Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Grupo de Análisis Funcional

El Teorema Del Punto Fijo De Jungck Y Algunas Generalizaciones.

Wilmer Eduardo Barrera Yayes

Trabajo de Grado para Obtener el Título de
M. Sc. en Matemáticas.

Tutor: M. Sc. José R. Morales.

Mérida, 16 de febrero de 2014

Índice general

Introducción

La teoría métrica del punto fijo es una de las ramas de la Matemática que posee una cantidad considerable de aplicaciones en otras áreas de investigación; como por ejemplo, la teoría de juegos, probabilidades, ecuaciones diferenciales e integrales, sistemas dinámicos, teoría de fractales entre otras.
En el año 1922 S. Banach [4], introduce su famoso resultado conocido hoy día como Principio de Contracción de Banach (PCB), el cual fue novedoso por su prueba tan sencilla y elegante usando las iteraciones de Picard. Este resultado establece lo siguiente.

Sea f una aplicación definida sobre espacio un métrico completo (X, d) a valores en sí mismo, en el cual para todo $x, y \in X$ existe una constante $a \in (0, 1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq a \cdot d(x, y)$. Entonces f posee un único punto fijo en X.

Debido a la importancia de este resultado, varios autores comenzaron a dar generalizaciones del mismo en diversos caminos, tal es el caso de E. Rakotch [26] quien probó un teorema de punto fijo a partir del (PCB) sustituyendo la constante de contracción por una función monótona decreciente; A. Branciari [5], quien generalizó el (PCB) considerando un nuevo tipo de contracción con integrales; M. S. Khan, S. Swaleh y S. Sessa [10] aportaron otro resultado a partir del (PCB), en donde usaron una función de control la cual llamaron función que altera la distancia; entre otros.

En el año 1975 había sido de interés estudiar teoremas de punto fijo en común para un par o familias de aplicaciones sobre un espacio métrico. Así mismo, Mohamed Akkouchi [12] comienza su exposición indicando que en estos estudios es conveniente tener presente las siguientes condiciones:

- Condiciones contractivas.

- Continuidad o una forma débil de continuidad de algunas o todas las aplicaciones involucradas.

- Alguna contención entre los rangos de las funciones.

- Condiciones topológicas, como completitud (o compacidad) del espacio métrico o de los rangos de algunas o todas las aplicaciones en cuestión.

- Conmutatividad o una forma débil de conmutatividad entre algunas o todas las aplicaciones.

En el año 1976 G. Jungck [6] introdujo un teorema de punto fijo en común para dos aplicaciones conmutativas, lo cual permitió generalizar el Principio de Contracción de Banach. Este resultado establece lo siguiente.

Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f, g : X \to X$ dos aplicaciones que satisfacen:

(i) $g(X) \subseteq f(X)$.

(ii) f **es una función continua.**

(iii) Existe $c \in (0, 1)$ **tal que**

$$d(g(x), g(y)) \leq c \cdot d(f(x), f(y)), \ \forall \ x, y \in X.$$

(iv) f **y** g **son conmutativas.**

Entonces f **y** g **tienen un único punto fijo en común; es decir, existe un único** $z \in X$ **tal que** $f(z) = z = g(z)$.
Es claro que si $f(x) = x$ **para todo** $x \in X$**, entonces se obtiene a partir del resultado anterior, el Principio de Contracción de Banach**.

El objetivo principal de este trabajo es introducir nuevas generalizaciones del teorema del punto fijo de Jungck debilitando sus hipótesis; es decir, considerando un nuevo tipo de contracción que hemos llamado Contracción de Jungck Generalizada; eliminando en la medida de lo posible tanto la continuidad de las funciones como la contención de sus rangos. En algunos casos se suprimirá la completitud del espacio. Finalmente, utilizaremos algunas nociones más débiles de conmutatividad, las cuales se estudiarán en el capítulo 3.

Este trabajo ha sido dividido en cuatro capítulos para facilitar su comprensión. Un resumen de lo que se verá a continuación es lo siguiente:

Capítulo 1

Consta de conceptos preliminares con respecto a la teoría de los espacios métricos que serán usados en los capítulos posteriores. Se enuncia y se demuestra una generalización del Principio de Contracción de Banach, del cual se obtienen como consecuencia varios resultados clásicos de la teoría métrica del punto fijo.

Capitulo 2

Se enuncia y se demuestra el teorema del punto fijo de Jungck. Se establece una generalización del mismo y se obtienen como consecuencias varios resultados en la misma dirección del capítulo 1.

Capitulo 3

Se hace un estudio de los conceptos que generalizan la conmutatividad, tales como: funciones débilmente conmutativas, funciones compatibles, funciones R-débilmente conmutativas, funciones débilmente compatibles, funciones ocasionalmente débilmente compatibles, entre otras. Así mismo, contiene ejemplos, comentarios y relaciones entre algunos de esos conceptos.

Capitulo 4

Se comienza con la demostración de uno de los resultados más importantes de este proyecto, en el cual se establecen las condiciones mínimas requeridas para garantizar la existencia de un único punto fijo en común para un par de aplicaciones. A partir de este, se condicionan los escenarios para obtener varios resultados que generalizan el teorema del punto fijo de Juncgk.

1

Preliminares

Este capítulo consta de dos secciones. En la primera sección se hará referencia a algunas definiciones y resultados que serán necesarios para el desarrollo de este trabajo. La mayoría de los resultados de esta sección están presentados sin sus respectivas demostraciones, ya que son resultados clásicos del análisis y la topología.
En la segunda sección abordaremos una parte de lo que encierra la teoría del punto fijo para una función de un espacio métrico completo en sí mismo. Introduciremos y demostraremos un resultado de punto fijo en el cual se han usado las ideas de E. Rakotch [26] y M.S. Khan, S. Swaleh junto con S. Sessa [10]. Cabe resaltar que como consecuencia obtendremos varios resultados de punto fijo, entre estos, el Principio de Contracción de Banach, el Teorema 2.1 en [5], el Teorema 3 en [10] así como también una combinación entre las ideas en los resultados de A. Branciari y E. Rakotch; entre otros.

1.1. Nociones fundamentales de la teoría de los espacios métricos

EL concepto de métrica, permite incorporar a un conjunto (no vacío), una estructura explícita asociada a la noción de cercanía.

Definición 1.1.1 (A. Tineo, [31]). *Sean X un conjunto (no vacío) y d una función real sobre $X \times X$, tal que para todo $x, y, z \in X$ se cumplen las siguientes propiedades:*

d_1) $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

d_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

d_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

*La función d se llama **métrica** o **distancia** sobre X, y X junto con la métrica d se llama un **espacio métrico**, el cual es denotado por (X,d).*

Ejemplos 1.1.2. *(i) En cualquier conjunto X se puede definir la siguiente métrica:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y. \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

*Esta métrica es denominada la **métrica discreta**.*

(ii) Sobre $\mathbb{R}$ la métrica usual o euclidiana, es aquella función que asocia a todo par de puntos el valor absoluto de su diferencia; es decir, $d(x,y) = |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) En $\mathbb{R}^n$, la métrica usual o euclidiana coincide con nuestra idea intuitiva de distancia en el espacio y se define como

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \tag{1.1}$$

Siendo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Es claro que d satisface (d_1) y (d_2) de la Definición 1.1.1. Por otro lado, si $a_i = x_i - z_i$ y $b_i = z_i - y_i$, para $i = 1, \ldots, n$ entonces (d_3) es equivalente a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Pero elevando al cuadrado en ambos lados de (1.2) se obtiene la siguiente forma equivalente

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3}$$

Ahora bien (1.3) se verifica a partir del siguiente hecho. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot x + b_i)^2 = A \cdot x^2 + 2 \cdot H \cdot x + B \geq 0$$

de modo que

$$H^2 \leq A \cdot B$$

donde

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad H = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Por lo tanto d definida en (1.1) es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, (1.3) es conocida como la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$.

(iv) Sobre $\mathbb{C}$, el plano complejo, la métrica usual es de la misma forma que sobre $\mathbb{R}^2$. Si $z = x+iy$

y $z' = x' + iy'$ (x, y, x', y' reales), entonces

$$d(z,z') = |z - z'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Cuando se dota con la métrica usual, entonces tanto $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}^2$ son esencialmente el mismo espacio métrico en el cual sólo la notación es diferente. Sin embargo, a diferencia de $\mathbb{R}^2$ el conjunto de los complejos $\mathbb{C}$ posee una estructura algebraica, incluyendo una operación de multiplicación que lo convierte en un cuerpo.

(v) *Sea $B[a,b]$ el conjunto de las funciones reales acotadas sobre el intervalo $[a,b]$. Para $f, g, h \in B[a,b]$, sea*

$$d(f,g) = \sup_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|.$$

Evidentemente d cumple las propiedades (d_1) y (d_2) en la Definición 1.1.1. La propiedad (d_3) se sigue de las desigualdades

$$\sup |\rho(x) + \upsilon(x)| \le \sup(|\rho(x)| + |\upsilon(x)|) \le \sup |\rho(x)| + \sup |\upsilon(x)|.$$

Basta considerar $\rho(x) = f(x) - h(x)$, y $\upsilon(x) = h(x) - g(x)$.

En un espacio métrico X, es necesario saber determinar con toda precisión el concepto intuitivo de aproximación entre sus puntos. De manera más clara, si a es un punto de X y $r \ge 0$ es un número real pondremos:

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in X : d(x,a) < r\} \\ D(a,r) &= \{x \in X : d(x,a) \le r\} \\ S(a,r) &= \{x \in X : d(x,a) = r\} = D(a,r) - B(a,r). \end{aligned}$$

Estos conjuntos son llamados respectivamente la **bola abierta**, la **bola cerrada** y la **esfera**, de centro a y radio r, del espacio métrico (X,d).
Notemos que si $r = 0$, entonces $B(a,r) = \emptyset$, $D(a,r) = \{a\}$ y $S(a,r) = \{a\}$.

Sean (X,d) un espacio métrico y Y un subconjunto de X. Si ρ es la restricción de la métrica d al conjunto $Y \times Y$; es decir, $\rho(x,y) = d(x,y)$ para todo $x, y \in Y$, entonces ρ es la **métrica inducida** por (X,d) sobre Y. El espacio métrico (Y,ρ) es denominado un subespacio (métrico) de (X,d). En el caso de $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, la métrica inducida por $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sobre $\mathbb{Q}$ está dada por

$$\rho(q_1, q_2) = |q_1 - q_2|.$$

Esto define una métrica en $\mathbb{Q}$ que lo hace subespacio de $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.3 (A. Tineo, [31]). *Sea V un espacio lineal sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Una norma definida en V, es una función $\|\cdot\|$: $V \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $\| x \| \geq 0$ y $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$.

(iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

V dotado con esta norma es llamado un **espacio lineal nomado**.
Se puede verificar fácilmente que todo espacio vectorial normado induce una métrica d definida como

$$d(x, y) = \| x - y \| .$$

Definición 1.1.4 (A. Tineo, [31]). *Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico (X, d). Dado un punto $x_0 \in X$, se define la* ***distancia*** *de x_0 a A, como el número $d(x_0, A)$ dado por*

$$d(x_0, A) = \text{ínf}\{d(x_0, a) : a \in A\}.$$

Es claro que si $A = \{a\}$ entonces $d(x_0, A) = d(x_0, a)$.

Sea B un subconjunto no vacío de X; la distancia de A a B denotada por $d(A, B)$ se define por

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Es claro que $d(A, B) = 0$ si $A \cap B \neq \emptyset$

Definición 1.1.5 (A. Tineo, [31]). *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que A es acotado si existe $M \geq 0$ tal que $d(x, y) \leq M$ para todo $x, y \in A$. Si A es acotado y no vacío, se define el diámetro de A; denotado por $\delta(A)$ como*

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Si A no es acotado pondremos $\delta(A) = +\infty$. Claramente $\delta(A) = 0$ si, y sólo si A se reduce a un punto, además $\delta(B) \leq \delta(A)$ si $B \subseteq A$ (B no vacío).

Observación 1.1.6. *Sabemos que en un mismo conjunto X pueden existir métricas diferentes ρ y d; por lo tanto el diámetro de A en (X, d) puede ser distinto al diámetro de A en (X, ρ). Tal es el caso de $\mathbb{R}$ con la métrica usual d, y $\rho = \dfrac{d}{1 + d}$. Entonces $\delta(\mathbb{R}) = 1$ en (X, ρ), pero $\mathbb{R}$ no es acotado en $(\mathbb{R}, d)$.*

Teorema 1.1.7 (A. Tineo, [31]). *Sea (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es acotado.*

(ii) *Para cada $x_0 \in X$, existe $M \geq 0$ (dependiendo de x_0) tal que $d(x, x_0) \leq M$ para cada $x \in A$.*

(iii) *Existen $x_0 \in X$ y $M \geq 0$ tales que $d(x, x_0) \leq M$, para cada $x \in A$.*

Definición 1.1.8 (A. Tineo, [31]). *Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto U de X se dice **abierto** en X (relativo a d) si para cada $x_0 \in U$ existe $r = r(x_0) > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq U$.*

Propiedades 1.1.9. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces*

(i) *X y $\emptyset$ son conjuntos abiertos.*

(ii) *Sea I un conjunto no vacío y sea $\{U_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos abiertos de X. Entonces $U = \bigcup\{U_i : i \in I\}$ es un conjunto abierto de X.*

(iii) *Si U_1 y U_2 son conjuntos abiertos de X, entonces $U = U_1 \cap U_2$ es un conjunto abierto de X.*

Ejemplos 1.1.10. ***(i)*** *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces para todo $a \in X$ y $r > 0$, $B(a, r)$ es un conjunto abierto de X.*

(ii) *Sea (X, d) un espacio métrico discreto. Entonces todo subconjunto A de X es un conjunto abierto en X.*

Definición 1.1.11 (A. Tineo, [31]). *Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto F de X se dice **cerrado** en X (relativo a d) si su complemento $U = X \setminus F$ es un conjunto abierto en X.*

Propiedades 1.1.12. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces*

(i) *X y $\emptyset$ son conjuntos cerrados.*

(ii) *Sea I un conjunto no vacío y sea $\{U_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos cerrados en X. Entonces $U = \bigcap\{U_i : i \in I\}$ es un conjunto cerrado de X.*

(iii) *Si U_1 y U_2 son conjuntos cerrados de X, entonces $U = U_1 \cup U_2$ es un conjunto cerrado en X.*

Definición 1.1.13 (A. Tineo, [31]). *Sea (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Decimos que $x_0 \in X$ es un punto límite de A si, para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $0 < d(x_0, x) < \epsilon$. En otros términos, $B(x_0, \epsilon) \cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$.*

Denotamos por A' al conjunto de puntos límites de A.

Definición 1.1.14 (A. Tineo, [31]). *Sea (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Definimos la clausura del conjunto A, que denotamos por $\overline{A}$, como*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Definición 1.1.15 (A. Tineo, [31]). *Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que una sucesión $(x_n)_n$ en X converge a un elemento $x_0 \in X$ si, para cada $\epsilon > 0$ existe un número entero $N \geq 0$ tal que*

$$d(x_n, x_0) < \epsilon, \quad si\ n > N.$$

Proposición 1.1.16 (M. Searcóid, [28]). *Sean (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $(x_n)_n$ una sucesión en X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$(x_n)_n$ converge a x_0.*

(ii) *$\bigcap\{\overline{\{x_n : n \in S\}} : S \subseteq \mathbb{N}, S \text{ infinito}\} = \{x_0\}$.*

(iii) *$x_0 \in \bigcap\{\overline{\{x_n : n \in S\}} : S \subseteq \mathbb{N}, S \text{ infinito}\}$.*

(iv) *$d(x_0, \{x_n : n \in S\}) = 0$, para todo subconjunto infinito S de $\mathbb{N}$.*

(v) *Dado $\epsilon > 0$ existe un número entero $N \geq 0$, tal que $x_n \in B(x_0, \epsilon)$, para todo $n > N$.*

(vi) *Para todo conjunto abierto A con $x_0 \in A$, existe un número entero $N \geq 0$ tal que $x_n \in A$, para todo $n > N$.*

Usaremos cualquiera de las notaciones, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, y $x_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$; para indicar que la sucesión $(x_n)_n$ converge a x_0.

Ejemplos 1.1.17. ***(i)*** *Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio métrico (X, d) se llama eventualmente constante, si existen un número entero $N \geq 0$ y $x_0 \in X$ tal que $x_n \in \{x_0\}$ para todo $n > N$. Si (X, d) es un espacio métrico discreto, entonces las únicas sucesiones convergentes son las eventualmente constantes.*

(ii) *La sucesión $x_n = \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, en $\mathbb{R}$ con la métrica usual converge a 0, puesto que para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$ y así $x_n \in B(0, \epsilon)$ para todo $n > N$.*

Proposición 1.1.18 (E. Lages Lima, [13]). *Sea (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$x_0 \in A'$.*

(ii) *Para todo $\epsilon > 0$, la bola abierta $B(x_0, \epsilon)$ contiene infinitos puntos de A.*

(iii) *Existe una sucesión de puntos $(y_n)_n$ en A tal que $y_n \neq x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $y_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$.*

Proposición 1.1.19 (E. Lages Lima, [13]). *Sea (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es un conjunto cerrado.*

(ii) *$\overline{A} = A$.*

(iii) Para cada sucesión $(x_n)_n$ de A que converge a un punto x_0 se tiene que $x_0 \in A$.

