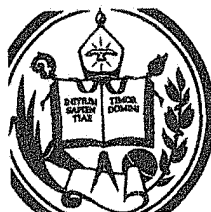


QA297  
CG7m

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DOCTORADO EN MATEMÁTICAS



**TESIS DOCTORAL**

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

---

**Un Nuevo Método De Elementos Finitos  
Para Los Problemas Difusivos  
Con Conductividades muy Distintas**

---

PRESENTADA POR: MSc. FELIPE CORDERO

DIRIGIDA POR: DR. GIOVANNI CALDERÓN

DR. PEDRO DÍEZ

SERBIULA  
Tulio Febres Cordero

MÉRIDA-VENEZUELA

MAYO 2013

DOCCION

# TESIS DOCTORAL

---

Un Nuevo Método De Elementos Finitos  
Para Los Problemas Difusivos  
Con Conductividades muy Distintas

---

PARA OPTAR AL GRADO DE  
DOCTOR EN MATEMÁTICAS

PRESENTA  
FELIPE CORDERO

EN EL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
DE LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

DIRIGIDA POR

DR. GIOVANNI CALDERÓN

DR. PEDRO DÍEZ

MÉRIDA-VENEZUELA

MAYO 2013

*A Ysolay y a mis hijas Yamaira y Yaimara.*

*A mis padres y hermanas.*

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Agradecimientos

Especial agradecimiento a mi esposa *Ysolay Asis*, por su incalculable ayuda y a mis hijas *Yamaira* y *Yaimara* por su infinito amor y paciencia. Esta Tesis no hubiese sido posible sin su ayuda. Sin duda, sus esfuerzos y, en ocasiones sacrificios, han hecho posible este logro.

Mi eterno agradecimiento a mis padres: *María González* y *Felipe Cordero*, y a mis hermanas *Mariuzaida*, *Sara* y *Lidys*. En sus palabras de ánimo y preocupación sincera he encontrado siempre motivación.

Mi más sincero agradecimiento a los tutores de esta Tesis: al *Dr. Giovanni Calderón*, por su dedicación y apoyo en el desarrollo de esta Tesis, y al *Dr. Pedro Díez*, del que he aprendido mucho como profesor e investigador. Sus conocimientos, claridad y concreción de objetivos han servido siempre de guía acertada para la consecución de este trabajo.

Agradezco también a mis compañeros de trabajo, entre ellos: a *Dr. Hanzel Lárez* por su comprensión y ayuda siempre cercana, y a *Dr. Glauco López* por su dedicación y sus consejos fundamentales en momentos de dificultad. Agradezco de manera especial al excelente grupo de investigación en la línea de análisis numéricos del área de Matemáticas Aplicadas.

Agradecer también a mis compadres *Glenda* y *Edgar Moros*, y *Yulymar* y *Frannk Salazar*. Su apoyo incondicional fue muy importantes en todo momento a lo largo de mi carrera.

Gracias a mis amigos de *trabajo*, *estudio*, *deporte* y *parranda*. Espero seguir contando con todos ustedes para lo que sigue.

Por último, gracias al *Concejo de Desarrollo Científico Humanístico Y Tecnológico* de la Universidad de Los Andes (CDCHT-ULA) por el financiamiento parcial de este trabajo, bajo el código: **I-1353-12-05-ED**

# Resumen

El método de los elementos finitos clásico (FEM) ha sido ampliamente aplicado en problemas multi fases. Sin embargo, obtener soluciones precisas con el FEM conlleva un alto costo computacional, ya que la malla debe ser conforme con la geometría de la interfase y en general, si se utilizan elementos estándares, se necesita un alto nivel de refinamiento alrededor de la misma.

El método de los elementos finitos extendido (XFEM) se ha convertido en una interesante técnica para el análisis de estos tipos de problemas, ya que permite hacer independiente la geometría de la interfase respecto de la malla de elementos finitos. Para ello se enriquecen los elementos afectados por la interfase con nuevos grados de libertad que introducen la discontinuidad de la derivada normal en la interfase.

No obstante, cuando se aplica XFEM a los problemas de difusión en un sistema de dos fases con conductividades muy distintas, esta popular estrategia produce una representación inexacta de los flujos en la vecindad de la interfase. El enriquecimiento XFEM mejora la calidad global de la solución pero no satisface algunos rasgos locales de los flujos, por lo que los flujos numéricos resultantes en la vecindad de la interfase no es realista.

Este trabajo propone modificar el XFEM para remediar este inconveniente. Para ello, se introduce una restricción adicional a la formulación XFEM que añada la propiedad de continuidad del flujo normal sobre la interfase. Se origina así, un nuevo método numérico para aproximar el problema elíptico con interfase con conductividades de alto contraste. Esta solución será denotada como XFEM+ y se desarrollarán las ideas y formulaciones necesarias para obtenerla.

Se comprueba mediante ejemplos numéricos que, en efecto, el XFEM+ mejora los flujos numéricos locales en la zona de transición y mediante un análisis del error se logra comprobar matemáticamente los resultados obtenidos. Así mismo, se logra establecer un rango de acción para resolver los problemas elípticos con interfase con los métodos de los elementos finitos.

Por otro lado, por ser el XFEM+ una restricción del XFEM en el mismo espacio de dimensión finita, la norma energética sigue siendo minorada por el XFEM. Dentro del contexto de un proceso adaptativo, el control del error se debe hacer tomando en cuenta el interés particular del problema, en general: minimizar el error global en norma energética o el error local producido por los flujos en la interfase. En una primera discusión, se debería usar el XFEM o su restricción XFEM+, según sea el caso. Sin embargo, y debido principalmente a la formulación variacional que surge de estos problemas, algo más debe decirse.

En este sentido, se analiza la representación del error y la forma de cómo lograr un proceso adaptativo óptimo orientado al cálculo de la solución de los problemas de difusión con conductividades muy distintas. La experimentación numérica deja ver los resultados analíticos presentados.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Índice general</b>	<b>IV</b>
<b>Lista de Figuras y Tablas</b>	<b>V</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	5
1.2. Estado del arte . . . . .	6
1.3. Aportes de la Tesis . . . . .	8
1.4. Organización de la Tesis . . . . .	8
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>10</b>
2.1. Motivación . . . . .	10
2.2. Problema modelo . . . . .	11
2.3. Problema elíptico con interfase . . . . .	12
2.4. Forma variacional del problema . . . . .	14
<b>3. Aproximaciones FEM y XFEM</b>	<b>20</b>
3.1. Método de los elementos finitos (FEM) . . . . .	20
3.2. Descripción de fases con level set . . . . .	22
3.3. Método de los elementos finitos extendidos . . . . .	23
3.4. Aproximación del flujo en la zona de interfase . . . . .	26

<b>4. Modificación del XFEM: XFEM+</b>	<b>30</b>
4.1. Continuidad del flujo normal . . . . .	30
4.2. La aproximación XFEM+ . . . . .	32
4.3. Forma matricial . . . . .	32
4.4. Restricción algebraica en el caso de elementos lineales . . . . .	35
<b>5. Resultados numéricos</b>	<b>38</b>
5.1. La interfase es una línea recta . . . . .	38
5.1.1. Interfase horizontal . . . . .	38
5.1.2. Interfase inclinada 10° . . . . .	39
5.1.3. Interfase inclinada 10° y refinamiento de la malla . . . . .	40
5.2. La interfase en un dominio irregular . . . . .	41
5.2.1. Interfase horizontal . . . . .	42
5.2.2. Interfase inclinada 10° . . . . .	42
5.3. La interfase es circular . . . . .	43
5.4. Análisis de convergencia . . . . .	45
<b>6. Análisis y representación del error</b>	<b>46</b>
6.1. Análisis del error . . . . .	47
6.1.1. Error del FEM . . . . .	47
6.1.2. Error XFEM . . . . .	48
6.1.3. Error XFEM+ . . . . .	49
6.2. Representación local del error . . . . .	49
6.2.1. Funcional energético . . . . .	51
6.2.2. Funcional interfase . . . . .	54
6.2.3. Funcional energético local . . . . .	56
<b>Conclusión</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>64</b>

# Lista de Figuras y Tablas

1.1. Fenómeno observado en problemas prácticos . . . . .	3
2.1. Dominio $\Omega$ y Fronteras: tipo Neumann $\Gamma_N$ y tipo Dirichlet $\Gamma_D$ . . . . .	11
2.2. Fases: $\Omega_i$ e interfase: $\Gamma_{int}$ . . . . .	12
2.3. Vectores normal y tangente . . . . .	14
3.1. Aproximación por elementos finitos cerca de $\Gamma_{int}$ . . . . .	21
3.2. La <i>Level Set</i> . . . . .	22
3.3. Funciones <i>ridge</i> y <i>level set</i> . . . . .	24
3.4. Continuidad del flujo normal para el FEM . . . . .	26
3.5. Flujos numéricos (caso interfase horizontal) . . . . .	28
3.6. Flujos numéricos (caso interfase inclinada $10^\circ$ ) . . . . .	28
4.1. Flujos con igual componente normal . . . . .	31
4.2. Elemento triangular enriquecido . . . . .	35
5.1. Aproximación XFEM+ (caso interfase inclinada $10^\circ$ ) . . . . .	39
5.2. Flujos XFEM+ con refinamiento (caso interfase inclinada $10^\circ$ ) . . . . .	40
5.3. Mapa de flujos en un dominio irregular (caso interfase horizontal) . . . . .	41
5.4. Mapa de flujos en un dominio irregular (caso interfase inclinada $10^\circ$ ) . . . . .	42

5.5. Problema con solución analítica (caso interfase circular) . . . . .	44
5.6. Análisis de convergencia . . . . .	45
6.1. Zona enriquecida $\Lambda_{enr}$ y estándar $\Lambda_{sta}$ . . . . .	50
6.2. Flujos numéricos del problema con interfase circular. . . . .	50
6.3. Flujos numéricos del problema con interfase inclinada $10^\circ$ . . . . .	51
6.4. Errores espaciales del funcional energético: interfase circular . . . . .	52
6.5. <b>Tabla:</b> Energía global y local: interfase circular . . . . .	52
6.6. Errores locales del funcional energético: interfase circular . . . . .	53
6.7. Errores espaciales del funcional energético: interfase inclinada $10^\circ$ . . . . .	53
6.8. Errores locales del funcional energético: interfase inclinada $10^\circ$ . . . . .	54
6.9. <b>Tabla:</b> Energía global y local: interfase inclinada $10^\circ$ . . . . .	55
6.10. Errores espaciales del funcional interfase: interfase circular . . . . .	55
6.11. <b>Tabla:</b> Integral de línea sobre $\Gamma_{int}$ . . . . .	56
6.12. Errores espaciales del funcional interfase: interfase inclinada $10^\circ$ . . . . .	57
6.13. <b>Tabla:</b> Norma energética local . . . . .	57

# Lista de Símbolos

## Notaciones

$\Gamma_{int}$	Interfase
$\mathbf{n}$	Normal unitaria exterior
$\mathbf{q}$	Flujo
$\Gamma_D$	Frontera tipo Dirichlet
$\Gamma_N$	Frontera tipo Neumann
$R$	Función <i>ridge</i>
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{F}$	Vector de fuerzas
$\Omega^k$	Elemento $k$ de la malla
$\mathbf{N}^{(k)}$	Vector de funciones bases (o de formas) en el elemento $k$
$\mathbf{B}^{(k)}$	Matriz gradiente
$\mathcal{E}_{enr}$	Conjunto de índices de los elementos enriquecidos
$\mathcal{N}_{enr}$	Conjunto de índices de los nodos enriquecidos
$\Lambda_{enr}$	Zona enriquecida
$\Lambda_{sta}$	Zona estándar o no enriquecida

## Letras Griegas

$\Omega$	Dominio
$\nu$	Coefficiente de difusión
$\tau$	Vector tangencial
$\phi$	Función level set

# Capítulo 1

## Introducción

El modelado de fenómenos difusivos se hace a través de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). Los problemas difusivos aparecen en muchas áreas de la ciencia e ingeniería; como por ejemplo, en la transferencia de calor en una pieza mecánica o en el transporte de aguas subterráneas en un acuífero saturado. Ahora, si la pieza está compuesta de distintos materiales o si el acuífero tiene diferentes tipos de suelos, el coeficiente de difusión dependerá del material. Estos tipos de fenómenos donde el sistema presenta singularidades se conocen como *problemas de interfase*, y son modelados a partir de la ecuación de Poisson. Situaciones más complicadas, suelen ser comunes, como son los procedimientos dependientes del tiempo: problemas mecánicos, parabólicos y de evolución de interfase que, en general, son problemas no lineales donde la configuración del sistema (o interfase) cambia en el tiempo o durante algún proceso iterativo. En este trabajo solo será considerado el problema de transferencia de calor en estado estacionario con conductividades muy distintas. Sin embargo, la aplicación a otras áreas no debería presentar ninguna dificultad.

El método de elementos finitos estándar (FEM) constituye sin duda uno de los métodos numéricos más potentes para dar solución aproximada a un amplio rango de problemas en ingeniería. Especialmente, ha sido utilizado durante mucho tiempo para aproximar los problemas de difusión en un sistema homogéneo (ecuación de Poisson con conductividad constante); ver los libros: (Bathe, 1996; Zienkiewicz & Taylor, 2000b; Mohammadi, 2008; Zienkiewicz & Taylor, 2000a; Donea & Huerta, 2002), donde se puede encontrar una explicación completa de los principios fundamentales del FEM y su aplicación para la resolución de estos tipos de problemas.

El FEM es una técnica computacional que en lugar de obtener una aproximación de la ecuación diferencial parcial directamente como lo hace, por ejemplo, los métodos de

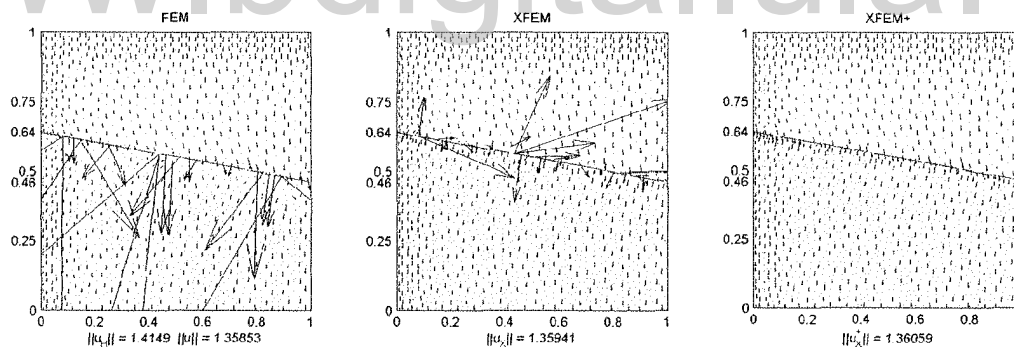
diferencias finitas, utiliza un problema variacional que implica integrar la ecuación diferencial en el dominio del problema. Este dominio se divide en un número de subdominios llamados elementos finitos y la solución de la ecuación diferencial parcial es aproximada por una función polinomial simple en cada elemento. Estos polinomios tienen que ser unidos de modo que la solución aproximada tiene un grado apropiado de suavidad sobre todo el dominio. Una vez que esto ha sido hecho, la integral variacional se evalúa como suma de las contribuciones de cada elemento finito. El resultado es un sistema algebraico para la solución aproximada que tiene un tamaño finito en lugar de la dimensión infinita original de la EDP.

Aunque el FEM es muy versátil y ha sido ampliamente desarrollado desde mediados del siglo pasado, sus características no le permiten representar adecuadamente el comportamiento real de ciertos tipos de problemas. Por ejemplo, el FEM resulta poco eficiente para modelar situaciones que involucran discontinuidades o singularidades. En particular, para modelar el problema de transmisión de calor en un medio no homogéneo; en donde la conductividad del medio está separada por una interfase. En estos casos, es necesario utilizar una malla de elementos finitos que represente la geometría de la interfase, y recurrir a procedimientos especiales que permitan capturar el carácter singular de la solución sobre la interfase. El uso de mallas conformes a la geometría de la interfase representa un mayor coste computacional en la generación de las mallas, más aún, si se considera el modelado de múltiples configuraciones de interfase o el crecimiento de una interfase a lo largo del tiempo. Un segundo problema presente en el modelado de interfase reside en la naturaleza discontinua del gradiente normal a la interfase. A fin de capturar dicha singularidad mediante el FEM, son necesarias mallas con una alta densidad de elementos en las cercanías de la interfase. Esto conlleva una labor tediosa en aplicaciones reales, donde se modelan geometrías complejas o en 3D.

Los problemas elípticos con interfase (problemas de coeficientes discontinuos y constantes a trozos) poseen propiedades características de problemas con coeficientes de difusión con singularidades. Estas singularidades disminuyen la regularidad de la solución y causan errores de menor orden en las aproximaciones obtenidas mediante los elementos finitos convencionales (Strang & Fix, 1973). No obstante, existen varias técnicas para modelar los problemas de interfase con el FEM, entre las que se pueden mencionar (Benzley, 1974; Gerstle *et al.*, 1987; Xu & Ortiz, 1993). Pero, por lo general, fueron desarrolladas con el fin de representar de forma adecuada el comportamiento singular del problema en la zona de la interfase. De esta manera, se puede disminuir el alto grado de refinamiento requerido con elementos estándar. Sin embargo, estas estrategias no son capaces de representar la discontinuidad del gradiente introducida por la interfase y esto se complica aún más para los problemas que presentan fuertes discontinuidades (conductividades muy distintas).

En los últimos años se han desarrollado diferentes procedimientos numéricos, basados en el concepto de la partición de la unidad y estudiados por (Melenk & Babuška, 1996), con el propósito de aumentar aún más el potencial del FEM y poder mejorar la descripción de problemas con singularidades, discontinuidades, etc.

Uno de estos procesos es el *método de los elementos finitos extendido* (XFEM) desarrollado en sus inicios por (Belytschko & Black, 1999). Esta estrategia es útil para aproximar de manera eficiente singularidades o discontinuidades asociadas a fracturas, fisuras o cambio de fases, mediante la adición de funciones especiales que enriquecen el espacio de la aproximación clásica de elementos finitos. Es decir, se enriquecen los elementos situados alrededor de la interfase y a lo largo de sus fases, de manera que puedan representar la interfase sin modificar la discretización. A menudo este método se asocia al uso de Level Sets (Sethian, 1999; Osher & Fedkiw, 2001) que permiten describir la geometría de la discontinuidad sin hacerla coincidir con los contornos de los elementos. Así, se evita además regenerar la malla a medida que la discontinuidad cambia su geometría, resultando en menores costos computacionales y menores errores inducidos. El XFEM constituye un importante avance en la resolución de problemas de interfase mediante técnicas de elementos finitos, y es hoy en día un área donde se realiza un intenso trabajo. Un recuento general en el origen y desarrollo del método XFEM será dado posteriormente.



**Figura:** 1.1: Fenómeno observado en problemas prácticos: el deterioro de los flujos numéricos proporcionado por el XFEM cerca de la interfase cuando los parámetros de conductividad son muy distintos

No obstante, cuando se aplica XFEM a los problemas de difusión en un sistema de dos fases con conductividades muy distintas, éste produce una representación inexacta de los flujos en la vecindad de la interfase, debido a que el enriquecimiento XFEM mejora la calidad global de la solución pero no satisface algunos rasgos locales de los flujos.

La Figura 1.1 ilustra un fenómeno que se ha observado en problemas prácticos: el deterioro de los flujos numéricos que proporcionan el FEM y FEM enriquecido (XFEM) cerca de

la interfase cuando los parámetros de conductividad son muy distintos. Se puede observar en lo que se refiere a las estrategias FEM y XFEM, que los flujos son muy imprecisos en los puntos que están cercanos a la interfase. Desde el punto de vista práctico, cuando se desean conocer los flujos en la cercanía de la interfase, esto puede representar una desventaja.

Con el fin de remediar este inconveniente, en este trabajo se propone una nueva estrategia llamada XFEM+. Ésta agrega una restricción adicional a la formulación XFEM permitiendo que se reproduzcan los rasgos de los flujos locales en la zona de transición. Este nuevo método fue publicado en (Cordero & Díez, 2010) y la Figura 1.1 muestra que la aproximación de los flujos supera considerablemente los flujos FEM y XFEM. Mediante varios ejemplos numéricos y el análisis matemático del error se justificará que el nuevo XFEM+ es una alternativa sencilla que permite mejorar de manera muy sensible la calidad de los flujos numéricos en el entorno de la interfase para los problemas elípticos con interfase con conductividades muy distintas.

Siempre que se aproxima un problema mediante una estrategia numérica, la solución obtenida presenta discrepancias con respecto al sistema que representa. Es por ello que para las técnicas basadas en la representación discreta del dominio mediante elementos finitos (FEM, XFEM y XFEM+) nos interesa controlar el error de discretización. Se sabe que la norma energética solo proporciona información sobre la calidad global de la solución aproximada y sobre la distribución del error en todo el dominio. Pero, como se ve en la Figura 1.1, la calidad de la aproximación de los problemas elípticos con interfase dependerá de una zona particular del dominio (zona de cambio de fase) y que también deba cumplir con un rasgo específico de la solución exacta (discontinuidad del gradiente sobre la interfase), entonces controlar el error de la aproximación está condicionado al interés particular que cada usuario tenga sobre ciertas cantidades o propiedades específicas de la solución (cantidad de interés) y no en la solución global.

