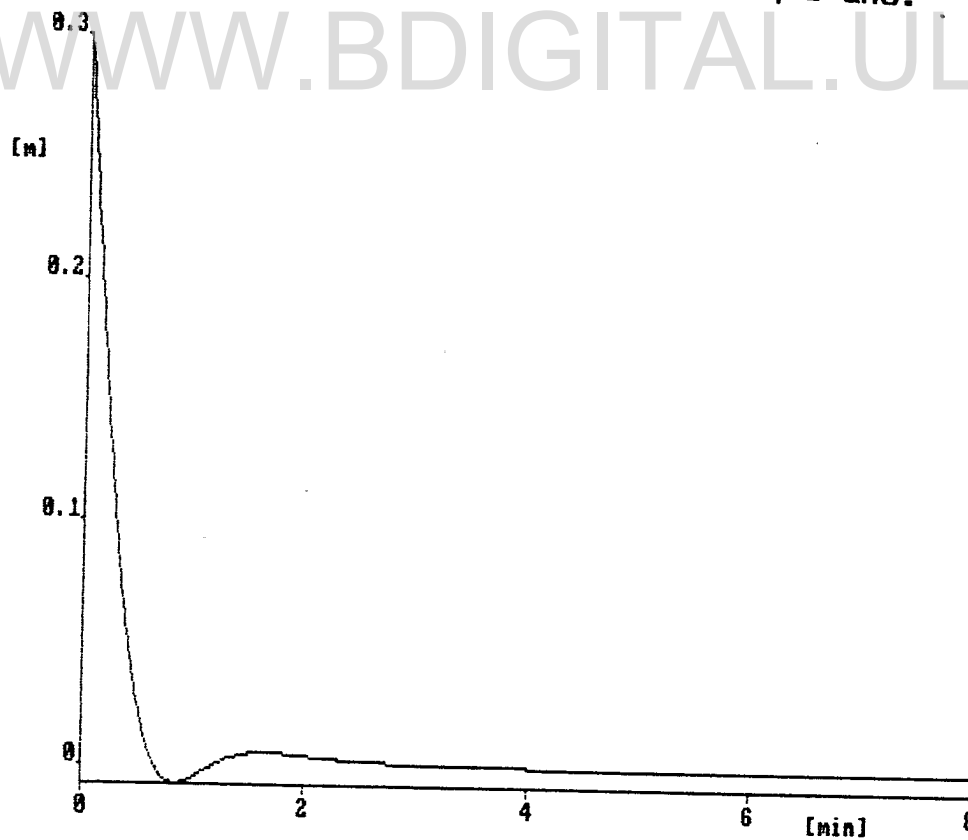


Gráfico 28. Error de seguimiento.

Licencia Creative Commons:

101

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

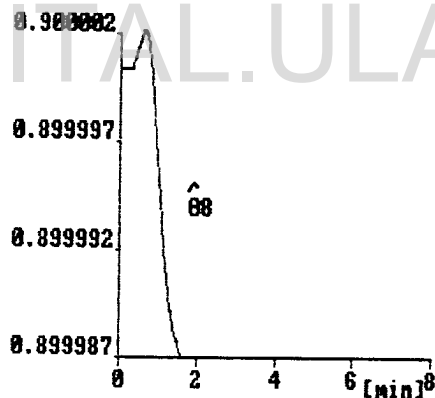
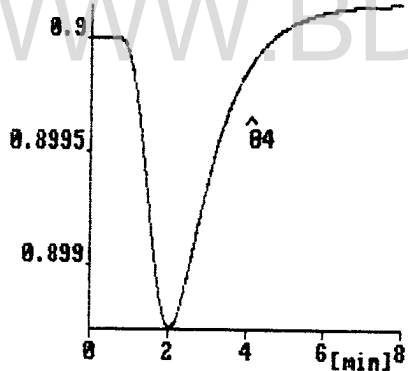
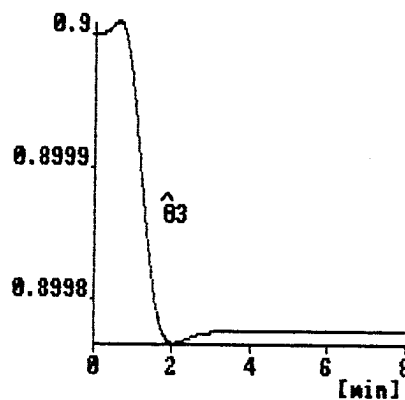
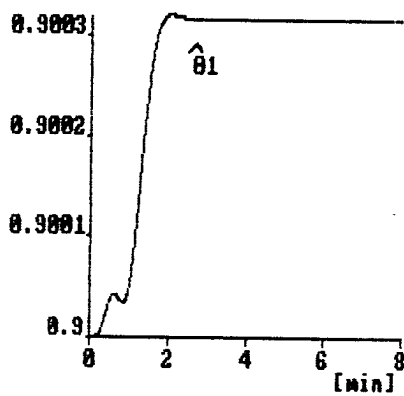


Gráfico 29. Trayectoria de los parámetros estimados.

### 3. CONTROL ADAPTATIVO DINAMICO DE SISTEMAS LINEALIZABLES MEDIANTE MODO DESLIZANTE PARA SEGUIMIENTO DE SEÑALES DE REFERENCIA

#### 3.1 GENERALIDADES SOBRE SISTEMAS POR ESTRUCTURA VARIABLE MEDIANTE MODO DESLIZANTE.

A diferencia del método utilizado en la sección anterior, en los sistemas por estructura variable, el control puede cambiar su estructura, o lo que es lo mismo, conmutar en algún instante de uno a otro miembro de un conjunto de funciones continuas del estado. El problema radica en seleccionar los parámetros de cada estructura, y definir la lógica de conmutación, esto posibilita combinar de manera útil la propiedades de la estructura. [4]

Las propiedades del nuevo sistema se obtienen a partir de la "trayectoria deseada" que es combinación de las trayectorias de las diferentes estructuras, un aspecto interesante de los sistemas por estructura variable, es la posibilidad de obtener trayectorias no inherentes a alguna de las estructuras del control.

Las trayectorias de fase son dirigidas hacia el plano  $s=0$ , y una vez sobre éste, el estado debe mantenerse en ella; el movimiento sobre él es llamado "modo deslizante" [4], y se asegura en la superficie una situación invariante, lo cual garantiza que

Licencia Creative Commons:

103

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

algunos disturbios o dinámicas inciertas puedan ser toleradas por el sistema.

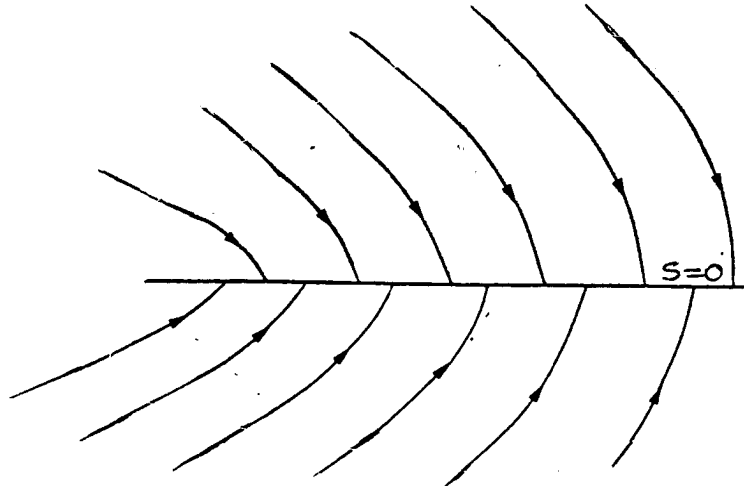


Figura 3

#### Condición Deslizante

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

A partir de la figura anterior se pueden establecer las siguientes condiciones:

$$\lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} > 0$$

$$\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} < 0$$

las cuales son suficientes para la existencia del modo deslizante.

Como se mencionó, el control consiste de un conjunto de funciones continuas de  $x$  y  $t$ , adicionalmente cada componente del control se asume estar sujeta a discontinuidades en una superficie apropiada.

$$u_i = \begin{cases} u_i^+ (x, t) & \text{si } s_i(x) > 0 \\ u_i^- (x, t) & \text{si } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (92)$$

El problema consiste en escoger las funciones  $u_i^+$ ,  $u_i^-$ , el vector  $s$  ( $s \in \mathbb{R}^m$ ) con las funciones  $s_i(x)$  como componentes.

Existe una técnica formal denominada "método del control equivalente", el cual se usa para encontrar las ecuaciones de los modos deslizantes ideales. Se hace  $\dot{s}$  igual a cero y la solución del sistema resultante es el control. Este control equivalente es sustituido en el sistema original; desde el punto de vista geométrico, significa encontrar un control continuo el cual direcciona el vector velocidad ( $\dot{s}$ ) para que se interseque con la superficie ó plano discontinuo. [4]

Adicionalmente a todo esto, en esta sección se trabajará con el diseño de estrategias de control dinámico por modo deslizante, que presentan la ventaja de exhibir un reducido "chattering" en el controlador. [13]

### 3.2 LINEALIZACION POR MODO DESLIZANTE DINAMICO

Consideremos un sistema como (76), sea  $\mu$  una cantidad estrictamente positiva, y sea  $s$  una superficie variante en el

Licencia Creative Commons:

105

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

tiempo, entonces la función signo de  $s$ , denotada por  $\text{sign}(s)$ , se define como

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0. \end{cases} \quad (93)$$

**PROPOSICION :**

El controlador dinámico :

$$a(x, \theta) u^{(n-r)} = -b_n(x, \theta, u^{(n-r-1)}) + \gamma_R^{(n)} - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i [b_i(x, \theta) - \gamma_R^{(i)}]$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

$$- \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j \left[ \left[ b_j(x, \theta, u^{(j-r-1)}) + a(x, \theta) u^{(j-r)} - \gamma_R^{(j)} \right] \right.$$

$$\left. - \mu \text{sgn} \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i [b_{i-1}(x, \theta) - \gamma_R^{(i-1)}] + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left[ b_j(x, \theta, u^{(j-r-2)}) \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + a(x, \theta) u^{(j-r-1)} - \gamma_R^{(j-1)} \right] \right\}; \quad \alpha_n = 1 \quad (94)$$

debe manejar la salida del sistema (76) en tiempo finito, para satisfacer la dinámica linealizada a lazo cerrado de la forma:

Licencia Creative Commons:

106

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$e^{(n-1)} + \alpha_{n-1} e^{(n-2)} + \dots + \alpha_1 e = 0 \quad (95)$$

PRUEBA:

$$\text{Se define } s = e^{(n-1)} + \alpha_{n-1} e^{(n-2)} + \dots + \alpha_1 e^0. \quad (95)$$

La derivada de esta cantidad respecto al tiempo es

$$\dot{s} = e^n + \alpha_{n-1} e^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 e^1. \quad (96)$$

reemplazando en (96), (84) y (85)

$$\dot{s} = (y^n - y_R^n) + \alpha_{n-1} (y^{n-1} - y_R^{n-1}) + \dots + \alpha_1 (y^1 - y_R^1) \quad (97)$$

se sustituye en esta última (77), (78) y finalmente el controlador propuesto por (94), resultando

$$\dot{s} = -\mu \text{sign}(s) \quad (98)$$

Sea  $s(0) > 0$  el valor de  $s$  para  $t = 0$ , y sea  $T$  el tiempo requerido para alcanzar la superficie  $s = 0$ , integrando (98) se obtiene:

$$0 - s(0) = -\mu (T - 0)$$

$$T \leq \frac{s(0)}{\mu}$$

Licencia Creative Commons:

107

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Idéntico resultado se obtiene tomando  $S(t=0) < 0$ . Con este valor de  $T$ , se asegura alcanzar la superficie  $s = 0$  en un tiempo finito, y mantenerse en ella en modo deslizante [4],[12]. Una vez sobre la superficie deslizante el error de seguimiento debe tender exponencialmente a cero.

En conclusión en cada una de las regiones  $s > 0$  y  $s < 0$  una estructura diferente es presentada, y la ecuación diferencial del control será resuelta de forma independiente en base el conocimiento del error.

### 3.3 ESQUEMA DE REGULACION ADAPTATIVA

En el controlador (94)  $\theta$  es conocido; ahora este controlador puede ser calculado a partir de los estimados de los parámetros los cuales se denotarán por  $\hat{\theta}$ , de esto surge la necesidad de implementar un esquema de regulación adaptativa.

Sea  $\dot{s}$  dado por la expresión (97), y reemplazando en ella (77), (78) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{s} = & \left[ b_n(x, \theta, u, u^1, \dots, u^{n-r-1}) + a(x, \theta) u^{n-r} - y_R^n \right] \\ & + \alpha_{n-1} \left[ b_{n-1}(x, \theta, u, u^1, \dots, u^{n-r-2}) + a(x, \theta) u^{n-r-1} - y_R^{n-1} \right] \end{aligned}$$

$$+ \dots + \alpha_1 \left[ b_1(x, \theta, u) - y_R^1 \right] \quad (100)$$

escribiéndola en forma compacta:

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i \left[ b_i(x, \theta) - y_R^i \right] + \sum_{j=r}^n \alpha_j \left[ b_j(x, \theta, u^{(j-r-1)}) + a(x, \theta) u^{(j-r)} - y_R^j \right] \quad (101)$$

si ahora se reemplaza  $\theta$  por su estimado  $\hat{\theta}$ , se obtiene el siguiente controlador estimado

$$a(x, \hat{\theta}) u^{(n-r)} = -b_n(x, \hat{\theta}, u^{(n-r-1)}) + y_R^{(n)} - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i \left[ b_i(x, \hat{\theta}) - y_R^{(i)} \right]$$

$$- \sum_{j=r}^{n-1} \alpha_j \left[ b_j(x, \hat{\theta}, u^{(j-r-1)}) + a(x, \hat{\theta}) u^{(j-r)} - y_R^{(j)} \right]$$

$$- \mu \operatorname{sgn} \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i \left[ b_{i-1}(x, \hat{\theta}) - y_R^{(i-1)} \right] + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left[ b_{j-1}(x, \hat{\theta}, u^{(j-r-2)}) \right. \right.$$

$$\left. \left. + a(x, \hat{\theta}) u^{(j-r-1)} - y_R^{(j-1)} \right] \right\} \quad (102)$$

donde  $\hat{s}$  viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{s}} = & \sum_{i=1}^r \alpha_i \left[ b_{i-1}(x, \hat{\theta}) - \gamma_{\mathbf{R}}^{(i-1)} \right] + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left[ b_{j-1}(x, \hat{\theta}, u^{(j-r-2)}) \right. \\ & \left. + a(x, \hat{\theta}) u^{(j-r-1)} - \gamma_{\mathbf{R}}^{(j-1)} \right] \quad (103) \end{aligned}$$

usando (102) en (101) se obtiene

$$\dot{\hat{s}} = -\mu \operatorname{sgn}(\hat{s}) + b_n(x, \theta, u^{(n-r-1)}) - b_n(x, \hat{\theta}, u^{(n-r-1)})$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i \left[ b_i(x, \theta) - b_i(x, \hat{\theta}) \right] + \sum_{j=r}^{n-1} \alpha_j \left\{ b_j(x, \theta, u^{(j-r-1)}) - \right. \\ & \left. - b_j(x, \hat{\theta}, u^{(j-r-1)}) + \left[ a(x, \theta) - a(x, \hat{\theta}) \right] u^{(j-r)} \right\} + \\ & + \left[ a(x, \theta) - a(x, \hat{\theta}) \right] u^{(n-r)} \quad (104) \end{aligned}$$

donde  $u^{(n-r)}$  de (104) es el controlador estimado dado por (102)

La expresión (104) puede ser reescrita como una función

lineal del error de estimación de los parámetros  $\Phi = \Theta - \hat{\Theta}$ , entonces

$$\begin{aligned}\dot{\hat{s}} &= -\mu \operatorname{sgn}(\hat{s}) + (\Theta - \hat{\Theta})^T W(x, \hat{\Theta}, u^{(n-r-1)}) \\ &= -\mu \operatorname{sgn}(\hat{s}) + \Phi^T W(x, \hat{\Theta}, u^{(n-r-1)})\end{aligned}\quad (105)$$

Resultados similares se pueden ver en [12], para el caso de estabilización. Como en el caso de control dinámico por asignación de polos en  $W$  se reemplaza  $\hat{\Theta}$  por  $\hat{\Theta}$ .