Definición 1.1.20 (E. Lages Lima, [13]). *Sea (X,d) un espacio métrico y $(x_n)_n$ una sucesión en X acotada. Definimos:*

(i) El límite superior de $(x_n)_n$ como:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_n \sup_{k\geq n} x_k.$$

(ii) El límite inferior de $(x_n)_n$ como:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_n \inf_{k\geq n} x_k.$$

Definición 1.1.21. *La composición $f\circ\phi$, de una sucesión $f:\mathbb{N}\to X$ con una función $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente, será llamada una subsucesión de f. Si denotamos a f por $(x_n)_n$, entonces $f\circ\phi$ es denotada por $(x_{\phi(n)})_n$. La notación usual para $f\circ\phi$ es $(x_{n_k})_k$ donde $n_k=\phi(k)$.*

Es claro que toda sucesión es una subsucesión de ella misma.

Proposición 1.1.22 (E. Lages Lima, [13]). *Sea (X,d) un espacio métrico. Si $(x_n)_n$ es una sucesión acotada de X, entonces existen subsucesiones $(x_{n_k})_k$ y $(y_{n_j})_j$ de $(x_n)_n$ tales que:*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} x_n \quad y \quad \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Definición 1.1.23 (A. Tineo, [31]). *Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio métrico (X,d) se dice de Cauchy, si para cada $\epsilon>0$ existe un número entero $N\geq 0$ tal que $d(x_n,x_m)<\epsilon$, si $n,m>N$.*

Proposición 1.1.24 (A. Tineo, [31]). *Toda sucesión convergente en (X,d) es de Cauchy.*

Proposición 1.1.25 (E. Lages Lima, [13]). *Sean (X,d) un espacio métrico y $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(x_n)_n$ converge en X.

(ii) $(x_n)_n$ tiene una subsucesión convergente en X.

Proposición 1.1.26. *Sean (X,d) un espacio métrico. Si $(x_n)_n\subseteq X$ es una sucesión y $0<a<1$ satisface que*

$$d(x_{n+1},x_n)\leq a\cdot d(x_n,x_{n-1}) \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Entonces $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración: Para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple:

$$d(x_{n+1},x_n)\leq a\cdot d(x_n,x_{n-1}),$$

esto implica que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq a \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq a^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq a^n \cdot d(x_1, x_0).$$

Ahora, sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$; es decir, existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + h$. Entonces

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+h}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots + d(x_{n+h-1}, x_{n+h}) \\ &\leq a^n \cdot d(x_0, x_1) + a^{n+1} \cdot d(x_0, x_1) + a^{n+2} \cdot d(x_0, x_1) + \cdots + a^{n+h-1} \cdot d(x_0, x_1) \\ &= a^n \cdot d(x_0, x_1) \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{h-1}) \\ &= \frac{a^n}{1-a} \cdot (1 - a^h) \cdot d(x_0, x_1) \\ &< \frac{a^n}{1-a} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dado que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{1-a} \cdot d(x_0, x_1) = 0,$$

entonces de (1.4) se concluye que $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy.

■

Proposición 1.1.27 (G. Babu & P.D Sailaja, [3]). *Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Si $(x_n)_n$ no es una sucesión de Cauchy en X, entonces existe $\epsilon > 0$ con el cual podemos encontrar subsucesiones $(x_{n_k})_k$ y $(x_{m_k})_k$ de $(x_n)_n$ con $m_k > n_k > k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \epsilon$, $d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) < \epsilon$ y*

(i) $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \epsilon.$

(ii) $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) = \epsilon.$

(iii) $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) = \epsilon.$

(iv) $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) = \epsilon.$

(v) $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) = \epsilon.$

(vi) $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k+2}) = \epsilon.$

Demostración: Supongamos que $(x_n)_n$ no es una sucesión de Cauchy, entonces a partir de la Definición 1.1.23 existe $\epsilon > 0$ tal que para cada natural $k \in \mathbb{N}$ existen $\overline{m_k}, \overline{n_k} \in \mathbb{N}$ con $\overline{m_k} > k$ y $\overline{n_k} > k$, satisfaciendo

$$d(x_{\overline{m_k}}, x_{\overline{n_k}}) \geq \epsilon. \tag{1.5}$$

A partir de (1.5) es claro que $\overline{m_k} \neq \overline{n_k}$, por lo tanto definimos

$$\begin{aligned} m_k^{'} &= \text{máx}\{\overline{m_k}, \overline{n_k}\} \;\; \forall k \in \mathbb{N} \\ n_k &= \text{mín}\{\overline{m_k}, \overline{n_k}\} \;\; \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Con lo cual es claro que

$$m_k^{'} > n_k > k. \tag{1.6}$$

Por lo tanto

$$d(x_{m_k^{'}}, x_{n_k}) \geq \epsilon. \tag{1.7}$$

para todo número natural k.
Por otro lado, dado que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, entonces para $\epsilon > 0$ existe $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon, \;\; \forall\, n > \overline{k}. \tag{1.8}$$

Ahora bien, para cada número natural $k > \overline{k}$, consideremos $m_k^{'}$ y n_k con $m_k^{'} > n_k > k$ tal que se cumpla (1.7) y definamos el siguiente conjunto

$$I_k = \{p \in \mathbb{N} : p \in [n_k + 1, m_k^{'}] \; y \; d(n_k, p) \geq \epsilon\}.$$

De (1.8) se sigue que $I_k \neq \emptyset$, puesto que $m_k^{'} \in I_k$. Sea $m_k = \text{mín}\{I_k\}$, con lo cual se tiene que m_k es un número natural mayor que n_k y que además satisface

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \epsilon \;\; y \;\; d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) < \epsilon. \tag{1.9}$$

Ahora bien, probemos (i). En efecto, por la desigualdad triangular usando (1.9) se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq d(x_{n_k}, x_{m_k}) \leq d(x_{n_k}, x_{m_k-1}) + d(x_{m_k-1}, x_{m_k}) \\ \epsilon &\leq d(x_{n_k}, x_{m_k}) < \epsilon + d(x_{m_k-1}, x_{m_k}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ en (1.10) se tiene

$$\epsilon \leq \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_{m_k}) \leq \epsilon$$

con lo cual es claro que

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_{m_k}) = \epsilon. \tag{1.11}$$

A continuación, probemos (ii). Para ello notemos que

$$d(x_{n_k}, x_{m_k}) \leq d(x_{n_k}, x_{m_k-1}) + d(x_{m_k-1}, x_{m_k})$$

por lo tanto

$$d(x_{n_k}, x_{m_k}) - d(x_{n_k}, x_{m_k-1}) \leq d(x_{m_k-1}, x_{m_k}). \tag{1.12}$$

De manera análoga

$$d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) \leq d(x_{m_k-1}, x_{m_k}) + d(x_{m_k}, x_{n_k})$$

por lo tanto

$$-d(x_{m_k-1}, x_{m_k}) \leq d(x_{n_k}, x_{m_k}) - d(x_{n_k}, x_{m_k-1}). \tag{1.13}$$

Luego, de (1.12) y (1.13) se sigue

$$|d(x_{n_k}, x_{m_k}) - d(x_{n_k}, x_{m_k-1})| \leq d(x_{m_k-1}, x_{m_k}). \tag{1.14}$$

Así, dado que $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k-1}, x_{m_k}) = 0$ se sigue a partir de (1.11) y (1.14)

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) = \epsilon. \tag{1.15}$$

A continuación, probemos (*iii*). Nuevamente por la desigualdad triangular se tiene

$$d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) \leq d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) + d(x_{n_k-1}, x_{n_k})$$

por lo tanto

$$d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) - d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) \leq d(x_{n_k-1}, x_{n_k}). \tag{1.16}$$

De manera análoga

$$d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) \leq d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_k-1})$$

por lo tanto

$$-d(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \leq d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) - d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}). \tag{1.17}$$

Luego, de (1.16) y (1.17) se sigue

$$|d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) - d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1})| \leq d(x_{n_k-1}, x_{n_k}). \tag{1.18}$$

Así, dado que $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k-1}, x_{n_k}) = 0$ se sigue a partir de (1.15) y (1.18)

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) = \epsilon. \tag{1.19}$$

A continuación, probemos (*iv*). En efecto, por la desigualdad triangular se tiene

$$d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) \leq d(x_{m_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_k+1})$$

por lo tanto

$$d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) - d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq d(x_{n_k}, x_{n_k+1}). \tag{1.20}$$

De manera análoga

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) + d(x_{n_k+1}, x_{n_k})$$

por lo tanto

$$-d(x_{n_k}, x_{n_k+1}) \leq d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) - d(x_{m_k}, x_{n_k}). \tag{1.21}$$

Luego, de (1.20) y (1.21) se sigue

$$|d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) - d(x_{m_k}, x_{n_k})| \leq d(x_{n_k}, x_{n_k+1}). \tag{1.22}$$

Así, dado que $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_{n_k+1}) = 0$ se sigue a partir de (1.11) y (1.22)

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) = \epsilon. \tag{1.23}$$

A continuación, probemos (*v*). Notemos que

$$d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) \leq d(x_{m_k+1}, x_{m_k}) + d(x_{m_k}, x_{n_k+1})$$

por lo tanto

$$d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) - d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) \leq d(x_{m_k}, x_{m_k+1}). \tag{1.24}$$

De manera análoga

$$d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) \leq d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1})$$

por lo tanto

$$-d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) \leq d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) - d(x_{m_k}, x_{n_k+1}). \tag{1.25}$$

Luego, de (1.24) y (1.25) se sigue

$$|d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) - d(x_{m_k}, x_{n_k+1})| \leq d(x_{m_k}, x_{m_k+1}). \tag{1.26}$$

Así, dado que $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) = 0$ se sigue a partir de (1.23) y (1.26)

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) = \epsilon. \tag{1.27}$$

A continuación, probemos (*vi*). En efecto, por la desigualdad triangular se tiene

$$d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) \leq d(x_{m_k+1}, x_{m_k+2}) + d(x_{m_k+2}, x_{n_k+1})$$

por lo tanto

$$d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) - d(x_{m_k+1}, x_{n_k+2}) \leq d(x_{n_k+1}, x_{n_k+2}). \tag{1.28}$$

De manera análoga

$$d(x_{m_k+1}, x_{n_k+2}) \leq d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) + d(x_{n_k+1}, x_{n_k+2})$$

por lo tanto

$$-d(x_{n_k+1}, x_{n_k+2}) \leq d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) - d(x_{m_k+1}, x_{n_k+2}). \tag{1.29}$$

Luego, de (1.28) y (1.29) se sigue

$$|d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) - d(x_{m_k+1}, x_{n_k+2})| \leq d(x_{n_k+1}, x_{n_k+2}) \tag{1.30}$$

Así, dado que $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k+1}, x_{n_k+2}) = 0$ se sigue a partir de (1.27) y (1.30)

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k+2}) = \epsilon. \tag{1.31}$$

■

Definición 1.1.28 (A. Tineo, [31]). *Un espacio métrico (X, d) es completo, si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X.*

Definición 1.1.29 (E. Lages Lima, [13]). *Sea (X,d) un espacio métrico y $K \subseteq X$. Se dice que una colección $C = \{(C_i)_{i\in I}\}$ de conjuntos de X, es un cubrimiento de K, si $K \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i$. Es decir, para cada $x \in K$ existe $i \in I$ tal que $x \in C_i$.*

Si $K \subseteq \bigcup_{i\in I^\star} C_i$ con $I^\star \subset I$, entonces se dice que la colección $C^\star = \{C_i : i \in I^\star\}$ es un subcubrimiento de K. Si cada elemento de la colección C es un conjunto abierto, se dice entonces que C es un cubrimiento abierto de K, del mismo modo se dice que $C^\star$ es un subcubrimiento abierto de K

Definición 1.1.30 (E. Lages Lima, [13]). *Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que $K \subseteq X$ es un conjunto compacto si todo cubrimiento $C = \{(C_i)_{i\in I}\}$ abierto de K posee un subcubrimiento finito para K; es decir,*
$K \subseteq C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup C_{i_3} \cdots \cup C_{i_n}$, siendo $\{i_1, i_2 \cdots i_n\} \subseteq I$

Propiedades 1.1.31. ***(i)*** *Todo conjunto compacto es acotado.*

(ii) *Todo conjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*

(iii) *Si (X,d) es un espacio métrico compacto entonces X es completo.*

(iv) *(X,d) es compacto si, y sólo si toda sucesión de X posee una subsucesión convergente en X.*

Ejemplos 1.1.32. ***(i)*** *Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, entonces todo subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ tal que $K = [a,b]$ es compacto.*

(ii) *Cualquier espacio X que contenga un número finito de puntos claramente es compacto.*

(iii) *Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y sea*

$$K = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}.$$

K es un conjunto compacto.

(iv) *El espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ no es compacto, pues el cubrimiento de $\mathbb{R}$ por conjuntos abiertos*

$$C = \{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\}$$

no posee ningún subcubrimiento finito que cubra a $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.33 (A. Tineo, [31]). *Sean (X,d), (Y,ρ) espacios métricos. Diremos que una función $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall\, x \in X,\ d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Diremos que f es continua en X, si satisface la Definición 1.1.33, para todo $x_0 \in X$.

Proposición 1.1.34 (A. Tineo, [31]). *Sean (X,d), (Y,ρ) espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$ si, y sólo si $(f(x_n))_n$ converge a $f(x_0)$ para cada sucesión $(x_n)_n$ en $X - \{x_0\}$ que converge a x_0*

Definición 1.1.35 (R. P. Pant, [18]). *Sea (X,d) un espacio métrico y $f,g : X \to X$ dos aplicaciones. Diremos que f y g son recíprocamente continuas (RC) si $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(x_0)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(x_0)$, siempre que $(x_n)_n$ sea una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = x_0$, para algún $x_0 \in X$.*

Si f y g son continuas entonces claramente satisfacen la condición de recíprocamente continuas a partir de la Proposición 1.1.34. El siguiente ejemplo revela que el recíproco no necesariamente es cierto, demostrando así que la continuidad recíproca es una generalización propia de la continuidad.

Ejemplo 1.1.36. *Supongamos que el conjunto $X = [2,20]$ está dotado con la métrica usual y sean $f,g : X \to X$ dos aplicaciones dadas por:*

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in (2,5] \\ 1, & x \notin (2,5] \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (2,5] \\ 2, & x \notin (2,5]. \end{cases}$$

Es claro que f y g no son continuas en X. Veamos que f y g son recíprocamente continuas. En efecto, notemos que $\mathbb{L}(f,g) = \{(x_n)_n \in X : \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)\} \neq \emptyset$, pues si $y_n = 2 + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = 4$. Sea $(x_n)_n$ una sucesión arbitraria en $\mathbb{L}(f,g)$, por lo tanto existe $t \in \overline{f(X)} \cap \overline{g(X)} = [4,7]$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t$. A continuación, probaremos que $t = 4$. En efecto, por definición de f y g, y dado que $t \in [4,7]$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (2,5]$ para todo $n > k$. Luego $f(x_n) = x_n + 2$ y $g(x_n) = 2x_n$, de donde se sigue

$$x_n = f(x_n) - 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = t - 2 \tag{1.32}$$

$$x_n = \frac{g(x_n)}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{t}{2}. \tag{1.33}$$

Teniendo en cuenta la unicidad del punto de convergenia de $(x_n)_n$, se sigue a partir de (1.32) y (1.33) que $t-2 = t/2$, por lo tanto $t = 4$ y así, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Tomenos $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de tal forma que $x_n \in (2,5/2]$, de donde se tiene que

$$4 < x_n + 2 < 5, \tag{1.34}$$

$$4 < 2x_n < 5. \tag{1.35}$$

De (1.34) *y* (1.35) *tiene sentido*

$$f(g(x_n)) = 2x_n + 2$$
$$g(f(x_n)) = 2(x_n + 2).$$

Con lo cual se sigue $\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(4)$ *y* $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(4)$. *Por lo tanto f y g son recíprocamente continuas.*

Definición 1.1.37 (E. Lages Lima, [13]). *Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función, $a \in X'$ y supongamos que f está acotada en a. Un número real c es un valor de adherencia de f en el punto a, si existe una sucesión $(x_n)_n$ en $X - \{a\}$ para la cual se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$. Denotaremos por $V(f, a)$ al conjunto de valores de adherencia de f en el punto a.*

Teorema 1.1.38 (E. Lages Lima, [13]). *Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función, $a \in X'$ y supongamos que f está acotada en a. Entonces el conjunto $V(f, a)$ es compacto.*

Definición 1.1.39 (E. Lages Lima, [13]). *Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función, $a \in X'$ y supongamos que f está acotada en a. Definimos el límite superior de f en el punto a, denotado por* $\limsup_{t\to a} f(t)$ *como:*

$$\limsup_{t\to a} f(t) = \max\{x : x \in V(f, a)\}.$$

Proposición 1.1.40. *Sea $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ una función y supongamos que $\limsup_{t\to a} \alpha(t)$ existe para cada $a \in [0, +\infty)$. Si $(x_n)_n$ es una sucesión en $[0, +\infty) - \{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha(x_n) \leq \limsup_{t\to a} \alpha(t).$$

Demostración: Sea $p = \limsup_{n\to\infty} \alpha(x_n)$. Por la Proposición 1.1.22, existe una subsucesión $(\alpha(x_{n_k}))_k$ de $(\alpha(x_n))_n$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(x_{n_k}) = p. \tag{1.36}$$

Ahora bien, dado que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a. \tag{1.37}$$

Luego de (1.36) , (1.37) y por la Definición 1.1.37 se tiene que $p \in V(f, a)$. Así, por la Definición 1.1.39 se sigue que

$$p \leq \limsup_{t\to a} \alpha(t),$$

es decir,

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha(x_n) \leq \limsup_{t\to a} \alpha(t).$$

■

1.2. Principio de Contracción de Banach y Algunas Generalizaciones

El principio de contracción de Banach (PCB), es uno de los resultados más importantes en la teoría métrica del punto fijo. Este provee una técnica para dar solución a gran variedad de problemas aplicados en matemáticas, ciencias e ingeniería, el cual establece lo siguiente.

