REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROPIEDADES TOPOLÓGICAS Y DESCRIPTIVAS DEL SEMIGRUPO DE ELLIS

AUTOR: YACKELIN ZULIBETH RODRÍGUEZ LÓPEZ

MÉRIDA, FEBRERO DE 2015

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROPIEDADES TOPOLÓGICAS Y DESCRIPTIVAS DEL SEMIGRUPO DE ELLIS

Tesis Doctoral como requisito para optar
al grado de Doctor en Ciencias Matemíticas

AUTOR: YACKELIN ZULIBETH RODRÍGUEZ LÓPEZ
TUTOR: Dr. CARLOS UZCÁTEGUI

MÉRIDA, FEBRERO DE 2015

Dedico este trabajo primero a Dios,
por darme la fortaleza y la sabiduria
para alcanzar esta meta
y a mis padres, Breno y hermanos
por apoyarme todos estos años.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi profundo agradecimiento:

A Dios, por darme la fortaleza y la sabiduria para superar todos los obstaculos que me impedian culminar el doctorado.

A mi madre, por apoyarme todos estos años, mucho más allá de sus posibilidades, para alcanzar esta meta.

A mi padre y hermanos, por acompañarme y ayudarme todo este tiempo.

A Breno, por sus palabras de aliento llenas de amor y confianza, para nunca rendirme.

A mi tutor Carlos Uzcátegui, por orientarme hasta obtener este trabajo completo.

Al profesor Salvador García, por su valiosa ayuda para la obtención de los principales resultados de este trabajo.

A mis amigos Jennifer, Kyczy, Yenny, Janeth, Newman, Raúl, Loan, Abdul, Lenis por su amistad llena de alegria y entusiasmo que me lleno de fuerzas para persistir en mi trabajo.

A mis compañeros de la sección de matemáticas por su amistad y motivarme a realizar y continuar en el Doctorado en Ciencias Matemáticas de la ULA.

A la UNEXPO, especialmente a la Dirección de Postgrado del Vicerrectorado de Barquisimeto, por su apoyo financiero durante mis años de estudios.

A todas aquellas personas que de alguna manera contribuyeron a este logro.

Índice general

RESUMEN

Sea (X, f) un sistema dinámico, donde X es un espacio métrico compacto y f es una función continua de X en sí mismo. El semigrupo de Ellis, denotado por $E(X, f)$, asociado al sistema dinámico (X, f), es la clausura del conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ en el espacio producto X^X. Este trabajo se centra en los aspectos siguientes:

1. Mostrar que si X es un espacio métrico compacto numerable, si cada punto de acumulación del espacio X es periódico, entonces cualquier $h \in E(X, f)$ es continua en X ó cualquier $h \in E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discontinua en X.

2. Exhibir un ejemplo donde se ilustra que si infinitos puntos de acumulación de X, tienen órbita finita no periódica, existen $g, h \in E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que g es continua en X y h es discontinua en X.

3. Dado $P = \{s \in \mathbb{N} : (\exists x \in X)(f^s(x) = x)\}$. Mostraremos que en el caso de sistemas dinámicos (X, f), donde X es un espacio métrico compacto, si P es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ que cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

   - Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que P contiene una sucesión $A = (ra_i)_{i \in \mathbb{N}}$ donde $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de primos relativos.
   - Sea A un subconjunto de P tal que para cualesquiera $c, b \in A$ donde $c < b$, entonces $c|b$,

   entonces $E(X, f)$ es no numerable.

4. Demostraremos que, si X es un espacio métrico compacto numerable, el semigrupo de Ellis $E(X, f)$ es una compactificación de $\mathbb{N}$, si existe una sucesión $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $l < n$, el punto $f^l(w_n)$ no es periódico.

Introducción

Un sistema dinámico es, en términos generales, un fenómeno que evoluciona con el tiempo. Analizar esa evolución es el interés primordial del área de la matemática conocida como sistemas dinámicos. Esta área ha fascinado a numerosos matemáticos a lo largo de los siglos XX y XXI.

En un sistema dinámico el tiempo puede ser medido de forma continua o discreta. Cuando el tiempo se mide de forma discreta, se mide con los números enteros o naturales. En este caso se dice que el sistema dinámico es discreto.

Nosotros analizaremos sólo sistemas dinámicos discretos. En nuestro caso particular, entenderemos por un sistema dinámico discreto un par (X, f), donde X es un espacio métrico compacto y f es una función continua de X en sí mismo.

Dado un sistema dinámico (X, f), el principal objetivo es describir el comportamiento asintótico de las órbitas de los distintos puntos de X. Dado un $x \in X$, se conoce como órbita de x, denotado por $\mathcal{O}_f(x)$, al conjunto

$$\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}.$$

En general, estudiar el comportamiento asintótico de las órbitas de los distintos puntos de X no resulta fácil, aún cuando el espacio X tenga una estructura topológica "sencilla". Para esto se han usado herramientas de otras áreas de la matemática como son: álgebra, topología, geometría, análisis, etc. En nuestro caso concreto, usaremos fundamentalmente los ultrafiltros y los $\mathfrak{F}$-límites donde $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro.

En este trabajo, nuestro interés se centra en el estudio de un objeto vinculado a los sistemas dinámicos, el cual es conocido en la literatura como semigrupo de Ellis.

Definición 1 *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto.*

El semigrupo de Ellis del sistema dinámico (X, f)*, denotado por* $E(X, f)$*, es la clausura en el espacio producto* X^X *del conjunto* $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Este fué introducido por R. Ellis en [RE] (también llamado semigrupo envolvente) y ha sido ampliamente estudiado tanto desde un punto de vista algebraico como topológico. El semigrupo de Ellis es una herramienta fundamental en dinámica topológica (ver por ejemplo [G07] que es un artículo de revisión sobre este tema).

Nosotros estudiaremos propiedades topológicas y descriptivas del semigrupo de Ellis asociado a un sistema dinámico (X, f). En este sentido, nuestro trabajo se centra en el estudio de tres aspectos:

(i) *Sistemas dinámicos WAP*. El sistema (X, f) se dice que es *débilmente casi periódico* (WAP, por sus siglas en inglés), si todas las funciones en $E(X, f)$ son continuas. Estos sistemas WAP han sido ampliamente estudiados (ver [G07]).

La pregunta acerca de los sistemas WAP que fué planteada en [GM07] y que motivó este trabajo es la siguiente:

¿Existe un sistema dinámico (X, f) tal que existen

$$g,\ \ h \in E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$$

donde g es una función continua y h es una función discontinua en X?

En torno a esta interrogante, S. García y M. Sanchis mostraron en [GM07] (ver también [G10]) que en el caso donde X es una sucesión convergente no es posible hallar una función continua f que cumpla con las condiciones establecidas en esta pregunta. De igual modo, S. García en [G12] (ver también [G10]), probó que para ciertas familias de funciones definidas sobre el espacio de Cantor tampoco es posible. Por otra parte, P. Szuca en [PS], mostró que ocurre lo mismo en el caso que X sea el intervalo unitario $[0, 1]$.

En este sentido, todos ellos obtienen la misma dicotomía sobre los elementos del semigrupo de Ellis, asociados a los sistemas dinámicos que ellos estudiaron: o el sistema dinámico es WAP o cada función $h \in E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discontinua.

En la búsqueda de una respuesta a esta pregunta, nosotros analizamos sistemas dinámicos donde X es un espacio métrico compacto numerable. A continuación, presentaremos el teorema más importante de nuestro trabajo sobre sistemas dinámicos WAP.

Teorema 1 *Sea (X, f) un sistema dinámico, donde X es un espacio métrico compacto numerable tal que cada $a \in X'$ es periódico. Sea $b \in X'$. Luego, o cada f^q es discontinua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$, o cada f^q es continua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$.*

Por otra parte, para el caso en que X es una sucesión convergente, hallamos una condición sencilla que debe cumplir la función f para que el sistema dinámico (X, f) no sea WAP.

Teorema 2 *Sea $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, tal que $x_n \to x$ y x es fijo. Las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

a) *f^p es discontinua para algún $p \in \mathbb{N}^*$.*

b) *Existe un punto $z \in X \setminus \{x\}$, periódico de período $s \geqslant 1$ tal que el conjunto $H = \{y \in X : z \in \mathcal{O}_f(y)\}$ es infinito.*

c) *f^q es discontinua para cada $q \in \mathbb{N}^*$.*

De igual forma, si X es un espacio métrico compacto numerable con cada elemento de X' fijo, encontramos una condición análoga a la de la sucesión convergente para que el sistema dinámico sea WAP.

Teorema 3 *Sea (X, f) un sistema dinámico, donde X es un espacio métrico compacto numerable tal que cada $a \in X'$ es fijo. Sea $b \in X'$. Luego, las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

a) *Existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que f^p es discontinua en $b \in X'$.*

b) *Existe $z \in X \setminus \{b\}$ periódico tal que para cada $V \in \mathcal{N}(b)$, el conjunto $I_V = \{y \in V : z \in \overline{\mathcal{O}_f(y)}\}$ es infinito.*

c) *f^q es discontinua en b, para todo $q \in \mathbb{N}^*$.*

En contraste con lo presentado anteriormente, cuando debilitamos la hipótesis que cada elemento de X' sea periódico y sólo pedir que tenga órbita finita, hemos conseguido un ejemplo de un sistema dinámico (X, f) tal que existen dos funciones g, $h \in E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ donde g es una función continua y h es una función discontinua en X.

De esta forma, hemos obtenido una respuesta afirmativa a la pregunta acerca de los sistemas WAP, que fué planteada en [GM07]. Cabe destacar que, este ejemplo y el **Teorema 1** son los principales resultados de nuestro trabajo.

Los resultados que hemos mencionado ya se enviaron a publicación y fueron aceptados ([GRU]).

(ii) *Cardinalidad de* $E(X, f)$. La cardinalidad de $E(X, f)$ está acotada por la cardinalidad de X^X (que es igual a $2^{2^{\aleph_0}}$ cuando X es de cardinalidad $2^{\aleph_0}$). Los trabajos de A. Köhler [Ko] y de E. Glasner y M. Megrehisvili [GM06] contienen resultados muy interesantes sobre cuándo $E(X, f)$ tiene cardinalidad a lo sumo $2^{\aleph_0}$ (y en este caso, se dice que el sistema es *tame* [G06]).

Notemos que si X es un espacio métrico compacto numerable, la cardinalidad del semigrupo de Ellis es a lo sumo $2^{\aleph_0}$ y claramente (X, f) será un sistema dinámico "tame". Dado que nuestro trabajo se ha concentrado en analizar sistemas dinámicos donde X es un espacio métrico compacto numerable, nos concentraremos en presentar condiciones para que el semigrupo de Ellis sea finito, infinito numerable o tenga cardinalidad $2^{\aleph_0}$.

En este sentido, nuestros principales resultados obtenidos sobre la cardinalidad del semigrupo de Ellis, en el caso que X sea un espacio métrico compacto numerable son los siguientes. Sea $P = \{s \in \mathbb{N} : (\exists x \in X)(f^s(x) = x)\}$, el conjunto de todos los posibles períodos que puede tener un punto periódico $x \in X$.

Teorema 4 *Sea* (X, f) *un sistema dinámico, donde* X *es un espacio métrico compacto. Si* P *es un subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$ *que cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

a) *Existe* $r \in \mathbb{N}$ *tal que* P *contiene una sucesión* $A = (ra_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *donde* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de primos relativos,*

b) *Sea* A *un subconjunto de* P *tal que para cualesquiera* $c, b \in A$ *donde* $c < b$, *entonces* $c|b$,

entonces $E(X, f)$ *es no numerable.*

Teorema 5 *Sean* (X, f) *un sistema dinámico, donde* X *es un espacio métrico compacto numerable tal que cada* $a \in X'$ *es fijo. Si* P *es un subconjunto finito de* $\mathbb{N}$, *entonces* $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ *es finito.*

(iii) *Compactificación de* $\mathbb{N}$. Recordemos que el semigrupo que $E(X, f)$ es la clausura del conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ en el espacio producto X^X y por consiguiente $E(X, f)$ es compacto. Por esta razón, en [GM07], S. García y M. Sanchis tratan el problema de

¿Cuándo el semigrupo de Ellis es una compactificación de $\mathbb{N}$?

(ver también [G10]). Para esto, ellos prueban una condición suficiente y necesaria para que el conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ sea discreto en $E(X, f)$ y de esta forma, $E(X, f)$ sea una compactificación de $\mathbb{N}$.

Con respecto a esta pregunta, siguiendo las ideas de S. García y M. Sanchis, nosotros presentaremos la próxima condición suficiente y necesaria para que el conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ sea discreto en el semigrupo de Ellis, donde X es un espacio métrico compacto numerable. De este modo, el semigrupo de Ellis será una compactificación de $\mathbb{N}$.

Teorema 6 *Sean (X, f) un sistema dinámico, donde X es un espacio métrico compacto numerable. El conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto en $E(X, f)$ si sólo si para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un $w_m \in X$ tal que $f^i(w_m)$, $0 \leqslant i \leqslant m$ no son puntos periódicos.*

Al inicio de nuestra investigación, estabamos interesados principalmente en determinar la complejidad de conjuntos de la forma

$$S(\varrho) = \{f \in C(X, X) : f \text{ satisface la propiedad } \varrho(f)\},$$

donde $\varrho(f)$ denotaba cualquiera de las siguientes tres propiedades: $E(X, f)$ es metrizable, es WAP o tiene cardinalidad a lo sumo $2^{\aleph_0}$ para X un espacio métrico compacto arbitrario (no necesariamente numerable). Rapidamente nos dimos cuenta que esos problemas eran mas complejos de lo que previmos, y por esa razón nos concentramos en analizarlos en el caso en que X es numerable. Mostraremos algunos resultados donde hemos determinado la complejidad de conjuntos $S(\varrho)$ cuando $\varrho(f)$ denota la propiedad: $E(X, f)$ es WAP, estableciendo condiciones sobre el sistema dinámico (X, f). Sin embargo, sigue siendo interesante encontrar solución al problema inicial en el futuro.

La complejidad de estos conjuntos se medirá usando uno de los conceptos mas básicos de la teoría descriptiva de conjuntos [AK], esto es, la jerarquía boreliana y proyectiva de subconjuntos de un espacio polaco (i.e. métrico, separable y completo). En general, determinar la complejidad exacta de conjuntos como estos, no es fácil.

Este enfoque ya ha sido usado para analizar los sistemas dinámicos. Para ilustrar este hecho, presentaremos un par de resultados tomados de [AK], obtenidos por A. Kechris y otro por F. Beleznay y M. Foreman (para este segundo resultado, también ver [BF95]).

La idea de estudiar la complejidad de familias de sistemas dinámicos que cumplen las propiedades $\varrho(f)$ y las propiedades topológicas que hemos mencionado anteriormente sobre el semigrupo de Ellis, surgió del curso "Aplicaciones de los Ultrafiltros a Sistemas dinámicos discretos", dictado por el profesor Salvador García Ferreira (Universidad Nacional Autónoma de México) durante la XXIII Escuela Venezolana de Matemáticas y de los trabajos [GM07], [G12].

El presente trabajo está estructurado en cinco capítulos. En el capítulo *Preliminares*, se presentarán las definiciones y resultados propios de las áreas: topología, teoría descriptiva de conjuntos y sistemas dinámicos, que son fundamentales para nuestro trabajo. En el capítulo *Antecedentes*, presentaremos los resultados mencionados anteriormente, así como otros que fueron hallados en la revisión bibliográfica junto a las preguntas que surgieron en el transcurso de esta investigación. En los capítulos *Sistemas Dinámicos WAP*, *Cardinalidad del Semigrupo de Ellis* y $E(X, f)$ *como compactificación de* $\mathbb{N}$, exhibiremos con detalle los resultados que hemos obtenido durante nuestro estudio sobre los sistemas dinámicos WAP, cardinalidad del semigrupo de Ellis y condiciones para que $E(X, f)$ sea una compactificación de $\mathbb{N}$, respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentarán los aspectos de topología, teoría descriptiva y sistemas dinámicos necesarios para nuestro trabajo.

1.1. Nociones Básicas de Topología

En esta sección, introduciremos algunos aspectos de topología necesarios para nuestro trabajo. En la mayor parte de nuestro estudio, trabajaremos con espacios métricos compactos numerables.

Primero, veremos las definiciones de filtros y ultrafiltros en $\mathbb{N}$. Los ultrafiltros en $\mathbb{N}$ los clasificaremos en dos tipos: los ultrafiltros fijos y los libres. Para la construcción de ultrafiltros libres se usará el Lema de Zorn, mientras los ultrafiltros fijos son sencillos de construir. Finalmente, enunciaremos algunas caracterizaciones de los ultrafiltros y veremos algunos ejemplos de ellos (ver [CN]).

Los ultrafiltros son fundamentales para enunciar el teorema 1.3.11, donde se caracteriza el semigrupo de Ellis en términos de ultrafiltros. Este teorema se ha usado para la obtención de los resultados sobre el semigrupo de Ellis, de García y Sanchis en [GM07], [G10], [G12].

Segundo, introducimos el conjunto $\beta\mathbb{N}$ que consiste de todos los ultrafiltros en $\mathbb{N}$. Dotaremos a este conjunto de una topología con la cual $\beta\mathbb{N}$ resulta ser la compactificación de Stone-$\check{C}$ech de los naturales. Así mismo, definiremos una operación $+$ sobre $\beta\mathbb{N}$ que extiende a la adición en los números naturales, la cual es asociativa, por lo que el par $(\beta\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo.

Finalmente, en esta sección definiremos los p−límites, donde p es un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ y mostraremos algunos resultados respecto a ellos.

El uso de la teoría combinatoria y de los filtros para analizar sistemas dinámicos es antiguo. H. Furstenberg, en [F81], analizó la noción de proximalidad y recurrencia de puntos en sistemas dinámicos, usando familias de conjuntos con la propiedad de intersección finita. Siguiendo las ideas de H. Furstenberg, E. Akin en [A97], estudió también la recurrencia en sistemas dinámicos usando filtros y ultrafiltros. Posteriormente, A. Blass en [B93] estudia propiedades dinámicas de sistemas dinámicos vinculandolas a propiedades combinatorias y topológicas de los ultrafiltros. Así mismo, S. García y M. Sanchis en [GM07], [G12], usando ultrafiltros en $\mathbb{N}$, estudian propiedades topológicas de sistemas dinámicos en espacios compactos Hausdorff.

1.1.1 Filtros y Ultrafiltros

Veamos la definición de filtro en $\mathbb{N}$.

Definición 1.1.1 *Un filtro $\mathfrak{F}$ en $\mathbb{N}$ es una familia no vacia de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$ tales que*

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
2. *Si $A \in \mathfrak{F}$ y $A \subset B$, entonces $B \in \mathfrak{F}$.*
3. *Si $A, B \in \mathfrak{F}$, entonces $A \cap B \in \mathfrak{F}$.*

El filtro mas sencillo sobre $\mathbb{N}$ es $\{\mathbb{N}\}$.

Ejemplo 1.1.2 *Un filtro muy conocido en la literatura es el Filtro de Fréchet de $\mathbb{N}$, el cual es $\mathfrak{F}_r = \{A \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) : A^c \text{ es finito}\}$.*

Ejemplo 1.1.3 *Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos el filtro $\mathfrak{F}_n = \{A \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) : n \in A\}$.*

En general, es sencillo construir filtros. Para eso usamos familias con la propiedad de intersección finita.

Definición 1.1.4 *Sea $\mathcal{D}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$. Diremos que $\mathcal{D}$ tiene la propiedad de intersección finita si la intersección de una cantidad finita de cualesquiera elementos de $\mathcal{D}$ es no vacía.*

El teorema siguiente nos muestra como generar filtros en $\mathbb{N}$ usando familias de conjuntos $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{N})$ con la propiedad de intersección finita.

Teorema 1.1.5 *Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{N})$ una familia con la propiedad de intersección finita, entonces el conjunto $\mathfrak{D} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\exists D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D})(\cap_{i=1}^{n} D_i \subseteq A)\}$ es un filtro en* $\mathbb{N}$.

Demostración. Sean $A, B \in \mathfrak{D}$. Luego, existen $A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{D}$ tales que $\cap_{i=1}^{s} A_i \subseteq A$ y $\cap_{i=1}^{n} B_i \subseteq B$. Por tanto, $(\cap_{i=1}^{s} A_i) \cap (\cap_{i=1}^{n} B_i) \subseteq A \cap B$ y $A \cap B \in \mathfrak{D}$. Por otra parte, supongamos que $H \in \mathfrak{D}$ y $H \subseteq K$. Entonces, existen $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{D}$ tales que $\cap_{i=1}^{n} H_i \subseteq H$. Notemos que $\cap_{i=1}^{n} H_i \subseteq K$, por lo que $K \in \mathfrak{D}$. Así, $\mathfrak{D}$ es un filtro en $\mathbb{N}$. ■

Como mencionamos antes, en el inicio del capítulo, nosotros clasificaremos los filtros en dos tipos: filtros fijos y filtros libres.

Definición 1.1.6 *Un filtro $\mathfrak{F}$ se dice que es un filtro fijo si $\cap_{B \in \mathfrak{F}} B \neq \emptyset$. Un filtro que no es fijo se le llama filtro libre.*

El filtro de Fréchet es claramente un filtro libre. Los filtros que son de la forma $\mathfrak{F}_A = \{F \subseteq \mathbb{N} : A \subseteq F\}$, en donde $A \subset \mathbb{N}$ es no vacío, son ejemplos de filtros fijos.

La siguiente proposición nos da una regla sencilla para determinar si un filtro es fijo.

