



Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Postgrado de Matemáticas

Funciones (k, h) -Fuertemente Convexas

Hiliana Carolina Angulo Uspin

Trabajo Especial de Grado para Obtener el Título de
M. Sc. en Matemáticas

Tutor: Dr. José Giménez.
Cotutor: Dr. Nelson Merentes.

Mérida, 23 de Mayo de 2014



Acta – Veredicto del Trabajo de Grado

Los suscritos, miembros designados para integrar el Jurado examinador del Trabajo de Grado, según comunicación PGM-125-14, como requisito parcial para obtener el título de *Magíster Scientiae* en Matemáticas, de la **Lic. Hiliana Carolina Angulo Uspín C.I. N° V-15.454.808**, estudiante del Postgrado en Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes; reunidos el siete (07) de julio del año dos mil catorce (2014), en el Aula Multimedia, del Edificio Teórico de Matemática de la Facultad de Ciencias - ULA, a las 10:00 am, luego de haber leído el manuscrito presentado, titulado: “**Funciones (k,h)-Fuertemente Convexas**”, escuchada la exposición oral y las repuestas de la candidata a las preguntas que se le formularon en el transcurso de la defensa pública, declaramos que el Trabajo de Grado ha sido **APROBADO**.

En la Ciudad de Mérida, a los siete (07) días del mes de julio del año dos mil catorce (2014).

El Jurado Examinador:

Dr. José Giménez (ULA)

Tutor

Dr. José Luís Sánchez (UCV)

Miembro del Jurado

Dr. Luís González (ULA)

Miembro del Jurado



Postgrado de Matemáticas

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	6
1.1. Funciones Convexas	6
1.1.1. Definición de funciones convexas	6
1.1.2. Operaciones con Funciones Convexas	8
1.1.3. Continuidad y Derivabilidad de Funciones Convexas	11
1.1.4. Resultados sobre Funciones Convexas	15
1.1.5. Funciones Convexas y Desigualdades Clásicas	16
1.2. Funciones Fuertemente Convexas	21
1.2.1. Definición de Funciones Fuertemente Convexas	23
1.2.2. Resultados que relacionan funciones convexas y funciones fuertemente convexas	25
1.2.3. Funciones Fuertemente Convexas y desigualdades clásicas	29
2. Funciones h-Convexas/h-Fuertemente Convexas	33
2.1. Funciones h -Convexas	33
2.1.1. Definición de Funciones h -Convexas	35
2.1.2. Algunas desigualdades para Funciones h -Convexas	35
2.1.3. Desigualdad del tipo Jensen para Funciones h -Convexas	40

2.1.4. Una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para Funciones h -Convexas	41
2.2. Funciones h -Fuertemente Convexas	42
2.2.1. Definición de Funciones h -Fuertemente Convexas	42
2.2.2. Relación entre Función h -Convexa y Función h -Fuertemente Convexa	42
2.2.3. Hermite- Hadamard para Funciones h -Fuertemente Convexas	45
3. Funciones (k, h)-Convexas	47
3.1. Conjuntos k -Convexos	47
3.2. Definición de Función (k, h) -Convexas	47
3.3. Propiedades de las Funciones (k, h) -Convexas	48
3.4. Funciones (k, h) -Convexa y Conjuntos k, h -Convexos	53
3.5. Desigualdad del tipo Hermite-Hadamard y Fejér para Funciones (k, h) -Convexas	55
4. (k, h)- Fuertemente Convexas	58
4.1. Definición de Funciones (k, h) -Fuertemente Convexas	58
4.2. Relación entre Funciones (k, h) -Convexa y (k, h) -Fuertemente Convexa	59
4.3. Una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para Funciones (k, h) -Fuertemente Convexas	62
Bibliografía	64

Resumen

Introducimos la noción de funciones (k, h) -Fuertemente Convexas como una combinación de las nociones dadas en [1] y [9]. Se expondrán resultados que caracterizan a este tipo de funciones, y finalmente se demostrará una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para esta nueva clase.

www.bdigital.ula.ve

Introducción

La convexidad es una noción simple y natural que está muy presente en nuestras vidas, en la geometría de las hojas de los árboles; en las formas de las frutas que consumimos, en los utensilios de cocina, en la arquitectura de algunas iglesias, en telescopios, anteojos, obras de arte, entre otras.

Otro ejemplo importante de la noción de convexidad en nuestra vida cotidiana es el de nuestra posición de “*Estar y permanecer de pie*”. Pues dicha posición queda garantizada entre tanto la proyección vertical de nuestro centro de gravedad permanezca dentro de la envolvente convexa generada por nuestros pies.

Desde épocas muy remotas, la humanidad ha pensado y estudiado esta noción. Los griegos por ejemplo, prestaron mucha atención a figuras convexas como polígonos y poliedros. Tanto es así que las denominaciones de estas figuras le son atribuidas. En el famoso tratado “Los elementos de Euclides” (250 A.C) que consta de trece libros, y es el escrito más leído en el mundo después de la biblia, aparecen varias contribuciones a esta materia, relativas principalmente a propiedades de los polígonos y poliedros. Sin embargo, fue Arquímedes (287-212 A.C) el primero en dar una noción de lo que se entendería por una curva convexa o superficie convexa, en su libro “Sobre la esfera y el cilindro”. Especialmente relevante es la descripción de Arquímedes de los cinco Poliedros regulares y de los trece Poliedros Semirregulares, también conocidos como sólidos Arquimedianos (Poliedros cuyas caras son polígonos de al menos dos tipos distintos, cuyo grupo de isometría actúa transitivamente sobre los vértices). Fue en ese entonces que se realizó la famosa estimación del número π (Usando Polígonos regulares inscritos y circunscritos en una circunferencia). Él notó un hecho importante, y es que el perímetro de una figura convexa es menor que el perímetro de cualquier otra figura convexa que lo rodea.

Un concepto de singular importancia en este contexto es el de funciones convexas. Este tipo de funciones fue objeto de una intensa actividad de investigación a finales del siglo XIX

INTRODUCCIÓN

y durante el siglo XX. Posiblemente, el primer tópico en que se hizo necesario la aplicación de los métodos de esta teoría es el Análisis Gráfico. Paralelamente, se obtuvieron resultados significativos en el campo del Análisis Funcional, Geometría Convexa, Economía Matemática y Análisis Convexo, entre otras ramas de la Matemática. La convexidad es una de las hipótesis más frecuentemente utilizadas en la teoría de optimización. Se utiliza por lo general para dar validez global a ciertas proposiciones, que de lo contrario sólo serían verdaderas localmente. Por ejemplo, un mínimo local es también un mínimo global para una función convexa.

El matemático Alemán, Otto Ludwig Hölder en 1889 consideró el concepto de convexidad ligado con las funciones reales que tienen segunda derivada no negativa [22]. En el año 1893, el Francés Jackes Hadamard obtiene una desigualdad entre integrales, para funciones que tienen derivada creciente. Sin embargo, es el Danés Johan L. W Jensen a quien se le atribuye el concepto de función convexa. Él realizó un estudio detallado de esta clase de funciones (Ver [23] y [24]), demostrando que muchas desigualdades clásicas (Desigualdad de Hölder, Desigualdad de Mitkowski) se derivan de la hoy denominada Desigualdad de Jensen. Esta desigualdad que ilustraremos a continuación fue desarrollada entre los años 1905 y 1906:

Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$f\left(\sum \alpha_i x_i\right) \leq \sum \alpha_i f(x_i) \quad (1)$$

para todo $x_i \in I$, y todo $\alpha_i > 0$, con $1 \leq i \leq n$, y tal que $\sum \alpha_i = 1$.

Jensen unifica en un concepto aquellos que verifican propiedades estudiadas por sus predecesores en el estudio de este tipo de funciones; O. Hölder, O. Stolz, J. Hadamard y Ch. Hermite (Ver [22],[39],[26] y [27]).

El libro de G.H. Hardy, J.E. Littlewood y G. Pólyak [12], titulado “*inequalities*” motivó el incremento de la investigación en el estudio de las funciones convexas. (Para ver más detalles de la historia del desarrollo de las funciones convexas, ver [11]).

Geométricamente, una función real es convexa en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, si, para cualquier par de puntos $(x_1, f(x_1))$, $((x_2, f(x_2))$, que están en el gráfico de f , la recta que los une está sobre o por encima del gráfico de la función f . Esto es, una función f es convexa en $I \subseteq \mathbb{R}$, si para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad (2)$$

Esta idea geométrica la generaliza el matemático estadounidense E. Beckenbach en 1937 [28], reemplazando los segmentos, por el gráfico de funciones continuas que pertenecen a una familia de funciones.

De igual manera, las siguientes desigualdades son clásicas en el estudio de las funciones convexas, y juegan un papel importante en el desarrollo del mismo, debido a sus aplicaciones en distintas áreas de las matemáticas, tales como; en la teoría de optimización y en la Economía matemática (Ver [11] y [29]): Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad (3)$$

para todo $x, y \in I, x < y$

El lado izquierdo fue demostrado por el Francés Jacques Hadamard [30] en 1893, en el trabajo titulado *Étude sur les propriétés des fonctions entières et particulier d'une fonction considérée par Riemann*, para el caso de las funciones f con derivada creciente en un intervalo cerrado de la recta real. Mientras, el lado derecho de la desigualdad (3) se le atribuye a Charles Hermite y fue demostrado en 1883. En la actualidad, las desigualdades del tipo (3) son llamadas desigualdades del tipo Hermite-Hadamard.

A lo largo del tiempo han surgido varios problemas y aplicaciones que han dado origen a generalizaciones del concepto de función convexa. Una generalización de esta noción es la de "Funciones Fuertemente Convexas", introducida por el Matemático ruso, B. T. Polyak [15] en 1966, quien la definió de la forma siguiente:

Una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice fuertemente convexa con módulo c si:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - c(t)(1-t)(x-y)^2 \quad (4)$$

para todo $x, y \in I, t \in (0, 1)$

Este tipo de funciones, cumplen algunas propiedades de las funciones convexas, entre las que podemos citar: Una desigualdad tipo Jensen y una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard.

Geométricamente, la gráfica de una función fuertemente convexa, con módulo c , está por debajo de la gráfica de una función cuadrática, es decir, está por debajo de $g(x) = cx^2 + ax + b$, para $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios y $c > 0$ fijo. Es claro que si $c = 0$, entonces se tiene la definición de convexidad.

Propiedades y aplicaciones de estas funciones pueden ser halladas en [12][14][17][18].

Otra generalización de las funciones convexas, aún más reciente, es la de h -convexidad. Esta noción fue introducida en el año 2007 por S. Varošanec [19], de la forma siguiente:

Una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice h -convexa si:

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \quad (5)$$

para todo $x, y \in I, y t \in (0, 1)$ con $h : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$.

En el año 2012, con K. Nikoden, A. Moros, y J. Giménez [1] introdujimos la noción de función h -fuertemente convexa, de la siguiente manera:

Una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice h -fuertemente convexa si:

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - c(t)(1-t)(x-y)^2 \quad (6)$$

para todo $x, y \in I, yt \in (0, 1)$ y $h : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$.

Una generalización de conjunto convexo es la noción de conjunto k -convexo. La cual se define como sigue:

Sea X un espacio vectorial y $k : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Un subconjunto D de X se dice que es k -convexo si:

$$k(t)x + k(1-t)y \in D$$

para todo $x, y \in D, yt \in (0, 1)$

Bartosz Micherda y Teresa Rajba en [9] introducen la noción de funciones (k, h) -convexa como sigue:

Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es (k, h) -convexa si:

$$f(k(1-t)y + k(t)x) \leq h(1-t)f(y) + h(t)f(x) \quad (7)$$

para todo $x, y \in D, t \in (0, 1)$ con D un conjunto k -convexo

Esta noción unifica y generaliza las clases de *funciones convexas*, *s-convexas*, las *funciones de Godunova-Levin* y las *P-funciones*, que se obtienen al considerar en (7) las funciones $h(t) = k(t) = t$, $k(t) = t$ y $h(t) = t^s$, $k(t) = t$ y $h(t) = 1/t$, y $k(t) = t$ y $h(t) = 1$, respectivamente. Propiedades de estas funciones, pueden ser halladas en [3][16][17][18]. El objetivo principal de este trabajo es introducir el concepto de funciones (k, h) -fuertemente convexas como una combinación de las nociones dadas en [1], y [9]. Obtener aplicaciones, propiedades y caracterizaciones de este tipo de funciones y finalmente, presentar una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para esta nueva clase de funciones.

Con la finalidad de presentar de forma clara lo desarrollado en nuestro trabajo, hemos dividido el contenido en cuatro capítulos que ayudarán al lector a facilitar su comprensión. Un resumen de lo que se verá a continuación es lo siguiente:

Capítulo 1

Consta de nociones básicas sobre funciones convexas y fuertemente convexas. Se enuncia y se demuestra la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para cada una de ellas, y se incluye un resultado que relaciona a este tipo de funciones.

Capítulo 2

En este capítulo, nos dedicamos a estudiar a las funciones h -convexas y a las funciones h -fuertemente convexas. Este tipo de funciones son una generalización de las funciones que fueron objeto de estudio en el capítulo. Finalmente, damos enunciado y demostración del Teorema de Hermite-Hadamard para este tipo de funciones.

Capítulo 3

Se estudian las funciones (k, h) -convexas definidas en un subconjunto k -convexo. Estos conceptos fueron introducidos en el año 2012 por Bartosz Micherda y Teresa Rajba en [9].

INTRODUCCIÓN

Expondremos algunos nuevos resultados que son producto de nuestra investigación (Proposiciones 3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9) los cuales caracterizan a las funciones (k, h) -convexas. Otro resultado novedoso que expondremos es el de una versión fuerte de subaditividad de este tipo de funciones (Proposición 3.10), el cual garantiza la $(k, f \circ h)$ -convexidad de una función (k, h) -convexa.

Capítulo 4

Se desarrolla el objetivo principal de este trabajo. Introducimos un nuevo concepto de funciones llamada funciones (k, h) -fuertemente convexas, las cuales son resultado del estudio de las funciones h -fuertemente convexas y las funciones (k, h) -convexas. Expondremos un resultado que relaciona a las funciones (k, h) -convexas con las funciones (k, h) -fuertemente convexas en espacios con producto interno. Por último, enunciaremos y demostraremos una versión de la desigualdad de Hermite-Hadamard para esta nueva clase de funciones.

www.bdigital.ula.ve

En este capítulo exponemos nociones básicas sobre funciones convexas y fuertemente convexas, propiedades, caracterizaciones en las que se relacionan ambos tipos de funciones en espacios con producto interno y desigualdades que satisfacen estas funciones como lo es la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard.

También en este capítulo incluimos resultados que aunque no sean objeto de estudio en nuestro trabajo, tienen como objetivo dar a conocer información adicional de la teoría de funciones convexas al lector interesado.