Dentro del contexto de un proceso adaptativo, el control del error se debe hacer tomando en cuenta el interés particular del problema, en general: minimizar el error global en norma energética o el error local producido por los flujos en la interfase. A primera discusión, se debería usar el XFEM o su restricción XFEM+, según sea el caso. Sin embargo, y debido principalmente a la formulación variacional que surge de estos problemas, algo más debe decirse. En este trabajo se analizan las representaciones de los errores globales y locales producidos por estos métodos y se proponen estrategias para definir un proceso adaptativo con estos métodos de manera óptima. La experimentación numérica muestra los resultados teóricos planteados.

## 1.1. Objetivos

Con todo lo antes dicho, el objetivo principal de la Tesis es proponer el XFEM+ para resolver los problemas de difusión con conductividades muy distintas. Este hecho trae unido implícitamente otro objetivo. Analizar y comparar la eficiencia y errores cometidos en esta nueva estrategia. Para lograr este fin se ha planteado una serie de objetivos parciales, que se mencionan a continuación:

- Revisar los métodos de elementos finitos estándar y extendido, adecuándolos al modelado de los problemas de transmisión de calor estacionario en dos dimensiones y cuyo coeficiente de conductividad tiene una fuerte discontinuidad a través de una interfase. Luego, analizar las dos estrategias, utilizando algunos ejemplos que muestran las imprecisiones que presentan la aproximación de los flujos numéricos.
- Desarrollar la metodología para imponer de forma fuerte la continuidad de los flujos a través de la interfase y dar origen a la nueva estrategia XFEM+. Expresar la restricción algebraica de continuidad del flujo de la manera más sencilla y sistemática posible en el caso particular de elementos triangulares lineales.
- Validar este nuevo método mediante su aplicación a un conjunto de ejemplos numéricos (algunos con solución analítica). Para este fin se realiza una comparación de las tres estrategias, trazando sus flujos numéricos y la norma energética, la cual permite visualizar la mejora de la precisión de los flujos del XFEM+ respecto a FEM y XFEM.
- Plantear un análisis del error desde dos vertientes: una para el control del error en norma energética (forma global) y otra para el control del error solo en la zona de transición a la interfase (forma local). Para este último, se propone funcionales que midan ese objetivo específico o cantidad de interés.
- Analizar la representación del error para algunos ejemplos numéricos y proponer la forma de cómo lograr un proceso adaptativo óptimo orientado al cálculo de la solución.
- Establecer un rango de acción para resolver los problemas elípticos con interfase, mediante los métodos de los elementos finitos. Obviamente, la elección del método dependerá del tipo de conductividad presente en el sistema.

## 1.2. Estado del arte del método XFEM

En esta sección, se presenta una breve revisión del desarrollo del XFEM desde una perspectiva muy general, que considera principalmente las ideas básicas del método. En primer lugar, cabe mencionar que existe un número de artículos de revisión y documentos publicados por (Moës & Belytschko, 2002b; Karihaloo & Xiao, 2003; Bordas & Legay, 2005; Mohammadi, 2008; Yazid *et al.*, 2009), que sirven como referencia del estado del arte del XFEM.

Los fundamentos matemáticos del *método partición de la unidad* (PUM) fueron estudiados por (Melenk & Babuška, 1996). En su momento, indicaron que el PUM podría ser empleado para construir métodos numéricos robustos y muy efectivos. El enfoque de la solución de PUM constituye la base teórica de una partición local de la unidad que más adelante se denominaría como el método de los elementos finitos extendido (XFEM).

Los primeros esfuerzos en el desarrollo del XFEM se remontan al trabajo de (Belytschko & Black, 1999), en el cual presentan una técnica de elementos finitos especialmente adecuada al modelado del crecimiento de grietas (o interfase) que disminuye la necesidad de remallado de la geometría en cada etapa de crecimiento.

Poco más tarde, (Moës *et al.*, 1999) realizaron mejoras que incluyeron la adición de funciones de salto que, junto con funciones de enriquecimiento, permitieron la representación de toda la discontinuidad independientemente de la malla. La aproximación enriquecida se construye entonces a partir de la interacción de la geometría de la interfase con la malla de elementos finitos, y se elimina por completo la necesidad de remallado. Posteriormente, (Dolbow, 1999; Dolbow *et al.*, 2000a, 2001) utilizan la técnica recién desarrollada para dar solución a diferentes problemas de elasticidad.

En (Sukumar *et al.*, 2000) realizaron la extensión del método a problemas de interfases en tres dimensiones y trabajaron sobre algunos aspectos geométricos asociados a la representación de la interfase y el enriquecimiento de la aproximación de elementos finitos.

En (Stolarska *et al.*, 2001) utilizaron técnicas de level set para representar la ubicación de la interfase dentro de la aproximación FEM, y presentaron una técnica que acoplaba el *level set method* (LSM) con el XFEM para optimizar el modelado del crecimiento de la interfase. (Belytschko *et al.*, 2001) unificaron y extendieron el modelado de funciones con discontinuidades arbitrarias en elementos finitos propuesto en los trabajos anteriores. La aproximación discontinua se construye en términos de una función de distancia, de manera que se puedan usar funciones de tipo level set para actualizar la posición de la discontinuidad.

(Sukumar *et al.*, 2001) continúan el estudio del acoplamiento XFEM-LSM para el modelado de agujeros en inclusiones en aproximaciones de elementos finitos. Explorando aún más la misma temática, (Moës *et al.*, 2002), (Gravouil *et al.*, 2002) estudiaron el modelo mecánico y el uso de level sets para la propagación de interfases en tres dimensiones.

En (Sukumar *et al.*, 2003) también desarrollaron una técnica numérica para modelar la propagación de la interfase en problemas tridimensionales. (Chopp & Sukumar, 2003) extendieron el método a múltiples interfases coplanares, donde representaron todo el conjunto de interfases mediante una única función level set.

Un gran número de desarrollos siguieron el éxito inicial del método, incluyendo su extensión al modelado de discontinuidades fuertes y débiles realizada por (Sukumar & Prévost, 2003; Huang *et al.*, 2003; Legay *et al.*, 2005), el estudio de la influencia de los elementos de transición en la zona enriquecida por (Chessa *et al.*, 2003) y el uso de aproximaciones enriquecidas considerando elementos de orden cuadrático presentado por (Stazi *et al.*, 2003).

La precisión, convergencia y estabilidad del método fueron también el objetivo de los trabajos presentados por (Laborde *et al.*, 2005; Chahine *et al.*, 2006), quienes estudiaron el comportamiento de los resultados para distintas configuraciones del XFEM en problemas de mecánica de la fractura. (Ventura, 2006) estudió la integración de los elementos divididos por la interfase e indicó que es posible utilizar órdenes de cuadratura estándar sin necesidad de subdividir el dominio de dichos elementos.

En (Xiao & Karihaloo, 2006) abordaron el problema de mejorar la precisión de los flujos XFEM cerca de la interfase mediante el uso de cuadraturas de integración de orden mayor. En dicho trabajo, proponen utilizar un ajuste de *moving least squares* para reconstruir los flujos en los puntos de integración de manera que se busca obtener un campo estéticamente admisible. También, (Moës *et al.*, 2006) presentaron una nueva estrategia para imponer condiciones de contorno de tipo Dirichlet sin disminuir la velocidad de convergencia.

Los problemas de contacto, plasticidad y grandes deformaciones siempre han sido considerados como cuestiones complejas en lo que respecta el modelado computacional. Los primeros modelos de contacto con aproximaciones del tipo XFEM fueron estudiados por (Dolbow *et al.*, 2001) y posteriormente por (Belytschko *et al.*, 2002). (Khoei & Nikbakht, 2006) aplicaron las formulaciones existentes para modelar problemas de contacto con fricción. Diferentes autores han abordado el problema de grandes deformaciones, dentro de este grupo (Dolbow & Devan, 2004; Legrain *et al.*, 2005; Fagerström & Larsson, 2006) presentaron formulaciones de XFEM para el análisis de falla en problemas no lineales.

Recientemente, se ha abordado el problema de la estimación del error en aproximaciones del tipo XFEM. (Bordas & M., 2007; Bordas *et al.*, 2008) presentaron un estimador del error de discretización para el entorno XFEM basado en la reconstrucción del campo gradiente de la solución mediante una formulación enriquecida de *moving least squares*. En (Duffot & Bordas, 2008) desarrollaron una técnica de construcción global de la solución denominada *extended global derivative recovery* (XGR), en la cual la solución reconstruida se busca en un espacio enriquecido con los campos de deformación de extremo de interfase. En (Pammachet *et al.*, 2008) estudiaron la estimación del error en XFEM vinculada a refinamientos del tipo p-adaptativos con el fin de mejorar los resultados de la solución de XFEM sin cambiar la topología de la discretización. En otro trabajo, (Ródenas *et al.*, 2008c) presentaron un estimador del error de tipo recovery basado en la adaptación de la técnica Superconvergent Patch Recovery (SPR) a los problemas singulares y discontinuos típicos de formulaciones del tipo XFEM.

### 1.3. Aportes de la Tesis

Se ha presentado una estrategia para paliar la aproximación deficiente de los flujos cerca de la interfase en los problemas de difusión con dos conductividades muy distintas. El XFEM+ es una alternativa sencilla que permite mejorar de manera muy sensible la calidad de los flujos numéricos en el entorno de la interfase (Cordero & Díez, 2010).

Es de destacar que el método XFEM+ fue aplicado a otros tipos de problemas de interfase: en (Cottreau & Díez, 2011) modelan numéricamente los problemas de erosión (en 2D y 3D) donde tratan tres tipos de modelos provenientes de las leyes de Darcy y de Brinkman, además de las ecuaciones de Stoke.

Se realiza un análisis del error, presentando representaciones óptimas del error según el interés particular que se quiera: control global o solo en la zona de transición de la interfase. Este hecho deja dadas las bases fundamentales para implementar un proceso adaptativo que defina la malla óptima para el control del error en problemas de difusión con dos conductividades muy distintas. Los resultados están sometidos a revisión para su posible publicación en (Calderón & Cordero, 2012).

### 1.4. Organización de la Tesis

El resto del trabajo queda estructurado como sigue. En el Capítulo 2 se introduce la formulación matemática del problema de valores en la frontera a resolver, las ecuaciones

básicas y los fundamentos matemáticos a ser utilizados a lo largo del trabajo. En el Capítulo 3 se presenta la descripción de fases mediante Level set y los fundamentos teóricos de las aproximaciones FEM y XFEM, brindando detalles específicos asociados al contexto de comparación en términos de la implementación computacional. Así mismo se muestran los inconvenientes que se encuentran al determinar los flujos con FEM y XFEM. La metodología propuesta para imponer de forma fuerte la continuidad de los flujos a través de la interfase se describe en el Capítulo 4. En el Capítulo 5 se presentan ejemplos numéricos utilizando las tres estrategias, se comparan en función de la precisión y convergencia, para un número representativo de casos de interés y se presentan algunos comentarios que validan la estrategia que se introduce. Finalmente, en el Capítulo 6 se realiza un análisis del error para las tres estrategias y su representación apropiada para llevar a cabo un proceso adaptativo.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

## Capítulo 2

# Planteamiento del problema

En este capítulo, se introduce formalmente el modelo matemático del problema difusivo a tratar en este trabajo. Se presentan algunos aspectos concernientes a la formulación matemática que gobierna el comportamiento de la solución conjuntamente con algunos resultados analíticos conocidos acerca de la regularidad de la solución de dicho problema y su aplicación a un ejemplo concreto.

### 2.1. Motivación

Los problemas difusivos aparecen en muchas áreas de la ciencia e ingeniería; como por ejemplo, en la transferencia de calor en una pieza mecánica o en el transporte de aguas subterráneas en un acuífero saturado. Si la pieza está compuesta de distintos materiales o si el acuífero tiene diferentes tipos de suelos, el coeficiente de difusión dependerá del material. Estos tipos de fenómenos, donde el sistema presenta singularidad, se conocen como problemas de interfase y suelen aparecer en casi todas las ramas de la ingeniería y de la física. Situaciones más complicadas, suelen ser comunes, como son los procedimientos dependientes del tiempo: problemas mecánicos, parabólicos y de evolución de interfase que, en general, son problemas no lineales donde la configuración del sistema (o interfase) cambia en el tiempo o durante algún proceso iterativo. En este trabajo, como ya se dijo anteriormente, nos centramos en un problema de transmisión de calor en un medio no homogéneo con dos materiales distintos separados por una interfase. El fenómeno que se pone de manifiesto y que se va a corregir con la estrategia propuesta, se asocia a dos fases con propiedades materiales (conductividades) muy distintas. No obstante, la ampliación del problema a otras áreas no debería presentar ninguna dificultad.

En estos problemas, los procedimientos para obtener una malla ajustada a la interfase son demasiado costosos y, en general, imprecisos. Es por ello el interés de estudiar los métodos de los elementos finitos que no dependan de la geometría de la malla; es decir, la interfase puede atravesar los elementos de la malla.

En el apartado siguiente se introduce el problema modelo en un medio homogéneo, posteriormente se generaliza el modelo al problema de interés (medio no homogéneo).

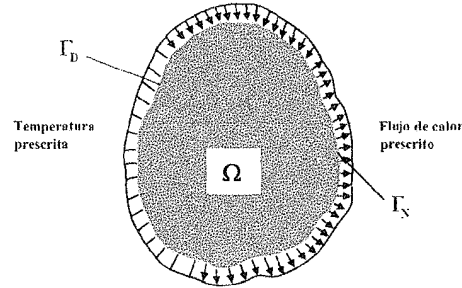


Figura 2.1: Dominio  $\Omega$  y Fronteras tipo: Neumann  $\Gamma_N$  y Dirichlet  $\Gamma_D$

## 2.2. Problema modelo

Se considera un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , abierto y acotado con frontera suave dividida en dos partes en lo que se refiere a las condiciones de contorno:  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D$ , con  $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$  siendo  $\Gamma_N$  la parte donde se imponen condiciones de tipo Neumann y  $\Gamma_D$  donde se imponen condiciones de tipo Dirichlet, como se muestra en la Figura 2.1. En este dominio se desea resolver el siguiente problema de contorno que incluye la ecuación de Poisson:

$$\nabla \cdot (-\nu \nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \quad (2.1a)$$

$$-\nu \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N \quad \text{sobre } \Gamma_N \quad (2.1b)$$

$$u = u_D \quad \text{sobre } \Gamma_D \quad (2.1c)$$

donde  $u$  es la incógnita (que, por ejemplo, representa la temperatura),  $f$  es el término fuente,  $g_N$  es el flujo de calor prescrito en  $\Gamma_N$ ,  $\mathbf{n}$  la normal unitaria exterior,  $u_D$  la temperatura prescrita en  $\Gamma_D$  y  $\nu$  es el parámetro que, en el caso de un problema térmico, representa la conductividad.

En este problema de balance, *el flujo* se define mediante la expresión siguiente

$$\mathbf{q} = -\nu \nabla u \quad (2.2)$$

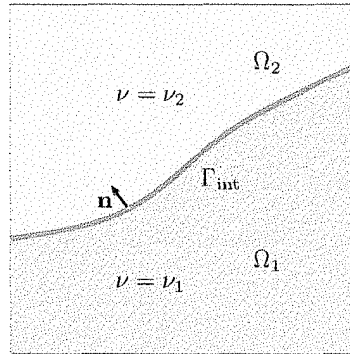


Figura 2.2: Subdominios o fases  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , interfase  $\Gamma_{\text{int}} = \overline{\partial\Omega_1} \cap \overline{\partial\Omega_2}$  y  $\mathbf{n}$  vector unitario normal a  $\Gamma_{\text{int}}$ .

El flujo de calor (o fluido) es una cantidad que proporciona una oportunidad de entender el problema físico y cómo manipular diferentes condiciones de frontera necesarias para la construcción del modelo. La conductividad térmica  $\nu$  es la propiedad del material que en el caso de ser continuo, el sistema resultará homogéneo. Pero para problemas con distintos tipos de materiales el coeficiente de conductividad será discontinuo y el sistema no homogéneo resultante introduce cambios en la regularidad de la solución.

### 2.3. Problema elíptico con interfase

Como un problema elíptico con interfase se va a considerar el problema de conducción de calor estacionario en dos dimensiones y cuyo coeficiente de conductividad es discontinuo a través de un interfase (suave) interna. Esto es, si el parámetro  $\nu$  corresponde a dos materiales distintos, entonces el dominio  $\Omega$  queda dividido en dos *fases* o conjuntos abiertos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  que tienen la frontera común  $\Gamma_{\text{int}} = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \partial\Omega$  denominada *interfase* y será una curva suave que completará el dominio  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{\text{int}}$ , tal como se ilustra en la Figura 2.2.

Nótese que la ecuación (2.1a) no está definida sobre  $\Gamma_{\text{int}}$  por no tener sentido en esos puntos donde  $\nu$  es discontinua, y por tanto es necesario replantear el problema 2.1 para solo tomar en cuenta el dominio  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . Esta restricción obliga a imponer condiciones naturales en el dominio común, por lo que, sobre la interfase se ha de verificar la continuidad de la componente normal del flujo. Para escribir esto último, se define para cualquier función suave  $u$  en  $\Omega$  el salto de  $u$  sobre  $\Gamma_{\text{int}}$  como:

$$[[u]] = u_1|_{\Gamma_{\text{int}}} - u_2|_{\Gamma_{\text{int}}}, \quad (2.3)$$

donde  $u_i = u|_{\Omega_i}$  es la restricción de  $u$  sobre  $\Omega_i$ . Inversamente, para  $u_i$  definido sobre  $\Omega_i$  se identifica el par  $\{u_1, u_2\}$  como la función  $u$  la cual es igual a  $u_i$  sobre  $\Omega_i$ .

Se denota además  $\nabla_n u = \mathbf{n} \cdot \nabla u$  como la componente normal del gradiente, en donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal a la frontera o la interfase según el caso. Así, el flujo normal

$$q_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = -\nu \nabla_n u$$

cumple la continuidad del flujo normal a la interfase:  $q_{n_1}|_{\Gamma_{\text{int}}} = q_{n_2}|_{\Gamma_{\text{int}}}$  y esto implica que el salto sobre  $\Gamma_{\text{int}}$  satisface la ecuación

$$\llbracket \nu \nabla_n u \rrbracket = \nu_1 \nabla_n u_1|_{\Gamma_{\text{int}}} - \nu_2 \nabla_n u_2|_{\Gamma_{\text{int}}} = -q_{n_1}|_{\Gamma_{\text{int}}} + q_{n_2}|_{\Gamma_{\text{int}}} = 0.$$

Así, el problema de contorno (2.1) se puede reescribir como sigue:

$$\nabla \cdot (-\nu \nabla u) = f \quad \text{en } \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (2.4a)$$

$$-\nu \nabla_n u = g_N \quad \text{sobre } \Gamma_N \quad (2.4b)$$

$$u = u_D \quad \text{sobre } \Gamma_D \quad (2.4c)$$

$$\llbracket \nu \nabla_n u \rrbracket = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{\text{int}} \quad (2.4d)$$

Pero, si los valores de  $\nu_1$  y  $\nu_2$  son distintos, la condición (2.4d) también implica que el gradiente de  $u$  tiene una discontinuidad en la componente normal a  $\Gamma_{\text{int}}$  pues  $\llbracket \nabla_n u \rrbracket \neq 0$ . Es decir,

$$\nabla u|_{\Omega_1} \cdot \mathbf{n} \neq \nabla u|_{\Omega_2} \cdot \mathbf{n} \quad (2.5)$$

En efecto, al suponer por reducción al absurdo que  $\llbracket \nabla_n u \rrbracket = 0$ , entonces  $\nabla_n u_1|_{\Gamma_{\text{int}}} = \nabla_n u_2|_{\Gamma_{\text{int}}}$  y como  $\nu_1 \neq \nu_2$ , se tiene

$$\llbracket \nu \nabla_n u \rrbracket = \nu_1 \nabla_n u_1|_{\Gamma_{\text{int}}} - \nu_2 \nabla_n u_2|_{\Gamma_{\text{int}}} = (\nu_1 - \nu_2) \nabla_n u_1|_{\Gamma_{\text{int}}} \neq 0,$$

contradiciendo (2.4d). Este salto del gradiente será mayor cuanto mayor sea la diferencia entre  $\nu_1$  y  $\nu_2$ . Sin embargo, la continuidad de la incógnita  $u$  en  $\Omega$  garantiza que la componente tangencial del gradiente es continua. Es decir que si  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector tangente a  $\Gamma_{\text{int}}$  en  $P$ , tal como se muestra en la Figura 2.3, se tiene que:

$$\nabla u|_{\Omega_1} \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla u|_{\Omega_2} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

En conclusión, la discontinuidad del gradiente (en la dirección normal a la interfase) es

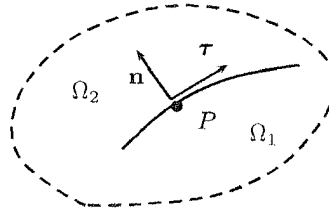


Figura 2.3: Vectores normal y tangente en un punto genérico de la interfase.

un rasgo característico que posee la solución del problema elíptico con interfase y cualquier aproximación debería contener esta propiedad.