Proposición 1.1.7 *Un filtro $\mathfrak{F}$ en $\mathbb{N}$ es fijo si y sólo si existe un subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_A$.*

Demostración. Si $\mathfrak{F}$ es fijo, $\cap_{B \in \mathfrak{F}} B = A$, por lo que $A \subseteq B$ para cada $B \in \mathfrak{F}$ y $B \in \mathfrak{F}_A$. Concluyéndose que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_A$. Reciprocamente, sea $A \subset \mathbb{N}$. Si $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_A$, se tiene que $A \subseteq \cap_{B \in \mathfrak{F}} B$ y $\mathfrak{F}$ es un filtro fijo. ■

Así mismo, tenemos la siguiente caracterización de los filtros libres.

Proposición 1.1.8 *Un filtro $\mathfrak{F}$ en $\mathbb{N}$ es libre si y sólo si $\mathfrak{F}_r \subseteq \mathfrak{F}$.*

Demostración. Si $\mathfrak{F}_r \subseteq \mathfrak{F}$, entonces $\cap_{B \in \mathfrak{F}} B \subseteq \cap_{D \in \mathfrak{F}_r} D = \emptyset$. Por lo que $\mathfrak{F}$ es un filtro libre. Supongamos ahora que $\cap_{B \in \mathfrak{F}} B = \emptyset$ y que $(\mathfrak{F}_r)^c \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$. Luego existe un subconjunto finito $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ de $\mathbb{N}$ tal que $H^c \notin \mathfrak{F}$. Por ser $\mathfrak{F}$ libre, para cada $i \leqslant n$

podemos encontrar un $H_i \in \mathfrak{F}$ tal que $h_i \notin H_i$. Sea $S = \cap_{i \leqslant n} H_i$. Observemos que $S \in \mathfrak{F}$ y $S \cap H = \emptyset$. Por lo cual, $S \subseteq H^c$ y por ser $\mathfrak{F}$ un filtro, concluimos que $H^c \in \mathfrak{F}$. De esta contradicción, se sigue que $\mathfrak{F}_r \subseteq \mathfrak{F}$. ■

Los filtros en los que estamos principalmente interesados son los ultrafiltros.

Definición 1.1.9 *Un filtro $\mathfrak{F}$ en $\mathbb{N}$ se llama ultrafiltro si no está contenido propiamente en otro filtro.*

Como se muestra en el ejemplo 1.1.3, es sencillo construir un ultrafiltro fijo, sin embargo, no ocurre eso mismo con los ultrafiltros libres. La existencia de ultrafiltros libres está garantizada por el Lema de Zorn (ver [Di]).

Lema 1.1.10 *(Lema de Zorn) Sea U un conjunto ordenado tal que todo subconjunto bien ordenado de U tiene una cota superior. Entonces U tiene un elemento maximal.*

Teorema 1.1.11 *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Demostración. Sean $\mathfrak{F}$ un filtro en $\mathbb{N}$ y

$$\mathcal{S} = \{\mathfrak{H} : \mathfrak{H} \text{ es un filtro en } \mathbb{N} \text{ y } \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}\}.$$

Notemos que $\subseteq$ es un orden parcial en $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{C}$ es una cadena bien ordenada de $\mathcal{S}$, tendremos que $\cup\mathcal{C}$ es un filtro que está en $\mathcal{S}$ y además es una cota superior de la cadena $\mathcal{C}$. Por el Lema de Zorn, el conjunto $\mathcal{S}$ tiene un elemento maximal $\mathfrak{U}$, el cual es un ultrafiltro. ■

Corolario 1.1.12 *Toda familia de subconjuntos no vacios de $\mathbb{N}$ con la propiedad de intersección finita está contenida en un ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$ con la propiedad de intersección finita. Como por el teorema 1.1.5,

$$\mathfrak{D} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\exists D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D})(\cap_{i=1}^{n} D_i \subseteq A)\}$$

es un filtro en $\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{D}$. Por el teorema 1.1.11, existe un ultrafiltro $\mathfrak{P}$ tal que $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}$, por lo que $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}$. ■

Veamos algunas propiedades que caracterizan a los ultrafiltros.

Teorema 1.1.13 *Las siguientes propiedades son equivalentes para un filtro $\mathfrak{F}$ en $\mathbb{N}$:*

1. *$\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro.*
2. *Para cada $A \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$, $A \in \mathfrak{F}$ ó $A^c \in \mathfrak{F}$.*
3. *Para cada $A \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathfrak{F}$ existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $A \cap F = \emptyset$.*
4. *Si $A \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$ y $A \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathfrak{F}$, entonces $A \in \mathfrak{F}$.*
5. *$\mathfrak{F}$ está contenido en un único ultrafiltro.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $A \notin \mathfrak{F}$ y $A^c \notin \mathfrak{F}$. Veamos que $\mathfrak{F} \cup \{A^c\}$ tiene la propiedad de intersección finita. En caso contrario, existen $A_1,\ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ tales que la intersección $A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A^c = \emptyset$. Siguiendo de esto que, $A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq A$ y $A \in \mathfrak{F}$. Lo cual es imposible. De igual modo, se puede mostrar que $\mathfrak{F} \cup \{A\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Por el corolario anterior, existen ultrafiltros $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ en $\mathbb{N}$ tales que $\mathfrak{F} \cup \{A^c\} \subseteq \mathfrak{U}$ y $\mathfrak{F} \cup \{A\} \subseteq \mathfrak{V}$. Por esta contradicción, obtenemos que o bien $A \in \mathfrak{F}$ o bien $A^c \in \mathfrak{F}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $A \notin \mathfrak{F}$, entonces $A^c \in \mathfrak{F}$ y $A^c \cap A = \emptyset$.

3) $\Rightarrow$ 4) Si $A \notin \mathfrak{F}$, existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $A \cap F = \emptyset$. Pero esto no es posible. Por lo que $A \in \mathfrak{F}$.

4) $\Rightarrow$ 5) Sea $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$. Sea $B \in \mathfrak{U} \setminus \mathfrak{F}$. Podemos mostrar que $\mathfrak{F} \cup \{B\}$ tiene la propiedad de intersección de forma análoga que en el caso 1) $\Rightarrow$ 2). Por hipótesis, $B \in \mathfrak{F}$.

5) $\Rightarrow$ 1) Es evidente. ■

1.1.2 El semigrupo $\beta\mathbb{N}$

Denotaremos por $\beta\mathbb{N}$, al conjunto de todos los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$. A cada número natural n, lo identificaremos con el ultrafiltro fijo

$$\mathfrak{F}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}.$$

De este modo, $\mathbb{N}$ se puede ver como un subconjunto de $\beta\mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathbb{N}^*$, al conjunto de ultrafiltros libres en $\mathbb{N}$. A partir de este momento, denotaremos los ultrafiltros con letras minúsculas. Por ejemplo: p,q,r.

Existe una enorme cantidad de ultrafiltros libres en $\mathbb{N}$, como lo muestra el siguiente teorema (ver [CN]).

Teorema 1.1.14 *Existen 2^{2^ω} ultrafiltros libres en $\mathbb{N}$.*

Dado un $A \subseteq \mathbb{N}$, consideremos los siguientes subconjuntos de $\beta\mathbb{N}$,

$$\widehat{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} : A \in p\} \text{ y } A^* = \{p \in \beta\mathbb{N} : A \in p \text{ y } p \notin \mathbb{N}\}$$

Al conjunto $\widehat{\{n\}}$ lo denotaremos como $\widehat{n}$. En el siguiente teorema se muestran algunas propiedades de estos subconjuntos de $\beta\mathbb{N}$.

Teorema 1.1.15 *Sean $A, B \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $A \subseteq B$, entonces $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$.*
2. $\widehat{A} \cup \widehat{B} = \widehat{A \cup B}$.
3. $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \widehat{A \cap B}$.
4. $\widehat{\mathbb{N} \setminus A} = \beta\mathbb{N} \setminus \widehat{A}$.

Demostración.

1. $p \in \widehat{A} \Rightarrow A \in p \Rightarrow B \in p \Rightarrow p \in \widehat{B}$.
2. $p \in \widehat{A} \cup \widehat{B} \Leftrightarrow A \in p$ ó $B \in p \Leftrightarrow A \cup B \in p \Leftrightarrow p \in \widehat{A \cup B}$.
3. $p \in \widehat{A} \cap \widehat{B} \Leftrightarrow A \in p$ y $B \in p \Leftrightarrow A \cap B \in p \Leftrightarrow p \in \widehat{A \cap B}$.
4. $p \in \widehat{\mathbb{N} \setminus A} \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus A \in p \Leftrightarrow A \notin p \Leftrightarrow p \in \beta\mathbb{N} \setminus \widehat{A}$. ■

La colección $\{\widehat{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$ es una base para la topología en $\beta\mathbb{N}$. Nosotros veremos que dotando a $\beta\mathbb{N}$ con esta topología, $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$.

Definición 1.1.16 *Sea X un espacio completamente regular no compacto. La compactificación de Stone-Čech de X , denotada por βX, es la compactificación que se caracteriza por ser la única compactificación tal que cualquier aplicación continua $f : X \to C$ en un espacio de Hausdorff compacto C, se extiende de forma única a una aplicación continua $g : \beta X \to C$.*

Para nuestro trabajo sólo usaremos la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ (con la topología obtenida en el teorema 1.1.15). Es importante destacar que, $\beta\mathbb{N}$ coincide con la colección de todos los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ (ver [ST]). Un resultado fascinante sobre el espacio $\beta\mathbb{N}$ es el siguiente (ver [ST]).

Teorema 1.1.17 *$\beta\mathbb{N}$ no contiene sucesiones convergentes no triviales.*

En el siguiente teorema, se muestra que $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-Čech de los números naturales con la topología cuya base fue obtenida en el teorema 1.1.15. Para demostrar este teorema usaremos el siguiente lema que enunciaremos sin demostración (ver [ST]).

Lema 1.1.18 *Sean $B_1, \ldots, B_n \subseteq \mathbb{N}$. Luego, la intersección $\cap_{i=1}^{n} B_i = \emptyset$ si y sólo si $\cup_{i=1}^{n} \widehat{(\mathbb{N} \setminus B_i)} = \beta\mathbb{N}$.*

Teorema 1.1.19 *El espacio $\beta\mathbb{N}$ cumple las siguientes condiciones:*

1. *$\beta\mathbb{N}$ es un espacio Hausdorff compacto.*
2. *$\mathbb{N}$ es un subconjunto denso discreto de $\beta\mathbb{N}$.*
3. *Dada cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se puede extender a una función continua $\widehat{f} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$.*
4. *$\widehat{A}$ es un subconjunto abierto-cerrado de $\beta\mathbb{N}$, para cada $A \subseteq \mathbb{N}$.*
5. *$cl_{\beta\mathbb{N}}(A) = \widehat{A}$, para todo $A \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

1. Supongamos que existe una colección $S \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{N})$ tal que $\beta\mathbb{N} \subseteq \cup_{A \in S} \widehat{A}$ y no tiene subcubrimiento finito. Sea $H = \{\mathbb{N} \setminus A : A \in S\}$. Por el lema 1.1.18, H tiene la propiedad de intersección finita. Por tanto H se puede extender a un ultrafiltro $\mathfrak{F}$. Pero, $\mathfrak{F} \in \cup_{A \in S} \widehat{A}$. Lo cual es una contradicción.

2. Es claro que en $\widehat{n}$ el único ultrafiltro fijo es $\mathfrak{F}_n$. Por lo que $\mathbb{N}$ es un subconjunto discreto de $\beta\mathbb{N}$. Por otra parte, para cada $p \in \beta\mathbb{N}$ y $D \in p$ existe un número $n \in D$, de lo que sigue que $\mathfrak{F}_n \in \widehat{D}$. Así, $\mathbb{N}$ es un subconjunto denso en $\beta\mathbb{N}$.

3. Consideremos la función dada por $\widehat{f}(p) = \{C \subseteq \mathbb{N} : f^{-1}(C) \in p\}$. Claramente, para cada $p \in \beta\mathbb{N}$, $\widehat{f}(p)$ es un ultrafiltro. Veamos que $\widehat{f}$ es continua. Efectivamente, sea $p \in \beta\mathbb{N}$ y $C \in \widehat{f}(p)$. De acá que, $f^{-1}(C) \in p$. Luego, para cada $q \in \widehat{f^{-1}(C)}$ se tiene que $\widehat{f}(q) \in \widehat{C}$, es decir, $C \in \widehat{f}(q)$. Por tanto $\widehat{f}$ es una función continua que claramente extiende a f.

4. Basta ver que $\beta\mathbb{N} = \cup_{A \subseteq \mathbb{N}} \widehat{A}$.

5. Es evidente. ■

Ahora veremos como extender la adición de $\mathbb{N}$ al conjunto $\beta\mathbb{N}$.

Definición 1.1.20 *Sean $p,\ q \in \beta\mathbb{N}$, la operación $+ : \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ se define de la siguiente manera*

$$p + q = \{A \subseteq \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : k + n \in A\} \in p\} \in q\}.$$

En general $p + q \neq q + p$. Del siguiente teorema, podemos concluir que esta operación $+$ extiende a la adición en los números naturales y que $(\beta\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo (ver [G10] o [ST]).

Teorema 1.1.21 *Para cada $p,\ q,\ r \in \beta\mathbb{N}$ se tiene que*

1. $p + q \in \beta\mathbb{N}$.

2. $(p + q) + r = p + (q + r)$.

Además, la operación $+$ en $\beta\mathbb{N}$ extiende la adición de $\mathbb{N}$.

1.1.3 p-límites

En esta sección definiremos los $\mathfrak{F}-$límites de una sucesión en un espacio topológico X, donde $\mathfrak{F}$ es un filtro. De igual modo, en el caso que $\mathfrak{F}$ sea un ultrafiltro mostraremos su existencia en espacios compactos y caracterizaremos la adición en $\beta\mathbb{N}$, en términos de $\mathfrak{F}-$límites cuando $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro. Denotaremos por $\mathcal{N}(x)$ a la colección de todos los entornos de x.

Definición 1.1.22 *Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{F}$ un filtro en $\mathbb{N}$. Decimos que un punto $x \in X$ es un $\mathfrak{F}-$límite de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si para toda vecindad V de x, se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathfrak{F}$. Al $\mathfrak{F}-$límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nosotros lo denotaremos por $x = \mathfrak{F} - \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Definición 1.1.23 *Sean X un espacio topológico y $H \subseteq X$. Diremos que $x \in X$, es un punto adherente de H si $x \in \overline{H}$.*

Intentemos entender como un ultrafiltro $p \in \beta\mathbb{N}$ escoge el $p-$límite de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el intervalo $[0, 1]$. Si dividimos el intervalo $[0, 1]$ en dos partes iguales $A_1 = [0, \frac{1}{2}]$ y $A_2 = [\frac{1}{2}, 1]$, por la propiedad (2) del teorema 1.1.13, el ultrafiltro p selecciona los elementos de la sucesión que estan en A_1 ó en A_2. Supongamos sin perdida de generalidad, que selecciona los elementos de A_1. Nuevamente, dividimos el intervalo A_1 en dos partes iguales $A_{11} = [0, \frac{1}{4}]$ y $A_{12} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Por la propiedad (2) del teorema 1.1.13, el ultrafiltro p selecciona los elementos de la sucesión que estan en A_{11} ó en A_{12}. Supongamos sin perdidad de generalidad, que el ultrafiltro selecciona los elementos de A_{11}. Repetimos el mismo proceso con A_{11}, dividiendo en $A_{111} = [0, \frac{1}{8}]$ y $A_{112} = [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$. Supongamos sin perdida de generalidad, que el ultrafiltro selecciona los elementos de la sucesión que estan en A_{111}. Continuando con este proceso, obtendremos el $p-$límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En el próximo teorema se relacionan los $p-$límites, donde $p \in \beta\mathbb{N}$ son los puntos de adherencia de una sucesión. En este sentido, este teorema nos da una idea más clara de lo que es el $p-$límite de una sucesión.

Teorema 1.1.24 *Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es un punto de adherencia del conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ si y sólo si existe un $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. Un punto $x \in X \setminus A$ es un punto de acumulación de A si y sólo si existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Demostración. Es claro que, si $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, x es un punto de adherencia de A. Reciprocamente, si x es un punto de adherencia del conjunto A, tendremos que la familia $\mathcal{A} = \{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} : V \text{ es un entorno de } x\}$, tiene la propiedad de intersección finita. Por tanto, existe un ultrafiltro $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq p$. Finalmente, obtenemos que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$.

Para el caso que, $x \in X \setminus A$ es un punto de acumulación de A, la demostración es análoga. ■

A continuación, se garantiza la existencia y unicidad de los $p-$límites de sucesiones en un espacio compacto Hausdorff.

Teorema 1.1.25 *Si X es un espacio compacto Hausdorff, entonces para cada ultrafiltro $p \in \beta\mathbb{N}$ y cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tendremos que $p - \lim_{n\to\infty} x_n$ existe y es único.*

Demostración. Sea $\mathcal{H} = \{\overline{\{x_n : n \in A\}} : A \in p\}$ una familia de subconjuntos compactos de X. Es Obvio, que esta familia tiene la propiedad de intersección finita y que por ser X compacto $\cap_{A\in p}\{\overline{\{x_n : n \in A\}} : A \in p\} \neq \emptyset$. Sea $x \in \cap_{A\in p}\{\overline{\{x_n : n \in A\}} : A \in p\}$. Veamos que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. Sean V un entorno de x y $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$. Puesto que, $x \in \overline{\{x_n : n \in A\}}$, tendremos que $B \cap A \neq \emptyset$ para cada $A \in p$. Luego, $B \in p$ y así $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$.

Ahora, veamos que si X es Hausdorff, el $p-$límite es único. Sea $y \in X$, $y \neq x$ tal que $y = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. Sean U, V abiertos disjuntos de x y y respectivamente. Luego, $U_p = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \in p$ y $V_p = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in p$, por lo que existe $n \in U_p \cap V_p$ y $x_n \in U \cap V$. Lo cual es una contradicción. ■

Así como, una función continua preserva la convergencia de una sucesión, las funciones continuas preservan los $p-$límites.

Teorema 1.1.26 *Sean $f : X \to X$ una función continua y un ultrafiltro $p \in \mathbb{N}^*$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X y $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, entonces*

$$f(x) = p - \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Demostración. Sea V un entorno de $f(x)$. Como $f^{-1}(V)$ es un entorno de x, tenemos que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in f^{-1}(V)\} \in p$. Luego, $\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \in V\} \in p$. Concluyéndose que, $f(x) = p - \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. ■

Como dijimos al inicio de esta sección, la operación $+$ en $\beta\mathbb{N}$ se puede caracterizar en términos de $p-$límites de la siguiente manera:

Para $p \in \beta\mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$p + n = p - \lim_{m\to\infty} m + n.$$

Para $p, q \in \beta\mathbb{N}$,

$$p + q = q - \lim_{n\to\infty} p + n.$$

Para concluir esta sección veremos el siguiente teorema que será muy útil para el estudio del semigrupo de Ellis de sistemas dinámicos en el futuro.

Teorema 1.1.27 *Sean X un espacio Hausdorff. Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X y para $p, q \in \mathbb{N}^*$ se cumple la identidad*

$$(p+q) - \lim_{k\to\infty} x_k = q - \lim_{m\to\infty} (p - \lim_{n\to\infty} x_{m+n})$$

Demostración. Sean

$$x = (p+q) - \lim_{k\to\infty} x_k \quad \text{y} \quad y = q - \lim_{m\to\infty} (p - \lim_{n\to\infty} x_{m+n}).$$

Sean V y U abiertos de x y y respectivamente tales que $V \cap U \neq \emptyset$. Entonces, el conjunto $A = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in V\} \in p + q = q - \lim_{m\to\infty}(p+m)$. Por otro lado, tenemos que $B = \{m \in \mathbb{N} : p + m \in A^*\} \in q$ y $C = \{m \in \mathbb{N} : p - \lim_{n\to\infty} x_{m+n} \in U\} \in q$. Fijemos $m \in B \cap C$. Luego, $p + m \in A^*$ y $E = \{n \in \mathbb{N}; x_{m+n} \in U\} \in p$. Como $p + m = p - \lim_{n\to\infty} m + n$, se debe cumplir que $F = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in A\} \in p$. Ahora, tomemos $n \in E \cap F$. Se sigue que $m + n \in A$ y por ello $x_{m+n} \in V \cap U$. Lo cual es imposible. Por tanto, $x = y$. ■

1.1.4 Conjuntos Perfectos

Ahora, introduciremos la definición de los conjuntos perfectos, para después hablar de la derivada de Cantor-Bendixon de un espacio X y el rango de Cantor-Bendixon de un subconjunto cerrado de X.

Definición 1.1.28 *Un conjunto cerrado no vacio es perfecto si no tiene puntos aislados.*

Los conjuntos perfectos son importantes en matemática, por las propiedades topológicas que poseen.

Definición 1.1.29 *Sea A un conjunto de conjuntos. Diremos que A es transitivo si para cada $B \in A$ y cualquier conjunto C, se tiene que si $C \in B$, entonces $C \in A$.*

Ahora, hablaremos un poco de ordinales.

Definición 1.1.30 *Un ordinal es un conjunto transitivo bien ordenado por la relación de pertenencia "$\in$".*

Un ordinal α se dice que es sucesor si existe un ordina β tal que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Un ordinal que no es sucesor, se dice que es límite.