1.1. Funciones Convexas

1.1.1. Definición de funciones convexas

A. Wayne Roberts y Dale E. Varberg en su clásico libro sobre funciones convexas [31] (Ver también comentario p.62 de [11]), indican que el moderno concepto de funciones convexas se remonta a finales del siglo XIX, señalando que en 1889, el matemático alemán, Otto Hölder consideró este concepto ligado con las funciones reales que tienen segunda derivada no negativa [22], obteniendo en forma discreta, lo que se conoce hoy como desigualdad de Jansen. Pocos años después, en 1893 el austriaco Otto Stolz [25] demuestra que si una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y verifica la desigualdad:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Para todo $x, y \in [a, b]$, Entonces tiene derivadas laterales.

Las funciones que cumplen la desigualdad anterior son conocidas hoy día como Funciones Midconvexas.

En ese mismo año, el matemático Francés Jacques Hadamard [26] obtiene una desigualdad entre integrales para funciones que tiene primera derivada creciente. Pero es el Danés Johan L. W. Jensen a quien se le atribuye la introducción del concepto de función convexa, porque a principios del siglo XX hace un estudio bastante detallado de este tipo de funciones, demostrando que muchas de las desigualdades clásicas se derivan de la hoy denominada Desigualdad de Jensen [23][24].

Iniciamos esta sección con el concepto clásico de función convexa para funciones reales definidas en un intervalo de la recta. En lo que sigue, denotaremos I a cualquier intervalo de la recta real.

La importancia que le da Jensen a estas funciones se manifiesta cuando hace la siguiente afirmación:

“La noción de función convexa es casi tan fundamental como la de función positiva o función creciente. Si no me equivoco, esta idea debe estar en los textos elementales de la Teoría de Funciones Reales”

Definición 1.1 Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si:

$$f((1-t)x + ty) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall x, y \in I \text{ y } t \in (0, 1) \quad (1.1)$$

Si la desigualdad (1.1) es una desigualdad estricta, entonces la función f es estrictamente convexa. Si se cumple en sentido opuesto se dice que f es cóncava y si se verifica en sentido estricto, decimos que f es estrictamente cóncava.

Geométricamente, la desigualdad (1.1) asegura que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa en el intervalo I , si el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera $(x, f(x)), (y, f(y))$ del gráfico de f , está por encima de la gráfica de la función f en el intervalo $[x, y]$ como lo muestra la Figura.

Análogamente, una función f es cóncava si para cualquier par de puntos $(x, f(x)), (y, f(y))$ del gráfico de f está por debajo de la gráfica de la función.

Como ejemplo de funciones convexas, tenemos:

Ejemplos 1.2

a.- $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$

b.- $h(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$

c.- $p(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

Definición 1.3 Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es midconvexa (o convexa en el punto medio) si:

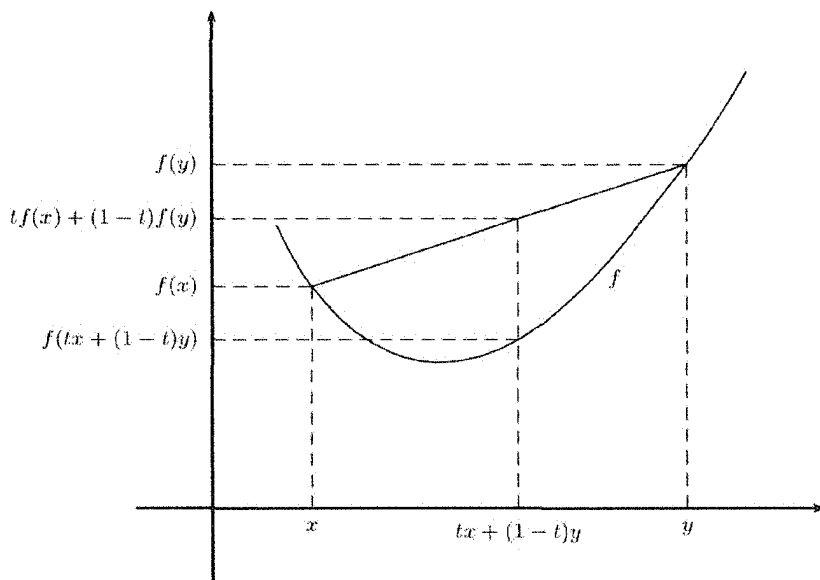


Figura 1.1: Función Convexa

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in I \quad (1.2)$$

Si la desigualdad es estricta para $x \neq y$, diremos que f es llamada estrictamente midconvexa.

Observemos que de acuerdo con la definición de función convexa, toda función convexa es también midconvexa. El recíproco en general no es cierto, sin embargo, veremos que bajo ciertas condiciones, ambas definiciones son equivalentes.

Teorema 1.1 Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es midconvexa y continua, entonces f es convexa.

Demostración: Ver [31]. ■

1.1.2. Operaciones con Funciones Convexas

En esta sección presentamos un resumen de las operaciones que podemos hacer entre algunas funciones para que el resultado sea una función convexa. Para las demostraciones de las distintas proposiciones ver [31][32].

Proposición 1.2 Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones convexas y $c \geq 0$, Entonces

- $f + g$ y cf son funciones convexas.
- Si f y g son funciones no negativas y crecientes (decrecientes), entonces el producto $f \cdot g$ tienen las mismas propiedades.

Demostración: Ver [33],[31]. ■

A continuación, presentaremos un ejemplo que ilustra el resultado anterior.

Ejemplos 1.4

- Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2$, entonces la función $(f + g)(x) = |x| + x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$ es convexa porque f y g lo son.
- Como la función $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 1/x$ es convexa tenemos que la función $g(x) = 3h(x) = 3/x$ es convexa.

Proposición 1.3 Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si se verifican alguna de las siguientes propiedades:

- $f(x + t(y - x)) \leq f(x) + t(f(y) - f(x)), t \in (0, 1), x, y \in I$.
- $f(sx + ty) \leq sf(x) + tf(y), s, t \in (0, 1), s + t = 1$
- Si $x, y, z \in I, x < z < y$

$$(y - z)f(x) + (x - y)f(z) + (z - x)f(y) \geq 0$$

Demostración: La demostración es inmediata de la definición de función convexa. ■

En la siguiente proposición se presentan propiedades que deben cumplir dos funciones f y g para que la composición $g \circ f$ sea una función convexa o cóncava.

Proposición 1.4 Sean $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones con $f(I) \subseteq J$. Entonces

- $\max\{f(x), g(x)\}$ es convexa.
- Si f y g son convexas y g es creciente, entonces la función compuesta $g \circ f$ es convexa.
- Si f es cóncava y g es convexa y decreciente, entonces $g \circ f$ es convexa.

- d. Si f y g son cóncavas y crecientes, entonces $g \circ f$ es cóncava.
- e. Si f es convexa y g es cóncava y decreciente, entonces $g \circ f$ es cóncava.

Demostración: Ver [33],[31]. ■

Describamos algunos ejemplos que ilustran este resultado:

Ejemplos 1.5

- a. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$, entonces $(g \circ f)(x) = e^{x^2}$ es convexa sobre \mathbb{R} , pues f es convexa y g es convexa y creciente.
- b. Consideremos las funciones $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^{-1}$. Es fácil ver que f es cóncava y g es convexa y decreciente. Luego, por el Teorema 1.4 concluimos que la función $(g \circ f)(x) = 1/\sqrt{x}$ es convexa sobre $(0, +\infty)$.

En las dos proposiciones que siguen se exponen resultados relacionados con familia de funciones convexas.

Proposición 1.5 Sea $\{f_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}\}$ una familia de funciones convexas, entonces el conjunto $J = \{x \in I : \sup f_\alpha(x) < \infty\}$ es un intervalo y $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sup f_\alpha(x), \quad x \in J$$

Es convexa.

Demostración: Ver [31]. ■

Proposición 1.6 Sean $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, una sucesión de funciones convexas que converge puntualmente a una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es convexa y la convergencia es uniforme sobre cualquier intervalo incluido en $\text{int}I$.

Demostración: Ver [31]. ■

Corolario 1.7 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones convexas, donde $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ para cada n . Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_n$ converge a $f(x)$ para cada $x \in I$, entonces f es una función convexa sobre I .

Demostración: Ver [33]. ■

Ahora exponemos un resultado donde se presentan condiciones para que la función convexa monótona sea cóncava o convexa.

Proposición 1.8 *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona y sea $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ la función inversa de f . Entonces:*

- a. *Si f es convexa y creciente, entonces f^{-1} es cóncava.*
- b. *si f es cóncava y creciente, entonces f^{-1} es convexa.*
- c. *Si f es convexa y decreciente, entonces f^{-1} es convexa.*
- d. *si f es cóncava y decreciente, entonces f^{-1} es cóncava.*

Demostración: Ver [33] ■

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.6

- a. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = e^x$. Ya hemos visto que f es convexa, es fácil ver que f es creciente. Así, por el Teorema 1.8 parte a, concluimos que $f^{-1}(x) = \ln(x)$ es cóncava.

1.1.3. Continuidad y Derivabilidad de Funciones Convexas

A continuación presentamos resultados de Continuidad y Diferenciabilidad de las funciones convexas. Las funciones convexas sobre un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tienen propiedades que permiten el cálculo de límites y a través de este hecho, se garantiza la existencia de derivadas laterales en cada punto del I . En lo que sigue, expondremos resultados que ilustren lo anterior.

Una propiedad importante de las funciones convexas es que son acotadas en cualquier intervalo cerrado contenido en su dominio. En la siguiente proposición, demostramos este hecho.

Proposición 1.9 *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, entonces f es acotada en un intervalo cerrado $[a, b] \subset I$.*

Demostración: Sea $[a, b] \subseteq I$, un intervalo cerrado. Sea $x = (1 - t)a + tb$.

Por la convexidad de f , tenemos que:

$$f(x) \leq f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Luego, para $t \in [0, 1]$:

$$tf(b) \leq f(b) \leq \max\{f(a), f(b)\}$$

y

$$(1-t)f(a) \leq f(a) \leq \max\{f(a), f(b)\}$$

De donde tenemos que:

$$f(x) \leq f((1-t)a + tb) \leq 2\max\{f(a), f(b)\}$$

De esta manera, concluimos que f es acotada superiormente.

Por otra parte, sean $x, y \in [a, b]$, $x = \frac{a+b}{2} + t$ y $y = \frac{a+b}{2} - t$ con $t \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$, por la convexidad de f , tenemos que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}-t\right) + f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right] \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) &\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}-t\right) \\ &\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \max\{f(a), f(b)\} \end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que f es acotada. ■

Observación: La condición de que el intervalo sea cerrado en la proposición anterior es una condición necesaria. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.7 Consideremos la función $f : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\tan(x)$. Es fácil ver que esta función es convexa. También se sabe que $x = \frac{\pi}{2}$ es una asíntota de esta función. Por lo tanto, f no es acotada.

Definición 1.8 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es Lipschitz en el intervalo I si existe una constante $k > 0$ tal que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Para todo $x, y \in I$. La constante k se le llama constante de Lipschitzidad de f .

En [11] se señala que H. Rademacher en [34], demostró que las funciones convexas verifican una condición de Lipschitz en cualquier intervalo cerrado contenido en el interior de su dominio, como se expone en la siguiente proposición.

Teorema 1.10 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, entonces f cumple una condición de Lipschitz en cualquier intervalo cerrado contenido en $\overset{\circ}{I}$.

Los detalles de la demostración de esta proposición pueden verse en [35],[31].

A continuación, presentamos la definición de función absolutamente continua estudiada por G. Vitali [36].

Definición 1.9 Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua, si para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que para cualquier colección finita de intervalos (a_i, b_i) con $i \in \{1, \dots, n\}$, disjuntos dos a dos incluidos en I , se verifica:

$$\sum_{n=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon, \quad \text{cuando} \quad \sum_{n=1}^n (b_i - a_i) < \delta$$

Observación: De esta definición se obtiene inmediatamente que toda función absolutamente continua es continua y que una función Lipschitz en un intervalo es continua.

Corolario 1.11 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, entonces f es absolutamente continua en cualquier intervalo cerrado contenido en $\overset{\circ}{I}$.

Otra propiedad de las funciones convexas en un intervalo I de la recta, es la existencia de derivadas laterales en cada punto del interior de I . En esta sección demostraremos esta propiedad y expondremos otras que verifican las funciones convexas diferenciables.

La siguiente proposición nos asegura que si $x, y, z \in I$, $x < y < z$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces la pendiente del segmento que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ es menor o igual a la pendiente que une los puntos $(y, f(y))$ y $(z, f(z))$ y esta última es menor o igual a la pendiente que une a los puntos $(y, f(y))$ y $(z, f(z))$, como se ilustra en la figura.

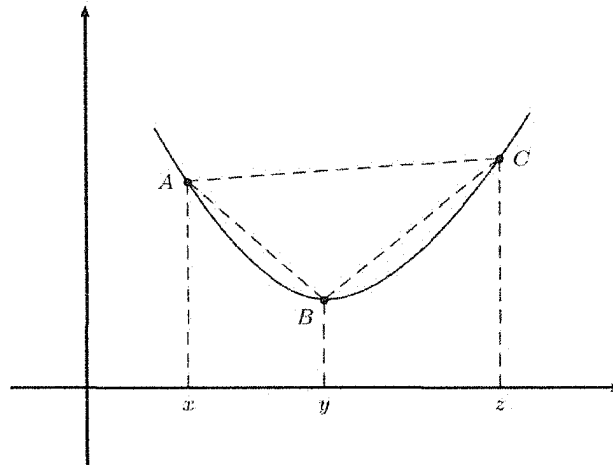


Figura 1.2: Pendiente $AB \leq$ Pendiente $AC \leq$ Pendiente BC

Proposición 1.12 Sean $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, $x, y, z \in I$, tales que $x < y < z$, entonces

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(x)}{z - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Demostración: Para la primera desigualdad, consideremos:

$$y = x + \frac{y - x}{z - x}(z - x)$$

Luego, por Proposición (1.3), parte a, se obtiene lo queremos. Para la segunda desigualdad, se procede de manera similar considerando:

$$z = x + \frac{z - x}{z - y}(z - y)$$

■

De la proposición anterior, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1.13 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, entonces para cada $x \in I$, la función

$$I \setminus \{x\} \ni t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Es creciente.

Respecto a la derivada de una función convexa, esta se define en términos de derivadas laterales. A continuación, recordaremos la definición de estas.

Definición 1.10 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces la derivada lateral derecha de f en el punto $x \in I$ se define como:

$$f'_+(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Donde $y \downarrow x$ quiere decir $y \rightarrow x$, $y > x$, y se supone que x no es el extremo derecho de I . La Derivada lateral izquierda de f en el punto $x \in I$ se define:

$$f'_-(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Donde $y \uparrow x$ quiere decir $y \rightarrow x$, $y < x$, y se supone que x no es el extremo izquierdo de I

A continuación, daremos un resultado en donde se demuestra que toda función convexa $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ posee derivadas laterales. Este resultado fue demostrado en la última década del siglo XIX por el Austriaco Otto Stolz [25]

Teorema 1.14 (Teorema de Stolz). Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, entonces f posee derivadas laterales en cada punto de I , las derivadas laterales son crecientes y el conjunto E de los puntos de I , donde f no es derivable es numerable y f es continua en $I - E$. no es derivable

Demostración: Ver [37] ■

1.1.4. Resultados sobre Funciones Convexas

En esta sección, exponemos resultados que garantizan la convexidad de una función. En alguno de estos resultados, resulta de gran utilidad reconocer la convexidad de una función derivable a través de la información que brinden su primera o segunda derivada.