## 2.4. Forma variacional del problema

Se introducen los espacios de Hilbert que resultan naturales para la formulación variacional de los problemas de valor de frontera a ser considerados. Para cualquier conjunto  $D$  abierto y acotado se consideran los bien conocidos espacios de Sobolev  $\mathcal{H}^r(D)$  con producto interno  $(\cdot, \cdot)_{r,D}$  y norma  $\|\cdot\|_{r,D}$ . En particular, los espacios:  $\mathcal{H}^0(\Omega) = \mathcal{L}_2(\Omega)$ , donde

$$\mathcal{L}_2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\},$$

es el espacio con el producto escalar  $(u, v)_{\Omega} = (u, v)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} uv d\Omega$  y la correspondiente norma  $\|v\|_{\Omega} = (v, v)_{\Omega}^{1/2}$ , además del espacio

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{L}_2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathcal{L}_2(\Omega), i = 1 : 2 \right\},$$

dotado del producto escalar y la correspondiente norma

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) d\Omega, \quad \|\cdot\|_1 = (\cdot, \cdot)_1^{1/2}.$$

En general, para un conjunto  $D = D_1 \cup D_2$  donde  $D_1$  y  $D_2$  son subconjuntos mutuamente disjuntos, se descompone el producto interno como:

$$(\cdot, \cdot)_{D_1 \cup D_2} = (\cdot, \cdot)_{D_1} + (\cdot, \cdot)_{D_2}. \quad (2.6a)$$

Por ejemplo,

$$(\cdot, \cdot)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = (\cdot, \cdot)_{\Omega_1} + (\cdot, \cdot)_{\Omega_2} \quad (2.6b)$$

$$(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega} = (\cdot, \cdot)_{\Gamma_D} + (\cdot, \cdot)_{\Gamma_N} \quad (2.6c)$$

Para la formulación débil del problema (2.4) se requiere también introducir los siguientes espacios funcionales. El espacio de funciones admisibles  $\mathcal{V}$ , se define como

$$\mathcal{V} := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = u_D \text{ en } \Gamma_D\},$$

y el espacio de variaciones o funciones de prueba,  $\mathcal{V}_0$ , se define como

$$\mathcal{V}_0 := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \Gamma_D\}.$$

La formulación variacional o débil se escribe como: encontrar  $u \in \mathcal{V}$  tal que

$$B(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}_0, \quad (2.7)$$

donde

$$B(u, v) := (\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega} \quad (2.8a)$$

es una forma bilineal y

$$L(v) := (f, v)_{\Omega} - (g_N, v)_{\Gamma_N} \quad (2.8b)$$

es un funcional lineal. Adicionalmente, la norma definida por:

$$\|u\| = B(u, u)^{1/2}, \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \quad (2.8c)$$

se conoce como la *norma energética* asociada al problema débil.

Obsérvese que la solución del problema débil está definida en toda  $\Omega$  mientras que la solución del problema estacionario (2.4) se encuentra definida sólo en  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . Asumiendo  $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$  y  $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ , se tiene que  $(f, v)_{\Omega} = (f, v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$  pero  $(\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega} = (\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$  siempre y cuando  $\nu \nabla u$  esté acotada en una vecindad de la interfase  $\Gamma_{\text{int}}$ , la cual está garantizada por el hecho que el flujo es continuo en la dirección normal a  $\Gamma_{\text{int}}$ ; al ser  $\nu$  discontinuo sobre  $\Gamma_{\text{int}}$ , entonces  $\nabla u$  es discontinuo sobre la interfase, así que,  $u \notin \mathcal{H}^2(\Gamma_{\text{int}})$ . Para demostrar que en efecto (2.7) es la formulación variacional de (2.4) se considera el resultado siguiente.

**Teorema 1.** Sea  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ ,  $u$  es solución de (2.4) si y solo si  $u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \cap \mathcal{H}^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$  es solución de (2.7).

**Prueba:**  $\Rightarrow$ ) Sea  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$  solución de (2.4), es bien conocido que sobre cada subdominio  $\Omega_i$  la restricción  $u_i \in \mathcal{H}^2(\Omega_i)$  satisface

$$(\nu_i \nabla u_i, \nabla v|_{\Omega_i})_{\Omega_i} = (f, v|_{\Omega_i})_{\Omega_i} + (\nu_i \nabla_{n_i} u_i, v|_{\Omega_i})_{\partial\Omega_i},$$

$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  y para  $i = 1, 2$ . Al sumar estas ecuaciones y usar (2.6b)

$$(\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = (f, v)_{\Omega} + \sum_{i=1}^2 (\nu_i \nabla_{n_i} u_i, v|_{\Omega_i})_{\partial\Omega_i} \quad (2.9a)$$

Se tiene (ver la Figura 2.2) que la interfase  $\Gamma_{\text{int}}$  es la frontera común de los subdominios  $\Omega_i$ , por lo que, la frontera de  $\Omega_i$  se puede ver como:  $\partial\Omega_i = \partial\Omega_i \setminus \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma_{\text{int}}$ , y que la normal unitaria a  $\Omega_1$  ( $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ ) está en dirección contraria a la normal a  $\Omega_2$  (es decir,  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$ ), entonces

$$\nabla_{n_1} u_1|_{\Gamma_{\text{int}}} = \nabla_n u_1|_{\Gamma_{\text{int}}} \quad \text{y} \quad \nabla_{n_2} u_2|_{\Gamma_{\text{int}}} = -\nabla_n u_2|_{\Gamma_{\text{int}}}$$

y al utilizar (2.6a) las integrales de líneas de (2.9a) quedan

$$\begin{aligned} (\nu_1 \nabla_{n_1} u_1, v|_{\Omega_1})_{\partial\Omega_1} &= (\nu_1 \nabla_{n_1} u_1, v|_{\Omega_1})_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma_{\text{int}}} \\ &= (\nu_1 \nabla_{n_1} u_1, v|_{\Omega_1})_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{\text{int}}} + (\nu_1 \nabla_n u_1, v|_{\Omega_1})_{\Gamma_{\text{int}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nu_2 \nabla_{n_2} u_2, v|_{\Omega_2})_{\partial\Omega_2} &= (\nu_2 \nabla_n u_2, v|_{\Omega_2})_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma_{\text{int}}} \\ &= (\nu_2 \nabla_{n_2} u_2, v|_{\Omega_2})_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{\text{int}}} - (\nu_2 \nabla_n u_2, v|_{\Omega_2})_{\Gamma_{\text{int}}} \end{aligned}$$

Al sumar estas dos últimas ecuaciones, se puede usar (2.6a), y los hechos que  $v|_{\Omega_1} = v|_{\Omega_2}$  sobre  $\Gamma_{\text{int}}$ ,  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_{\text{int}} \cup \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{\text{int}}$ , y que  $[[\nu \nabla_n u]] = \nu_1 \nabla_n u_1 - \nu_2 \nabla_n u_2$ , para obtener

$$\sum_{i=1}^2 (\nu_i \nabla_{n_i} u_i, v|_{\Omega_i})_{\partial\Omega_i} = (\nu \nabla_n u, v)_{\partial\Omega} + ([[ \nu \nabla_n u ]], v)_{\Gamma_{\text{int}}} \quad (2.9b)$$

Sustituyendo esto último en (2.9a)

$$(\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = (f, v)_{\Omega} + (\nu \nabla_n u, v)_{\partial\Omega} + ([[ \nu \nabla_n u ]], v)_{\Gamma_{\text{int}}}$$

y al sustituir  $q_n = -\nu \nabla_n u$  se obtiene  $\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$

$$(\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = (f, v)_{\Omega} - (q_n, v)_{\partial\Omega} - ([[ q_n ]], v)_{\Gamma_{\text{int}}} \quad (2.9c)$$

La condición (2.4d) implica que  $[[q_n]] = 0$  sobre  $\Gamma_{\text{int}}$  y al usar esto en la última igualdad conjuntamente con (2.6c) se tiene así

$$(\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = (f, v)_{\Omega} - (q_n, v)_{\Gamma_N} - (q_n, v)_{\Gamma_D}. \quad (2.9d)$$

La continuidad del flujo garantiza que  $\nu \nabla u \in \mathcal{L}_2(\Omega)$  y como  $\nu$  está acotada, entonces  $\nabla u \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ , de lo cual se deduce que:  $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  y  $(\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega} = (\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ . Por último, la condición (2.4b) nos lleva a que,  $q_n = g_N$  sobre  $\Gamma_N$  y al usar (2.8a) y (2.8b) en la ecuación (2.9d) se obtiene

$$B(u, v) = L(v) - (q_n, v)_{\Gamma_D} \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega). \quad (2.9e)$$

Al restringir la ecuación anterior a  $v \in \mathcal{V}_0$  se prueba que  $u$  es también solución del problema débil (2.7).

$\Leftarrow$ ) En el sentido contrario, sea  $u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \cap \mathcal{H}^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$  solución del problema débil, entonces  $(\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega} = (\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$  y de (2.7) se tiene que  $\forall v \in \mathcal{V}_0$

$$(\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = (f, v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} - (g_N, v)_{\Gamma_N} \quad (2.9f)$$

De nuevo, como  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$  se sabe que

$$(\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = (\nabla \cdot (-\nu \nabla u), v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} + (\nu \nabla_n u, v)_{\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)}, \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega).$$

Al sustituir esto último en (2.9f)

$$(\nabla \cdot (-\nu \nabla u), v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} + (\nu \nabla_n u, v)_{\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)} = (f, v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} - (g_N, v)_{\Gamma_N}$$

Usando la igualdad (2.9b), esto es,

$$(\nu \nabla_n u, v)_{\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)} = (\nu \nabla_n u, v)_{\partial\Omega} + ([[ \nu \nabla_n u ]], v)_{\Gamma_{\text{int}}}$$

y arreglando los términos, la ecuación anterior queda

$$-(f + \nabla \cdot (\nu \nabla u), v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} + (\nu \nabla_n u, v)_{\partial\Omega} + ([[ \nu \nabla_n u ]], v)_{\Gamma_{\text{int}}} + (g_N, v)_{\Gamma_N} = 0.$$

Como  $(\nu \nabla_n u, v)_{\partial\Omega} = (\nu \nabla_n u, v)_{\Gamma_N}$ , pues  $v|_{\Gamma_D} = 0$  y luego de multiplicar por  $-1$  y sustituir  $q_n = -\nu \nabla_n u$ , concluimos que

$$(f + \nabla \cdot (\nu \nabla u), v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} + ([[q_n]], v)_{\Gamma_{\text{int}}} + (q_n - g_N, v)_{\Gamma_N} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_0. \quad (2.9g)$$

Los tres conjuntos  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $\Gamma_{\text{int}}$  y  $\Gamma_N$  son disjuntos y la última ecuación es válida  $\forall v \in \mathcal{V}_0$ , entonces todas las integrales se deben anular. Por tanto, como la primera integral es cero  $\forall v \in \mathcal{V}_0$ , se concluye que

$$f + \nabla \cdot (\nu \nabla u) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

En efecto, al suponer por reducción al absurdo que  $v = f + \nabla \cdot (\nu \nabla u)$  es no nulo para algún punto en el abierto  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ; por la continuidad de  $v$  existe un abierto  $\vartheta \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$  donde  $v \neq 0$ . Definiendo  $v = 0$  sobre  $\partial\Omega \cup \Gamma_{\text{int}}$  se tiene que  $v \in \mathcal{V}_0$  y de (2.9g) se tiene  $(v, v)_{\vartheta} \leq (v, v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = 0$  contradiciendo el hecho  $(v, v)_{\vartheta} > 0$  si  $v \neq 0$ . Así que se cumple (2.4a), de la misma manera, se prueba que  $(q_n - g_N)|_{\Gamma_N} = 0$  y  $[[q_n]]|_{\Gamma_{\text{int}}} = 0$ , cumpliéndose las condiciones (2.4b) y (2.4d) y probando que  $u$  es solución del problema (2.4). ■

Nótese que *las condiciones naturales* (2.4b) y (2.4d) están reemplazadas en el problema débil por condiciones débiles. Esto es,

$$(q_n - g_N, v)_{\Gamma_N} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}_0, \quad (2.10)$$

y por

$$([[q_n]], v)_{\Gamma_{\text{int}}} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}_0. \quad (2.11)$$

Estas condiciones se establecen en forma implícita en la formulación débil, por lo que se espera que la aproximación calculada las satisfaga. Pero, la solución de la ecuación débil solo se verificará exactamente al resolver la ecuación de manera exacta en el espacio de dimensión infinita  $\mathcal{V}_0$ , pero al sustituir  $\mathcal{V}_0$  por un espacio de dimensión finita, tal como se hace al utilizar los métodos de los elementos finitos, estas restricciones sólo se verifican de manera aproximada en un subespacio de dimensión finita.

Para el caso de la condición débil de Neumann (2.10) no presenta problema para su aproximación, porque además de encontrarse en la frontera, hay la suposición de la continuidad del flujo normal y los errores en la aproximación se pueden despreciar. Sin embargo, para la condición débil de la continuidad del flujo normal a la interfase (2.11), sí es necesario tener una buena aproximación del salto del flujo por estar en la zona de equilibrio de los flujos entre dos fases. Para lograr una buena aproximación se puede: tomar un espacio suficientemente grande, pero asumiendo el costo que esto conlleva, o se pueden incorporar aproximaciones con salto del flujo continuo o simplemente buscar una estrategia de incorporar la condición fuerte de manera explícita en la formulación débil.

Se mostrarán distintas estrategias usando el método de elementos finitos para resolver en forma aproximada el problema planteado y, luego de mostrar en el Capítulo 5 ejemplos numéricos para comparar los métodos, en el Capítulo 6 se analizarán los errores de las aproximaciones en donde se tomará en cuenta el siguiente resultado.

**Corolario 2.** Si  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$  satisface (2.4a), entonces  $\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$  se tiene que:

$$(\nu \nabla u, \nabla v)_\Omega = (\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} + (\llbracket q_n \rrbracket, v)_{\Gamma_{\text{int}}}. \quad (2.12)$$

**Prueba:** Usando la fórmula de Green sobre todo  $\Omega$   $(\nu \nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega - (q_n, v)_{\partial\Omega}$  y al igualar esto a (2.9c) se tiene el resultado deseado. ■

Se debe advertir que al no cumplirse la condición (2.4d), existe una variación entre las formas bilineales  $(\nu \nabla u, \nabla v)_\Omega$  y  $(\nu \nabla u, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ ; esto va a ocurrir cuando se aproxime la solución por cualquier método de elementos finitos.

Recuerde que, cualquier solución de elementos finitos se toma como aquella que minimiza la norma de energía del error en el espacio de soluciones de la forma débil. Pero este espacio está definido sobre todo el dominio  $\Omega$  mientras que el espacio de soluciones del problema fuerte está definido sólo en  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . Como  $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$ , es claro que

$$\|u\|_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \leq \|u\| \quad (2.13)$$

y según (2.12) la igualdad sólo se alcanza si  $u$  satisface (2.4d). Pero al optimizar la energía en un espacio que no contenga soluciones con gradientes discontinuos sobre la interfase, entonces

$$\|u\|_{\Omega_1 \cup \Omega_2} < \|u\|$$

y el valor óptimo del funcional  $\|\cdot\|$  en ese espacio será mayor que el valor energético del problema fuerte; así que es imposible que la solución del problema débil coincida con la solución del problema original. El FEM estándar se basa en aproximaciones polinómicas a trozos donde la discontinuidad del gradiente sólo es posible en los bordes de los elementos y al menos que se haga coincidir los elementos de la malla con la interfase será imposible aproximar bien la solución del problema fuerte.

Debido al costo para ajustar la malla a la interfase, surge la necesidad de extender (o enriquecer) el espacio de soluciones para que incluya funciones con gradientes discontinuos. La aproximación XFEM es óptima en el espacio extendido que contiene la solución del problema fuerte, por lo que la igualdad en (2.13) si se va a cumplir para el error XFEM.

## Capítulo 3

# Aproximaciones FEM y XFEM

Una vez formulado el problema variacional (2.7), cuya solución exacta  $u$  pertenece a un espacio de funciones  $\mathcal{V}$ , la idea de encontrar una solución aproximada por el FEM, es construir un subespacio de dimensión finita  $\mathcal{V}_H$  de  $\mathcal{V}$ , en donde la solución aproximada sea la función de  $\mathcal{V}_H$  que minimice la norma energética del error.

En este capítulo se darán las formulaciones matemáticas del FEM y del XFEM para los problemas multi fases del tipo presentado en el Capítulo 2. El objetivo es establecer las diferencias entre ambos métodos y mostrar los inconvenientes que puedan presentar estas estrategias cuando son aplicadas a los problemas difusivos con conductividades muy distintas.

### 3.1. Método de los elementos finitos (FEM)

El espacio funcional donde se encuentra la solución FEM está asociado a una malla de elementos con tamaño característico  $H$ , se denomina  $\mathcal{V}_H$  y es un subespacio de  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}$ . La malla consiste en una discretización del dominio  $\Omega$  en elementos  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_{elem}$  disjuntos y que cubren el dominio, es decir, tales que  $\bar{\Omega} = \bigcup_k \bar{\Omega}_k$ , y, para  $k \neq k'$ ,  $\Omega_k \cap \Omega_{k'} = \emptyset$ .

Este espacio viene generado por las funciones de interpolación (o de forma)  $N_i$ ,  $i = 1, \dots, n_{poin}$ , asociadas a los  $n_{poin}$  nodos de la malla:  $\mathcal{V}_H = \text{span}\{N_1, \dots, N_{n_{poin}}\}$ .

La aproximación del FEM clásica o estándar en  $\mathcal{V}_H$  de  $u$  se denotará como  $u_H$  y queda determinada por los valores nodales  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, n_{poin}$ , tal que:

$$u_H = \sum_{i=1}^{n_{poin}} N_i u_i$$

La solución FEM,  $u_H$  satisface que

$$B(u_H, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}_{H_0} \subset \mathcal{V}_0,$$

siendo  $\mathcal{V}_{H_0}$  la contraparte discreta del espacio  $\mathcal{V}_0$ . La solución  $u_H$  se obtiene al determinar los coeficientes  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, n_{\text{poin}}$ , a partir del sistema de ecuaciones lineales algebraico,

$$\mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} = \mathbf{F}_u, \quad (3.1)$$

donde el vector columna solución  $\mathbf{u}$ , contiene los coeficientes  $u_i$ ,  $\mathbf{K}_{uu}$  denota la matriz de rigidez y  $\mathbf{F}_u$  el vector de fuerzas cuyas componentes genéricas son  $[\mathbf{K}_{uu}]_{ij} = B(N_i, N_j)$  y  $[\mathbf{F}_u]_j = L(N_j)$ , respectivamente.

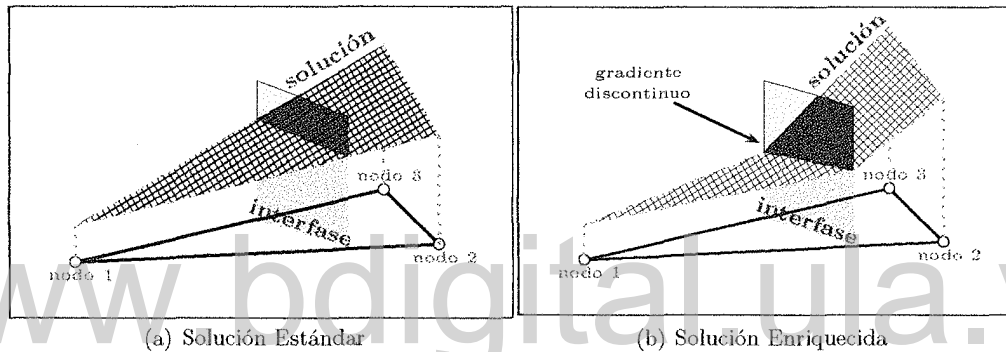


Figura 3.1: Aproximación por elementos finitos cerca de  $\Gamma_{\text{int}}$ .

El error asociado a la solución FEM,  $e_H := u - u_H$ , pertenece al espacio  $\mathcal{V}_0$ , salvo un término de oscilaciones de los datos que se considera despreciable (es decir, se considera que  $u_D$  se describe exactamente en  $\mathcal{V}_H$ ). La ortogonalidad de Galerkin garantiza que  $u_H$  es óptima en el sentido de que

$$\|e_H\| \leq \|u - v\| \quad \forall v \in \mathcal{V}_H$$

siendo  $\|\cdot\|$  la norma de energía.

La aproximación FEM,  $u_H$ , es suave en el interior de los elementos (ver Figura 3.1.(a)), es decir, su gradiente es continuo dentro de todo  $\Omega_k$ . Recuerde que una de las características importantes de la solución de los problemas elípticos con interfase es que tiene gradiente discontinuo sobre los puntos de la interfase, por lo que resulta necesario tomar la malla de elementos finitos de manera adecuada para que el FEM pueda satisfacer esta condición. Ajustar la malla a esta condición puede ser costoso, por lo que, lo ideal es modificar el FEM para evitar el ajuste de la malla.

### 3.2. Descripción de fases con level set

La técnica de los level sets (Sethian, 1999; Osher & Fedkiw, 2001), se utiliza para describir la localización de las fases sin tener que hacer coincidir la línea de interfase con los lados de los elementos. Para ello, se introduce una función de nivel  $\phi$  (la función level set) de manera que

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0, & x \in \Omega_1 \\ = 0, & x \in \Gamma_{\text{int}} \\ < 0, & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

De hecho, en la práctica, la función  $\phi$  se toma como la función distancia a la interfase, con signo. A menudo, además, esta función se trunca a una cierta distancia de manera que a partir de ese momento se toma constante (ver Figura 3.2).