El error de estimación de los superficies  $s - \hat{s}$ , viene dado por

$$\begin{aligned}s - \hat{s} &= \sum_{i=1}^r \alpha_j \left[ b_{i-1}(x, \theta) - b_{i-1}(x, \hat{\theta}) \right] + \\ &\sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left\{ b_{j-1}(x, \theta, u^{(j-r-2)}) - b_{j-1}(x, \hat{\theta}, u^{(j-r-2)}) \right. \\ &\left. + \left[ a(x, \theta) - a(x, \hat{\theta}) \right] u^{(j-r-1)} \right\}\end{aligned}\quad (106)$$

$$= (\Theta - \hat{\Theta}) W_{\theta}(x, u^{(n-r-1)}) = \Phi^T W_{\theta}(x, u^{(n-r-1)})$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

donde  $W(x, u^{(n-r-1)})$  es el vector regresor de la superficie de conmutación la cual no depende de los parámetros estimados.

### 3.4 DETERMINACION DE LA LEY DE ACTUALIZACION DE LOS PARAMETROS

Sea  $K$  una matriz definida positiva, de enteros  $K_{ii}$ ; consideremos la función candidata de Liapunov [12]:

$$V(s, \phi) = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} \phi^T K \phi \quad (107)$$

derivando respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{V}(s, \phi) &= s \dot{s} + \phi^T K \dot{\phi} \\ &= -\mu s \operatorname{sgn}(\hat{s}) + \phi^T \left[ s W(x, \hat{\theta}, u^{(n-r-1)}) + K \dot{\phi} \right] \end{aligned}$$

reemplazando  $s = \hat{s} + \phi^T W s$ , se obtiene

$$\dot{V}(s, \phi) = -\mu \operatorname{sign}(\hat{s}) (\hat{s} + \phi^T W s) + \phi^T (s W + K \dot{\phi})$$

$$\dot{V}(s, \phi) = -\mu \hat{s} \operatorname{sign}(\hat{s}) + \phi^T (-\mu W s \operatorname{sign}(\hat{s}) + s W + K \dot{\phi})$$

escogiendo la variación de los parámetros de acuerdo a la ley

$$\dot{\phi} = -\hat{\Theta} = K^{-1}(\mu W s \text{sign}(\hat{s}) - s W) \quad (109)$$

se obtiene

$$\dot{V}(s, \phi) = -\mu \hat{s} \text{sign}(\hat{s})$$

definida negativa para todo  $\hat{s}$ , ya que

$$\hat{s} > 0, \text{sign}(\hat{s}) > 0 \Rightarrow \dot{V}(s, \phi) < 0$$

$$\hat{s} < 0, \text{sign}(\hat{s}) < 0 \Rightarrow \dot{V}(s, \phi) < 0$$

no existen problemas para la estabilidad dada por Liapunov. En las regiones acotadas por  $s = 0$  y  $\hat{s} = 0$ , ambas cantidades tienen cantidades diferentes; ahora de (105) si  $\mu$  es mayor que el supremo de  $\phi^T W$ , el modo deslizante para  $s$  existe, para las trayectorias de  $s$ , sobre la superficie  $\hat{s} = 0$ . Los valores de  $s$  no convergeran a cero pero estarán alrededor de la superficie  $\hat{s} = 0$ , y (95) será parcialmente cumplida.

S será igual a 0, mientras  $\hat{s}$  es igual a 0, si el error de los parámetros  $\phi$  converge a cero, esto se corresponde a lo que anteriormente denominamos condición persistencia de excitación [11], [12], [20], [21].

## TEOREMA

sea  $\mu$  tal que

$$\mu > \sup | \phi^T W(x, \hat{\theta}, u^{[n-r-1]}) | \quad (110)$$

la ley de control dada por (94) "obliga" a las trayectorias a seguir en modo deslizante sobre  $\hat{s} = 0$ , el cual "estabiliza" error de seguimiento para (76) con una dinámica aproximadamente lineal dada por

$$e^{(n-1)} + \alpha_{n-1} e^{(n-2)} + \dots + \alpha_1 e^0 = \phi^T W s \quad (111)$$

la condición (110) posiblemente no pueda ser verificada "a priori" debido a su dependencia con los estados de (76) y los estados del controlador dinámico (94); pero se puede escoger:

$$\mu = k | \phi^T W(x, \hat{\theta}, u^{[n-r-1]}) | \quad \text{con } k > 1$$

esto garantiza la existencia del modo deslizante sobre  $\hat{s} = 0$ .

Se muestran a continuación ejemplos de aplicación para comprobar los planteamientos de la sección.

## EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Para comprobar las bondades del controlador adaptativo dinámico por modo deslizante revisado anteriormente, se harán 3 ejemplos de simulación. A continuación se muestran los procedimientos seguidos.

### VII) MOTOR DC CONTROLADO POR CAMPO

El modelo es:

$$\dot{x}_1 = -\theta_{11}x_1 - \theta_{12}x_2u + \theta_{13}V_a$$

$$\dot{x}_2 = -\theta_{21}x_1 - \theta_{22}x_2u$$

$$y = h(x) = x_2$$

Donde las variables de estado  $x_1$ ,  $x_2$  así como  $u$  fueron definidos en el ejemplo I del Capítulo II.

Los cálculos de las derivadas de la salida fueron hechas en el ejemplo III del Capítulo III. El controlador estimado viene dado por:

Licencia Creative Commons:

115

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{51} x_1 \dot{u} = & -\hat{\theta}_9 \hat{\theta}_9 x_2 + \hat{\theta}_9 \hat{\theta}_{51} x_1 u + u \hat{\theta}_{51} \hat{\theta}_9 x_1 + \hat{\theta}_4 \hat{\theta}_5 x_2 u^2 \\ & - \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_5 v_a u + \dot{Y}_R - \alpha_1 \left[ -\hat{\theta}_9 x_2 + \hat{\theta}_5 x_1 u - \dot{Y}_R \right] \\ & - \mu \operatorname{sign} \left\{ \alpha_1 \left[ x_2 - Y_R \right] + \alpha_2 \left[ -\hat{\theta}_9 x_2 + \hat{\theta}_5 u - \dot{Y}_R \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = 1$$

Los componentes del vector regresor son obtenidos a partir de:

$$\begin{aligned} \dot{s} = & -\mu \operatorname{sign}(\hat{s}) + \phi_{15} x_2 - \phi_{17} x_1 u - \phi_{10} x_1 u - \phi_{19} x_2 u^2 \\ & \phi_{14} v_a u + \alpha_1 \left[ -\phi_9 x_2 + \phi_5 x_1 u \right] + \frac{x_1 \phi_5}{x_1 \hat{\theta}_5} \left[ -\hat{\theta}_{15} x_2 + \right. \\ & \hat{\theta}_{17} x_1 u + x_1 u \hat{\theta}_{10} + \hat{\theta}_{19} x_2 u^2 - \hat{\theta}_{14} v_a u + \dot{Y}_R - \alpha_1 \left[ -\hat{\theta}_9 x_2 \right. \\ & \left. \left. + \hat{\theta}_5 x_1 u - \dot{Y}_R \right] - \mu \operatorname{sign} \left\{ \alpha_1 \left[ x_2 - Y_R \right] + \left[ -\hat{\theta}_9 x_2 + \hat{\theta}_5 x_1 u \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \dot{Y}_R \right] \right\} \end{aligned}$$

Siendo éstos:

$$W_9 = -x_2 \alpha_1$$

$$W_5 = \alpha_1 x_1 u + \frac{1}{\hat{\theta}_5 x} \left[ -\hat{\theta}_9 \hat{\theta}_9 x_2 + \hat{\theta}_9 \hat{\theta}_5 x u + u \hat{\theta}_5 \hat{\theta}_5 x_1 + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \hat{\theta}_4 \hat{\theta}_5 x_2 u^2 - \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_5 v_a u + \dot{Y}_R - \alpha_1 \left[ -\hat{\theta}_9 x_2 + \hat{\theta}_5 x u - \dot{Y}_R \right] - \right.$$

$$\left. \dots - \mu \operatorname{sign} \left\{ \alpha_1 \left[ x_2 - Y_R \right] + \alpha_2 \left[ -\hat{\theta}_9 x_2 + \hat{\theta}_5 u - \dot{Y}_R \right] \right\} \right]$$

$$W_{10} = -x_1 u$$

$$W_{14} = v_a u$$

$$W_{15} = x_2$$

$$W_{17} = -x_1 u$$

$$W_{19} = -x_2 u^2$$

La superficie estimada viene dada por la siguiente expresión:

$$\hat{s} = \sum_{i=1}^r \alpha_i b_{i-1}(x, \hat{\theta}) + \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \left[ b_{j-1}(x, \hat{\theta}, u^{[j-r-2]}) + a(x, \hat{\theta}, u^{[j-r-1]}) \right]$$

Licencia Creative Commons:

117

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

reemplazando los valores de las derivadas de la salida en ella, se obtiene:

$$\hat{s} = \alpha_1 \begin{bmatrix} x_2 & -Y_R \end{bmatrix} + 1 \left[ -\hat{\theta}_3 x_2 + \hat{\theta}_5 x_1 u - \dot{Y}_R \right]$$

$$\hat{s} = \alpha_1 e + \dot{e} = \alpha_1 \begin{bmatrix} Y & -Y_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Y} & -\dot{Y}_R \end{bmatrix}$$

Donde la superficie real esta dada por:

$$s - \hat{s} = -\phi_3 x_2 + \phi_5 x_1 u$$

$$s = \hat{s} - \phi_3 x_2 - \phi_5 x_1 u$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Los parámetros  $\hat{\theta}$  se pueden reemplazar por los parámetros  $\hat{\Theta}$  de manera correspondiente a los del ejemplo III en el Capítulo III. Los valores de los parámetros del modelo son los mismos del ejemplo I del Capítulo II, y la ley de actualización que se utiliza es la que viene dada por la expresión (109). A continuación se muestran las simulaciones obtenidas.

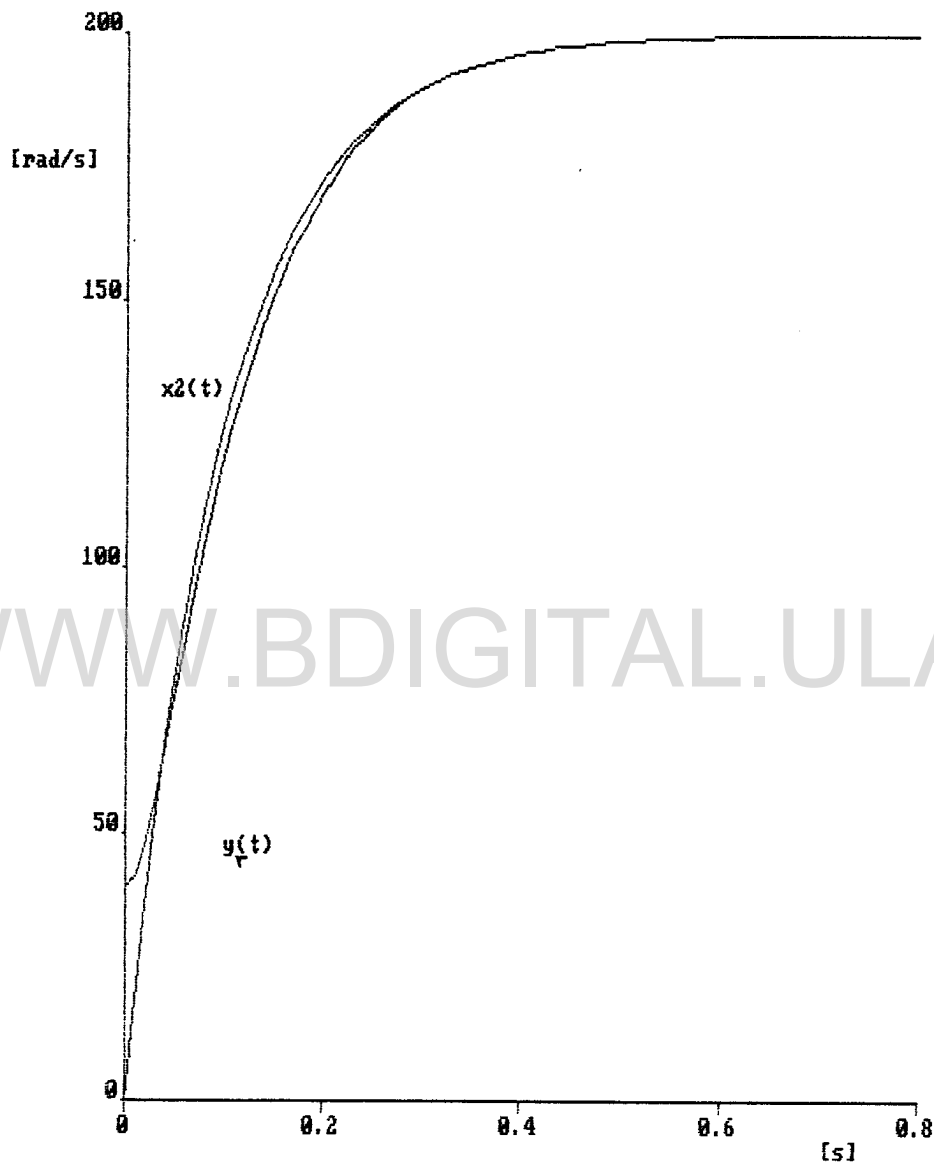


Gráfico 30. Respuesta de la velocidad angular para el seguimiento de un sistema de primer orden, usando control adaptativo dinámico por modo deslizante.