Definición 1.1.31 *Sean X un espacio métrico con una base numerable y $H \subset X$ cerrado. Definimos la derivada de Cantor-Bendixon de H, de la siguiente manera:*

$$H' = \{x \in H : x \text{ no es aislado en } H\}.$$

Esta operación elimina los puntos aislados de H. Esta se puede repetir y obtener una cadena de subconjuntos encajados de H. Mas precisamente, definimos por recursión transfinita, donde λ es un ordinal límite

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= H' \\ H^{(\alpha+1)} &= (H^{(\alpha)})' \\ H^{(\lambda)} &= \cap_{\alpha<\lambda} H^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Definición 1.1.32 *Sea H un subconjunto cerrado de un espacio métrico X con base numerable. Se denomina rango de Cantor-Bendixon de H, y se denota por $|H|_{CB}$, al primer ordinal α tal que $H^{(\alpha)} = H^{(\alpha+1)}$. Sea $a \in X$. Se denomina rango de Cantor-Bendixon de a, y se denota por $|a|_{CB}$, al primer ordinal α tal que $a \in H^{(\alpha)}$ y $a \notin H^{(\alpha+1)}$.*

Claramente, el rango de Cantor-Bendixon de un conjunto perfecto es 0. Por otra parte, si $|H|_{CB} = \alpha$ y H es numerable tendremos que $H^{(\alpha)} = \emptyset$. Si H es no numerable, $H^{(\alpha)}$ es perfecto. En cierto modo, el rango de Cantor-Bendixon nos da una idea de cuán cercano a un conjunto perfecto es un conjunto cerrado no numerable H.

1.1.5 Compactos de Rosenthal

Antes que todo, veremos lo que es una función de primera clase de Baire, las cuales son imprescindibles para definir lo que es un compacto de Rosenthal.

Definición 1.1.33 *Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice que es una función de primera clase de Baire si existe una sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge puntualmente a f, es decir, $f(x) = \lim f^n(x)$ para todo $x \in X$.*

El conjunto de funciones de primera clase de un espacio X, se denota por $\mathbb{B}_1(X)$. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1.34 *Las funciones que son discontinuas en a lo sumo un conjunto numerable son de primera clase de Baire.*

Ejemplo 1.1.35 *El ejemplo típico de una función boreliana que no es de primera clase de Baire es la función característica de los racionales $\chi_{\mathbb{Q}}$.*

En torno a los compactos de funciones de primera clase, presentaremos la siguiente dicotomía, enunciada como aparece en [ST].

Teorema 1.1.36 *(Dicotomía de Rosenthal) Sean X un espacio polaco y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas a valores reales acotadas puntualmente. Sea K la clausura puntual de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^X$. Luego, $K \subseteq \mathbb{B}_1(X)$ ó K contiene una copia homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$.*

Ahora veremos la definición de un compacto de Rosenthal, los cuales fueron introducidos por H. Rosenthal.

Definición 1.1.37 *Un compacto de Rosenthal es un compacto que es homeomorfo a un subconjunto compacto de $\mathbb{B}_1(X)$ dotado de la topología producto.*

A continuación, daremos ejemplos de Compactos de Rosenthal.

Ejemplo 1.1.38 *Todo compacto métrico es un compacto de Rosenthal.*

Ejemplo 1.1.39 *El compacto de Helley compuesto por las funciones no decrecientes de $[0,1]$ sobre sí mismo. Este espacio es separable y es un ejemplo de un compacto de Rosenthal no metrizable.*

Notemos que en el teorema 1.1.36, si K cumple la primera condición de la dicotomía, entonces K es un compacto de Rosenthal. Veamos lo que es un espacio Fréchet.

Definición 1.1.40 *Un espacio K es espacio de Fréchet si para cada $A \subseteq K$ y todo $x \in A$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que* $\lim x_n = x$.

Observemos que, todo espacio métrico es de Fréchet. El siguiente teorema es de J. Bourgain, D. H. Fremlim y M. Talagrand, demostrado en [BFT]. Este teorema nos muestra cuál es la estructura topológica de un compacto de Rosenthal.

Teorema 1.1.41 *(Bourgain-Fremlim-Talagrand) Cada compacto de Rosenthal es Fréchet.*

La prueba de este teorema es bastante complicada. No obstante, la conclusión es extraordinaria, puesto que este teorema exhibe que la estructura topológica de un compacto de Rosenthal es "sencilla", puesto que, es muy parecida a la de los espacios métricos.

1.2. Nociones Básicas de Teoría Descriptiva de Conjuntos

En esta sección, introduciremos conceptos y resultados concernientes a la *teoría descriptiva de conjuntos*, que usaremos para analizar sistemas dinámicos en espacios métricos compactos. La *teoría descriptiva de conjuntos* es un área de la matemática que analiza la estructura de familias de subconjuntos de un espacio polaco.

Definición 1.2.1 *Un espacio topológico X es un espacio polaco si es separable y existe una métrica d sobre X compatible con la topología (es decir, los abiertos con respecto a d son exactamente los abiertos de X) y tal que $(X; d)$ es completo.*

Recordemos que los conjuntos borelianos de un espacio topológico X son los elementos de la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos abiertos de X. La Teoría Descriptiva clasifica los subconjuntos borelianos de un espacio Polaco X, de acuerdo a la estructura de estos subconjuntos. Esto permite definir la jerarquia Boreliana que veremos a continuacion (ver [AK]).

Definición 1.2.2 *Sea X un espacio polaco. Se definen las siguientes colecciones de subconjuntos de X*

$$\Sigma_1^0(X) \text{ es la colección de los abiertos de } X,$$

$$\Pi_1^0(X) \text{ la colección de los cerrados de } X,$$

y

$$\Delta_1^0 = \Sigma_1^0(X) \cap \Pi_1^0(X).$$

Inductivamente definimos, para $1 < \alpha < \omega_1$ (donde ω_1 denota el primer ordinal no numerable) las siguientes colecciones de subconjuntos de X.

$$\Sigma_\alpha^0(X) = \{\bigcup_n A_n : A_n \in \Pi_{\alpha_n}^0(X), \alpha_n < \alpha, n \in \mathbb{N}\} \text{ si } \alpha > 1.$$

$$\Pi_\alpha^0(X) = \{X \setminus A : \ A \in \Sigma_\alpha^0(X)\},$$

y

$$\Delta_\alpha^0(X) = \Sigma_\alpha^0(X) \cap \Pi_\alpha^0(X).$$

El siguiente resultado puede verse en [AK]; y muestra que la unión de todas las clases definidas anteriormente es exactamente la $\sigma-$algebra de Borel de X.

Teorema 1.2.3 *Sea X un espacio polaco y $B(X)$ la $\sigma-$algebra de Borel de X. Entonces*

$$B(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha^0(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi_\alpha^0(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Delta_\alpha^0(X).$$

Las clases de la jerarquía boreliana satisfacen las relaciones que se indican en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & \Sigma_1^0(X) \subsetneqq & & \Sigma_2^0(X) \subsetneqq & \ldots \\ \Delta_1^0(X) \subsetneqq & & \Delta_2^0(X) \subsetneqq & \ldots & \\ & \Pi_1^0(X) \subsetneqq & & \Pi_2^0(X) \subsetneqq & \ldots \end{array}$$

Sea $\Gamma(X)$ cualquiera de las colecciones $\Sigma_\alpha^0(X)$, $\Pi_\alpha^0(X)$ o $\Delta_\alpha^0(X)$. Diremos que un subconjunto K de X es de clase Γ o su complejidad es Γ si $K \in \Gamma(X)$ y K no pertenece a ninguna de las colecciones anteriores.

Ejemplo 1.2.4 *Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de todos los números racionales. Notemos que, el con-*

junto $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}}\{q\}$, *es una unión numerable de conjuntos cerrados y* $\mathbb{Q} \in \Sigma_2^0(\mathbb{R})$. *Pero* $\mathbb{Q}$ *no es un subconjunto cerrado o abierto de* $\mathbb{R}$. *Además,* $\mathbb{Q}$ *no puede escribirse como intersección numerable de subconjuntos abiertos de* $\mathbb{R}$. *Debido a esto,* $\mathbb{Q}$ *es un subconjunto de complejidad* Σ_2^0 *en* $\mathbb{R}$.

Sin embargo, no todos los subconjuntos de un espacio polaco son borelianos. En este sentido, existen conjuntos más complejos para describir como son los conjuntos analíticos y coanalíticos. Denotaremos por Pr el operador proyección.

Definición 1.2.5 *Sea* X *un espacio polaco. Diremos que* A *es un subconjunto analítico de* X *si existe un espacio polaco* Y *y un subconjunto boreliano* $B \subset X \times Y$ *tal que* $A = Pr[B]$. *A la colección de subconjuntos analíticos de* X *se les denota por* $\Sigma_1^1(X)$. *Un conjunto* A *es coanalítico si* A^c *es analítico. A la colección de subconjuntos coanalíticos de* X *se le denota por* $\Pi_1^1(X)$.

Definición 1.2.6 *Sea* X *un espacio polaco. Diremos que el subconjunto* $A \subset X$ *es un subconjunto* Π_1^1-*completo de* X *si*

1. A *es* $\Pi_1^1(X)$.

2. *Para cada espacio polaco* Y *y todo* $B \in \Pi_1^1(Y)$, *existe* $f : Y \to X$ *borel medible tal que* $B = f^{-1}(A)$.

En el siguiente ejemplo veremos un conjunto que no es boreliano.

Ejemplo 1.2.7 *El conjunto*

$$D = \{f \in C[0,1] : f \text{ es diferenciable en todo punto de } [0,1]\}$$

es de complejidad Π_1^1 *en el espacio* $C[0,1]$ *con la métrica del supremo. La prueba de este hecho no es sencilla y se puede ver en [Sr] y en [AK].*

El siguiente resultado de Suslin (ver [AK]) es fundamental en teoría descriptiva de conjuntos y relaciona los conjuntos borelianos, analíticos y coanalíticos.

Teorema 1.2.8 *Sea* X *un espacio polaco y* $B(X)$ *la* $\sigma-$*algebra de Borel de* X. *Entonces*

$$B(X) = \Sigma_1^1(X) \cap \Pi_1^1(X).$$

Por último, precisemos un poco más que se entiende por complejidad de un subconjunto de un espacio polaco. Los borelianos de un espacio topológico se definen como la menor σ-álgebra que contiene a los abiertos. Uno puede entonces "medir" la complejidad de un boreliano estimando la longitud del proceso que hay que realizar para obtenerlo comenzando con una colección de conjuntos abiertos y usando solamente las operaciones de tomar uniones numerables y complementos. Es bien conocido que en un espacio polaco este proceso puede tener como longitud cualquier ordinal numerable. Por otra parte, si además incluimos la operación de tomar imágenes bajo una función continua, obtenemos conjuntos analíticos o coanalíticos. Desde ese punto de vista se considera a los conjuntos borelianos como "sencillos" y a los conjuntos analíticos y coanalíticos no borelianos como "complejos".

1.3. Nociones Básicas de Sistemas Dinámicos

En esta sección, hablaremos de aspectos básicos del área de sistemas dinámicos que son fundamentales para nuestro trabajo. Se iniciará la sección, introduciendo la idea de lo que es un sistema dinámico, la órbita de un punto, el conjunto ω-límite de un punto y las $n-$iteradas de una función. Además, definiremos el objeto fundamental de nuestro estudio: el semigrupo de Ellis. Respecto a este, presentaremos una caracterización de él en términos de ultrafiltros en $\mathbb{N}$. Para esto, se definirán las $p-$iteradas de f en un espacio compacto Hausdorff, donde $p \in \beta\mathbb{N}$.

Por último, hablaremos de los sistemas dinámicos WAP y tame. Con respecto a estos, exhibiremos algunos ejemplos y resultados sobre ellos en el siguiente capítulo.

1.3.1 Sistemas Dinámicos

Entenderemos por un sistema dinámico discreto un par (X, f), donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una función continua.

A la función f, se le considera la ley que determina la evolución del sistema dinámico, al espacio X se le llama espacio de fases y a cada $x \in X$, estados del sistema dinámico.

Llamaremos $n-$iteradas de f, a las funciones f^n, las cuales se obtienen al componer

f consigo mismo n veces. Si $n = 0$, f^0 es la función identidad en X. Claramente, para cada $n \in \mathbb{N}$, la $n-$iterada de f es una función continua.

Definición 1.3.1 *Dado un $x \in X$, entenderemos por órbita de x, denotado por $\mathcal{O}_f(x)$, al conjunto siguiente*

$$\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots\}.$$

Diremos que $z \in X$ es un punto periódico si existe un $s \geqslant 1$ tal que $f^s(z) = z$. El período de z es $s = \min\{t : f^t(z) = z\}$. Es evidente que, la órbita del punto z es $\mathcal{O}_f(z) = \{x, f(z), f^2(z), \ldots, f^{s-1}(z)\}$. Es fácil ver que, todo $y \in \mathcal{O}_f(z)$, es un punto periódico de período s. Más aún, $|\mathcal{O}_f(y)| = s$ para cada $y \in \mathcal{O}_f(z)$. Obviamente, los puntos periódicos de período $s = 1$ son los puntos fijos de f.

Por otro lado, diremos que $z \in X$ es un punto eventualmente periódico si $f^l(y)$ es periódico para algún $l \in \mathbb{N}$. Veamos que cada punto de órbita finita es eventualmente periódico.

Lema 1.3.2 *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si para algún $y \in X$, el cardinal del punto y es $|\mathcal{O}_f(y)| = r$ con $r \in \mathbb{N}$, entonces existe un punto periódico $z \in X$, de período $k \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\mathcal{O}_f(z) \subseteq \mathcal{O}_f(y)$.*

Demostración. Sea $y \in X$ tal que $|\mathcal{O}_f(y)| = r$. Como $\mathcal{O}_f(y) = \{y, f(y), \ldots f^r(y)\}$, existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $f^{r+1}(y) = f^i(y)$ y $f^{r+1-i}(f^i(y)) = f^i(y)$. Por tanto, $f^i(y)$ es un punto periódico de período $r \in \{1, \ldots, i\}$. ■

Se llamará tiempo de espera de un punto eventualmente periódico $x \in X$ a un $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(x)$ es periódico y $f^n(x)$ no es periódico para $n < l$.

En un sistema dinámico, el principal objetivo es describir el comportamiento asintótico de las órbitas de los distintos puntos de X. Para esto, introduciremos la definición del conjunto ω-límite.

Definición 1.3.3 *Sea (X, f) un sistema dinámico. El conjunto $\omega-$límite de $x \in X$, denotado por $\omega_f(x)$, es el conjunto de puntos $a \in X$ para los cuales existe una sucesión creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $f^{n_k}(x) \to a$.*

Es evidente que, para cada $y \in \mathcal{O}_f(x)$, $\omega_f(y) = \omega_f(x)$. Más aún, si $\mathcal{O}_f(y)$ contiene un punto periódico x, entonces $\omega_f(y) = \mathcal{O}_f(x)$.

Definición 1.3.4 *Sea $f : X \to X$ una función. Decimos que $H \subset X$ es $f-$invariante si H es no vacío y $f(H) \subset H$.*

Claramente, las órbitas de un sistema dinámico (X, f) y los conjuntos $\omega-$límites son subconjuntos invariantes de X. Así mismo, la clausura de las órbitas son subconjuntos invariantes de X.

Definición 1.3.5 *Sea (X, f) un sistema dinámico. Sea $y \in X$. Diremos que y es punto recurrente de X si $y \in \omega_f(y)$.*

Observemos que, los puntos periódicos son puntos recurrentes.

1.3.2 $p-$iteradas

En nuestro caso particular, estamos interesados en el estudio de sistemas dinámicos donde X es un espacio métrico compacto, ya que de esta manera, la noción de $n-$iterada de una función f donde $n \in \mathbb{N}$, se puede extender a una $p-$iterada, denotada por f^p donde $p \in \beta\mathbb{N}$.

Para esto, consideremos lo siguiente. Supongamos que, para $x, y \in X$ se tiene que $x \in \omega_f(y)$. Para cada entorno V de x, se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, y la familia de conjuntos

$$\mathcal{H} = \{\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\} : V \text{ es un entorno de } x\}$$

tiene la propiedad de intersección finita. Por el corolario 1.1.12, existe un $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H} \subseteq p$. Recordando la definición de $\mathfrak{F}$-límite, que vimos en el capítulo anterior, podemos concluir que $x = p - \lim_{n\to\infty} f^n(y)$. Considerando esto, veamos que es una $p-$iterada de f.

Definición 1.3.6 *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para $p \in \mathbb{N}^*$, la $p-$iterada de la función f es la función $f^p : X \to X$ definida por*

$$f^p(x) := p - \lim_{n\to\infty} f^n(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Es decir, para cualesquiera $x \in X$ y $V \in \mathcal{N}(f^p(x))$, se cumple que

$$\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\} \in p.$$

Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{F}$ un filtro en $\mathbb{N}$. Decimos que un punto $x \in X$ es un $\mathfrak{F}-$límite de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si para toda vecindad V de x, se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathfrak{F}$. Al $\mathfrak{F}-$límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lo denotaremos por $x = \mathfrak{F} - \text{lím}_{n\to\infty} x_n$.

Puesto que, X es un espacio métrico compacto, para cada $p \in \beta\mathbb{N}$ y cada $x \in X$, tenemos que $p - \text{lím}_{n\to\infty} f^n(x)$ existe y es único. Por tanto, la función f^p está bien definida. Observemos que, las funciones f^n corresponden a las $p-$iteradas con p un ultrafiltro fijo.

Dado que las funciones f^n con $n \in \mathbb{N}$ son continuas, podríamos pensar que, las funciones f^p con $p \in \beta\mathbb{N}$ también lo son. Como se muestra en los siguientes ejemplos, esto en general no es cierto.

Ejemplo 1.3.7 *Sean $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$ y $f : X \to X$ una función dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1, & x = \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & x = 1; \\ \frac{1}{n+1}, & x = \frac{1}{n}; n > 2. \end{cases}$$

La función f es continua en X. Por ser $x = 0$ un punto fijo, tenemos que $f^n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de $p-$límite es claro que, $f^p(0) = 0$ para cada ultrafiltro p.

Por otra parte, $x = 1$ y $x = \frac{1}{2}$ son puntos periódicos de periodo 2 y las órbitas de ambos es el mismo conjunto $\mathcal{O}_f(1) = \mathcal{O}_f(\frac{1}{2}) = \{1, \frac{1}{2}\}$. Determinemos las $p-$iteradas de estos dos puntos. Como el período de cada punto es 2, nosotros podemos descomponer al conjunto $\mathbb{N}$, en los siguientes dos subconjuntos $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$. Observemos que, $2\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}+1$ son disjuntos. Por el lema 1.1.18, clasificaremos los ultrafiltros $p \in \beta\mathbb{N}$ en dos tipos: $p \in \widehat{2\mathbb{N}}$ (es decir, $2\mathbb{N} \in p$) y $p \in \widehat{2\mathbb{N}+1}$ (es decir, $2\mathbb{N}+1 \in p$). Hallemos $f^p(1)$ y $f^p(\frac{1}{2})$ para $p \in \widehat{2\mathbb{N}}$. Claramente, $f^n(1) = 1$ y $f^n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ para $n \in 2\mathbb{N}$. De lo que se desprende que, $f^p(1) = 1$ y $f^p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ para $p \in \widehat{2\mathbb{N}}$. Además, hallemos $f^p(1)$ y $f^p(\frac{1}{2})$ para $p \in \widehat{2\mathbb{N}+1}$. Es evidente que, $f^n(1) = \frac{1}{2}$ y $f^n(\frac{1}{2}) = 1$ para $n \in 2\mathbb{N}+1$. Por lo que concluimos que, $f^p(1) = \frac{1}{2}$ y $f^p(\frac{1}{2}) = 1$ para $p \in \widehat{2\mathbb{N}+1}$.

Por otro lado, para cualquier $n > 2$*, es sencillo ver que* $f^k(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+k}$*. Luego, para* $n > 2$ *se cumple que* $f^k(\frac{1}{n}) \to 0$*. Por tanto, para* $n > 2$ *y cada* $V \in \mathcal{N}(0)$ *tenemos que el conjunto* $\{l \in \mathbb{N} : f^l(\frac{1}{n}) \in V\}$ *es cofinito, es decir, para* $n > 2$ *y todo* $V \in \mathcal{N}(0)$ *el conjunto* $\{l \in \mathbb{N} : f^l(\frac{1}{n}) \in V\} \in \mathfrak{F}_r$*. Por la proposición 1.1.8,* $\{l \in \mathbb{N} : f^l(\frac{1}{n}) \in V\} \in p$ *para cualquier ultrafiltro libre* p*. Por la definición de* $p-$*límite es claro que, para todo* $n > 2$ *se tiene que* $f^p(\frac{1}{n}) = 0$ *para cada ultrafiltro* $p \in \mathbb{N}^*$*.*

De esta forma, concluimos que cada f^p *es continua en* $x = 0$ *para cada* $p \in \beta\mathbb{N}$*.*

Ejemplo 1.3.8 *Sean* $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$ *y* $f : X \to X$ *la función dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1, & x = 1; \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{1}{n+1}. \end{cases}$$

La función f *es continua en* X*. Hallemos* f^p *para cada* $p \in \mathbb{N}^*$*. Para* $x = 0$*,* $f^n(0) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Concluyéndose que,* $f^p(0) = 0$ *para todo* $p \in \beta\mathbb{N}$*. Analogamente,* $f^n(1) = 1$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*. De esta forma,* $f^p(1) = 1$ *para todo* $p \in \beta\mathbb{N}$*.*

Es sencillo ver que, $f^m(\frac{1}{n}) = 1$ *para cualquier* $m \geqslant n - 1$*. Luego, el conjunto* $\{m \in :f^m(\frac{1}{n}) = 1\}$ *es cofinito. Por la proposición 1.1.8,* $\{m \in :f^m(\frac{1}{n}) = 1\} \in \mathfrak{F}_r \subseteq p$ *para cada ultrafiltro libre* $p \in \mathbb{N}^*$*. De este modo,* $f^p(\frac{1}{n}) = 1$ *para todo* $p \in \mathbb{N}^*$*.*

Por todo lo anterior, f^p *es una función discontinua en* $x = 0$ *para cada* $p \in \mathbb{N}^*$*.*

Ejemplo 1.3.9 *Sean* $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$ *y* $f : X \to X$ *una función dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{1}{2(n+1)}, & x = \frac{1}{2n+1}; \\ \frac{1}{2n-1}, & x = \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

La función f *es continua en* X*. Igual que en el ejemplo anterior,* $f^n(0) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Siguendo las mismas ideas del ejemplo precedente,* $f^p(0) = 0$ *para cada* $p \in \beta\mathbb{N}$*.*

Hallemos $f^p(\frac{1}{n})$ *para* $p \in \mathbb{N}^*$*. Si* m *es impar,* $f^m(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})$*. Por otro lado, si* m *es par,* $f^m(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$*. Así, para* $p \in \widehat{2\mathbb{N}}$ *(es decir,* $2\mathbb{N} \in p$*) se tiene que* $f^p(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ *y si* $p \in \widehat{2\mathbb{N}+1}$ *(es decir,* $2\mathbb{N}+1 \in p$*) se tiene que* $f^p(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})$*. Es decir,* $f^p = f$ *para cualquier* $p \in \widehat{2\mathbb{N}+1}$ *y* $f^p = Id_X$ *para todo* $p \in \widehat{2\mathbb{N}}$*.*

Por tanto, f^p *es continua en* $x = 0$ *para cada* $p \in \beta\mathbb{N}$.

