

QA372  
M55

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
POSTGRADO EN MATEMÁTICA  
APLICADA A LA INGENIERÍA (EMMA-I)



PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES  
ORDINARIAS (E.D.O) USADAS EN VIBRACIONES MECÁNICAS

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

Trabajo de tesis presentado ante la Universidad de los Andes como requisito parcial para obtener el grado de Magister Scientiae en Matemática Aplicada a la Ingeniería.

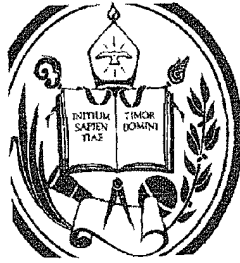
Lic. José T. Milla M

Mérida, Mayo de 2013

BOYACIA

SERBIULA  
Tullo Febres Cordero

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
POSTGRADO EN MATEMÁTICA  
APLICADA A LA INGENIERÍA (EMMA-I)



PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES  
ORDINARIAS (E.D.O) USADAS EN VIBRACIONES MECÁNICAS

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

Trabajo de tesis presentado ante la Universidad de los Andes como requisito parcial para obtener el grado de Magister Scientiae en Matemática Aplicada a la Ingeniería.

Autor: José T. Milla M  
Tutor: Dr. Francisco M León.  
Cotutor: Dr. Francisco Carreras.

Mérida, Mayo de 2013

---

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>AGRADECIMIENTO</b>	<b>VII</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>VIII</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>IX</b>
<b>1. ANTECEDENTES</b>	<b>1</b>
1.1. El Problema . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Antecedentes de la investigación . . . . .	2
<b>2. VIBRACIONES MECÁNICAS</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Definiciones . . . . .	7
2.3. Causas, Clasificación y Consecuencias de las Vibraciones . . . . .	8
2.4. Modelo Matemático Clásico . . . . .	9
2.5. Vibraciones Libres sin Amortiguamiento . . . . .	10
2.6. Vibraciones Forzadas: Estado Estable . . . . .	13
2.7. Vibraciones Forzadas: Estado Transitorio . . . . .	16
2.8. Vibraciones Libres con Amortiguamiento . . . . .	19
2.9. Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento Viscoso . . . . .	23

<b>3. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN VIBRACIONES MECÁNICAS</b>	<b>26</b>
3.1. Introducción . . . . .	26
3.2. Péndulo simple linealizado: Vibración torsional . . . . .	27
3.3. Sistema Masa-Resorte-Amortiguado . . . . .	33
3.4. Vibraciones Forzadas: Estado Estable . . . . .	35
3.5. Vibraciones Libres con Amortiguamiento . . . . .	37
3.6. Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento Viscoso . . . . .	37
3.7. Método de Runge-Kutta 4 . . . . .	38
3.8. Método de Runge-Kutta para Sistemas . . . . .	39
3.9. Método de Runge-Kutta Fehlberg 45 . . . . .	40
<b>4. MÉTODOS NUMÉRICOS</b>	<b>45</b>
4.1. Introducción . . . . .	45
4.2. Maple 8 . . . . .	48
4.3. Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . . . . .	48
4.4. Resolución de Ecuaciones Diferenciales Mediante Aproximaciones Numéricas . . . . .	49
4.5. Graficación de Soluciones . . . . .	51
4.6. Movimiento Armónico Simple . . . . .	55
<b>5. INTERFAZ DE USUARIO PARA LA COMPARACIÓN DE GRÁFICOS</b>	<b>57</b>
5.1. Introducción . . . . .	57
5.2. InterGraph . . . . .	57
5.3. Funcionamiento . . . . .	58

5.4. Preparar Archivos de Matlab . . . . .	58
5.5. Configurar Variables . . . . .	59
5.6. Configurar el Título . . . . .	61
5.7. Configurar la Ecuación . . . . .	61
5.8. Elementos de la Interfaz de Integraph . . . . .	62
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>64</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