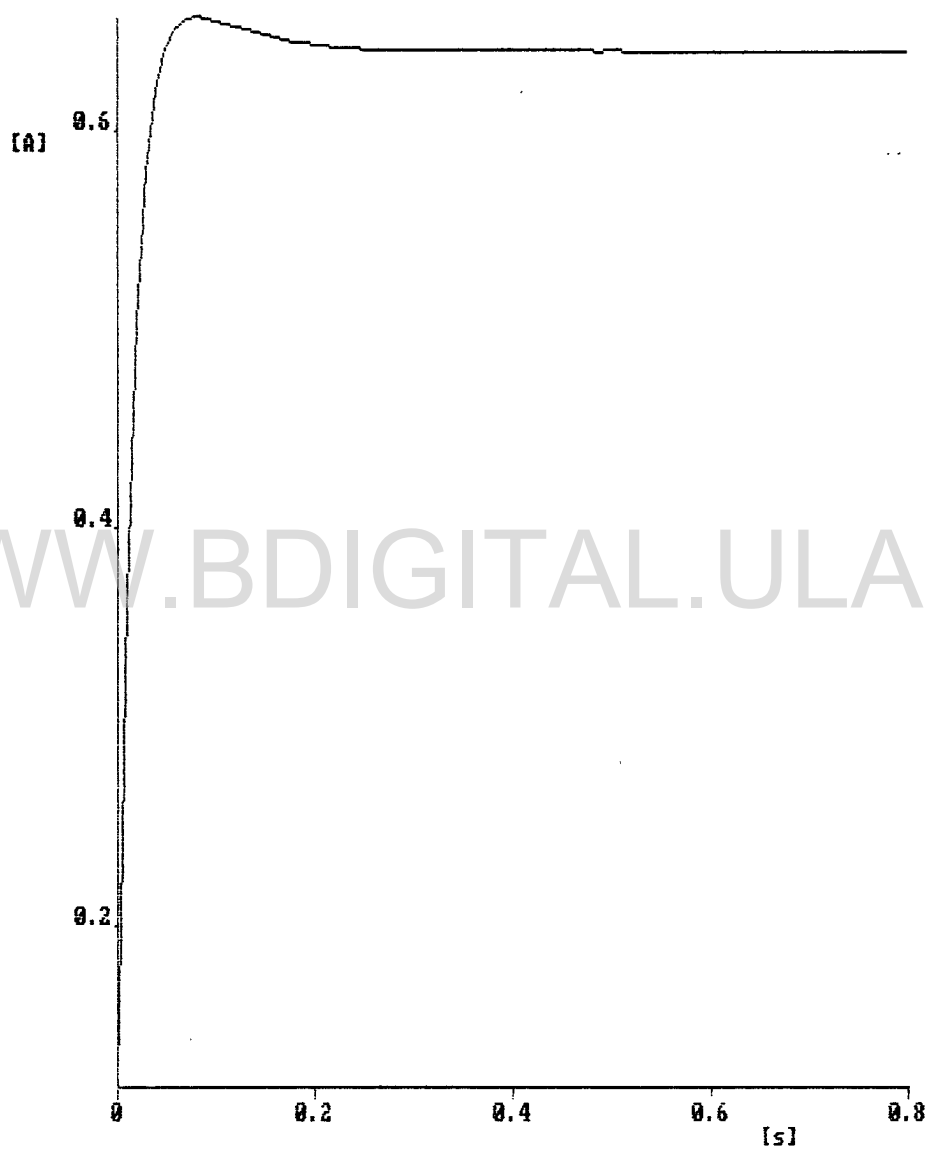


Gráfico 31. Respuesta de la corriente en el circuito de armadura.

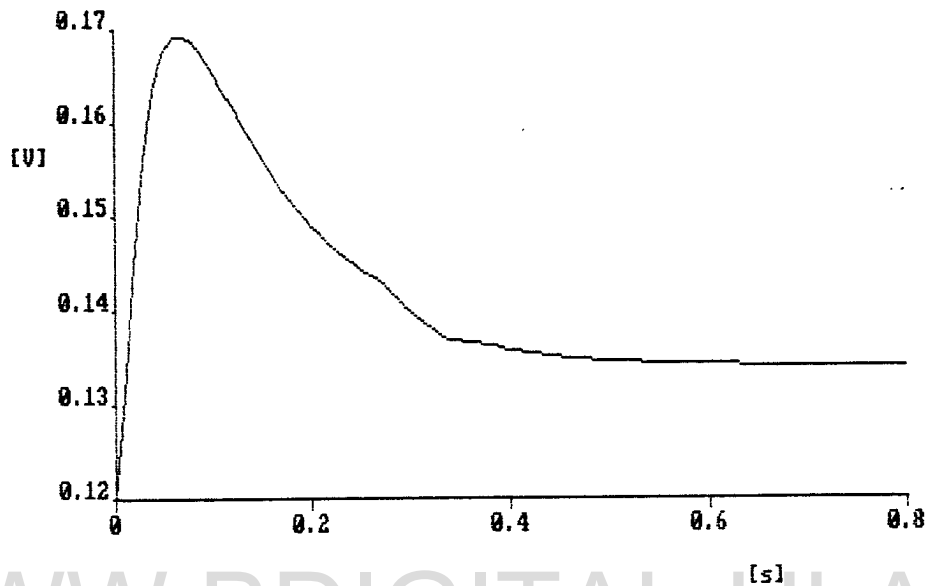


Gráfico 32. Voltaje en el devanado de campo.

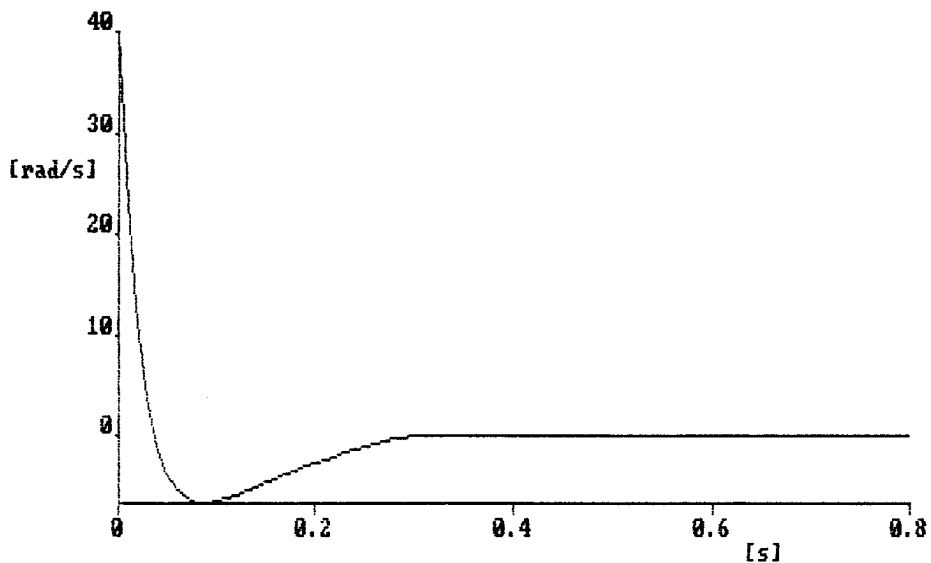


Gráfico 33. Error de seguimiento entre la salida y la referencia.

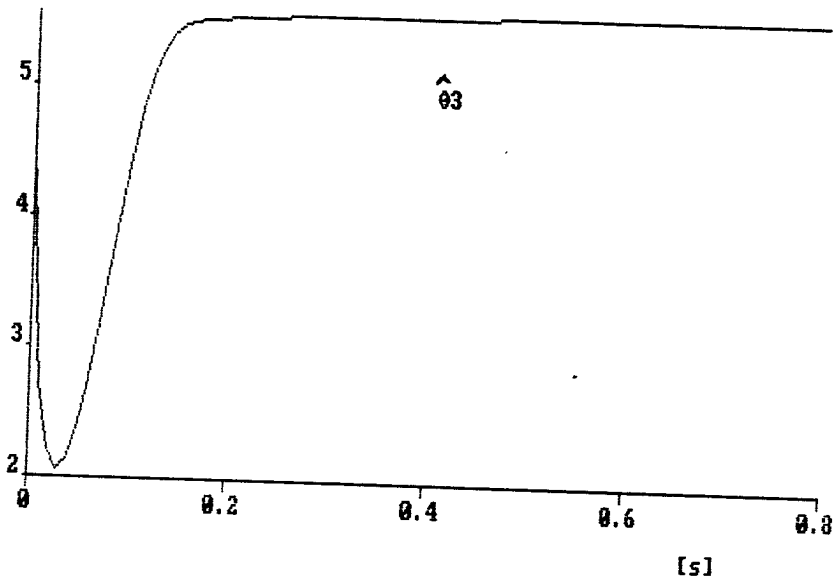


Gráfico 34. Trayectoria de los parámetros estimados.

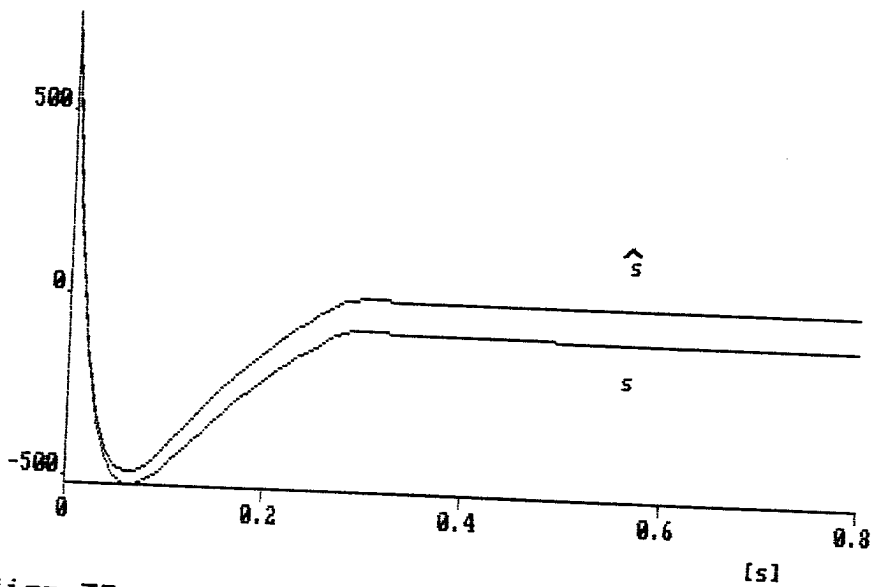


Gráfico 35. Trayectoria de la superficie real y la superficie estimada.

Licencia Creative Commons:

VII) CONTROL DE CONCENTRACION TOTAL EN UN TANQUE AGITADO CONTINUAMENTE.

El modelo viene dado por:

$$\dot{x}_1 = - \left[ 1 + \theta_1 \right] x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = \theta_1 x_1 - x_2 - \theta_2 x_2^2$$

$$y = x_1 + x_2$$

Donde las variables de estado, el control y los demás parámetros fueron especificados en el ejemplo IV del Capítulo III.

Las derivadas de la salida fueron ya obtenidas en el ejemplo IV, por lo cual se hace el reemplazo directo en el controlador mostrado:

$$\dot{u} = - \left[ x_1 + x_2 - u + \theta_2 x_2^2 - 2 \theta_1 \theta_2 x_1 x_2 + 2 \theta_2 x_2^2 + \theta_2 \theta_2 x_2^3 \right]$$

$$\dot{Y}_R - \alpha_1 \left[ - (x_1 + x_2 + \theta_2 x_2^2) + u - \dot{Y}_R \right]$$

$$- \mu \operatorname{sign} \left\{ \alpha_1 (x_1 + x_2 - Y_R) + \left[ - (x_1 + x_2 + \theta_2 x_2^2) + u - \dot{Y}_R \right] \right\}$$

Licencia Creative Commons:

123

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

La superficie real y estimada vienen dadas por:

$$\hat{s} = \alpha_1(x_1 + x_2 - Y_R) - (x_1 + x_2 + \hat{\theta}_2 x_2^2) + u - \dot{Y}_R$$

$$s - \hat{s} = \phi_2 x_2^2$$

$$s = \hat{s} + \phi_2 x_2^2 = \alpha_1(x_1 + x_2 - Y_R) - (x_1 + x_2 + \hat{\theta}_2 x_2^2) + u - \dot{Y}_R + \phi_2 x_2^2$$

Los vectores regresores son obtenidos de forma similar al ejemplo anterior y son los siguientes:

$$W_2 = 3 x_2^2 + \alpha_1 x_2^2 = x_2^2 (3 + \alpha_1)$$

$$W_4 = -2 x_1 x_2$$

$$W_5 = x_2^3$$

Los parámetros para estimar son los mismos que en el ejemplo IV del Capítulo III, y los parámetros del modelo son los mismos del ejemplo mencionado.

La ley de actualización de parámetros viene dada por (109), los resultados de la simulación se muestran a continuación.