Notemos que en los ejemplos, o todas las f^p son continuas o bien son todas discontinuas para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$. En [GM07], S. García y M. Sanchis muestran que en el caso que X es una sucesión convergente, para cualquier función continua f de X en sí mismo, o todas las f^p son continuas en X, o bien, son todas discontinuas en X para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

1.3.3 Semigrupo de Ellis

Recordemos que para cualquier conjunto X, el conjunto X^X, de las funciones de X en X, es un semigrupo con la composición de funciones. Si X es un espacio métrico compacto, entonces X^X es compacto. Veamos a continuación la definición del semigrupo de Ellis. El semigrupo de Ellis fué introducido por R. Ellis en [RE].

Definición 1.3.10 *Sea* (X, f) *un sistema dinámico con* X *un espacio métrico compacto. El semigrupo de Ellis del sistema dinámico* (X, f)*, denotado por* $E(X, f)$*, es la clausura en el espacio producto* X^X *del conjunto* $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Siendo X un espacio métrico compacto y $E(X, f)$ un subconjunto cerrado del compacto X^X, es claro que, el semigrupo de Ellis $E(X, f)$ es un subconjunto compacto del espacio producto X^X.

En [RE], R. Ellis estudia propiedades algebraicas de $E(X, f)$ y las relacionan con propiedades recursivas de f. A su vez, E. Akin en [A97], analiza el semigrupo de Ellis de sistemas dinámicos (X, f) cuando X es un espacio compacto dotado de una estructura uniforme $\mathcal{U}$ y f es una función uniformemente continua respecto de la uniformidad $\mathcal{U}$.

En el próximo teorema, tomado de [G10], se da una caracterización de $E(X, f)$ en términos de ultrafiltros en $\mathbb{N}$, usando el hecho que $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$.

Teorema 1.3.11 *Si* (X, f) *es un sistema dinámico con* X *un espacio métrico compacto, entonces*

$$E(X, f) = \{f^p : p \in \beta\mathbb{N}\}, \quad y \quad f^p \circ f^q = f^{q+p}$$

para cada $p, q \in \beta\mathbb{N}$.

Demostración. Sea $h : \mathbb{N} \to X^X$ la función definida por $h(n) = f^n$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $\mathbb{N}$ es un espacio discreto, es claro que, h es una función continua. Por ser $\beta\mathbb{N}$ la compactificación de Stone-$\check{C}$ech de los números naturales con la topología discreta, la función h se puede extender a una función continua $\widehat{h} : \beta\mathbb{N} \to X^X$. Claramente, $E(X, f) = \widehat{h}(\beta\mathbb{N})$. Si $p \in \mathbb{N}^*$ y $\widehat{h}$ es continua, se tiene que

$$\widehat{h}(p) = \widehat{h}(p - \lim_{n\to\infty} n) = p - \lim_{n\to\infty} \widehat{h}(n) = p - \lim_{n\to\infty} f^n = f^p.$$

Ahora, veamos que $f^p \circ f^q = f^{q+p}$ para cada $p, q \in \beta\mathbb{N}$. Efectivamente, por el teorema 1.1.27, para $x \in X$

$$f^{q+p}(x) = (q+p) - \lim_{n\to\infty} f^k(x) = p - \lim_{m\to\infty} (q - \lim_{n\to\infty} f^{m+n}(x)).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} f^p \circ f^q(x) &= f^p(f^q(x)) \\ &= f^p(q - \lim_{n\to\infty} f^n(x)) \\ &= p - \lim_{m\to\infty} (f^m(q - \lim_{n\to\infty} f^n(x))) \\ &= p - \lim_{m\to\infty} (q - \lim_{n\to\infty} f^{m+n}(x)) \\ &= f^{q+p}(x). \end{aligned}$$

Por lo que $f^p \circ f^q = f^{q+p}$ para cada $p, q \in \beta\mathbb{N}$. ∎

Este teorema nos ofrece nuevas herramientas para analizar propiedades topológicas y descriptivas del semigrupo de Ellis, como puede verse en [GM07], [G10] y [G12]. Así mismo, facilita el cálculo del semigrupo de Ellis de algunos sistemas dinámicos. Ilustraremos este hecho, hallando el semigrupo de Ellis de los sistemas dinámicos de los ejemplos 1.3.8 y 1.3.9.

Ejemplo 1.3.12 *En el ejemplo 1.3.7, el semigrupo de Ellis del sistema dinámico (X, f) es $E(X, f) = \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{h, t\}$, donde*

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1, \frac{1}{2}; \\ x, & x = 1, \frac{1}{2}. \end{cases} \quad y \quad t(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1, \frac{1}{2}; \\ 1, & x = \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

En el ejemplo 1.3.8, el semigrupo de Ellis del sistema dinámico (X, f) es el conjunto siguiente $E(X, f) = \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{g\}$ donde la función $g : X \to X$ está dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$$

En el ejemplo 1.3.9 el semigrupo de Ellis es $E(X, f) = \{id_X, f\}$.

Cabe resaltar, que en ambos ejemplos los elementos del semigrupo de Ellis son sólo funciones continuas ó son discontinuas siempre que no sean $n-$iteradas.

En nuestro caso particular, los sistemas dinámicos en los que estamos principalmente interesados son los sistemas dinámicos *débilmente casi periódicos* (WAP por sus siglas en inglés) y los sistemas dinámicos "tames".

Definición 1.3.13 *Un sistema dinámico es WAP si todas las funciones en $E(X, f)$ son continuas.*

Por otro lado, los sistemas dinámicos que definimos a continuación, fueron introducidos por E. Glasner en [G06].

Definición 1.3.14 *Diremos que el semigrupo de Ellis $E(X, f)$ es tame si es separable y es Fréchet. Un sistema dinámico tame (X, f) es un sistema dinámico tal que su semigrupo de Ellis $E(X, f)$ es tame.*

En torno a este tipo de sistemas dinámicos, presentaremos algunos ejemplos y resultados en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo presentaremos los principales resultados hallados durante el proceso de revisión bibliográfica. Estos están relacionados con los sistemas dinámicos WAP, la cardinalidad del semigrupo de Ellis, el semigrupo de Ellis como compactificación de $\mathbb{N}$ y complejidad de conjuntos. Como mencionamos en la introducción, estos son los aspectos en los cuales se centra nuestro trabajo.

Antes que todo, recordaremos la caracterización del semigrupo de Ellis en términos de ultrafiltros, que vimos en los preliminares.

Teorema 2.0.15 *Si (X, f) es un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto, entonces*

$$E(X, f) = \{f^p : p \in \beta\mathbb{N}\},$$

y $f^p \circ f^q = f^{q+p}$ para cada $p, q \in \beta\mathbb{N}$.

Como vimos en los preliminares, este teorema es una consecuencia del hecho que $\beta\mathbb{N}$ sea la compactificación de Stone-Čech de los números naturales (ver [G10]). Es importante resaltar nuevamente que, el teorema 2.0.15, es imprescindible para todo nuestro estudio.

Este fue usado por A. Blass en [B93]. Además, en [A97], E. Akin usa un resultado más general que este, en el caso donde $\beta\mathbb{T}$ es la compactificación de Stone-Čech de un semigrupo arbitrario $\mathbb{T}$. De la misma manera, este resultado ha sido usado por S. García y M. Sanchis en [G10], [G12], para analizar el semigrupo de Ellis y mostrar algunas propiedades topológicas de éste.

2.1. Dicotomías en el semigrupo de Ellis

En esta sección, mencionaremos algunos resultados relacionados con los sistemas dinámicos WAP. En este sentido, en los espacios métricos compactos analizados se obtienen dos posibilidades: o todos los elementos del semigrupo de Ellis son funciones continuas o cada función en el semigrupo de Ellis que no sea una n-iterada es discontinua.

A continuación, enunciaremos tres teoremas de S. García y M. Sanchis. Cabe destacar, que estos tres teoremas inspiraron en gran parte nuestro trabajo. Estos serán enunciados tal cual aparecen en [G10], usando la noción de $p-$iteradas de una función f donde $p \in \beta\mathbb{N}$.

Teorema 2.1.1 *(García-Sanchis) Sea (X, f) un sistema dinámico en donde X es una sucesión convergente con su punto de convergencia y $f : X \to X$ es una función continua. Entonces, las funciones f^p con p un ultrafiltro libre son todas continuas ó bien todas discontinuas.*

No sólo en el caso de un espacio compacto tan sencillo como una sucesión convergente se concluye la tesis, sino que también, se cumple en otros espacios como lo muestran los siguientes resultados.

Teorema 2.1.2 *(García-Sanchis) Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y sea $x \in X$ un punto fijo de f. Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{O}_f(y)| \leqslant m$, para todo $y \in X$. Entonces, las f^p con p un ultrafiltro libre son todas continuas o bien son todas discontinuas en x.*

Antes de enunciar el tercer teorema definiremos las funciones σ_f en $2^{\mathbb{N}}$. Dada una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la función $\sigma_f : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$, esta dada por

$$\sigma_f(x)(k) = x(f(k)) \text{ para cada } k \in \mathbb{N},\ x \in 2^{\mathbb{N}}.$$

Cuando f es la identidad, sólo escribiremos σ.

Teorema 2.1.3 *(García) Sea f una función de $\mathbb{N}$ en sí mismo. Entonces, las funciones σ_f^p con p un ultrafiltro libre, son todas continuas o bien todas discontinuas.*

Adicionalmente, a estos tres teoremas relacionados con los sistemas WAP, P. Szuca mostró en [PS] algo similar para el caso del intervalo $I = [0, 1]$.

Teorema 2.1.4 *(Szuca) Para una función continua $f : I \to I$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *La familia de funciones $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua.*

2. *La familia de funciones $\{f^p : p \in \beta\mathbb{N}\}$ es equicontinua.*

3. *Existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tal que f^p es continua.*

Es importante resaltar que, en todos estos teoremas la conclusión es la misma: todas las $p-$iteradas son siempre continuas o son todas discontinuas para p un ultrafiltro libre. Esto genera mayor interés en la búsqueda de una respuesta a la siguiente interrogante de S. García y M. Sanchis, planteada en [GM07]:

¿ Existe un sistema dinámico (X, f) tal que existen

$$g,\ h \in E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$$

donde g es una función continua y h es una función discontinua en X?

Por otra parte, en nuestro caso, las preguntas que sugieren los teoremas 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4, desde el punto de vista descriptivo son:

1. ¿Bajo que condiciones un sistema dinámico es WAP, en el caso que el espacio de fases es un espacio métrico compacto numerable?

2. ¿ Qué complejidad tiene el conjunto $\{f \in C(X, X) : (X, f) \text{ es WAP}\}$?

2.2. Cardinalidad y Sistemas Dinámicos Tame

En esta sección, trataremos el problema de la cardinalidad del semigrupo de Ellis. A este respecto, A. Köler en [Ko] y E. Glasner junto a M. Megrehisvili en [GM06] obtuvieron resultados sobre la cardinalidad del semigrupo de Ellis usando las ideas de J. Bourgain, D. Fremlin y M. Talagrand en [BFT]. En este sentido, ellos mostraron una dicotomía sobre la estructura topológica del semigrupo de Ellis análoga a la del teorema 1.1.36.

A continuación, presentaremos la dicotomía de E. Glasner junto a M. Megrehisvili sobre la cardinalidad del semigrupo de Ellis (ver [GM06]). En el caso analizado por E. Glasner y M. Megrehisvili, la función f es un homeomorfismo sobre X y $E(X, f)$ es la clausura de $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ en el espacio producto X^X.

Antes que todo, definimos el conjunto $E^g = \{g \circ h : \ h \in E(X, f)\}$, para cada homeomorfismo g sobre X. Es evidente que, E^g es un subconjunto compacto puntualmente de $\mathbb{R}^X$, por ser la imagen continua de $E(X, f)$ bajo la aplicación $q_g : E(X, f) \to E^g$, $p \to g \circ p$.

Teorema 2.2.1 *Sean (X, f) un sistema dinámico donde f es un homeomorfismo, X un espacio compacto Hausdorff y $E = E(X, f)$ su semigrupo de Ellis. Se cumple alguna de las siguientes alternativas:*

1. *E es un compacto de Rosenthal separable, así $|E| \leqslant 2^{\aleph_0}$.*
2. *El espacio compacto E contiene una copia homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$, de esta forma $|E| = 2^{2^{\aleph_0}}$.*

La primera posibilidad se cumple si y sólo si E^g es un compacto de Rosenthal para cada $g \in C(X)$.

Observemos que, en este teorema, no sólo obtenemos, una dicotomía sobre la cardinalidad del semigrupo de Ellis, sino también sobre su estructura topológica. Aunado a esto, relaciona la cardinalidad del semigrupo de Ellis con su estructura topológica.

Si E satisface la condición 1) del teorema 2.2.1, entonces E es un compacto de Rosenthal separable y $|E| \leqslant 2^{\aleph_0}$. Por el teorema de Bourgain-Fremlim-Talagrand (teorema 1.1.41), E es un espacio de Fréchet, por lo cual tiene una estructura topológica bastante "sencilla", pues es similar a la de los espacios métricos. En este caso, (X, f) se dice que es tame (definición 1.3.14).

Por otro lado, si E satisface la condición 2) del teorema 2.2.1, la cardinalidad de E es $|E| = 2^{2^{\aleph_0}}$ y contiene una copia homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$. Ya vimos en el teorema 1.1.17, que $\beta\mathbb{N}$ está muy lejos de ser un espacio de Fréchet, pues ninguna sucesión no trivial es convergente. Podríamos decir que en este caso el comportamiento del sistema (X, f) es impredecible, (en oposición a los sistemas "tame" que son "*domesticados, dóciles*").

De esta manera, concluimos del teorema 2.2.1, que el semigrupo de Ellis es un compacto de Rosenthal o contiene una copia homeomorfa a $\beta\mathbb{N}$. Por lo que concluimos que un sistema dinámico es tame si, y sólo si, su semigrupo de Ellis $E(X, f)$ es un compacto de Rosenthal si, y sólo si, la cardinalidad de $E(X, f)$ es a lo sumo $2^{\aleph_0}$.

Por otro lado, en el caso de los sistemas dinámicos $(2^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$, S. García en [G12] muestra una condición suficiente y necesaria para que $E(2^{\mathbb{N}}, \sigma_f)$ tenga cardinalidad $\leqslant 2^{\aleph_0}$ y de esta forma por el teorema 2.2.1 sea un compacto de Rosenthal.

Teorema 2.2.2 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es una función con órbitas finitas si, y sólo si el cardinal* $|E(2^{\mathbb{N}}, \sigma_f)| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Finalmente, recordemos que nosotros estamos interesados principalmente en los semigrupos de Ellis $E(X, f)$, asociados a sistemas dinámicos (X, f), donde X es un espacio métrico compacto numerable. Se desprende del teorema 2.2.1, que en estos casos $E(X, f)$ es un compacto de Rosenthal, puesto que $|E(X, f)| \leqslant 2^{\aleph_0}$. En igual manera, (X, f) es un sistema dinámico tame.

Las preguntas que queremos responder sobre la cardinalidad del semigrupo de Ellis, cuando X es un espacio métrico compacto numerable son las siguientes:

1. ¿Bajo qué condiciones $E(X, f)$ es finito?

2. ¿Bajo qué condiciones $E(X, f)$ es numerable infinito?

3. ¿ Bajo qué condiciones $E(X, f)$ es no numerable?

2.3. Teorema de García-Sanchis

Como dijimos en la introducción, los aspectos fundamentales para nuestro trabajo son los sistemas dinámicos WAP, la cardinalidad del semigrupo de Ellis y el semigrupo de Ellis como compactificación de $\mathbb{N}$. Hasta este momento, sólo hemos mencionado resultados relacionados con los sistemas WAP y la cardinalidad del semigrupo de Ellis.

En esta sección, presentaremos el teorema de S. García y M. Sanchis que responde parcialmente, la siguiente pregunta, interesante desde el punto de vista topológico:

¿ Bajo qué condiciones el semigrupo de Ellis es una compactificación de $\mathbb{N}$?

García y Sanchis tratan este problema de cuando el semigrupo de Ellis es una compactificación de $\mathbb{N}$ (ver [GM07] o [G10]) y obtienen el próximo teorema. Para esto, ellos muestran una condición suficiente y necesaria para que el conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ sea discreto en $E(X, f)$. De esta forma $E(X, f)$ es una compactificación de $\mathbb{N}$.

Teorema 2.3.1 *Sea (X, f) un sistema dinámico tal que X es compacto y $f^n \neq f^m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto en $E(X, f)$ si y sólo si $f^n \neq f^p$ para cada $p \in \mathbb{N}^*$.*

Si bien es un resultado interesante, puesto que presenta condiciones suficientes y necesarias para que $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ sea discreto en el semigrupo de Ellis, resulta difícil poder determinar cuando el semigrupo de Ellis satisface las condiciones de este teorema. Es por esto que, deseamos encontrar una caracterización más manejable.

Para la prueba de estos teoremas, García y Sanchis en [G10], [GM07], usan también la caracterización dada en el teorema 2.0.15, del semigrupo de Ellis en términos de ultrafiltros.

2.4. Complejidad

En esta sección, revisaremos algunos resultados donde se determina la complejidad de conjuntos relacionados con sistemas dinámicos (ver [AK]). Sea X un espacio métrico compacto. Denotaremos por $H(X)$ al conjunto de todos los homeomorfismos de X en sí mismo.

Teorema 2.4.1 *(Kechris) El conjunto de todos los $h \in H(X)$ tales que cada $\mathcal{O}_h(x)$ es finita para todo $x \in X$, es un conjunto $\Pi^1_1(X)$−completo.*

Un $h \in H(X)$ es minimal si no existen subconjuntos propios de X invariantes bajo h. Además, h es distal si para $x \neq y$ en X, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $d(h^n(x), h^n(y)) > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4.2 *(Beleznay-Foreman) El conjunto de todos los $h \in H(X)$ minimales distales es $\Pi^1_1(X)$−completo.*

La demostración de este teorema se puede ver con todo detalle en [BF95].

Capítulo 3

Sistemas Dinámicos WAP

En este capítulo se analizará el semigrupo de Ellis de diversos sistemas dinámicos (X, f), donde X es un espacio métrico compacto numerable, estudiando para esto el comportamiento asintótico de los puntos de X. Además, se usará la caracterización del semigrupo de Ellis en términos de ultrafiltros dada en el teorema 1.3.11 y se establecerán algunas condiciones para que el semigrupo de Ellis posea sólo funciones continuas, es decir que el sistema dinámico sea WAP, en algunos espacios métricos compactos numerable. En este sentido, daremos algunas respuestas a las preguntas que mencionamos en los antecedentes:

Pregunta 1 *¿ Bajo que condiciones un sistema dinámico es WAP?*

Pregunta 2 *¿ Existe un sistema dinámico (X, f), donde X es un espacio métrico compacto tal que existen funciones $g, h \in E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ donde g es una función continua y h es una función discontinua en X?*

Pregunta 3 *¿ Qué complejidad tiene el conjunto*

$$\{f \in C(X, X) : (X, f) \textit{ es WAP}\}?$$

Como ya lo hemos dicho, todas estas preguntas serán analizadas en el caso de sistemas dinámicos donde el espacio de fases es un espacio métrico compacto numerable. Para esto, primero analizaremos el caso en que el espacio de fases es una sucesión convergente, obteniendo respuesta a cada una de las preguntas 1 y 3. Notemos que, para la sucesión convergente, S. García y M. Sanchis respondieron negativamente la pregunta 2 con el teorema 2.1.1. Posteriormente, en el caso general de espacios métricos compactos numerables, daremos repuestas parciales a las preguntas 1 y 3, así como un ejemplo que satisface las condiciones planteadas en la pregunta 2.

Antes que todo, recordemos que un punto $x \in X$ se denomina punto periódico de f si existe $s \geqslant 1$ tal que $f^s(x) = x$. Es evidente que, los puntos periódicos de periódo $s = 1$ son los puntos fijos de f.

En lo sucesivo, denotaremos por

$$P_s = \{x \in X : x \text{ tiene período } s\},$$

para cada $s \in \mathbb{N}$, el subconjunto de X de todos los puntos periódicos de período s, y por

$$P = \{s \in \mathbb{N} : (\exists x \in X)(x \in P_s)\},$$

el conjunto de todos los posibles períodos que puede tener un punto periódico $x \in X$.