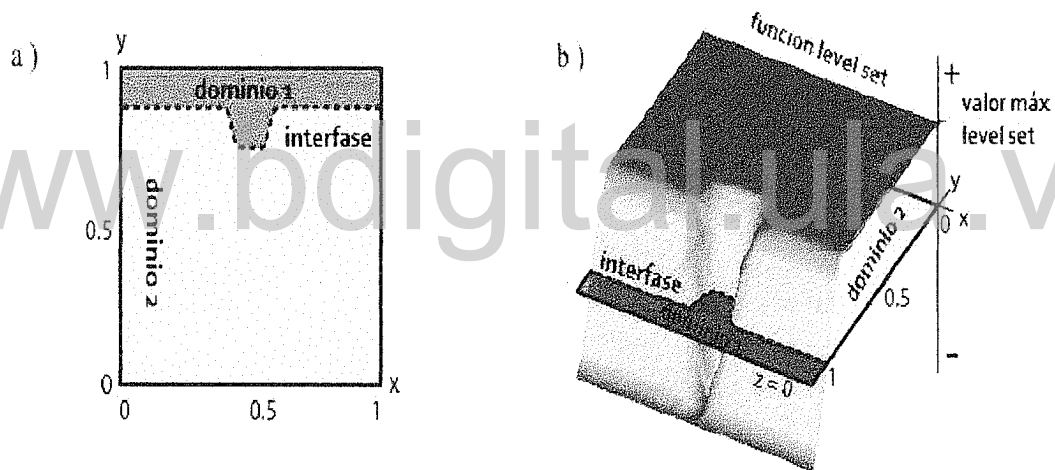


Figura 3.2: La función *Level Set* es en general la función distancia signada a la interfase y a partir de cierta distancia se toma constante.

La función level set,  $\phi$ , también se aproxima por una función de  $\mathbf{V}_H$ ,  $\phi_H$ . Los valores nodales  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, n_{\text{poin}}$  permiten interpolar  $\phi$  en cada elemento:

$$\phi \approx \phi_H = \sum_{i=1}^{n_{\text{poin}}} N_i \phi_i.$$

De esta manera, la descripción discreta de la interfase es una curva continua, suave en el interior de los elementos y con discontinuidades en la pendiente en los lados de los elementos

que contienen la interfase. En el caso de elementos lineales es, precisamente, una línea poligonal quebrada.

Esto permite también calcular el vector normal unitario a la interfase en un punto  $P$  de la interfase interior a un elemento  $\Omega_k$ :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi_H}{\|\nabla\phi_H\|} \quad \text{con} \quad \nabla\phi_H = \sum_{i=1}^{n_{poin}} \nabla N_i \phi_i. \quad (3.2)$$

### 3.3. Método de los elementos finitos extendidos

La aproximación del método de los elementos finitos extendidos XFEM (Moës *et al.*, 1999; Belytschko & Black, 1999; Daux *et al.*, 2000; Chessa & Belytschko, 2003; Zlotnik *et al.*, 2007) enriquece la solución del FEM estándar incorporando funciones de forma que contengan la característica de gradientes discontinuos sobre la interfase, ver la Figura 3.1.(b). Recuerde que esta es una propiedad de la solución exacta que se conoce a priori y que en principio la solución FEM no contiene.

El método XFEM se basa en el enriquecimiento del modelo de elementos finitos FEM con grados de libertad adicionales en los elementos geoméricamente intersecados por la interfase. De esta forma la discontinuidad en la derivada (normal a la interfase) se incorpora sin modificar la discretización de la malla, que es generada sin considerar la posición de la interfase.

Con el fin de extender el espacio de soluciones con funciones con derivadas discontinuas sobre la interfase se necesita definir funciones con esas características. Para ello se introduce una función *ridge* (carena o arista),  $R$ , introducida en (Moës *et al.*, 2003) y definida por

$$R = \sum_{i=1}^{n_{poin}} N_i |\phi_i| - \left| \sum_{i=1}^{n_{poin}} N_i \phi_i \right|.$$

Esta función se anula en los elementos que no contienen la interfase (todos los  $\phi_i$  son del mismo signo) y, en los elementos que sí la contienen (véase la Figura 3.3 (a)), se anula en los nodos y presenta una discontinuidad en la derivada precisamente sobre la interfase. En lo que sigue, se denomina  $\mathcal{E}_{enr}$  al conjunto de índices de los elementos que contienen parte de la interfase (llamado elementos enriquecidos), como se muestra en la Figura 3.3 (b). Así,  $R$  sólo es distinto de cero en los elementos enriquecidos  $\Omega_k$  con  $k \in \mathcal{E}_{enr}$ .

De hecho, se puede restringir el rango de variación del índice  $i$  a aquellos nodos que pertenecen a elementos que contienen la interfase. Estos nodos se denominan nodos enriquecidos y el conjunto de valores de estos índices se denomina  $\mathcal{N}_{enr}$ . Así la ecuación anterior se puede reescribir

$$R = \sum_{i \in \mathcal{N}_{enr}} N_i |\phi_i| - \left| \sum_{i \in \mathcal{N}_{enr}} N_i \phi_i \right|$$

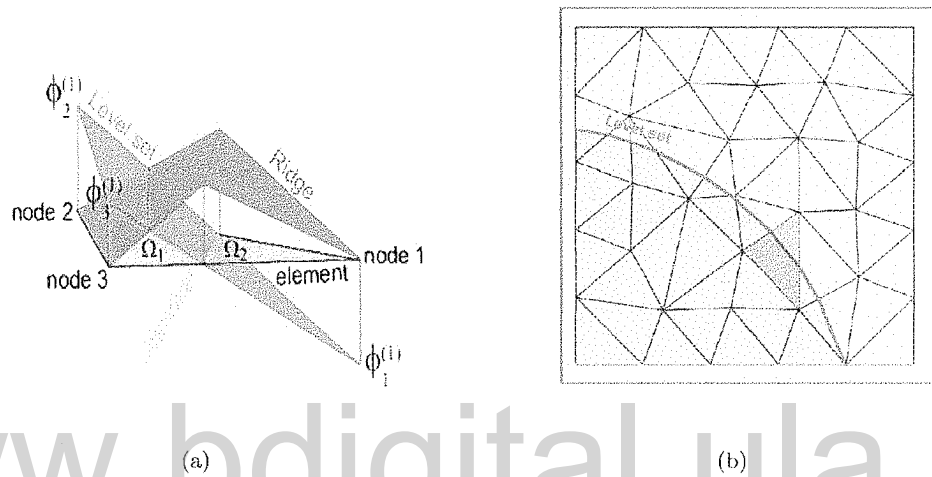


Figura 3.3: (a) Funciones *ridge* y *level set* (b) Elementos cruzados por el level set

La aproximación XFEM,  $u_X$ , se escribe como

$$u_X = \sum_{i=1}^{n_{poin}} N_i u_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_{enr}} M_j a_j, \quad (3.3)$$

donde  $M_j := RN_j$  son las funciones de formas con gradientes discontinuos que son incorporadas en los nodos (enriquecidos) cercanos a la interfase. Los  $a_j$  son los grados de libertad para satisfacer la formulación débil y son llamados los valores nodales enriquecidos. Nótese que los valores nodales  $u_i$  de la solución  $u_X$  en general no coinciden con los de  $u_H$  pues al introducir el enriquecimiento también las incógnitas originales cambian.

La solución  $u_X$  pertenece al espacio discreto enriquecido o extendido

$$\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_H \oplus \text{span}\{M_j, j \in \mathcal{N}_{enr}\}$$

y se caracteriza por ser solución de la formulación débil

$$B(u_X, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}_{X_0} \subset \mathcal{V}_0. \quad (3.4a)$$

El sistema algebraico resultante es, por supuesto, una extensión del sistema FEM (3.1) y está dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ua} \\ \mathbf{K}_{ua}^\top & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_a \end{bmatrix} \quad (3.4b)$$

donde  $\mathbf{a}$  es el vector columna de las incógnitas  $a_j$ ,  $j \in \mathcal{N}_{enr}$  y las componentes genéricas de las matrices son  $[\mathbf{K}_{ua}]_{ij} = B(N_i, M_j)$ ,  $[\mathbf{K}_{aa}]_{ij} = B(M_i, M_j)$  y  $[\mathbf{F}_a]_j = L(M_j)$ .

De la misma manera que la solución FEM, la solución XFEM es óptima en el sentido de que verifica la ortogonalidad de Galerkin en  $\mathcal{V}_X$ . Es decir que el error  $e_X = u - u_X$  satisface:

$$\|e_X\| \leq \|u - v\| \quad \forall v \in V_X.$$

En particular, se puede tomar  $v = u_H \in \mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}_X$  y se deduce que

$$\|e_X\| \leq \|e_H\|. \quad (3.4c)$$

Así, la solución  $u_X$  es, desde el punto de vista energético (global), mejor que  $u_H$ . El XFEM enriquece la solución introduciendo la posibilidad de que aparezca un salto en la componente normal del gradiente para intentar satisfacer (2.4d). Gracias a esta propiedad, el XFEM es capaz de obtener una mejora sustancial en la aproximación de la solución exacta.

Sin embargo, la condición (2.11) no es utilizada de manera explícita en la formulación débil (3.4a), así como tampoco se tiene en cuenta en el sistema algebraico (3.4b). Esto significa que no se puede asegurar que la aproximación satisfaga la continuidad del flujo normal a la interfase y en consecuencia la aproximación puede no tener ese rasgo característico que tiene la solución exacta. En efecto, y como se verá en los resultados numéricos, existen problemas que aparecen en las aplicaciones; como son los problemas de difusión en un sistema de dos fases con conductividades muy distintas, en donde se necesita aproximar no solo la solución del problema sino también los flujos y en donde el XFEM puede ser poco preciso. Más adelante, en el análisis del error, se probará que como la aproximación XFEM solo satisface la condición de continuidad normal del flujo de manera débil, esta estrategia puede producir una representación inexacta de los flujos en la vecindad de la interfase.

### 3.4. Aproximación del flujo en la zona de interfase

Como ya se ha mencionado, el FEM no puede satisfacer la condición (2.4d) en los puntos de la interfase ya que el gradiente es continuo en el interior de los elementos, contradiciendo (2.5). Para probar esto, recuérdese que el salto de la aproximación FEM del flujo normal  $q_n^H$  en un punto  $P$  de  $\Gamma_{\text{int}}$  interior a un elemento, que habría de ser nulo, se expresará como

$$[[q_n^H]] = q_{n_1}^H|_{\Gamma_{\text{int}}} - q_{n_2}^H|_{\Gamma_{\text{int}}} = -(\nu_1 \nabla_n u_H|_{\Gamma_{\text{int}}} - \nu_2 \nabla_n u_H|_{\Gamma_{\text{int}}}) = (\nu_2 - \nu_1) \nabla_n u_H|_{\Gamma_{\text{int}}}$$

dado que  $\nabla_n u_H$  es continuo en el interior de cualquier elemento. Obviamente, esto sólo permite verificar (2.4d) si  $\nabla_n u_H$  se anula en  $\Gamma_{\text{int}}$ . Esto no es cierto en general. Se debe esperar, por lo tanto, que la solución FEM de este problema no sea una buena aproximación a la solución exacta, especialmente cuando el contraste entre  $\nu_1$  y  $\nu_2$  es grande.

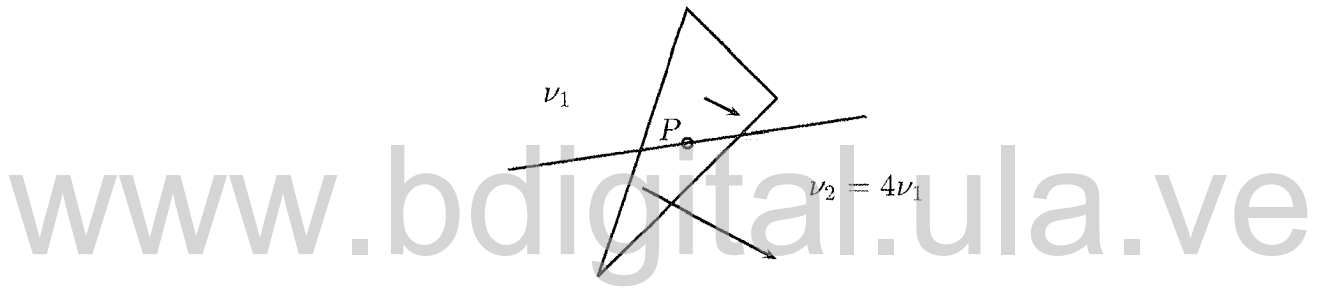


Figura 3.4: Gradiente continuo sobre la interfase.

Este fenómeno se ilustra en la Figura 3.4 en donde, en un elemento lineal que contiene parte de la interfase, el gradiente es constante y, por lo tanto, los flujos a ambos lados de la interfase son proporcionales a los valores de  $\nu_1$  y  $\nu_2$ . En este caso la condición de continuidad del flujo normal no se puede verificar.

El XFEM enriquece la solución introduciendo la posibilidad de que aparezca un salto en la componente normal del gradiente para intentar satisfacer (2.4d), según se indica en (3.3). Así, el gradiente de  $u_X$  resulta ser

$$\nabla u_X = \sum_{i=1}^{n_{\text{poín}}} \nabla N_i u_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} (R \nabla N_j + \nabla R N_j) a_j.$$

La discontinuidad de  $\nabla u_X$  en un punto  $P$  de  $\Gamma_{\text{int}}$  interior a un elemento  $\Omega_k$  proviene de  $\nabla R$  puesto que  $\nabla N_i$  y  $R$  son continuos en el interior de  $\Omega_k$ . De hecho, recordando que  $\phi$  es

positivo en  $\Omega_1$  y negativo en  $\Omega_2$ , se tiene que la expresión de  $R$  a ambos lados de la interfase es

$$R|_{\Omega_1} = \sum_{i \in \mathcal{N}_{enr}} N_i (|\phi_i| - \phi_i) \quad \text{y} \quad R|_{\Omega_2} = \sum_{i \in \mathcal{N}_{enr}} N_i (|\phi_i| + \phi_i) \quad (3.5)$$

Obsérvese que  $\nabla R|_{\Omega_2} - \nabla R|_{\Omega_1} = 2\nabla\phi_H \neq 0$ . De hecho, como se esperaba, el salto del gradiente de  $R$  es paralelo a la normal  $\mathbf{n}$  ya que ésta es paralela a  $\nabla\phi_H$ .

Gracias a esta propiedad, se espera que el XFEM sea capaz de obtener una mejora sustancial en la aproximación de la solución exacta. De hecho, como se muestra a continuación, el XFEM permite obtener la solución exacta en un problema sencillo en el que el FEM propone una solución muy poco precisa.

### Ejemplo 1

Para ilustrar esta propiedad y para motivar los desarrollos que se presentan a continuación, se acude a un ejemplo sencillo. Considérese el problema (2.4) con los datos siguientes:  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $g_N = 0$  en los lados verticales de  $\Omega$ ,  $u_D = 1$  en el lado superior,  $u_D = 0$  en el lado inferior de  $\Omega$  y  $f \equiv 0$ . Se toman dos materiales con un contraste de conductividades importante:  $\nu_1 = 1000$  en la parte superior y  $\nu_2 = 1$  en la parte inferior. Se toman dos configuraciones de las fases: la primera (1a) con una interfase horizontal en  $y = 0.55$  (que corta los elementos de la malla propuesta) y la segunda (1b) con una interfase inclinada  $10^\circ$ .

En la primera configuración (Ejemplo 1a), ver Figura 3.5, el problema es prácticamente 1D y se dispone de solución analítica:

$$u(x, y) = \frac{1}{550.45} \begin{cases} 1000y & \text{para } y \leq 0.55 \\ y + 549.45 & \text{para } y > 0.55 \end{cases}$$

En este caso, el FEM se comporta mal debido a la imposibilidad de reproducir el salto de flujos normales mientras que el XFEM captura la solución exacta y, por lo tanto, muestra un comportamiento óptimo.

Sin embargo, esta capacidad que tiene el espacio funcional para capturar el salto del gradiente no hace que en todos los casos los flujos numéricos sean de una calidad aceptable. La segunda configuración (Ejemplo 1b) está asociada a una solución algo más compleja, completamente 2D y de la que no se dispone de solución analítica. Aún así se puede calcular fácilmente una solución muy precisa utilizando el FEM con una malla que respete la interfase (de manera que la interfase coincida con lados de los elementos de la malla y que no

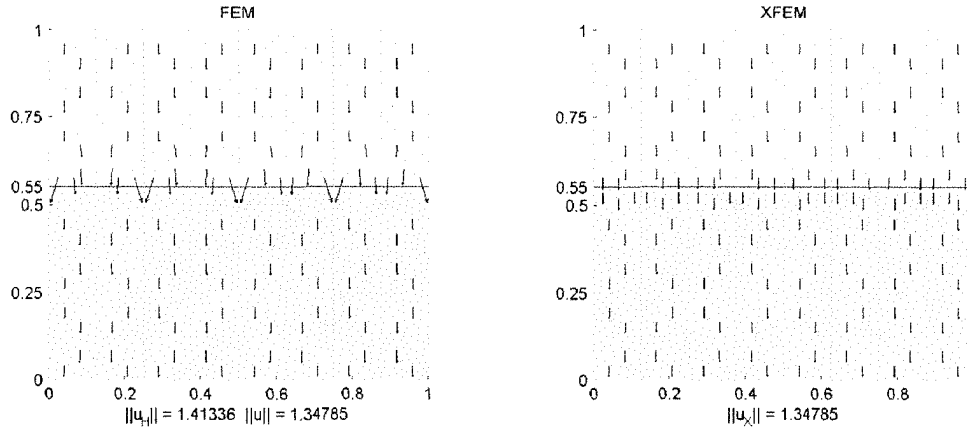


Figura 3.5: Tanto en la configuración de los flujos locales como en la norma energética de la solución FEM proporciona una solución mucho menos precisa que XFEM que, en este caso, proporciona la solución exacta.

sea necesario utilizar un level set). Esta solución se tomará como referencia. Utilizando la descripción con level set de la interfase, los resultados, tanto con FEM como con XFEM, se muestran en la Figura 3.6. Se puede observar que los resultados mejoran al usar XFEM pero que la aproximación de los flujos locales no es buena, ya que no se respeta la condición de continuidad de la componente normal del flujo. Desde el punto de vista energético, es decir

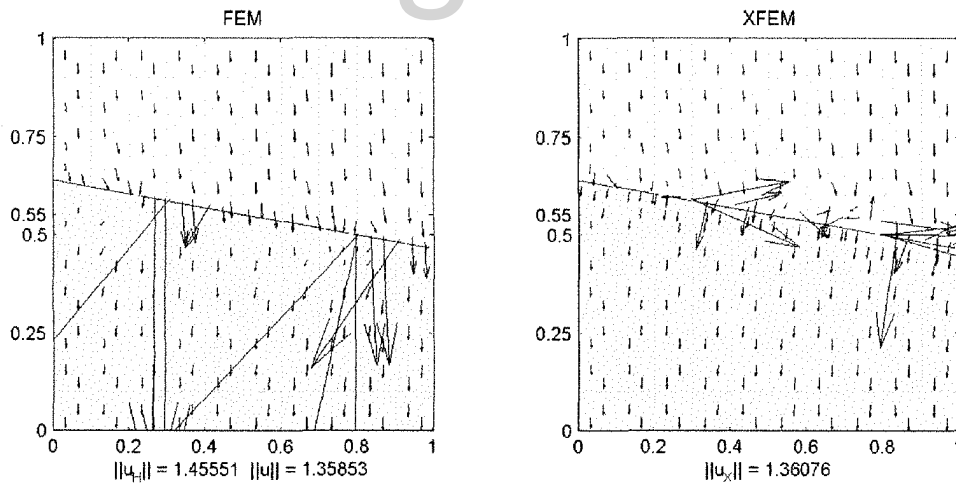


Figura 3.6: La mejora que introduce el XFEM supone un mejor comportamiento en la aproximación de la norma energética pero no en la aproximación de los flujos en las proximidades de la interfase.

con un criterio global en todo el dominio, la solución mejora sensiblemente. Sin embargo, en la cantidad de interés local que son los flujos, la calidad de la solución XFEM no es tan buena como cabría esperar.

Este ejemplo ilustra un fenómeno que se ha observado en problemas prácticos: el deterioro de los flujos numéricos que proporciona XFEM cerca de la interfase cuando los parámetros

de conductividad son muy distintos. En la Figura 3.6 se puede observar que los flujos que son poco precisos son aquéllos que están en la zona con  $\nu = 1000$ . Esto es así ya que en esa zona aunque los errores en el cálculo del gradiente sean pequeños, los errores en los flujos se multiplican por  $\nu$ . Desde el punto de vista práctico, cuando se desea conocer los flujos en la interfase, esto puede representar una desventaja. Para paliar este inconveniente, en el capítulo siguiente se propone una modificación ulterior a XFEM, que denominamos XFEM+ y que permite imponer la condición del salto de flujos en la interfase de manera fuerte. Esto producirá una buena descripción de los flujos alrededor de la interfase.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

## Capítulo 4

# Modificación del XFEM: XFEM+

Con el fin de remediar el inconveniente que presenta XFEM para los problemas de interfase con conductividades muy distintas, en este capítulo se quiere añadir a la ecuación general a resolver la continuidad del flujo normal a la interfase, originando así, el nuevo método XFEM+ cuya solución se denotará como  $u_X^+$ .