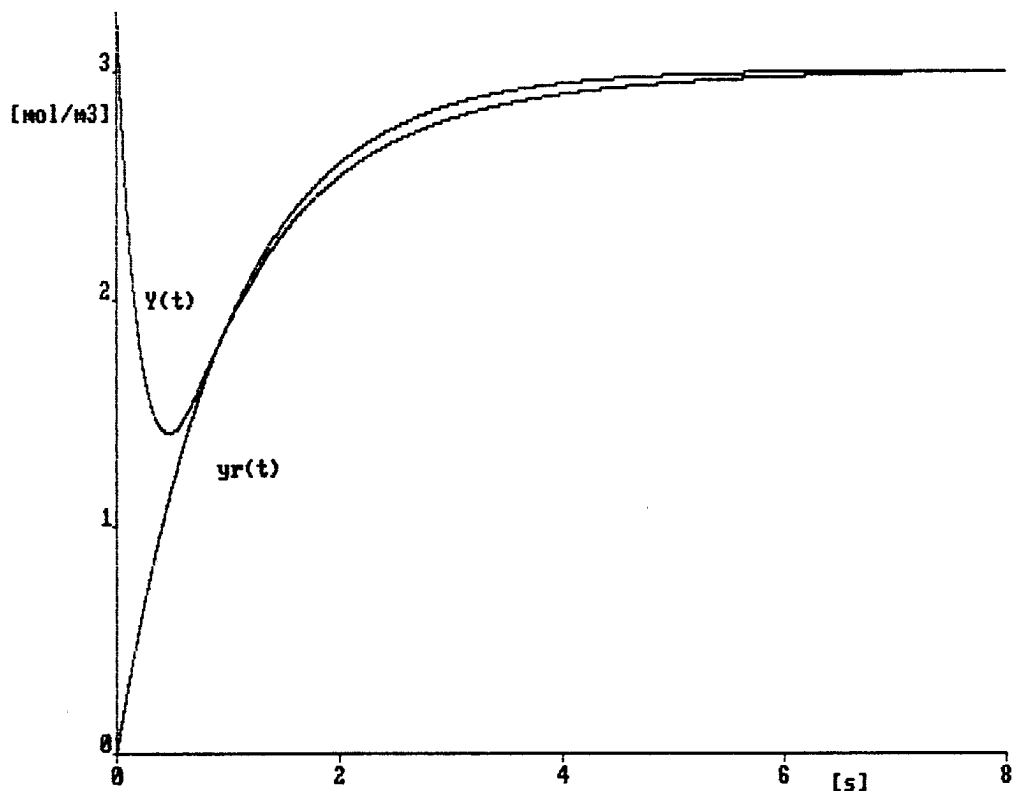


Gráfico 36. Respuesta de la concentración total (Y), para seguimiento de un sistema de primer orden, usando control adaptativo dinámico por modo deslizante.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

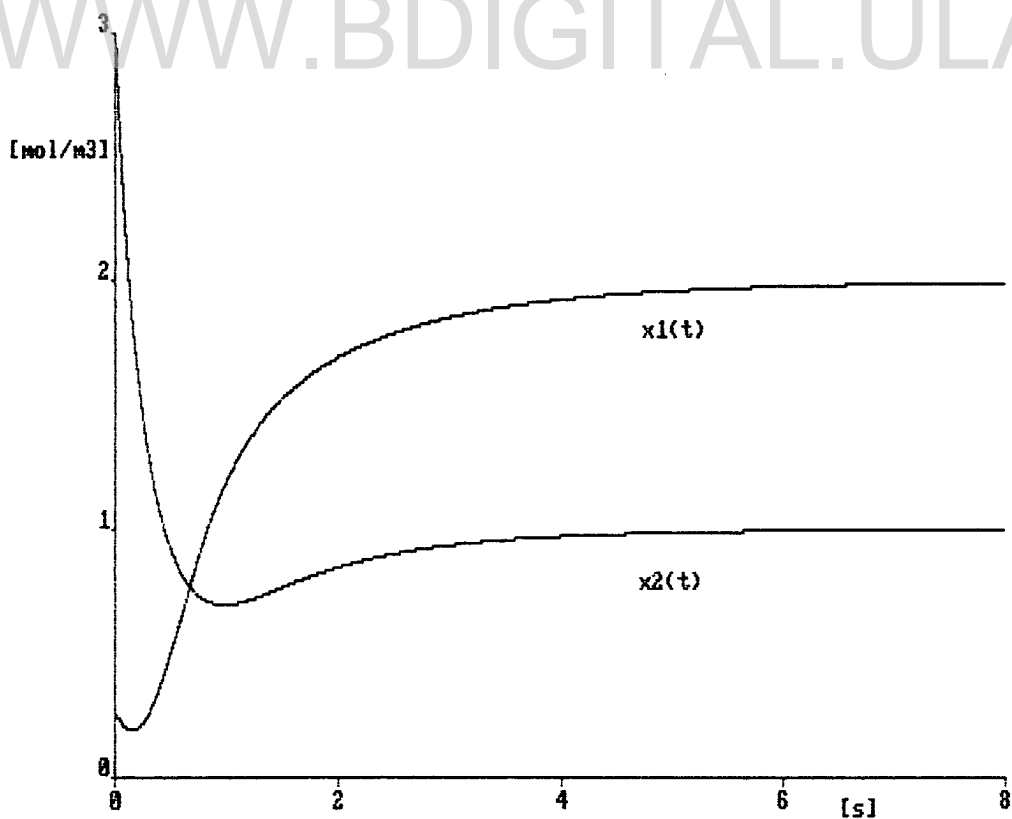


Gráfico 37. Respuesta de las variables de estado.

Licencia Creative Commons:

125

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

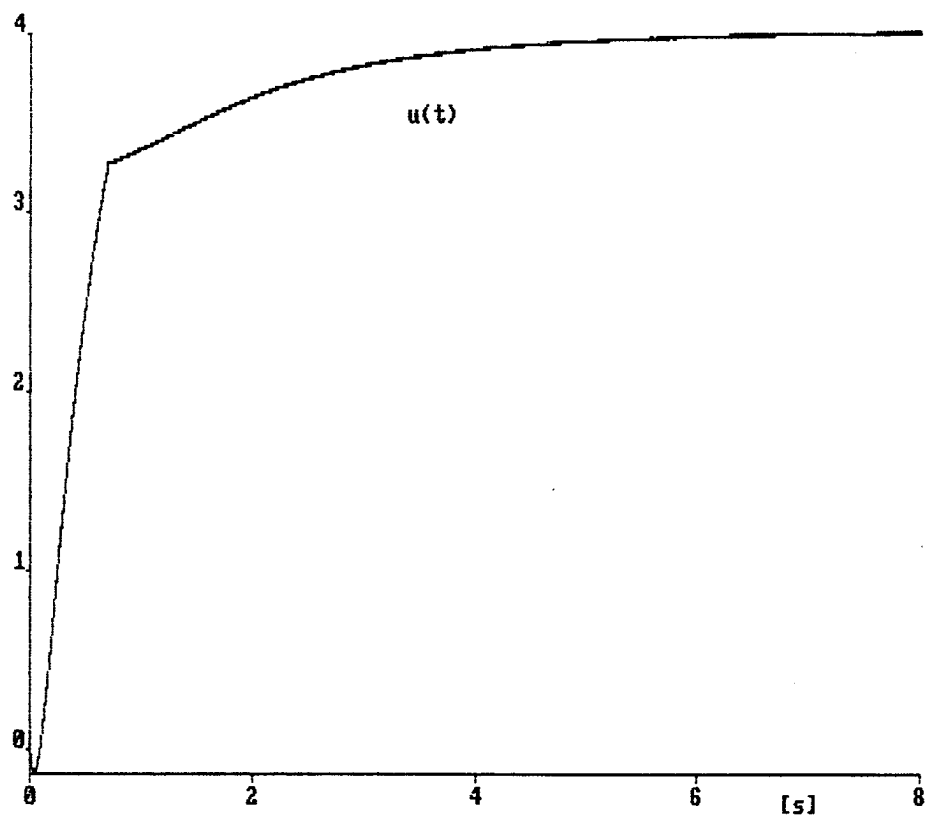


Gráfico 38. Trayectoria del controlador.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

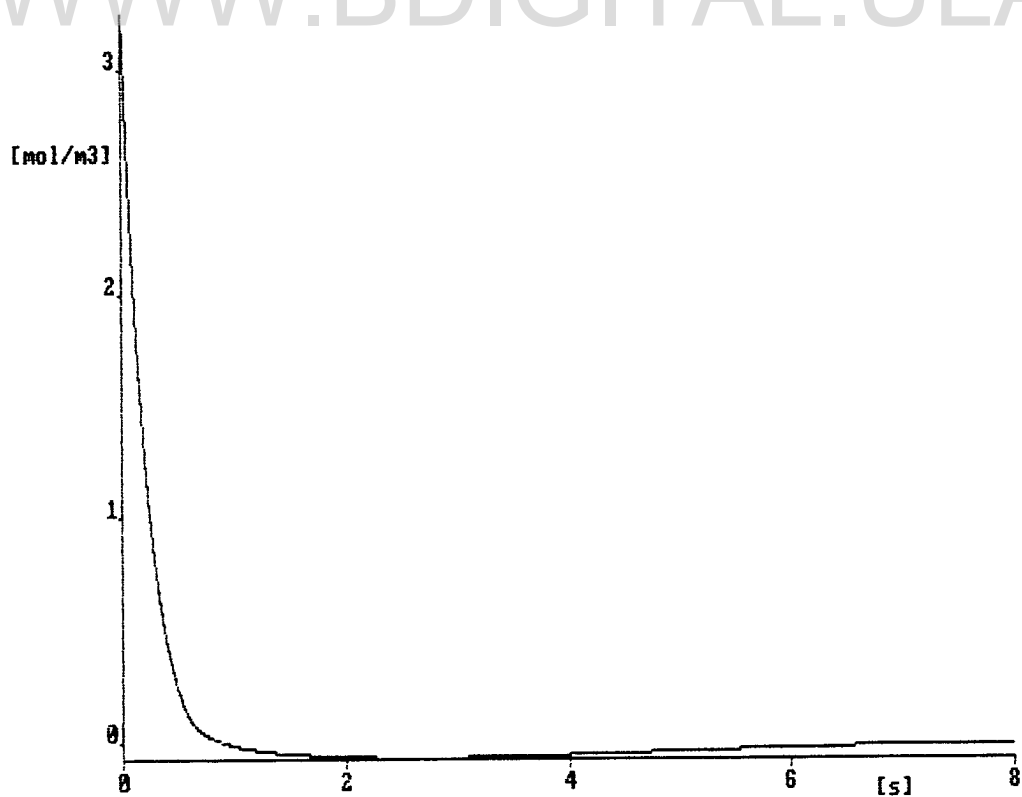


Gráfico 39. Error de seguimiento.

Licencia Creative Commons:

126

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

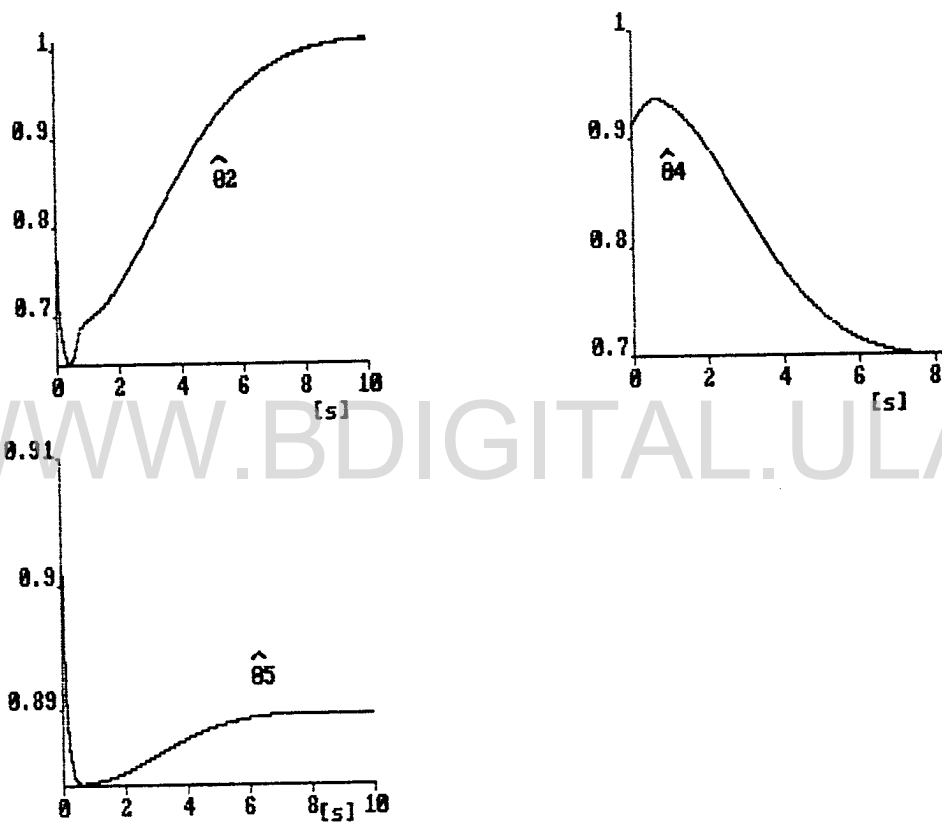


Gráfico 40. Trayectoria de los parámetros estimados.

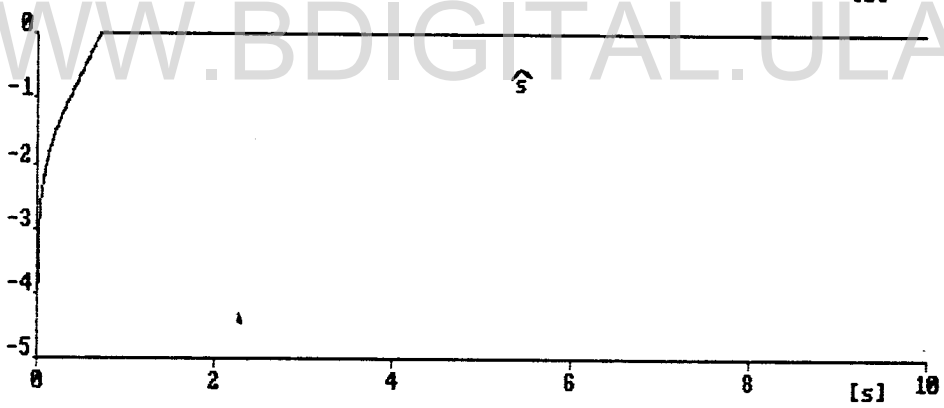
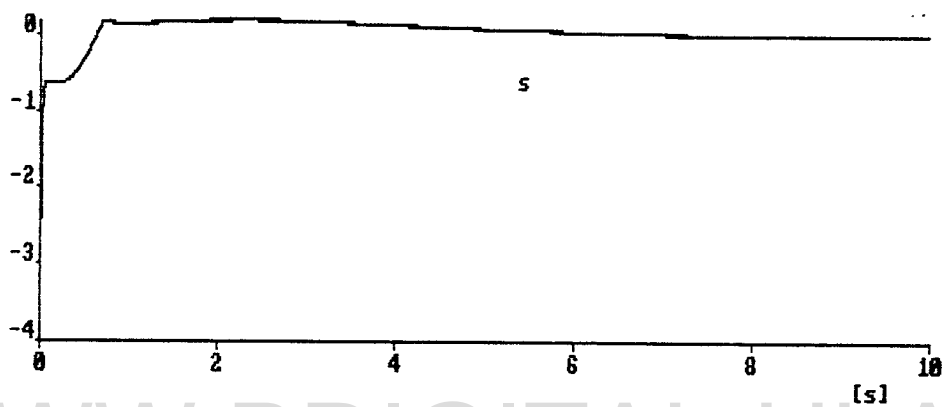


Gráfico 41. Trayectoria de la superficie real y la superficie estimada.