Proposición 1.15 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre I . Entonces f es convexa si y sólo si la derivada f' es creciente sobre I .

Demostración: Ver [31] ■

Corolario 1.16 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable sobre I . Entonces f es convexa si y sólo si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Si la desigualdad es estricta, decimos que f es estrictamente convexa.

El recíproco de este corolario no es cierto, es decir, una función f puede ser estrictamente convexa y sin embargo no cumplir que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Ilustremos esto con el siguiente ejemplo:

Sea $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4$. Es fácil ver que f es estrictamente convexa, sin embargo, $f''(x) = 0$, para $x = 0$.

El siguiente resultado, relaciona la convexidad de una función con la integral de funciones crecientes.

Proposición 1.17 *Una función $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si existe una función creciente $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto $c \in (a, b)$, tales que para todo $x \in (a, b)$*

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t) dt$$

Demostración: Ver [31] ■

Nuestra siguiente caracterización, surge de la idea geométrica que se describe en la siguiente definición

Definición 1.11 *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f tiene soporte en $x_0 \in I$ si existe un número $m \in \mathbb{R}$ tal que la función $S(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$, verifica que $S(x) \leq f(x)$, para todo $x \in I$. La función f se conoce como recta soporte de f en x_0*

Teorema 1.18 *Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función. f es convexa si y sólo si existe al menos una recta soporte para cada $x_0 \in (a, b)$*

Teorema 1.19 *Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces la función f tiene derivada en x_0 si y sólo si $S(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la recta soporte.*

Para la demostración de los dos resultados anteriores, Ver [33].

1.1.5. Funciones Convexas y Desigualdades Clásicas

En esta sección, estudiaremos importantes desigualdades clásicas en el estudio de funciones convexas.

Usando el Principio de inducción Matemática, podemos generalizar a más de dos elementos del intervalo I la desigualdad (1.1) y esto es lo que se conoce como desigualdad de Jensen. A continuación mostraremos este resultado.

Proposición 1.20 (*Desigualdad de Jensen*) Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) \quad (1.3)$$

Para todo $x_i \in I, t_i > 0, i = 1, \dots, n$, tales que $t_1 + \dots + t_n = 1$

Demostración: Haciendo inducción en n , se tiene que para $n = 2$ la desigualdad (1.3) es la que define la convexidad de f . Supongamos que la desigualdad (1.3) es cierta para $n - 1$. Probaremos que es cierta para n .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t_n < 1$. Así, $1 - t_n > 0$

Luego,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) &= f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_{n-1} x_{n-1} + t_n x_n) \\ &= f\left((1 - t_n) \left(\frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_{n-1} x_{n-1}}{1 - t_n}\right) + t_n x_n\right) \\ &\leq (1 - t_n) f\left(\frac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1}\right) + t_n f(x_n) \\ &= (1 - t_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1 - t_n} x_i\right) + t_n f(x_n) \\ &\leq (1 - t_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1 - t_n} x_i f(x_i) + t_n f(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i f(x_i) + t_n f(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) \end{aligned}$$

■

A partir de esta última desigualdad se deducen otras desigualdades que son de uso frecuente en el Análisis Matemático.

Como $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, se obtiene que si x e y son números no negativos, entonces:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \leq \frac{x + y}{2}$$

Esta última desigualdad asegura que la media geométrica de dos números es menor o igual que su media aritmética. El siguiente resultado generaliza este hecho.

Proposición 1.21 Sean x_i, t_i , con $i \in 1, \dots, n$, números reales, tales que $x_i \geq 0, t_i > 0$ y $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Entonces:

$$x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n$$

Demostración: La idea es aplicar la Desigualdad de Jensen a la función $f(x) = e^x$, tomando $x = t_1 \ln x_1 + \dots + t_n \ln x_n$. ■

Observación: En el caso particular que $p > 1, q > 1$ sean número tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Al tomar $x_1 = x_p, x_2 = y_q$ De la Proposición 1.21 nos queda que :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad (1.4)$$

Esta desigualdad también es una consecuencia directa de la convexidad de la función exponencial. Usando la proposición (1.3) parte b, se tiene que:

$$xy = e^{\ln xy} = e^{\frac{1}{p} \ln x^p + \frac{1}{q} \ln y^q} \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Proposición 1.22 (Desigualdad de Hölder) Sean x_i, y_i , con $i \in 1, \dots, n$, números no negativos; $p > 1, q > 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}$$

En el caso de $p = q = 2$, la desigualdad de Hölder se transforma en la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

Demostración: Ver [21]. ■

Otra desigualdad de uso frecuente se establece en la siguiente proposición.

Proposición 1.23 (Desigualdad de Minkowski) Sean x_i, y_i , con $i \in 1, \dots, n$, números no negativos y $p \geq 1$. Entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}$$

Demostración: Ver [21]. ■

A continuación presentaremos la Desigualdad de Hermite-Hadamard. Esta desigualdad de muchísima aplicabilidad en la teoría de funciones convexas.

Proposición 1.24 (Desigualdad de Hermite-Hadamard) Si una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{x-y} \int_x^y f(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Para todo $x, y \in I$

Demostración: Por hipótesis, f es una función convexa, así,

$$f((1-t)y + tx) \leq (1-t)f(y) + tf(x)$$

Integrando con respecto a t en $[0, 1]$, obtenemos que:

$$\int_0^1 f(tx + (1-t)y)dt \leq \int_0^1 tf(x) + (1-t)f(y)dt$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$u = xt + (1-t)y \quad du = (x-y)dt$$

Luego,

$$\text{Si } t = 0, u = y \quad \text{Si } t = 1, u = x$$

Así,

$$\frac{1}{y-x} \int_x^y f(u)du \leq \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\frac{1}{y-x} \int_x^y f(s)ds = \frac{1}{y-x} \left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(s)ds + \int_{\frac{x+y}{2}}^y f(s)ds \right)$$

Luego, si $s \in \left[x, \frac{x+y}{2} \right]$, $s = \left(\frac{x+y}{2} \right) t + (1-t)x$, entonces:

$$\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(s) ds = \int_0^1 f \left(\left(\frac{x+y}{2} \right) t + (1-t)x \right) \left(\frac{y-x}{2} \right) dt$$

Por otro lado, si $s \in \left[\frac{x+y}{2}, y \right]$, $s = (1-t)y + \left(\frac{x+y}{2} \right) t$, tendremos que:

$$\int_{\frac{x+y}{2}}^y f(s) ds = \int_1^0 f \left((1-t)y + \left(\frac{x+y}{2} \right) t \right) \left(\frac{y-x}{2} \right) dt$$

De lo anterior, junto con el hecho de que f es convexa, tendremos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y-x} \int_x^y f(s) ds &= \left(\frac{1}{y-x} \right) \left[\frac{y-x}{2} \int_0^1 f \left(\left(\frac{x+y}{2} \right) t + (1-t)x \right) dt \right] \\ &\quad + \left(\frac{y-x}{2} \right) \int_0^1 f \left((1-t)y + \left(\frac{x+y}{2} \right) t \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} f \left(\left(\frac{x+y}{2} \right) t + (1-t)x \right) + \frac{1}{2} f \left((1-t)y + \left(\frac{x+y}{2} \right) t \right) dt \\ &\geq \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x+y}{2} \right) t + (1-t)x \right) + \frac{1}{2} \left((1-t)y + \left(\frac{x+y}{2} \right) t \right) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[2 \left(\frac{x+y}{2} \right) t + (1-t)(x+y) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x+y) dt \\ &= \frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

■

En el año 1994 K. Baron, J. Matkoski y K. Nikodem [38] estudian el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes para que exista una función convexa $m : I \rightarrow \mathbb{R}$, entre dos funciones $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, con $f \leq g$, por ejemplo. Este resultado lo enunciamos a continuación.

Teorema 1.25 (Teorema del Sandwich para funciones convexas) Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces f y g verifican la desigualdad:

$$f((1-t)y + tx) \leq (1-t)g(y) + tg(x), \quad \forall t \in (0, 1)$$

Si y sólo si existe una función convexa $m : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f \leq h \leq g$.

Demostración: Ver [38],[39]. ■

1.2. Funciones Fuertemente Convexas

En el año 1966, el Matemático ruso B. T. Polyak en [40] estudia por primera vez el concepto de funciones fuertemente convexas con módulo c . En esta sección, analizaremos propiedades y caracterizaciones de este tipo de funciones, así como también, presentaremos una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard que satisfacen estas funciones.

En alguno de los resultados que expondremos, haremos estudio en espacios con producto interno. A continuación, a manera de repaso, veamos definiciones y propiedades básicas de este tipo de espacios las cuales serán usadas en el desarrollo de esta sección y en el desarrollo capítulos posteriores de este trabajo. Como referencia bibliográfica para el desarrollo detallado de estos resultados ver [20],[21].

Definición 1.12 *Un espacio normado es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X y una aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, llamada norma, con las siguientes propiedades:*

- (i) $\|x\| \geq 0$.
- (ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Desigualdad Triangular*)

Definición 1.13 *Un espacio con producto interno es un espacio vectorial X en el que se define una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow E$ con las siguientes propiedades:*

- (i) (*Aditiva*) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- (ii) (*Homogénea*) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
- (iii) (*Hermítica*) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (iv) (*Definida Positiva*) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Observación: En particular, se tiene que todo espacio con producto interno es un espacio normado, donde la norma asociada se define como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Sin embargo, el recíproco de esta afirmación no es cierto, es decir no todos los espacios normados son espacios con producto interno.

A continuación, daremos una caracterización de los espacios normados para los que se puede definir un producto interno cuya norma asociada sea la dada. Dicha caracterización se basa en los siguientes hechos cuya demostración es inmediata.

Proposición 1.26 (*Identidad del Paralelogramo*) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno si y sólo si la norma asociada verifica:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

El siguiente resultado, muestra cómo la norma asociada permite a su vez definir el producto interno. Supondremos que X es un espacio vectorial real.

Proposición 1.27 (*Identidad de Polarización*) Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Entonces:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$$

Proposición 1.28 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si se verifica la proposición 1.26, entonces existe un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en X tal que $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$

Los siguientes dos resultado son de gran utilidad como técnica para demostraciones en espacios con producto interno.

Proposición 1.29 (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*) Para cualesquiera $x, y \in X$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

La igualdad se cumple si y sólo si x, y son linealmente dependientes.

Una consecuencia de la proposición anterior es la siguiente proposición.

Proposición 1.30 (*Desigualdad triangular*) Para cualesquiera $x, y \in X$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

La igualdad se cumple si y sólo si $y = 0$ o $x = c y$ ($c \geq 0$)

Para la demostración de los resultados anteriormente expuestos ver [20],[21].

En lo que sigue, consideraremos $(X, \|\cdot\|)$ un espacio con producto interno, D un subconjunto convexo y c una constante positiva.

A continuación, daremos algunas caracterizaciones de funciones fuertemente convexas en espacios con producto interno.

1.2.1. Definición de Funciones Fuertemente Convexas

Definición 1.14 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $D \subseteq X$. Diremos que una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada fuertemente convexa con módulo c , si:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - c(t)(1-t)\|x-y\|^2, \forall x, y \in D \text{ y } t \in (0, 1) \quad (1.5)$$

Diremos que f es fuertemente midconvexa con módulo c , si para $t = 1/2$, se tiene que:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2, \forall x, y \in D \quad (1.6)$$

Observemos que si $c = 0$, de las ecuaciones (1.5) y (1.6), obtenemos que la función es convexa y midconvexa respectivamente.

Esta clase de funciones tienen mucha importancia en la Teoría de Optimización y en Economía Matemática (Ver [41][18]). Varias propiedades y aplicaciones de este tipo de funciones pueden ser halladas en [29][7][8][11][12][14][18].

Como ejemplo de funciones fuertemente convexas, tenemos:

Ejemplos 1.15

a.- $f(x) = x^2, x \in [-2, 2]$

b. $f(x) = \text{sen}(x), x \in [-\pi, 0], c = 2$

A continuación se da una interpretación geométrica de las funciones fuertemente convexas con módulo c .

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función fuertemente convexa con módulo c . Sean $x, y \in I$ con $x < y$ y $t \in (0, 1)$. Consideremos la función cuadrática $h(x) = cx^2 + ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ de tal forma que $h(x) = f(x)$ y $h(y) = f(y)$.

Por la convexidad de h tenemos que:

$$h((1-t)y + tx) \leq (1-t)h(y) + th(x)$$

Haciendo las cuentas para cada $t \in (0, 1)$, se verifica la igualdad:

$$(1-t)h(y) + th(x) - h((1-t)y + tx) = ct(1-t)\|x-y\|^2 \quad (1.7)$$

Observemos que la ecuación $(1-t)h(y) + th(x)$, representa a la recta que pasa por los puntos $(x, h(x))$, $(y, h(y))$.

En la siguiente figura se ilustran estos resultados:

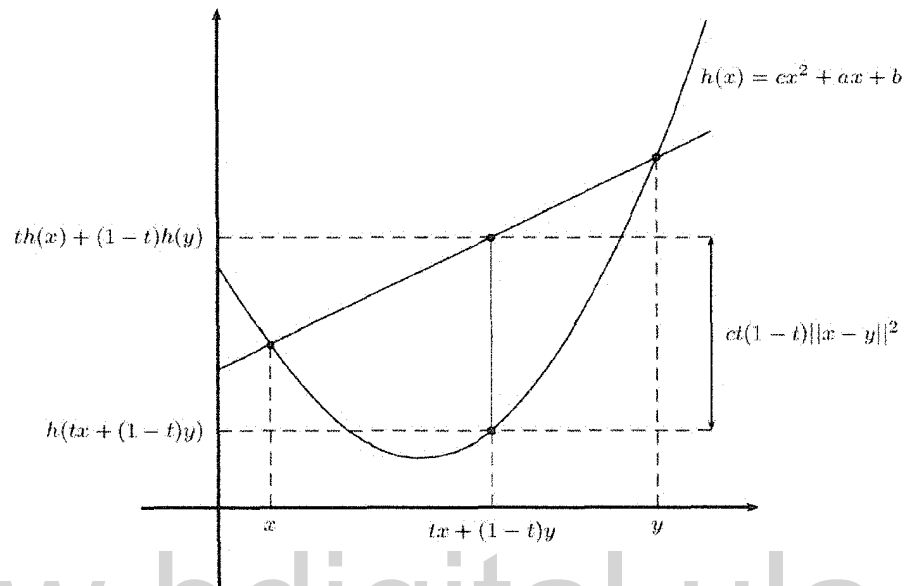


Figura 1.3: Interpretación geométrica de $ct(1-t)||x-y||^2$

En la Figura 1.3 se puede ver el gráfico de h está por debajo de la recta $(1-t)h(x) + th(y)$.

De la desigualdad (1.6) y de la igualdad (1.7), tenemos que:

$$\begin{aligned} tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) \\ &\geq ct(1-t)||x-y||^2 \\ &= th(x) + (1-t)h(y) - h(tx + (1-t)y) \end{aligned}$$

De donde nos queda que

$$f((1-t)y + tx) \leq h((1-t)y + tx)$$

De esta manera, nos queda que en el intervalo (x, y) , la gráfica de f está por debajo del gráfico de la parábola h como se ilustra en la Figura 1.4.