### 4.1. Continuidad del flujo normal sobre la interfase

Para imponer de manera explícita la continuidad del flujo normal al sistema XFEM se propone añadir en algunos de los puntos  $P$  de  $\Gamma_{\text{int}}$  la ecuación (2.4d). Esto se toma de la misma forma como se imponen las condiciones de frontera tipo Dirichlet en el sistema algebraico; esto es, en cada punto fronterizo se añade una condición lineal al sistema general. Del mismo modo, al menos en algunos de estos puntos se requerirá que los flujos sobre la interfase tengan igual componente normal tal como se muestra en la Figura 4.1. Para ello, se presenta a continuación la expresión algebraica en el contexto de la aproximación XFEM de (2.4d).

Recordando la expresión de los valores de  $R$  en un punto  $P$  de la interfase a ambos lados dada en (3.5), se obtiene una expresión para la diferencia de los gradientes de  $R$  multiplicados por los valores correspondientes de  $\nu$  a cada lado:

$$\begin{aligned}\nu_2 \nabla R|_{\Omega_2} - \nu_1 \nabla R|_{\Omega_1} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} \nabla N_j [(\nu_2 - \nu_1) \phi_j] + (\nu_2 + \nu_1) \phi_j \\ &= (\nu_2 - \nu_1) \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} \nabla N_j \tilde{\phi}_j\end{aligned}\tag{4.1}$$

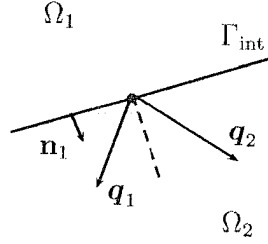


Figura 4.1: Flujos con igual componente normal; se va a imponer que los flujos  $\mathbf{q}_1$  y  $\mathbf{q}_2$  tengan igual componente normal.

donde se han introducido los valores  $\tilde{\phi}_j$  definidos por

$$\tilde{\phi}_j = |\phi_j| - \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \phi_j. \quad (4.2)$$

Por otro lado, la expresión del salto de flujos a ambos lados de un punto  $P \in \Gamma_{\text{int}}$ ,  $[[q_n]]$ , está dada por

$$[[q_n]] = q_{n1}|_{\Gamma_{\text{int}}} - q_{n2}|_{\Gamma_{\text{int}}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_{\Omega_1} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_{\Omega_2} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}|_{\Omega_i}$ , y la diferencia de los flujos a ambos lados de la interfase  $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 &= -\nu_1 \nabla u_X|_{\Omega_1} + \nu_2 \nabla u_X|_{\Omega_2} \\ &= \sum_{i=1}^{n_{\text{poin}}} (\nu_2 - \nu_1) \nabla N_i u_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} (\nu_2 - \nu_1) R \nabla N_j a_j \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} (\nu_2 \nabla R|_{\Omega_2} - \nu_1 \nabla R|_{\Omega_1}) N_j a_j. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Y, sustituyendo (4.1) en (4.4), se obtiene

$$\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 = (\nu_2 - \nu_1) \left( \sum_{i=1}^{n_{\text{poin}}} \nabla N_i u_i + \sum_{\ell \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} \nabla N_\ell \left( R + \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} \tilde{\phi}_j N_j \right) a_\ell \right). \quad (4.5)$$

Obsérvese que la condición (4.5) se puede imponer en cada punto  $P \in \Gamma_{\text{int}}$  (en un elemento enriquecido  $\Omega_k$ , con  $k \in \mathcal{E}_{\text{enr}}$ ) y representa una restricción algebraica sobre las incógnitas  $u_i$  y  $a_j$  (en principio para  $i = 1, \dots, n_{\text{poin}}$  y  $j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}$ , pero en realidad  $i$  y  $j$  han de recorrer

sólo los índices de los nodos del elemento  $\Omega_k$ ). Recuérdese también que la solución XFEM,  $u_X$ , no verifica esta restricción puesto que sólo se impone de manera débil.

## 4.2. La aproximación XFEM+

En este apartado se impone de manera fuerte la continuidad del flujo normal a la interfase (2.4d) al sistema algebraico XFEM. Se tomará un conjunto de  $m$  puntos sobre  $\Gamma_{\text{int}}$  para añadir al sistema estas  $m$  condiciones lineales. Esto es, si  $\{P_i\}_{i=1}^m$  es un conjunto de puntos sobre  $\Gamma_{\text{int}}$ , entonces al considerar (4.5) en la expresión del salto del flujo normal a la interfase (4.3), se plantea así las ecuaciones

$$[[q_n(P_i)]] = 0 \quad \forall i = 1 : m \quad (4.6)$$

en las incógnitas  $u_i$  y  $a_i$ . Se verá más adelante cómo añadir estas  $m$  restricciones lineales al sistema general XFEM. Estratégicamente, se tomarán los  $P_i$  como los puntos de Gauss para aproximar la integral de línea sobre  $\Gamma_{\text{int}}^k$ , donde

$$\Gamma_{\text{int}}^k = \Gamma_{\text{int}} \cap \Omega_k, \quad \text{con } k \in \mathcal{E}_{\text{enr}}$$

denota la parte de la interfase en el elemento enriquecido  $\Omega_k$  (elemento cruzado por la interfase). Si  $P_i^k$  y  $w_i^k$  con  $i = 1, 2$  son los puntos y pesos de Gauss en  $\Gamma_{\text{int}}^k$ , se tiene de (4.6) que

$$\begin{aligned} ([q_n], v)_{\Gamma_{\text{int}}} &= \sum_{k \in \mathcal{E}_{\text{enr}}} \int_{\Gamma_{\text{int}}^k} [[q_n]] v \, d\Gamma \\ &\approx \sum_{k \in \mathcal{E}_{\text{enr}}} \sum_{i=1}^2 w_i^k [[q_n(P_i^k)]] v(P_i^k) \, d\Gamma \\ &= 0, \quad \text{para todo } v \in \mathcal{V}_0 \end{aligned}$$

y se satisface de manera débil, al menos aproximadamente, la condición (2.4d). Así, la nueva aproximación,  $u_X^+$ , no solo satisface la forma débil en el espacio de dimensión finita (3.4a), sino también la forma débil en el espacio de dimensión infinita (2.11).

## 4.3. Forma matricial

En lo que sigue, se va a detallar la forma de esta restricción algebraica y se va a añadir al sistema original (3.4b) para obtener una solución mejorada.

Se denota por  $n_{node}$  el número de nodos de los elementos de la malla, en particular del elemento  $\Omega_k$ ,  $k \in \mathcal{E}_{enr}$  donde se encuentra el punto  $P$ , donde se desea imponer la condición (4.5).

A efectos de las ilustraciones y en los ejemplos de aplicación se tomará  $n_{node} = 3$  (elementos triangulares lineales). Para denotar los vectores y matrices elementales asociados a  $\Omega_k$  se utiliza el superíndice  $(k)$ . Así, las funciones de forma y la matriz gradiente se escriben:

$$\mathbf{N}^{(k)}(x, y) = \begin{bmatrix} N_1^{(k)} \\ \vdots \\ N_{n_{node}}^{(k)} \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B}^{(k)}(x, y) = \nabla \mathbf{N}^{(k)T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(k)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{node}}^{(k)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(k)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n_{node}}^{(k)}}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

mientras que los vectores de valores nodales elementales (para valores de la función, grados de libertad enriquecidos y valores del level set) son

$$\mathbf{u}^{(k)} = \begin{bmatrix} u_1^{(k)} \\ \vdots \\ u_{n_{node}}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n_{node}}^{(k)} \end{bmatrix} \quad y \quad \phi^{(k)} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(k)} \\ \vdots \\ \phi_{n_{node}}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Utilizando esta notación, la versión matricial de (4.5) resulta ser

$$\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 = (\nu_2 - \nu_1) \mathbf{B}^{(k)} \left( \mathbf{u}^{(k)} + (\mathbf{I} + \tilde{\phi}^{(k)} \mathbf{N}^{(k)T}) \mathbf{a}^{(k)} \right) \quad (4.9)$$

donde  $\mathbf{I}$  denota la matriz identidad de tamaño  $n_{node} \times n_{node}$  y, de acuerdo con (4.2)

$$\tilde{\phi}^{(k)} = |\phi^{(k)}| - \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \phi^{(k)} \quad (4.10)$$

Por otro lado, de (3.2) la normal unitaria normal al level set,  $\mathbf{n}$ , apuntando hacia  $\Omega_1$ , es decir, normal exterior a  $\Omega_2$  es

$$\mathbf{n} = \nabla_{xy} \phi / \|\nabla_{xy} \phi\| = \mathbf{B} \phi^{(k)} / \|\mathbf{B}^{(k)} \phi\|.$$

De esta manera, la expresión matricial resultante de imponer (2.4d), esto es

$$\mathbf{n}^T (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = 0$$

en un punto  $P \in \Gamma_{\text{int}}$  resulta ser

$$\phi^{(k)\top} (\mathbf{B}^{(k)\top} \mathbf{B}^{(k)}) \left( \mathbf{u}^{(k)} + (R\mathbf{I} + \tilde{\phi}^{(k)} \mathbf{N}^{(k)\top}) \mathbf{a}^{(k)} \right) = 0. \quad (4.11)$$

En la ecuación anterior, la dependencia en el punto  $P$  donde se impone la restricción aparece en  $\mathbf{N}^{(k)}$ ,  $R$  y  $\mathbf{B}^{(k)}$  (aunque esta última es independiente de  $P$  si los elementos son lineales). Esta ecuación es una restricción lineal sobre las incógnitas  $\mathbf{u}^{(k)}$  y  $\mathbf{a}^{(k)}$  que se escribe

$$\mathbf{r}_u^{(k)\top} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{r}_a^{(k)\top} \mathbf{a}^{(k)} = 0, \quad (4.12)$$

donde

$$\mathbf{r}_u^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)\top} \mathbf{B}^{(k)} \phi^{(k)} \quad (4.13)$$

y

$$\mathbf{r}_a^{(k)} = (R\mathbf{I} + \mathbf{N}^{(k)} \tilde{\phi}^{(k)\top}) \mathbf{r}_u^{(k)}. \quad (4.14)$$

Obsérvese que, en el caso de elementos lineales,  $\mathbf{r}_u^{(k)}$  no depende del punto  $P$  mientras que  $\mathbf{r}_a^{(k)}$  depende de  $P$  en cualquier caso. Si la posición de  $P$  en el segmento de interfase dentro de  $\Omega_k$  se parametriza por un parámetro escalar  $\lambda$  entre 0 y 1, véase la Figura 4.2, los vectores  $\mathbf{r}_u^{(k)}$  y  $\mathbf{r}_a^{(k)}$  y, por lo tanto, la restricción (4.12) se pueden expresar en función de  $\lambda$ .

Estas condiciones se pueden imponer en varios (en la práctica uno o dos) puntos de cada  $\Omega_k$ ,  $k \in \mathcal{E}_{\text{enr}}$ . Ensamblando todas estas ecuaciones para las incógnitas globales, se obtiene la siguiente ecuación matricial

$$\mathbf{R}_u^\top \mathbf{u} + \mathbf{R}_a^\top \mathbf{a} = 0, \quad (4.15)$$

donde las matrices  $\mathbf{R}_u$  y  $\mathbf{R}_a$  resultan de ensamblar todas las restricciones (4.12), para cada  $k \in \mathcal{E}_{\text{enr}}$  y para los valores de  $\lambda$  escogidos.

La restricción (4.15) se añade al sistema global (3.4b) utilizando, por ejemplo, el método de los multiplicadores de Lagrange y resulta el sistema ampliado siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ua} & \mathbf{R}_u \\ \mathbf{K}_{ua}^\top & \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{R}_a \\ \mathbf{R}_u^\top & \mathbf{R}_a^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Una alternativa para imponer (4.15) es utilizar la técnica introducida en (Ainsworth, 2001) que, respecto de (4.16) permite reducir el sistema de ecuaciones, en vez de ampliarlo. Con esta técnica, el sistema resultante XFEM+ a resolver es del mismo tamaño que el sistema XFEM.

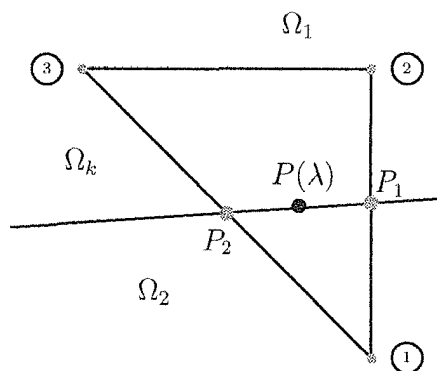


Figura 4.2: Un elemento enriquecido  $\Omega_k$  con un punto  $P$  en la interfase.

#### 4.4. Restricción algebraica en el caso de elementos lineales

En lo que sigue, se va a determinar para elementos triangulares lineales, la expresión de esta restricción en función de  $\lambda$ . El objetivo es ahora expresar la restricción de continuidad del flujo de la manera más sencilla y sistemática posible en el caso particular de elementos triangulares lineales. La expresión dependerá de la localización del punto  $P$  que se caracterizará por el parámetro  $\lambda$ .

Se va a suponer que se tiene la configuración que aparece en la Figura 4.2, es decir  $\phi_1 < 0$ ,  $\phi_2 > 0$  y  $\phi_3 > 0$ . Los puntos de intersección de la interfase con los lados de los elementos se denominan  $P_1$  y  $P_2$ , tal como aparece en la Figura 4.2. Los vectores de funciones de forma en estos puntos se denotan por  $\mathbf{N}^{(k)}(P_1)$  y  $\mathbf{N}^{(k)}(P_2)$  y la condición de pertenencia a la interfase se escribe:

$$\left[ \mathbf{N}^{(k)}(P_1) \right]^T \phi^{(k)} = 0 \quad \text{y} \quad \left[ \mathbf{N}^{(k)}(P_2) \right]^T \phi^{(k)} = 0$$

Teniendo en cuenta la posición de  $P_1$  y  $P_2$  se obtiene:

$$\left[ \mathbf{N}^{(k)}(P_1) \right]^T = \left[ \frac{\phi_2}{\phi_2 - \phi_1} \quad \frac{-\phi_1}{\phi_2 - \phi_1} \quad 0 \right] \quad (4.17a)$$

y

$$\left[ \mathbf{N}^{(k)}(P_2) \right]^T = \left[ \frac{\phi_3}{\phi_3 - \phi_1} \quad 0 \quad \frac{-\phi_1}{\phi_3 - \phi_1} \right]. \quad (4.17b)$$

La parametrización con  $\lambda \in [0, 1]$  de la posición de  $P$  se puede escribir

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)P_1 + \lambda P_2 \quad (4.18)$$

y, recordando que  $\mathbf{N}$  es lineal,

$$\mathbf{N}^{(k)}(P(\lambda)) = (1 - \lambda)\mathbf{N}^{(k)}(P_1) + \lambda\mathbf{N}^{(k)}(P_2), \quad (4.19)$$

este es el valor que se ha de utilizar en (4.14) y se denotará también por  $\mathbf{N}^{(k)}(\lambda)$ . El valor correspondiente de  $R$ ,  $R(\lambda)$ , será

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \left[ \mathbf{N}^{(k)}(\lambda) \right]^T |\phi| \\ &= (1 - \lambda) \left[ \mathbf{N}^{(k)}(P_1) \right]^T |\phi| + \lambda \left[ \mathbf{N}^{(k)}(P_2) \right]^T |\phi| \\ &= (1 - \lambda) \frac{\phi_2 |\phi_1| - \phi_1 |\phi_2|}{\phi_2 - \phi_1} + \lambda \frac{\phi_3 |\phi_1| - \phi_1 |\phi_3|}{\phi_3 - \phi_1}. \end{aligned}$$

De esta manera, se puede utilizar (4.14) para calcular  $\mathbf{r}_a^{(k)}(\lambda)$  (recuérdese que en este caso, el vector  $\mathbf{r}_u^{(k)}$  es independiente de  $\lambda$  y se calcula según (4.13)).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a^{(k)}(\lambda) &= R(\lambda)\mathbf{r}_u^{(k)} + (\tilde{\phi}^{(k)\top} \mathbf{r}_u^{(k)})\mathbf{N}^{(k)}(\lambda) \\ &= (1 - \lambda) \left[ \mathbf{N}^{(k)}(P_1) \right]^T |\phi| \mathbf{r}_u^{(k)} + \lambda \left[ \mathbf{N}^{(k)}(P_2) \right]^T |\phi| \mathbf{r}_u^{(k)} \\ &\quad + (\tilde{\phi}^{(k)\top} \mathbf{r}_u^{(k)}) \left( (1 - \lambda)\mathbf{N}^{(k)}(P_1) + \lambda\mathbf{N}^{(k)}(P_2) \right) \\ &= (1 - \lambda) \left[ \left[ \mathbf{N}^{(k)}(P_1) \right]^T |\phi| \mathbf{r}_u^{(k)} + \tilde{\phi}^{(k)\top} \mathbf{r}_u^{(k)} \mathbf{N}^{(k)}(P_1) \right] \\ &\quad + \lambda \left[ \left[ \mathbf{N}^{(k)}(P_2) \right]^T |\phi| \mathbf{r}_u^{(k)} + \tilde{\phi}^{(k)\top} \mathbf{r}_u^{(k)} \mathbf{N}^{(k)}(P_2) \right] \quad (4.20) \end{aligned}$$

Se puede observar que la dependencia de la restricción con  $\lambda$  es lineal y que, por tanto, dentro de un elemento  $\Omega_k$  basta imponer la restricción en dos puntos para asegurar que se verifique en todos. En consecuencia, en elementos lineales, parece que la opción de imponer la restricción en dos puntos cualesquiera es la más adecuada. Esto queda corroborado por los ejemplos numéricos discutidos en el próximo capítulo.

En el caso de las disposiciones de la interfase distintas a las de la Figura 4.2 (para

$\phi_1\phi_3 > 0$  o  $\phi_1\phi_2 \geq 0$ ), la restricción resultante es muy similar, basta sustituir (4.17)

$$\mathbf{N}^{(k)}(P_1) = \frac{1}{\phi_3 - \phi_2} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_3 \\ -\phi_2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{N}^{(k)}(P_2) = \frac{1}{\phi_1 - \phi_2} \begin{bmatrix} -\phi_2 \\ \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en el caso } \phi_1\phi_3 > 0$$

y por

$$\mathbf{N}^{(k)}(P_1) = \frac{1}{\phi_1 - \phi_3} \begin{bmatrix} -\phi_3 \\ 0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{N}^{(k)}(P_2) = \frac{1}{\phi_2 - \phi_3} \begin{bmatrix} 0 \\ -\phi_3 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \text{ en el caso } \phi_1\phi_2 > 0.$$

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

## Capítulo 5

# Resultados numéricos

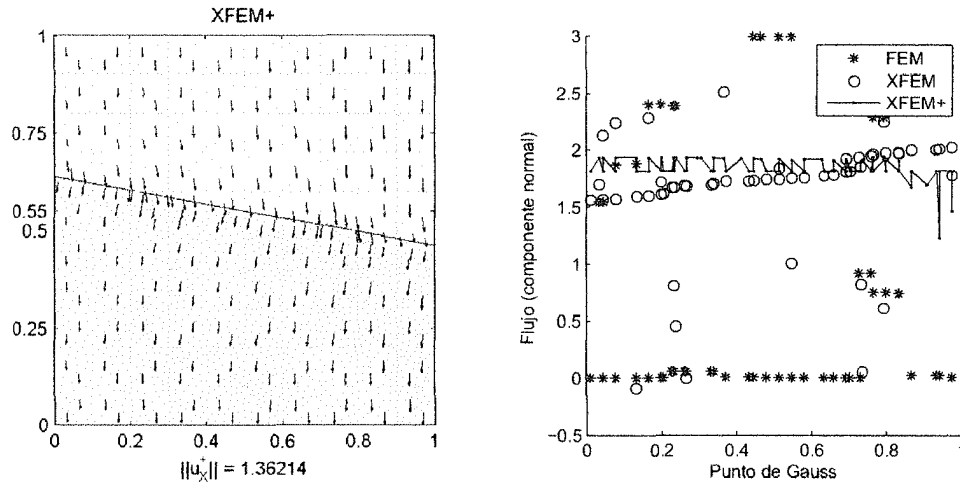
En este capítulo se presentan varios ejemplos que demuestran que la estrategia propuesta XFEM+ para el tratamiento numérico de los flujos en los problemas elípticos con interfase es mucho mejor que las estrategias usuales FEM y XFEM. También se verá un estudio de convergencia de los tres métodos.

### 5.1. Ejemplo 1: la interfase es una línea recta

Se retoma el ejemplo descrito en el apartado 3.4, en donde se tomaron dos configuraciones de las fases: la primera con una interfase horizontal que corta internamente algunos elementos de la malla propuesta y la segunda con una interfase inclinada  $10^\circ$ .