Licencia Creative Commons:

VII) CONTROL DE NIVEL DE LIQUIDO DE DOS TANQUES CONECTADOS EN CASCADA.

El Modelo es:

$$\dot{x}_1 = -\theta_1 \sqrt{x_1} + \theta_2 u$$

$$\dot{x}_2 = \theta_1 \sqrt{x_1} - \theta_1 \sqrt{x_2}$$

Al igual que en el caso del ejemplo V de este Capítulo, se utilizará el sistema extendido [22], y el estado agregado es :

$$\dot{x}_3 = \dot{u} = v$$

La salida viene dada por:

$$y = x_2$$

El controlador viene dado por:

$$\dot{u} = \frac{2\sqrt{x_1}}{\theta_4} \left[ -\frac{\theta_7 u}{4 x_1} + \theta_8 \left( \frac{u^2}{4 x_1 \sqrt{x_1}} + \frac{u}{4 \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}} \right) \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{\theta_6}{4} \left[ \frac{-\sqrt{x_1} x_2 + x_1 \sqrt{x_1} - x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 x_2} x_2} \right] + \ddot{y}_R - \dots$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\dots - \alpha_2 \left[ \frac{\ominus_4 u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{\ominus_9}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \ddot{y}_R \right] + \dots$$

$$\dots - \alpha_1 \left[ \ominus_1 \left[ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right] - \dot{y}_R \right] - \mu \operatorname{sign} \left\{ \alpha_1 \left[ x_2 - y_R \right] + \right.$$

$$\dots + \alpha_2 \left[ \ominus_1 \left[ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right] - \dot{y}_R \right] + \frac{\ominus_4 u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{\ominus_9}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} -$$

$\left. \dots - \dot{y}_R \right\} ]$   
 WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Se hará la determinación del vector regresor, utilizando un procedimiento similar al del ejemplo VI, obteniéndose lo siguiente:

$$W_1 = \alpha_1 \left[ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right]$$

$$W_9 = -\frac{\alpha_2}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

$$W_4 = \frac{1}{\ominus_4} \left[ -\frac{\ominus_7 u}{4 x_1} + \ominus_8 \left( \frac{u^2}{4 x_1 \sqrt{x_1}} + \frac{u}{4 \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}} \right) \right] + \dots$$

Licencia Creative Commons:

$$\dots + \frac{\Theta_6}{4} \left[ \frac{-\sqrt{x_1} x_2 + x_1 \sqrt{x_1} - x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 x_2} x_2} \right] + \ddot{y}_R - \dots$$

$$\dots - \alpha_2 \left[ \frac{\Theta_4 u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{\Theta_9}{2} \sqrt{x_1/x_2} - \ddot{y}_R \right] + \dots$$

$$\dots - \alpha_1 \left[ \Theta_1 \left[ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right] - \ddot{y}_R \right] - \mu \operatorname{sign} \left\{ \alpha_1 \left[ x_2 - y_R \right] + \right.$$

$$\left. \dots + \alpha_2 \left[ \Theta_1 \left[ \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right] - \ddot{y}_R \right] + \frac{\Theta_4 u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{\Theta_9}{2} \sqrt{x_1/x_2} - \dots - \ddot{y}_R \right\}$$

$$W_6 = \frac{-\sqrt{x_1} x_2 + x_1 \sqrt{x_1} - x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 x_2} x_2}$$

$$W_7 = \frac{u}{4x_1}$$

$$W_B = - \left[ \frac{u^2}{4x_1\sqrt{x_1}} + \frac{u}{4\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} \right]$$

La superficie estimada viene dada por:

$$\hat{s} = \alpha_1(x_2 - Y_R) + \alpha_2 \left[ \hat{\theta}_1 \left( \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right) - Y_R \right] - \dots$$

$$- \frac{\hat{\theta}_3}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \frac{\hat{\theta}_4 u}{2\sqrt{x_1}} - \dot{Y}_R$$

Y la superficie real se obtiene de:

$$s - \hat{s} = \alpha_2 \phi_1 \left( \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right) - \frac{\phi_3}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \frac{\phi_4 u}{2\sqrt{x_1}}$$

Los parámetros a estimar son los mismos que en el caso anterior de los dos tanques, así como los parámetros del modelo. La ley de adaptación de parámetros viene dada por (109), y los resultados de la simulación se muestran a continuación.

Licencia Creative Commons:

132

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

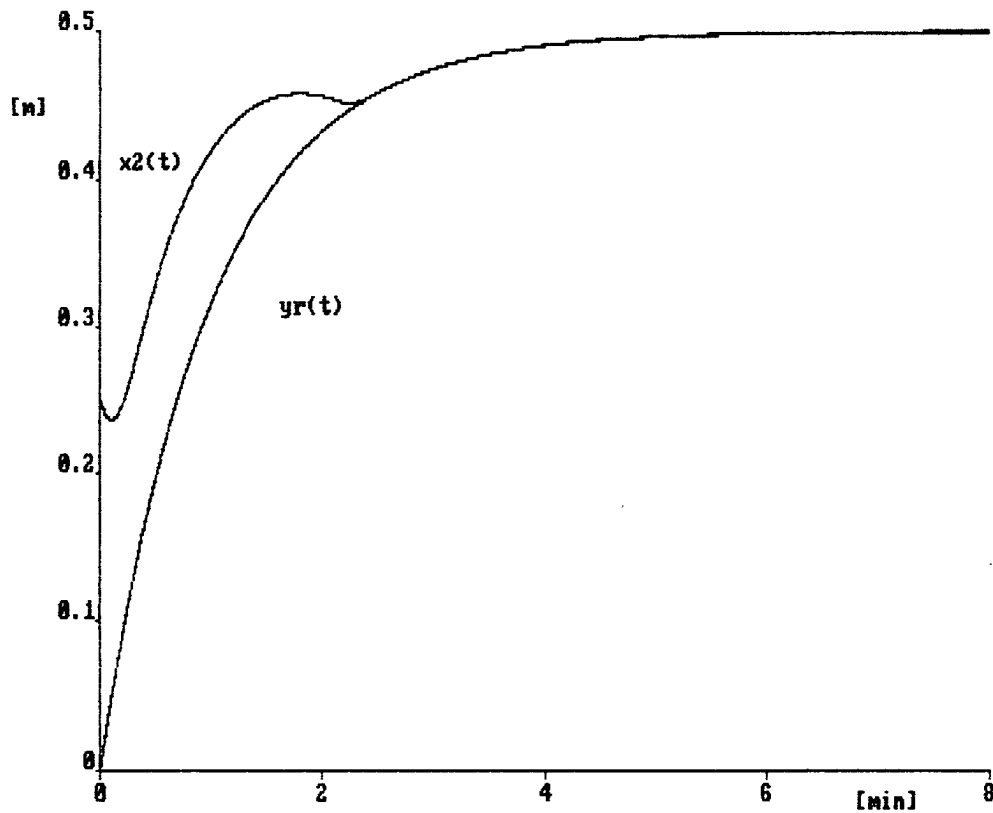


Gráfico 42. Respuesta del nivel del tanque dos para seguimiento de un sistema de primer orden, usando control adaptativo dinámico por modo deslizante.

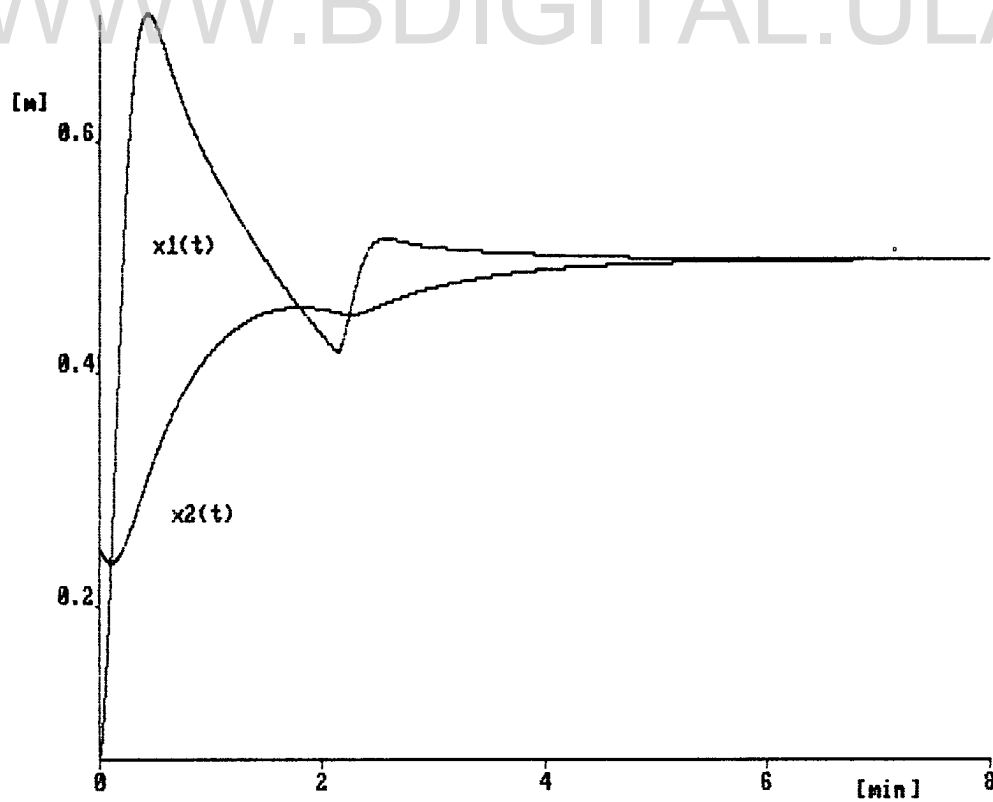


Gráfico 43. Variación del nivel de los tanques uno y dos.

Licencia Creative Commons:

133

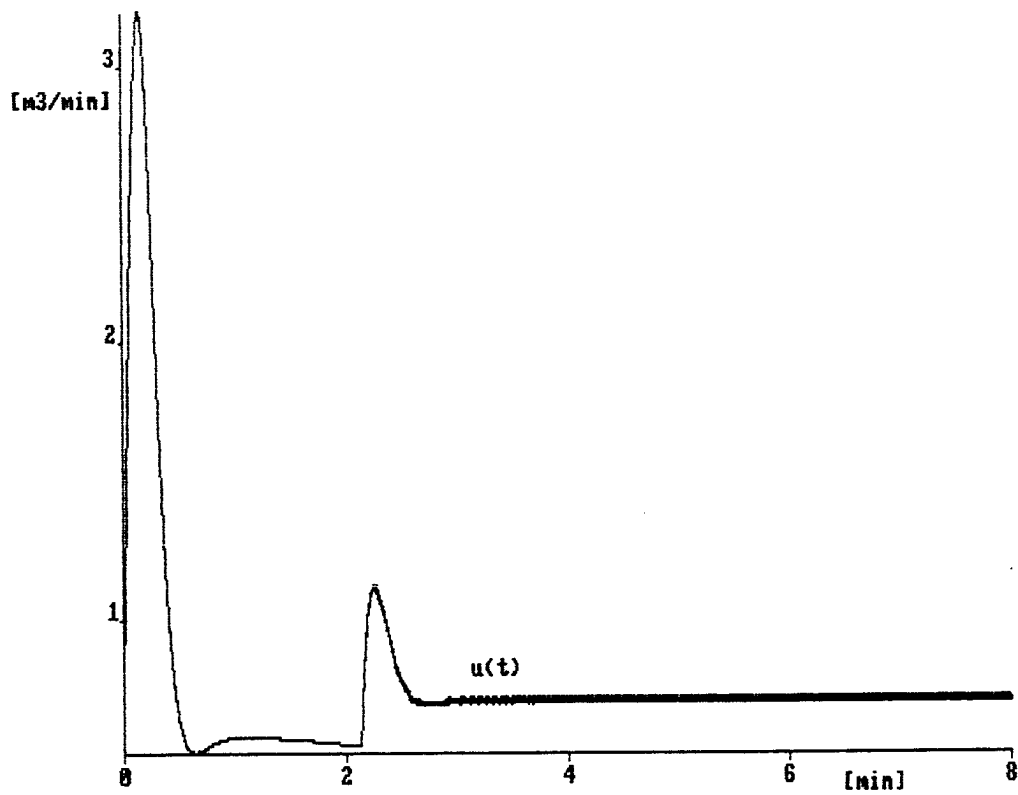


Gráfico 44. Flujo de entrada al tanque uno.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

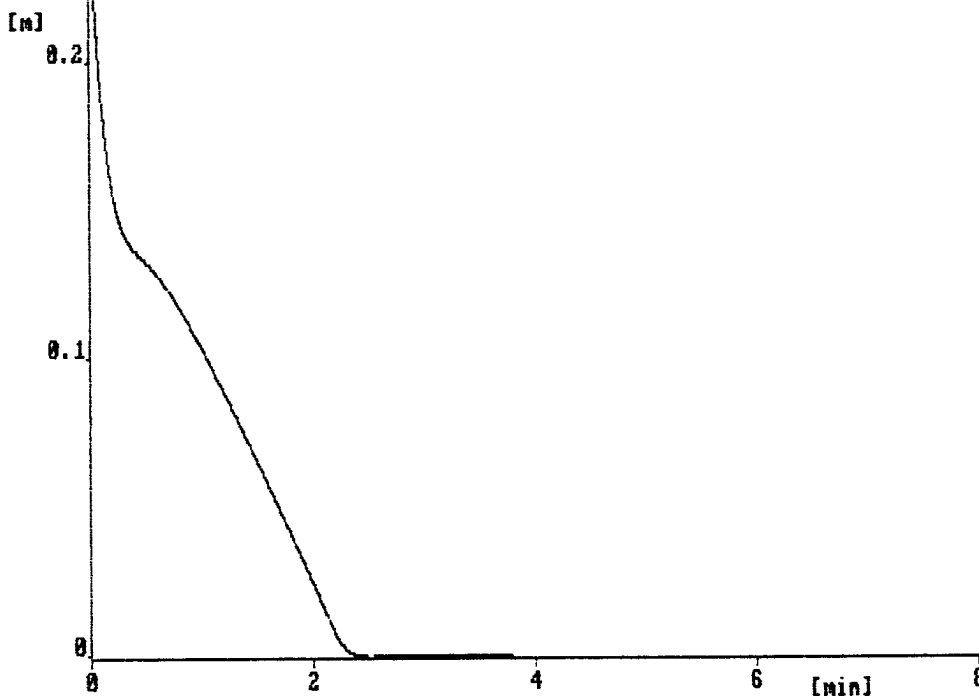


Gráfico 45. Error de seguimiento.