3.1. Propiedades Básicas

Primeramente, presentaremos algunos lemas básicos.

Lema 3.1.1 *Para cada $A \in p$ se cumple*

$$f^p = p - \lim_{n \to \infty} f^n = p - \lim_{m \in A} f^m.$$

Demostración. En efecto, por ser p un ultrafiltro, para cada $V \in \mathcal{N}(f^p)$ tenemos que $\{n \in N : f^n \in V\} \in p$ si y sólo si $\{m \in A : f^m \in V\} \in p$. ∎

Lema 3.1.2 *Definimos la aplicación $i : \beta\mathbb{N} \times P \to \mathbb{N}$, dada por $i(p, s) = k$ en caso que $p \in \widehat{s\mathbb{N} + k}$, $k < s$. Entonces, para $z \in P_s$ se tiene que*

$$i(p, s) = k \Leftrightarrow f^p(z) = f^k(z).$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Nosotros tenemos que $s\mathbb{N} + k \in p$ y

$$f^p(z) = p - \lim_{n \to \infty} f^n(z) = p - \lim_{n \to \infty} f^{sn+k}(z) = f^k(z).$$

($\Leftarrow$) Si $i(p, s) = l$ entonces $p \in \widehat{s\mathbb{N} + l}$. Puesto que $z \in P_s$,

$$f^p(z) = p - \lim_{n\to\infty} f^{sn+l}(z) = f^l(z) \neq f^k(z).\blacksquare$$

Lema 3.1.3 *Sean $x, y \in X$ tales que existen $s, l \in \mathbb{N}$ que cumplen que $x \in P_s$, $f^l(y) = x$ y $f^n(y)$ no es periódico para $n < l$. Si $l \equiv a \ (mod\ s)$ y $p \in \widehat{s\mathbb{N} + b}$, entonces*

$$f^p(y) = f^{b-a}(x) \ \ si \ \ b \geqslant a$$

ó

$$f^p(y) = f^{s-b+a}(x) \ \ si \ \ b < a.$$

Demostración. Existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que $l = sl_1 + a$. Como $x \in P_s$, obtenemos que

$$f^{sn+b}(y) = f^{sn+b+l-sl_1-a}(y) = f^{s(n-l_1)+l+b-a}(y) = f^{s(n-l_1)+b-a}(x)$$

Sea $p \in \widehat{s\mathbb{N} + b}$. Por el lema 3.1.1 y las identidades anteriores,

$$f^p(y) = p - \lim_{n\to\infty} f^n(y) = p - \lim_{n\to\infty} f^{sn+b}(y) = p - \lim_{n\to\infty} f^{s(n-l_1)+b-a}(x) = f^{b-a}(x).$$

Si $b \geqslant a$, $f^p(y) = f^{b-a}(x)$. Por otro lado, si $b < a$, entonces $b - a \equiv s - b + a \ (mod\ s)$ y $f^p(y) = f^{s-b+a}(x)$. ■

Lema 3.1.4 *Si $\omega_f(x)$ contiene un punto aislado z en $\overline{\mathcal{O}_f(x)}$, entonces z es un punto periódico.*

Demostración. Claramente, por ser z un punto aislado en $\overline{\mathcal{O}_f(x)}$, tenemos que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = z\}$ es infinito. Dados $n, m \in A$ con $n > m$, se cumple que

$$f^{n-m}(z) = f^{n-m}(f^m z) = f^n(z).$$

Por lo que z es un punto periódico. ■

Lema 3.1.5 *Sea $g = f^s$ con $s \in \mathbb{N}$. Si $a \in X$, entonces*

$$\mathcal{O}_f(a) = \mathcal{O}_g(a) \cup f(\mathcal{O}_g(a)) \cup \ldots \cup f^{s-1}(\mathcal{O}_g(a)).$$

Demostración. Claramente, $\mathcal{O}_g(a) \cup f(\mathcal{O}_g(a)) \cup \ldots \cup f^{s-1}(\mathcal{O}_g(a)) \subset \mathcal{O}_f(a)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $t \in \mathbb{N}$, $l < s$ tales que $n = ts + l$. De esta forma, obtenemos que $f^n(a) \in f^l(\mathcal{O}_g(a))$ y

$$\mathcal{O}_f(a) = \mathcal{O}_g(a) \cup f(\mathcal{O}_g(a)) \cup \ldots \cup f^{s-1}(\mathcal{O}_g(a)).\blacksquare$$

Lema 3.1.6 *Para cada $x \in X$ se tiene que $\omega_f(x) = \{f^p(x) : p \in \mathbb{N}^*\}$.*

Demostración. Si $a \in \omega_f(x)$, existe una sucesión de números naturales $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f^{n_k}(x) \to a$. La colección $\mathcal{A} = \{\{n_k : f^{n_k}(x) \in V\} : V \in \mathcal{N}(A)\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Luego, existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathcal{A} \subset q$. De lo que se desprende que, $f^q(x) = a$.

Por otro lado, sean $a = f^q(x)$ para algún $q \in \mathbb{N}^*$ y $\{V_t : t \in \mathbb{N}\}$ una base de abiertos de a. Para cada $t \in \mathbb{N}$, escogemos un $m_t \in \{n \in N : f^n(x) \in V_t\}$ y construimos la sucesión $(f^{m_t}(x))_{t\in\mathbb{N}}$ que converge al punto a. Por tanto, $a \in \omega_f(x)$. De lo anterior concluimos que, $\omega_f(x) = \{f^p(x) : p \in \mathbb{N}^*\}$. $\blacksquare$

3.2. Sucesión Convergente

Como mencionamos al inicio de este capítulo, en esta sección daremos una respuesta a las preguntas 1 y 3, en el caso que el espacio de fases X del sistema dinámico (X, f) sea una sucesión convergente. Recordemos que en el teorema 2.1.1, se muestra una dicotomía sobre el semigrupo de Ellis de esta clase de sistemas dinámicos que responde negativamente la pregunta 2. Este establece que (X, f) es WAP ó cada función de $E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discontinua. No obstante, no se aclará cuándo alguna de las dos cosas sucede.

Para responder ambas preguntas, procederemos de la manera siguiente: primero analizaremos el caso cuando el único punto de acumulación no es fijo y posteriormente el caso contrario a este.

La demostración del siguiente teorema es tomada de la demostración del teorema 2.1.1, hecha por García y Sanchis y presentada en [G10].

Teorema 3.2.1 *Sea $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tal que $x_n \to x$ y $f(x) \neq x$. Entonces, f^p es continua para cada $p \in \beta\mathbb{N}$.*

Demostración. Como $f(x)$ es un punto aislado del espacio métrico X, el subconjunto $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : f(x) = f(x_n)\}$ es cofinito. Para cada $n \in \mathcal{A}$, $f^m(x) = f^m(x_n)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por tanto, $f^p(x) = f^p(x_n)$ para todo $p \in \beta\mathbb{N}$ y $m \in \mathcal{A}$. De lo que concluimos que, f^p es continua para cada $p \in \beta\mathbb{N}$. ■

En el caso que el punto de acumulación de la sucesión sea un punto fijo, nosotros hemos encontrado la siguiente condición suficiente y necesaria para que el sistema dinámico (X, f) no sea WAP.

Teorema 3.2.2 *Sea $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, tal que $x_n \to x$ y x es fijo. Las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *f^p es discontinua para algún $p \in \mathbb{N}^*$.*

2. *Existe $z \in X \setminus \{x\}$, periódico de período $s \geqslant 1$ de tal forma que el conjunto $H = \{y \in X : z \in \mathcal{O}_f(y)\}$ es infinito.*

3. *f^q es discontinua para cada $q \in \mathbb{N}^*$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Dado que f^p es discontinua en x, existe una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b_n \to x$ y $f^p(b_n) \nrightarrow x$. Como X es compacto, existe una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y un punto $z \in X$, tal que $b_{n_k} \to z$. Supongamos sin perdida de generalidad, que esta subsucesión es $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por ser z aislado, el subconjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : f^p(b_n) = z\}$ es cofinito. Para cada $n \in A$, definimos el conjunto $A_n = \{m \in \mathbb{N} : f^m(b_n) = z\} \in p$. Se sigue que, $z \in \mathcal{O}_f(b_n)$ para cada $n \in A$ y por el lema 3.1.4, z es un punto periódico de f. Claramente, el período de z es $s = min\{m \in \mathbb{N} : f^m(z) = z\}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $q \in \mathbb{N}^*$. Como z es periódico, para cualquier $y \in H$, es evidente que $\mathcal{O}_f(z) = \omega_f(y) = \{f^p(z) : p \in \mathbb{N}^*\}$. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H. Entonces, $f^q(b_n) \in \mathcal{O}_f(z)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como x es un punto fijo y z es un punto aislado, $x \notin O_f(z)$. De esta forma, $f^q(b_n) \nrightarrow x$. Por lo que concluimos que f^q es discontinua para cada $q \in \mathbb{N}^*$.

3) $\Rightarrow$ 1) Es evidente. ■

Observación 3.2.3 *De los teoremas 3.2.1 y 3.2.2, concluimos que un sistema dinámico (X, f) donde X es una sucesión convergente es WAP si el punto de acumulación no es fijo o el item 2) del teorema 3.2.2, no se cumple. Lo cual responde la pregunta 1, en el caso que el espacio de fases es una sucesión convergente.*

De igual modo, estos dos teoremas nos llevan a concluir el siguiente resultado sobre la complejidad del conjunto $\{f \in C(X, X) : (X, f) \text{ es WAP}\}$, obteniendo una respuesta para la pregunta 3, en el caso que el espacio de fases es una sucesión convergente.

Teorema 3.2.4 *Sea $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tal que $x_n \to x$. Entonces el conjunto*

$$\mathfrak{B} = \{f \in C(X, X) : (X, f) \text{ es WAP}\}$$

es boreliano.

Demostración. De los teoremas 3.2.2 y 3.2.1, tenemos que

$$\begin{aligned} f \notin \mathfrak{B} \Leftrightarrow & (\exists z \in X \setminus \{x\})(\exists m \in \mathbb{N})(f \in \{g : g^m(z) = z \wedge g(x) = x\} \\ & \wedge f \in \{g : \{n \in \mathbb{N} : z \in \mathcal{O}_g(x_n)\} \in \mathbb{N}^{[w]}\}). \end{aligned}$$

Consideremos la función continua $\psi_z : X^X \to P(\mathbb{N})$ dada por

$$\psi_z(f) = \{n \in \mathbb{N} : z \in \mathcal{O}_f(x_n)\}.$$

Por ser $\mathbb{N}^{[w]}$ un subconjunto boreliano de $\mathbb{P}(\mathbb{N})$, tendremos que $(\psi_z)^{-1}(\mathbb{N}^{[w]})$ es un subconjunto boreliano de X^X. De esto,

$$f \notin \mathfrak{B} \Leftrightarrow f \in \bigcup_{z \in X \setminus \{x\}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (\{g : g^m(z) = z\} \cap \{g : g(x) = x\} \cap (\psi_z)^{-1}(\mathbb{N}^{[w]}).$$

Por lo que $\mathfrak{B}^c$ es boreliano y $\mathfrak{B}$ también lo es. ∎

Observación 3.2.5 *Con estos tres teoremas hemos exhibido las respuestas a las preguntas 1 y 3, para el caso que X sea una sucesión convergente.*

3.3. Dicotomías en Espacios Numerables

En esta sección exhibiremos respuestas parciales a las preguntas 1, 2 y 3, planteadas al inicio del capítulo, en el caso particular que el espacio de fases del sistema dinámico es un espacio métrico compacto numerable.

A este respecto, mostraremos condiciones para que el sistema dinámico (X, f) sea WAP. Además, presentaremos condiciones para obtener una dicotomía como la de los teoremas 2.1.1, 2.1.3. En este sentido, veremos que en un sistema dinámico (X, f), donde X es un espacio métrico compacto numerable y cada elemento de X' es un punto periódico, cada f^q es discontinua en X para todo $q \in \mathbb{N}^*$ o cada f^q es continua en X para todo $q \in \mathbb{N}^*$. En la siguiente sección, veremos que la hipótesis que cada punto de X' es periódico es necesaria.

Primero, veamos que en caso que todas las órbitas del sistema dinámico (X, f) donde X es un espacio métrico, sean finitas, se tiene que el sistema (X, f) es WAP.

Teorema 3.3.1 *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un $x \in X$ con $|\mathcal{O}_f(x)| > n$ si y sólo si $f^n \neq f^m$, $n \neq m$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, siempre existe un punto $x \in X$ con $|\mathcal{O}_f(x)| > \text{máx}\{n, m\} + 1$. Por esta razón, $f^n(x) \neq f^m(x)$ y $f^n \neq f^m$ para $n \neq m$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{O}_f(x)| < M$ para cada $x \in X$. Obviamente, P es finito.

Para cada $x \in X$, existen $l_x \in \mathbb{N}$ y un $z_x \in \bigcup_{s \in P} P_s$ de período s_z de tal forma que $f^{l_x}(x) = z_x$. Sean $L = \{l_x : x \in X\}$ y $t = \text{máx}(L)$. Claramente, $f^t(x)$ es un punto periódico. Sea $r = \prod_{s \in P} s$. De todo lo anterior se desprende que,

$$f^{r+t}(x) = f^r(f^t(x)) = f^t(x).$$

Como resultado de esto, $f^{r+t} = f^t$. Lo cual es una contradicción. ∎

Observemos que el teorema 3.3.1, generaliza el teorema 2.1.2 de García y Sanchis. Además, aclara que en general cuando el cardinal de las órbitas de cada punto de X es acotada por un mismo número natural, el sistema dinámico es WAP. Este hecho se resume en el siguiente corolario.

Corolario 3.3.2 *Sean (X, f) un sistema dinámico. Si existe un número $M \in \mathbb{N}$ tal que $|O_f(x)| < M$, entonces (X, f) es WAP.*

Demostración. Por el teorema 3.3.1, $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito. Luego, $E(X, f)$ es finito. Por tanto, (X, f) es WAP. ■

Ahora veremos que en un sistema dinámico (X, f), donde X es un espacio métrico compacto numerable y cada elemento de X' es un punto periódico, cada f^q es discontinua en X para todo $q \in \mathbb{N}$ o cada f^q es continua en X para todo $q \in N$. Es decir, obtenemos una dicotomía igual que la de la sucesión convergente. Para esto, nosotros necesitaremos algunos lemas auxiliares.

Lema 3.3.3 *Sea $a \in X$ tal que $|a|_{CB} = 1$ y $f(a) = a$. Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge al punto a. Entonces para cada entorno $V \in \mathcal{N}(a)$ tenemos que el conjunto $\mathcal{B}_V = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{O}_f(a_n) \subset V\}$ es cofinito.*

Demostración. Sea $W \in \mathcal{N}(a)$. Puesto que $|a|_{CB} = 1$, entonces existe un abierto-cerrado $V \in \mathcal{N}(a)$ tal que $V \setminus \{a\}$ es una sucesión que converge al punto a. Para cada $n \in \mathcal{B}_V^c$, existen $y_n \in \mathcal{O}_f(a_n) \cap V$ y $f(y_n) \notin V$. Para probar la tesis es suficiente mostrar que $\mathcal{B}_V^c$ es finito. Supongamos lo contrario, entonces $(f^m(x))_{m\in\mathcal{B}_V^c}$ y $(f^{m+1}(x))_{m\in\mathcal{B}_V^c}$ convergen al punto a, por ser a fijo. Debido a que, V es un abierto-cerrado, entonces $a \notin V$. Esto es una contradicción. En consecuencia, $\mathcal{B}_V$ es cofinito. De igual forma, $\mathcal{B}_W$ es cofinito. ■

Lema 3.3.4 *Sean $a \in X$ tal que $|\mathcal{O}_f(a)| = s$ y $g = f^s$. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos $f-$periódicos en X tal que $a_n \to a$. Supongamos que para cada $V \in \mathcal{N}(a)$, existe $N_V \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{O}_g(a_n) \subset V$ para $n \geqslant N_V$. Entonces para cualquier entorno $W \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_f(a))$, existe $N_W \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{O}_f(a_n) \subset W$ para cada $n \geqslant N_W$.*

Demostración. Por hipótesis, dado $V_0 \in \mathcal{N}(a)$, existe N_{V_0} tal que $\mathcal{O}_g(a_n) \subset V_0$ para cada $n \geqslant N_{V_0}$. Por ser f una función continua, para cada $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ y dado $V_i \in \mathcal{N}(f^i(a))$ existe un $N_{V_i} \in \mathbb{N}$ tal que $f^i(O_g(a_n)) \subset V_i$ para cada $n > N_{V_i}$.

Por el lema 3.1.5, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{O}_f(a_n) = \mathcal{O}_g(a_n) \cup f(\mathcal{O}_g(a_n)) \cup \ldots \cup f^{s-1}(\mathcal{O}_g(a_n)).$$

Supongamos que $f_0 =$ Identidad en X. Dado $W \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_f(a))$, existen $W_i \in \mathcal{N}(f^i(a))$ de tal forma que $\bigcup_{i=0,\ldots,s-1} W_i \subset W$.

Escogiendo $N_W = max\{N_{W_0}, \ldots, N_{W_{s-1}}\}$, obtenemos que

$$\mathcal{O}_f(a_n) = \mathcal{O}_g(a_n) \cup f(\mathcal{O}_g(a_n)) \cup \ldots \cup f^{s-1}(\mathcal{O}_g(a_n)) \subset \bigcup_{i=0,\ldots,s-1} W_i \subset W.$$

para cada $n \geqslant N_W$. ■

A continuación, mostraremos que cuando cada $a \in X'$ es periódico y una sucesión de puntos periódicos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto fijo $b \in X$, entonces $\mathcal{O}_f(a_n) \to b$.

Lema 3.3.5 *Sean $a \in X'$ y una función continua $f : X \to X$ tal que cada $b \in X'$ es periódico y $f(a) = a$. Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos periódicos convergiendo al punto a tales que $a_n \neq a_m$ para $n \neq m$. Entonces para cada $W \in \mathcal{N}(a)$ el conjunto $\mathcal{B}_W = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{O}_f(a_n) \subset W\}$ es cofinito.*

Demostración. Nosotros probaremos este teorema usando inducción sobre el rango de Cantor-Bendixon de a. El caso en el cual $|a|_{CB} = 1$, fue probado en el lema 3.3.3. Supongamos que $|a|_{CB} = \alpha$ y que el resultado se cumple para puntos de rango menor que α.

Sea $V \in \mathcal{N}(a)$ un conjunto abierto-cerrado tal que $|c|_{CB} < \alpha$ para cada $c \in V \setminus \{a\}$. Sin perdida de generalidad, nosotros supondremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ y además que $\mathcal{B}_V^c$ es infinito. Para cada $n \in \mathcal{B}_V^c$, existe $y_n \in \mathcal{O}_f(a_n) \cap V$ y $f(y_n) \notin V$.

Existen $d \in V$ y $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $y_{n_k} \to d$. Claramente, $a \neq d$. Sin perdida de generalidad nosotros supongamos que esta sucesión es $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sean $s = |\mathcal{O}_f(d)|$ y $g = f^s$. Claramente, cualquier $b \in X'$ es g−periódico. Por hipotesis inductiva, como $V \in \mathcal{N}(d)$ y $g(d) = d$, existe $N_V \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{O}_g(y_n) \subset V$ para cada $n \geqslant N_V$.

Por lema 3.3.4, para cada $U \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_f(d))$, existe $N_U \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{O}_f(y_n) \subset U$, para cada $n \geqslant N_U$. Como a_n es periódico para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}_f(y_n) = \mathcal{O}_f(a_n)$ para cada $n \in B_V^c$. Además, por ser a fijo bajo f, $a \notin \mathcal{O}_f(d)$.

Sea $U_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_f(d))$ tal que $a \notin U_0$. Luego, existe un número $N_{U_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{O}_f(y_n) = \mathcal{O}_f(a_n) \subset U_0$ para $n > N_{U_0}$ y $n \in B_V^c$. Por tanto, $(a_n)_{n\in B_V^c}$ no converge al punto a. Lo cual es una contradicción. Concluimos que B_V^c es finito. ■

De los lemas 3.3.4 y 3.3.5 sigue el siguiente lema.

Lema 3.3.6 *Dados una función continua $f : X \to X$ con cada $a \in X'$ periódico y un*

$b \in X'$ tal que existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos periódicos distintos entre si que converge a b, entonces para cada entorno $W \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_f(b))$ obtenemos que el conjunto $\mathcal{B}_W = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{O}_f(a_n) \subset W\}$ es cofinito.

En el caso de los sistemas dinámicos (X, f) con X un espacio métrico compacto numerable donde cada $b \in X'$ es periódico, cuando un punto de X tiene una órbita infinita y un punto de acumulación fijo, entonces la órbita es una sucesión convergente.

Lema 3.3.7 *Sean $a \in X'$ con $|a|_{CB} = 1$ y $f : X \to X$ una función continua. Si $x \in X$ tiene una órbita infinita con $a \in \omega_f(x)$ fijo, entonces $f^n(x) \to a$.*

Demostración. Como $|a|_{CB} = 1$, existe un abierto-cerrado $V \in \mathcal{N}(a)$ tal que $V \setminus \{a\}$ es una sucesión convergiendo al punto a.