2.1. Sistema Masa-Resorte . . . . .	10
2.2. Desplazamiento-Velocidad . . . . .	13
2.3. Sistema masa-Resorte-Motor de peso $\omega$ . . . . .	13
2.4. Pulsaciones . . . . .	17
2.5. Amplitud . . . . .	18
2.6. Diagrama de Aceleración, Velocidad y Distancia vs Tiempo . .	22
3.1. Péndulo Simple Linealizado . . . . .	27
3.2. Péndulo Simple Linealizado con el Tiempo y Desplazamiento	29
3.3. Velocidad y Desplazamiento . . . . .	32
3.4. Sistema Masa-Resorte-Amortiguado . . . . .	33
3.5. Sistema Masa-Resorte-Amortiguado . . . . .	34
3.6. Vibraciones Forzadas: Estado Estable . . . . .	36
3.7. Vibraciones Libres con Amortiguamiento . . . . .	37
3.8. Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento Viscoso . . . . .	38
4.1. Péndulo Simple Amortiguado . . . . .	52
4.2. Desplazamiento, Velocidad - Tiempo . . . . .	54
4.3. Desplazamiento, Velocidad - Tiempo . . . . .	54
4.4. Oscilaciones Libres para Varias Frecuencias . . . . .	56
5.1. Interfaz . . . . .	62

# Dedicatoria

A Dios Todopoderoso, por ser mi guía espiritual.

A mi esposa Maury Acuña e hijos José Daniel y Mauriana Nazaret. A mi madre, Froilana Monsalve, y a la memoria de mi padre, Felix Milla, de quienes soy fruto de su más bello sentimiento de amor, el cual perdura y nos lo irradian para luchar y conseguir todo lo que nos proponemos, siempre estimulados por el afecto de un hogar feliz, que cada día eleva sus oraciones para que consigamos nuestros fines.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

---

## AGRADECIMIENTO

---

- A los Dres. Francisco Leon, Francisco Carrera, por su dirección, colaboración y asesoría constante para hacer posible la culminación de este trabajo. Gracias por su paciencia, consideración, apoyo y confianza.
- Al coordinador del Postgrado de Matemática Aplicada a la Ingeniería EMMA-I, por estar pendiente y ser instrumento personal de estímulo y aliento.
- A mi esposa, por su paciencia, actitud positiva y comprensión durante esos momentos difíciles, gracias por estar a mi lado.
- A mis hijos, José Daniel, Mauriana, quienes han sido mi fuente de inspiración, y que este logro sea de ejemplo para su formación personal y profesional. Los Amo.
- A la secretaria Magaly adscrita al Postgrado de Matemática Aplicada a la Ingeniería EMMA-I, por su ayuda incondicional, apoyo y orientaciones en este proyecto. Mil gracias.
- Al CDCHT por el financiamiento de este trabajo bajo el código I-1384 – 13 – 02-EM.

---

## RESUMEN

---

El presente trabajo presenta el desarrollo de una interfaz didáctica denominada Intergraph, construida en Visual Basic.net, que permite a los docentes disponer de una herramienta en la enseñanza de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias usadas en el área de vibraciones mecánicas. El proyecto está enmarcado en los lineamientos educativos del Laboratorio de Vibraciones Mecánicas de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Los Andes. La herramienta envía datos al programa Matlab, el cual resuelve y genera gráficos de las ecuaciones diferenciales ordinarias consideradas. Estas ecuaciones mostradas de esta forma contribuyen a visualizar los fenómenos vibratorios en sistemas mecánicos para condiciones específicas. Adicionalmente, se permite la reinsertación de parámetros o coeficientes para observar las variaciones que presentaría el sistema estudiado en su comportamiento vibratorio mediante análisis comparativo con las curvas del comportamiento inicial. Como herramienta didáctica, el programa es muy flexible pues permite al docente y al estudiante, estudiar la influencia de perturbaciones o cambios predeterminados en sistemas mecánicos vibratorios reales o en fase de diseño.