Licencia Creative Commons:

134

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

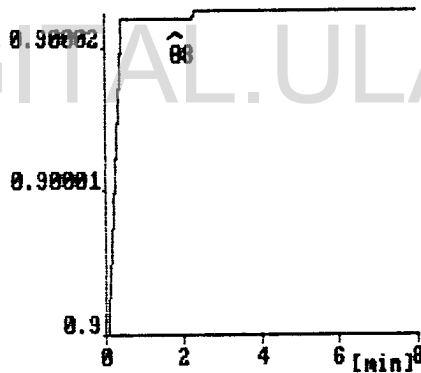
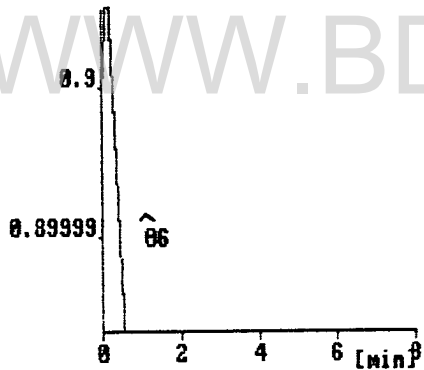
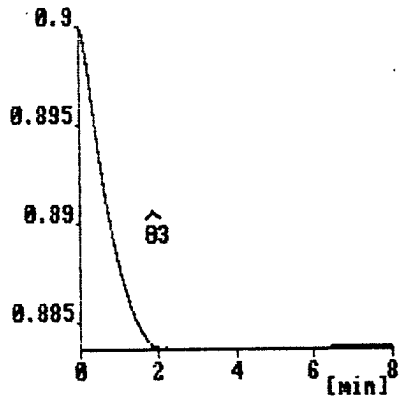
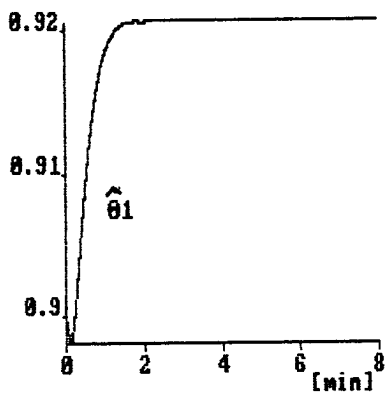


Gráfico 46. Trayectoria de los parámetros estimados.

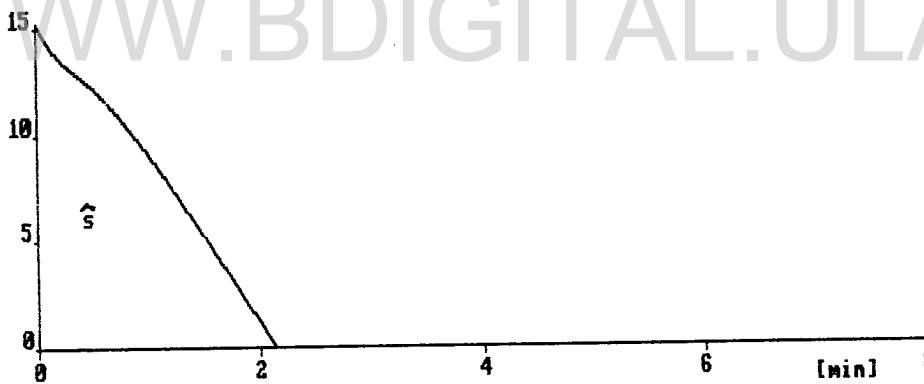
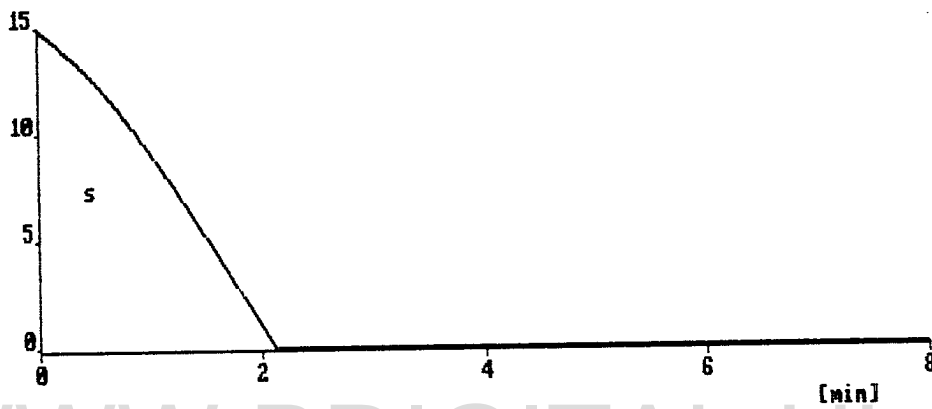


Gráfico 47. Trayectoria de la superficie real y la superficie estimada.

## CAPITULO IV

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Después de haber realizado las investigaciones y los ejemplos de aplicación, para comprobar las bondades de los controladores propuestos que cubren la teoría expuesta en los primeros capítulos es factible llegar a las siguientes conclusiones y recomendaciones.

El uso de Control Adaptativo de Sistemas Linealizables con incertidumbre lineal paramétrica, conduce a muy buenos resultados como se muestran en las simulaciones. En ellas se puede observar que el error de seguimiento es inferior al 0.5%, garantizando así la estabilidad del Sistema Controlado por esta técnica.

En la mayoría de los casos, como se mostró en la parte teórica, los parámetros convergen a valores que no necesariamente coinciden con los valores nominales considerados inicialmente, esto se debe básicamente a que en el vector regresor, que está compuesto por las derivadas direccionales de la salida, no todos sus componentes son diferentes de cero, existen por lo general en él una cantidad elementos que son ceros por lo cual eliminan las

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

posibilidades de que la energía esté presente en todas las direcciones, en síntesis no existe una garantía de persistencia de excitación, que es necesaria para garantizar la convergencia de los parámetros.

Respecto a los controladores adaptativos dinámicos, tanto por asignación de polos, como por modo deslizante, que son los menos tratados en investigaciones recientes [12], se nota que los resultados obtenidos, acerca de su comportamiento, son muy halagadores considerándose apropiados su uso en sistemas donde normalmente esta técnica no ha sido aplicada.

Se sugieren nuevos trabajos de investigación que pudiesen incluir la extensión de los resultados obtenidos, utilizando las técnicas propuestas, a los sistemas multivariables.

Otro aspecto interesante de investigación, sería el tratar de generar una ley de adaptación general de parámetros donde éstos no necesariamente sean del tipo lineal paramétrico.

Y como una recomendación se debe tener en cuenta que los resultados de las simulaciones están en función directa de la precisión del algoritmo de integración utilizado para llevar a cabo la ley de adaptación de parámetros.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

**Apéndices**

Licencia Creative Commons:  
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

**Apéndice A**

**Listado de programas simulados en Simnon**

Simulación de control de velocidad para seguimiento de una planta de primer orden, para un motor shunt DC usando control adaptativo estático.

#### PROGRAMA

```
continuous system adaplin
state x1 x2  teta1v teta2v teta3v sigma1v sigma2
der dx1 dx2
der dteta1v dteta2v dteta3v dsigma1v dsigma2v
time t
```

#### PLANTA

```
dx1=-57.8*x1-0.112*x2*u+8.0*va
dx2=-5.7*x2+13300*x1*u
```

#### REFERENCIA

```
xr=100*(1-exp(-10*t))
```

#### LEY DE SEGUIMIENTO

```
v=1000*exp(-10*t)+alfa*(xr-x2)
```

#### ERROR

```
e=x2-xr
```

#### LEY DE ADAPTACION DE PARAMETROS

```
dteta1v=e*0
fi1=57.8-teta1v
dteta2v=e*0
fi2=8-teta2v
dteta3v=e*(-x2)
fi3=5.7-teta3v
dsigma1v=e*0*u
```

Licencia Creative Commons:

141

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

```
fi4=0.112-sigma1v
dsigma2v=e*x1*(teta3v*x2+v)/(sigma2v*x1)
fi5=13300-sigma2v
```

#### **CALCULO DE DERIVADA DE LIE**

```
lfh=teta1v*(0)+teta2v*0+teta3v*(-x2)
lgh=sigma1v*(0)+sigma2v*x1
```

#### **LEY DE CONTROL**

```
u=(-lfh+v)/lgh
```

#### **VALORES INICIALES**

```
teta1v:57.8
teta2v:8.00
teta3v:4.5
sigma1v:0.112
sigma2v:13000
x1:0.2
x2:10
va:5
alfa:120
end
```

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Simulación de control de velocidad para seguimiento de una planta de segundo orden, para un motor shunt DC usando control adaptativo estático.

## PROGRAMA 2

```
continuous system adaplin
state x1 x2 teta1v teta2v teta3v sigma1v sigma2v
der dx1 dx2 dteta1v dteta2v dteta3v dsigma1v dsigma2v
time t
```

### PLANTA

```
dx1=-57.8*x1-0.112*x2*u+8*va
```

```
dx2=-5.7*x2+13300*x1*u
```

### REFERENCIA

```
xr=100-(100*cos(21.4*t)+100*sin(21.4*t))/exp(t*21)
```

```
r1=-21*exp(-21*t)*(100*cos(21.4*t)+100*sin(21.4*t))
```

```
r2=exp(-21*t)*(-2140*sin(21.4*t)+2140*cos(21.4*t))
```

```
r3=-(r1+r2)
```

### ERROR

```
e=x2-xr
```

### LEY DE SEGUIMIENTO

```
v=r3+alfa*(xr-x2)
```

### LEY DE ADAPTACION DE PARAMETROS

```
dteta1v= e*0
```

```
fi1=57.8-teta1v
```

```
dteta2v= e*0
```

```
fi2=8-teta2v
```

```
dteta3v=e*(-x2)
```

Licencia Creative Commons:

143

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

```

fi3=5.7-teta3v
dsigma1v=e*0*u
fi4=0.112-sigma1v
dsigma2v=e*x1*(teta3v*x2+v)/(sigma2v*x1)
fi5=13300-sigma2v
DERIVADAS DE LIE
lfh=teta3v*(-x2)
lgh=sigma2v*x1
LEY DE CONTROL
u=(-lfh+v)/lgh
teta1v:58
teta2v:8.00
teta3v:4.5
sigma1v:0.12
sigma2v:13300
x1:0.2
x2:10
va:5
alfa:120
end

```

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Simulación de control de nivel para seguimiento de una planta de primer orden, para dos tanques colocados en cascada, usando control adaptativo estático.

### PROGRAMA 3

continuous system tanques

```
state x1 x2 teta2 teta3 teta6 teta10 teta13 teta15
der dx1 dx2 dteta2 dteta3 dteta6 dteta10 dteta13 dteta15
state z2 z3 z6 z10 z13 z15 si2 si3 si6 si10 si13 si15
der dz2 dz3 dz6 dz10 dz13 dz15 dsi2 dsi3 dsi6 dsi10 dsi13 dsi15
time t
```

#### PLANTA

$dx1 = -(cv/A)*sqrt(x1) + (u/A)$

$dx2 = (cv/A)*sqrt(x1) - (cv/A)*sqrt(x2)$

#### REFERENCIA

$xr = 0.5*(1 - exp(-1*t))$

#### LEY DE SEGUIMIENTO

$v = -0.5*exp(-1*t) + alfa1*(0.5*exp(-1*t) - Lfh) + alfa2*(xr - x2)$

#### ERROR AUMENTADO

$dz2 = -alfa1*sqrt(x1) - alfa1*z2 - alfa2*si2$

$dsi2 = z2$

$dz3 = alfa1*sqrt(x2) - alfa1*z3 - alfa2*si3$

$dsi3 = z3$

$dz6 = 0.5 - alfa1*z6 - alfa2*si6$

$dsi6 = z6$

Licencia Creative Commons:

145

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

```

dz10=0.5*sqrt(x1/x2)-alfa1*z10-alfa2*si10
dsi10=z10
dz13=-0.5-alfa1*z13-alfa2*si13
dsi13=z13
dz15=-0.5*(1/sqrt(x1))*u-alfa1*z15-alfa2*si15
dsi15=z15
fi2=teta2-5.1
fi3=teta3-5.1
fi6=teta6-25
fi10=teta10-25
fi13=teta13-25
fi15=teta15-0.45
e1=si2*fi2+si3*fi3+si6*fi6+si10*fi10+si13*fi13+si15*fi15
sit=si2*si2+si3*si3+si6*si6+si10*si10+si13*si13+si15*si15
LEY DE ADAPTACION DE PARAMETROS
dteta2=-(e1*si2)/(1+sit)
dteta3=-(e1*si3)/(1+sit)
dteta6=-(e1*si6)/(1+sit)
dteta10=-(e1*si10)/(1+sit)
dteta13=-(e1*si13)/(1+sit)
dteta15=-(e1*si15)/(1+sit)
LEY DE CONTROL
Lf2h=-0.5*teta6-0.5*sqrt(x1/x2)*teta10+0.5*teta13
LgLfh=0.5*(1/sqrt(x1))*teta15
Lfh=sqrt(x1)*teta2-sqrt(x2)*teta3
u=(-Lf2h+v)/LgLfh

```

**VALORES INICIALES**

cv:1

A:1

teta2:0.9

teta3:0.9

teta6:0.9

teta10:0.9

teta13:0.9

teta15:0.9

x1:0.2

x2:0.25

alfa1:1.1851

alfa2:2

si2:0

si3:0

si6:0

si10:0

si13:0

si15:0

z2:0

z3:0

z6:0

z10:0

z13:0

z15:0

end

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Simulación de control de velocidad para seguimiento de una planta de primer orden, para un motor DC usando control adaptativo dinámico por asignación de polos.