Sea $T = \{m \in \mathbb{N} : f^m(x) \in V \text{ and } f^{m+1}(x) \notin V\}$. Supongamos que T es infinito. Claramente, $(f^m(x))_{m\in T}$ y $(f^{m+1}(x))_{m\in T}$ convergen al punto a. Lo cual es una contradicción. Por tanto, T es finito. Así, $f^n(x) \to a$. ■

Teorema 3.3.8 *Sean $a \in X'$ y una función continua $f : X \to X$ tal que cada $b \in X'$ es periódico. Si x tiene una órbita infinita tal que $a \in w_f(x)$ es fijo, entonces $f^n(x) \to a$.*

Demostración. Nosotros probaremos este teorema usando inducción sobre el rango de Cantor-Bendixon de a. El caso en el cual $|a|_{CB} = 1$ fue probado en el lema 3.3.7.

Supongamos que $|a|_{CB} = \alpha$ y que el resultado se cumple para cualquier función continua $g : X \to X$ y cada $b \in X'$ tal que $|b|_{CB} < \alpha$. Buscando una contradicción, supondremos que existe $c \in \omega_f(x)$ y $c \neq a$. Sea $V \in \mathcal{N}(a)$ un abierto-cerrado con $c \notin V$ y tal que $|d|_{CB} < \alpha$ para cada $d \in V \setminus \{a\}$. De lo que se desprende que el conjunto $H = \{m \in \mathbb{N} : f^m(x) \in V \wedge f^{m+1}(x) \notin V\}$ es infinito.

Así, existe $e \in V$ y una sucesión creciente $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en H tal que la sucesión $(f^{m_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a e. Como V es abierto-cerrado y f es continua, entonces $f(e) \notin V$ y $f(e) \neq e$. Puesto que $f(a) = a$, entonces $a \notin \mathcal{O}_f(e)$.

Sean $s = |\mathcal{O}_f(e)|$ y $g = f^s$. Dado cualquier $k \in \mathbb{N}$, existen $t_k, r_k \in \mathbb{N}$ tales que $m_k = t_k s + r_k$ y $r_k < s$. Como $r_k < s$ para cada $k \in H$, existe un $r < s$ tal que $T = \{m_k \in H : r_k = r\}$ es infinita. Sin perdida de generalidad nosotros supongamos que $T = H$. Entonces $e \in \omega_g(y)$ donde $y = f^r(x)$. Notemos que $g(e) = e$ y $|e|_{CB} < \alpha$, entonces por hipótesis inductiva sobre (X, g), nosotros concluimos que $g^m(y) \to e$.

Veamos que $\omega_f(y) = \mathcal{O}_f(e)$. En efecto, para cada $i < s$, $f^{sm+i}(x) \to f^i(e)$ y $\mathcal{O}_f(e) \subset \omega_f(y)$. Por otra parte, para $o \in \omega_f(y)$, existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f^{n_k}(x) \to o$. Claramente, existe $i < s$ tal que $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cap s\mathbb{N} + i$ es infinito y $f^{n_k}(x) \to f^i(e)$. Por tanto, $\omega_f(y) = \mathcal{O}_f(e)$.

Como $y \in \mathcal{O}_f(x)$, entonces $\omega_f(x) = \omega_f(y) = \mathcal{O}_f(e)$. Pero, $a \notin \mathcal{O}_f(e)$. Esto es una contradicción. En consecuencia, $f^n(x) \to a$. ∎

El próximo teorema muestra que si dada una función continua $f : X \to X$ tal que cada $a \in X'$ es periódico, entonces $\omega_f(x)$es una órbita periódica para cada $x \in X$.

Teorema 3.3.9 *Sea $f : X \to X$ una función continua tal que cada $a \in X'$ es periódico. Para cada $x \in X$, existe un punto periódico $a \in X$ tal que $\omega_f(x) = \mathcal{O}_f(a)$.*

Demostración. Si $\mathcal{O}_f(x)$ es finito, existe un $a \in \mathcal{O}_f(x)$ periódico. Un momento de reflexión revela que $\omega_f(x) = \mathcal{O}_f(a)$.

En otro sentido, si la órbita $\mathcal{O}_f(x)$ es infinita y $a \in \omega_f(x)$, claramente, $a \in X'$. Sean $s = |\mathcal{O}_f(a)|$ y $g = f^s$. Entonces, $a = g(a)$. Por el teorema 3.3.8, $g^n(x) \to a$. Siguiendo las ideas de la parte final de este mismo teorema, se muestra que $\omega_f(x) = \mathcal{O}_f(a)$. Por el lema 3.1.6, $\{f^p(x) : p \in \mathbb{N}^*\} = \omega_f(x) = \mathcal{O}_f(a)$. ∎

De los dos siguientes teoremas concluimos que dado un sistema dinámico (X, f), donde cada elemento de X' es un punto periódico, para cada $b \in X'$ o cada f^q es discontinua en b para toda $q \in \mathbb{N}^*$ o cada f^q es continua en b para todo $q \in N^*$.

Teorema 3.3.10 *Sea $f : X \to X$ una función continua tal que cada $a \in X'$ es periódico. Dado $b \in X'$ un punto fijo, entonces cada f^q es discontinua en b para toda $q \in \mathbb{N}^*$ o cada f^q es continua en b para todo $q \in N^*$.*

Demostración. Supongamos que existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que f^p es discontinua en b. De lo que se desprende que, existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \to b$ y $f^p(a_n) \not\to b$. De esta manera, existen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $c \in X \setminus \{b\}$ tales que $f^p(a_{n_k}) \to c$. Sin perdida de generalidad, supongamos que esa sucesión es $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Case I. Supongamos que c es aislado. El conjunto

$$H = \{n \in \mathbb{N} : f^p(a_n) = c\}$$

es cofinito. Por lema 3.1.4, c es un punto periódico. Por teorema 3.3.9, para cada $n \in H$, el conjunto $\{f^q(a_n) : q \in \mathbb{N}^*\} = \mathcal{O}_f(c)$.

Notemos que, $\mathcal{O}_f(c)$ es finito. Aunado a esto, $b \in X'$ y es fijo, por lo que $b \notin \mathcal{O}_f(c)$. De esto, f^q es discontinua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$.

Case II. Supongamos que $c \in X'$. Por teorema 3.3.9, $f^q(a_n)$ es periódico para cada $q \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$. Sea $H = \{n \in \mathbb{N} : f^p(a_n) = c\}$. Por teorema 3.3.9, para cada $n \in H$, $\{f^q(a_n) : q \in \mathbb{N}^*\} = \mathcal{O}_f(c)$.

Si $H = \{n \in \mathbb{N} : f^p(a_n) = c\}$ es cofinito, entonces como $\mathcal{O}_f(c)$ es finito, tenemos que $(f^q(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge a un $y_q \in \mathcal{O}_f(c)$ para cada $q \in \mathbb{N}^*$. De esto, f^q es discontinua en b, para cada $q \in \mathbb{N}^*$.

Supongamos sin perdida de generalidad que $H^c = \mathbb{N}$. Como $f^p(a_n)$ converge a c, por corolario 3.3.6, para cada $V \in \mathcal{N}(O_f(c))$ el conjunto

$$\mathcal{B}_V = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{O}_f(f^p(a_n)) \subset V\}$$

es cofinito. Puesto que $c \neq b$ y b es fijo, entonces $b \notin \mathcal{O}_f(c)$. Luego, existe un abierto cerrado $W \in \mathcal{N}(O_f(c))$ tal que $b \notin W$ y B_W es cofinito. Por tanto, $(f^q(a_n))$ no converge a b para cada $q \in \mathbb{N}^*$. Concluyéndose que, f^q es discontinua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$ ∎

Un hecho interesante, que presentaremos en breve, es que para cada función continua f tal que cada $a \in X'$ es $f-$periódico, si existe algún $p \in \mathbb{N}^*$ con f^p discontinua en b, entonces es f^p discontinua en y para cada $y \in \mathcal{O}_f(b)$. Como mencionamos en la introducción, este es el teorema más importante de nuestro trabajo junto al ejemplo que se exhibe en la próxima sección de este capítulo.

Lema 3.3.11 *Sea $f : X \to X$ una función tal que cada $a \in X'$ es periódico. Sea $b \in X'$. Si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que f^p es discontinua en b, entonces para cada $y \in \mathcal{O}_f(b)$, f^p es discontinua en y.*

Demostración. Supongamos que existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que f^p es discontinua en b. De esto, existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \to b$ y $f^p(a_n) \not\to b$. Puesto que, X es compacto, existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $c \in X\backslash\{b\}$ tal que $f^p(a_{n_k}) \to c$. Sin perdida de generalidad, supongamos que esta sucesión es $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si c es aislado, por el teorema 3.1.4, c es un punto periódico. En caso contrario,

$c \in X'$ y también es un punto periódico.

Sea $s = |\mathcal{O}_f(b)|$. Existe un $i_p < s$ tal que $p \in (s\mathbb{N} + i_p)^*$. Para $y \in \mathcal{O}_f(b)$, existe $l < s$ tal que $f^l(b) = y$. Por lema 3.1.2, $f^p(y) = f^{i_p}(y)$. Nosotros mostraremos que $f^l(c) \neq f^{i_p}(y)$.

Efectivamente, si $b \notin \mathcal{O}_f(c)$, tendremos que $\mathcal{O}_f(b) \cap \mathcal{O}_f(c) = \emptyset$. De esta forma, $f^l(c) \neq f^{i_p}(y)$. Por otro lado, si $b \in \mathcal{O}_f(c)$, entonces $\mathcal{O}_f(b) = \mathcal{O}_f(c)$ puesto que b y c son puntos periódicos. Luego, existe $m < s$ tal que $f^m(b) = c$. Supongamos por reducción al absurdo que, $f^l(c) = f^{i_p}(y)$. Así, $f^{l+m}(b) = f^l(c) = f^{i_p}(y) = f^{l+i_p}(b)$ y $m = i_p$. Por lo que tenemos que $f^p(b) = f^{i_p}(b) = c$. Esto es una contradicción, porque $f^p(a_n) \nrightarrow f^p(b)$. Así, $f^l(c) \neq f^{i_p}(y)$.

Puesto que f es una función continua, $f^l(a_n) \to y$. Como

$$f^p(f^l(a_n)) = f^{p+l}(a_n) \to f^l(c) \neq f^{i_p}(y) = f^p(y).$$

en consecuencia, f^p es discontinua en y. ■

Este lema 3.3.11, resulta fundamental para mostrar una dicotomía sobre los elementos del semigrupo de Ellis, análoga a la presentada en el teorema 2.1.1, para el caso que todos los puntos de acumulación del espacio de fases (este espacio es numerable) sean periódicos. A continuación, mostraremos esta dicotomía en el próximo teorema, el cual también es consecuencia del teorema 3.3.10.

Teorema 3.3.12 *Sean $f : X \to X$ una función continua tal que cada $a \in X'$ es periódico. Sea $b \in X'$. Luego, o cada f^q es discontinua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$ o cada f^q es continua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$.*

Demostración. Sean $s = |\mathcal{O}_f(b)| =$ y $g = f^s$. Claramente, cada $c \in \mathcal{O}_f(b)$ es un punto fijo de g. Por el teorema 3.3.10 y el lema 3.3.11, g^q es continua en $\mathcal{O}_f(b)$ para cada $q \in \mathbb{N}^*$ o g^q es discontinua en $\mathcal{O}_f(b)$ para cada $q \in \mathbb{N}^*$. Notemos que para cada $q \in \mathbb{N}^*$, existe un $i_q < s$ tal que $q \in (s\mathbb{N} + i_q)^*$ y por el lema 3.1.1, $f^q = q - \lim_{m\to\infty} f^{sm+i_p} = g^q f^{i_q}$. En consecuencia, si g^q es continua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$, entonces f^q es continua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$ y si g^q es discontinua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$, entonces f^q es discontinua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$. ■

El próximo corolario es consecuencia directa del teorema .

Corolario 3.3.13 *Sea (X, f) un sistema dinámico donde X es un espacio métrico compacto numerable tal que cada $b \in X'$ es periódico. Luego, cada f^q es discontinua en X para cada $q \in \mathbb{N}^*$ o cada f^q es continua en X para cada $q \in \mathbb{N}^*$.*

Observación 3.3.14 *Este corolario muestra que en el caso de sistemas dinámicos (X, f) donde X es un espacio métrico compacto numerable tal que cada $b \in X'$ es periódico la respuesta a la pregunta 2 es negativa igual que en el caso que el espacio de fases sea una sucesión convergente.*

Con respecto a las preguntas 1 y 3 formuladas al inicio del capítulo no tenemos una respuesta concreta para este tipo de sistemas dinámicos (X, f). En lo que resta de esta sección daremos respuestas a estas preguntas en el caso particular que cada elemento de X' sea un punto fijo. Para ello presentaremos el siguiente teorema análogo al teorema 3.2.2.

Lema 3.3.15 *Sea $f : X \to X$ una función continua que fija a cada $a \in X'$. Sean V y W entornos abiertos-cerrados de X tales que $V \cap W = \emptyset$. El conjunto de puntos $H = \{x \in X : x \in V \text{ y } f(x) \in W\}$ es finito.*

Demostración. Supongamos que existe una sucesión infinita $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$. Por ser X compacto, existe $a \in X$ y una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{n_k} \to a$. Como f es una función continua, V es cerrado y $a \in X'$, tendremos que $f(a_{n_k}) \to f(a) = a$. Lo cual es una contradicción. Por tanto H es finito. ■

Recordemos que todo punto fijo es periódico, por lo que en el caso que todos los elementos de X' sean fijos, tenemos por el corolario 3.3.13, que o cada f^q es discontinua en X para cada $q \in \mathbb{N}^*$ o cada f^q es continua en X para cada $q \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 3.3.16 *Sean f una función de X en sí mismo tal que cada $a \in X'$ es fijo. Dado $b \in X'$, se tiene que las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que f^p es discontinua en $b \in X'$.*

2. *Existe un punto $z \in X\setminus\{b\}$ periódico tal que para cualquier $V \in \mathcal{N}(b)$, el conjunto $I_V = \{y \in V : z \in \overline{\mathcal{O}_f(y)}\}$ es infinito.*

3. *f^q es discontinua en b, para todo $q \in \mathbb{N}^*$.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Si f^p es discontinua en $a \in X'$, existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que a_n converge al punto a y $f^p(a_n)$ no converge al punto $a = f^p(a)$. Por ser X compacto, existe una subsucesión (n_k) y un $c \in X$ tal que $f^p(a_{n_k}) \to c$. Supongamos sin perdida de generalidad que esta subsucesión es $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Caso 1: c es un punto aislado de X. Luego, $B = \{n \in \mathbb{N} : f^p(a_n) = c\}$ es cofinito. Por el lema 3.1.4, c es periódico. Para cualquier $n \in B$, se tiene que $A_n = \{m \in \mathbb{N} : f^m(a_n) = c\} \in p$. Observemos que, B es infinito y si $n \in B$, entonces $c \in \mathcal{O}_f(a_n)$. De lo que concluimos que para cada $V \in \mathcal{N}(b)$, el conjunto I_V es infinito.

Caso 2: $c \in X'$. Luego, c=f(c). Como $b \neq c$, existe $V \in \mathcal{N}(b)$ abierto-cerrado tal que $c \notin V$. Puesto que $f^p(a_n) \to c$ y $a_n \to b$, existe $N_V \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in V$ y $f^p(a_n) \in V^c$ para $n \geqslant N_V$. De lo que se desprende que, para $n \geqslant N_V$, el conjunto $A_n = \{m \in \mathbb{N} : f^m(a_n) \notin V\} \in p$. De igual manera, para cada $n \geqslant N_V$, existe un punto $d_n \in \mathcal{O}_f(a_n) \cap V$ y $f^p(d_n) \in V^c$. Por el lema 3.3.15, el conjunto $B = \{d_n : n \geqslant N_V\}$ es finito. Luego, existe $d \in B$ tal que $H = \{n \in \mathbb{N} : d = d_n\}$ es infinito.

Si $\mathcal{O}_f(d)$ es infinita, existe $e \in X'$ tal que $e \in \omega_f(d)$. Puesto que e es fijo, por el teorema 3.3.8, $f^m(b) \to e$. De igual modo, $f^m(a_n) \to e$ para cada $n \in H$. De lo que concluimos que $f^q(a_n) = e$ para cada $q \in \mathbb{N}^*$, $n \in H$. Recordemos que $f^p(a_n) \to c$. Luego, $c = e$. Por tanto, $(f^q(a_n))_{n\in H}$ converge a c para cada $q \in \mathbb{N}^*$ y cada $n \geqslant N_V$. Concluyéndose que, el conjunto I_V es infinito.

Si $\mathcal{O}_f(d)$ es finita, sabemos por el lema 3.3.9, que existe un $e \in X$ periódico tal que $\mathcal{O}_f(e) = \{f^q(d) : q \in \mathbb{N}^*\} = \{f^q(a_n) : q \in \mathbb{N}^*\}$ para $n \in H$. Dado que c es fijo, $\mathcal{O}_f(e)$ es finita y $f^p(a_n) \to c$, entonces $c = d$. Por tanto, $c \in \mathcal{O}_f(a_n)$, para cada $n \in H$. De lo que concluimos que para cada $V \in \mathcal{N}(a)$, el conjunto I_V es infinito.

2) $\Rightarrow$ 3) Sean $V \in \mathcal{N}(a)$ y $y \in I_V$.

Caso 1: Si z es aislado y periódico, tenemos que $\mathcal{O}_f(z) \cap X' = \emptyset$. Claramente, $\mathcal{O}_f(y)$ es finita y por lema 3.3.9, $\mathcal{O}_f(z) = \{f^q(y) : q \in \mathbb{N}^*\}$. Como X es un espacio métrico, podemos construir una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \to b$ y $f^q(y_n) \nrightarrow b$ para cada $q \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$. Por lo que f^q es discontinua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$.

Caso 2: Si $z \in X'$, entonces z es fijo. Si $\mathcal{O}_f(y)$ es finita, es claro que $\omega_f(y) = \{z\}$. Por otro lado, si $\mathcal{O}_f(y)$ es infinita, ya que $z \in \omega_f(y)$ es fijo, tendremos por el teorema 3.3.8, que $\omega_f(y) = \{z\}$. Considerando lo anterior, podemos construir una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \to b$ y $f^q(y_n) \nrightarrow b$ para cada $q \in \mathbb{N}^*$. De lo que concluimos que, f^q es discontinua en b para cada $q \in \mathbb{N}^*$.

3) $\Rightarrow$ 1) Es obvio. ■

Del teorema 3.3.16, concluimos que un sistema dinámico (X, f) donde cada $a \in X'$ es fijo, es WAP si el item 2) del teorema 3.3.16, no se cumple para todo $a \in X'$. De este teorema también se concluye el siguiente corolario.

Corolario 3.3.17 *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Entonces el conjunto*

$$\mathfrak{D} = \{f \in C(X, X) : \textit{cada } x \in X' \textit{ es fijo y } (X, f) \textit{ es WAP}\}$$

es boreliano.

De esta manera, con el teorema 3.3.16 y el corolario 3.3.17, obtenemos respuestas a las preguntas 1 y 3, en el caso que cada $x \in X'$ sea fijo.

3.4. Ejemplo

Nosotros podemos estar tentados a pensar que, si cada $a \in X'$ tiene una órbita finita, la tesis del teorema 3.3.10 y del corolario 3.3.13 es también verdadera. Sin embargo, esto no es cierto. En el siguiente ejemplo, mostraremos que una función continua f en un espacio métrico compacto numerable, donde la órbita de cada $b \in X'$ es finita, existen p, $q \in \mathbb{N}^*$, tal que f^p es discontinua en X y f^q es continua en X. Antes que todo, veamos el siguiente lema.

Lema 3.4.1 *Sea $B \subset \mathbb{N}$ infinito. Si B contiene una sucesión $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de primos relativos, entonces existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $p \in \bigcap(a_i\mathbb{N} + d_i)^*$, $0 \leqslant d_i < s_i$.*

Demostración. Escogiendo para cada $i \in \mathbb{N}$, un $d_i < a_i$, nosotros queremos mostrar que $\{(a_i\mathbb{N} + d_i)^* : i \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Efectivamente, fijaremos $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in A$ y escojamos $d_{i_k} < a_{i_k}$. Veamos que,

$$(a_{i_1}\mathbb{N} + d_{i_1})^* \cap \ldots \cap (a_{i_n}\mathbb{N} + d_{i_n})^* \neq \emptyset.$$

Para esto observemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} d_{i_1} \equiv x, \quad (mod\ a_{i_1}); \\ \vdots \\ d_{i_n} \equiv x, \quad (mod\ a_{i_n}). \end{cases}$$

El cual tiene solución por el teorema del Resto Chino, puesto que $d_{i_1}, \ldots, d_{i_n}$ son primos relativos. En consecuencia,

$$(a_{i_1}\mathbb{N} + d_{i_1})^* \cap \ldots \cap (a_{i_n}\mathbb{N} + d_{i_n})^* \neq \emptyset,$$

y existe $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(a_i\mathbb{N} + d_i)^*$ para $d_{i_{j_k}} < a_{i_{j_k}}$. ∎

Como dijimos en la introducción, el siguiente ejemplo presenta una respuesta afirmativa a la pregunta acerca de los sistemas WAP, que fué planteada en [GM07].

¿Existe un sistema dinámico (X, f) tal que existen

$$g, \ h \in E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$$

donde g es una función continua y h es una función discontinua en X?

Cabe destacar, nuevamente, que este ejemplo y el teorema 3.3.12 son los principales resultados de nuestro trabajo.