Teorema 1.2.1 (S. Banach, [4]). *Sean (X,d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación satisfaciendo la siguiente condición:*

$$d(f(x), f(y)) \leq a \cdot d(x,y) \tag{1.38}$$

para todo $x, y \in X$ donde $0 \leq a < 1$. Entonces f tiene un único punto fijo $z \in X$ y para cada $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z$.

La condición (1.38) es llamada Contracción de Banach, siendo a la constante de contracción.

Debido a la importancia de este resultado varios autores comenzaron a dar generalizaciones del mismo y de diversas formas, tal es el caso de E. Rakotch [26] quien probó un teorema de punto fijo a partir del (PCB), sustituyendo la constante de contracción por una función monótona decreciente. Así mismo, M. S. Khan, S. Swaleh y S. Sessa [10], en 1984 aportaron otro resultado a partir del (PCB) considerando un nuevo tipo de contracción, en la cual usaron una función de control la cual llamaron función que altera la distancia.

El propósito de esta sección es obtener un resultado de punto fijo bajo un nuevo tipo de contracción, en el cual se utilizan tanto las ideas de E. Rakotch, quien demostró que el (PCB) tiene lugar cuando la constante a en (1.38), es remplazada por una función monótona decreciente $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0,1)$, así como también se usarán las ideas de M.S. Khan, M. Swalech y S. Sessa. Vale mencionar que se obtendrán como consecuencia varios resultados que generalizan el Principio de Contracción de Banach.
A continuación se dan algunas definiciones y ejemplos que serán pieza clave en el desarrollo de esta sección.

Definición 1.2.2 (M. S. Khan, S. Swaleh y S. Sessa [10]). *Una función $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es llamada una función que altera distancia si cumple las siguientes condiciones:*

(ψ_1) $\psi(0) = 0$.

(ψ_2) *ψ es una función continua y estrictamente creciente.*

Denotaremos por Ψ al conjunto de todas las funciones que alteran distancia.

Ejemplo 1.2.3. *Sea $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la función dada por:*

$$\psi(t) = \frac{t}{1+t}.$$

Entonces

i) $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{t}{1+t} = 0 \Leftrightarrow t = 0.$

ii) Es claro que ψ es continua y además, es estrictamente creciente, puesto que $\psi'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0.$

Por lo tanto $\psi \in \Psi$.

Ejemplo 1.2.4. *Sea $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la función dada por:*

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1+t, & t > 0. \end{cases}$$

Observe que ψ es una función discontinua, por lo tanto $\psi \notin \Psi$.

Ahora bien, si (X, d) es un espacio métrico y $\psi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ para todo $t \geq 0$, entonces la función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ dada por $\rho(x, y) = (\psi \circ d)(x, y)$ define una métrica en X. El siguiente ejemplo ilustra que en general este hecho no siempre es cierto para cada $\psi \in \Psi$.

Ejemplo 1.2.5. *Sean $X = \mathbb{R}_+$, $d(x, y) =\mid x - y \mid$ y $\psi(t) = t^2$ para cada $t \in X$. Entonces la función $(\psi \circ d)(x, y) =\mid x - y \mid^2$ no define una métrica sobre X. Para verificarlo, basta con chequear que falla la condición (d_3) de la Definición 1.1.1, para los números $x = 4, y = 1, z = 2$.*

Definición 1.2.6 (A. Branciari, [5]). *Sea $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función que satisface las siguientes condiciones:*

(φ_1) *φ es integrable Lebesgue con integral finita sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}_+$.*

(φ_2) *φ es no negativa.*

(φ_3) $\displaystyle\int_0^{\epsilon} \varphi(t)dt > 0$ *para cada $\epsilon > 0$.*

Denotaremos por Φ a la clase de todas las funciones que satisfacen las condiciones $(\varphi_1) - (\varphi_3)$.

El siguiente ejemplo demuestra que usando una aplicación $\varphi \in \Phi$ obtenemos una función $\psi \in \Psi$.

Ejemplo 1.2.7. *Sea $\varphi \in \Phi$. Definamos $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por*

$$\psi(s) = \int_0^s \varphi(t)dt \quad \forall\ s \in \mathbb{R}_+.$$

Entonces $\psi \in \Psi$.

A continuación enunciaremos y demostraremos el resultado más importante de esta sección, introducido por José R. Morales y Edixon Rojas en [15]; el cual garantiza existencia y unicidad de puntos fijos para aplicaciones satisfaciendo condiciones contractivas, dependiendo de funciones monótonas decrecientes y usando las funciones que alteran distancia. Como consecuencia podemos extender los teoremas de puntos fijos de E. Rakotch, las condiciones contractivas de tipo integral dadas por A. Branciari, entre otras.

Teorema 1.2.8 (J. R. Morales, E. Rojas, [15])**.** *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación satisfaciendo la siguiente condición:*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \alpha(d(x, y)) \cdot \psi(d(x, y)) \tag{1.39}$$

para todo $x, y \in X$, siendo $\psi \in \Psi$ y $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ una función con

$$\limsup_{t \to a} \alpha(t) < 1, \ \forall \ a > 0. \tag{1.40}$$

Entonces f tiene un único punto fijo $z_0 \in X$ tal que para cada $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z_0$.

Demostración: Sea x_0 un punto arbitrario en X. Definamos la sucesión de iteraciones $x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x_0)$. Se sigue de (1.39) y (1.40)

$$\psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \alpha(d(x_{n-1}, x_n)) \cdot \psi(d(x_{n-1}, x_n)) \tag{1.41}$$
$$< \psi(d(x_{n-1}, x_n)). \tag{1.42}$$

Dado que ψ es una función creciente entonces a partir de (1.42) se tiene que $(d(x_n, x_{n+1}))_n$ es una sucesión decreciente de números reales no negativos, lo cual implica que existe una constante r tal que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r \geq 0$. Probemos que $r = 0$. Supóngase que $r > 0$, entonces tomando límite superior cuando $n \to \infty$ en ambos lados de (1.41), usando (1.40) y la Proposición 1.1.40, se verifica

$$\begin{aligned} 0 < \psi(r) &\leq \limsup_{n\to\infty} \psi(d(x_n, x_{n+1})) \leq \limsup_{n\to\infty} (\alpha(d(x_{n-1}, x_n)) \cdot \psi(d(x_{n-1}, x_n))) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \alpha(d(x_{n-1}, x_n)) \cdot \limsup_{n\to\infty} \psi(d(x_{n-1}, x_n)) \\ &\leq \limsup_{t\to r} \alpha(t) \cdot \psi(r) < \psi(r). \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Así $r = 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Afirmamos que $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en X. En efecto, supóngase que $(x_n)_n$ no es una sucesión de Cauchy, con lo cual existe $\epsilon > 0$ tal que para cada entero k, existen enteros positivos m_k, n_k con $m_k > n_k > k$ siendo $d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \epsilon$ y $d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) < \epsilon$. Así, por la Proposición 1.1.27

se tiene

$$\epsilon = \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k+2}). \tag{1.43}$$

A partir de (1.39) y (1.40) se deduce

$$\psi(d(x_{m_k+1}, x_{n_k+2})) \leq \alpha(d(x_{m_k}, x_{n_k+1})) \cdot \psi(d(x_{m_k}, x_{n_k+1})). \tag{1.44}$$

Tomando límite superior cuando $k \to \infty$ en ambos lados de (1.44), usando (1.40), (1.43) y la continuidad de ψ se tiene

$$\begin{aligned} 0 < \psi(\epsilon) &= \limsup_{k\to\infty} \psi(d(x_{m_k+1}, x_{n_k+2})) \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \cdot\alpha(d(x_{m_k}, x_{n_k+1})) \cdot \limsup_{k\to\infty} \psi(d(x_{m_k}, x_{n_k+1})) \\ &< \psi(\epsilon). \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Así, $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico completo (X, d), por lo tanto existe $z_0 \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = z_0$.
A continuación se prueba que $f(z_0) = z_0$. En efecto, de (1.39) y (1.40) se tiene

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi(d(x_{n+1}, f(z_0))) &\leq \alpha(d(x_n, z_0)) \cdot \psi(d(x_n, z_0)) \\ &< \psi(d(x_n, z_0)). \end{aligned} \tag{1.45}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \psi(d(x_n, z_0)) = 0$ y $\psi \in \Psi$, entonces de (1.45) se deduce que $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, f(z_0)) = 0$. Así, es evidente que

$$d(z_0, f(z_0)) \leq d(z_0, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, f(z_0)) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

lo cual significa que $f(z_0) = z_0$.
Finalmente, probemos que z_0 es el único punto con esta propiedad. Para ello supongamos que existe $y_0 \in X$ tal que $f(y_0) = y_0$, entonces

$$0 < \psi(d(y_0, z_0)) = \psi(d(f(y_0), f(z_0))) \leq \alpha(d(y_0, z_0)) \cdot \psi(d(y_0, z_0)) < \psi(d(y_0, z_0)),$$

lo cual es una contradicción, completando de esta forma la prueba.

■

A continuación se desprenden los siguientes resultados ya conocidos.

Corolario 1.2.9 (Rakotch, [26]). *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $f : X \to X$ una aplicación y $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ una función monótona decreciente tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x, y)) \cdot d(x, y)$$

donde $x, y \in X$ y $x \neq y$. Entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración: Dado que $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ es una función monótona decreciente, entonces $\limsup_{t\to a} \alpha(t) < 1$, para todo $a \geq 0$. Se sigue la conclusión a partir del Teorema 1.2.8 y considerando $\psi(t) = t$ para todo $t \in X$. ∎

Corolario 1.2.10 (Teorema 3, [10]). *Sean (X,d) un espacio métrico completo, $f : X \to X$ una aplicación y $\psi \in \Psi$. Sea $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ una función monótona decreciente tal que*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \alpha(d(x,y)) \cdot \psi(d(x,y))$$

donde $x, y \in X$ y $x \neq y$. Entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración: Dado que $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ es una función monótona decreciente, entonces $\limsup_{t\to a} \alpha(t) < 1$, para todo $a \geq 0$. Se tiene la conclusión a partir del Teorema 1.2.8. ∎

Corolario 1.2.11 (Principio de Contracción de Banach). *Sean (X,d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación. Si existe $a \in (0,1)$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq a \cdot d(x,y), \ \forall\, x, y \in X.$$

Entonces f posee un único punto fijo.

Demostración: Consecuencia inmediata del Teorema 1.2.8, considerando $\psi(t) = t$ para todo $t \in [0, +\infty)$ y $\alpha(x) = a$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$. ∎

El siguiente resultado es una combinación de las ideas expuestas por A. Branciari [5], M. S. Khan, M. S. Swaleh y S. Sessa [10] y E. Rakotch [26].

Teorema 1.2.12. *Sean (X,d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación satisfaciendo el siguiente tipo de contracción:*

$$\int_0^{\psi(d(f(x),f(y)))} \varphi(t)dt \leq \alpha(d(x,y)) \int_0^{\psi(d(x,y))} \varphi(t)dt, \ \forall\, x, y \ \in X, \tag{1.46}$$

siendo $\psi \in \Psi$, $\varphi \in \Phi$ y $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ con $\limsup_{t\to a} \alpha(t) < 1$ para todo $a > 0$. Entonces f tiene un único punto fijo z_0, tal que para cada $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z_0$.

Demostración: Definamos $\psi_0(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$. Es claro que $\psi_0 \in \Psi$. Ahora bien, la desigualdad (1.46) puede ser escrita como sigue

$$\psi_0(\psi(d(f(x), f(y)))) \leq \alpha(d(x,y)) \cdot \psi_0(\psi(d(x,y))), \ \forall\, x, y \in X. \tag{1.47}$$

Dado que $\psi_0 \in \Psi$ y $\psi \in \Psi$ entonces $(\psi_0 \circ \psi) \in \Psi$; así, (1.47) es suficiente para asegurar mediante el Teorema 1.2.8 la existencia de un único punto fijo z_0 de f, el cual satisface $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z_0$, para cada $x \in X$.

∎

Del Teorema 1.2.12 se desprenden los siguientes resultados ya conocidos.

Corolario 1.2.13 (Teorema 2.1, [5]). *Sean (X,d) un espacio métrico completo, $c \in (0,1)$ y $f : X \to X$ una aplicación tal que para cada $x,y \in X$,*

$$\int_0^{d(f(x),f(y))} \varphi(t)dt \leq c \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt,$$

donde $\varphi \in \Phi$. Entonces f tiene un único punto fijo $a \in X$ tal que para cada $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = a$.

El siguiente es un resultado nuevo el cual se obtiene como consecuencia del Teorema 1.2.12 usando las ideas de A. Branciari [5] y E. Rakotch [25].

Corolario 1.2.14 (A. Branciari- E. Rakotch). *Sean (X,d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación tal que para cada $x,y \in X$,*

$$\int_0^{d(f(x),f(y))} \varphi(t)dt \leq \alpha(d(x,y)) \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt,$$

donde $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ es una función monótona decreciente y $\varphi \in \Phi$. Entonces f tiene un único punto fijo $a \in X$, tal que para cada $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = a$.

Es claro que cada uno de estos resultados generalizan el Principio de Contracción de Banach.

2

El Teorema del Punto Fijo de Jungck para Funciones Conmutativas

En el año 1975 había sido de interes estudiar teoremas de punto fijo en común para un par (o familias) de aplicaciones satisfaciendo ciertas condiciones contractivas en espacios métricos; en esta dirección varios autores dieron resultados interesantes; entre ellos G. Jungck [6], quien en el año 1976 probó un teorema de punto fijo en común para un par de aplicaciones conmutativas, lo que a su vez generalizó el (PCB).
En este capítulo se busca introducir una generalización del teorema del punto fijo de Jungck conservando las lineas del capítulo anterior; esto es, siguiendo las ideas de A. Branciari [5], M.S Khan, M. Swaleh, S. Sessa [10], E. Rakotch [25] y una combinación entre las ideas de Branciari y Rakotch.
A continuación daremos unas definiciones necesarias para este capítulo.

Definición 2.0.15 (Contracción de Jungck). *Sean f y g dos aplicaciones definidas sobre un espacio métrico (X,d) con valores en el mismo. Diremos que el par (f,g) satisface la contracción de Jungck, si existe $c \in (0,1)$ tal que*

$$d(g(x),g(y)) \leq c \cdot d(f(x),f(y)), \ \forall \ x,y \in X.$$

Ejemplo 2.0.16. *Sean $X = \left[0,\frac{1}{2}\right]$ un conjunto dotado con la métrica usual y $f,g : X \to X$ dos funciones definidas por $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$. Entonces*

$$|x^3 - y^3| \leq \frac{7}{8} \cdot |x^2 - y^2|, \ \forall \ x,y \in X.$$

En efecto, nótese que

i) $x^2 \leq \frac{5}{8}x$, *para todo x en X.*

ii) $4xy \leq x^2 + 2xy + y^2$, *para todo* x, y *en* X.

iii) *Para todo* x, y *en* X, *se tiene que* $0 \leq x + y \leq 1$ *por lo tanto* $x + y \leq \sqrt{x+y}$, *con lo cual se sigue de ii) que*

$$xy \leq \frac{x+y}{4}.$$

iii) *Dados* x *y* y *en* X, *de i) y iii) resulta*

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &\leq \frac{5}{8}x + \frac{x+y}{4} + \frac{5}{8}y \\ &= \frac{5}{8} \cdot (x+y) + \frac{1}{4}(x+y) \\ &= \frac{7}{8} \cdot (x+y). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|x - y| \cdot |x^2 + xy + y^2| \leq \frac{7}{8} \cdot |x - y| \cdot |x + y|.$$

Y así,

$$|x^3 - y^3| \leq \frac{7}{8} \cdot |x^2 - y^2|$$

Definición 2.0.17. *Diremos que dos aplicaciones* f *y* g *sobre un espacio* X *son conmutativas o simplemente conmutantes si satisfacen*

$$f(g(x)) = g(f(x)), \ \forall\, x \in X.$$

Teorema 2.0.18 (Teorema del Punto fijo de Jungck). *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $f, g : X \to X$ *dos aplicaciones que satisfacen:*

(i) $g(X) \subseteq f(X)$.