---

## INTRODUCCIÓN

---

Este proyecto corresponde al Trabajo de tesis presentado como requisito para obtener el grado de Magister Scientia en Matemática aplicada a la Ingeniería.

Se presenta un proyecto cuyo objetivo es desarrollar una interfaz didáctica, construída en Visual Basic.net, que permita a los docentes del área de vibraciones disponer de una herramienta en la enseñanza de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta interfaz, denominada Intergraph, alimenta los datos del programa Matlab, el cual genera gráficos de las ecuaciones diferenciales ordinarias consideradas. La interfaz permite generar el gráfico de un ejemplo inicial, visualizarlo y compararlo con diferentes variaciones del mismo, variaciones producto de los cambios de variables en las correspondientes ecuaciones.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son de suma importancia en la resolución de problemas de vibraciones. Además, el análisis de movimientos oscilatorios es de gran utilidad por su aplicación a múltiples fenómenos, tanto de física experimental como de la tecnología industrial.

En el presente estudio se consideran los tipos mas simples de vibraciones, es decir, las vibraciones de un cuerpo o de un sistema de cuerpos con un grado de libertad. Para el estudio del movimiento armónico simple se analiza un sistema de masa-resorte, el cual, por su sencillez, permite analizar sin

mucha dificultad varias variables, permitiendo además introducir el estudio de la ecuación diferencial ordinaria en las vibraciones:

$$\frac{a\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{b\partial y}{\partial t} + ky = P(t) \quad (1)$$

En el Capítulo I se indican los antecedentes y se establece el marco teórico que sirve de fundamento al estudio. El Capítulo II trata de la teoría básica de las vibraciones mecánicas, y se describen las ecuaciones de cada uno de los modelos considerados: Vibraciones libres sin amortiguamiento, Vibraciones forzadas: Estado estable, Vibraciones forzadas: Estado transitorio, Vibraciones libres con amortiguamiento y Vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso. En el Capítulo III se indica el uso del programa Matlab para resolver las ecuaciones diferenciales de cada uno de los modelos analizados. El capítulo IV trata del método numérico de Runge-Kutta, que es el algoritmo utilizado por Matlab para resolver ecuaciones diferenciales. Finalmente en el Capítulo V se indican las instrucciones para utilizar el programa, cómo generar gráficos, analizarlos y compararlos.

---

# CAPÍTULO 1

## ANTECEDENTES

---

La modernización de los medios e instrumentos con que se planifican, desarrollan y se evalúan la enseñanza de las vibraciones han evolucionado en forma acelerada, por lo que en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de los Andes en el Postgrado de Matemática Aplicada se ha implementado y promovido el desarrollo de herramientas de este tipo para la adquisición y difusión de conocimientos.

### 1.1. El Problema

- Las ecuaciones diferenciales y las vibraciones mecánicas son temas amplios y complejos.
- La aplicación de ecuaciones diferenciales a las vibraciones ha permitido una mayor comprensión del comportamiento de las vibraciones mecánicas.
- Enseñar ambos tópicos a nivel de pregrado no es una actividad sencilla.
- Con este estudio se plantea un nuevo enfoque pedagógico que permita un proceso enseñanza-aprendizaje mas interactivo utilizando modelos computacionales.

## 1.2. Objetivos

### General

Desarrollar un programa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias usadas en vibraciones mecánicas.

### Específicos

- Estudiar el software Matlab para ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Establecer, adaptar y comparar la ejecución y funcionamiento computacional de los programas Matlab y Maple para las vibraciones mecánicas.
- Diseñar, elaborar e implemental una Interfaz gráfica de usuario que permita la alteración de las variables de un archivo en matlab.
- Aplicar el modelo a un nuevo enfoque pedagógico basado en nuevas tecnologías que permitan un proceso enseñanza aprendizaje mas interactivo.
- Desarrollar el conocimiento de las ecuaciones diferenciales estudiadas en el área de vibraciones mecánicas usando modelos computacionales.