#### 5.1.1. Ejemplo 1a: interfase horizontal

Para la configuración de la interfase horizontal se dispone de los flujos exactos (el flujo es constante  $\mathbf{q} = [0 \ 1]^T/550.45$ ) y la implementación XFEM+ coincide exactamente con XFEM; recordando que mientras el FEM falla en la aproximación de los flujos en la vecindad de la interfase, el enriquecimiento FEM captura tanto la configuración de los flujos locales como la norma energética de manera exacta (ver Figura 3.5).



(a) XFEM+ presenta un mapa de flujos con un aspecto mucho mejor que el que presenta XFEM en la Figura 3.6

(b) Las componentes normales del flujo en los puntos de integración (representadas en función de su abscisa) para las tres estrategias.

Figura 5.1: Aproximación XFEM+ (Ejemplo 1b: interfase inclinada  $10^\circ$ )

### 5.1.2. Ejemplo 1b: interfase inclinada $10^\circ$

Se sabe de la Figura 3.6 que el XFEM proporciona resultados poco precisos alrededor de  $\Gamma_{int}$ , mientras que en la Figura 5.1(a), se puede ahora observar como los flujos XFEM+ mejoran considerablemente cerca de la interfase.

Con respecto a la norma energética, se cumple que

$$\|u\| \leq \|u_X\| \leq \|u_X^+\| \leq \|u_H\|$$

debido a que los espacios funcionales donde se busca la solución están encajados. El espacio funcional de XFEM+ es una restricción del XFEM, por lo tanto es más pequeño y es de esperar que la aproximación de la norma energética sea peor con XFEM+ que con XFEM. En este caso,

$$\|u_X\| = 1.36076 < 1.36214 = \|u_X^+\|,$$

es decir se pierde precisión global aunque se gana en precisión local en los flujos. Además, es de destacar que la pérdida de precisión global es poco significativa y, en particular, mucho menor que cuando se utiliza FEM. Este mismo comportamiento se observa en todos los ejemplos implementados.

La Figura 5.1(b) muestra cómo son los flujos normales a lo largo de la interfase obtenidos

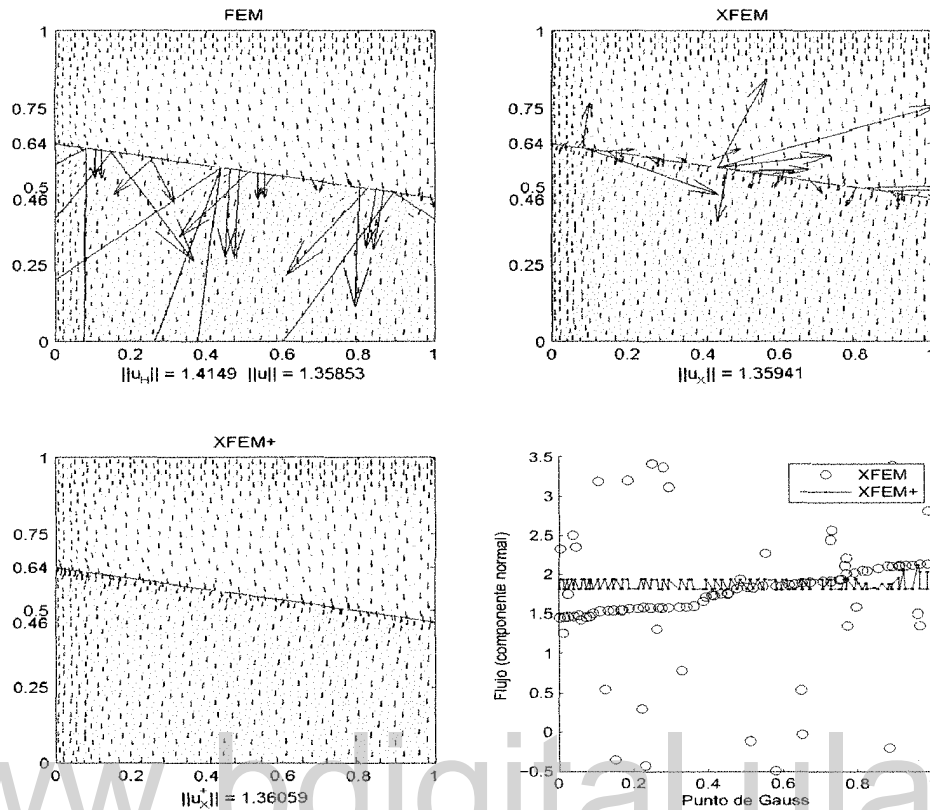


Figura 5.2: Ejemplo 1c. Con un refinamiento de la malla XFEM+ mejora aún más los flujos cercanos a los puntos de la interfase, mientras que FEM y XFEM siguen presentando el mismo problema.

por los tres métodos. De hecho, se muestran los valores en los puntos de integración de los elementos partidos y se representan en función de su abscisa. La continuidad del flujo normal significará que la distribución de estos valores ha de ser suave. La Figura muestra cómo el valor de las componentes normales presentan fuertes discontinuidades para FEM y XFEM mientras que son suaves para XFEM+.

### 5.1.3. Ejemplo 1c: interfase inclinada $10^\circ$ y refinamiento de la malla

El mismo problema se analiza con una malla distinta, más fina y no uniforme. Los resultados globales (solución FEM, XFEM y XFEM+ y curva de flujos normales a lo largo de la interfase) se presentan en la Figura 5.2. De nuevo, se puede observar que XFEM+ mejora muy sensiblemente los flujos mientras que FEM y XFEM siguen presentando el

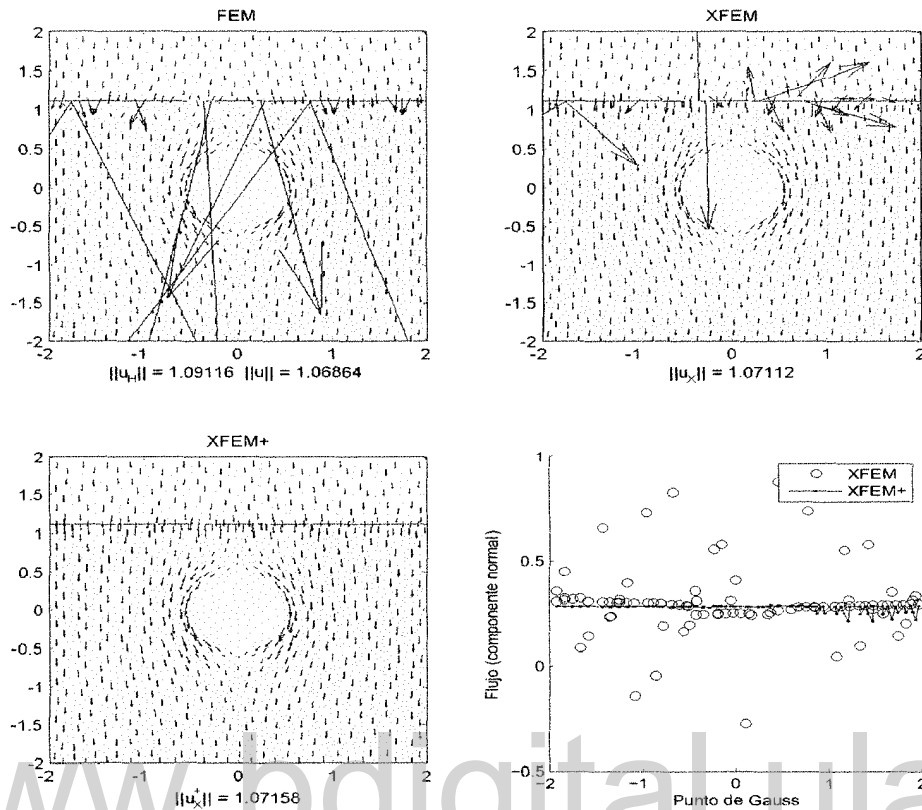


Figura 5.3: Ejemplo 2a. FEM y XFEM presentan flujos que no son normales a la interfase horizontal, mientras que XFEM+ si obtiene los flujos verticales como establece la condición de continuidad. La comparación de los saltos de los flujos normales refleja una diferencia significativa entre XFEM y XFEM+

mismo problema. La energía global XFEM+ es muy similar a la de XFEM y mucho mejor que la de FEM. Este mismo comportamiento se puede observar en el ejemplo siguiente.

## 5.2. Ejemplo 2: interfase en un dominio irregular

Respecto del ejemplo anterior, se incluye un orificio circular en el dominio, por debajo de la interfase. Las propiedades materiales y condiciones de contorno son idénticas. La condición de contorno en la circunferencia es Neumann homogénea (condición natural, aislamiento térmico). Esto hace que aún con la interfase horizontal la solución no sea trivial.

### 5.2.1. Ejemplo 2a: interfase horizontal

Considerando la interfase horizontal (ver Figura 5.3) se puede notar de la condición (2.4d) que para este ejemplo los flujos normales tienen que ser verticales por lo que la componente tangencial del flujo es nula. Pero se observa en la figura, que en los flujos FEM y XFEM cercanos a la interfase, aparecen contribuciones tangenciales (dejan de ser verticales) y en los flujos XFEM+ no tiene esa anomalía. También se observa que los flujos son más imprecisos en la zona de alta conductividad y es de suponer que el error en la estimación del gradiente se vio amplificado por esta conductividad.

### 5.2.2. Ejemplo 2b: interfase inclinada $10^\circ$

Al inclinar la interfase  $10^\circ$  (Figura 5.4) se vuelven a obtener resultados similares a los ejemplos anteriores en los que el XFEM+ proporciona una solución más precisa en lo que

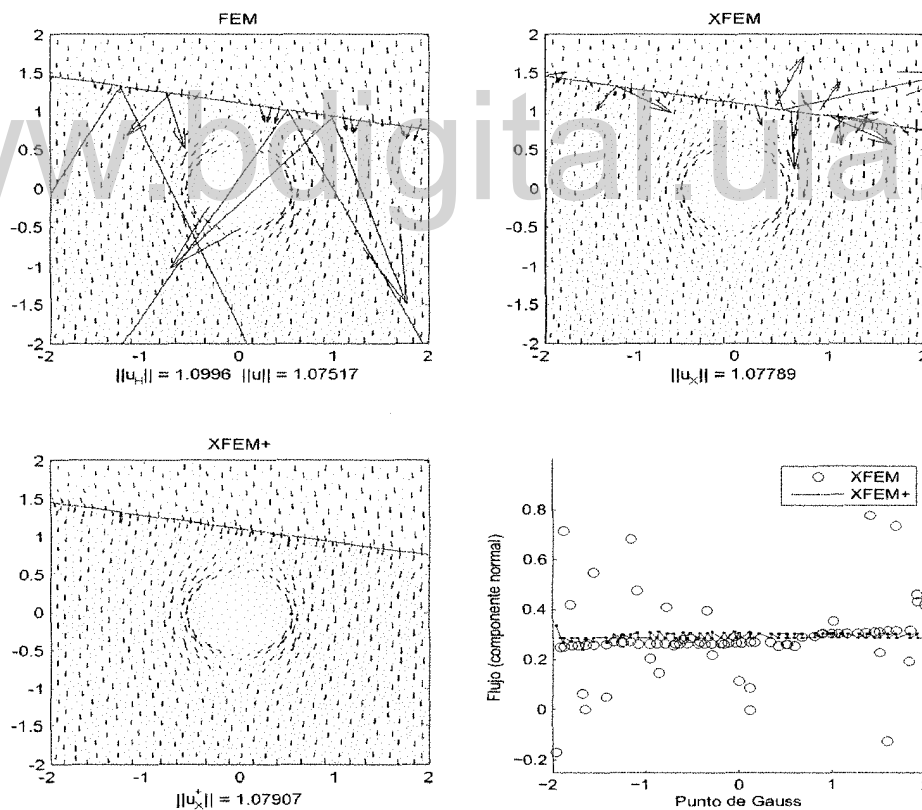


Figura 5.4: Ejemplo 2b. Al inclinar la interfase  $10^\circ$  el XFEM+ supera considerablemente los FEM y XFEM (en lo que respecta a los flujos cerca de la interfase).

respecta a los flujos cerca de la interfase. Para este problema más complicado XFEM+ sigue capturando extraordinariamente los flujos en la zona de transición mientras que FEM y XFEM se les hace imposible obtener una mejor precisión de los flujos. En este ejemplo la norma energética sigue presentando la misma situación del ejemplo anterior; la energía XFEM+ mayor pero muy cercano a la energía XFEM.

### 5.3. Ejemplo 3: interfase circular

Se concluye la presentación de ejemplos con el siguiente problema en 2D que tiene una interfase circular y solución analítica.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (-\nu \nabla u) &= -4 & \text{en } \Omega &= (-1, 1) \times (-1, 1) \\ \nu \nabla_n u &= 0 & \text{sobre } \Gamma_N & \\ u &= u_D & \text{sobre } \Gamma_D & \\ \llbracket \nu \nabla_n u \rrbracket &= 0 & \text{sobre } \Gamma_{\text{int}}, & \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_N = \{(x, y) : x = 0\} \cup \{(x, y) : y = 0\}$ ,  $\Gamma_D = \{(x, y) : x = 1\} \cup \{(x, y) : y = 1\}$ ,  $\Gamma_{\text{int}} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \frac{9}{16}\}$  y  $u_D = u(1, 1)$ , y cuya solución explícita está dada por:

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\nu_1} & \text{si } x^2 + y^2 \leq \frac{9}{16} \\ \frac{x^2 + y^2}{\nu_2} + \frac{9}{16} \left( \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right) & \text{si } x^2 + y^2 > \frac{9}{16} \end{cases}$$

con gradiente

$$\nabla u(x, y) = \begin{cases} \frac{2[x \ y]^T}{\nu_1} & \text{si } x^2 + y^2 < \frac{9}{16} \\ \frac{2[x \ y]^T}{\nu_2} & \text{si } x^2 + y^2 > \frac{9}{16} \end{cases}$$

Si  $\nu_1 \neq \nu_2$ , entonces  $\nabla u$  es discontinuo sobre los puntos de la interfase circular

$$\Gamma_{\text{int}} = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 = \frac{9}{16} \right\}.$$

Por otro lado, el flujo  $\mathbf{q} = -[x \ y]^T$  es continuo en todo  $\Omega$ .

En este ejemplo, el dominio está separado por una interfase circular, y conductividades muy distintas:  $\nu_1 = 1$  y  $\nu_2 = 1000$ . En la Figura 5.5 se muestran las aproximaciones de los

flujos para los tres métodos al igual que los flujos exactos. Se puede observar que el FEM falla completamente al aproximar los flujos cerca de la interfase y aunque XFEM mejora los flujos en la zona de transición existen algunas imprecisiones que son mejoradas, sin duda alguna, con el XFEM+.

Con respecto a la norma energética, se cumple que  $\|u_H\| \leq \|u_X^+\| \leq \|u_X\| \leq \|u\|$  y era de esperar que la aproximación de la norma energética sea peor con XFEM+ que con XFEM debido a que el espacio funcional de XFEM+ es una restricción del XFEM. En este caso,

$$0.30528 = \|u_H\| < \|u_X^+\| = 0.67006 \lesssim 0.67024 = \|u_X\| < \|u\| = 0.70653,$$

es decir, con XFEM+ se pierde precisión global en la solución, aunque se gana en precisión local en los flujos. Nuevamente, es de destacar, que esta pérdida de precisión global es poco significativa y, en particular, mucho menor que cuando se utiliza FEM.

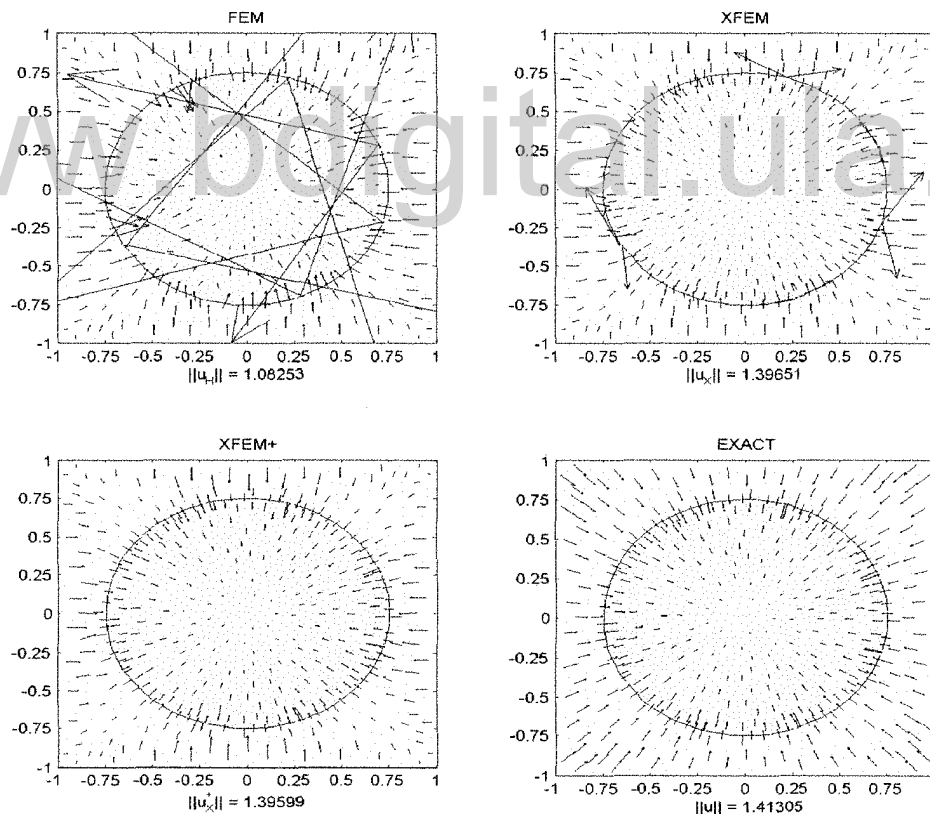


Figura 5.5: Ejemplo 3: XFEM+ supera considerablemente los FEM y XFEM en lo que respecta a los flujos cerca de la interfase.

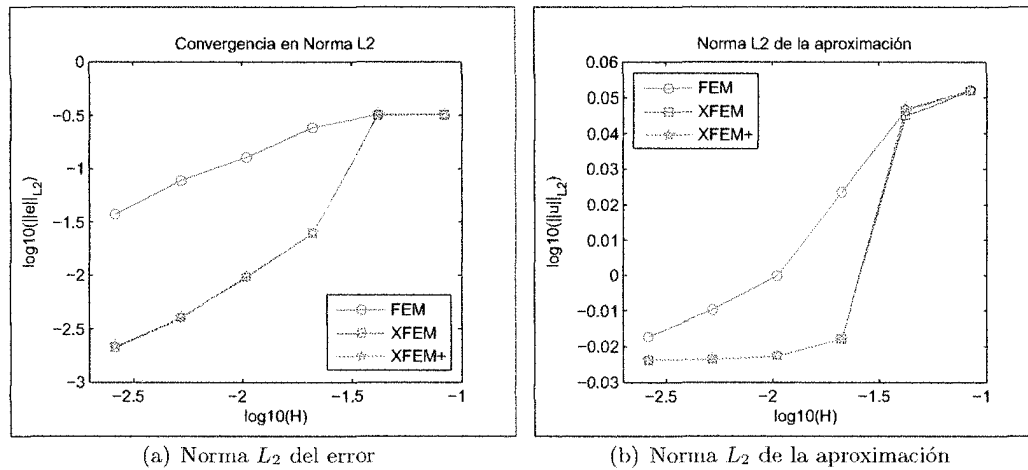


Figura 5.6: Análisis de convergencia en norma  $L_2$

#### 5.4. Análisis de convergencia

Se pretende hacer una comparación del XFEM+ con los métodos FEM y XFEM. Para ello, se usa el Ejemplo 3 que posee solución analítica y, por tanto, se dispone de los errores exactos. Para el análisis se tomó la norma  $\mathcal{L}_2$  y los siguientes tamaños de la malla  $H = 1/2, 1/4, 1/8, \dots$ ; así como también, se consideró la convergencia en norma.

En la Figura 5.6-(a) se muestra la convergencia del error y la 5.6-(b) muestra la convergencia en norma de las aproximaciones a la solución exacta. Se observa que el método XFEM+ tiene un comportamiento de convergencia similar al XFEM y que el comportamiento de ambos métodos es mucho mejor que el mostrado por el FEM. Este mismo estudio se llevo a cabo con otras normas, tales como la energética y la  $\mathcal{H}^1$ , arrojando resultados similares, por lo cual, se omiten sus gráficos.

## Capítulo 6

# Análisis y representación del error

Hasta el momento, al resolver el problema térmico estacionario en un sistema no homogéneo (problema modelo) usando XFEM o su restricción XFEM+ sus aproximaciones han resultado satisfactorias, según sean los valores de las conductividades y las necesidades del problema. El enriquecimiento XFEM mejora la calidad global de la solución pero no satisface algunas propiedades locales de los flujos. Mientras, XFEM+ logra superar estas dificultades, produciendo buenas descripciones de los flujos alrededor de la interfase. Sin embargo, debido al costo computacional adicional que involucra cualquiera de los dos métodos, y a la precisión exigida por el problema en la zona de transición, se debe fijar la atención en cómo definir un proceso adaptativo para conseguir un mallado óptimo para este tipo de problema.