(ii) f *es una función continua.*

(iii) *Existe* $c \in (0, 1)$ *tal que*

$$d(g(x), g(y)) \leq c \cdot d(f(x), f(y)), \ \forall\, x, y \in X.$$

(iv) f *y* g *son conmutativas.*

Entonces f *y* g *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración: Dado $x_1 \in X$ existe $x_2 \in X$ tal que $f(x_2) = g(x_1)$, ésto gracias a que $g(X) \subseteq f(X)$. Procediendo de esta forma definimos inductivamente una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $f(x_{n+1}) = g(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien de *(iii)* se tiene

$$\begin{aligned} d(f(x_{n+2}), f(x_{n+1})) &= d(g(x_{n+1}), g(x_n)) \\ &\leq c \cdot d(f(x_{n+1}), f(x_n)), \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

es decir,

$$d(f(x_{n+2}), f(x_{n+1})) \leq c \cdot d(f(x_{n+1}), f(x_n)). \tag{2.1}$$

Por la Proposición 1.1.26 y de (2.1) se tiene que $(f(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy y así como (X, d) es un espacio métrico completo existe $t \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = t = \lim_{n\to\infty} g(x_n). \tag{2.2}$$

Por otro lado, la continuidad de f junto con *(iii)* implican la continuidad de g, por lo tanto se tiene a partir de (2.2)

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(t) \ \text{ y } \ \lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(t). \tag{2.3}$$

Dado que f y g son conmutativas, entonces se sigue que $f(g(x_n)) = g(f(x_n))$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y así por la unicidad del límite se concluye a partir de (2.3)

$$g(t) = f(t). \tag{2.4}$$

De la ecuación (2.4) y de la continuidad de f y g se obtiene

$$g(g(t)) = g(f(t)) = f(g(t)).$$

por lo tanto

$$g(g(t)) = f(g(t)). \tag{2.5}$$

Ahora bien de las ecuaciones (2.4), (2.5) y de *(iii)* se tiene

$$\begin{aligned} d(g(t), g(g(t))) &\leq c \cdot d(f(t), f(g(t))) \\ &= c \cdot d(g(t), g(g(t))), \end{aligned}$$

es decir,

$$(1 - c) \cdot d(g(t), g(g(t))) \leq 0 \tag{2.6}$$

Dado que $c \in (0, 1)$ entonces (2.6) implica que

$$g(g(t)) = g(t). \tag{2.7}$$

De las ecuaciones (2.5) y (2.7) se tiene

$$f(g(t)) = g(g(t)) = g(t).$$

Así, $z = g(t)$ es un punto fijo en común para f y g. Finalmente probemos que z es el único punto con esta propiedad. Para ello supongamos que $f(y) = y = g(y)$, entonces de (iii) se sigue

$$d(z, y) = d(g(z), g(y)) \leq c \cdot d(f(z), f(y)) = c \cdot d(z, y)$$

lo cual es una contradicción puesto que $c \in (0, 1)$. Así, se concluye que $z = g(t)$ es el único punto fijo en común para f y g.

■

A continuación probaremos uno de los resultados más importantes de este capítulo, cuya importancia recae en el hecho de que a partir de éste se obtiene una serie de resultados que generalizan el teorema del punto fijo de Jungck. Antes de enunciar y probar dicho resultado, daremos la siguiente definición.

Definición 2.0.19 (Contracción de Jungck Generalizada). *Sean f y g dos aplicaciones definidas sobre un espacio métrico (X, d) con valores en el mismo y $\psi \in \Psi$. Diremos que el par (f, g) satisface la Contracción de Jungck Generalizada, si existe una función $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ con $\limsup_{t \to a} \alpha(t) < 1$ para todo $a \geq 0$, tal que*

$$\psi(d(g(x), g(y))) \leq \alpha(d(f(x), f(y))) \cdot \psi(d(f(x), f(y))), \ \forall\, x, y \in X.$$

Teorema 2.0.20. *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $f, g : X \to X$ dos aplicaciones y $\psi \in \Psi$ tales que:*

- ***(i)*** *$g(X) \subseteq f(X)$.*
- ***(ii)*** *f es una función continua.*
- ***(iii)*** *(f, g) satisface la contracción de Jungck generalizada.*
- ***(iv)*** *f y g son conmutativas.*

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Demostración: Haremos la demostración en 4 pasos.
Paso 1: Dado $x_0 \in X$ existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) = g(x_0)$, ésto gracias a que $g(X) \subseteq f(X)$. Procediendo de esta manera definimos inductivamente una sucesión $(y_n)_n \subseteq X$ tal que:

$$y_n = f(x_n) = g(x_{n-1}) \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Paso 2: Probemos que $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0$.
En efecto para cada $n \in \mathbb{N}$ de *(iii)*, se tiene

$$\begin{aligned}\psi(d(y_{n+1}, y_{n+2})) &= \psi(d(g(x_n), g(x_{n+1})))\\ &\leq \alpha(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \cdot \psi(f(x_n), f(x_{n+1}))\\ &< 1 \cdot \psi(d(y_n, y_{n+1})),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\psi(d(y_{n+1}, y_{n+2})) < \psi(d(y_n, y_{n+1})). \tag{2.8}$$

Como ψ es una función creciente, entonces de (2.8) resulta

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq d(y_n, y_{n+1}), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Es decir, $(d(y_n, y_{n+1}))_n$ forma una sucesión decreciente de números reales no negativos, por lo tanto existe $r \geq 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = r. \tag{2.10}$$

En lo que sigue se prueba que $r = 0$. En efecto, para ello supongamos que $r > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ de *(iii)* se tiene

$$\begin{aligned}0 < \psi(r) &\leq \psi(d(y_{n+1}, y_{n+2}))\\ &= \psi(d(g(x_n), g(x_{n+1}))\\ &\leq \alpha(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \cdot \psi(f(x_n), f(x_{n+1})).\end{aligned}$$

Así,

$$\psi(r) \leq \alpha(d(f(x_n), f(x_{n+1})) \cdot \psi(f(x_n), f(x_{n+1})). \tag{2.11}$$

Luego, tomando límite superior cuando $n \to \infty$ en ambos lados de (2.11) y usando la Proposición 1.1.40 se tiene

$$\begin{aligned}\psi(r) &\leq \limsup_{n\to\infty}(\alpha(d(f(x_n), f(x_{n+1})) \cdot \psi(f(x_n), f(x_{n+1})))\\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \alpha(d(f(x_n), f(x_{n+1})) \cdot \limsup_{n\to\infty} \psi(f(x_n), f(x_{n+1})).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Por la continuidad de ψ en (2.12) se sigue

$$\psi(r) \leq \limsup_{t\to r} \alpha(t) \cdot \psi(r) < \psi(r).$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto $r = 0$.
Paso 3: $(y_n)_n$ es una sucesión de Cauchy.
Supongamos que $(y_n)_n$ no es una sucesión de Cauchy, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cada entero k existen números naturales m_k y n_k con $m_k > n_k > k$ tales que $d(y_{m_k}, y_{n_k}) \geq \epsilon$ y $d(y_{m_k}, y_{n_k-1}) > \epsilon$. Así, por la Proposición 1.1.27 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} d(y_{m_k-1}, y_{n_k-1}) = \epsilon$$

Ahora bien, para todo $k \in \mathbb{N}$ de *(iii)* resulta

$$\begin{aligned}\psi(\epsilon) &\leq \psi(d(y_{m_k}, y_{n_k}))\\ &= \psi(d(g(x_{m_k-1}), g(x_{n_k-1})))\\ &\leq \alpha(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1}))) \cdot \psi(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1})),\end{aligned}$$

es decir,

$$\psi(\epsilon) \leq \alpha(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1}))) \cdot \psi(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1}))). \tag{2.13}$$

Ahora bien, tomando límite superior cuando $k \to \infty$ en ambos lados de (2.13) y usando la continuidad de ψ se tiene

$$\psi(\epsilon) \leq \limsup_{t\to\epsilon} \alpha(t) \cdot \psi(\epsilon), \tag{2.14}$$

luego de (2.14) y *(iii)* se sigue

$$\psi(\epsilon) < 1 \cdot \psi(\epsilon).$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto $(y_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en X.
Paso 4: Existencia y unicidad del punto fijo en común para f y g.
Existencia:
Dado que (X, d) es un espacio métrico completo entonces del paso anterior se garantiza la existencia de un punto $z \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = z$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = z. \tag{2.15}$$

Por otro lado, dado que f y g son conmutativas se sigue que $d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 0$ y por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 0. \tag{2.16}$$

Ahora bien, como f es continua se tiene a partir de (2.15)

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(z) \tag{2.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(f(x_n)) = f(z). \tag{2.18}$$

Así, de (2.16), (2.17) se sigue

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = f(z). \tag{2.19}$$

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\psi(d(g(f(x_n)), g((x_n)))) \leq \alpha(d(f(f(x_n)), f((x_n)))) \cdot \psi(d(f(f(x_n)), f((x_n)))). \tag{2.20}$$

Luego tomando límite superior cuando $n \to \infty$ en ambos lados de (2.20), usando la continuidad de ψ y las ecuaciones (2.18), (2.19) se sigue

$$\psi(p) \leq \limsup_{t\to p} \alpha(t) \cdot \psi(p) \tag{2.21}$$

siendo $p = d(f(z), z)$. Por lo tanto de (2.21) se sigue:

$$(1 - \limsup_{t\to p} \alpha(t)) \cdot \psi(d(f(z), z)) \leq 0 \tag{2.22}$$

dado que $\limsup_{t\to p} \alpha(t) < 1$ entonces de (2.22) se tiene

$$\psi(d(f(z), z)) = 0$$

y por lo tanto

$$d(f(z), z) = 0.$$

Así, es claro que

$$f(z) = z. \tag{2.23}$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ de (*iii*) se tiene

$$\psi(d(g(x_n), g(z))) \leq \alpha(d(f(x_n), f(z))) \cdot \psi(d(f(x_n), f(z))). \tag{2.24}$$

Ahora bien, tomando límite superior cuando $n \to \infty$ en ambos lados de (2.24), haciendo uso de la continuidad de ψ y la Proposición 1.1.40 se tiene

$$\psi(d(z, g(z))) \leq \limsup_{t \to 0} \alpha(t) \cdot \psi(d(z, f(z)) \tag{2.25}$$

luego, de (2.23) se sigue que $\psi(d(z, f(z)) = 0$ y por lo tanto

$$\psi(d(z, g(z))) \leq 0, \tag{2.26}$$

y así

$$g(z) = z. \tag{2.27}$$

Luego, de (2.23) y (2.27) se sigue que z es un punto fijo en común para f y g.
Unicidad:
Supongamos que existe $w \in X$ tal que $f(w) = g(w) = w$, entonces de (iii) se tiene

$$\begin{aligned}\psi(d(w, z)) &= \psi(d(g(w), g(z))) \\ &\leq \alpha(d(f(w), f(z))) \cdot \psi(d(f(w), f(z))) \\ &= \alpha(d(w, z)) \cdot \psi(d(w, z))\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\psi(d(w, z)) \leq \alpha(d(w, z)) \cdot \psi(d(w, z)),$$

y así

$$(1 - \alpha(d(w, z))) \cdot \psi(d(w, z)) \leq 0$$

luego, como $1 - \alpha(d(w, z)) > 0$ entonces se sigue que $\psi(d(w, z)) = 0$ en consecuencia

$$w = z$$

Por lo tanto z es el único punto que satisface

$$f(z) = z = g(z).$$

■

Observación 2.0.21. *Si en el Teorema 2.0.20 consideramos $\psi = I_d$ la función identidad sobre* $[0, +\infty)$ *y* $\alpha(t) = c$ *con* $c \in (0, 1)$, *entonces se obtiene el Teorema del Punto Fijo de Jungck.*

A continuación enunciaremos los diversos resultados que generalizan el Teorema 2.0.18, cada uno de los cuales está sostenido en el Teorema 2.0.20.

Teorema 2.0.22. *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $f, g : X \to X$ dos aplicaciones y $\psi \in \Psi$ tales que:*

(i) $g(X) \subseteq f(X)$.

(ii) *f es una función continua.*

(iii) *Existe una función $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ monótona decreciente, tal que*

$$\psi(d(g(x), g(y))) \leq \alpha(d(f(x), f(y))) \cdot \psi(d(f(x), f(y))), \ \forall\, x, y \in X.$$

(iv) *f y g son conmutativas.*

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Demostración: Dado que $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ es una función monótona decreciente, entonces $\limsup\limits_{t \to a} \alpha(t) < 1$, para todo $a \geq 0$. Luego, del Teorema 2.0.20 se concluye que f y g tienen un único punto fijo en común. ■

Observación 2.0.23. *Si $f = I_d$ es la función identidad sobre X en el Teorema 2.0.22, entonces a partir de éste se obtiene el Teorema 3 de [10].*

Teorema 2.0.24. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f, g : X \to X$ dos aplicaciones tales que:*

(i) $g(X) \subseteq f(X)$.

(ii) *f es una función continua.*

(iii) *Existe una función $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ monótona decreciente, tal que*

$$d(g(x), g(y)) \leq \alpha(d(f(x), f(y))) \cdot d(f(x), f(y)), \ \forall\, x, y \in X.$$

(iv) *f y g son conmutativas.*

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Demostración: Dado que $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ es una función monótona decreciente, entonces $\limsup\limits_{t \to a} \alpha(t) < 1$, para todo $a \geq 0$. Luego, del Teorema 2.0.20 se concluye que f y g tienen un único punto fijo en común, considerando $\psi = I_d$, la función identidad sobre $[0, +\infty)$ ■

Observación 2.0.25. *Si $f = I_d$ es la función identidad sobre X en el Teorema 2.0.24, entonces a partir de éste se obtiene el Teorema del Punto Fijo de Rakotch.*

Teorema 2.0.26. *Sean (X,d) un espacio métrico completo, $f,g : X \to X$ dos aplicaciones, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in \Psi$ tales que:*

(i) $g(X) \subseteq f(X)$.

(ii) *f es una función continua.*

(iii) *Existe una función $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0,1)$ con $\limsup_{t\to a} \alpha(t) < 1$ para todo $a > 0$, tal que*

$$\int_0^{\psi(d(g(x),g(y)))} \varphi(t)dt \leq \alpha(d(f(x),f(y))) \int_0^{\psi(d(f(x),f(y)))} \varphi(t)dt, \ \forall\, x,y \in X.$$

(iv) *f y g son conmutativas.*

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Demostración: Para cada $t \in [0,+\infty)$ definamos $\psi_0(t) = \int_0^t \varphi(x)dx$. A partir del Ejemplo 1.2.7 es evidente que $\psi_0 \in \Psi$.
Ahora bien, notemos que para cada $x,y \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}(\psi_0 \circ \psi)(d(g(x),g(y))) &= \int_0^{\psi(d(g(x),g(y)))} \varphi(t)dt \\ &\leq \alpha(d(f(x),f(y))) \int_0^{\psi(d(f(x),f(y)))} \varphi(t)dt \\ &\leq \alpha(d(f(x),f(y))) \cdot (\psi_0 \circ \psi)(d(fx,fy)).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\psi_1(d(gx,gy)) \leq \alpha(d(fx,fy)) \cdot \psi_1(d(fx,fy)), \ \forall\, x,y \in X,$$

siendo $\psi_1 = \psi_0 \circ \psi \in \Psi$. Así pues, del Teorema 2.0.20 se concluye que existe un único $z \in X$ tal que $f(z) = z = g(z)$.

■

Corolario 2.0.27. *Sean (X,d) un espacio métrico completo, $f,g : X \to X$ dos aplicaciones y $\varphi \in \Phi$ tales que:*

(i) $g(X) \subseteq f(X)$.

(ii) *f es una función continua.*

(iii) *Existe $c \in (0,1)$ tal que*

$$\int_0^{d(g(x),g(y))} \varphi(t)dt \leq c \int_0^{d(f(x),f(y))} \varphi(t)dt, \ \forall\, x,y \in X.$$

(iv) *f y g son conmutativas en X.*

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Demostración: Consecuencia inmediata del Teorema 2.0.26, considerando $\psi = I_d$ la función identidad sobre $[0, +\infty)$ y $\alpha(t) = c$, para todo $t \in [0, 1)$.

■

Observación 2.0.28. *Si $f = I_d$ es la función identidad sobre X, entonces a partir del Corolario 2.0.27 se obtiene el Teorema 2.1 de [5].*

Corolario 2.0.29. *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $f, g : X \to X$ dos aplicaciones y $\varphi \in \Phi$ tales que:*

(i) $g(X) \subseteq f(X)$.

(ii) *f es una función continua.*

(iii) *Existe una función $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ monotona decreciente, tal que*

$$\int_0^{d(g(x),g(y))} \varphi(t)dt \leq \alpha(d(f(x), f(y))) \int_0^{d(f(x),f(y))} \varphi(t)dt, \ \forall\, x, y \in X.$$

(iv) *f y g son conmutativas en X.*

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Demostración: Dado que $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ es una función monótona decreciente, entonces $\limsup_{t \to a} \alpha(t) < 1$, para todo $a \geq 0$. Luego, se sigue la conclusión a partir del Teorema 2.0.26, considerando $\psi = I_d$ la función identidad sobre $[0, +\infty)$. ■

3

Generalizaciones de la Conmutatividad

La conmutatividad es una noción ampliamente usada en el campo de las Matemáticas e Ingeniería, especialmente en el de las Matemáticas puras. En la teoría del punto fijo, este concepto es principalmente usado por muchos autores.
Inicialmente el concepto de conmutatividad fue usado en esta área por G. Jungck [6], dando respuesta a un problema de punto fijo en común que se mantenía abierto para la época y generalizando de esta forma el (PCB). Este resultado de Jungck fue usado y generalizado por varios autores y de diversas formas, entre ellas podemos mencionar los conceptos introducidos que mantienen la conmutatividad como caso particular, tales como: funciones débilmente conmutativas [27], funciones compatibles [7], funciones R-débilmente conmutativas [16], funciones débilmente compatibles [9], funciones ocasionalmente débilmente compatibles [2], funciones condicionalmente compatibles [19], funciones faintly compatibles [26], entre otras.
Existen otros conceptos que han aparecido en esta misma linea, tales como funciones no compatibles, funciones que satisfacen la propiedad E.A. [1], funciones R-débilmente conmutativas del tipo (A_g) [23], funciones R-débilmente conmutativas del tipo (A_f) [23], entre otras, de la cuales algunas son independientes de la conmutatividad y otras simplemente no se han podido establecer su relación con la conmutatividad.