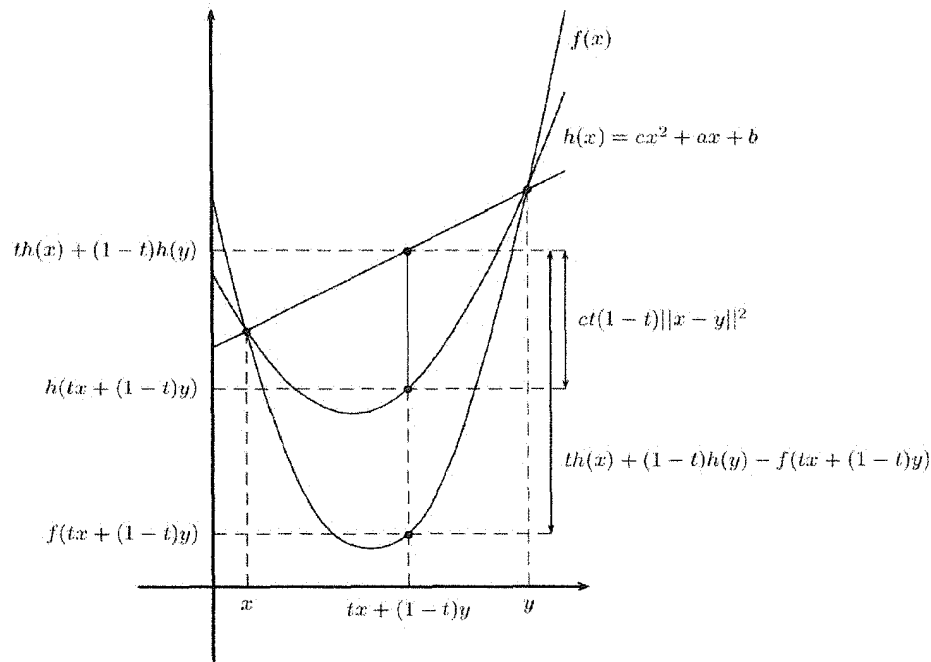


Figura 1.4: Interpretación geométrica de convexidad fuerte

1.2.2. Resultados que relacionan funciones convexas y funciones fuertemente convexas

Lema 1.31 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio con producto interno, D un subconjunto convexo y c una constante positiva.

1. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es fuertemente convexa con módulo c , si y sólo si la función $g = f - c\|\cdot\|^2$ es convexa.
2. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada fuertemente midconvexa con módulo c , si y sólo si la función $g = f - c\|\cdot\|^2$ es midconvexa.

Demostración:

1. Supongamos que f es una función fuertemente convexa con módulo c . Usando el hecho

de que X es un espacio con producto interno, tendremos que:

$$\begin{aligned}
 g(tx + (1-t)y) &= f(tx + (1-t)y) - c\|tx + (1-t)y\|^2 \\
 &= tf(x) + (1-t)f(y) - c(t(1-t)\|x-y\|^2 - c\|tx + (1-t)y\|^2 \\
 &= tf(x) + (1-t)f(y) - c(t(1-t)[\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2] \\
 &\quad - c[t^2\|x\|^2 + 2t(1-t)\langle x, y \rangle + (1-t)^2\|y\|^2]) \\
 &= tf(x) + (1-t)f(y) - c(1-t)\|y\|^2[t + (1-t)] \\
 &\quad - ct\|x\|^2[(1-t) + t] \\
 &\quad t(f(x) - c\|x\|^2) + (1-t)(f(y) - c\|y\|^2) \\
 &= tg(x) + (1-t)g(y)
 \end{aligned}$$

Recíprocamente, si g es convexa se tiene que:

$$\begin{aligned}
 f(tx + (1-t)y) &= g(tx + (1-t)y) + c\|tx + (1-t)y\|^2 \\
 &\leq tg(x) + (1-t)g(y) + c\|tx + (1-t)y\|^2 \\
 &= tg(x) + (1-t)g(y) + c[t^2\|x\|^2 + 2t(1-t)\langle x, y \rangle + (1-t)^2\|y\|^2]
 \end{aligned}$$

Usando el hecho de que $2\langle x, y \rangle = \|x\|^2 - \|x-y\|^2 + \|y\|^2$ nos queda que:

$$\begin{aligned}
 f(tx + (1-t)y) &\leq tg(x) + (1-t)g(y) + c[t^2\|x\|^2 + (t)(1-t)\|x\|^2 \\
 &\quad - (t)(1-t)\|x-y\|^2 + (t)(1-t)^2\|y\|^2 + (1-t)^2\|y\|^2] \\
 &= tg(x) + (1-t)g(y) + c[t\|x\|^2(t + (1-t)) + (1-t)\|y\|^2((1-t) + t) \\
 &\quad - t(1-t)\|x-y\|^2] \\
 &= t[g(x) + c\|x\|^2] + (1-t)[g(y) + c\|y\|^2] - c(t)(1-t)\|x-y\|^2 \\
 &= tf(x) + (1-t)f(y) - c(t)(1-t)\|x-y\|^2
 \end{aligned}$$

2. Supongamos que f es midconvexa con módulo c .

Por la definición de g , tenemos que:

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - c\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2$$

Así,

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 - \frac{c}{4}\|x+y\|^2 \\
 &= \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}(\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2) \\
 &= \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) \\
 &= \frac{f(x)-c\|x\|^2}{2} + \frac{f(y)-c\|y\|^2}{2} \\
 &= g(x) + g(y)
 \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que g es midconvexa, luego:

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= g\left(\frac{x+y}{2}\right) + c\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \\
 &\leq \frac{g(x)+g(y)}{2} + \frac{c}{4}\|x+y\|^2 \\
 &= \frac{g(x)+g(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 + \frac{1}{2}c\|y\|^2 \\
 &= \frac{g(x)+c\|x\|^2}{2} + \frac{g(y)+c\|y\|^2}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 \\
 &= \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2
 \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que f es fuertemente midconvexa

■

A continuación, daremos un ejemplo que muestra que la condición de que X sea un espacio con producto interno es un condición necesaria en nuestro resultado.

Ejemplo 1.16 Sea $X = \mathbb{R}^2$ y $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, con $x = (x_1, x_2)$. Consideremos $f(x) = \|\cdot\|^2$ y $g(x) = f - \|\cdot\|^2$. Claramente g es una función midconvexa, sin embargo, f no es fuertemente midconvexa. En efecto, consideremos $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$. Así,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{1}{4}\|x - y\|^2 &= \frac{(|1| + |0|)^2 + (|0| + |1|)^2}{2} - \frac{1}{4}(|1| + |1|)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De donde concluimos que:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 1 > 0 = \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{1}{4}\|x - y\|^2$$

Es decir, f no es fuertemente midconvexa de módulo 1.

Teorema 1.32 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Las siguientes son equivalentes:

1. Para todo $c > 0$ y para toda función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f es fuertemente convexa con módulo c , si y sólo si la función $g = f - c\|\cdot\|^2$ es convexa.
2. Para todo $c > 0$ y para toda función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f es fuertemente midconvexa con módulo c si y sólo si $g = f - c\|\cdot\|^2$ es midconvexa.
3. Existe $c > 0$ tal que para toda función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, g es convexa si y sólo si $f = g + c\|\cdot\|^2$ es fuertemente convexa con módulo c .
4. Existe $c > 0$ tal que para toda función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, g es midconvexa si y sólo si $f = g + c\|\cdot\|^2$ es fuertemente midconvexa con módulo c .
5. $\|\cdot\|^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ es fuertemente convexa con módulo 1.
6. $\|\cdot\|^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ es fuertemente midconvexa con módulo 1.
7. $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio con producto interno.

Demostración: A continuación, mostraremos nuestro teorema considerando las siguientes implicaciones:

$$1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 7 \Rightarrow 1 \quad \text{y} \quad 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 2$$

Demostración: Las implicaciones $1 \Rightarrow 3$ y $2 \Rightarrow 4$ son obvias. Mostremos $3 \Rightarrow 5$, para ello consideremos $g = 0$, Luego, $f = 0 + c\|\cdot\|^2$ es fuertemente convexa con módulo c . Así,

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= c\|tx + (1-t)y\|^2 \\ &\leq ct\|x\|^2 + c(1-t)\|y\|^2 + c(t)(1-t)\|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{c}f(tx + (1-t)y) \leq t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 + (t)(1-t)\|x-y\|^2$$

De donde concluimos que $\|\cdot\|^2$ es fuertemente convexa con módulo 1. Análogamente se prueba que es midconvexa con módulo 1.

En lo que sigue, mostraremos $6 \Rightarrow 7$. La demostración de $5 \Rightarrow 7$ es análoga a la que exponemos a continuación.

($6 \Rightarrow 7$) Supongamos que $\|\cdot\|^2$ es fuertemente midconvexa con módulo 1:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in D$$

Luego, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, $\forall x, y \in D$

Por otro lado, consideremos $u = x+y$, $v = x-y$, así

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}$$

Sustituyendo en nuestra última desigualdad, tenemos que:

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 \leq \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2$$

De donde nos queda que:

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \leq \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2, \quad \forall u, v \in D$$

De esta manera, concluimos que: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, $\forall x, y \in D$

($7 \Rightarrow 1$) y ($7 \Rightarrow 2$) es un resultado directo del lema 1.31

■

1.2.3. Funciones Fuertemente Convexas y desigualdades clásicas

A continuación, presentamos desigualdades que caracterizan a las funciones que son fuertemente convexa. En algunos casos sólo nos limitaremos a enunciar los resultados indicando una referencia de los detalles de su demostración para el lector interesado.

En el año 2010, Nelson Merentes y Kazierz Nikodem generalizan el Teorema del Sandwich para funciones fuertemente convexas [18] a través del siguiente teorema:

Teorema 1.33 (Teorema del Sandwich) Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones, y $c > 0$. Existe una función fuertemente convexa $h : I \rightarrow \mathbb{R}$, con módulo c tal que $f \leq h \leq g$ en I si, y sólo si

$$f((1-t)y + tx) \leq (1-t)g(y) + tg(x) - ct(1-t)\|x - y\|^2$$

Para todo $x, y \in I$ y $t \in (0, 1)$

Demostración: Ver [18]. ■

Las desigualdades del tipo Jensen juegan un papel importante en el estudio de las funciones convexas, así como también en sus aplicaciones. En [17] N. Merentes y K. Nikodem extendieron la definición de función fuertemente convexa a combinación convexa de n puntos obteniendo la siguiente versión clásica de la desigualdad de Jensen.

Teorema 1.34 (Desigualdad del tipo Jensen para funciones fuertemente convexas) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función fuertemente convexa con módulo c , entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) - c \sum_{i=1}^n t_i (x_i - \bar{x})^2$$

Para todo $x_i \in I, t_i > 0, i = 1, \dots, n$, con $t_1 + \dots + t_n = 1$, donde $\bar{x} = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n$.

En la sección anterior, se presentó una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones convexas. A continuación, expondremos una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones fuertemente convexas la cual generaliza a este tipo de desigualdad para funciones convexas.

Antes de iniciar con la exposición del resultado principal de esta sección, enunciaremos el siguiente teorema que servirá como herramienta para su demostración.

Teorema 1.35 Una función f es fuertemente convexa con módulo c si y sólo si para todo $x_0 \in I$ existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq c(x - x_0)^2 + m(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in I$$

Es decir, f tiene un soporte cuadrático en x_0 .

Demostración: Ver [18]. ■

Teorema 1.36 (Una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Si una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es fuertemente convexa con módulo c , entonces:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{c}{12}(x-y)^2 \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{6}(x-y)^2$$

Para todo $x, y \in I$, con $x < y$.

Demostración: Por hipótesis, f es una función fuertemente convexa con módulo c , así:

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x) - c(t)(1-t)(y-x)^2$$

Integrando con respecto a t en $[0, 1]$, nos queda que:

$$\int_0^1 f(ty + (1-t)x)dt \leq \int_0^1 tf(y)dt + \int_0^1 (1-t)f(x)dt - \int_0^1 c(t)(1-t)(y-x)^2dt$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$u = x(1-t) + yt \quad du = (y-x)dt$$

Luego,

$$\text{Si } t = 0, u = x \quad \text{Si } t = 1, u = y$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{1}{y-x} \int_x^y f(u)du &\leq \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} - c \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) (y-x)^2 \\ &\leq \frac{x+y}{2} - \frac{c}{6}(y-x)^2 \quad (I) \end{aligned}$$

Para probar la otra desigualdad, tenemos que como f es fuertemente convexa con módulo c , del teorema 1.35; existe $m \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(s) \geq c(s-s_0)^2 + m(s-s_0) + f(s_0)$$

$$\text{con } s_0 = \frac{x+y}{2}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 \int_x^y f(s)ds &\geq c \int_x^y c(s-s_0)^2 ds + m \int_x^y (s-s_0)ds + \int_x^y f(s_0)ds \\
 &= \frac{c}{3} [(y-s_0)^3 - (x-s_0)^3] + \frac{m}{2} [(y-s_0)^2 - (x-s_0)^2] + (y-x)f(s_0) \\
 &= \frac{c}{3} \left[\left(\frac{y-x}{2} \right)^3 - \left(\frac{x-y}{2} \right)^3 \right] + (y-x)f\left(\frac{x+y}{2} \right) \\
 &= \frac{c}{12}(y-x)^3 + (y-x)f\left(\frac{x+y}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{y-x} \int_x^y f(u)du \geq \frac{c}{12}(y-x)^2 + f\left(\frac{x+y}{2} \right) \quad (II)$$

De *I* y *II* concluimos lo que queríamos. ■

www.bdigital.ula.ve

Funciones h -Convexas/ h -Fuertemente Convexas

En este capítulo, nos dedicamos a estudiar dos nociones de funciones que generalizan a las estudiadas en el capítulo 1.

Una generalización “*natural*” de las funciones convexas fue propuesta en el año 2005 por la matemática croata S. Varošanec [19] y son las llamadas funciones h -convexas. En este capítulo, daremos la definición de este tipo de funciones así como también expondremos propiedades y desigualdades que las caracterizan, como por ejemplo, una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para esta clase de funciones.

La generalización anterior y la noción de funciones fuertemente convexas, dan origen a una nueva generalización de esta última, las cuales son llamadas funciones h -fuertemente convexas. Esta noción fue introducida en el año 2012 por H. Angulo, J. Giménez, A. Moros, K. Nikodem en [19]. Esta clase de funciones también serán objeto de estudio en este capítulo. Expondremos su definición, una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para ellas y resultados que relacionan a este tipo de funciones con las funciones h -convexas en espacios con producto interno.

2.1. Funciones h -Convexas

Como ya hemos mencionado, las funciones h -convexas, son una generalización de las funciones convexas las cuales surgieron luego de que las funciones convexas condujeran a otro tipo de definiciones como son las de *funciones s -convexas*, las *funciones de Godunova-Levin* y las *P -funciones*. Las propiedades de estas pueden ser halladas en [53][54][55].

En lo que sigue, $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo.