## 1.3. Antecedentes de la investigación

En 1982, la comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la U.C.V para el programa de Maestría en Ciencias Administrativas, realizó estudios sobre algunos aspectos técnicos, de la planificación del mantenimiento y de la prevención de fallas de equipos e instalaciones, que constituyen el Mantenimiento Preventivo por vibraciones Mecánicas.

Estos estudios incorporan los principios más importantes de la teoría de vibraciones, desarrollan las bases teórico-prácticas del diagnóstico por vibraciones mecánicas y describen los sistemas e instrumentos de más reciente aparición en el mercado. Contienen además los conceptos físicos y los modelos matemáticos que constituyen el soporte del software SISDE, creado por el Dr. Genaro Mosquera C (2000), y un grupo constituido por especialistas venezolanos y del Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares de La Habana, Cuba, para el estudio del comportamiento de equipos y estructuras sometidos a vibraciones.

Lucero Nidya Zapata Acevedo, Luis Ángel Moreno Londoño (2000). Contribución al diseño económico de mezclas de concreto empleando técnicas de simulación computarizada (Universidad de Antioquia). Creación de un sistema en Matlab y Visual Basic, para medir muestras de concreto a través de imágenes tomadas a las muestra, y superar los métodos manuales en estas mediciones. Estudia aspectos como las curvas de granulometría que caracterizan el tamaño de las partículas presentes en una mezclas determinada o que pueden identificar al agregado pétreo proveniente de una fuente determinada.

Teonila García Z (2002). Desarrolló de un software para estudio de cortocircuitos en sistema eléctricos de potencia. (Departamento de Gestión y Producción. Facultad de Ingeniería Industrial, UNMSM)(E-mail: gazateo@latinmail.com).

Fabio A. Pineda Botero (Febrero de 2003) presentó un trabajo sobre el Control Activo (Adaptativo) de Vibraciones Mecánicas, tutoriado por Carlos Mario Vélez Sánchez, Doctor en Ciencias Físicas, Especialidad en Automática Industrial. (Universidad EAFIT, Escuela de Ciencias y Humanidades, Maestría en Matemáticas Aplicadas, Medellín).

Como ya se mencionó, las primeras investigaciones sobre control activo de vibraciones se iniciaron a mediados de la década de 1930 y se enfocaron en el uso del control retroalimentado. Esto implicó la medición de algún criterio de error y su utilización en la generación de una señal de control proporcional. Ajustando la amplitud y la fase de la fuente de control mediante circuitos analógicos o digitales, se podía minimizar el error. Cuando la señal de error disminuía, la ganancia sobre esta señal debía incrementarse, lo cual algunas veces conducía a inestabilidades en el sistema de control. Por esta razón, los sistemas de control con retroalimentación se emplearon para problemas de ruido tonal (acústica), debido a que estos son inherentemente estables. Sin embargo, en el mundo real la mayoría de los problemas son inestables. En la actualidad el problema de control se aborda desde la consideración de las condiciones cambiantes impuestas por sistemas, en general, no estables.

En el caso de vibraciones mecánicas, el concepto de control activo se caracteriza por una masa secundaria que se adiciona a un sistema vibratorio, conectada a un sistema de control electrónico. La diferencia del control activo-adaptativo, está en la capacidad del sistema amortiguador de cambiar sus propiedades internas para reflejar los cambios en el ambiente vibratorio. De ahí la importancia del diseño desde el punto de vista del control adaptativo.