En este capítulo se estudiarán cada uno de las nociones expuestas anteriormente, así como también se establecerán algunas relaciones entre las mismas.

En lo que sigue (X,d) denotará un espacio métrico y escribiremos simplemente X, $f,g : X \to X$ denotarán aplicaciones, $C(f,g)$ es el conjunto de todos los puntos donde f y g coinciden; esto es $C(f,g) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Si $f(x) = g(x) = w$, llamaremos a x punto coincidente (PC) de f y g, mientras que w es llamado punto de coincidencia (POC) de f y g. $\mathbb{L}(f,g) = \{(x_n)_n \subset X : \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)\}$.

3.1. Conmutatividad: definición, generalizaciones y ejemplos.

El concepto de aplicaciones conmutativas ha sido una herramienta importante en el contexto de la teoría métrica del punto fijo, con una gran cantidad de generalizaciones.

Definición 3.1.1 (Jungck, [6]). *Diremos que f y g son conmutativas en X, si $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo $x \in X$.*

Ejemplo 3.1.2. *Sea $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual. Se define f y g como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 1/2, & x > 1 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Observe que dado $x \in X$ se tiene lo siguiente:

1. *Si $x \leq 0$ entonces*

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \Rightarrow f(g(x)) = 0. \\ f(x) = 0 & \Rightarrow g(f(x)) = 0. \end{cases}$$

2. *Si $0 < x \leq 1$ entonces*

$$\begin{cases} f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} & \Rightarrow g(f(x)) = x - \dfrac{x^2}{2}. \\ g(x) = x & \Rightarrow f(g(x)) = x - \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

3. *Si $x > 1$ entonces*

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2} & \Rightarrow g(f(x)) = \dfrac{1}{2}. \\ g(x) = 1 & \Rightarrow f(g(x)) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Por consiguiente para cualquier número real x, se obtiene que $f(g(x)) = g(f(x))$; es decir, f y g son conmutativas.

Por consiguiente f y g son conmutativas.

De la Definición 3.1.1 se tiene que dos aplicaciones f y g no son conmutativas en X, si existe $x_0 \in X$ tal que $f(g(x_0)) \neq g(f(x_0))$.

Ejemplo 3.1.3. *Sean $X = [-1, 1]$, $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^3$. Entonces*

$$f(g(1)) = 8$$
$$g(f(1)) = 2.$$

Por lo tanto f y g no son conmutativas.

S. Sessa [27] inicia la generalización de las aplicaciones conmutativas con la introducción de la siguiente definición.

Definición 3.1.4 (S. Sessa, [27]). *Diremos que f y g son aplicaciones débilmente conmutativas en X, si*

$$d(f(g(x)), g(f(x))) \leq d(f(x), g(x)), \ \forall\ x \in X.$$

Ejemplo 3.1.5. *Supongamos que $X = [0,1]$ es dotado con la métrica usual y sean $f(x) = \dfrac{x}{6}$, $g(x) = \dfrac{x}{2}(1+x)$. Luego*

$$\left|\frac{x}{12}(1+x) - \frac{x}{12}\left(1+\frac{x}{6}\right)\right| \leq \left|\frac{x}{2}(1+x) - \frac{x}{6}\right|, \ \forall\ x \in X.$$

Es decir, $d(f(g(x)), g(f(x))) \leq d(f(x), g(x))$, para todo $x \in X$, por lo tanto f y g son aplicaciones débilmente conmutativas.

Ejemplo 3.1.6. *Supongamos que $X = [1, +\infty)$ está dotado con la métrica usual y sean $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$. Entonces*

$$\begin{aligned} |f(g(x)) - g(f(x))| &= |2x^2 - 1 - (2x-1)^2| \\ &= 2|x^2 - 2x + 1| \\ &= 2(x-1)^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |2x - 1 - x^2| \\ &= |x^2 - 2x + 1| \\ &= (x-1)^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Se sigue de (3.1) *y* (3.2) *que $|f(g(x)) - g(f(x))| > |f(x) - g(x)|$ para todo $x > 1$, por lo tanto f y g no son aplicaciones débilmente conmutativas.*

Se puede verificar que si dos aplicaciones son conmutativas, entonces ellas son débilmente conmutativas. El siguiente ejemplo demuestra que el recíproco no se cumple.

Ejemplo 3.1.7. *Supongamos que $X = [0,1]$ está dotado con la métrica usual, y sean $f(x) = \dfrac{x}{3-x}$, $g(x) = \dfrac{x}{3}$ para todo $x \in X$.*

Notemos que:

$$f(g(x)) = \frac{x/3}{3 - x/3} = \frac{x}{9 - x}$$
$$g(f(x)) = \frac{x}{(3 - x)3} = \frac{x}{9 - 3x}.$$

Y así, es claro que $f(g(x)) \neq g(f(x))$ para todo $x \neq 0$. Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned}|f(g(x)) - g(f(x))| &= \left|\frac{x}{9 - x} - \frac{x}{9 - 3x}\right| \\ &= \frac{2x^2}{(9 - x)(9 - 3x)} \\ &\leq \frac{x^2}{(3 - x)3} \\ &= \left|\frac{x}{3 - x} - \frac{x}{3}\right| \\ &= |f(x) - g(x)|.\end{aligned}$$

Por lo tanto f y g son débilmente conmutativas y no satisfacen la conmutatividad.

3.2. Funciones Compatibles

En 1986, G. Jungck [7] introdujo la noción de funciones conmutantes más generales llamadas funciones compatibles, la cual generaliza a las funciones conmutativas y débilmente conmutativas. Muchos autores probaron teoremas del punto fijo usando el concepto de funciones compatibles, luego G. Jungck , P. P. Murtthy y Y. J. Cho [8] dieron otro concepto en esta misma linea de compatibilidad, llamadas funciones compatibles tipo A, que bajo ciertas condiciones son equivalentes a las funciones compatibles; además, probaron un teorema de punto fijo para este tipo de funciones definidas en un espacio métrico.

Extendiendo las funciones compatibles de tipo A, H. K. Pathak, S. S. Chang y Y. J. Cho [21] introdujeron el concepto de funciones compatibles de tipo B y dieron algunos ejemplos donde se reflejan las relaciones entre sí.

Definición 3.2.1 (G. Jungck, [7]). *Diremos que f y g son aplicaciones compatibles en X, si $\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 0$ siempre que $(x_n)_n$ sea una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t$, para algún $t \in X$.*

Ejemplo 3.2.2. *Supongamos que $X = [0, +\infty)$ está dotado con la métrica usual y sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^3$. Veamos que f y g son aplicaciones compatibles. En efecto, considere una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t$. Ahora bien, se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Ésto se puede* *verificar fácilmente ya que* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n)^3$, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} 2(x_n)^3$ *y teniendo en cuenta la unicidad del límite, por lo tanto se obtiene*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |f(g(x_n)) - g(f(x_n))| &= \lim_{n\to\infty} |2^3(x_n)^9 - 2(x_n)^9| \\ &= 0.\end{aligned}$$

Así, f y g son aplicaciones compatibles.

Observación 3.2.3. *Es sencillo verificar que dos funciones conmutativas satisfacen la compatibilidad, sin embargo el ejemplo anterior nos revela que el recíproco no es cierto, ya que f y g no son conmutativas.*

Ejemplo 3.2.4. *Supongamos que* $X = [2, 20]$ *está dotado con la métrica usual. Se define f y g como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 2,\ x > 5. \\ 8, & 2 < x \leq 5. \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 2, & x = 2. \\ 12 + x, & 0 < x \leq 5. \\ x - 3, & x > 5. \end{cases}$$

Veamos que f y g no son aplicaciones compatibles. En efecto, consideremos la sucesión $x_n = 5 + \dfrac{1}{n}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Es claro que* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = 2$, *sin embargo*

$$\begin{aligned} f(g(x_n)) &= f\left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 8. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} g(f(x_n)) &= g(2) \\ &= 2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Así, es evidente a partir de (3.3) *y* (3.4) *que*

$$\lim_{n\to\infty} |f(g(x_n)) - g(f(x_n))| = 6 \neq 0.$$

Por lo tanto, f y g no son aplicaciones compatibles.

Es sencillo chequear que todo par de funciones débilmente conmutativas son compatibles. El siguiente ejemplo demuestra que la compatibilidad es una generalización propia de la conmutatividad débil y por lo tanto de la conmutatividad.

Ejemplo 3.2.5. *Supongamos que* $X = [0, +\infty)$ *está dotado con la métrica usual y sean* $f(x) = x^3$ *y* $g(x) = 2x^3$. *Hemos visto que dichas funciones satisfacen la condición de compatibilidad. Por* *otro lado, si $x = 1$ entonces se tiene lo siguiente:*

$$\begin{aligned}|f(g(1)) - g(f(1))| &= 6 \\ &> 1 = |f(1) - g(1)|.\end{aligned}$$

Por lo tanto f y g no son débilmente conmutativas.

A partir de la Definición 3.2.1 se tiene lo siguiente.

Definición 3.2.6. *Diremos que f y g son aplicaciones no compatibles en X, si existe una sucesión $(x_n)_n$ en X, tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t$, para algún $t \in X$ y $\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) \neq 0$ o simplemente no existe.*

En el 2002 M. Amari y D. El Moutawakil [1] introdujeron una generalización de las aplicaciones no compatibles que llamaron propiedad E.A., cuya definición es:

Definición 3.2.7. *Diremos que f y g son aplicaciones que satisfacen la propiedad E.A., si existe una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t$ para algún $t \in X$.*

Ejemplo 3.2.8. *Sean $X = [0, 1)$ dotado con la métrica usual. Las funciones f y g dadas por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & x \in [0, \frac{2}{3}) \\ 1 - \frac{1}{2}x, & x \in [\frac{2}{3}, 1). \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & x \in [0, \frac{2}{3}) \\ \frac{4}{3} - x, & x \in [\frac{2}{3}, 1), \end{cases}$$

satisfacen la propiedad E.A. En efecto, considerando la sucesión $(x_n)_n$ en X dada por $x_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{n+3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x_n) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2(n+3)}$ y $g(x_n) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{(n+3)}$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \dfrac{2}{3}$; así, f y g son aplicaciones que satisfacen la propiedad E.A.

Ejemplo 3.2.9. *Sean $X = [2, +\infty)$ dotado con la métrica usual y f, g dos aplicaciones dadas por: $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x + 1$. Supongamos que f y g satisfacen la propiedad E.A., entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t$, para algún $t \in X$. Ahora bien, dado que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = t$ y $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = t$ entonces se tiene respectivamente*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = t - 1 \ , \ \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{t-1}{2}.$$

Luego por la unicidad límite se tiene que $t - 1 = \dfrac{t-1}{2}$ y así se deduce que $t = 0$. Esto evidentemente es una contradicción, puesto que $0 \notin X$. Por lo tanto f y g no satisfacen la propiedad E.A.

Observación 3.2.10. *Los ejemplos que siguen a continuación revelan que los conceptos de conmutatividad y propiedad E.A., son completamente independientes.*

Ejemplo 3.2.11. *Sean $X = \mathbb{R}$ dotado con la métrica usual y f, g dos aplicaciones dadas por: $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$. Notemos que $f(g(x)) = x = g(f(x))$ para todo $x \in X$, por lo tanto f y g son conmutativas. Ahora bien, supongamos que f y g satisfacen la propiedad E.A., entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t$, para algún $t \in X$. Observe que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1 = t$ y por propiedades de límites se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = t - 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = t + 1$. Así pues, por la unicidad del límite se sigue que $t + 1 = t - 1$, lo cual es una contradicción. Luego, f y g no satisfacen la propiedad E.A.*

Ejemplo 3.2.12. *Supongamos que $X = [0, 2]$ está dotado con la métrica usual. Se define f y g como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0. \\ 0, & 0 < x \leq 1. \\ 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1. \\ 1, & 1 \leq x < 2. \\ 2, & x = 2. \end{cases}$$

Dado $x \in (0, 1)$ se tiene que $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$; así, $f(g(x)) = 1$ y $g(f(x)) = 0$. Es claro que f y g no son conmutativas.
Por otro lado, consideremos la sucesión $x_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $(x_n)_n \in (1, 2)$, por lo tanto se tiene que $f(x_n) = 1 = g(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 1$, con lo cual f y g satisfacen la propiedad E.A.

3.3. Funciones Compatibles tipo A

Definición 3.3.1 (G. Jungck, P. P. Murthy y Y. J. Cho, [8]). *Diremos que f y g son aplicaciones compatibles tipo A si*

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(g(x_n))) = 0, \; y \; \lim_{n\to\infty} d(g(f(x_n)), f(f(x_n))) = 0,$$

siempre que $(x_n)_n$ sea una sucesión en X, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t$, para algún $t \in X$.

Ejemplo 3.3.2. *Supongamos que $X = [0, 1]$ está dotado con la métrica usual. Las funciones f y g dadas por:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}. \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

son compatibles tipo A. En efecto, sea $(x_n)_n \subset X$ una sucesión tal que $g(x_n) \to t$ y $f(x_n) \to t$ para algún $t \in X$, luego por definición de las funciones se tiene que $t \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.
Si $t = 1$ entonces podemos suponer sin perder generalidad que $(x_n)_n \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y de allí es sencillo verificar que f y g satisfacen la compatibilidad de tipo A.

Por otro lado, supongamos que $x_n \to \frac{1}{2}$ y $x_n < \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos que $g(x_n) = 1 - x_n$ y $1 - x_n > \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $f(g(x_n)) = f(1 - x_n) = 1$ y $g(f(x_n)) = 1 - x_n \to \frac{1}{2}$ cuando $n \to \infty$. De esta manera:

$$\begin{aligned} d(f(g(x_n)), g(g(x_n))) = |f(g(x_n)) - g(g(x_n))| &= |1 - g(1 - x_n)| \\ &= |1 - 1| \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

y

$$\begin{aligned} d(g(f(x_n)), f(f(x_n))) = |g(f(x_n)) - f(f(x_n))| &= |1 - x_n - f(x_n)| \\ &= |1 - 2x_n|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Es claro a partir de (3.5) y (3.6) que f y g son aplicaciones compatibles de tipo A.

Observaciones 3.3.3. *1. En el ejemplo anterior se puede verificar que la compatibilidad tipo A, no es una condición suficiente para la compatibilidad, ya que:*

$$\begin{aligned} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = |f(g(x_n)) - g(f(x_n))| &= |1 - (1 - x_n)| \\ &= x_n. \end{aligned}$$

De donde se tiene que $\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = \dfrac{1}{2}$.

2. La compatibilidad tipo A no es una condición necesaria para la compatibilidad como lo podemos apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.4. *Supongamos que $X = \mathbb{R}$ está dotado con la métrica usual. Se define f y g como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0. \\ 1, & x = 1. \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

Sea $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t$ para algún $t \in \mathbb{R}$. En este caso podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; así, es claro que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) &= \lim_{n\to\infty} |f(g(x_n)) - g(f(x_n))| \\ &= \lim_{n\to\infty} |x_n^2 - x_n^2| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto f y g son aplicaciones compatibles.

Ahora bien, si $y_n = n^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(y_n)), g(g(y_n))) = \lim_{n\to\infty} |n^4 - n^4| = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} d(g(f(y_n)), f(f(y_n))) = \lim_{n\to\infty} |n^4 - n^2| = \infty.$$

Con lo cual es evidente que f y g son compatibles pero no satisfacen la compatibilidad de tipo A.

3.4. Funciones Compatibles tipo B

Definición 3.4.1 (H. K. Pathak, S. S. Chang y Y. J. Cho, [21]). *Diremos que f y g son aplicaciones compatibles tipo B, si*

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(g(x_n))) \leq \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), f(t)) + \lim_{n\to\infty} d(f(t), f(fx_n))\right]$$

y

$$\lim_{n\to\infty} d(g(f(x_n)), f(f(x_n))) \leq \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d(g(f(x_n)), g(t)) + \lim_{n\to\infty} d(g(t), g(g(x_n)))\right].$$

donde $(x_n)_n$ es una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t$ para algún $t \in X$.

Ejemplo 3.4.2. *Supongamos que $X = \mathbb{R}$ está dotado con la métrica usual y sean $f, g : X \to X$ definidas mediante $f(x) = 2x^3$ y $g(x) = 5x^3$. Sea $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Es sencillo verificar que f y g son aplicaciones compatibles tipo B*

A continuación establecemos un resultado que garantiza la relación entre compatibilidad, compatibilidad tipo A y compatibilidad tipo B.