En el año 1994 H. Hudzik y L. Maligranda [43], exponen un conjunto de propiedades de las funciones s -convexas, en principio definidas por W. Orlicz [45] en 1961 y en una segunda versión por W. W. Breckner[44] en el año 1978, como describimos a continuación.

Definición 2.1 Sea $s < 0 \leq 1$. Una función $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ es s -convexa en el primer sentido o s_1 -convexa si

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y),$$

Para todo $x, y, \alpha, \beta \in [0, +\infty)$, $\alpha^s + \beta^s = 1$.

s -convexa en el segundo sentido o s_2 -convexa si

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y),$$

Para todo $x, y \in [0, +\infty)$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\alpha + \beta = 1$.

Observación:

a. La noción de función s_1 -convexa fue introducida en 1961 por W. Orlicz en [45], mientras la función s_2 -convexa, fue introducida por W. W Breckner [44]. Es por esto que algunos autores denominan las funciones s_2 -convexas como Brecker convexas.

b. f es s_1 -convexa si y sólo si

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)^s f(x) + t^s f(y), \quad x, y \in [0, +\infty), \quad t \in (0, 1)$$

c. $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si es s -convexa (con $s = 1$) en cualquiera de los dos sentidos.

d. Si f es s_2 -convexa y $f(0) = 0$, entonces f es s_1 -convexa.

Definición 2.2 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es una función Godunova-Levin, si f es no negativa y para todo $x, y \in I$ y $\alpha \in (0, 1)$

$$f((1-t)x + ty) \leq \frac{f(x)}{1-t} + \frac{f(y)}{t}$$

Esta clase de funciones fue introducida por Godunova y Levin ver [46]. Podemos encontrar algunas propiedades en [5] y [47].

Definición 2.3 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es una P -función, si f es no negativa y para todo $x, y \in I$ y $\alpha \in (0, 1)$

$$f((1-t)x + ty) \leq f(x) + f(y)$$

Algunos resultados de esta clase de funciones pueden ser encontrados en [48].

2.1.1. Definición de Funciones h -Convexas

Definición 2.4 Sea I un intervalo de la recta real y sea $h : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ una función, con $h \neq 0$. Decimos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es h -convexa si, para todo $x, y \in I$ y $t \in (0, 1)$ tenemos que:

$$f((1-t)y + tx) \leq h(1-t)f(y) + h(t)f(x) \quad (2.1)$$

Si cambiamos en (2.1) “ \leq ” por “ \geq ”, entonces decimos que f es una función h -cóncava.

Observemos que en las funciones convexas, funciones s -convexas, funciones Godunova-Levin y las P -funciones, estas coinciden en el término de la parte izquierda de las inecuaciones que las definen, mientras que en el lado derecho adoptan la forma $h(1-t)f(x) + h(t)f(y)$ con $h(t) = t$, $h(t) = t^s$, $h(t) = 1/t$, $h(t) = 1$, con $t \in (0, 1)$ respectivamente.

Propiedades de este tipo de funciones y ejemplo de éstas pueden ser hallado de manera detallada en [10].

En lo que sigue, seguiremos considerando a la función h como una función que va de $(0, 1)$ a $(0, +\infty)$.

2.1.2. Algunas desigualdades para Funciones h -Convexas

En esta sección, presentaremos algunas importantes desigualdades que caracterizan a las funciones h -convexas, entre las cuales incluiremos la demostración detallada de una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones h -convexas.

Proposición 2.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, una función h -convexa y sea $g \geq 0$ simétrica con respecto a $\frac{a+b}{2}$, entonces:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt \leq (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t)g(ta + (1-t)b)dt$$

Demostración: Pongamos $x = at + (1-t)b$ y $y = (1-t)a + tb$.

Por hipótesis f es una función h -convexa en $[a, b]$. Así

$$f((1-t)b + at) \leq h(1-t)f(b) + h(t)f(a) \quad \text{y} \quad f((1-t)a + tb) \leq h(1-t)f(a) + h(t)f(b)$$

De la positividad y simetría de g , tenemos que:

$$f((1-t)b + at)g((1-t)b + at) \leq [h(1-t)f(b) + h(t)f(a)]g((1-t)b + at)$$

y

$$f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb) \leq [h(1-t)f(a) + h(t)f(b)]g((1-t)a+tb)$$

Sumando las últimas desigualdades y reagrupando, obtenemos que:

$$\begin{aligned} & f((1-t)b+at)g((1-t)b+at) + f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb) \\ & \leq [h(1-t)g((1-t)a+tb) + h(t)g((1-t)b+tb)]f(a) \\ & \quad + [h(1-t)g((1-t)b+at) + h(t)g((1-t)a+tb)]f(b) \end{aligned}$$

Integrando con respecto a t en el intervalo $[0, 1]$, nos queda que:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f((1-t)b+ta)g((1-t)b+tb) + f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)dt \\ & \leq \int_0^1 [h(1-t)g((1-t)a+tb) + h(t)g((1-t)b+ta)]f(a) \\ & \quad + \int_0^1 [h(1-t)g((1-t)b+ta) + h(t)g((1-t)a+tb)]f(b)dt \quad (I) \end{aligned}$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$\alpha = 1-t, \quad d\alpha = -dt$$

$$\text{Si } t=0, \alpha=1$$

$$\text{Si } t=1, \alpha=0$$

Así,

$$\int_0^1 h(1-t)g((1-t)a+tb)dt = \int_0^1 h(\alpha)g(\alpha a + (1-\alpha)b)dt$$

Análogamente, tendremos que:

$$\int_0^1 h(1-t)g((1-t)b+ta)dt = \int_0^1 h(\alpha)g((1-\alpha)a + \alpha b)dt$$

Así, de (I) obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f((1-t)b+ta)g((1-t)b+tb)dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)dt \\ & \leq 2f(a) \int_0^1 h(t)g((1-t)b+ta)dt \\ & \quad + 2f(b) \int_0^1 h(t)g((1-t)b+ta)dt \end{aligned}$$

Usando el hecho de que g es simétrica con respecto a $\frac{a+b}{2}$, nos queda que:

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt \leq 2f(a) \int_0^1 h(t)g((1-t)b+ta)dt + 2f(b) \int_0^1 h(t)g((1-t)b+ta)dt$$

Es decir,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(t)g((1-t)b+ta)dt$$

■

Corolario 2.2 Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, una función h -convexa. Si f es una función par, entonces

$$\int_0^1 f(t)dt \leq \frac{f(1)}{2} \int_0^1 h(t)$$

Demostración: En efecto, en la proposición 2.1, considere $g(t) = 1$

Proposición 2.3 Sea $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones con f una función h -convexa. Supongamos que $g \geq 0$ es simétrica con respecto a $\frac{a+b}{2}$ y $\int_a^b g(t)dt \geq 0$. Entonces:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq c \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\text{Con } c = \frac{2h(1/2)}{\int_a^b g(t)dt}$$

Demostración: Pongamos $x = (1-t)b + ta$ y $y = (1-t)a + tb$.

Por la h -convexidad de f , tenemos que:

$$f((1-t)y + tx) \leq h(1-t)f(y) + h(t)f(x) \quad \text{Con } t \in (0, 1)$$

Para $t = 1/2$ y haciendo sustituciones en x, y , tenemos que:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h(1/2) [f((1-t)b + at) + f((1-t)a + tb)]$$

Multiplicando por $g(at + (1 - t)b)$ en la última desigualdad e integrando con respecto a t en el intervalo $[0, 1]$ se tiene que:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 g((1-t)b + ta) dt \leq h(1/2) \left[\int_0^1 f((1-t)b + ta) g((1-t)b + ta) dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb) g((1-t)b + ta) dt \right]$$

Así,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(w) dw \leq 2h(1/2) \int_a^b f(w) g(w) dw$$

■

Lema 2.4 Si f es una función h -convexa, entonces:

$$f(a + b - x) \leq (h(t) + h(1-t))[f(a) + f(b)] - f(x)$$

Para todo $x \in [a, b]$ y $t \in [0, 1]$

Demostración: Pongamos $x = at + (1 - t)b$, para todo $t \in [0, 1]$.

Así,

$$f(a + b - x) = f(a + b - ((1 - t)b + ta)) = f(a(1 - t) + tb)$$

Luego, por la h -convexidad de f , tenemos que:

$$\begin{aligned} f(a + b - x) &\leq f(a)h(1-t) + f(b)h(t) + f(x) - f(x) \\ &= f(a)h(1-t) + f(b)h(t) + f((1-t)b + ta) \\ &\leq h(1-t)f(a) + h(t)f(b) + f(a)h(t) + h(1-t)f(b) - f(x) \\ &= [f(a) + f(b)][h(t) + h(1-t)] - f(x) \end{aligned}$$

■

Proposición 2.5 Sea $h : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ con $h(1/2) > 0$. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables con f una función h -convexa y g una función simétrica con respecto a $\frac{a+b}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h(1/2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \\ & \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} [h(t) + h(1-t)] \int_a^b g(x) dx, \quad t \in (0, 1) \end{aligned}$$

Demostración: Pongamos $x = (1-t)b + ta$ y $y = (1-t)a + tb$, con $t \in (0, 1)$.

Para $t = 1/2$, tendremos que:

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{h(1/2)} g(x) = \frac{f\left(\frac{a+b+x-x}{2}\right)}{h(1/2)} g(x)$$

Usando la simetría de g con respecto a $\frac{a+b}{2}$, la h -convexidad de f y el hecho de que:

$$a + b - x = (1-t)a + tb$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{h(1/2)} g(x) & \leq [f(a+b-x) + f(x)]g(x) \\ & = f(a+b-x)g(a+b-x) + f(x)g(x) \end{aligned}$$

Integrando con respecto a t en el intervalo $[0, 1]$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{h(1/2)} \int_0^1 g((1-t)b + ta) dt & \leq \int_0^1 f((1-t)a + tb)g((1-t)a + tb) dt \\ & \quad + \int_0^1 f((1-t)b + ta)g((1-t)b + ta) dt \end{aligned}$$

Haciendo cambio de variable en las integrales anteriores, nos queda que:

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2h(1/2)} \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (I)$$

Por el Lema 2.4, tenemos que:

$$[f(a) + f(b)][h(t) + h(1-t)] - f(x) \geq f(a+b-x)$$

Así,

$$\frac{1}{2}[f(a) + f(b)][h(t) + h(1-t)]g((1-t)b + ta) \geq \frac{1}{2}[f(a+b-x)g(a+b-x) + f(x)g(x)]$$

Integrando con respecto a $x = (1-t)b + ta$ en el intervalo $[0, 1]$, tenemos que:

$$\frac{1}{2}[f(a) + f(b)][h(t) + h(1-t)] \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (II)$$

De (I) y (II) tenemos que:

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2h(1/2)} \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{[f(a) + f(b)]}{2}[h(t) + h(1-t)] \int_a^b g(x)dx$$

Para todo $t \in (0, 1)$

2.1.3. Desigualdad del tipo Jensen para Funciones h -Convexas

En esta sección, nos limitaremos a enunciar la desigualdad del tipo Jensen para funciones h -convexas. Su demostración se ilustra con detalle en [10]. Antes, daremos la definición de un tipo de función necesaria en la hipótesis de nuestro teorema.

Definición 2.5 Una función $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada función supermultiplicativa si

$$h(xy) \geq h(x)h(y) \quad \forall x, y \in J$$

Teorema 2.6 Sean w_1, w_2, \dots, w_n números reales positivos ($n \geq 2$). Si h es una función supermultiplicativa no negativa, f h -convexa, y $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, entonces

$$f\left(\frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^n w_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n h\left(\frac{w_i}{W_n}\right)$$

Con $W_n = \sum_{i=1}^n w_i$

2.1.4. Una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para Funciones h -Convexas

A continuación, enunciamos un tipo de desigualdad de Hermite-Hadamard para funciones h -convexas. Incluimos también su demostración.

Teorema 2.7 *Sea f una función h -convexas, entonces:*

$$\frac{1}{h(1/2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t) dt$$

Para todo $a, b \in I, a < b$.

Demostración: Sean $x = at + (1-t)b$ y $y = (1-t)a + tb$

Para $t = 1/2$, por la h -Convexidad de f , tenemos que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) &= f\left(\frac{ta + (1-t)b + (1-t)a + tb}{2}\right) \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq h(1/2)f(ta + (1-t)b) + h(1/2)f(tb + (1-t)a) \\ &= h(1/2)[f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)] \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq h(1/2) \left[\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt + \int_0^1 f(tb + (1-t)a) dt \right] \\ &= h(1/2) \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (I) \end{aligned}$$

Recíprocamente, para $x = a, y = b$ por la h -convexidad de f , tenemos que:

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &\leq h(t)f(a) + h(1-t)f(b) \\ \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt &\leq (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t) dt \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \leq (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t) dt \quad (II)$$

De (I) y (II) Concluimos lo que queríamos. ■

2.2. Funciones h -Fuertemente Convexas

A continuación, daremos la definición de una nueva clase de funciones, cuya noción fue expuesta por primera vez en el año 2012 como se mencionó al inicio de nuestro capítulo. Se expondrán dos resultados que involucran a las funciones h -fuertemente convexas. Uno de estos, relacionan a las funciones h -convexas y a las funciones h -fuertemente convexas en espacios con producto interno. El otro, versa sobre un tipo de desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para esta clase de funciones. Un desarrollo detallado de este tipo de funciones puede encontrarse en [10].

2.2.1. Definición de Funciones h -Fuertemente Convexas

Definición 2.6 Sea $h : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ una función. Diremos que $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es h -fuertemente convexa con módulo c , si

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - c(t)(1-t)(x-y)^2, \quad \forall x, y \in D \text{ y } t \in (0, 1)$$

Podemos extender nuestro concepto anterior a espacios con producto interno, en este caso tendríamos el siguiente resultado.

Definición 2.7 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio con producto interno, D un subconjunto convexo y c una constante positiva. Supongamos que $h : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$. Diremos que $f : D \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ es h -fuertemente convexa con módulo c , si

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - c(t)(1-t)\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in D \text{ y } t \in (0, 1)$$

2.2.2. Relación entre Función h -Convexa y Función h -Fuertemente Convexa

A continuación, presentamos un resultado que relacionan a las funciones h -convexas y las funciones h -fuertemente convexas. Antes, expondremos la demostración de dos Lemas que servirán de ayuda para demostrar uno de los principales resultados de esta sección.

Lema 2.8 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio con producto interno, D un subconjunto convexo y c una constante positiva. Supongamos que $h : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$

$$h(t) \geq t, \quad \forall t \in (0, 1)$$

Si $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es h -convexa, entonces $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f = g + c\|\cdot\|^2$ con $x \in D$ es h -fuertemente convexa con módulo c .

Demostración: Supongamos que g es h -convexa, así:

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= g(tx + (1-t)y) + c\|tx + (1-t)y\|^2 \\ &\leq h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c\|tx + (1-t)y\|^2 \\ &= h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c[t^2\|x\|^2 + 2t(1-t)\langle x, y \rangle + (1-t)^2\|y\|^2] \\ &= h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c[t^2\|x\|^2 + (t)(1-t)\|x\|^2 - (t)(1-t)\|x-y\|^2 \\ &\quad + (t)(1-t)\|y\|^2 + (1-t)^2\|y\|^2] \\ &= h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c[t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - (t)(1-t)\|x-y\|^2] \\ &\leq h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c[h(t)\|x\|^2 + h(1-t)\|y\|^2 - (t)(1-t)\|x-y\|^2] \\ &= h(t)[g(x) + c\|x\|^2] + h(1-t)[g(y) + c\|y\|^2] - c(t)(1-t)\|x-y\|^2 \end{aligned}$$

De manera similar, podemos demostrar el siguiente Lema.