Eduardo Alberto Cirera, del Departamento de Ingeniería Mecánica, Laboratorio CNC, Facultad de Ingeniería, UNNE, (e-mail: [ecirera@ing.unne.edu.ar](mailto:ecirera@ing.unne.edu.ar)), en su trabajo presenta algunos conceptos relativos al aislamiento de vibraciones en sus dos variantes: activo y pasivo. Se obtiene el modelo matemático de un sistema mecánico de un grado de libertad, y se realizan simulaciones para observar su comportamiento con aislamiento pasivo. Se plantean además las

ventajas del aislamiento activo y se asume una ley de control en particular, la que se desarrollará en posteriores trabajos. En todos los casos se realizarán simulaciones en PC, utilizando las herramientas y facilidades de los programas Matlab.

Con respecto a las vibraciones, pueden ser de muy diversa naturaleza, y muchas veces es imposible hallar un modelo lo suficientemente exacto de las mismas. Sobre todo es muy difícil saber qué tipo de vibraciones afectarán a un sistema una vez que el mismo esté en operaciones. Sin embargo, en la literatura consultada generalmente son modeladas como una función  $A\text{seno}(wt)$ , y en otros casos se modelan como una función  $A\text{coseno}(wt)$ .

Jorge Mauricio Ovído trabajó sobre el enfoque teórico de las ecuaciones diferenciales, e implementó diversos softwares. (<http://www.joviedo@eco.unc.edu.ar>).

Leonel Castañeda Heredia, Jorge Restrepo Ochoa, Claudia Zuluaga Giraldo, Esteban Builes Moreno y Edgar Rueda Muñoz (2003) implementaron un programa para el análisis de vibraciones libres en ejes, por medio de elementos finitos, para el sistema Vibrafin. (Universidad EAFIT . Medellín-Colombia. <http://www.redalyc.com/>).

Afonso Gutiérrez (Agosto, 2003) Problemas de convergencia en un contexto de software educativo. El artículo trata sobre los enfoques teóricos sobre la creatividad, la producción y el desarrollo de software, enmarcado dentro del constante y acelerado proceso de intelectualización de la humanidad, que conlleva a formar personas con conductas éticas, conocimientos y mucha creatividad. (Universidad de La Laguna. Departamento de Análisis Matemático).

Nora Hernandez, Ramon Gomez, Oscar Arreo (Junio, 2003) La elaboración de un módulo instruccional. Preparado para el Centro de Competencias de la Comunicación Universidad de Puerto Rico en Humacao. Proyecto de Título V. Gloria J.

Horacio Martínez Alfaro (Agosto, 2005) trabajó sobre material de apoyo de vibraciones mecánicas: Centro de sistemas inteligentes (hma@itesm.mx Tecnológico de Monterrey) (<http://hma.mty.itesm.mx/>).

Juan Ortega Terzán , Néstor Fierro Morineaud (2005): Desarrolló de una interfaz interactiva de comunicaciones entre un dispositivo y Matlab: Desarrolló de una interfaz para el tratamiento digital de señales, utilizando la herramienta interactiva de Matlab SPTOOL y DSP TMS320C31, con la cual se crean e implementan señales y especialmente filtros, que pueden ser diseñados y modelados de acuerdo con los requerimientos del usuario.

Giovanni Sandre Correa (2005): Perfilador Topográfico. Creación de un prototipo que permita realizar la exploración de una superficie y graficarla tridimensionalmente en computadora personal (PC). El principio de operación se basa en el desplazamientos de un sistema mecánico de ejes coordenados  $X$  e  $Y$ , controlados por motores de corriente directa acoplados a codificadores ópticos que interpretan la altura en eje  $Z$  de la superficie por medio de reflexión. Para mostrar el modelo de las superficies se utilizó Matlab, manejado mediante una interfaz en Visual Basic. Las gráficas finales se muestran después de aplicar un método probabilístico de interacción, con la finalidad de eliminar algunas variaciones en las mediciones provocadas por ruido no deseado.