#### PROGRAMA 4

```
continuous system motordc
state x1 x2 u1 t3 t5 t10 t14 t15
state t17 t19 z3 z5 z10 z14 z15 z17 z19 si3 si5
state si10 si14 si15 si17 si19 u2 u3 u4
der dx1 dx2 du1 dt3 dt5 dt10 dt14 dt15
der dt17 dt19 dz3 dz5 dz10 dz14 dz15 dz17 dz19
der dsi3 dsi5 dsi10 dsi14 dsi15 dsi17 dsi19 du2
du3 du4
time t
```

#### PLANTA

```
dx1=-57.8*x1-0.112*x2*u+8*va
dx2=-5.7*x2+13300*x1*u
```

#### REFERENCIA

```
xr=100*(1-exp(-10*t))
xr1=1000*exp(-10*t)
xr2=-10000*exp(-10*t)
```

#### ERROR

```
e=x2-xr
```

**ERROR AUMENTADO**

$$dz3=-a1*x2-a11*z3-a10*si3$$

$$dsi3=z3$$

$$w=a1*x1*u+(1/t5)*(-t15*x2+(t17+t10)*x1*u+t19*x2*u*u)$$

$$w1=(1/t5)*(-t14*u*va+xr2-a0*e-a1*(-t3*x2+t5*x1*u-xr1))$$

$$dz5=w+w1-a11*z5-a10*si5$$

$$dsi5=z5$$

$$dz10=-x1*u-a11*z10-a10*si10$$

$$dsi10=z10$$

$$dz14=va*u-a11*z14-a10*si14$$

$$dsi14=z14$$

$$dz15=x2-a11*z15-a10*si15$$

$$dsi15=z15$$

$$dz17=-x1*u-a11*z17-a10*si17$$

$$dsi17=z17$$

$$dz19=-x2*u*u-a11*z19-a10*si19$$

$$dsi19=z19$$

$$fi3=5.7-t3$$

$$fi5=13300-t5$$

$$fi10=768740-t10$$

$$fi14=106400-t14$$

$$fi15=30.25-t15$$

$$fi17=71500-t17$$

$$fi19=1456-t19$$

$$e1=si3*fi3+si5*fi5+si10*fi10+si14*fi14+si15*fi15+si17*fi17+si19*fi19$$
$$sit=si3*si3+si5*si5+si10*si10+si14*si14+si15*si15+si17*si17+si19*si19$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

#### LEY DE ADAPTACION DE PARAMETROS

$$dt3=20*(e1*si3)/(1+sit)$$

$$dt5=(e1*si5)/(1+sit)$$

$$dt10=(e1*si10)/(1+sit)$$

$$dt14=(e1*si14)/(1+sit)$$

$$dt15=(e1*si15)/(1+sit)$$

$$dt17=(e1*si17)/(1+sit)$$

$$dt19=(e1*si19)/(1+sit)$$

#### LEY DE CONTROL

$$du1=(1/(x1*t5))*(-t15*x2+x1*(u1+u2+u3+u4)*(t17+t10))$$

$$du2=1/(t5*x1)*(-t19*x2*sqr(u1+u2+u3+u4))$$

$$du3=1/(t5*x1)*(-t14*(u1+u2+u3+u4)*va+xr2-a0*e)$$

$$du4=(1/(t5*x1))*(-a1*(-t3*x2+t5*x1*(u1+u2+u3+u4)-xr1))$$

$$u=u1+u2+u3+u4$$

#### VALORES INICIALES

$$t3:5.4$$

$$t5:13000$$

$$t10:760000$$

$$t14:106000$$

$$t15:29$$

$$t17:71000$$

$$t19:1450$$

$$x1:0.2$$

$$x2:20$$

$$a1=100$$

```
a0=4900
a11=100
a10=4900
si3:0
si5:0
si10:0
si14:0
si15:0
si17:0
si19:0
z3:0
z5:0
z10:0
z14:0
z15:0
z17:0
z19:0
u1:0
u2:0
u3:0
u4:0
va=5
end
```

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Simulación de control de concentración total de un reactor agitado continuamente, para seguimiento de una planta de primer orden, usando control adaptativo dinámico por asignación de polos.

### PROGRAMA 5

```
continuous system conct
state x1 x2 u1 u2 t2 t4 t5
state z2 z4 z5 si2 si4 si5
der dx1 dx2 du1 du2 dt2 dt4 dt5
der dz2 dz4 dz5 dsi2 dsi4 dsi5
time t
```

#### PLANTA

```
dx1=-2*x1+u
```

```
dx2=x1-x2-x2*x2
```

```
y=x1+x2
```

#### REFERENCIA

```
xr=3*(1-exp(-1*t))
```

```
xr1=3*exp(-1*t)
```

```
xr2=-3*exp(-1*t)
```

#### ERROR

```
e=x1+x2-xr
```

#### ERROR AUMENTADO

```
dz2=sqr(x2)*(3+a1)-a11*z2-a10*si2
```

```
dsi2=z2
```

$dz4=-2*x1*x2-a11*z4-a10*si4$

$dsi4=z4$

$dz5=x2*x2*x2-a11*z5-a10*si5$

$dsi5=z5$

$f2=1-t2$

$f4=1-t4$

$f5=1-t5$

$e1=f2*si2+f4*si4+f5*si5$

$sit=si2*si2+si4*si4+si5*si5$

#### LEY DE ADAPTACION DE PARAMETROS

$dt2=10*e1*si2/(1+sit)$

$dt4=10*e1*si4/(1+sit)$

$dt5=100*e1*si5/(1+sit)$

#### LEY DE CONTROL

$du1=-(x1+x2-(u1+u2)+3*t2*x2*x2-2*t4*x1*x2+t5*x2*x2*x2)+xr2$

$du2=-a0*e-a1*(-(x1+x2+t2*x2*x2)+(u1+u2)-xr1)$

$u=u1+u2$

#### VALORES INICIALES

$t1:1$

$t2:0.92$

$t4:0.92$

$t5:0.92$

$x1:0.25$

$x2:3$

$u1:0$

Licencia Creative Commons:

153

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

```
u2:0
a1:9.6
a0:36
a11:9.6
a10:36
z2:0
z4:0
z5:0
s12:0
s14:0
s15:0
end
```

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Simulación de un control de nivel de líquidos, para seguimiento de una planta de primer orden, de dos tanques colocados en cascadas usando control adaptativo dinámico por asignación de polos

#### PROGRAMA 6

```
continuous system tap
state x1 x2 u1 t1 t3 t6 t4 t7 t8 m1 m3 m61 m62
state m7 m8 u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8
state z1 z3 z6 z4 z7 z8
state si1 si3 si4 si6 si7 si8 w1 w2 w3 w4 w5
der dx1 dx2 du1 dt1 dt3 dt6 dt4 dt7 dt8 dm1 dm3 dm61
der dm62 dm7 dm8 du2 du3 du4 du5 du6 du7 du8
der dz1 dz3 dz6 dz4 dz7 dz8
der dsi1 dsi3 dsi6 dsi4 dsi7 dsi8 dw1 dw2 dw3 dw4 dw5
time t
PLANTA
dx1=-1*sqrt(x1)+1*u
dx2=1*sqrt(x1)-1*sqrt(x2)
REFERENCIA
xr=0.5*(1-exp(-1*t))
xr1=0.5*exp(-1*t)
xr2=-0.5*exp(-1*t)
xr3=0.5*exp(-1*t)
ERROR
e=x2-xr
```

## ERROR AUMENTADO

$dm1=a1*(\sqrt{x1})-\sqrt{x2})-a2*m1-a1*z1-a0*si1$

$dz1=m1$

$dsi1=z1$

$dm3=-(a2/2)*\sqrt{x1/x2}-a2*m3-a1*z3-a0*si3$

$dz3=m3$

$dsi3=z3$

$dw1=(1/t4)*(-t6/(4*\sqrt{x2}))+t8*u/(4*\sqrt{x1}*\sqrt{x2}))$

$dw2=(1/t4)*(t6*x1/(4*x2*\sqrt{x2}))-t6*\sqrt{x1}/(4*x2)$

$dw3=(1/t4)*(-t7*u/(4*x1)+t8*u*u/(4*x1*\sqrt{x1}))-a2*m4$

$dw4=(1/t4)*(xr3-a0*e-a1*(t1*\sqrt{x1})-t1*\sqrt{x2})-xr1)$

$dw5=(1/t4)*(-a2*(-(t3/2)*\sqrt{x1/x2})-xr2))-a1*z4-a0*si4$

$m4=w1+w2+w3+w4+w5$

$dz4=m4$

$dsi4=z4$

$dm61=-(0.25)*(-1/(\sqrt{x2}))+x1/(\sqrt{x2^3})-\sqrt{x1}/x2)$

$dm62=-a2*m6-a1*z6-a0*si6$

$m6=m61+m62$

$dz6=m6$

$dsi6=z6$

$dm7=u/(4*x1)-a2*m7-a1*z7-a0*si7$

$dz7=m7$

$dsi7=z7$

$dm8=-u*u/(4*x1*\sqrt{x1})-u/(4*\sqrt{x1*x2})-a2*m8-a1*z8-a0*si8$

$dz8=m8$

```

dsi8=z8
f1=5.-t1
f3=29-t3
f4=0.5-t4
f6=157-t6
f7=2.9-t7
f8=0.05-t8
sit=si1*si1+si3*si3+si6*si6+si4*si4+si7*si7+si8*si8
e1=f1*si1+si3*f3+f6*si6+f4*si4+f7*si7+si8*f8

```

#### LEY DE ADAPTACION DE PARAMETROS

```

dt1=e1*si1/(1+sit)
dt3=e1*si3/(1+sit)
dt6=e1*si6/(1+sit)
dt4=e1*si4/(1+sit)
dt7=e1*si7/(1+sit)
dt8=e1*si8/(1+sit)

```

```
c=2*sqrt(x1)/t4
```

#### LEY DE CONTROL

```

du1=(-t6/(4*sqrt(x2))+a1*t1*sqrt(x2))*(2*sqrt(x1)/t4)
du2=(t6*x1/(4*sqrt(x2)*x2)+xr3)*(2*sqrt(x1)/t4)
du3=(-a2*(-(t3/2)*sqrt(x1/x2)))*(2*sqrt(x1)/t4)
du4=(-a1*t1*sqrt(x1)-t6*sqrt(x1)/(4*x2))*2*sqrt(x1)/t4
cu9=u1+u2+u3+u4
du5=(a1*xr1-a2*t4*(cu9+u5+u6+u7+u8)/(2*sqrt(x1)))*2*sqrt(x1)/t4
cu4=cu9+u5
du6=(t8*(cu4+u6+u7+u8)/(4*sqrt(x1)*sqrt(x2)))*2*sqrt(x1)/t4

```

```

cu5=u1+u2+u3+u4+u5+u6
du7=(t8*sqr(cu5+u7+u8)/(4*x1*sqr(x1)))*2*sqr(x1)/t4
cu6=u1+u2+u3+u4+u5+u6+u7
du8=(-a0*e+a2*xr2-t7*(cu6+u8)/(4*x1))*2*sqr(x1)/t4
u=u1+u2+u3+u4+u5+u6+u7+u8

```

**VALORES INICIALES**

t1:0.9

t3:0.9

t4:0.9

t6:0.9

t7:0.9

t8:0.9

x1:0.07

x2:0.3

a0:960

a1:376

a2:66

m1:0

z1:0

si1:0

m3:0

z3:0

si3:0

z6:0

si6:0

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

```
z4:0
si4:0
m7:0
z7:0
si7:0
m8:0
z8:0
si8:0
u1:20
u2:20
u3:20
u4:20
u5:20
u6:20
u7:20
u8:20
end
```

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Simulación de control de velocidad para seguimiento de una planta de primer orden, para un motor DC usando control adaptativo dinámico por modo deslizante.

#### PROGRAMA 7

```
continuous system motor dc
state x1 x2 u1 t3 t10 t14 u2 u3 u4
state t15 t17 t19 w w1 w2 w3 w4
der dx1 dx2 du1 dt3 dt10 dt14 du2 du3 du4
der dt15 dt17 dt19 dw dw1 dw2 dw3 dw4
time t
```

#### PLANTA

```
dx1=-57.8*x1-0.112*x2*u+8*va
dx2=-5.7*x2+13300*x1*u
```

#### REFERENCIA

```
xr=100*(1-exp(-10*t))
xr1=1000*exp(-10*t)
xr2=-10000*exp(-10*t)
```

#### ERROR

```
e=x2-xr
```

#### SUPERFICIE ESTIMADA

```
se=a1*e-t3*x2+t5*x1*u-xr1
f3=5.7-t3
f5=13300-t5
```

#### SUPERFICIE REAL

```
s=se-f3*x2+f5*x1*u
```

### LEY DE ADAPTACION DE PARAMETROS

$$c2 = -t15 * x2 + (t17 + t10) * x1 * u$$

$$dw = 1 * (c2 - t14 * va * u + xr2) * (-s / (w + w1 + w2 + w3 + w4))$$

$$dw1 = 1 * (-s / (w + w1 + w2 + w3 + w4)) * (a1 * xr1 - m * sign(se))$$

$$cw = w + w1$$

$$c1 = a1 * t3 * x2 + t19 * u * u * x2$$

$$dw2 = 1 * (c1 - a1 * (cw + w2 + w3 + w4) * x1 * u) * (-s / (cw + w2 + w3 + w4))$$

$$dw3 = m * x1 * u * sign(se) * 1$$

$$dt3 = -0.05 * (-s * (-x2 * a1) - m * x2 * sign(se))$$

$$dw4 = -a1 * u * s * x1 * 1$$

$$t5 = (w + w1 + w2 + w3 + w4) * 1$$

$$dt10 = -1 * s * x1 * u$$

$$dt14 = 1 * s * va * u$$

$$dt15 = 1 * s * x2$$

$$dt17 = -1 * s * x1 * u$$

$$dt19 = -1 * s * x2 * u * u$$

### LEY DE CONTROL

$$du1 = (1 / (t5 * x1)) * (-t15 * x2 + (t17 + t10) * x1 * (u1 + u2 + u3 + u4))$$

$$du2 = (1 / (t5 * x1)) * (-a1 * (-t3 * x2 + t5 * x1 * (u1 + u2 + u3 + u4) - xr1) + xr2)$$

$$du3 = (1 / (t5 * x1)) * (-m * sign(se) - t14 * va * (u1 + u2 + u3 + u4))$$

$$du4 = (1 / (t5 * x1)) * (t19 * x2 * (u1 + u2 + u3 + u4) * (u1 + u2 + u3 + u4))$$

$$u = u1 + u2 + u3 + u4$$

### VALORES INICIALES

$$t1: 57.8$$

$$t2: 8.00$$

$$t3: 4.5$$

```
t4:0.112
w:3000
w1:3000
w2:3000
w3:3000
w4:3000
t10:760000
t14:106000
t15:30.25
t17:71500
t19:1456
x1:0.2
x2:60
m=820
va=5
a1:14
a0:400
u1:0.03
u2:0.03
u3:0.03
u4:0.03
end
```

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Simulación de control de concentración total de un reactor agitado continuamente, para seguimiento de una planta de primer orden, usando control adaptativo dinámico por modo deslizante.