Lema 2.9 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio con producto interno, D un subconjunto convexo y c una constante positiva. Supongamos que $h : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ satisface la condición:

$$h(t) \leq t, \quad \forall t \in (0, 1)$$

Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es h -fuertemente convexa con módulo c , entonces existe una función h -convexa $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = g + c\|\cdot\|^2$, con $x \in D$.

A continuación, daremos un ejemplo que muestra la necesidad de las condiciones dadas sobre la función h en los resultados anteriores.

Ejemplo 2.8 Definamos $h(t) := 1$, $t \in (0, 1)$. Entonces $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, para todo $t \in (0, 1)$ es h -fuertemente convexa con módulo 1.

En efecto,

$$f((1-t)y + tx) = 1 \leq 2 - t(1-t)(x-y)^2 = f(y) + f(y) - t(1-t)(x-y)^2$$

Sin embargo, $g(x) := f(x) - x^2$, no es h -convexa, ya que

$$g\left(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1)\right) = 1 > 0 = g(-1) + g(1)$$

Por otro lado, consideremos $h(t) := x^2$, $t \in (0, 1)$. Entonces $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) := 1$, $x \in [-1, 1]$, es h -convexa, sin embargo, $f(x) := g(x) + x^2$, $x \in [-1, 1]$, no es h -fuertemente convexa módulo c como vemos en la línea que sigue

$$f\left(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1)\right) = 1 > 0 = \frac{1}{4}f(-1) + \frac{1}{4}f(1) - \frac{1}{4}(1+1)^2$$

Observación: La condición dada sobre h en el lema 2.8 lo satisfacen las siguientes funciones definidas en $(0, 1)$: $h_1(t) = t$, $h_2(t) = t^s$ ($s \in (0, 1)$), $h_3(t) = 1/t$, $h_4(t) = 1$. Por lo tanto, si una función $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, s -convexa, una función Godunova-Levin o una P-función, por el lema 2.8, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(x) + cx^2$ es h_i -fuertemente convexa con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Teorema 2.10 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $h : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ con $h(t) \leq t$ y $h(t) = 1/2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $(X, \|\cdot\|)$ un espacio con producto interno.
2. Para cada $c > 0$ y para cada función h -convexa $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un subconjunto convexo D de X , función $f = g + c\|\cdot\|^2$ es fuertemente convexa con módulo c .
3. $\|\cdot\|^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ es fuertemente convexa con módulo 1.

Demostración: $(1 \Rightarrow 2)$ Es un resultado inmediato del Lema 2.8.

$(2 \Rightarrow 3)$ Pongamos $g = 0$ (Claramente g es h -convexa). Luego $f = 0 + \|\cdot\|^2$ es una función h -fuertemente convexa de módulo c .

Esto es,

$$c\|tx + (1-t)y\|^2 \leq h(t)c\|x\|^2 + h(1-t)c\|y\|^2 - c(t)(1-t)\|x-y\|^2$$

Así,

$$\|tx + (1-t)y\|^2 \leq h(t)\|x\|^2 + h(1-t)\|y\|^2 - (t)(1-t)\|x-y\|^2 \quad (I)$$

De donde concluimos que $\|\cdot\|^2 : I \rightarrow (0, +\infty)$ es una función h -fuertemente convexa de módulo 1.

(3 \Rightarrow 1) Sustituyendo $t = 1/2$ en (I) y considerando el hecho de que $h(1/2) = 1/2$ se tiene que:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$$

Así,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Para obtener la otra desigualdad, consideremos $u = x+y$, $v = x-y$.

Finalmente, se tiene que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio con producto interno. ■

2.2.3. Hermite- Hadamard para Funciones h -Fuertemente Convexas

Para finalizar este capítulo, presentamos una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones h -fuertemente convexas. Este resultado generaliza la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones fuertemente convexas obtenida en el capítulo 1.

Teorema 2.11 *Sea $h : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ Una función dada. Si la función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable y h -fuertemente convexa, con módulo c . Entonces:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h(1/2)} \left[\frac{a+b}{2} + \frac{c}{12}(b-a)^2 \right] &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &\leq (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t) dt - \frac{c}{6}(b-a)^2 \end{aligned}$$

Demostración: Fijemos $a, b \in I$ con $a < b$ y tomemos $x = at + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$. Por la h -fuertemente convexidad de f , tenemos que para $t = 1/2$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq h(1/2)f(x) + h(1/2)f(y) - c(1/2)(1-1/2)(x-y)^2 \\ &= h(1/2)[f(at + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)] \\ &\quad - \frac{c}{4}(1/2)(1-1/2)((2t-1)a + (1-2t)b)^2 \end{aligned}$$

Integrando esta última desigualdad con respecto a t en el intervalo $(0, 1)$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq h(1/2) \left[\int_0^1 f(at + (1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt \right] \\ &\quad - \frac{c}{4} \int_0^1 ((2t-1)a + (1-2t)b)^2 dt \\ &\quad h(1/2) \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx - \frac{c}{12}(b-a)^2 \end{aligned}$$

De donde tenemos que:

$$\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{c}{12}(b-a)^2 \right] \frac{1}{2h(1/2)} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \quad (I)$$

Para demostrar el lado izquierdo de la desigualdad, pongamos $x = (1-t)a + tb$, usando la h -fuertemente convexidad de f , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f(at + (1-t)b)dt \leq \int_0^1 [h(1-t)f(a) + h(t)f(b) - c(t)(1-t)(x-y)^2]dt \\ &= f(a) \int_0^1 h(1-t)dt + f(b) \int_0^1 h(t)dt \\ &\quad - c(b-a)^2 \int_0^1 (t)(1-t)dt \\ &= (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t)dt - \frac{c}{6}(b-a)^2 \quad (II) \end{aligned}$$

Finalmente de (I) y (II), se tiene lo que queríamos. ■

Funciones (k, h) -Convexas

En el año 2012, Bartosz Micherda y Teresa Rajba introducen la noción de funciones (k, h) -convexas definidas en un conjunto k -convexo [9]. Esta noción generaliza todas las clases de funciones convexas, *s.convexas*, las *funciones de Godunova-Levin* y la *P-funciones*.

En este capítulo estudiaremos la definición de las funciones (k, h) -convexas, describiremos propiedades y nuevas desigualdades que caracterizan a este tipo de funciones así como También estudiaremos desigualdades del tipo Hermite-Hadamard y Fejér para esta clase de funciones.

A continuación, definiremos la clase de conjunto k -convexo.

3.1. Conjuntos k -Convexos

Definición 3.1 Sea $k : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que $D \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto k -convexo si $k(t)x + k(1-t)y \in D$ para todo $x, y \in D$ y $t \in (0, 1)$.

La definición dada anteriormente generaliza varias familias de conjuntos conocidos.

Ejemplos 3.2

1. Nuestra definición corresponde a los conjuntos convexas si $k(t) = t$.
2. Si $k(t) = t^{1/p}$ con $p \in (0, 1)$ entonces D es k -convexo si y sólo si es p -convexo.

3.2. Definición de Función (k, h) -Convexas

A continuación, daremos la definición de funciones (k, h) -convexas. Presentaremos algunos ejemplos donde se ilustran como la clase de funciones (k, h) -convexas generalizan todas las

funciones convexas estudiadas hasta este momento.

Definición 3.3 Sean $h, k : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ dos funciones y suponga que $D \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto k -convexo. Decimos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es (k, h) -convexa si, para todo $x, y \in D$ y $t \in (0, 1)$ tenemos:

$$f(k(1-t)y + k(t)x) \leq h(1-t)f(y) + h(t)f(x)$$

En caso de igualdad, diremos que f es una función (k, h) -afin.

3.3. Propiedades de las Funciones (k, h) -Convexas

A continuación, estudiaremos propiedades de las funciones (k, h) -convexas y añadiremos condiciones sobre algunas funciones que consideraremos para que la propiedad de (k, h) -convexidad se siga satisfaciendo.

Proposición 3.1 Sean $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones (k, h) -convexas, y $c \geq 0$. Entonces $f + g, cf$ son funciones (k, h) -convexas.

Demostración: La prueba es directa de la Definición 3.3 ■

Proposición 3.2 Sean f, g dos funciones igualmente ordenadas, es decir:

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0 \quad \forall x, y \in I$$

Sean $k, h_1, h_2 : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ tres funciones, $D \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto k -convexo. Si $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones $(k, h_1), (k, h_2)$ -convexas, respectivamnete y $h(t) + h(1-t) \leq c$ para todo $t \in (0, 1)$, donde $h(t) = \max \{h_1(t), h_2(t)\}$ y c es un número positivo fijo, entonces $f.g$ es una función (k, ch) -convexa.

Demostración: Del hecho de que f, g estén igualmente ordenadas, tenemos que:

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) \geq f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 (fg)(k(1-t)y+k(t)x) &\leq [h_1(1-t)f(y) + h_1(t)f(x)][h_2(1-t)g(y) + h_2(t)g(x)] \\
 &\leq h^2(t)(fg)_{(x)} + h(t)h(1-t)f(x)g(x) + h(t)h(1-t)f(y)g(y) \\
 &\quad + h^2(1-t)(fg)_{(y)} \\
 &= [h(t) + h(1-t)][h(t)(fg)_{(x)} + h(1-t)(fg)_{(y)}] \\
 &\leq ch(t)(fg)_{(x)} + ch(1-t)(fg)_{(y)}
 \end{aligned}$$

■

Proposición 3.3 Sean $k, h_1, h_2 : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ tres funciones, $D \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto k -convexo. Supongamos que $h_2(t) \leq h_1(t)$, para todo $t \in (0, 1)$. Si f es una función (k, h_2) -convexa, entonces f es una función (k, h_1) -convexa.

Demostración: Si f es una función (k, h_2) -convexa, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 f(k(1-t)y+k(t)x) &\leq h_1(1-t)f(y) + h_1(t)f(x) \\
 &\leq h_2(1-t)f(y) + h_2(t)f(x)
 \end{aligned}$$

www.bdigital.uba.ve

■

Proposición 3.4 $h, k : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ dos funciones y sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones (k, h) -convexas definidas en un conjunto D . Si $f = \sup_{i \in I} f_i$ entonces f es una función (k, h) -convexa.

Demostración: Por la (k, h) -convexidad de $\{f_i\}_{i \in I}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 f_i(k(1-t)y+k(t)x) &\leq h(1-t)f_i(y) + h(t)f_i(x) \\
 &\leq h(1-t)f(y) + h(t)f(x)
 \end{aligned}$$

Nuevamente, por la definición de f , tenemos que:

$$f_i(k(t)x+k(1-t)y) \leq f(k(t)x+k(1-t)y)$$

De donde concluimos que: $f(k(1-t)y+k(t)x) \leq h(1-t)f(y) + h(t)f(x)$, para todo $x, y \in I$ y $t \in (0, 1)$.

En efecto, si $h(1-t)f(y) + h(t)f(x) \leq (k(1-t)y+k(t)x)$, existe $j \in I$ tal que:

$$h(1-t)f(y) + h(t)f(x) \leq f_j(k(1-t)y + k(t)x) \leq (+k(1-t)y + k(t)x)$$

De donde tendremos que $h(1-t)f_i(y) + h(t)f_i(x) \leq f_j(+k(1-t)y + k(t)x)$, lo cual contradiría la (k, h) -convexidad de f_j ■

A continuación, mostraremos resultados sobre composición de funciones del tipo (k, h) -convexa. Presentaremos condiciones sobre algunas funciones para garantizar que la composición de funciones (k, h) -convexa sea una función (k, h) -convexa.

Sean $h_1, h_2 : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$, dos funciones. Sean $\mathcal{K}_1(k, h_1)$, $\mathcal{K}_2(k, h_2)$ espacio de funciones (k, h_1) -convexas, con dominio $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ y funciones (k, h_2) -convexas, con dominio I_2 respectivamente. Fijemos $g \in \mathcal{K}_1(k, h_1)$ tal que $g(I_1) \subseteq I_2$.

Definamos el operador lineal C_g :

$$C_g(f) = f \circ g$$

Proposición 3.5 *Para toda f en $\mathcal{K}_2(k, h_2)$ creciente, $C_g(f)$ pertenece al espacio $\mathcal{K}_2(k, h_2)$.*

Demostración: Por hipótesis, g es una función (k, h_1) -convexa. Así,

$$g(k(t)x + k(1-t)y) \leq h_1(t)g(x) + h_1(1-t)g(y) \quad \forall x, y \in I \text{ y } t \in (0, 1)$$

Por el hecho de que f es creciente, (h_1, h_2) -convexa y $g(I_2) \subseteq I_1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(g(k(t)x + k(1-t)y)) &\leq f(h_1(1-t)g(y) + h_1(t)g(x)) \\ &\leq h_2(1-t)f(g(y)) + h_2(t)f(g(x)) \end{aligned}$$

Así,

$$(f \circ g)_{(k(t)x + k(1-t)y)} \leq h_2(1-t)((f \circ g)_{(y)}) + h_2(t)((f \circ g)_{(x)})$$

De donde concluimos que $(f \circ g)$ es una función (k, h_2) -convexa, es decir, $C_g(f) \in \mathcal{K}_2(k, h_2)$ ■

Definición 3.4 *Sea $g : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que g es una función submultiplicativa si:*

$$g(xy) \leq g(x)g(y), \quad \forall x, y \in J$$

Proposición 3.6 Sean $h, k : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ dos funciones y $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función (k, h) -convexa, satisfaciendo las siguientes condiciones

- a. $f(0) = 0$
- b. *Injectiva*
- c. *Submultiplicativa*
- d. $k(t) \in I$, para todo $t \in (0, 1)$

Entonces

$$(f \circ k) \leq h$$

Demostración: Sea $x \in I$. Por la (k, h) -convexidad de f tenemos que:

$$f(k(t)x + k(1-t)0) \leq h(1-t)f(0) + h(t)f(x)$$

Así,

$$f(k(t)x) \leq h(t)f(x)$$

Por la submultiplicatividad de f , tenemos que:

$$f(k(t))f(x) \leq h(t)f(x)$$

Por otro lado, como f es inyectiva, se tiene que $f(x) \neq 0$

Así,

$$(f \circ k)(t) \leq h(t), \quad \forall t \in (0, 1)$$



Proposición 3.7 Sean $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ una función (k, h) -convexa y $f_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función (h, h) -convexa y creciente con $f_1(D_1) \subseteq D_2$. Entonces $f = f_2 \circ f_1$ es (k, h) -convexa.

Demostración: Ver Proposición 3.5



Proposición 3.8 Sean $h, k : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ dos funciones y sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función (k, h) -convexa no negativa. Si $h(t) < 1/2$ para todo $t \in (0, 1)$ y $0 \in I$, entonces $f(0) = 0$.