Dentro del contexto de un proceso adaptativo, el control del error se debe hacer tomando en cuenta el interés particular del problema. A partir de nuestro problema modelo, puede resultar vital: minimizar el error global en norma energética o el error local producido por los flujos en la interfase. Así, a primera discusión, se debería usar el XFEM o su restricción XFEM+, según sea el caso. Sin embargo, y debido principalmente a la formulación variacional que surge de estos problemas (ver Capítulo 2), algo más debe decirse.

En este capítulo se analizan los errores globales y locales producidos por estos métodos y se proponen estrategias para definir un proceso adaptativo óptimo orientado al cálculo de la solución de los problemas de difusión con conductividades muy distintas. La experimentación numérica deja ver los resultados analíticos presentados.

Para lograr este propósito, se establecen las diferencias, en lo que respecta a los problemas con interfase, de la norma energética de los errores para los tres métodos. También, se

considerará la energía de manera local; específicamente en la zona cercana a la interfase, debido a las dificultades que presentan las estrategias FEM y XFEM en esa región y para justificar las mejoras que se obtienen con la nueva estrategia propuesta XFEM+.

## 6.1. Análisis del error

Para lo que sigue,  $u_H$  representa cualquier aproximación de elementos finitos (FEM, XFEM o XFEM+). Esta solución aproximada verifica que

$$B(u_H, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_{H_0} \quad (6.1a)$$

donde  $\mathcal{V}_H$  será  $\mathcal{V}_X$  si  $u_H$  representa cualquiera de las soluciones  $u_X$  y  $u_X^+$ .

Puesto que la condición (2.11) se impone de manera implícita en la formulación débil, no se puede garantizar que se anule  $(\llbracket q_n \rrbracket, e_H)_{\Gamma_{\text{int}}}$ ; más aún, no es posible asegurar que esté, al menos, cercano al cero. Para ver esto, sea  $\llbracket q_n^H \rrbracket$  la aproximación al salto de flujo normal a la interfase, utilizando cualquiera de los métodos de elementos finitos. Entonces, esta aproximación satisface la ecuación (2.12), esto es

$$(\nu \nabla u_H, \nabla v)_{\Omega} = (\nu \nabla u_H, \nabla v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} + (\llbracket q_n^H \rrbracket, v)_{\Gamma_{\text{int}}} \quad (6.2)$$

la cual establece un cambio entre las formas bilineales  $B(u, v)$  y  $(\nu \nabla u, v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ . En especial, la norma energética del error satisface

$$B(e_H, e_H) = (\nu \nabla e_H, \nabla e_H)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} - (\llbracket q_n^H \rrbracket, e_H)_{\Gamma_{\text{int}}}. \quad (6.3)$$

Se verá cómo influye esta variación en las estrategias utilizadas para resolver los problemas elípticos con interfase.

### 6.1.1. Error del FEM

En el método FEM se sabe que la aproximación  $u_H$  tiene gradiente continuo en el interior de todo elemento, por lo que

$$\nabla_n u_1|_{\Gamma_{\text{int}}} = \nabla_n u_2|_{\Gamma_{\text{int}}} = \nabla_n u_H$$

y el salto del flujo normal queda determinado como

$$[[q_n^H]] = q_{n_1}^H|_{\Gamma_{\text{int}}} - q_{n_2}^H|_{\Gamma_{\text{int}}} = (\nu_2 - \nu_1)\nabla_n u_H.$$

Ahora, para los problemas de interfase se tiene que  $\nu_1 \neq \nu_2$ , entonces  $[[q_n]] \neq 0$  y la condición de continuidad del flujo normal (2.4d) no se puede, en general, cumplir para puntos interiores de los elementos. Para problemas de interfase con conductividades muy distintas, la aproximación del salto del flujo normal será tan grande como sea la diferencia entre  $\nu_1$  y  $\nu_2$ . Más aún, tampoco se puede asegurar que el FEM pueda satisfacer la condición débil (2.11), pues

$$([[q_n^H]], e_H)_{\Gamma_{\text{int}}} = (\nu_2 - \nu_1)(\nabla_n u_H, e_H)_{\Gamma_{\text{int}}}$$

no necesariamente se anula y tampoco la satisface de manera aproximada por estar amplificada por el factor  $\nu_2 - \nu_1$ . Así la norma energética se ve afectada por el término  $([[q_n^H]], e_H)_{\Gamma_{\text{int}}}$ , y es por ello que no puede esperarse que la aproximación mediante FEM sea aceptable para estos tipos de problemas. En los ejemplos vistos anteriormente (ver Figuras 5.5 y 6.3), las aproximaciones de los flujos cercanos a la interfase, obtenidas por el FEM, son muy imprecisas.

www.bdigital.ula.ve

### 6.1.2. Error XFEM

En la estrategia XFEM, la condición débil de continuidad del flujo normal (2.11) sí se cumple, pero en un espacio de dimensión finita  $\mathcal{V}_{X_0}$ . Es decir,

$$([[q_n^X]], v)_{\Gamma_{\text{int}}} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}_{X_0} \quad (6.4)$$

pero este tipo de control sobre el salto no es absoluto para todos los casos, pues esta restricción no se está tomando en todo  $\mathcal{V}_0$ . Por ejemplo, si  $v = e_X \notin \mathcal{V}_{X_0}$ , entonces la aproximación del salto  $[[q_n^X]]$  no necesariamente satisface (2.11) y la norma energética puede verse afectada por el término  $([[q_n^X]], e_X)_{\Gamma_{\text{int}}}$ . Aunque, de (6.4) se puede esperar que esté cerca de la mejor aproximación en  $\mathcal{V}_0$ , pues  $([[q_n^X]], e_X)_{\Gamma_{\text{int}}} \approx 0$ , siempre y cuando,  $\mathcal{V}_{X_0} \approx \mathcal{V}_0$ . Se debe observar que (6.4) tampoco asegura que  $[[q_n^X]]_{\Gamma_{\text{int}}} \approx 0$  y nos dice que es posible que la aproximación XFEM no satisfaga la condición (2.4d). En los ejemplos numéricos, mostrados en el capítulo anterior, se observaron algunas de estas situaciones, en donde hay una mejora de los flujos numéricos cabe a la interfase pero aún son insatisfactorias.

### 6.1.3. Error XFEM+

En el XFEM+ se incorpora la condición de continuidad del flujo normal (2.4d) de manera fuerte en algunos puntos sobre la interfase para controlar el salto en la aproximación de los flujos. La estrategia de tomar los puntos de Gauss para la integral de línea, garantiza que, al menos aproximadamente, se cumpla la condición débil (2.11). Es decir,

$$(\llbracket q_n^{X^+} \rrbracket, v)_{\Gamma_{\text{int}}} \approx 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_0,$$

Con esta restricción no sólo se asegura que  $(\llbracket q_n^{X^+} \rrbracket, e_X^+)_{\Gamma_{\text{int}}} \approx 0$ , sino también que  $\llbracket q_n^{X^+} \rrbracket_{\Gamma_{\text{int}}} \approx 0$ , por lo que la aproximación XFEM+ tiene esa importante propiedad que tiene la solución exacta; como es la condición de continuidad del flujo normal (2.4d).

Además, de (6.2) o (6.3), se puede decir que no existe variación importante entre los funcionales para calcular la norma energética del error. Los ejemplos dejan ver cómo los flujos numéricos cercanos a la interfase sufren mejoras significativas.

## 6.2. Representación local del error

Dado el tipo de problema que se sigue, dentro del contexto de un proceso adaptativo, se puede tener interés en el control del error de forma global (norma de energética) o sólo en la zona de transición a la interfase (error local), conocido en la literatura como *control del error a partir de una cantidad de interés*. Para analizar las dos vertientes, se consideran los siguientes funcionales,  $J(u)$ , que miden un objetivo específico o cantidad de interés:

$$J(u) := B(e_H, u) \quad \text{ó} \quad J(u) := (\llbracket q_n^H \rrbracket, u)_{\Gamma_{\text{int}}}. \quad (6.5)$$

El primer funcional de (6.5) corresponde al *funcional energético*  $\|\cdot\|^2$ , el cual está definido sobre todo el dominio  $\Omega$  y, en general, es el usado para el análisis global del error. El segundo, llamado *funcional interfase*, sólo está definido a lo largo de  $\Gamma_{\text{int}}$  y se pretende utilizar para hacer un análisis local del error en la región cercana a la interfase.

Para la visualización y análisis de los dos funcionales de error se toman dos opciones: la primera, es ver cómo son las contribuciones locales de los errores (distribución espacial del error) en todo los elementos de la malla  $\Omega_k$ ,  $k = 1 : n_{\text{elem}}$ . Más precisamente, con la elección de cualquiera de los funcionales dados en (6.5), se utiliza la descomposición usual

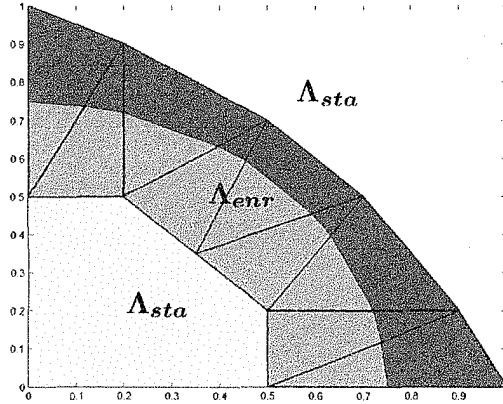


Figura 6.1: Zona enriquecida  $\Lambda_{enr}$  y estándar  $\Lambda_{sta}$ :  $\Omega = \Lambda_{enr} \cup \Lambda_{sta}$ .

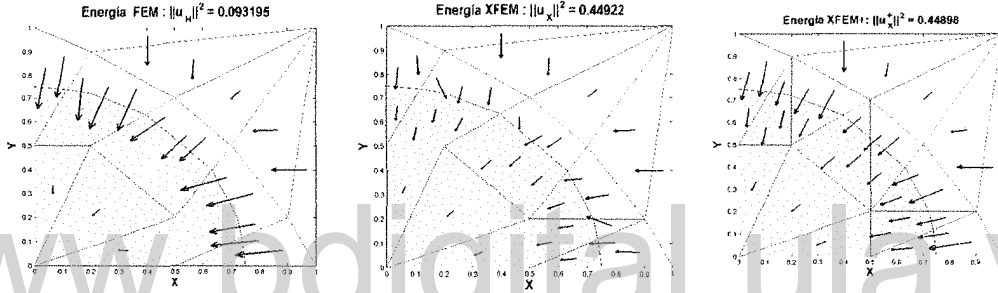


Figura 6.2: Flujos numéricos del problema con interfase circular.

del dominio  $\Omega$  por los elementos de la malla, y se descompone la cantidad de interés  $J(e)$ , como

$$J(e) = \sum_{k=1}^{n_{elem}} J_k(e), \quad (6.6)$$

donde  $J_k(e) = J(e)|_{\Omega_k}$  es la restricción de la cantidad de interés en  $\Omega_k$ . La segunda opción, considera sólo la zona cercana a  $\Gamma_{int}$ , como se muestra en la Figura 6.1, donde se divide el dominio  $\Omega$  en dos zonas: una formada con los elementos de la malla cruzados por la interfase o elementos enriquecidos  $\Lambda_{enr} = \cup_k \Omega_k$ ,  $k \in \mathcal{E}_{enr}$  y, otra,  $\Lambda_{sta} = \cup_k \Omega_k$ ,  $k \notin \mathcal{E}_{enr}$  que contiene los elementos de la malla estándar o no intersecado por  $\Gamma_{int}$ . Así, se divide el dominio como  $\Omega = \Lambda_{enr} \cup \Lambda_{sta}$ , para luego escribir la cantidad de interés como  $J(e) = J(e)|_{\Lambda_{enr}} + J(e)|_{\Lambda_{sta}}$ , donde

$$J(e)|_{\Lambda_{enr}} = \sum_{k \in \mathcal{E}_{enr}} J_k(e) \quad (6.7)$$

representa la fuente del error local o la cantidad de interés en la zona enriquecida  $\Lambda_{enr}$ .

Para la representación de los errores, se tomarán dos casos particulares de los ejemplos

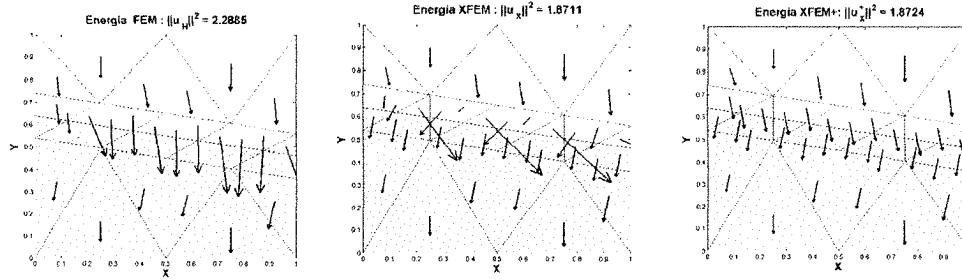


Figura 6.3: Flujos numéricos del problema cuya interfase es una recta inclinada  $10^\circ$ .

vistos en el capítulo anterior; ellos son los casos de la interfase circular y la inclinada  $10^\circ$ . Para el caso de la interfase circular (ver el Apartado 5.3), se cuenta con los errores exactos y, por la simetría del problema, sólo se tomará en cuenta para la representación, el primer cuadrante del dominio; el mapa de flujos está dado en la Figura 6.2. El caso de la interfase inclinada  $10^\circ$ , donde los errores de referencia provienen del refinamiento de la malla, se estudió en la Sección 5.1.2, y en la Figura 6.3, se muestran los flujos en una malla grosera.

### 6.2.1. Funcional energético

Para el funcional energético, se obtiene la cantidad de interés

$$J(e) = B(e_H, e) \approx \|e\|^2,$$

o norma energética del error. La Figura 6.4 muestra la distribución espacial del error (según (6.6)) para el caso interfase circular. De esto, se concluye que: para el FEM, las contribuciones importantes del error se encuentran en la zona cercana a la interfase y se destacan aún más si se comparan con las contribuciones de los errores del XFEM y XFEM+; entre estos dos últimos no hay una variación significativa y las contribuciones importantes no ocurren en la zona de enriquecimiento. Estas contribuciones están por debajo de las dadas por el FEM en la zona de no enriquecimiento (se debe tener presente la escala de las gráficas para no incurrir en un error de visualización). Con respecto a la norma energética del error, se sigue cumpliendo el principio de mínima energía:  $\|e_X\| \lesssim \|e_X^+\| < \|e_H\|$ ; ver la Tabla 6.5.

La Figura 6.6 muestra los errores locales en los elementos enriquecidos (según (6.7)) para los tres métodos. Se nota cómo el FEM tiene grandes errores en los elementos enriquecidos; esto se debe a que la aproximación no puede tener gradiente discontinuo cerca de la interfase. El XFEM y XFEM+ al enriquecer el espacio de soluciones, con la propiedad de gradiente

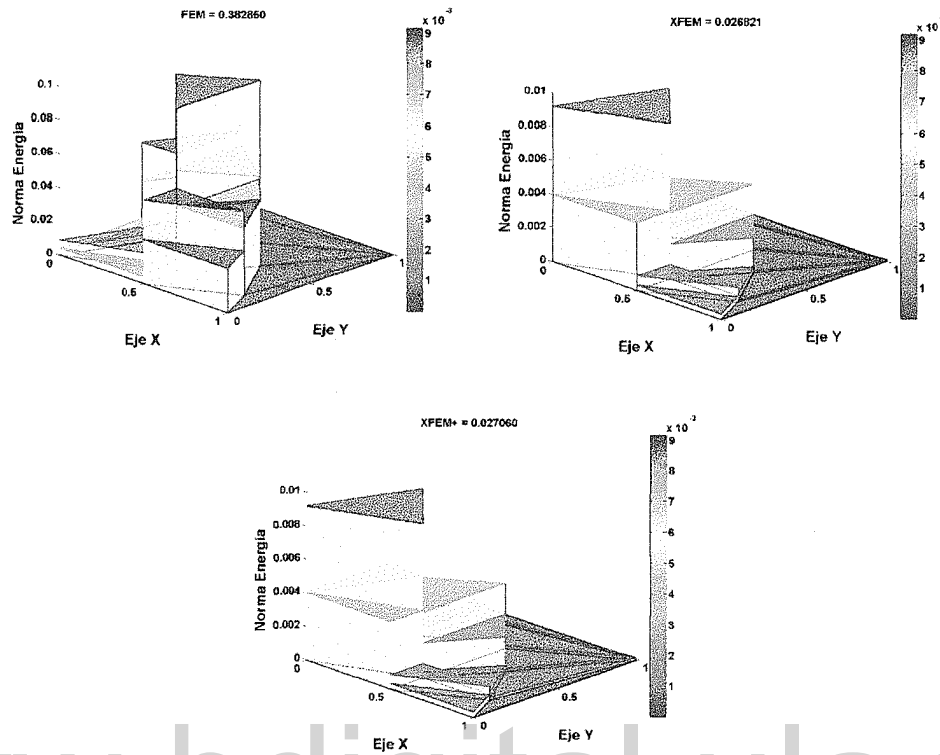


Figura 6.4: Caso interfase circular: representaciones espaciales de los errores locales del funcional energético. En el FEM, los mayores errores ocurren en la zona  $\Lambda_{enr}$  (gráfica superior izquierda), mientras que en el XFEM (gráfica superior derecha) y XFEM+ (gráfica inferior) los mayores errores ocurren en la zona de mayor conductividad.

$\ e_H\ $	$\ e_X\ $	$\ e_X^+\ $
3.0617	0.57393	0.57411
$\ e_H\ _{\Lambda_{enr}}$	$\ e_X\ _{\Lambda_{enr}}$	$\ e_X^+\ _{\Lambda_{enr}}$
3.0408	0.45023	0.44886

Tabla 6.5: Energía global y local: interfase circular.

discontinuo sobre la interfase, mejora claramente en los errores de los elementos enriquecidos.

Por otro lado, la restricción de la norma energética a la zona de enriquecimiento  $\|e\|_{\Lambda_{enr}}$ , “norma energética local”, nos dice cómo se comporta la aproximación de la solución en la

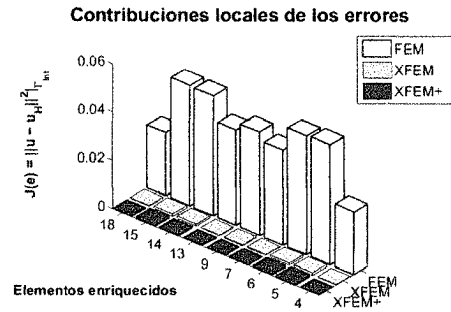


Figura 6.6: Caso interfase circular: comparación de los errores locales del funcional energético en la zona enriquecida  $\Omega_{enr}$ .

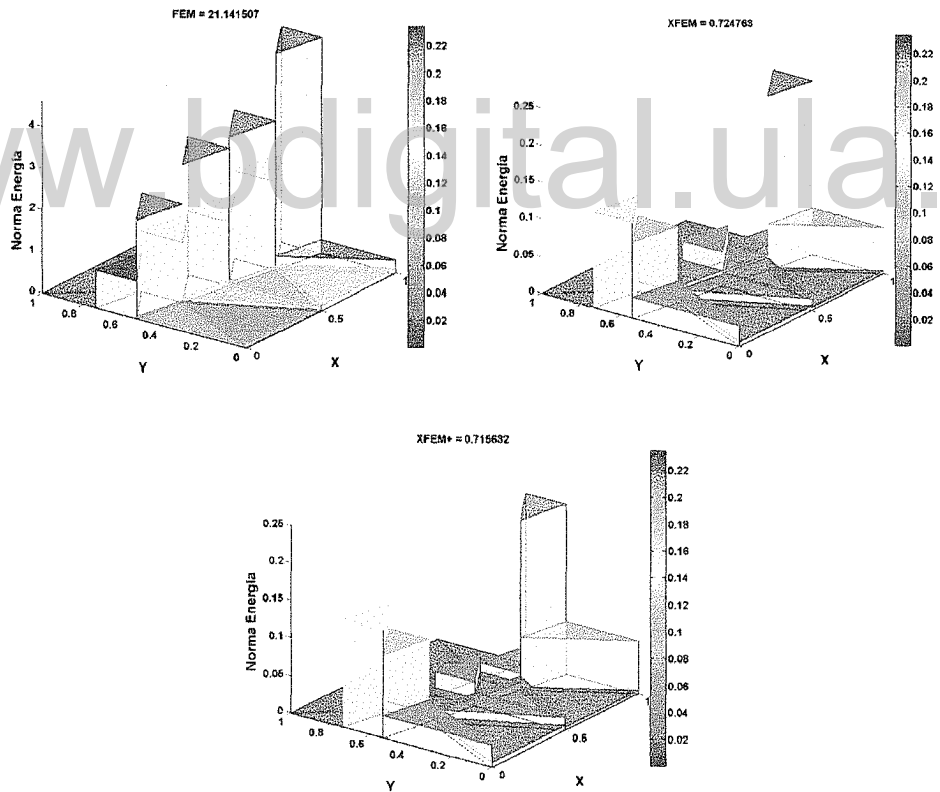


Figura 6.7: Caso interfase inclinada  $10^\circ$ : representaciones espaciales de los errores medidos a partir del funcional energético.