Ejemplo 3.4.2 *Sea*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \cup \{d_n\} \cup \{d\},$$

donde $D_n = \{d^n_m : m \in \mathbb{N}\}$ *tal que* $d^n_m \to d_n$ *y* $d_n \to d$. *Sea* $A = (d^n_n)_{n\in\mathbb{P}}$ *una sucesión tal que* $d^n_n \to d$, *donde* $\mathbb{P}$ *denota el conjunto de los números primos. Graficamente,*

$$d^0_0 \ d^0_1 \ d^0_2 \ d^0_3 \quad d_0 \quad d^1_0 \ d^1_1 \ d^1_2 \ d^1_3 \quad d_1 \quad d^2_0 \ d^2_1 \ d^2_2 \ d^2_3 \quad d_2 \qquad d$$

Definimos la siguiente función $f : X \to X$:

1. *Para cada* $m \in \mathbb{N}$, $f(d^0_m) = d^0_m$ *y* $f(d_0) = d_0$.

2. *Para cada* $m \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$, $f(d^1_m) = d$ *y* $f(d_1) = d$.

3. *Para cada* $m \in \mathbb{P}$, $f(d^1_m) = d^m_m$.

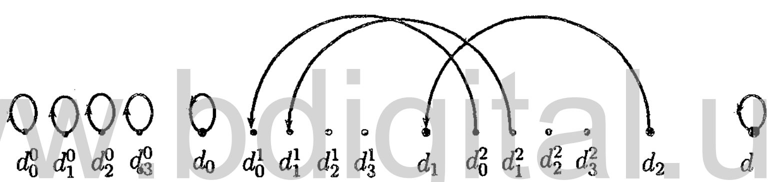
4. *Para* $n \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{N}$, $f(d^m_n) = d^{m-1}_n$ *para cada* $m < n$ *y* $f(d^m_n) = d^{m-1}_{n-1}$ *para cada* $m > n$.

5. *Para cada* $n \in \mathbb{P}$, $f(d^n_n) = d^{n-1}_n$.

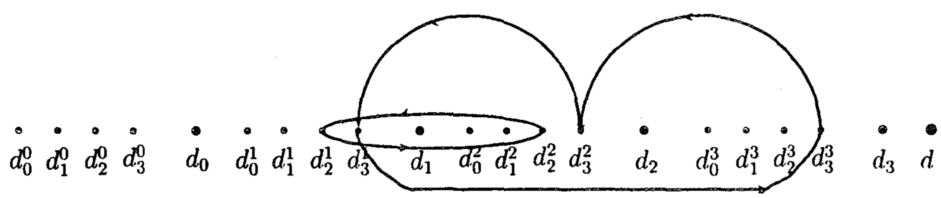
6. *Para cada* $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{\mathbb{P} \cup \{0, 1\}\}$, $f(d^m_n) = d^{m-1}_n$.

7. *Para cada* $n > 1$, $f(d_n) = d_{n-1}$ *y* $f(d) = d$.

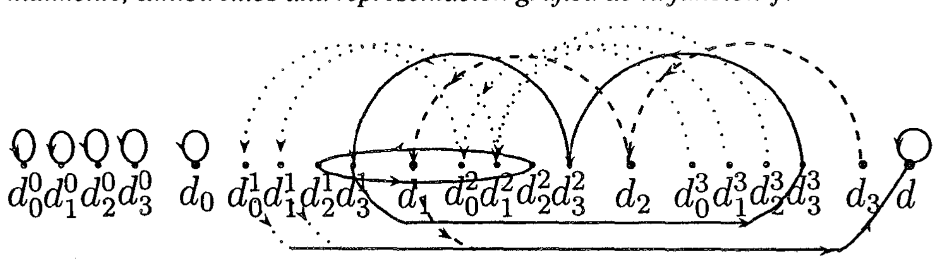
Primero, veamos la representación gráfica de algunos puntos de X *que no son elementos de* A.



Posteriormente, veamos una representación gráfica de las órbitas de los puntos periódicos d^2_2, $d^3_3 \in A$.



Finalmente, exhibiremos una representación gráfica de la función f.



Algunos ejemplos de órbitas de puntos de X *son las siguientes.*

- *Para* $n \in \mathbb{P}$, $\mathcal{O}_f(d_n^n) = \{d_n^n, d_n^{n-1}, d_n^{n-2}, \ldots, d_n^1\}$. *A continuación, veremos una representación gráfica de las órbitas de* d_2^2 *y* d_3^3.
- *Para* $n \in \mathbb{P}$, $m > n > 5$, $\mathcal{O}_f(d_n^m) = \{d_{n-1}^{m-1}, d_{n-1}^{m-2}, d_{n-1}^{m-3}, \ldots . d_{n-1}^1, d\}$.
- *Para* $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{\mathbb{P} \cup \{0,1\}\}$, $\mathcal{O}_f(d_n^m) = \{d_n^{m-1}, d_n^{m-2}, d_n^{m-3}, \ldots, d_n^1, d\}$.

Por la definición de f, *tenemos que*

i. *Para todo* $n > 1$, $f(D_n) \subset^* D_{n-1}$ *y* $f(D_0) = D_0$.

ii. $f(D_1 \setminus \{d_n^1 : n \in \mathbb{P}\}) = \{d\}$ *y* $f(\{d_m^1 : m \in \mathbb{P}\}) = \{d_m^m : m \in \mathbb{P}\}$.

iii. *Si* $x_m \to d$, *entonces* $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \cap D_n$ *es finito para cada* $n \in \mathbb{N}$.

iv. *Si* $x \notin \cup_{n\in\mathbb{P}} \mathcal{O}_f(d_n^n)$, *entonces existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^l(x) = d$ *para cada* $l \geqslant m$.

Por (i) *y* (ii) *la función* f *es continua en* d_n *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *En adición,* f *es continua en* d *por* (iii). *Además,* f *es continua en* X.

Para $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{P}}(n\mathbb{N} + (n-1))^*$ *y para cada* $n \in \mathbb{P}$, $f^p(d_n^n) = f^{n-1}(d_n^n) \in D_1$. *Así,* f^p *es discontinua en* d.

Por otro lado, sea $q \in \bigcap_{n\in\mathbb{P},\, n>2}(n\mathbb{N} + \frac{n+1}{2})^*$. *Claramente,* f^q *es continua en* d_m^n *para cada* n, $m \in \mathbb{N}$. *Fijemos* $n \in \mathbb{N}$. *Sabemos que* $f^q(d_n) = d$ *y además que para cualquier* $m \notin \mathbb{P}$, $f^q(d_m^n) = d$ *por* (iv). *De esto se desprende que la sucesión* $(f^q(d_m^n))_{m\notin\mathbb{P}}$ *converge a* $f^q(d_n)$.

Por otra parte, para $m \in \mathbb{P}$ *con* $n > m$, $f^q(d_m^n) = d$ *por* (iv). *Para* $m > n$, $f^q(d_m^n) = f^{\frac{m+1}{2}}(d_m^n) \in D_{n-\frac{m+1}{2}}$ *si* $\frac{m+1}{2} \geqslant n$ *y* $f^q(d_m^n) = f^{\frac{m+1}{2}}(d_m^n) \in D_{\frac{m+1}{2}-n}$ *si* $\frac{m+1}{2} < n$ *(*m *es el período del punto* d_m^n *con* $m > n$*). Por tanto la sucesión* $(f^q(d_m^n))_{m\in\mathbb{P}}$ *converge a* $f^q(d^n)$. *Así,* f^q *es continua en* d_n.

Veamos que f^q *es continua en* d. *De igual modo, para cada sucesión* (x_k) *que converge a* d, *tendremos que para cada* $x_k \notin \cup_{n\in\mathbb{P}} \mathcal{O}_f(d_n^n)$, $f^q(x_k) = d$ *por* (iv). *Para* $x_k \in \bigcup_{n\in\mathbb{P}} \mathcal{O}_f(d_n^n)$ *con período* s, *obtenemos* $f^q(x_k) = f^{\frac{s+1}{2}}(x_k) \in D_{\frac{s+1}{2}}$. *En consecuencia,* f^q *es continua en* d.

De esta manera, f^p *es discontinua en* X *y* f^q *es continua en* X.

Capítulo 4

Cardinalidad del Semigrupo de Ellis

En este capítulo trataremos el problema de la cardinalidad del semigrupo de Ellis. Como mencionamos en los antecedentes, A. Köler en [Ko] y E. Glasner junto a M. Megrehisvili en [GM06] obtuvieron resultados sobre la cardinalidad del semigrupo de Ellis usando las ideas de J. Bourgain, D. Fremlin y M. Talagrand en [BFT]. En este sentido, ellos mostraron una dicotomía en el teorema 2.2.1, sobre la cardinalidad del semigrupo de Ellis y estableciendo, así mismo, una relación entre la cardinalidad y la estructura topológica del semigrupo de Ellis.

Dado que, nosotros estamos interesados principalmente en los semigrupos de Ellis $E(X, f)$, asociados a sistemas dinámicos (X, f), donde X es un espacio métrico compacto numerable, se desprende del teorema 2.2.1, que en estos casos $E(X, f)$ es un compacto de Rosenthal y en consecuencia (X, f) es un sistema dinámico "tame".

Notemos que, por el teorema 2.0.15, el semigrupo de Ellis se puede escribir como la siguiente unión de conjuntos

$$E(X, f) = \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}.$$

Considerando esto, en este capítulo, daremos condiciones para que el semigrupo de Ellis sea finito, infinito numerable, no numerable y el conjunto $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ sea finito.

Es por esto que, las preguntas que orientarán nuestro análisis en este capítulo son las siguientes:

Pregunta 4 *¿ Bajo qué condiciones $E(X, f)$ es no numerable?*

Pregunta 5 *¿Bajo qué condiciones $E(X, f)$ es finito?*

Pregunta 6 *¿Bajo qué condiciones $E(X, f)$ es numerable infinito?*

En este capítulo, salvo que se establezca algo diferente, X denotará un espacio métrico compacto numerable y f una función continua sobre X.

4.1. Resultados sobre Subconjuntos de $\mathbb{N}$

En esta sección, presentaremos algunos resultados sobre subconjuntos de números naturales que son vitales para analizar la cardinalidad del semigrupo de Ellis.

Recordemos que, para $B_1, \ldots, B_n \subset \mathbb{N}$ se cumple que

1. $\bigcap_{i=1}^n B_n^* = (\bigcap_{i=1}^n B_i)^*$.
2. $\bigcup_{i=1}^n B_n^* = (\bigcup_{i=1}^n B_i)^*$.

Lema 4.1.1 *Sea $B \subset \mathbb{N}$ infinito. Si existe un número $r \in \mathbb{N}$ tal que B contiene una sucesión $A = (ra_i)_{i\in\mathbb{N}}$ donde $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de primos relativos, entonces existe un ultrafiltro $p \in \bigcap(ra_i\mathbb{N} + rk_i)^*$ donde $k_i = 0, 1$.*

Demostración. Sea (k_i) en $2^{\mathbb{N}}$. Veamos que la colección $\{ra_i\mathbb{N} + rk_i : i \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Para esto se debe cumplir que para cualesquiera subconjuntos $ra_{i_1}\mathbb{N} + rk_{i_1}, \ldots, ra_{i_n}\mathbb{N} + rk_{i_n}$, la intersección

$$(ra_{i_1}\mathbb{N} + rk_{i_1})^* \cap \ldots \cap (ra_{i_n}\mathbb{N} + rk_{i_n})^* \neq \emptyset.$$

Para esto observemos que el sistema

$$\begin{cases} ra_{i_1}y_1 + rk_{i_1} = x, \\ \vdots \\ ra_{i_n}y_n + rk_{i_n} = x, \end{cases}$$

es equivalente a

$$\begin{cases} a_{i_1}y_1 + k_{i_1} = z, \\ \vdots \\ a_{i_n}y_n + k_{i_n} = z, \end{cases}$$

con $x = rz$ y como $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ son primos relativos, el sistema siguiente tiene solución

$$\begin{cases} k_{i_1} = z, & (mod\ a_{i_1}); \\ \vdots & \\ k_{i_n} = z, & (mod\ a_{i_n}). \end{cases}$$

Por lo que $(ra_{i_1}\mathbb{N} + rk_{i_1})^* \cap \ldots \cap (ra_{i_n}\mathbb{N} + rk_{i_n})^* \neq \emptyset$. En consecuencia, por corolario 1.1.12, existe $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(ra_i\mathbb{N} + rk_i)^*$. ∎

Dados $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\alpha \restriction n$ a los primeros n elementos de α. Además, dada una sucesión finita $t = (t_1, \ldots, t_n) \in 2^{<\mathbb{N}}$ denotaremos por $t \frown i$ a la sucesión finita $t \frown i = (t_1, \ldots, t_n, i)$. Es claro que, para cada $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ se tiene $\alpha \restriction n \in 2^{<\mathbb{N}}$.

Lema 4.1.2 *Sea $B \subset \mathbb{N}$ infinito. Sea A un subconjunto de B tal que para cualesquiera $c, b \in A$ donde $c < b$, entonces $c|b$. Sea $A = (s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una enumeración creciente de A. Para cada $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, sea $(b_{\alpha\restriction n})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales dada por*

$$b^0_\emptyset = 0,\ b^{k+1}_{\alpha\restriction n+1} = b^k_{\alpha\restriction n} + 0,\ b^{k+1}_{\alpha\restriction n+1} = b^k_{\alpha\restriction n} + s_{k-1}.$$

Luego, para todo $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, existe $p \in \cap_{n\in\mathbb{N}}(s_n\mathbb{N} + b^n_{\alpha\restriction n})^*$.

Demostración. Veamos por inducción matemática que para cada $k \in \mathbb{N}$, $t \in 2^{<\mathbb{N}}$ e $i = 0, 1$ se tiene que

$$s_{k+1}\mathbb{N} + b^{k+1}_{t\frown i} \subset s_k\mathbb{N} + b^k_t$$

Para $k = 0$, tenemos que existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que $s_1 = s^0 l_1$

$$s_1\mathbb{N} + b^1_0 = s_0 l_1\mathbb{N} \subset s_0\mathbb{N},$$

$$s_1\mathbb{N} + b^1_1 = s_0\mathbb{N} + s_0 = s_0(l_1\mathbb{N} + 1) \subset s_0\mathbb{N}.$$

Para el caso general, existe $l_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $s_{k+1} = s_k l_{k+1}$ y para $i = 0, 1$,

$$s_{k+1}\mathbb{N} + b_{t\frown i^{k+1}} = s_k l_{k+1}\mathbb{N} + b^k_t + s_k i = s_k(l_{k+1}\mathbb{N} + i) + b^k_t \subset s_k\mathbb{N} + b^k_t.$$

Por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$s_{k+1}\mathbb{N} + b^{k+1}_{t^\frown i} \subset s_k\mathbb{N} + b^k_t,$$

para $i = 0, 1$.

As'i, por corolario 1.1.12, para cualquier $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, se tiene que $\cap_{n\in\mathbb{N}}(s_n\mathbb{N}+b_{\alpha\restriction n}) \neq \emptyset$ pues

$$s_0\mathbb{N} + b^0_\emptyset \supset \ldots \supset s_n\mathbb{N} + b^n_{\alpha\restriction n} \supset \ldots.$$

Por tanto, existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $p \in \cap_{n\in\mathbb{N}}(s_n\mathbb{N} + b_{\alpha\restriction n})^*$. ■

4.2. Semigrupo de Ellis no numerable

En esta sección exhibiremos algunas condiciones para que el semigrupo de Ellis asociado a un sistema dinámico cuyo espacio de fases es un espacio métrico compacto, sea no numerable. De esta manera, damos una respuesta parcial a la pregunta 4.

Recordemos la siguiente notación, mencionada en el primer capítulo. Para cada $s \in \mathbb{N}$, el subconjunto de X,

$$P_s = \{x \in X : x \text{ tiene período } s\},$$

de todos los puntos periódicos de período s y

$$P = \{s \in \mathbb{N} : (\exists x \in X)(x \in P_s)\},$$

el conjunto de todos los posibles períodos que puede tener un punto periódico $x \in X$.

En el próximo teorema se exhibe que en el caso que X es un espacio métrico compacto, si P es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ que cumple ciertas condiciones, el semigrupo de Ellis $E(X, f)$, es no numerable.

Teorema 4.2.1 *Sean (X, f) un sistema dinámico, donde X es un espacio métrico compacto. Si P es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ que cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

1. *Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que P contiene una sucesión $A = (ra_i)_{i\in\mathbb{N}}$ donde $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de primos relativos,*

2. *Sea A un subconjunto de P tal que para cualesquiera $c, b \in A$ donde $c < b$, entonces $c|b$,*

entonces $E(X, f)$ es no numerable.

Demostración. Sea $P = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una enumeración creciente de P. Para cada $p \in \beta\mathbb{N}$ y cualquier $b_i \in P$, por el lema 1.1.18, existe un único $j_i < b_i$ tal que $p \in \widehat{b_i\mathbb{N} + j_i}$. De esta forma, podemos asociar a cada $p \in \beta\mathbb{N}$ una única sucesión infinita $(j_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Considerando esto, definimos la función

$$\varphi : \beta\mathbb{N} \to \prod_{i\in\mathbb{N}}\{0, \ldots, b_i - 1\} \text{ dada por } \varphi(p) = (j_i)_{i\in\mathbb{N}},$$

la cual claramente esta bien definida por el lema 1.1.18. Notemos que, $\prod_{i\in\mathbb{N}}\{0, \ldots, b_i - 1\}$ no es numerable.

Antes que todo, veamos que se cumple para todo $p, q \in \beta\mathbb{N}$

$$\text{si } f^p = f^q, \text{ entonces } \varphi(p) = \varphi(q).$$

En efecto, si $f^p = f^q$, entonces $f^p(y) = f^q(y)$ para cada $y \in X$. Así, para $z \in X$ un punto periódico de período $b_i \in P$, existe un $j_i < b_i$ tal que $f^p(z) = f^{j_i}(z) = f^q(z)$, por lo que $\varphi(p) = \varphi(q)$.

Caso 1: Supongamos que P satisface (1) del teorema 4.2.1. Como P contiene una sucesión creciente $(ra_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de primos relativos, del lema 4.1.1, sabemos que para cada $(d_i)_{i\in\mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}}$, existe $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(ra_i\mathbb{N} + rd_i)^*$. Es claro que cada $p \in \mathbb{N}^*$, determina una función $f^p \in E(X, f)$. Observemos que, para $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}}$ distintas, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $d_i \neq c_i$.

De esta forma, para $x \in X$ periódico, de período $ra_i \in P$, se cumple por el lema 3.1.2,

$$f^p(x) = f^{rd_i}(x) \text{ y } f^q(x) = f^{rc_i}(x)$$

para $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(ra_i\mathbb{N} + rd_i)^*$ y $q \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(ra_i\mathbb{N} + rc_i)^*$. Por lo que $f^p \neq f^q$.

Puesto que, $\{(rd_i)_{i\in\mathbb{N}} : (d_i)_{i\in\mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}}\} \subset \varphi(\mathbb{N}^*)$, tendremos que los conjuntos $\varphi(\mathbb{N}^*)$ y $\{f^p : \varphi(p) \in \varphi(\mathbb{N}^*)\}$ son no numerables. Por tanto, $E(X, f)$ es no numerable.

Caso 2: Supongamos que P satisface la condición (2) del teorema 4.2.1. De esta forma, existe un $H \subset P$, tal que si $c, b \in H$ y c es menor que b, entonces b divide a c. Sea $A = (s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una enumeración creciente de H.

Sea $\alpha \in 2^{<\mathbb{N}}$ y $(b_{\alpha\restriction n})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales dada por

$$b^0_\emptyset = 0,\ b^{k+1}_{\alpha\restriction n+1} = b^k_{\alpha\restriction n} + 0,\ b^{k+1}_{\alpha\restriction n+1} = b^k_{\alpha\restriction n} + s_{k-1}.$$

Luego, por el lema 4.1.2, tendremos que para todo $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(s_n\mathbb{N} + b^n_{\alpha\restriction n})^*$.

Si $\alpha \neq \gamma$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \restriction n_0 \neq \gamma \restriction n_0$. Por el lema 1.1.18, existe $p \neq q$ en $\mathbb{N}^*$ tal que $\psi(p) = (b_{\alpha\restriction n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $\psi(q) = (b_{\gamma\restriction n})_{n\in\mathbb{N}}$. Así mismo, para $x \in X$ periódico de período $s_n \in P$ se tiene por el lema 3.1.2, que $f^p(x) = f^l(x)$ y $f^q(x) = f^{l_1}(x)$ donde $l = b_{\alpha\restriction n}$, $l_1 = b_{\gamma\restriction n}$.

Como $\{(b^n_{\alpha\restriction n})_{n\in\mathbb{N}} : \alpha \in 2^{\mathbb{N}}\} \subset \varphi(\mathbb{N}^*)$, los conjuntos $\varphi(\mathbb{N}^*)$ y $\{f^p : \varphi(p) \in \varphi(\mathbb{N}^*)\}$ son no numerables. Por tanto, $E(X, f)$ es no numerable. ∎

Observemos que, del teorema 4.2.1, sabemos que el semigrupo de Ellis es no numerable cuando P satisface alguna de las tres condiciones de la hipótesis, dando una respuesta parcial a la pregunta 4. No obstante, no sabemos que ocurre con la cardinalidad del semigrupo de Ellis, cuando P es infinito y no satisface alguna de esas condiciones. De esta forma, queda para el futuro el determinar si el semigrupo de Ellis es no numerable siempre que P sea infinito.

4.3. Semigrupo de Ellis numerable

En esta sección, daremos una condición para que el semigrupo de Ellis $E(X, f)$ sea finito cuando X es un espacio métrico compacto numerable. De este modo, respondemos la pregunta 5. Posteriormente, mostraremos que en el caso que X sea una sucesión convergente, si P es un conjunto finito, entonces el conjunto $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es finito. Además, exhibiremos que para el caso que el espacio X es un espacio métrico compacto numerable, donde cada $a \in X'$ es fijo, si P es finito, también $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es finito.