### PROGRAMA 8

```
continuous system conct
state x1 x2 u1 u2 t2 t4 t5
der dx1 dx2 du1 du2 dt2 dt4 dt5
time t
PLANTA
dx1=-2*x1+u
dx2=x1-x2-x2*x2
y=x1+x2
REFERENCIA
xr=3*(1-exp(-1*t))
xr1=3*exp(-1*t)
xr2=-3*exp(-1*t)
ERROR
e=x1+x2-xr
SUPERFICIE ESTIMADA
se=a1*e+(-(x1+x2+t2*x2*x2)+u-xr1)
SUPERFICIE REAL
s=se+f2*x2*x2
LEY DE ADAPTACION DE PARAMETROS
dt2=-0.1*(-s*(3*x2*x2+a1*x2*x2)+m*x2*x2*sign(se))
f2=1-t2
```

```
dt4=-0.1*s**2*x1*x2
```

```
dt5=0.01*s*x2*x2*x2
```

#### LEY DE CONTROL

```
du1=-x1-x2+u-t2*x2*x2+2*t4*x1*x2-2*t2*x2*x2-  
t5*x2*x2*x2
```

```
du2=xr2-a1*(-x1-x2-t2*x2*x2+u-xr1)-m*sign(se)
```

```
u=u1+u2
```

#### VALORES INICIALES

```
t1:1
```

```
t2:0.91
```

```
t4:0.91
```

```
t5:0.91
```

```
x1:0.25
```

```
x2:3
```

```
u1:0
```

```
u2:0
```

```
m=3
```

```
a1:3
```

```
end
```

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Simulación de control de nivel de líquido, para seguimiento de una planta de primer orden, de dos tanques conectados en cascada usando control adaptativo dinámico por modo deslizante.

#### PROGRAMA 9

```
continuous system tmd
state x1 x2 u1 t1 t3 t6 w1 w2 w3 w4 w5 t7 t8
state w6 w7 w8 w9 u2 u3 u4 u5
state u6 u7 u8
der dx1 dx2 du1 dt1 dt3 dt6 dt7 dw1 dw2 dw3 dt8
der dw4 dw5 dw6
der dw7 dw8 dw9 du2 du3 du4 du5 du6 du7 du8
time t
PLANTA
dx1=-1*sqrt(x1)+1*u
dx2=1*sqrt(x1)-1*sqrt(x2)
REFERENCIA
xr=0.5*(1-exp(-1*t))
xr1=0.5*exp(-1*t)
xr2=-0.5*exp(-1*t)
xr3=0.5*exp(-1*t)
ERROR
e=x2-xr
SUPERFICIE ESTIMADA
se1=a1*e+a2*(t1*sqrt(x1)-t1*sqrt(x2)-xr1)-xr2
se2=-((t3/2)*sqrt(x1/x2)+(t14/(2*sqrt(x1))))*u
se=se1+se2
```

f1=5.4-t1

f3=29-t3

f4=0.54-t14

f6=157-t6

f7=2.9-t7

f8=0.054-t18

### **SUPERFICIE REAL**

s1=se+a2\*f1\*sqrt(x1)-f1\*a2\*sqrt(x2)

s2=-((f3/2)\*sqrt(x1/x2)+(f4\*u)/(2\*sqrt(x1)))

s=s1+s2

### **LEY DE ADAPTACION DE PARAMETROS**

dt1=-.0001\*((sqrt(x1)-sqrt(x2))\*(-s\*a1+m\*a2\*sign(se)))

dt3=-.0001\*(s\*(a2/2)\*sqrt(x1/x2)-(m/2)\*sqrt(x1/x2)\*sign(se))

dt6=-.0001\*(0.25\*s\*((-1/sqrt(x2))+(x1/sqrt(x2^3)))-sqrt(x1)/x2)

dt7=-.001\*(-s\*(u/4\*x1))

dt8=-.00001\*(s\*(u\*u/(4\*sqrt(x1^3))+u/(4\*sqrt(x1)\*sqrt(x2))))

c1=a2/(2\*sqrt(x1))

c2=4\*x2\*sqrt(x2)

c3=4\*x1\*sqrt(x1)

c4=sqrt(x1/x2)/2

c5=u/(4\*x1)

c6=a2\*xr2

c7=a1\*(t1\*sqrt(x2)+xr1)

c8=4\*sqrt(x2)

c9=sqrt(x1)/(4\*x2)

```

dw1=-.0001*(-t6/c8)*(-s/(w1+w2+w3+w4+w5+w6+w7+w8+w9))
dw2=-.0001*(t6*x1/c2)*(-s/(w1+w2+w3+w4+w5+w6+w7+w8+w9))
cw1=w1+w2
dw3=-.0001*((t18*u*u/c3)+xr3)*(-s/(cw1+w3+w4+w5+w6+w7+w8+w9))
dw4=-.0001*(-a2*(-t3*c4-xr2))*(-s/(cw1+w3+w4+w5+w6+w7+w8+w9))
cw3=w1+w2+w3+w4
dw5=.0001*(u/2*sqrt(x1))*m*sign(se)
dw6=-.0001*(-s/(cw3+w6+w7+w8+w9))*(-a1*t1*sqrt(x1)-t6*c9)
cw5=cw3+w6
dw7=-.0001*(c7-t7*c5)*(-s/(cw5+w7+w8+w9))
dw8=-.0001*(-m*sign(se))*(-s/(cw5+w7+w8+w9))
cw7=cw5+w7+w8
dw9=-.0001*(-s/(cw7+w9))*(t18*u/(4*sqrt(x1)*sqrt(x2)))
t4=(w1+w2+w3+w4+w5+w6+w7+w8+w9)*0.025
LEY DE CONTROL
c=2*sqrt(x1)/t4
du1=(-t6/(4*sqrt(x2))+a1*t1*sqrt(x2))*c
du2=((t6*x1/(4*sqrt(x2)*x2))+xr3)*c
du3=a2*(t3/2)*sqrt(x1/x2)*c
du4=(c)*(-a1*t1*sqrt(x1)-t6*sqrt(x1)/(4*x2))
cu9=u1+u2+u3+u4
du5=c*(a1*xr1-a2*t4*(cu9+u5+u6+u7+u8)/(2*sqrt(x1)))
cu4=cu9+u5
du6=c*(t8*(cu4+u6+u7+u8)/(4*sqrt(x1)*sqrt(x2)))
cu5=u1+u2+u3+u4+u5+u6
du7=c*(t8*sqr(cu5+u7+u8)/(4*x1*sqrt(x1)))

```

$cu6 = u1 + u2 + u3 + u4 + u5 + u6 + u7$

$du8 = c * (-m * \text{sign}(se) + a2 * xr2 - t7 * (cu6 + u8)) / (4 * x1)$

$u = u1 + u2 + u3 + u4 + u5 + u6 + u7 + u8$

#### VALORES INICIALES

t1:0.9

t3:0.9

t6:0.9

t7:0.9

t8:0.9

x1:0.07

x2:0.25

m=8

a1:100

a2:16

w1:0.06

w2:0.06

w3:0.06

w4:0.06

w5:0.06

w6:0.06

w7:0.06

w8:0.06

w9:0.06

u1:0.1

u2:0.1

```
u3:0.1
u4:0.1
u5:0.1
u6:0.1
u7:0.1
u8:0.1
end
```

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

## Apéndice B

### Lemas

## LEMAS TECNICOS

Se muestran tres lemas importantes, los cuales se encuentran en Sastry-Isidori [1], las pruebas de estos están en [15], donde se emplea la notación  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $K$ .

### LEMA 1 ESTABILIDAD ENTRADA ACOTADA - SALIDA ACOTADA :

Haciendo  $y = H(s) u$  la salida de un sistema lineal propio de fase mínima con entrada  $u$ . Si  $u, \dot{u} \in L_\infty$ , y  $U$  es regular, i.e.,

$$\|\dot{u}\|_t \leq K \|u\|_t + K$$

entonces

$$1 = \|u\|_t \leq K \|y\|_t + K$$

Si la entrada es regular y la planta es de fase mínima, entonces la salida acotada del sistema implica una entrada acotada.

### LEMA 2:

Sea  $y = H(s) u$  la salida de un sistema estable propio,  $H(s)$  manejado por  $u$

Si

$$\|u\|_t \leq \gamma \|q\|_t + \gamma$$

entonces

$$\|y\|_t \leq \gamma \|q\|_t + \gamma$$

Si, H es estrictamente propia

$$\|y\|_t \leq \beta \|q\|_t + \beta$$

Esta es una generalización de muchos resultados; se nota que si H es estrictamente propia se tiene una función  $L_2 \cap L_\infty$  el cual va a cero como en el caso acotado.

### LEMA 3 LEMA DEL INTERCAMBIO

Si  $H(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$  es la realización mínima de una función de transferencia propia, entonces

$$H(s)(W^T \dot{\Phi}) - (H(s)W^T)\dot{\Phi} = -c(sI - A)^{-1} \left\{ \left[ (sI - A)^{-1}bW^T \right] \dot{\Phi} \right\}$$

### LEMA DE BARBALAT

El Lema de Barbalat indica que la derivada de una función podría tener suavidad, siendo este un requerimiento adicional que garantiza la convergencia a cero de la derivada de la

Licencia Creative Commons:

función. Donde la función es tendiente a un límite finito.

Si la función diferenciable  $f(t)$  tiene un límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$ , y si  $\dot{f}$  es uniformemente continua, entonces  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Primero, se definirá el término *uniformemente continuo* recordemos que la función  $g(t)$  es continua en  $[0, \infty)$  si

$$\forall t_1 \geq 0, \forall R > 0, \exists \eta(R, t_1) > 0, \forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta$$

$$\Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Una función  $g$  es llamada *uniformemente continua* en  $[0, \infty)$  si

$$\forall R > 0, \exists \eta(R) > 0, \forall t_1 \geq 0, \forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta$$

$$\Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R$$

En otras palabras,  $g$  es *uniformemente continua* si uno puede encontrar siempre una función  $\eta$  que no dependa del punto específico  $t_1$ .

La continuidad uniforme de una función en muchas ocasiones no es posible conseguirla directamente de la definición anterior. Una

aproximación más conveniente se obtiene al examinar la derivada de la función.

Una condición simple de suficiencia para que una función diferenciable sea uniformemente continua es que su derivada sea acotada. Fácilmente verificable a partir del teorema de diferenciación finita.

$$\forall t, \forall t_1, \exists t_2 \text{ (entre } t \text{ y } t_1)$$

$$q(t) - q(t_1) = \dot{q}(t_2) (t - t_1)$$

y por eso, si  $R_1 > 0$  es una cota superior de una función  $|\dot{q}|$ , uno puede siempre usar  $\eta = R/R_1$  independientemente de  $t_1$  para verificar la continuidad uniforme.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Sastry y A. Isidori, "Adaptive Control of Linearizable Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control.*, Vol 34, pp 1123 - 1131, Nov. 1.989.
- [2] S. Behrsh, "Robust Output Tracking Form Nonlinear Systems" *International Journal of Control*, Vol. 51, pp 1381 - 1407, No. 6, 1.990.
- [3] K.J. Åström, "Theory of Application of Adaptive Control - A Survey". *Automatica*. Vol 19, pp 471 - 486, No. 11, Nov 1.989.
- [4] V.I. Utkin, "Variable Structure Systems With Sliding Mode", *IEEE Transactions on Automatic Control.*, Vol AC-22, pp 212 - 222, Abr. 1.977.
- [5] A. Teel, R. Kadiyala, P. Kokotovich y S. Sastry, "Indirect Technics for Adaptive Input Output Linearitation of Non-Linear Systems", *International Journal of Control*, Vol. 53, pp 193 - 222, No. 1, 1.991.

- [6] I. Kanellakopoulos, P. Kokotovich, R. Marino y P. Toney, "Adaptive Control of NonLinear Systems with Partial State Feedback", *European Control Conference, Grenoble, Francia*, pp 1322 - 1327, Jul. 1.991.
- [7] I. Kanellakopoulos, P. Kokotovich y R. Marino, "An Extended Direct Scheme for Robust Nonlinear Control", *Automatica*, Vol. 27, pp 247 - 255, No. 2, 1.991.
- [8] R. Lozano y B. Brogliatto, "Adaptive Control of Simple Nonlinear System without a Priori Information on Plant Parameters", *IEEE Transactions on Automatic Control.*, Vol 37, pp 30 - 37, No. 1, Ene. 1.992.
- [9] R. Ortega y Y. Tang, "Robustness of Adaptive Controllers - A Survey", *Automatica*, Vol. 25, pp 651 - 677, No. 5, 1.989.
- [10] S. Boyd y S. Sastry, "Necessary and Sufficient Conditions for Parameters Convergence in Adaptive Control", *Automatica* Vol. 22, pp 629 - 639, 1.986.
- [11] B. D. Anderson. "Adaptive Systems, Lack of Persistence of Excitation and Bursting Phenomena". *Automatica* Vol. 21, pp 247 - 258, 1.985.

- [12] H. Sira-Ramírez, S. Aghad y M. Zribi, "Adaptive Dynamical Feedback Regulation Strategies for Linearizable Uncertain Systems", *International Journal of Control* (por aparecer).
- [13] H. Sira-Ramírez, "Dynamical Variable Structure Control Strategies in Asymptotic output Tracking Problems", *IEEE Transactions on Automatic Control* (por aparecer).
- [14] H. Sira-Ramírez, "Dinamical Sliding Mode Control Strategies in the Regulation of Nonlinear Chemical Process", *International Journal of Control*, (por aparecer).
- [15] S. Sastry y M. Bodson, *Adaptive Control, Stability, Convergence and Robustness*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1.989.
- [16] J. Slotine y W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1.991.
- [17] F. Fallside, *Control System Design by Pole-Zero Assignment*, Academic Press, Londres, 1.977.
- [18] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag NY 1.989

- [19] E. A. Coddington y N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc. Graw Hill Book Co. JNC, 1.955
- [20] A. P. Morgan y K. S. Narendra, "On the Uniform Asintotic Stability of Certain Linear Non Autonomous Differential Equations", *Siam J. Control and Optimization*, Vol 15, pp. 5-24, No. 1, Enero 1.977
- [21] G. Kreisselmeier, "Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. AC-22, pp. 2-8, No. 1, Febrero 1.977.
- [22] H. Nijmeijer y A.J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer - Verlag, NY 1.990.
- [23] R. Canales y R. Barrera, *Análisis de Sistemas Dinámicos y Control Automático*, LIMUSA - México 1.977.