Demostración: Supongamos que $f(0) > 0$. De la (k, h) -convexidad de f tenemos que:

$$f(k(t)x + k(1-t)0) \leq h(1-t)f(0) + h(t)f(x)$$

Así,

$$1 \leq h(t) + h(1-t)$$

Como $h(t) < 1/2$ para todo $t \in (0, 1)$, tenemos que $1 < h(t) + 1/2$, es decir, $h(t) > 1/2$. Esto último sería una contradicción. ■

Dada f una función (k, h) -convexa, el siguiente resultado garantiza bajo ciertas condiciones sobre las funciones k, h, f , la propiedad de submultiplicatividad para la función f .

Proposición 3.9 Sean $f, h, k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tres funciones con k sobreyectiva y $f(0) = 0$ con las siguientes propiedades para todo $t \in (0, 1)$:

- a. $|k(t)| \leq 1$
- b. $t \leq f(t)$
- c. $h(t) \leq k(t)$

Si f es (k, h) -convexa entonces f es submultiplicativa

Demostración: En efecto, sean $x, y \in (0, 1)$. Del hecho de que $|k(t)| \leq 1$ y por la sobreyectividad de k , existe $t_1 \in (0, 1)$ tal que $k(t_1) = x$:

Así, de nuestras hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned} f(xy) &= f(k(t_1)y) = f(k(t_1)y + k(1-t_1)0) \\ &\leq h(t_1)f(y) + h(1-t_1)f(0) \\ &\leq k(t_1)f(y) \\ &= xf(y) \\ &\leq f(x)f(y) \end{aligned}$$

A continuación, expondremos un resultado que garantiza una versión fuerte de la propiedad de subaditividad para una f una función (k, h) -convexa. ■

Proposición 3.10 Sea $f : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ una función (k, h) -convexa, creciente y subaditiva. Entonces existen $m, g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f((a + b)g(t)) \leq (f(a) + f(b))m(t), \quad \forall a, b \in D$$

Demostración: Por la (k, h) -convexidad de f , tenemos que:

$$f(ak(t) + bk(1 - t)) \leq f(a)k(t) + f(b)k(1 - t) \quad (I)$$

$$f(ak(1 - t) + bk(t)) \leq f(a)k(1 - t) + f(b)k(t) \quad (II)$$

Sumando (I) y (II) se obtiene que:

$$f(ak(t) + bk(1 - t)) + f(ak(1 - t) + bk(t)) \leq f(a)[h(t) + h(1 - t)] + f(b)[h(t) + h(1 - t)]$$

Así,

$$f(ak(t) + bk(1 - t) + ak(1 - t) + bk(t)) \leq [h(t) + h(1 - t)][f(a) + f(b)]$$

Luego,

$$f(a + b(k(t) + k(1 - t))) \leq [h(t) + h(1 - t)][f(a) + f(b)]$$

■

Corolario 3.11 Con la hipótesis anteriores tenemos que f es $(k, f \circ k)$ -convexa.

Demostración: En efecto, por la subaditividad de f , tenemos:

$$\begin{aligned} f(ak(t) + bk(1 - t)) &\leq f(ak(t)) + f(bk(1 - t)) \\ &\leq f(a)f(k(t)) + f(b)f(k(1 - t)) \end{aligned}$$

■

3.4. Funciones (k, h) -Convexa y Conjuntos k, h -Convexos

En esta sección presentaremos algunos resultados que relacionan los conceptos de funciones (k, h) -convexas y conjuntos k, h -convexos. En lo que sigue, seguiremos considerando que h y k son funciones no negativas con dominios en el intervalo $(0, 1)$.

Proposición 3.12 Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función (k, k) -convexa con $k \geq 0$, entonces el Epígrafo de f , $\text{epif} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D, y \geq f(x)\}$ es un conjunto k -convexo.

Demostración: Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{epif}$. Queremos ver que $k(t)(x_1, y_1) + k(1-t)(x_2, y_2) \in \text{epif}$

En efecto, por la (k, k) -convexidad de f , se tiene que:

$$\begin{aligned} f(k(t)x_1 + k(1-t)x_2) &\leq h(1-t)f(x_2) + h(t)f(x_1) \\ &\leq +h(1-t)y_2 + h(t)y_1 \end{aligned}$$

Es decir $(k(1-t)x_2 + k(t)x_1, h(1-t)y_2 + h(t)y_1) \in \text{epif}$. ■

Proposición 3.13 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función (k, h) -convexa con $h(t) = t$ y definamos $f^c = \{(x, y) \in D : f(x) \leq c\}$. Entonces f^c es un conjunto k -convexo para todo $c \in \mathbb{R}$

Demostración: Sean $x, y \in f^c \subseteq D$. De la (k, h) -convexidad de f , se tiene que:

$$\begin{aligned} f(k(t)x + k(1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ &\leq tc + (1-t)c \\ &= c \end{aligned}$$

De donde concluimos que $k(t)x + k(1-t)y \in D$ ■

Proposición 3.14 Si D es un subconjunto k -convexo de X y $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función afín (k, h) -convexa, entonces $f(D)$ es h -convexo en \mathbb{R} .

Demostración: Sean $y_1, y_2 \in f(D)$. Queremos ver que $h(t)y_1 + h(1-t)y_2 \in f(D)$.

En efecto, como $y_1, y_2 \in f(D)$, existen $x_1, x_2 \in D$ tal que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Por ser f una función afín (k, h) -convexa, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(k(1-t)x_1 + k(t)x_2) &= h(1-t)f(x_2) + h(t)f(x_1) \\ &= h(1-t)y_2 + h(t)y_1 \end{aligned}$$

De donde concluimos que $h(t)y_1 + h(1-t)y_2 \in f(D)$, es decir $f(D)$ es un conjunto h -convexo. ■

3.5. Desigualdad del tipo Hermite-Hadamard y Fejér para Funciones (k, h) -Convexas

A continuación, probaremos una nueva desigualdad de Hermite-Hadamard y Fejér para funciones del tipo (k, h) -convexas.

Para lo que sigue, $D \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto k -convexo.

Teorema 3.15 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función (k, h) -convexa con $h(1/2) > 0$. Fijemos $a < b$ con $[a, b] \subset D$ y sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa, simétrica con respecto a $\frac{a+b}{2}$. Entonces,*

$$\frac{f(k(1/2)(a+b))}{2h(1/2)} \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (10)$$

Demostración: Supongamos que $x = (1-t)b + ta$, $y = (1-t)a + tb$ con $t \in (0, 1)$.

Para $t = 1/2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(k(1/2)(a+b)) &= f(k(1/2)(x+y)) \\ &\leq h(1/2)[f((1-t)b + ta) + f((1-t)a + tb)] \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{f(k(1/2)(a+b))}{2h(1/2)} g((1-t)b + ta) \\ \leq [f((1-t)b + ta) + f((1-t)a + tb)] g((1-t)b + ta) \end{aligned}$$

Como g es simétrica con respecto a $\frac{a+b}{2}$, tenemos que:

$$g((1-t)b + ta) = g((1-t)a + tb)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{f(k(1/2)(a+b))}{2h(1/2)} g((1-t)b + ta) &\leq f((1-t)b + ta)g((1-t)b + ta) \\ &\quad + f((1-t)a + tb)g((1-t)a + tb) \end{aligned}$$

De donde, concluimos que:

$$\frac{f(k(1/2)(a+b))}{2h(1/2)} \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

■

Corolario 3.16 (Desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones (k, h) -convexas) Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función (k, h) -convexa con $h(1/2) > 0$. Fijemos $a < b$ con $[a, b] \subset D$. Entonces

$$\frac{f(k(1/2)(a+b))}{2h(1/2)} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Demostración: Considere $g = 1$ en el Teorema 3.15.

■

Por otra parte, si $k(t) = t^{1/s}$ y $h(t) = t$, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.17 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función s -orlicz convexa y a, b, g satisfacen las condiciones del Teorema 3.15. Entonces,

$$f\left(\frac{a+b}{2^{1/s}}\right) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Teorema 3.18 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función (k, h) -convexa con $h(1/2) > 0$. Fijemos $a < b$ con $[a, b] \subset D$ y sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa, simétrica con respecto a $\frac{a+b}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h(1/2)} \int_0^1 f(k(1/2)[k(t) + k(1-t)](a+b))g(ta + (1-t)b)dt \\ & \leq \int_0^1 f(k(1-t)b + k(t)a)g((1-t)b + ta)dt[f(a) + f(b)] + \int_0^1 h(t)g((1-t)b + ta)dt \end{aligned}$$

Demostración: Pongamos $x = k(1-t)b + k(t)a$, $y = k(1-t)a + k(t)b$, con $t \in (0, 1)$.

Para $t = 1/2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(k(1/2)(x+y)) & \leq f(k(1/2)[k(t) + k(1-t)](a+b)) \\ & \leq h(1/2)[f(k(1-t)b + k(t)a) + f(k(1-t)a + k(t)b)] \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $g((1-t)b+ta)$ y considerando el hecho de que $g((1-t)b+ta) = g((1-t)a+tb)$, tenemos que:

$$f(k(1/2)[k(t) + k(1-t)](a+b))g((1-t)b+ta) \leq h(1/2)[f(k(1-t)b+k(t)a)g(k(1-t)b+k(t)a) + f(k(1-t)a+k(t)b)g((1-t)a+tb)]$$

Integrando con respecto a t en $(0, 1)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(k(1/2)[k(t) + k(1-t)](a+b))g((1-t)b+ta)dt \\ \leq 2h(1/2) \int_0^1 f(k(1-t)b+k(t)a)g((1-t)b+ta)dt \quad (I) \end{aligned}$$

Por la (k, h) -convexidad de f y por el hecho de que $a, b \in \text{Dom}f$, tenemos que:

$$f(k(1-t)b+k(t)a) \leq h(1-t)f(b) + h(t)f(a)$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $g((1-t)b+ta)$ e integrando con respecto a t en el intervalo $(0, 1)$, obtenemos que:

$$\int_0^1 f(k(1-t)b+k(t)a)g((1-t)b+ta)dt \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(t)g((1-t)b+ta)dt \quad (II)$$

De (I) y (II), se concluye lo que queríamos.

Corolario 3.19 Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función (k, h) -convexa con $h(1/2) > 0$. Elijamos $a, b \in D$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h(1/2)} \int_0^1 f(k(1/2)[k(t) + k(1-t)](a+b))dt &\leq \int_0^1 f(k(1-t)b+k(t)a)dt \\ &\leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(t)dt \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos la segunda desigualdad de Hermite-Hadamard para funciones (k, h) -convexas.

(k, h) - Fuertemente Convexas

Habiendo hecho un estudio pormenorizado de las nociones y propiedades de funciones convexas, fuertemente convexas, h -convexas, h -fuertemente convexas y (k, h) -convexas, hemos llegado al punto en el que nos planteamos el paso siguiente el cual consiste en considerar una nueva clase de funciones a la que llamaremos funciones (k, h) -fuertemente convexas.

Nuestro principal objetivo es presentar resultados que relacionan esta nueva noción con las funciones (k, h) -convexas que fueron estudiadas en el capítulo anterior, y presentar una versión de desigualdad de Hermite-Hadamard para esta nueva clase de funciones.

En lo que sigue, $(X, \|\cdot\|)$ denotará un espacio con producto interno, D un subconjunto k -convexo y c una constante positiva.

4.1. Definición de Funciones (k, h) -Fuertemente Convexas

Definición 4.1 Sea X un espacio vectorial real y sean $k, h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Supongamos que $D \subseteq X$ es un subconjunto k -convexo de X . Decimos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (k, h) -fuertemente convexa con módulo $c > 0$, si para todo $x, y \in D$ y $t \in (0, 1)$

$$f(k(t)x + k(1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - ck(t)k(1-t)\|x - y\|^2.$$

4.2. Relación entre Funciones (k, h) -Convexa y (k, h) -Fuertemente Convexa

En esta sección, presentaremos un resultado que relaciona a las funciones (k, h) -convexas y a las funciones (k, h) -fuertemente convexa en espacios con producto interno.

A continuación, presentamos un lema que no servirá como herramienta para la demostración de nuestro principal teorema en esta sección.

Lema 4.1 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio con producto interno. Sean $h, k : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$. Dos funciones con las siguientes condiciones:*

1. $h(t) \geq k(t), \quad \forall t \in (0, 1)$
2. $k(t) \leq 1/2, \quad \forall t \in (0, 1)$

Si $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ es (k, h) -convexa, entonces $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = g(x) + c\|\cdot\|^2$ es (k, h) -fuertemente convexa con módulo c , para todo $x \in D$.

Demostración: Supongamos que $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ es (k, h) -convexa. Antes de iniciar nuestra demostración, consideremos los siguientes hechos:

1. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
2. $\|k(t)x + k(1-t)y\|^2 = k^2(t)\|x\|^2 + 2k(t)k(1-t)\langle x, y \rangle + k^2(1-t)\|y\|^2$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 f(k(t)x + k(1-t)y) &= g(k(t)x + k(1-t)y) + c\|k(t)x + k(1-t)y\|^2 \\
 &\leq h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c[k^2(t)\|x\|^2 + 2k(t)k(1-t)\langle x, y \rangle \\
 &\quad + k^2(1-t)\|y\|^2] \\
 &= h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c[k^2(t)\|x\|^2 + k(t)k(1-t)\|x\|^2 \\
 &\quad + k(t)k(1-t)\|y\|^2 + k(1-t)\|y\|^2 - k(t)k(1-t)\|x - y\|^2] \\
 &= h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c[k(t)\|x\|^2(k(t) + k(1-t)) \\
 &\quad + k(1-t)\|y\|^2(k(t) + k(1-t)) - k(t)k(1-t)\|x - y\|^2] \\
 &\leq h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c[k(t)\|x\|^2 + k(1-t)\|y\|^2 \\
 &\quad - k(t)k(1-t)\|x - y\|^2] \\
 &= h(t)g(x) + h(1-t)g(y) + c[h(t)\|x\|^2 + h(1-t)\|y\|^2 \\
 &\quad - k(t)k(1-t)\|x - y\|^2] \\
 &= h(t)[g(x) + c\|x\|^2] + h(1-t)[g(y) + c\|y\|^2] - ck(t)k(1-t)\|x - y\|^2 \\
 &= h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - ck(t)k(1-t)\|x - y\|^2
 \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que f es (k, h) -fuertemente convexa. ■

Lema 4.2 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio con producto interno. Sean $h, k : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$. Dos funciones con las siguientes condiciones:

1. $h(t) \leq k(t), \quad \forall t \in (0, 1)$
2. $k(t) \geq 1/2, \quad \forall t \in (0, 1)$

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es (k, h) -fuertemente convexa con módulo c , entonces $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - c\|\cdot\|^2$ es (k, h) -convexa, para todo $x \in D$.

Demostración: Supongamos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es (k, h) -fuertemente convexa con módulo c .