De lo que se desprende que, si el conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, tenemos que $E(X, f)$ es finito o si el conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, tendremos que $E(X, f)$ es infinito numerable. Así, damos una respuesta parcial a la pregunta 6.

Primero, veamos que en caso que todas las órbitas del sistema dinámico (X, f) donde X es un espacio métrico compacto, sean finitas, se tiene que $E(X, f)$ es finito.

Teorema 4.3.1 *Sea (X, f) un sistema dinámico, donde X es un espacio métrico compacto. Existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que $|O_f(x)| < M$ para cada $x \in X$, si y sólo si $E(X, f)$ es finito.*

Demostración. Si existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que $|O_f(x)| < M$ para cada $x \in X$, por el teorema 3.3.1, $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito. Luego, $E(X, f)$ es finito. El recíproco es evidente. ■

Este teorema 4.3.1, responde la pregunta 5. A continuación, revisemos los resultados correspondientes a la cardinalidad del semigrupo de Ellis en el caso que X es una sucesión convergente. En el próximo teorema veremos que, si P es finito, entonces $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es finito.

Lema 4.3.2 *Sea (X, f) un sistema dinámico, donde $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tal que $x_n \to x$. Si $y \in X$ tiene órbita infinita, entonces $f^n(y) \to x$.*

Demostración. Como la órbita de y es infinita, entonces cada $z \in \omega_f(y)$ es un punto de acumulación de X. Como $X' = \{x\}$, entonces $\omega_f(y) = \{x\}$. Por tanto, $f^n(y) \to x$. ■

Teorema 4.3.3 *Sea (X, f) un sistema dinámico, donde $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tal que $x_n \to x$. Si P es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, entonces $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es finito.*

Demostración. Supongamos que, $|P| = n$. Sea $P = (b_i)_{i\leqslant n}$ una enumeración creciente de P. Recordemos que, por el lema 1.1.18, para cada $p \in \beta\mathbb{N}$, $b_i \in P$, existe un $j_i < b_i$ tal que $p \in \widehat{b_i\mathbb{N} + j_i}$. De esta forma, asociamos a cada $p \in \beta\mathbb{N}$ una única sucesión finita $(j_i)_{i\leqslant n}$. Analogamente, como en la demostración del teorema 4.2.1, definimos la función

$$\varphi : \beta\mathbb{N} \to \prod_{i\leqslant n}\{0, \ldots, b_i\} \text{ dada por } \varphi(p) = (j_i)_{i\leqslant n}.$$

Claramente, esta función esta bien definida por el lema 1.1.18. Cabe destacar que, el conjunto $\prod_{i\leqslant n}\{0, \ldots, b_i\}$ es finito.

Antes que nada, veamos que para $p, q \in \mathbb{N}^*$

$$f^p = f^q \text{ si y sólo si } \varphi(p) = \varphi(q).$$

De esto, concluimos que $|\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}| = |\varphi(\mathbb{N}^*)|$. Recordemos que, en la demostración del teorema 4.2.1, se probó que si $f^p = f^q$, tenemos que $\varphi(p) = \varphi(q)$.

Mostremos el recíproco. Supongamos que $\varphi(p) = (j_i)_{i \leqslant n} = \varphi(q)$. Si $y \in X$ es un punto periódico de período $s \in P$, se tiene que $f^p(y) = f^{j_i}(y) = f^q(y)$. Si y no es periódico y tiene órbita finita, es evidente que existe un punto periódico $z \in X$ de período $b_l \in P$ tal que $z \in \mathcal{O}_f(y)$ y existe un $m_y \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_y}(y) = z$.

Luego, por el lema 3.1.3, para $p, q \in (sN + j_l)^*$,

$$f^p(y) = f^{j_l - m_y}(z) = f^q(y) \text{ si } j_l > m_y$$

y

$$f^p(y) = f^{s - m_y + j_l}(z) = f^q(y) \text{ si } j_l > m_y.$$

Por lo que, $f^p(y) = f^q(y)$ para $y \in X$ con órbita finita.

Finalmente, si y tiene órbita infinita, entonces $f(x) = x$ y por el lema 4.3.3, $f^n(y) \to x$. Por tanto, $f^p(y) = x$ para cada $p \in \mathbb{N}^*$. Así, $f^p(y) = f^q(y)$ para $y \in X$ con órbita infinita.

De lo anterior se concluye que, $f^p(y) = f^q(y)$ para todo $y \in X$. De esta forma, $f^p = f^q$. Como $\varphi(\mathbb{N}^*)$ es finito, tenemos que $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es finito. ∎

El siguiente corolario se sigue del teorema anterior. En este corolario se da una respuesta a la pregunta 6, en el caso de la sucesión convergente.

Corolario 4.3.4 *Sea (X, f) un sistema dinámico, donde $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tal que $x_n \to x$. Si $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito y P es finito, entonces $E(X, f)$ es infinito numerable.*

Ahora, de forma análoga al caso de la sucesión convergente, mostraremos que, si X es un espacio métrico compacto numerable, donde cada $a \in X'$ es fijo y P es finito, entonces el conjunto $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es finito.

Teorema 4.3.5 *Sea (X, f) un sistema dinámico, donde X es un espacio métrico compacto numerable y cada $a \in X'$ es fijo. Si P es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, entonces el* *conjunto* $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ *es finito.*

Demostración. Supongamos que, $|P| = n$. Sea $P = (b_i)_{i \leqslant n}$ una enumeración creciente de P. Igualmente, como en la demostración del teorema 4.3.3, definimos la función

$$\varphi : \beta\mathbb{N} \to \prod_{i \leqslant n} \{0, \ldots, b_i\} \text{ dada por } \varphi(p) = (j_i)_{i \leqslant n}.$$

Claramente, esta función esta bien definida por el lema 1.1.18. Además, $\prod_{i \leqslant n}\{0, \ldots, b_i\}$ es finito. Igual que en el teorema 4.3.3, basta mostrar que para $p, q \in \mathbb{N}^*$

$$f^p = f^q \text{ si y sólo si } \varphi(p) = \varphi(q).$$

para concluir que $|\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}| = |\varphi(\mathbb{N}^*)|$. Recordemos que, en la demostración del teorema 4.2.1, se probó que si $f^p = f^q$, entonces $\varphi(p) = \varphi(q)$.

Mostremos el recíproco. Supongamos que $\varphi(p) = (j_i)_{s \in P} = \varphi(q)$. Si $y \in X$ es un punto periódico de período $s \in P$, se tiene que $f^p(y) = f^{j_i}(y) = f^q(y)$. Si y no es periódico y tiene órbita finita, es evidente que existe un punto periódico $z \in X$ de período $s \in P$ tal que $z \in \mathcal{O}_f(y)$ y existe un $m_y \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_y}(y) = z$. Luego, por el lema 3.1.3, para $p, q \in (sN + j_l)^*$,

$$f^p(y) = f^{j_l - m_y}(z) = f^q(y) \text{ si } j_l > m_y$$

y

$$f^p(y) = f^{s - m_y + j_l}(z) = f^q(y) \text{ si } j_l > m_y.$$

Por lo que, $f^p(y) = f^q(y)$ para $y \in X$ con órbita finita. Por otra parte, si $y \in X$ tiene órbita infinita, existe $a \in \omega_f(y)$ fijo. Por el teorema 3.3.8, $f^n(y) \to a$. Obtenemos que, $f^p(y) = a = f^q(y)$. Así, $f^p(y) = f^q(y)$ para todo $y \in X$. Concluyéndose que, $f^p = f^q$. Como $\varphi(\mathbb{N}^*)$ es finito, tenemos que $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es finito. ∎

El siguiente corolario se sigue del teorema anterior. En este corolario se da una respuesta parcial a la pregunta 6, en el caso de un espacio métrico compacto numerable.

Corolario 4.3.6 *Sea* (X, f) *un sistema dinámico, donde* X *es un espacio métrico compacto numerable y cada* $a \in X'$ *es fijo. Si* $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ *es infinito y* P *es finito, entonces* $E(X, f)$ *es infinito.*

Capítulo 5

$E(X, f)$ como compactificación de $\mathbb{N}$

En los capítulos anteriores, analizamos cuando un sistema dinámico (X, f) es WAP y la cardinalidad de $E(X, f)$, en el caso que X sea un espacio métrico compacto numerable. Junto a las preguntas que inspiraron ese análisis, tenemos otra pregunta interesante sobre el semigrupo de Ellis, desde el punto de vista topológico:

Pregunta 7 *¿ Bajo qué condiciones el semigrupo de Ellis es una compactificación de* $\mathbb{N}$, *en el caso que, el espacio de fases sea un espacio métrico compacto numerable?*

Como dijimos en los antecedentes, García y Sanchis tratan este problema de cuándo el semigrupo de Ellis es una compactificación de $\mathbb{N}$ (ver [GM07] o [G10]) y obtienen el teorema 2.3.1. Para esto, ellos muestran una condición suficiente y necesaria que el conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ sea discreto en $E(X, f)$ y de esta forma $E(X, f)$ es una compactificación de $\mathbb{N}$.

Si bien este teorema es un resultado interesante, puesto que presenta condiciones suficientes y necesarias para que $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ sea discreto en el semigrupo de Ellis, no resulta fácil determinar cuando el semigrupo de Ellis satisface las condiciones de este teorema. Es por esto que, sentimos la inquietud de encontrar una caracterización más sencilla, en el caso de espacios métricos compactos numerables.

De esta forma, en este capítulo enunciaremos un resultado para que el semigrupo de Ellis $E(X, f)$ sea una compactificación de $\mathbb{N}$, en el caso que X sea un espacio métrico compacto numerable y dar una respuesta parcial al problema 7. Para esto mostraremos una condición suficiente y necesaria para que el conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ sea discreto en $E(X, f)$. En este capítulo, X denotará un espacio métrico compacto numerable y f una función continua sobre X.

5.1. Puntos Recurrentes en Espacios Numerables

Primero que todo, nosotros mostraremos que cada punto recurrente de un sistema dinámico cuyo espacio de fases un espacio métrico compacto numerable, es un punto periódico. Este hecho, resulta fundamental para probar el teorema principal de este capítulo.

Lema 5.1.1 *Si $x \in X$ es un punto recurrente y existe $z \in \mathcal{O}_f(x)$ tal que z es un punto aislado de $\omega_f(x)$, entonces x, z son periódicos.*

Demostración. Se sigue directamente de que existen $p, q \in \mathbb{N}^*$ tales que $f^p(z) = z$, $f^q(x) = x$ y $V \in \mathcal{N}(z)$ tales que $V \cap \omega_f(x) = V \cap \omega_f(z) = \{z\}$. ∎

Lema 5.1.2 *Sean α un ordinal y $f : \alpha \to \alpha$ una función continua. Dada $\beta \in \alpha$, existe $\gamma \in \omega_f(\beta)$ tal que γ es un punto aislado en $\omega_f(\beta)$.*

Demostración. Como α es un conjunto bien ordenado, existe un ordinal $\gamma = \min \omega_f(\beta)$. De esto es claro que, γ es un punto aislado en el conjunto $\omega_f(\beta)$. ∎

Lema 5.1.3 *Sea (α, f) un sistema dinámico donde α es un ordinal sucesor. Cada ordinal $\beta < \alpha$ recurrente es periódico.*

Demostración. Por el lema 5.1.2, existe un $\gamma \in \omega_f(\beta)$ aislado en $\omega_f(\beta)$. Como β es recurrente, entonces $\gamma \in \mathcal{O}_f(\beta)$. Se desprende del lema 5.1.1, que β y γ son periódicos. ∎

Teorema 5.1.4 *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si x es un punto recurrente, entonces x es un punto periódico.*

Demostración. Es bien conocido que existe un ordinal α tal que X es homeomorfo a α. ∎

5.2. Espacios Métricos Compactos Numerables

En esta sección presentaremos varios resultados que establecen condiciones para que el semigrupo de Ellis sea una compactificación de $\mathbb{N}$, obteniendo en cada caso respuestas parciales a la pregunta 7. Recordemos que, X denotará un espacio métrico compacto numerable y f una función continua sobre X.

Iniciaremos la presentación de estos resultados, con el siguiente teorema, el cual, muestra que la existencia de una órbita infinita es suficiente para que el semigrupo de Ellis sea una compactificación de $\mathbb{N}$.

Teorema 5.2.1 *Si existe un $x \in X$ con órbita infinita, entonces el conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto en $E(X, f)$. Luego, $E(X, f)$ es una compactificación de* $\mathbb{N}$.

Demostración. Puesto que x tiene una órbita infinita, por el teorema 3.3.1, $f^n \neq f^m$ para todo $n \neq m$. Como cada $y \in \mathcal{O}_f(x)$ tiene órbita infinita, por el teorema 5.1.4, $f^p(x) \neq f^n(x)$ para cada $p \in \mathbb{N}^*$ y $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema 2.3.1, $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto en $E(X, f)$. Luego, $E(X, f)$ es una compactificación de $\mathbb{N}$. ■

Recordemos que, llamamos tiempo de espera de un punto eventualmente periódico $x \in X$ a un $l_x \in \mathbb{N}$ tal que $f^{l_x}(x)$ es periódico y $f^n(x)$ no es periódico para $n < l_x$.

Igualmente que en el teorema 5.2.1, el próximo resultado exhibe que, la existencia de una sucesión de puntos eventualmente periódicos con tiempo de espera no acotado es suficiente para que $E(X, f)$ sea una compactificación de $\mathbb{N}$.

Teorema 5.2.2 *Si X tiene una sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos eventualmente periódicos con tiempo de espera l_n tal que $l_n > n$ y $f^{l_n}(w_m)$ tiene periodo $s_n \geqslant 1$, entonces $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto en $E(X, f)$. Además, $E(X, f)$ es una compactificación de* $\mathbb{N}$.

Demostración. Claramente, $|\mathcal{O}_f(w_n)| > n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema 3.3.1, tenemos que $f^n \neq f^m$ para todo $n \neq m$.

Por otro lado, sea $p \in \mathbb{N}^*$ y $m \in \mathbb{N}$. Veamos que $f^m \neq f^p$. Notemos que, existe $i_{p,m} \leqslant s_m$ tal que $p \in (s_m\mathbb{N} + i_{p,m})^*$. Como la órbita de w_m es finita y $f^{l_n}(w_m)$ es periódico, es claro que, $\omega_f(w_m) = \mathcal{O}_f(f^{l_m}(w_m))$. Además, puesto que $l_m > m$, se tiene que $f^m(w_m) \notin \mathcal{O}_f(f^{l_m}(w_m))$.

Por el lema 3.1.6, sabemos que $\mathcal{O}_f(z_m) = \omega_f(w_m) = \{f^q(w_m) : q \in \mathbb{N}^*\}$. Por lo que, $f^m(w_m) \neq f^p(w_m)$. De lo que se desprende que, $f^m \neq f^p$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $p \in \mathbb{N}^*$. Por el teorema 2.3.1, $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto en $E(X, f)$. Concluyéndose que, $E(X, f)$ es una compactificación de $\mathbb{N}$. ■

En otro sentido, en un caso más general, si el conjunto formado por los tiempos de espera de todos los puntos eventualmente acotados de X es acotado, existe una $p-$iterada igual a una $n-$iterada con $p \in \mathbb{N}^*$ y $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.2.3 *Sean (Y, g) un sistema dinámico, donde Y es un espacio métrico compacto y g una función continua sobre Y tal que cada $w \in Y$ tiene órbita finita. Sea*

$$L = \{l_x : (\exists x \in Y)(l_x \text{ es el tiempo de espera de } x)\}$$

Si L es finito y $r = \max L$, entonces para cada $l > r$ existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $g^q = g^l$.

Demostración. Sea $w \in Y$. Como la órbita de w es finita y L es finito, entonces $g^r(w)$ es periódico. Sea $p \in \bigcap_{s \in P}(s\mathbb{N})^*$. Luego, $g^{p+r}(w) = g^r(w)$. De lo que concluimos que $g^{p+r} = g^r$. De igual modo, se obtiene que $g^{p+r+t} = g^{r+t}$ para $t > 0$. ∎

El siguiente corolario es una consecuencia directa de los teoremas 2.3.1 y 5.2.3.

Corolario 5.2.4 *Sean (Y, g) un sistema dinámico, donde Y es un espacio métrico compacto y g una función continua sobre Y tal que cada $w \in Y$ tiene órbita finita. Sea*

$$L = \{l_x : (\exists x \in Y)(l_x \text{ es el tiempo de espera de } x)\}$$

Si L es finito, entonces $\{g^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es discreto en $E(Y, g)$.

Como mencionamos al inicio de este capítulo, enunciaremos un resultado para que el semigrupo de Ellis $E(X, f)$ sea una compactificación de $\mathbb{N}$, en el caso que X sea un espacio métrico compacto numerable. Para esto se mostrará una condición suficiente y necesaria para que el conjunto de funciones $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ sea discreto en $E(X, f)$. A continuación, lo presentaremos en el siguiente teorema.

Teorema 5.2.5 *$\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto en $E(X, f)$ si y sólo si para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un $w_m \in X$ tal que $f^i(w_m)$ no es periódico para cada $i \leqslant m$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Por el teorema 5.2.2, es claro.

($\Rightarrow$) Obviamente, deben existir órbitas arbitrariamente grandes. De lo contrario, existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que $| \mathcal{O}_f(x) | < M$ para cada $x \in X$. Por el corolario 5.2.4, $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es discreto en $E(X, f)$. Lo cual es una contradicción. Concluyéndose que, existen órbitas arbitrariamente grandes.

Es evidente que, si existe un $w \in X$ con órbita infinita se concluye la tesis.

En otro caso, consideremos el conjunto de todos los posibles tiempos de espera de los distintos puntos de X

$$L = \{l_x : (\exists x \in X)(l_x \text{ es el tiempo de espera de } x)\}.$$

Si L es finito, por el corolario 5.2.4, $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es discreto en $E(X, f)$. Lo cual es una contradicción. Luego, L es infinito. De esta forma, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un $w_m \in X$ con tiempo de espera $l_m \in L$, tal que $l_m > m$ y $f^i(w)$ no es periódico para $0 \leqslant i \leqslant m$, como queríamos. ■

El siguiente corolario es evidente por los teoremas 2.3.1 y 5.2.5. En este corolario se da una respuesta parcial a la pregunta 7, en el caso de un espacio métrico compacto numerable.

Corolario 5.2.6 *Si para cada número $m \in \mathbb{N}$, existe un $w_m \in X$ tal que $f^i(w_m)$ no es periódico para cada $i \leqslant m$, entonces $E(X, f)$ es una compactificación de $\mathbb{N}$.*

Índice alfabético

Bibliografía

[A97] J. AKIN. *Recurrence in topological dynamics. Furstenberg families and Ellis actions.* The University Series in Mathematics. Plenum Press, New York, 1997.

[BF95] F. BELEZNAY AND M. FOREMAN. *The collection of distal flows is not Borel.* Amer. J. Math. **117** (1995), 203–239.

[B93] A. BLASS. *Where topological dynamics=algebra=combinatorics.* Topology Proc. **18** (1993), 33–56.

[BFT] J. BOURGAIN, D.H. FREMLIN AND M. TALAGRAND. *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions.* Amer. J. of Math. **100**, 845–86.

[CN] W.W. COMFORT AND S. NEGREPONTIS. *The Theory of Ultrafilters.* Springer–Verlag, Berlin.

[Di] C. DI PRISCO. *Una Introducción a la Teoría de Conjuntos y los Fundamentos de las Matemáticas.* Caracas. Ediciones IVIC y UCV.

[RE] R. ELLIS. *A semigroup associated with a transformation group.* Trans. Amer. Math. Soc. **94**, (1960), 272–281.

[F81] H. FURSTENBERG. *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory.* J, Analyse. Math. **34** (1979), 61–85.

[GM07] S. GARCÍA FERREIRA AND M. SANCHIS. *Ultrafilter-limit points in metric dynamical systems.* Comment. Math. Univ. Carolin **48** (2007), 465–485.

[G10] S. GARCÍA FERREIRA. *Ultrafiltros sobre N y Sistemas Dinámicos Discretos.* Mérida. Ediciones IVIC, 2010.

[G12] S. GARCÍA FERREIRA. *Dynamical properties of certain continuos self maps of the cantor set. Topology and its Applications.* **159**, (2012) 1719–1733.

[GRU] S. GARCÍA FERREIRA, Y. RODRÍGUEZ LÓPEZ AND C. UZCÁTEGUI. *Iterates of dynamical systems on compact metrizable countable spaces.* Aceptado para ser publicado en la revista Topology and its Applications.

[G06] E. GLASNER . *On Tame dynamical systems.* Colloq. Math. **105**, (2006), 283–295.

[GM06] E. GLASNER AND M. MEGRELISHIVILI. *Hereditarily non-sensitive dynamical systems and linear representations.* Colloq. Math. **104**, (2006), 223–283.

[G07] E. GLASNER. *Enveloping semigroups in topological dynamics.* Topology and its Applications. **154**, (2007), 2344-2363.

[AK] A. KECHRIS. *Classical Descriptive Set Theory.* Springer–Verlag, New York, 1995.

[Ko] A. KOHLER. *Enveloping semigroups for flows.* Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. 95, (1995), 179–191.

[CR] C. ROBINSON. *Dynamical Systems.* New York. Editorial Board. Segunda Edición, 1998.

[Sr] S. SRIVASTAVA. *A course on Borel Sets.* Springer–Verlag. New York, 1998.

[PS] P. SZUCA. *$\mathcal{F}$–limit points in dynamical systems defined on the interval.* Cent. Eur. J. Math. **11**, (2013), 170–176.

[ST] S. TODORCEVIC. *Topics in Topology.* Springer–Verlag, Berlin, 1997.