Proposición 3.4.3. *Sean $f, g : X \to X$ funciones continuas. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f y g son aplicaciones compatibles.*
2. *f y g son aplicaciones compatibles tipo A.*
3. *f y g son aplicaciones compatibles tipo B.*

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2)
Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t$ para algún $t \in X$. Entonces por la desigualdad triangular se tiene

$$d(f(f(x_n)), g(f(x_n))) \leq d(f(f(x_n)), f(g(x_n)) + d(f(g(x_n)), g(f(x_n))). \tag{3.7}$$

Dado que f y g son compatibles entonces $\lim\limits_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 0$ y en vista de la continuidad de f se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} f(f(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(f(x_n)) = f(t)$. Así, tomando límite cuando $n \to \infty$ en (3.7) se sigue

$$\lim_{n\to\infty} d(f(f(x_n)), g(f(x_n))) = 0.$$

De manera análoga se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} d(g(g(x_n)), f(g(x_n))) = 0$, con lo cual termina esta parte de la demostración.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t$ para algún $t \in X$. Entonces por la desigualdad triangular se tiene

$$d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) \leq d(f(g(x_n)), g(g(x_n))) + d(g(g(x_n)), g(f(x_n))). \tag{3.8}$$

Dado que f y g son compatibles tipo A se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(g(x_n))) = 0$ y además por la continuidad de f y g se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} g(g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(t)$ y así tomando límite cuando $n \to \infty$ en ambos lado de (3.8) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 0.$$

Por lo tanto f y g son compatibles.

(1) $\Rightarrow$ (3)

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t$ para algún $t \in X$. Dado que f y g son compatibles y continuas entonces tenemos que

$$d(f(t), g(t)) = \lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 0,$$

por lo tanto

$$f(t) = g(t).$$

Ahora bien

$$0=\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)),g(g(x_n)))\leq \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)),f(t))+\lim_{n\to\infty} d(f(t),f(f(x_n)))\right]$$

y

$$0=\lim_{n\to\infty} d(g(f(x_n)),f(f(x_n)))\leq \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d(g(f(x_n)),g(t))+\lim_{n\to\infty} d(g(t),g(g(x_n)))\right].$$

Por lo tanto f y g son compatibles tipo B.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X, tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} g(x_n)=t$ para algún $t\in X$. Entonces por la desigualdad triangular se tiene

$$d(f(g(x_n)),g(f(x_n)))\leq d(f(g(x_n)),g(g(x_n)))+d(g(g(x_n)),g(f(x_n))). \tag{3.9}$$

Dado que f y g son continuas podemos afirmar que:

$$\lim_{n\to\infty} d(g(g(x_n)),g(f(x_n)))=0$$

y

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)),f(t))+\lim_{n\to\infty} d(f(t),f(f(x_n)))\right]=0.$$

Luego, como f y g son compatibles tipo B se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)),g(g(x_n)))=0.$$

Así, tomando límite cuando $n\to\infty$ en (3.9) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} d(f(gx_n),g(fx_n))=0.$$

Por lo tanto f y g son compatibles. ∎

Observación 3.4.4. *Es importante destacar que existen otras nociones de compatibilidad, como por ejemplo compatibilidad de tipo (C) [24], compatibilidad de tipo (P) [22], f-compatibilidad [29], g-compatibilidad [29], entre otras; las cuales no serán tratadas en este estudio, pues consideramos que para efecto de este trabajo es suficiente con las que ya hemos visto.*

3.5. Funciones R-débilmente Conmutativas

La siguiente noción introducida por R. P. Pant en el año 1994 [16], además de generalizar la conmutatividad también fue pieza fundamental para obtener un par de teoremas que garantizan la existencia y unicidad de punto fijo en común en un par de aplicaciones.

Definición 3.5.1 (R. P. Pant, [16]). *Diremos que f y g son aplicaciones R-débilmente conmutativas si existe $R > 0$ tal que*

$$d(f(g(x)), g(f(x))) \leq R \cdot d(f(x), g(x)),$$

para todo $x \in X$.

En el año 1997, H. K. Pathak, Y. J. Cho y S. M. Kang [23] mejoraron esta noción con los conceptos de aplicaciones R-débilmente conmutativas del tipo (A_g) y aplicaciones R-débilmente conmutativas del tipo (A_f), las cuales permitieron generalizar los resultados expuestos en [16], donde debilitaron las condiciones topológicas del espacio. Estas definiciones son dadas a continuación.

Definición 3.5.2 (H. K. Pathak, Y. J. Cho and S. M. Kang, [23]). *Diremos que f y g son aplicaciones:*

(i) *R-débilmente conmutativas del tipo (A_g), si existe $R > 0$ tal que para todo $x \in X$ se cumple*

$$d(g(f(x)), f(f(x))) \leq R \cdot d(f(x), g(x)).$$

(ii) *R-débilmente conmutativas del tipo (A_f), si existe $R > 0$ tal que para todo $x \in X$ se cumple*

$$d(f(g(x)), g(g(x))) \leq R \cdot d(f(x), g(x)).$$

Ejemplo 3.5.3. *Supongamos que $X = [-1, 1]$ está dotado con la métrica usual y sean $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| - 1$. Evidentemente $|f(x) - g(x)| = 1$, y además*

a) $f(g(x)) = ||x| - 1| = 1 - |x|$.

b) $g(f(x)) = |x| - 1$.

c) $f(f(x)) = |x|$.

d) $g(g(x)) = ||x| - 1| - 1 = -|x|$.

Ahora bien, notemos que

i)

$$\begin{aligned} |f(g(x)) - g(f(x))| &= |1 - |x| - (|x| - 1)| \\ &= 2(1 - |x|) \\ &\leq 2|f(x) - g(x)|, \ \forall x \in X. \end{aligned}$$

Por lo tanto f y g son aplicaciones R-débilmente conmutativas, siendo $R = 2$.

ii)

$$\begin{aligned}|g(f(x)) - f(f(x))| &= ||x| - 1 - |x|| \\ &= 1 \\ &\leq |f(x) - g(x)|, \ \forall x \in X.\end{aligned}$$

Por lo tanto f y g son aplicaciones R-débilmente conmutativas del tipo (A_g), siendo $R = 1$.

iii)

$$\begin{aligned}|f(g(x)) - g(g(x))| &= |1 - |x| + |x|| \\ &= 1 \\ &\leq |f(x) - g(x)|, \ \forall x \in X.\end{aligned}$$

Por lo tanto f y g son aplicacines R-débilmente conmutativas del tipo (A_f), siendo $R = 1$.

Observaciones 3.5.4. *1. Es sencillo verificar que todo par de funciones débilmente conmutativa son R-débilmente conmutativas basta tomar $R = 1$, mientras que el recíproco no se cumple como se puede notar a través del siguiente ejemplo.*

Ejemplo 3.5.5. *Supongamos que $X = [-1, 1]$ está dotado con la métrica usual y sean $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| - 1$. En el ejemplo anterior se vió que f y g son R-débilmente conmutativas para $R = 2$. Ahora bien, si $x = 0$ entonces:*

$$\begin{aligned}|f(g(0)) - g(f(0))| &= 2(1 - 0) \\ &> |f(0) - g(0)| \\ &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto f y g no son débilmente conmutativas.

2. Si un par de funciones son R-débilmente conmutativas entonces satisfacen la compatibilidad, no siendo cierto el recíproco como lo apreciamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5.6. *Supongamos que $X = [0, +\infty)$ está dotado con la métrica usual y sean $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x^3$. Hemos visto que f y g son compatibles. Ahora bien, probemos que dichas funciones no satisfacen la condición R-débilmente conmutativa.*

Para ello, sea $R > 0$. Vemos que existe $x \in X$ tal que

$$d(f(g(x)), g(f(x))) > R \cdot d(f(x), g(x)).$$

Notemos que para cada $x \in X$,

$$|f(g(x)) - g(f(x))| = 6x^9$$
$$|f(x) - g(x)| = x^3.$$

Ahora bien, sea $x > \sqrt[6]{\frac{R}{6}}$ observe que:

$$x^6 > \frac{R}{6}$$
$$6x^6 > R$$
$$6x^9 > R \cdot x^3$$

por lo tanto

$$|f(g(x)) - g(f(x))| > |f(x) - g(x)|.$$

Así, f y g no son R-débilmente conmutativas.

3.6. Funciones Débilmente Compatibles, Funciones Ocasionalmente Débilmente Compatibles.

G. Jungck y B. E. Rhoades [9] generalizaron la compatibilidad a través del concepto de aplicaciones débilmente compatibles, que enunciamos a continuación.

Definición 3.6.1 (G. Jungck, B. E. Rhoades, [9]). *Diremos que f y g son aplicaciones débilmente compatibles si $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo $x \in C(f, g)$.*

Ejemplo 3.6.2. *Supongamos que $X = [0, 3]$ está dotado con la métrica usual y sean $f, g : X \to X$ dos aplicaciones dadas por:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ 3, & x \in [1, 3]. \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \in [0, 1) \\ 3, & x \in [1, 3]. \end{cases}$$

Nótese que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in [1,3].$$

Por lo tanto $C(f,g) = [1,3]$ *y además para todo* $x \in C(f,g)$ *se tiene que* $f(g(x)) = g(f(x))$*, así es claro que* f *y* g *son aplicaciones débilmente compatibles.*

Ejemplo 3.6.3. *Sean* $X = \mathbb{R}$ *dotado con la métrica usual,* $f(x) = \dfrac{x}{3}$ *y* $g(x) = x^2$*. Entonces*

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{x}{3} = x^2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - x = 0. \\ &\Leftrightarrow x = 0, \ \text{ó } x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C(f,g) = \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$*. Ahora bien, observe que*

$$f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{27} \neq \frac{1}{81} = g\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right).$$

Por lo tanto f *y* g *no son aplicaciones débilmente compatibles.*

Recientemente M. Al-Thagafi y N. Shahzad [2] debilitaron este concepto a través de la siguiente definición.

Definición 3.6.4 (M. Al-Thagafi, N. Shahzad, [2]). *Diremos que* f *y* g *son aplicaciones ocasionalmente débilmente compatibles si existe* $t \in C(f,g)$ *tal que* $f(g(t)) = g(f(t))$*.*

Ejemplo 3.6.5. *Sean* $X = [0, +\infty)$ *dotado con la métrica usual,* $f(x) = 2x$ *y* $g(x) = x^2$ *Nótese que* $C(f,g) = \{0,2\}$*, además* $f(g(2)) \neq g(f(2))$ *pero* $f(g(0)) = g(f(0))$*. Por lo tanto* f *y* g *son aplicaciones ocasionalmente débilmente compatibles.*

Observaciones 3.6.6.

1. *Si* f *y* g *son compatibles entonces satisfacen la condición de débilmente compatibles. En efecto, supongamos que* $f(t) = g(t)$ *para algún* $t \in X$*. Así pues, si definimos* $x_n = t$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tenemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = f(t)$*. De la compatibilidad se deduce que*

   $$d(f(g(t)), g(f(t)))) = \lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n), g(f(x_n)))) = 0.$$

   Por lo tanto, f *y* g *son débilmente compatibles.*

2. *La compatibilidad no es una condición necesaria para la débilmente compatibilidad como lo revela el siguiente ejemplo.*

   Ejemplo 3.6.7. *Supongamos que* $X = [0,20]$ *está dotado con la métrica usual y sean* $f, g : X \to X$ *dos aplicaciones dadas por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x + 16, & 0 < x \leq 4 \\ x - 4, & 4 < x \leq 20. \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{0\} \cup [4, 20] \\ 3, & 0 < x < 4. \end{cases}$$

Notemos que $C(f, g) = \{0\}$ y además $f(g(0)) = g(f(0)) = 0$. Luego f y g son débilmente compatibles.

Por otro lado, considerando la sucesión $x_n = 4 + \frac{1}{n}$ resulta que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$. Ahora bien

$f(g(x_n)) = g(0) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = 3$. Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 3.$$

Por lo tanto, f y g no son compatibles.

3. *Es evidente que cualquier par de funciones débilmente compatibles satisfacen la condición de ocasionalmente débilmente compatibles, mientras que el Ejemplo 3.6.5 revela que el recíproco no se cumple.*

En lo que sigue mostraremos algunas condiciones bajo las cuales se garantiza que las nociones de compatibilidad débil y ocasionalmente débilmente compatible son equivalentes. Comenzaremos con los siguientes resultados.

Lema 3.6.8. *Sean f y g aplicaciones débilmente compatibles. Si f y g tienen un único punto de coincidencia, entonces tienen un único punto fijo en común.*

Demostración: Sea $w = f(x) = g(x)$ el único punto de coincidencia, para algún $x \in X$. Dado que f y g son débilmente compatibles se tiene que

$$f(w) = f(g(x)) = g(f(x)) = g(w).$$

Ya que $z = f(w) = g(w)$ es un punto de coincidencia, y por la unicidad del mismo se sigue que $z = w$; es decir, $w = f(w) = g(w)$, con lo cual w es un punto fijo en común para f y g. La unicidad de w se sigue a partir de la unicidad del punto de coincidencia. ■

Lema 3.6.9. *Sean f y g aplicaciones ocasionalmente débilmente compatibles. Si f y g tienen un único punto de coincidencia, entonces tienen un único punto fijo en común.*

Demostración: Dado que f y g son ocasionalmente débilmente compatibles, existe $x \in C(f, g)$ tal que $w = f(x) = g(x)$ y $f(g(x)) = g(f(x))$, con lo cual se obtiene que

$$f(w) = f(g(x)) = g(f(x)) = g(w).$$

Como $f(w) = g(w)$ es un punto de coincidencia y por la unicidad se sigue que $f(w) = g(w) = w$; es decir, w es un punto fijo en común para f y g. Si z es cualquier otro punto fijo en común para f y g; es decir, $f(z) = g(z) = z$, entonces se sigue por la unicidad del punto de coincidencia que $z = w$. ■

Proposición 3.6.10. *Sean f y g dos aplicaciones con un único punto de coincidencia. Entonces, f y g son débilmente compatibles si, y sólo si son ocasionalmente débilmente compatibles.*

Demostración: La suficiencia es inmediata.

Supongamos que f y g son aplicaciones ocasionalmente débilmente compatibles. Sea $w_1 = f(x) = g(x)$ el único punto de coincidencia. Probemos que f y g son débilmente compatibles. En efecto, para ello sea $y \in C(f,g)$ y veamos que $f(g(y)) = g(f(y))$. Si $y = x$ entonces por el Lema 3.6.9 se verifica que $w_1 = f(w_1) = g(w_1)$, así se tiene que $f(g(y)) = g(f(y))$.

Por otro lado, si $y \neq x$, entonces $w_2 = f(y) = g(y)$ es un punto de coincidencia y por la unicidad del mismo se tiene que $w_2 = w_1$; es decir,

$$f(y) = g(y) = f(x) = g(x).$$

Por el Lema 3.6.9, w_1 es el único punto fijo en común para f y g por lo tanto

$$\begin{aligned} w_1 &= f(w_1) = f(g(y)) \\ w_1 &= g(w_1) = g(f(y)). \end{aligned}$$

Por consiguiente $f(g(y)) = g(f(y))$.

■

3.7. Funciones Condicionalmente Compatibles, Faintly Compatibles.

En el 2012 R. P. Pant y R. K. Bisht [19] introducen un nuevo concepto que generaliza la compatibilidad, mediante el cual bajo ciertas condiciones contractivas como también de Lipschitz y no expansivas permitieron nuevos resultados de punto fijo en común para un par de aplicaciones. A continuación su respectiva definición.

Definición 3.7.1 (R. P. Pant, R. K. Bisht, [20]). *Diremos que f y g son aplicaciones condicionalmente compatibles si $\mathbb{L}(f,g)$ es no vacío y además existe $(y_n)_n \in \mathbb{L}(f,g)$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(f(g(y_n)), g(f(y_n))) = 0$.*

Ejemplo 3.7.2. *Supongamos que $X = [2,20]$ está dotado con la métrica usual y sean $f, g : X \to X$ dos aplicaciones dadas por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in \{2\} \cup (5, 20]. \\ 4, & x \in (2, 5]. \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 2, & x = 2. \\ 4, & x \in (2, 5]. \\ \frac{x+1}{3}, & x \in (5, 20]. \end{cases}$$

Notemos que f y g son condicionalmente compatibles. En efecto, consideremos la sucesión $y_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(y_n)) = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(y_n)) = 2$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} d(f(g(y_n)), g(f(y_n))) = 0$.

Observación 3.7.3. *Cualquier par de funciones ocasionalmente débilmente compatibles satisfacen la compatibilidad condicional, no siendo válido el recíproco como lo podemos notar en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 3.7.4. *Supongamos que $X = [2, +\infty)$ está dotado con la métrica usual y sean $f, g : X \to X$ dos aplicaciones dadas por:*

$$f(x) = x^2 \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} x + 6, & x \in [2, 9] \cup [16, +\infty) \\ x + 72, & x \in (9, 16). \end{cases}$$

Entonces f y g son condicionalmente compatibles. En efecto sea $y_n = 3 + \frac{1}{n}$. Es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 9 = \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n)$, y además $\lim\limits_{n\to\infty} d(f(g(y_n)), g(f(y_n))) = 0$.

Por otro lado, es fácil chequear que $C(f, g) = 3$. Además, $f(g(3)) = 81 \neq 15 = g(f(3))$, por lo tanto f y g no son ocasionalmente débilmente compatibles.

La Observación 3.7.3 dió base para que en el 2013 R. K. Bisht y N. Shahzad [26] introdujeran una nueva noción de compatibilidad condicional manteniendo la conmutatividad en un subconjunto de puntos de coincidencia, originando de esta forma un gran aporte a la teoría métrica del punto fijo para un par de aplicaciones.