Observemos que: $1 - k(t) - k(1 - t) = 1 - [k(1 - t) + k(t)] \leq 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 g(k(t)x + k(1-t)y) &= f(k(t)x + k(1-t)y) - c\|k(t)x + k(1-t)y\|^2 \\
 &\leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - ck(t)k(1-t)\|x - y\|^2 - c\|k(t)x + k(1-t)y\|^2 \\
 &= h(t)[g(x) + c\|x\|^2] + h(1-t)[g(y) + c\|y\|^2] - ck(t)k(1-t)\|x - y\|^2 \\
 &\quad - c[k^2(t)\|x\|^2 + 2k(t)k(1-t)\langle x, y \rangle + k^2(1-t)\|y\|^2] \\
 &= h(t)[g(x) + c\|x\|^2] + h(1-t)[g(y) + c\|y\|^2] - ck(t)k(1-t)\|x\|^2 \\
 &\quad - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 - [k^2(t)\|x\|^2 + 2k(t)k(1-t)\langle x, y \rangle + k^2(1-t)\|y\|^2] \\
 &= [h(t)g(x) + h(1-t)g(y)] + h(t)c\|x\|^2 + h(1-t)c\|y\|^2 \\
 &\quad - ck(t)k(1-t)[\|x\|^2 + \|y\|^2] - c[k^2(t)\|x\|^2 + k^2(1-t)\|y\|^2] \\
 &\leq [h(t)g(x) + h(1-t)g(y)] + k(t)c\|x\|^2 + k(1-t)c\|y\|^2 \\
 &\quad - ck(t)k(1-t)[\|x\|^2 + \|y\|^2] - c[k^2(t)\|x\|^2 + k^2(1-t)\|y\|^2] \\
 &= [h(t)g(x) + h(1-t)g(y)] + k(t)c\|x\|^2 + k(1-t)c\|y\|^2 - ck(t)k(1-t)\|x\|^2 \\
 &\quad - ck(t)k(1-t)\|y\|^2 - ck^2(t)\|x\|^2 - ck^2(1-t)\|y\|^2 \\
 &= [h(t)g(x) + h(1-t)g(y)] + k(t)c\|x\|^2 + k(1-t)c\|y\|^2 \\
 &\quad - k(t)c\|x\|^2[k(1-t) + k(t)] - k(1-t)c\|y\|^2[k(1-t) + k(t)] \\
 &= [h(t)g(x) + h(1-t)g(y)] + k(t)c\|x\|^2 + k(1-t)c\|y\|^2 \\
 &\quad - [k(1-t) + k(t)][k(t)c\|x\|^2 + k(1-t)c\|y\|^2] \\
 &= [h(t)g(x) + h(1-t)g(y)] + [k(t)c\|x\|^2 + k(1-t)c\|y\|^2][1 - k(t) - k(1-t)]
 \end{aligned}$$

■

Teorema 4.3 Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio con producto interno. Sean $h, k : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ dos funciones con condiciones descritas en el lema 4.1 y con $h(1/2) = k(1/2) = 1/2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio con producto interno
2. Para todo $c \geq 0$ y para cada función (k, h) -convexa, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$
3. $\|\cdot\|^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es (k, h) -fuertemente convexa con módulo 1

Demostración: (1) \rightarrow (2) Resultado inmediato del lema 4.1

Para (2) \rightarrow (3) Supongamos $g = 0$ (Claramente g es (k, h) -convexa).

Luego $f = 0 + c\|\cdot\|^2$ es (k, h) -fuertemente convexa con módulo c .

Esto es,

$$c\|k(t)x + k(1-t)y\|^2 \leq h(t)c\|x\|^2 + h(1-t)c\|y\|^2 - ck(t)k(1-t)\|x-y\|^2$$

Así,

$$\|k(t)x + k(1-t)y\|^2 \leq h(t)\|x\|^2 + h(1-t)\|y\|^2 - k(t)k(1-t)\|x-y\|^2$$

De donde $\|\cdot\|^2$ es (k, h) -fuertemente convexa con módulo 1.

Para (3) \rightarrow (1) fijemos $t = 1/2$, de (I) tenemos que:

$$\|k(1/2)x + k(1/2)y\|^2 \leq h(1/2)\|x\|^2 + h(1/2)\|y\|^2 - k(1/2)k(1/2)\|x-y\|^2$$

Así,

$$1/4\|x+y\|^2 \leq 1/2\|x\|^2 + 1/2\|y\|^2 - 1/4\|x-y\|^2$$

De donde,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Para la desigualdad inversa, considere $u = x+y$; $v = x-y$ ■

Corolario 4.4 Sean f, k, h funciones descritas con las condiciones del teorema 4.3 y además k con las condiciones adicionales:

1. $k(t) \geq t$ con $t \in [0, 1/2]$
2. $k(t) \geq 1-t$ con $t \in (1/2, 1]$

Entonces,

$$f(k(t)x + k(1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - c(t)(1-t)\|x - y\|^2$$

Demostración: En efecto, observe que $(t)(1-t) \leq k(t)k(1-t)$ ■

4.3. Una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para Funciones (k, h) -Fuertemente Convexas

A continuación, presentaremos una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones (k, h) -fuertemente convexas.

Supongamos que $k : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in (0, 1)$, y $\{a, b\} \in D$. Para efectos de simplicidad en los resultados que se expondrán, en lo que sigue consideraremos la siguiente notación $k_{a,b}(t)$ para referirnos a la combinación $k(t)a + k(1-t)b$.

Teorema 4.5 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $D \subseteq X$ un conjunto k -convexo de X y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función (k, h) -fuertemente convexa integrable, con módulo c . Supongamos que $h(1/2) > 0$ y k, h son funciones integrables. Si $a < b$ es tal que $[a, b] \subseteq D$ entonces*

$$\frac{\int_0^1 f((k(1/2)[k_{a,a}(t) + k_{b,b}(t)])dt + c(k(1/2))^2 \|a - b\|^2 \int_0^1 (k(t)(1 + k(1-t))dt}{2h(1/2)}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 f(ak(t) + bk(1-t))dt \\ &\leq (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t)dt - c\|a - b\|^2 \int_0^1 k(t)k(1-t)dt \end{aligned}$$

Demostración: Para $t \in (0, 1)$, pongamos $x = k_{a,b}(t)$ y $y = k_{b,a}(t)$.

$$\begin{aligned} &f(k(1/2)(ak(t) + k(1-t)b) + k(1/2)(k(1-t)a + k(t)b)) \\ &= f(k(1/2)[ak(t) + bk(1-t) + k(1-t)a + k(t)b]) \\ &= f(k(1/2)(k(t) + k(1-t))(a + b)) \end{aligned}$$

Por la (k, h) -fuertemente convexidad de f , tenemos que:

$$f(k(1/2)(k(t) + k(1-t))(a + b)) \leq h(1/2)f(x) + h(1/2)f(y) - c(k(1/2))^2 (y - x)^2$$

$$\begin{aligned} & f(k(1/2)(k(t) + k(1-t))(a+b)) \leq h(1/2)f(x) + h(1/2)f(y) - c(k(1/2))^2 \|y-x\|^2 \\ = & h(1/2)f(ak(t) + k(1-t)b) + h(1/2)f(k(1-t)a + k(t)b) \\ & - c(k(1/2))^2 (k(t) + k(1-t))^2 \|a-b\|^2 \end{aligned}$$

Integrando esta última desigualdad con respecto a t en el intervalo $(0, 1)$, y teniendo en cuenta que:

$$\int_0^1 f(k(t)a + k(1-t)b) dt = \int_0^1 f(k(1-t)a + k(t)b) dt$$

Obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(k(1/2)(k(t) + k(1-t))(a+b)) dt \\ \leq & 2h(1/2) \int_0^1 f(ak(t) + k(1-t)b) dt - c(k(1/2))^2 \|a-b\|^2 \int_0^1 (k(t) + k(1-t))^2 dt \\ = & 2h(1/2) \int_0^1 f(ak(t) + k(1-t)b) dt - 2c(k(1/2))^2 \|a-b\|^2 \left[\int_0^1 k(t)(1+k(1-t)) dt \right] \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\int_0^1 f(k(1/2)(k(t) + k(1-t))(a+b)) dt + 2c(k(1/2))^2 \|a-b\|^2 \left[\int_0^1 k(t)(1+k(1-t)) dt \right]}{2h(1/2)}$$

$$\leq \int_0^1 f(ak(t) + k(1-t)b) dt$$

Para la otra desigualdad, considerando $x = a$, $x = b$ y aplicando el hecho de que la función f es (k, h) -fuertemente convexa, tenemos que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ak(t) + k(1-t)b) dt & \leq \int_0^1 (h(t)f(a) + h(1-t)f(b) - ck(t)k(1-t)\|b-a\|^2) dt \\ & = (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t)dt - c\|b-a\|^2 \int_0^1 k(t)k(1-t)dt \end{aligned}$$

■

Bibliografía

- [1] H. Angulo, J. Giménez, A. Moros and K. Nikodem, *On strongly h -convex functions*, Ann. Funct. Anal. **2** (2011) 2, pp 85-91.
- [2] Armand, P., Gilbert, J.Ch., Jan-Jégou, S. (2000): A feasible BFGS interior point algorithm for solving strongly convex minimization problems. SIAM J. Optim. 11, 199-222
- [3] M. Boubardelli and S. Varošanec. *Properties of h -convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities*, Comput. Math. Appl. **58(9)** (2009), pp 1869-1877.
- [4] S. S Dragomir and S. Fitzpatrik, *The Hadamard's inequality for s -convex functions in the second sense*, Demonstration Math. **32** (1997), pp 687-696.
- [5] S. S Dragomir, J. Pečarić and L. E. Persson, *Some inequalities of Hadamard type*, Soochow J. Math. **21** (1995), pp 335-341.
- [6] S. S Dragomir and C. E. M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, 2002. (ONLINE: <http://rgmia.vu.edu.au/monographs/>).
- [7] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.
- [8] N. Merentes, K. Nikodem *Remarks on Strongly Convex Functions*, Aequationes Math. **80** (2010), pp 193-199.
- [9] B. Micherda, T. Rajba, *On Some Hermite-Hadamard-Fejér inequalities for (k, h) -convex Functions*, (Nombre de la revista). **12/4**(2012), pp 931-940.

BIBLIOGRAFÍA

- [10] A. Moros, *Funciones h -fuertemente convexas*, 2012, Tesis de Maestría
- [11] C. P. Niculescu and L. E. Persson, *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach*, CMS Books in Mathematics vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [12] K. Nikonem and Zs. Páles, *Generalized Convexity and Separation Theorems*, *J. Conv. Anal.* **14/2** (2007), pp 239-242.
- [13] K. Nikonem, Zs. Páles, *Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions*, *Banach J. Math. Anal.* **5** (2011) 1, pp 83-87.
- [14] E. Polovinkin, *Strongly convex analysis*, *Sbornik Mathematics* **187/2** (1996), pp 259-286.
- [15] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions*, *Soviet Math. Dokl.* **7** (1966), pp 72-75.
- [16] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, *On Some New Inequalities of Hadamard Type Inequalities Involving h -Convex Functions*, *Acta Math. Univ. Comenianae*. Vol LXXIX, 2, (2010), pp 265-272.
- [17] M. Z. Sarikaya, A. Saglam and H. Yildirim, *On Some Hadamard-Type Inequalities for h -Convex Functions*, *J. Math. Ineq.* Vol 2, No 3 (2008), pp 335-341.
- [18] J. P. Vial, *Strong convexity of set and functions*, *J. Math. Economy* **9** (1982), pp 187-205.
- [19] S. Varošanec. *On h -convexity*, *J. Math. Appl.* **326** (2007), pp 303-311.
- [20] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, (1983).
- [21] G. Bachman, L. Narici, *Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1966.
- [22] O. Hölder, *Über einen Mittelwertsatz*, *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen* (1889).
- [23] J. L. W. Jensen, *Om Konvekse funktioner og Uligheder mellem Middelveerdier*, *Nyt Tidsskrift for Mathematik*, 16B, 1(1905) pp 175-193.
- [24] J. L. W. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, *Acta Math.* 39(1906), pp 175-193.
- [25] O. Stolz, *Grundzüge der Differential und Integralrechnung*, Vol.1 Teubner, Leipzig, 1893.
- [26] J.S. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, *J. Math. Pures Appl.* 58 (1893) pp 175-215.
- [27] Ch. Hermite, *Sur deux limites d'une intégrale définie*, *Mathesis* 3 (1883), 82.

BIBLIOGRAFÍA

- [28] E. F. Beckenbach, *On generalized convex functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 43(1937), pp 362-371.
- [29] D. S. Mitrinović, J. Pečarič, *Note on a class of functions of Godunova and Levin*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Can 12 (1990), pp 33-36.
- [30] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, 2nd Edition, 1952, Reprinted 1988.
- [31] A. W. Roberts and D. E. Varberg, *Convex Functions*, Academic Press, New York-London, (1973).
- [32] B. Simon, *Convexity: analytic viewpoint*, Cambridge Tracts in Mathematics, 187, Cambridge University Press, 2011.
- [33] J. González, J. Ortega *Cálculo V (Análisis Numérico)*, Universidad Nacional Abierta, Caracas, 1984.
- [34] H. Rademacher, *Über partielle und totale Differenzierbarkeit*, Math. Ann. 89(1919), pp 340-359.
- [35] G. R. Roa, *Funciones Fuertemente Convexas y Fuertemente Midconvexas*, Trabajo especial de grado para optar al título de Licenciado en Matemática, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Octubre 2011.
- [36] G. Vitali, *Sulle Funzioni Integrali*. Atti. Acc. Sci. Torino, 40 (1904-1905) 1021-1034.
- [37] N. Merentes y S. Rivas, *El desarrollo de función convexa*, XXVI Escuela Venezolana de Matemáticas. Venezuela 2013.
- [38] K. Baron, J. Matkowski, K. Nikodem, *A sandwich with convexity*, Math. Pannonic 5/1 (1994) pp 139-144.
- [39] B. Escobar, *Algunas Teoremas de Separación de Funciones*, Trabajo de Ascenso. Categoría Asistente, Universidad Nacional Abierta. Caracas 2001.
- [40] J. B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Fundamentals of convex analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.
- [41] P. Armand, G. J. Ch. Jan-Jégou. S, *A Feasible BFGS interior point algorithm for solving strongly convex minimization problems*, SIAM J. Optim. 11 (2000), 199-222.
- [42] S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, 2000. (ONLINE: <http://rgmia.vu.edu.au/monographs/>).

BIBLIOGRAFÍA

- [43] H. Hudzik, L. Maligranda, *Some remarks on s -convex functions*, *Aequationes Math* 48 (1994) pp 100-111.
- [44] W. W. Breckner, *Rational s -convexity. A generalized Jensen convexity*. Club University Press, 2011.
- [45] W. Orlicz, *A note on modular spaces. I*. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* 9 (1961) 157-162.
- [46] D. S. Mitrinovič, J. Pečarič, *Note on a class of functions of Godunova and Levin*, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Can* 12(1990), pp 33-36.
- [47] Armand P. Gilbert. J.Ch, Jan-Jégou. S, *A feasible BFGS interior point algorithm for solving strongly convex minimization problems*, *SIAM J. Optim* 11(2000), pp 199-222.
- [48] S. S. Dragomir, S. Fitzpatrick, *s -Orlicz convex functions in linear spaces and Jensens discrete inequality*, *J. Math. Anal. Appl.* 210, 2(1997), pp 419-439.

www.bdigital.ula.ve