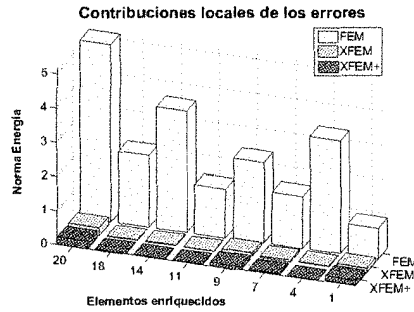


Figura 6.8: Caso interfase inclinada  $10^\circ$ : comparación de los errores locales del funcional energético en la zona enriquecida  $\Lambda_{enr}$ .

región cercana a la interfase  $\Lambda_{enr}$ . De la Tabla 6.5,

$$\|e_X^+\|_{\Lambda_{enr}} < \|e_X\|_{\Lambda_{enr}} < \|e_H\|_{\Lambda_{enr}}$$

y la estrategia XFEM+ presenta un error energético local menor que el XFEM, lo cual nos dice, desde el punto de vista local, que la solución XFEM+ es mejor que la solución XFEM, al menos, en la zona enriquecida.

Para el caso interfase inclinada  $10^\circ$ , la representación espacial de los errores (en todo el dominio) para cada uno de los métodos se muestran en la Figura 6.7 y, en la Figura 6.8, se comparan las tres estrategias. De la misma manera que el caso interfase circular, las contribuciones importantes del FEM ocurren cerca de  $\Gamma_{int}$ , además de la zona de mayor conductividad  $\nu = 1000$ , mientras que para el XFEM y el XFEM+, los errores sólo predominan en esta última; es claro que al enriquecer la solución las aproximaciones mejoraron. La Tabla 6.9 deja ver cómo la norma energética del error XFEM+ es menor que la del XFEM; esto ocurre tanto de manera local como global. Sin embargo, esto no contradice la ortogonalidad de Galerkin debido a que no se está tomando la solución exacta sino una solución de referencia. Pero en cualquiera de los casos la solución del XFEM+ no será peor, al menos localmente, que la solución XFEM.

### 6.2.2. Funcional interfase

Para el funcional interfase, se obtiene la cantidad de interés

$$J(e) = (\llbracket q_n^H \rrbracket, e)_{\Gamma_{int}}.$$

$\ e_H\ $	$\ e_X\ $	$\ e_X^+\ $
4.598	0.85133	0.84595
$\ e_H\ _{\Lambda_{enr}}$	$\ e_X\ _{\Lambda_{enr}}$	$\ e_X^+\ _{\Lambda_{enr}}$
4.5139	0.76708	0.75335

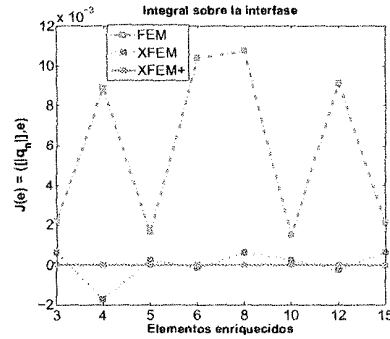
Tabla 6.9: Energía global y local: interfase inclinada  $10^\circ$ .

Figura 6.10: Caso interfase circular: representación de los errores, usando el funcional interfase, en los elementos que están sobre la interfase.

A diferencia del funcional energético que es una integral de área, el funcional interfase es una integral de línea y, por tanto, las contribuciones de los errores solo se pueden representar sobre la interfase. Para ello, se denota como  $\Gamma_k = \Omega_k \cap \Gamma_{\text{int}}$  a la parte de la interfase que cruza al elemento enriquecido  $\Omega_k$ ,  $k \in \mathcal{E}_{enr}$ . Así, se puede descomponer el funcional  $J(e)$  como

$$J(e) = \sum_{k \in \mathcal{E}_{enr}} J_k(e), \quad \text{con} \quad J_k(e) = ([[q_n^H]], e)_{\Gamma_k}.$$

Para el caso interfase inclinada, la Figura 6.10 muestra cómo son las integrales de línea en los  $\Gamma_k$ . Los valores globales,  $J(e)$ , de los tres métodos usando el funcional lineal son dados en la Tabla 6.11.

Debido a que se impuso de manera fuerte la condición de continuidad del flujo normal a la interfase en el XFEM+, entonces claramente lo satisface débilmente, por lo que la integral de línea sobre  $\Gamma_{\text{int}}$  se anula. Por otro lado, para el XFEM sólo se impone la condición de continuidad del flujo normal de manera débil, entonces su aproximación no anulará la

Interfase	$J(e_H)$	$J(e_X)$	$J(e_X^+)$
Circular	$-5 \times 10^{-2}$	$-4 \times 10^{-4}$	$-2 \times 10^{-15}$
Inclinada $10^\circ$	$3 \times 10^{-3}$	$-1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-17}$

Tabla 6.11: Integral de línea sobre  $\Gamma_{\text{int}}$ .

integral de línea en todos los casos. Los ejemplos descritos aquí dejan ver que aunque la integral a lo largo de la interfase es pequeña, es no nula. Por último, para el FEM no se cumple la condición débil ni siquiera de manera aproximada y, por supuesto, mucho menos la condición fuerte.

Para el caso interfase inclinada, la Figura 6.12 y la Tabla 6.11 muestran cómo son las integrales de líneas en los  $\Gamma_k$  para las tres estrategias, dejando ver que tienen un comportamiento similar al dado en el caso interfase circular.

De ambos casos, se concluye que la elección del método dependerá de la cantidad de interés  $J(e)$  que se elija para medir la precisión que se quiere obtener de la aproximación. Por ejemplo, si se busca una aproximación que, desde el punto de vista global, alcance una cierta tolerancia  $|J(e)| \leq Tol$ , entonces la norma energética nos dice que el método XFEM es muy útil para alcanzarla pero con la salvedad que para los problemas elípticos con interfase en donde las conductividades son muy distintas hay imprecisiones de los flujos numéricos en las cercanías de la interfase. Pero si, además, se quiere mejorar estas imprecisiones locales, entonces el XFEM+ es una buena alternativa para lograrlo con una pequeña pérdida de precisión global de la aproximación.

Por otro lado, si lo que se quiere es obtener una mejora significativa de la aproximación en la zona de transición de la interfase; estos es, que la cantidad de interés  $J(e)$  alcance cierta tolerancia relativa o local  $|J(e)_k|/|J(e)| \leq Tol : k \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ , entonces el funcional interfase nos dice que el método XFEM+ es el más apropiado para aproximar el problema. Este funcional local tiene la ventaja que analiza el error de la aproximación de manera local y resultará muy adecuado para encontrar una malla óptima.

### 6.2.3. Funcional energético local

Se termina este análisis combinando los dos funcionales anteriores para crear el nuevo *funcional local*

$$J(u) := B(e_H, u) + (\llbracket q_n^H \rrbracket, u)_{\Gamma_{\text{int}}} \quad (6.8)$$

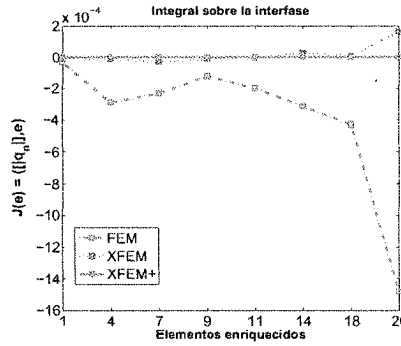


Figura 6.12: Caso interfase inclinada  $10^\circ$ : representaciones de los errores locales medidos usando el funcional interfase en la zona  $\Lambda_{enr}$ .

Interfase	$\ e_H\ _{\Omega_1 \cup \Omega_2}$	$\ e_X\ _{\Omega_1 \cup \Omega_2}$	$\ e_X^+\ _{\Omega_1 \cup \Omega_2}$
Circular	3.0693	0.5743	0.5741
Inclinada $10^\circ$	4.5977	0.8514	0.8459

Tabla 6.13: Norma energética local.

que será la cantidad de interés asociada a la norma energética local

$$\|e\|_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^2 = (\nu \nabla e, \nu e)_{\Omega_1 \cup \Omega_2}.$$

En efecto, si se evalúa el error  $e_H$  en (6.8) y se usa (6.3) se tiene que

$$\begin{aligned} J(e_H) &= B(e_H, e_H) + ([q_n^H], e_H)_{\Gamma_{int}} \\ &= \|e_H\|_{\Omega}^2 + ([q_n^H], e_H)_{\Gamma_{int}} = \|e_H\|_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^2. \end{aligned}$$

Es decir,  $J(e) = \|e\|_{\Omega_1 \cup \Omega_2}^2$  mide la energía en la región  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , que es el dominio del problema modelo y por tanto la medida idónea para medir el error energético de la aproximación. La Tabla 6.13 muestra los valores energéticos para las tres estrategias y los dos tipos de interfases. De estos se puede observar que el método XFEM+ alcanza, en ambos ejemplos, valores menores que el método XFEM, por lo que se puede concluir que en el dominio de definición del problema fuerte, globalmente las aproximaciones XFEM+ son mejores que las soluciones FEM y XFEM.

## Conclusión

En el desarrollo de esta Tesis, se ha propuesto un nuevo método de elementos finitos para las aproximaciones de los problemas difusivos con interfases. Este aporte se puede resumir como una modificación de las aproximaciones enriquecidas de los elementos finitos, particularmente adaptada a problemas elípticos con conductividades muy distintas. La técnica se fundamenta en las siguientes ideas:

- Obtener una expresión matemática para el salto del flujo normal sobre la interfase: esta fórmula permite justificar la modificación del método de los elementos finitos convencional, debido a su imposibilidad de satisfacer esa importante propiedad que contiene la solución exacta del problema; como es la continuidad del flujo normal.
- Imponer de manera explícita la condición de continuidad del flujo normal a la interfase: como el método de los elementos finitos extendidos impone esta condición solo de manera débil, mediante una modificación ulterior a éste, se logra obtener una mejor descripción de los flujos alrededor de la interfase.
- Construir las ecuaciones algebraicas a ser añadidas a la formulación enriquecida de elementos finitos: se añade la continuidad del flujo normal sobre la interfase de igual manera como se impone fuertemente las condiciones de frontera tipo Dirichlet en el sistema general. Es decir, se hace que el salto de flujo normal se anule en un conjunto finito de puntos sobre la interfase para luego añadir al sistema algebraico extendido las condiciones lineales obtenidas.

Por lo tanto, se ha conseguido mejorar de manera muy sensible la calidad de los flujos numéricos en el entorno de la interfase. Para ello, la imposición de manera fuerte de la continuidad de flujos mediante ecuaciones algebraicas, transforma el XFEM en el XFEM+.

Como otro aporte de esta Tesis, se ha conseguido establecer un rango de acción para resolver los problemas elípticos con los métodos de los elementos finitos de la siguiente manera:

- Aunque el FEM es adecuado para aproximar problemas de una sola fase (conductividad constante), resulta inapropiado para los problemas de dos fases (conductividad discontinua); por la incapacidad de la aproximación de tener gradiente discontinuo sobre la interfase.
- Al enriquecer el espacio de soluciones para incorporar a la aproximación la propiedad de flujo normal continuo en la interfase, el método XFEM resulta satisfactorio para una gran cantidad de problemas con interfase.
- Cuando se tienen dos conductividades muy distintas, la aproximación obtenida por XFEM no es la mejor aproximación que se pueda obtener en ese espacio enriquecido, y la misma pierde precisión en las cercanías de la interfase. Si además, el interés está en mejorar la precisión de la aproximación en esta zona de transición, entonces la estrategia XFEM+ es la manera más idónea para alcanzar esa mejor aproximación.

Es importante destacar que el enriquecimiento XFEM tiene un costo computacional, que viene dado por la extensión del espacio de soluciones. Esta extensión del espacio dependerá de la cantidad de elementos enriquecidos, y si las conductividades del problema son muy distintas, hay que extender aún más el sistema para usar el enriquecimiento XFEM+. Por tal motivo, existe la necesidad de disponer de una malla óptima para estas estrategias y así disminuir el costo computacional. Dentro del contexto de un proceso adaptativo, el control del error se debe hacer tomando en cuenta el interés particular del problema, en general:

- Si se quiere un control global del error en lugar de la precisión de los flujos cercanos a la interfase, el método XFEM junto al funcional energético local resultará apropiado.
- En su defecto, si se quiere un control local (zona de transición) del error producido por los flujos en la interfase para problemas de difusión con conductividades muy distintas resulta conveniente el XFEM+ junto al funcional (6.8).

Esta idea puede ser generalizada a problemas de índole más complejo (elasticidad, flujos de Stokes...) añadiendo la imposición fuerte de las condiciones de continuidad que en la formulación estándar de XFEM sólo se imponen de manera débil.

## Bibliografía

- AINSWORTH, M. (2001). Essential boundary conditions and multi-point constraints in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 6323–6339.
- BATHE, K. J. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall, 2nd ed.
- BÉCHET, E., MINNEBO, H., MOËS, N. & BURGARDT, B. (2005). Improved implementation and robustness study of the X-FEM method for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **64**(8), 1033–1056.
- BELYTSCHKO, T. & BLACK, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **45**(5), 601–620.
- BELYTSCHKO, T., DANIEL, W. J. T. & VENTURA, G. (2002). A monolithic smoothing-gap algorithm for contact–impact based on the signed distance function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **55**(1), 101–125.
- BELYTSCHKO, T., MOËS, N. & USUI, S. (2001). Modeling arbitrary discontinuities in the finite element framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **50**(4), 993–1013.
- BENZLEY, S. E. (1974). Representation of singularities with isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (3), 537–545.
- BORDAS, S., DUFLOT, M. & LE, P. (2008). A simple error estimator for extended finite elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering* **24**(11), 961–971.
- BORDAS, S. & LEGAY, A. (2005). *X-FEM Mini Course*. Switzerland: EPFL, Lausanne.
- BORDAS, S. & M., D. (2007). Derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **196**(35–36), 3381–3399.
- CALDERÓN, G. & CORDERO, F. (2012). Métodos de los elementos finitos para problemas elípticos con interfase: análisis del error. Sometido a revisión en: *Revista Internacional Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*.
- CHAHINE, E., LABORDE, P. & RENARD, Y. (2006). A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM. *Comptes Rendus Mathématique* **342**(7), 527.
- CHESSA, J. & BELYTSCHKO, T. (2003). An extended finite element method for two-phase fluids. *Transactions of the ASME*, 10–17.

- CHESSA, J., SMOLINSKI, P. & BELYTSCHKO, T. (2002). The extended finite element method (XFEM) for solidification problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**(8), 1959–1977.
- CHESSA, J., WANG, H. & BELYTSCHKO, T. (2003). On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal of Numerical Methods* **57**(7), 1015–1038.
- CHOPP, D. L. & SUKUMAR, N. (2003). Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element/fast marching method. *International Journal of Engineering Science* **41**(8), 845 – 869.
- CORDERO, F. & DÍEZ, P. (2010). XFEM+: una modificación de XFEM para mejorar la precisión de los flujos locales en problemas de difusión con conductividades muy distintas. *Revista Internacional Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* **26**(2), 121–133.
- COTTEREAU, R. & DÍEZ, P. (2011). Numerical modeling of erosion using an improvement of the extended finite element method. *European Journal of Environmental and Civil Engineering* **48**(7–8), 1187–1206.
- DAUX, C., MOES, N., DOLBOW, J., SUKUMAR, N. & BELYTSCHKO, T. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **48**(12), 1741–1760.
- DOLBOW, J., MOËS, N. & BELYTSCHKO, T. (2000a). Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Element Analysis and Design* **36**(3–4), 235–260.
- DOLBOW, J., MOËS, N. & BELYTSCHKO, T. (2001). An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**(51–52), 6825–6846.
- DOLBOW, J. E. (1999). *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. Northwestern University: Tesis doctoral.
- DOLBOW, J. E. & DEVAN, A. (2004). Enrichment of enhanced assumed strain approximations for representing strong discontinuities: addressing volumetric incompressibility and the discontinuous patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **59**(1), 47–67.
- DONEA, J. & HUERTA, A. (2002). *Finite Element Methods for Flow Problems*. Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England: Wiley.
- DUFLOT, M. & BORDAS, S. (2008). A posteriori error estimation for extended finite element by an extended global recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **76**(8), 1123–1138.
- FAGERSTRÖM, M. & LARSSON, R. (2006). Theory and numerics for finite deformation fracture modelling using strong discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **66**(6), 911–948.

- GERSTLE, W. H., MARTHA, L. F. & INGRAFFEA, A. R. (1987). Finite and boundary element modeling of crack propagation in two and three dimensions. *Engineering with Computers* **3**, 167–183.
- GRAVOUIL, A., BELYTSCHKO, T. & MOËS, N. (2002). Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part II: Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**(11), 2569–2586.
- HUANG, R., SUKUMAR, N. & PRÉVOST, J. H. (2003). Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part II: Numerical applications. *International Journal of Solids and Structures* **40**(26), 7539–7552.
- KARIHALOO, B. L. & XIAO, Q. Z. (2003). Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review. *Computers & Structures* **81**(3), 119–129.
- KHOEI, A. R. & NIKBAKHT, M. (2006). Contact friction modeling with the extended finite element method (X-FEM). *Journal of Materials Processing Technology* **177**(1-3), 58–62.
- LABORDE, P., POMMIER, J., RENARD, Y. & SALAÜN, M. (2005). High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **64**(3), 354–381.
- LEGAY, A., WANG, H. W. & BELYTSCHKO, T. (2005). Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **64**(8), 991–1008.
- LEGRAIN, G., MOËS, N. & VERRON, E. (2005). Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **63**(2), 290–314.
- LIU, X. Y., XIAO, Q. Z. & KARIHALOO, B. L. (2004). XFEM for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **59**(8), 1103–1118.
- MELLENK, J. M. & BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**(1–4), 289–314.
- MOËS, N. & BELYTSCHKO, T. (2002b). X-FEM, de nouvelles frontières pour les éléments finis. *Revue Européenne des Eléments Finis* **11**(2-3-4), 305–318.
- MOËS, N., CLOIREC, M., CARTAUD, P. & REMACLE, J. F. (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **192**, 3163–3177.
- MOHAMMADI, S. (2008). *Extended Finite Element Method: for Fracture Analysis of Structures*. Wiley-Blackwell.
- MOËS, N., BÉCHET, E. & TOURBIER, M. (2006). Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **67**(12), 1641–1669.

- MOËS, N., DOLBOW, J. & BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **46**(1), 131–150.
- MOËS, N., GRAVOUIL, A. & BELYTSCHKO, T. (2002). Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets – Part I: Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**(11), 2549–2568.
- OSHER, S. & FEDKIW, R. (2001). Level set methods: an overview and some recent results. *Journal of Computational Physics* **169**, 463–502.
- PANNACHET, T., SLUYS, L. J. & ASKES, H. (2008). Error estimation and adaptivity for discontinuous failure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **78**(5), 528–563.
- RÓDENAS, J. J., GONZÁLEZ-ESTRADA, O. A., TARANCÓN, J. E. & FUENMAYOR, F. J. (2008c). A recoverytype error estimator for the extended finite element method based on singular+ smooth stress field splitting. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **76**(4), 545–571.
- SETHIAN, J. A. (1999). *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge, U.K., 1999: Cambridge University Press.
- STAZI, F. L., BUDYN, E., CHESSA, J. & BELYTSCHKO, T. (2003). An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics* **31**(1–2), 38–48.
- STOLARSKA, M., CHOPP, D. L., MOËS, N. & BELYTSCHKO, T. (2001). Modelling crack growth by level set in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **51**(8), 943–960.
- STRANG, G. & FIX, G. (1973). *Analysis of the Finite Element Method*. Series in Automatic Computation: Prentice Hall.
- SUKUMAR, N., CHOPP, D. L. & MORAN, B. (2003). Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics* **70**(1), 29–48.
- SUKUMAR, N., CHOPP, D. L., MOËS, N. & BELYTSCHKO, T. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**(46–47), 131–150.
- SUKUMAR, N., MOËS, N., MORAN, B. & BELYTSCHKO, T. (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **48**(11), 1549–1570.
- SUKUMAR, N. & PRÉVOST, J. (2003). Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures* **40**(26), 7513–7537.

- TARANCÓN, J. E., VERCHER, A., GINER, E. & FUENMAYOR, F. J. (2009). Enhanced blending elements for XFEM applied to linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **77**(1), 126–148.
- VENTURA, G. (2006). On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the extended finite-element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **66**(5), 761–795.
- XIAO, Q. Z. & KARIHALOO, B. L. (2006). Improving the accuracy of XFEM crack tip fields using higher order quadrature and statically admissible stress recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **66**(9), 1378–1410.
- XU, G. & ORTIZ, M. A. (1993). A variational boundary integral equation method for the analysis of 3D cracks of arbitrary geometry modeled as continuous distribution of dislocation loops. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (21), 3675–3701.
- YAZID, A., ABDELKADER, N. & ABDELMADJID, H. (2009). A state-of-the-art review of the XFEM for computational fracture mechanics. *Applied Mathematical Modelling* (12), 4269–4282.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L. (2000a). *The Finite Element Method. Fluid Dynamics*, vol. 3. London: Butterworth Heinemann, fifth ed.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L. (2000b). *The Finite Element Method: The Basis*, vol. 1. Oxford, UK: Butterworth Heinemann, fifth ed.
- ZLOTNIK, S., DÍEZ, P., FERNÁNDEZ, M. & VERGÉS, J. (2007). Numerical modelling of tectonic plates subduction using X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **196**, 4283–4293.