Definición 3.7.5 (R. K. Bisht, N. Shahzad, [26]). *Diremos que f y g son faintly compatibles siempre que satisfagan el concepto de condicionalmente compatibles y además exista $Y \subseteq C(f, g)$, $Y \neq \emptyset$ tal que $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo $x \in Y$.*

Ejemplo 3.7.6. *Supongamos que $X = [3, 6]$ está dotado con la métrica usual y sean $f, g : X \to X$ dos aplicaciones dadas por:*

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \in \{3\} \cup (5, 6]. \\ x + 1, & x \in (3, 5]. \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 3, & x = 3. \\ \frac{x+7}{3}, & x \in (3, 5]. \\ \frac{x+1}{2}, & x \in (5, 6]. \end{cases}$$

Notemos que f y g son faintly compatibles. En efecto, consideremos la sucesión $y_n = 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 3 = \lim_{n\to\infty} g(y_n)$ y además $\lim_{n\to\infty} d(f(g(y_n)), g(f(y_n))) = 0$. Así mismo, es fácil verificar que $C(f, g) = 3$ y así $f(g(3)) = g(f(3))$.

Observación 3.7.7. *Si un par de aplicaciones f y g sobre un espacio métrico X son ocasionalmente débilmente compatibles entonces existe $x \in C(f, g)$ tal que $f(g(x)) = g(f(x))$. Ahora bien, si consideramos la sucesión $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(x_n)_n \in \mathbb{L}(f, g)$. Por lo tanto f y g son aplicaciones faintly compatibles.*

3.8. Algunas Relaciones

El propósito de esta sección es recopilar a modo de resumen la información central del capítulo y establecer algunas relaciones entre las nociones que generalizan la conmutatividad. Así mismo, quedarán abiertas algunas interrogantes que no dejan de ser importantes.

Comenzaremos haciendo una lista de cada una de las nociones introducidas durante el capítulo, las cuales generalizan la conmutatividad. Cada una de estas estará acompañada de un símbolo, lo cual nos permitirá hacer una rápida identificación de la misma.

Generalizaciones de la conmutatividad		
Nombre	Año	Símbolo
Conmutatividad	G. Jungck, 1976	Conm
Débilmente conmutativa	S. Sessa, 1982	W. Conm
Compatibilidad	G. Jungck, 1986	Comp
Compatibilidad tipo A	Jungck, Murthy and Cho, 1993	Comp A
Compatibilidad tipo B	H.K. Pathak and M.S. Khan, 1995	Comp B
R-débilmente conmutativa	R.P. Pant, 1994	R-débil Conm
Débilmente compatible	G. Jungck and E. Rhoades, 1998	W. Comp
Ocasionalmente débilmente compatible	Al-Thagafi and N. Shahzad, 2008	OWC
Condicionalmente compatible	R.P.Pant and R.K. Bisht, 2012	Cond Comp
Faintly compatible	R.K. Bisht and N. Shahzad, 2013	Faint Comp

Algunas conclusiones

i) Si $\mathbb{L}(f, g) = \emptyset$, entonces $C(f, g) = \emptyset$.

ii) Si $C(f, g) = \emptyset$, entonces se satisface la condición W. Comp, y no se cumple OWC.

iii) Si $\mathbb{L}(f, g) = \emptyset$, entonces se satisfacen las condiciones Comp, W. Comp, y no se cumple OWC.

iv) Los conceptos de conmutatividad y propiedad E.A son independientes.

v) Si $C(f,g) \neq \emptyset$ y $\mathbb{L}(f,g) \neq \emptyset$, entonces se tienen las siguientes relaciones.

Relaciones	Conm	W. Conm	R-débil Conm	Comp	W. Comp	OWC	Faint Comp	Cond Comp
Conm	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
W Conm	$\nRightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
R-débil Conm	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
Comp	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
W Comp	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
OWC	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
Faint Comp	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
Cond Comp	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\nRightarrow$	$\Rightarrow$

vi) El siguiente ejemplo revela que ninguna de las nociones expuestas en la parte anterior implica la continuidad de la funciones.

Supongamos que el conjunto $X = \mathbb{R}$ está dotado con la métrica usual y sean $f, g : X \to X$ dos aplicaciones dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \neq 1 \text{ y } x \neq 2. \\ 1, & x = 1. \\ 0, & x = 2. \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \text{ y } x \neq 1. \\ 1, & x = 1. \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

las cuales no son continuas. Ahora bien

$$f(g(x)) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \text{ y } x \neq 1. \\ 1, & x = 1. \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad y \quad g(f(x)) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \text{ y } x \neq 2. \\ 1, & x = 1. \\ 2, & x = 2. \end{cases}$$

Con lo cual es claro que $f(g(x)) = x = g(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, f y g son aplicaciones conmutativas.

4

Generalizaciones del Teorema de Jungck

Como ya hemos visto en las lineas anteriores, el teorema del punto fijo de Jungck garantiza bajo ciertas condiciones la existencia y unicidad de punto fijo en común para dos aplicaciones definidas sobre un espacio métrico. El propósito de este capítulo es debilitar alguna de esas condiciones con el fin de que se siga obteniendo la conclusión del teorema de Jungck. A continuación, se da a conocer cómo se verán reflejadas las generalizaciones.

En cada uno de nuestros resultados se mantendrá la contracción de Jungck generalizada. Con respecto a la completitud del espacio métrico completo, en la mayoría de los casos quedará excluida y en los demás, simplemente se dan lugar a otras condiciones topológicas. La continuidad será eliminada, o en su defecto se hará uso de una forma más débil de continuidad. Finalmente, se utilizarán algunas de las nociones expuestas en el capítulo anterior que generalizan la conmutatividad.

4.1. Teoremas del Punto Fijo.

Las investigaciones realizadas para llevar a cabo este trabajo de grado, han permitido dejar un escenario en el cual quedan evidenciadas las condiciones mínimas para garantizar existencia y unicidad de punto fijo en común en un par de aplicaciones. Debido a su importancia, consideramos conveniente iniciar nuestros aportes a la teoría métrica del punto fijo con el siguiente resultado.

Teorema 4.1.1. *Sean (X, d) un espacio métrico, $f, g : X \to X$ dos aplicaciones y $\psi \in \Psi$. Supongamos que*

(i) Existe una función $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ con $\limsup_{t\to a} \alpha(t) < 1$ para cada $a \geq 0$ tal que:

$$\psi(d(g(x), g(y))) \leq \alpha(d(f(x), f(y))) \cdot \psi(d(f(x), f(y))), \ \forall\, x, y \in X.$$

(ii) $C(f,g) \neq \emptyset$.

(iii) *Existe* $z \in C(f,g)$ *tal que* $f(g(z)) = g(f(z))$.

Entonces f *y* g *tienen un único punto fijo en común.*

Demostración: Dado que $z \in C(f,g)$ y $f(g(z)) = g(f(z))$ entonces $f(g(z)) = g(f(z)) = g(g(z))$, por lo tanto

$$f(g(z)) = g(g(z)). \tag{4.1}$$

Ahora bien, de (i), (iii) y (4.1) se tiene

$$\begin{aligned}
\psi(d(g(g(z)), g(z))) &\leq \alpha(d(f(g(z)), f(z))) \cdot \psi(d(f(g(z)), f(z))). \\
&= \alpha(d(g(g(z)), g(z))) \cdot \psi(d(g(g(z)), g(z))). \\
(1 - \alpha(d(g(g(z)), g(z)))) \cdot \psi(d(g(g(z)), g(z))) &\leq 0. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Por las características de α y ψ se tiene a partir de (4.2)

$$\psi(d(g(g(z)), g(z))) = 0.$$

por lo tanto

$$d(g(g(z)), g(z)) = 0.$$

Y así, es claro que

$$g(g(z)) = g(z). \tag{4.3}$$

Luego, de (4.1) y (4.3) se sigue

$$f(g(z)) = g(g(z)) = z. \tag{4.4}$$

Por lo tanto $t = g(z)$ es un punto fijo en común para f y g. En lo que sigue, se verifica que t es el único punto que satisface esta propiedad.
En efecto, supongamos que existe $y \in X$ tal que $f(y) = y = g(y)$. Se sigue a partir de (i)

$$\begin{aligned}
\psi(y, t)) = \psi(d(g(y), g(t))) &\leq \alpha(d(f(y), f(t))) \cdot \psi(d(f(y), f(t))). \\
&= \alpha(d(g(y), g(t))) \cdot \psi(d(g(y), g(t))). \\
(1 - \alpha(d(y, t))) \cdot \psi(d(y, t)) &\leq 0. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Por las características de α y ψ se tiene a partir de (4.5)

$$\psi(d(y, t)) = 0.$$

por lo tanto

$$d(y,t) = 0,$$

por lo que

$$y = t.$$

Por lo tanto $t = g(z)$ es el único punto fijo en común para f y g. ■

La importancia del resultado que nos antecede se manifiesta en el hecho de que a partir de ahora podemos generar varios resultados de punto fijo en común, ¿cómo?, condicionado sus hipótesis de tal forma que se garantice un escenario dado en el Teorema 4.1.1, sin perder de vista el objetivo de este trabajo. Sin más preámbulos, en lo que sigue se introducen los diversos resultados que generalizan el teorema del punto fijo de Jungck. Cabe mencionar que estos resultados difieren entre sí de acuerdo a las hipótesis que hemos considerado, pero el producto final siempre será el mismo.

Presentamos a continuación nuestros aportes en esta dirección. A parte del tipo de contracción en el teorema de Jungck, también se ha utilizado la noción de compatibilidad, la cual como hemos visto, generaliza la conmutatividad.

Teorema 4.1.2. *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $f, g : X \to X$ dos aplicaciones y $\psi \in \Psi$. Supongamos que:*

(i) $g(X) \subseteq f(X)$.

(ii) *(f, g) satisface la contracción de Jungck generalizada.*

(iii) *f es una función continua.*

(iv) *f y g son compatibles.*

Entonces existe un único $z \in X$ tal que $f(z) = z = g(z)$.

Demostración: Haremos la demostración en 4 pasos.
Paso 1: Dado $x_0 \in X$ existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) = g(x_0)$, ésto gracias a que $g(X) \subseteq f(X)$. Procediendo de esta forma definimos inductivamente una sucesión $(y_n)_n \subseteq X$ tal que:

$$y_n = f(x_n) = g(x_{n-1}), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Paso 2: Probemos que $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0$.

En efecto para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\psi(d(y_{n+1}, y_{n+2})) &= \psi(d(g(x_n), g(x_{n+1}))) \\ &\le \alpha(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \cdot \psi(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \\ &< 1 \cdot \psi(d(y_n, y_{n+1})).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\psi(d(y_{n+1}, y_{n+2})) < \psi(d(y_n, y_{n+1})).$$

Ahora bien, como ψ es creciente se tiene

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \le d(y_n, y_{n+1}).$$

Es decir, $(d(y_n, y_{n+1}))_n$ forma una sucesión decreciente de números reales no negativos, por lo tanto existe $r \ge 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = r.$$

Supongamos ahora que $r > 0$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ resulta

$$\begin{aligned}0 < \psi(r) &\le \psi(d(y_{n+1}, y_{n+2})) \\ &= \psi(d(g(x_n), g(x_{n+1})) \\ &\le \alpha(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \cdot \psi(d(f(x_n), f(x_{n+1}))),\end{aligned}$$

así

$$\psi(r) \le \alpha(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \cdot \psi(d(f(x_n), f(x_{n+1}))). \tag{4.6}$$

Ahora bien, tomando límite superior en ambos lados de la desigualdad (4.6)

$$\limsup_{n\to\infty} \psi(r) \le \limsup_{n\to\infty}(\alpha(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \cdot \psi(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \tag{4.7}$$

luego, usando la continuidad de ψ en (4.7) se sigue

$$\psi(r) \le \limsup_{t\to r} \alpha(t) \cdot \psi(r).$$

Por lo tanto

$$\psi(r) < 1 \cdot \psi(r).$$

Lo cual es una contradicción así, $r = 0$.
Paso 3: Probemos que $(y_n)_n$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, supongamos que $(y_n)_n$ no es una sucesión de Cauchy, entonces por la Proposición 1.1.27 existen $\epsilon > 0$ y sucesiones de números positivos $(m_k)_k$, $(n_k)_k$ con $m_k > n_k > k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tales que

1. $d(y_{m_k}, y_{n_k}) \geq \epsilon$
2. $\lim_{k\to\infty} d(y_{m_k-1}, y_{n_k-1}) = \epsilon$.

Ahora bien, para todo $k \in \mathbb{N}$ resulta

$$\begin{aligned}\psi(\epsilon) &\leq \psi(d(y_{m_k}, y_{n_k}))\\ &= \psi(d(g(x_{m_k-1}), g(x_{n_k-1})))\\ &\leq \alpha(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1}))) \cdot \psi(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1}))).\end{aligned}$$

Es decir,

$$\psi(\epsilon) \leq \alpha(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1}))) \cdot \psi(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1}))). \tag{4.8}$$

Ahora bien, tomando límite superior cuando $k \to \infty$ en ambos lados de (4.8) se tiene

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \psi(\epsilon) &\leq \limsup_{k\to\infty}(\alpha(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1})) \cdot \psi(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1})))).\\ \psi(\epsilon) &\leq \limsup_{k\to\infty} \alpha(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1})) \cdot \limsup_{k\to\infty} \psi(d(f(x_{m_k-1}), f(x_{n_k-1}))).\end{aligned} \tag{4.9}$$

Usando la continuidad de ψ en (4.9) se sigue

$$\psi(\epsilon) \leq \limsup_{t\to\epsilon} \alpha(t) \cdot \psi(\epsilon).$$

Luego, de ésto y por hipótesis se sigue

$$\psi(\epsilon) < 1 \cdot \psi(\epsilon).$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(y_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en X.
Paso 4: Existencia y unicidad de punto fijo en común para f y g.
Existencia:
Dado que (X, d) es un espacio métrico completo entonces del paso anterior se garantiza la existencia de un punto $z \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = z$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = z. \tag{4.10}$$

Ahora bien, de ésto y el hecho de que f y g son compatibles se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 0. \tag{4.11}$$

Por otro lado, la continuidad de f junto con *(ii)* implican la continuidad de g, y así se tiene a partir de (4.10) lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(z)$$
$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(z).$$

Y de (4.11) resulta

$$f(z) = g(z). \tag{4.12}$$

La igualdad (4.12) revela que $z \in C(f, g)$ y la compatibilidad implica que $f(g(z)) = g(f(z))$. Ésto, junto con la contracción de Jungck generalizada, nos permite hacer uso del Teorema 4.1.1 para así concluir la existencia de un único punto fijo en común para f y g. ∎

Los resultados que siguen a continuación son generalizaciones de S. Kumar [11], en los cuales se tiene una condición más débil a la de completitud. Además de eso, no se tiene ningún tipo de contención entre los rangos de las funciones involucradas, así como también ningún requerimiento de continuidad es necesario.

Teorema 4.1.3. *Sean (X, d) un espacio métrico, $f, g : X \to X$ dos aplicaciones y $\psi \in \Psi$. Supongamos que:*

(i) *$f(X)$ es un subespacio cerrado de X.*

(ii) *(f, g) satisface la contracción de Jungck generalizada.*

(iii) *f y g satisfacen la propiedad E.A.*

(iv) *f y g son débilmente compatibles.*

Entonces existe un único $z \in X$ tal que $f(z) = z = g(z)$.

Demostración: Dado que f y g satisfacen la propiedad E.A., existe una sucesión $(x_n)_n \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t$, para algún $t \in X$. Como $f(X)$ es un subespacio cerrado de X entonces $t \in f(X)$, con lo cual existe $a \in X$ tal que

$$t = f(a). \tag{4.13}$$

Ahora bien, probemos que $t = g(a)$.
En efecto, de *(ii)* se sigue

$$\psi(d(g(a), g(x_n))) \leq \alpha(d(f(a), f(x_n))) \cdot \psi(d(f(a), f(x_n))), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

Tomando límite superior cuando $n \to \infty$ en ambos lados de (4.14), usando la continuidad de ψ y la Proposición 1.1.40 se tiene

$$\psi(d(g(a),t)) \leq \limsup_{t\to 0} \alpha(t)\cdot\psi(d(f(a),t)) < \psi(d(f(a),t)) = 0,$$

por lo que

$$\psi(d(g(a),t)) = 0,$$

y así

$$d(g(a),t) = 0.$$

Por consiguiente

$$t = g(a). \tag{4.15}$$

De (4.13) y (4.15) se sigue

$$t = f(a) = g(a). \tag{4.16}$$

Por lo tanto $C(f,g) \neq \emptyset$.

Por otro lado, dado que f y g son débilmente compatibles, se tiene de (4.16)

$$f(g(a)) = g(f(a)).$$

Ésto, junto con la contracción de Jungck generalizada, nos permite hacer uso del Teorema 4.1.1 para así concluir la existencia de un único punto fijo en común para f y g.

■

Teorema 4.1.4. *Sean (X,d) un espacio métrico, $f,g : X \to X$ dos aplicaciones y $\psi \in \Psi$. Supongamos que:*

(i) *$f(X)$ es un subespacio cerrado de X.*

(ii) *(f,g) satisface la contracción de Jungck generalizada.*

(iii) *f y g satisfacen la propiedad E.A.*

(iv) *f y g son R-débilmente conmutativas.*

Entonces existe un único $z \in X$ tal que $f(z) = z = g(z)$.

Demostración: Bajo estas condiciones, el Teorema 4.1.3 garantiza la existencia de $a \in C(f,g)$. A continuación, se muestra que $f(g(a)) = g(f(a))$. En efecto, de (iv) se sigue

$$d(f(g(a)),g(f(a))) \leq R\cdot d(f(a),g(a)) = 0.$$

Por lo tanto

$$f(g(a)) = g(f(a)).$$

Ésto, junto con la contracción de Jungck generalizada, nos permite hacer uso del Teorema 4.1.1 para así concluir la existencia de un único punto fijo en común para f y g.

■

Teorema 4.1.5. *Sean (X, d) un espacio métrico, $f, g : X \to X$ dos aplicaciones y $\psi \in \Psi$. Supongamos que:*

(i) *$f(X)$ es un subespacio cerrado de X.*

(ii) *(f, g) satisface la contracción de Jungck generalizada.*

(iii) *f y g satisfacen la propiedad E.A.*

(iv) *f y g son R-débilmente conmutativas del tipo (A_g).*

Entonces existe un único $z \in X$ tal que $f(z) = z = g(z)$.

Demostración: Bajo estas condiciones, el Teorema 4.1.3 garantiza la existencia de $a \in C(f, g)$. A continuación, se muestra que $f(g(a)) = g(f(a))$. En efecto, de (iv) se obtiene

$$d(g(f(a)), f(f(a))) \leq R \cdot d(f(a), g(a)) = 0.$$

Por lo tanto

$$g(f(a)) = f(f(a)). \tag{4.17}$$

Ahora bien, dado que $a \in C(f, g)$ entonces

$$d(f(f(a)), f(g(a))) = 0. \tag{4.18}$$

De (4.17) se tiene

$$d(f(f(a)), g(f(a))) = 0. \tag{4.19}$$

Así, usando tanto desigualdad triangular como (4.18) y (4.19) se sigue

$$d(f(g(a)), g(f(a))) \leq d(f(g(a)), f(f(a))) + d(f(f(a)), g(f(a))) = 0.$$

Por lo tanto

$$d(f(g(a)), g(f(a))) = 0.$$

Con lo cual

$$f(g(a)) = g(f(a)). \tag{4.20}$$

Ésto, junto con la contracción de Jungck generalizada, nos permite hacer uso del Teorema 4.1.1 para concluir con la existencia de un único punto fijo en común para f y g.

■

Teorema 4.1.6. *Sean (X,d) un espacio métrico, $f, g : X \to X$ dos aplicaciones y $\psi \in \Psi$. Supongamos que:*

(i) *$f(X)$ es un subespacio cerrado de X.*

(ii) *(f, g) satisface la contracción de jungck generalizada.*

(iii) *f y g satisfacen la propiedad E.A.*

(iv) *f y g son R-débilmente conmutativas del tipo (A_f).*

Entonces existe un único $z \in X$ tal que $f(z) = z = g(z)$.

Demostración: Bajo estas condiciones, el teorema (4.1.3) garantiza la existencia de $a \in C(f,g)$. A continuación, se muestra que $f(g(a)) = g(f(a))$. En efecto, de (iv) se obtiene

$$d(f(g(a)), g(g(a))) \leq R \cdot d(f(a), g(a)) = 0.$$

Por lo tanto

$$f(g(a)) = g(g(a)). \tag{4.21}$$

Ahora bien dado que $a \in C(f,g)$ entonces

$$d(g(f(a)), g(g(a))) = 0. \tag{4.22}$$

De (4.21) se tiene

$$d(f(g(a)), g(g(a))) = 0. \tag{4.23}$$

Así, usando la desigualdad triangular con (4.22) y (4.23) se sigue

$$d(f(g(a)), g(f(a))) \leq d(f(g(a)), g(g(a))) + d(g(g(a)), g(f(a))) = 0.$$

Por lo tanto

$$d(f(g(a)), g(f(a))) = 0.$$

Con lo cual

$$f(g(a)) = g(f(a)). \tag{4.24}$$

Ésto, junto con la contracción de Jungck generalizada, nos permite hacer uso del Teorema 4.1.1 para concluir la existencia de un único punto fijo en común para f y g.

■

En los resultados que siguen a continuación, hemos considerado ciertas condiciones de tal forma de garantizar punto fijo en común en un par de aplicaciones, eliminando por completo la completitud del espacio y cualquier otra condición topológica.

Teorema 4.1.7. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f, g : X \to X$ dos funciones tales que:*

(i) $g(X) \subseteq f(X)$.

(ii) *(f, g) satisface la contracción de Jungck generalizada.*

(iii) *f ó g es continua.*

(iv) *f y g satisfacen la propiedad E.A., y son débilmente compatibles.*

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Demostración: Dado que f y g satisfacen la propiedad E.A., existe una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t$ para algún $t \in X$. Esto garantiza que $\mathbb{L}(f, g) \neq \emptyset$. Por otra parte dado que f y g son débilmente compatibles, entonces también son condicionalmente compatibles por lo tanto existe $(z_n)_n \in \mathbb{L}(f, g)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = u \tag{4.25}$$

para algún $u \in X$, y

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(z_n)), g(f(z_n))) = 0. \tag{4.26}$$

Ahora bien supongamos que g es continua. Entonces de (4.25) se sigue

$$\lim_{n\to\infty} g(f(z_n)) = g(u) \tag{4.27}$$

$$\lim_{n\to\infty} g(g(z_n)) = g(u). \tag{4.28}$$

Notemos que

$$d(f(g(z_n)), g(u)) \leq d(f(g(z_n)), g(f(z_n))) + d(g(f(z_n)), g(u)), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.29}$$

Asi pues tomando límite cuando $n \to \infty$ en ambos lados de (4.29) y usando (4.26), (4.27) se obtiene que $d(\lim_{n\to\infty} f(g(z_n)), g(u)) = 0$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} f(g(z_n)) = g(u). \tag{4.30}$$

Por otro lado, de (*iii*) se tiene que $g(u) \in f(X)$, por lo tanto existe $v \in X$ tal que

$$f(v) = g(u). \tag{4.31}$$

A continuación, probaremos que v es un punto coincidente (CP) de f y g. En efecto de (*ii*) se sigue:

$$\psi(d(g(v), g(g(z_n)))) \leq \alpha(d(f(v), f(g(z_n)))) \cdot \psi(d(f(v), f(g(z_n)))). \tag{4.32}$$

Tomando límite superior cuando $n \to \infty$ en ambos lados de (4.32) y usando (4.30), (4.31) se obtiene:

$$\psi(d(g(v), g(u))) \leq \limsup_{t\to 0} \alpha(t) \cdot \psi(0)$$

de donde se sigue que

$$d(g(v), g(u)) = 0. \tag{4.33}$$

Luego, de (4.31) y (4.33) se obtiene

$$f(v) = g(v). \tag{4.34}$$

siendo así v un punto coincidente de f y g; es decir, $C(f, g) \neq \emptyset$.

Ahora bien, débilmente compatible implica que $f(g(v)) = g(f(v))$; con ésto y la contracción de Jungck generalizada, podemos hacer uso del Teorema 4.1.1 para concluir con la existencia de un único punto fijo en común para f y g.

■

En el siguiente resultado se han mejorado un poco más las condiciones, en el sentido de que a parte de eliminar la completitud del espacio, también se ha debilitado la continuidad, al considerar funciones recíprocamente continuas.

Teorema 4.1.8. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f, g : X \to X$ dos aplicaciones tales que:*

(i) *(f, g) satisfacen la contracción de Jungck generalizada.*

(ii) *f y g son recíprocamente continuas.*

(iii) *f y g satisfacen la propiedad E.A., y son débilmente compatibles.*

Entonces f y g tienen un único punto fijo en común.

Demostración: Dado que f y g satisfacen la propiedad E.A, existe una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = t$ para algún $t \in X$. Esto garantiza que $\mathbb{L}(f, g) \neq \emptyset$. Por otra parte dado que f y g son débilmente compatibles, entonces también son condicionalmente compatibles por lo tanto existe $(z_n)_n \in \mathbb{L}(f, g)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = u \tag{4.35}$$

para algún $u \in X$ y

$$\lim_{n\to\infty} d(f(g(z_n)), g(f(z_n))) = 0. \tag{4.36}$$

Ahora bien, dado que f y g son recíprocamente continuas se obtiene a partir de (4.35)

$$\lim_{n\to\infty} f(g(z_n)) = f(u) \tag{4.37}$$

$$\lim_{n\to\infty} g(f(z_n)) = g(u). \tag{4.38}$$

A continuación, probemos que u es un punto coincidente de f y g. En efecto, de (4.36), (4.37) y (4.38) se tiene que:

$$0 = \lim_{n\to\infty} d(f(g(z_n), g(f(z_n)))) = d(f(u), g(u))$$

Por lo tanto f(u)=g(u); es decir,

$$C(f, g) \neq \emptyset.$$

Ahora bien, débilmente compatible implica que $f(g(u)) = g(f(u))$ y de esta manera tenemos las condiciones satisfechas del Teorema 4.1.1 para garantizar la existencia y unicidad de punto fijo en común para f y g.

■

Finalizaremos esta gama de aportes a la teoría métrica del punto fijo con el siguiente resultado, en el cual además de no exigir la completitud del espacio, también nos permite eliminar por completo cualquier condición de continuidad de las funciones involucradas.

Teorema 4.1.9. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f, g : X \to X$ dos aplicaciones. Supongamos que:*

(i) $\overline{g(X)} \subseteq f(X)$.

(ii) *(f, g) satisface la contracción de Jungck generalizada.*

(iii) *f y g satisfacen la propiedad E.A., y son R-débilmente conmutativas del tipo (A_f).*

Entonces, existe un único $z \in X$ tal que $f(z) = z = g(z)$.

Demostración: Dado que f y g satisfacen la propiedad E.A., entonces existe una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = t \tag{4.39}$$

para algún $t \in X$. Dado que $t \in \overline{g(X)}$ y $\overline{g(X)} \subseteq f(X)$, existe $u \in X$ tal que $t = f(u)$. Afirmamos que $f(u) = g(u)$. En efecto, de *(iii)* se tiene

$$\psi(d(g(u), g(x_n))) \leq \alpha(d(f(u), f(x_n))) \cdot \psi d(f(u), f(x_n))). \tag{4.40}$$

Tomando límite superior cuando $n \to \infty$ en ambos lados de (4.40) se obtiene

$$\psi(d(g(u), f(u))) \leq \limsup_{t\to 0} \alpha(t) \cdot \psi(d(f(u), f(u))). \tag{4.41}$$

Se concluye a partir de (4.41) y por la definición de ψ que

$$d(g(u), f(u)) = 0.$$

Así

$$f(u) = g(u).$$

Por lo tanto

$$C(f, g) \neq \emptyset. \tag{4.42}$$

Es claro que se cumplen todas las condiciones del Teorema 4.1.1, con el cual podemos garantizar la existencia de un único punto fijo en común para f y g.

■

Conclusiones

1. Desde la aparición del teorema del punto fijo de Jungck son muchas las generalizaciones que se han establecido del mismo y de diversos enfoques. En este trabajo, el capítulo 2 estuvo enfocado en generalizar el teorema del punto fijo de Jungck en un sólo sentido: utilizando un nuevo tipo de contracción en la cual intervienen las funciones que alteran distancia. A partir de este resultado se obtienen como consecuencias varios teoremas siguiendo las ideas de A. Branciari [5] y E. Rakotch [26]; además de combinaciones entre las mismas. Vale la oportunidad para destacar la importancia de la Proposición 1.1.27 en la mayoría de los resultados expuestos, lo cual fue un gran motivo para escribir su demostración con detalle.

2. La demostración del teorema del punto fijo de Jungck se podría esquematizar como sigue.

   a) $g(X) \subseteq f(X)$ implica la existencia de una sucesión $(x_n)_n$ en X, tal que $f(x_{n+1}) = g(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) La contracción de Jungck implica que $(f(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy.

   c) La completitud del espacio X garantiza la convergencia de la sucesión $(f(x_n))_n$.

   d) De la continuidad y conmutatividad de f y g, resulta que $C(f,g) \neq \emptyset$

   De esta forma se tiene la conclusión del teorema.

3. Si el par de funciones (f,g) satisface la Contracción de Jungck Generalizada y f es continua entonces g es continua.

4. Consideramos que el Teorema 4.1.1 es uno de los aportes más importantes de este trabajo, por el hecho de mantener de manera precisa y clara el objetivo del capítulo 4.

5. Quedan abiertas las siguientes interrogantes:

a) ¿Qué relación existe entre conmutatividad y R-débilmente conmutatividad del tipo (A_g)?.

b) ¿Qué relación existe entre conmutatividad y R-débilmente conmutatividad del tipo (A_f)?.

c) ¿Qué relación existe entre R-débilmente conmutatividad del tipo (A_g) y R-débilmente conmutatividad del tipo (A_f)?.

d) Es importante mencionar que todo el estudio realizado en este trabajo se pudiera trasladar a cualquier espacio con otra estructura métrica.

Bibliografía

[1] M. Aamri & D. El Moutawakil. (2002). Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions. J. Math. Anal. Appl. 270, 181-188.

[2] M. Al-Thagafi & N. Shahzad. (2008). Generalized I-nonexpansive selfmaps and invariant approximations. Acta Mathematica Sinica, English Series, 24(5), 867-876.

[3] G. Babu & P.D Sailaja. (2011). A fixed point theorem of generalized weakly contractive maps in orbitally complete metric spaces. Thai Journal of mathematics, 9(1-10).

[4] S. Banach. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fund. Math., 3, 133-181.

[5] A. Branciari. (2002). A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type. Int. J. Mat. and Math. Sci, 29(9), 531-536.

[6] G. Jungck. (1976). Commuting mappings and fixed points. Amer. Math. Monthly, 83, 261-263.

[7] G. Jungck. (1986). Compatible mappings and common fixed points. Internat. J. Math. and Math. Sci, 9(4), 771-779.

[8] G. Jungck, P. P. Murthy & Y.J. Cho. (1983). Compatible mappingd of type (A) and common fixed points. Math. Japon, 38(2), 381-390.

[9] G. Jungck & B. E. Rhoades. (1998). Fixed points for set valued functions without continuity. Indian J. Pure. Appl. Math, 29, 227-238.

[10] M. S. Khan, M. Swaleh & S. Sessa. (1984). Fixed Point theorem by altering distances between the points. Bull. Austral. Math. Soc, 30, 1-9.

[11] S. Kumar. (2010). A note on Jungck´s fixed point theorem. Fasciculi Mathematici, 45, 59-69.

[12] M. Akkouchi. (2010). Common fixed pints for three mappings using G-functions and the property (E.A). Acta universitatis Apulensis ISSN: 1582-5329(23), 223-231.

[13] E. Lages Lima. (1997). Análisis real, volumen 1. Instituto de matemática y ciencias afines, colección textos del IMCA.

[14] Z. Liu, X. Li, S. M. Kang & S. Y. Cho. (2011). Fixed point theorems for mappings satisfying contractive conditions of integral type and applications. Fixed theory and applications, doi: 10.1186.

[15] J. Morales & E. Rojas.(2012). Some fixed points theorems by altering distance functions. Palestine Journal of Mathematics, 1(2), 110-116.

[16] J. R. Morales, E. M. Rojas & R. K. Bisht.(2013). Common fixed points for pairs mappings with variable contractive parameters. En revisión.

[17] R. P. Pant.(1994). Common fixed points of noncommuting mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 188, 436-440.

[18] R. P. Pant.(1999). A common fixed point theorem under a new condition. Indian J. Pure Appl. Math., 30(2), 147-152.

[19] R. P. Pant.(2000). Noncompatible mappings and fixed points. Soochow Journal of Mathematics, 26(1), 29-35.

[20] R. P Pant and R.K. Bisht.(2012). Ocaccionally weakly compatible mappings and fixed points. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 19, 655-661.

[21] V. Pant, S. Padaliya & R.P. Pant.(2008) Common fixed points of mappings not satisfying contractive conditions. Fasciculi Mathematici,40.

[22] H. K. Pathak, S. S. Chang & Y. J. Cho.(1994). Fixed points theorems for compatible mappings of type (P). Indian J. Math 36(2), 151-166.

[23] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. M. Kang & B. S. Lee.(1995). Fixed point theorems for compatible mappings of type (P) and applications to dinamic programming, Matematiche, 50(1), 15-33.

[24] H. K. Pathak. Y. J. Cho & S. M. Kang.(1997). Remarks on R-weakly commuting mappings and common fixed point theorems. Bull. Korean. Math. Soc. 34(2),247-257.

[25] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. M. Khan & B. Maadharia.(1998). Compatible mappings of type (C) and common fixed points theorems of Gregus type. Demostratio. Math, 31(3),499-518.

[26] E. Rakotch.(1962. A note on contractive mappings. Proc. Amer. Math. Soc. 13, 459-465.

[27] R. K. Bisht & N Shahzad.(2013). Faintly compatible mappings and common fixed points. Bisht and Shahzad fixed point theory and applications.

[28] M. Searcóid. (2000). Metric spaces. Springer undergraduate mathematics series.

[29] S. Sessa.(1962). On a weak commutativity conditions of mappings in fixed point considerations. Publications de L´intitut Mathématique, 32(46), 149-153.

[30] S. L. Singh & Anita Tomar.(2003). Weaker formas of commuting maps and existence of fixed points. J. Korea.Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure. Appl. Math,10(3), 145-161.

[31] A. Tineo. (1995). Topología de espacios métricos. Mérida: Kari´ña.