---

## CAPÍTULO 2

# VIBRACIONES MECÁNICAS

---

### 2.1. Introducción

En este capítulo se tratan algunos aspectos de la teoría general de vibraciones mecánicas, cuyo conocimiento es básico para un estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias que las representan. El fenómeno de las vibraciones mecánicas debe ser tenido en cuenta para el diseño, la producción y el empleo de maquinaria y equipos de automatización. Entre los aspectos considerados están los de estructura y la tecnología del impacto.

### 2.2. Definiciones

Se presenta a continuación la definición de una serie de términos necesarios para la comprensión del tema tratado.

**Sistema:** conjunto formado por masa - resorte - amortiguador en sus diferentes combinaciones, y que representan un sistema de ingeniería cualquiera.

**Grados de Libertad:** es el número mínimo de coordenadas generalizadas de un sistema, que unívocamente determinan la posición del mismo.

**Cargas Dinámicas:** fuerzas externas variantes en el tiempo a las que está sometido un sistema, y cuyos efectos también son función del tiempo.

**Vibración.** No existe una definición exacta de vibración; sin embargo, se pueden considerar como vibraciones, las variaciones periódicas temporales

de diferentes magnitudes. Específicamente, una vibración mecánica es el movimiento de una película o de un cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio.

**Frecuencia** : el número de ciclos por unidad de tiempo define la frecuencia del movimiento.

**Período de una vibración** : intervalo de tiempo necesario para que el sistema efectúe un ciclo completo.

**Frecuencia natural**: es la frecuencia de un sistema que tiene vibración libre sin amortiguamiento.

**Amplitud**: El desplazamiento máximo del sistema desde su posición de equilibrio.

**Resonancia**: fenómeno que ocurre cuando la frecuencia de la excitación es igual a la frecuencia natural del sistema. Cuando se presenta, la amplitud de la vibración aumenta indefinidamente y está gobernada únicamente por la cantidad de amortiguamiento presente en el sistema.

**Modo de vibración**: es la manera particular de vibrar que tienen los sistemas para cada una de sus frecuencias naturales.

**Amortiguamiento**: fricción o resistencia al movimiento periódico, que lo retardan o causan su eventual desaparición.

### 2.3. Causas, Clasificación y Consecuencias de las Vibraciones

Las causas de las vibraciones son muchas, pero básicamente las vibraciones se encuentran estrechamente relacionadas con tolerancias de mecanización, desajustes, movimientos relativos entre superficies en contacto, des-

balances de piezas en rotación u oscilación, etc.; es decir, todo el campo de la técnica. Los fenómenos anteriormente mencionados producen casi siempre un desplazamiento del sistema desde su posición de equilibrio estable originando una vibración mecánica.

Las vibraciones se clasifican en libres y forzadas.

**Vibración libre:** es el movimiento periódico que se observa cuando el sistema se desplaza de su posición de equilibrio estático en ausencia de fuerzas externas.

**Vibración forzada:** es el movimiento, no necesariamente periódico, que se presenta cuando sobre el sistema actúan fuerzas externas. Además, son fuente de desgaste de materiales, de daños por fatiga, y de movimientos y ruidos molestos. Todo sistema mecánico tiene características elásticas, de amortiguamiento y de oposición al movimiento, unas de mayor o menor grado que otras. Son estas características las que hacen que el sistema vibre cuando es sometido a una perturbación. Toda perturbación se puede controlar, siempre y cuando se anexen bloques de control cuya función de transferencia sea igual o invertida a la función de transferencia del sistema. Si la perturbación tiene una frecuencia igual a la frecuencia natural del sistema, la amplitud de la respuesta puede exceder la capacidad física del mismo, ocasionando su destrucción.

## 2.4. Modelo Matemático Clásico

La ecuación general de las vibraciones es:

$$\frac{a\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{b\partial u}{\partial t} + ku = P(t) \quad (2.1)$$

Donde  $u$  es la magnitud que sufre variaciones periódicas temporales,  $P(t)$  la variable de reforzamiento o fenómeno incidente de la vibración;  $a$ ,  $b$ , y  $k$  son las constantes características del sistema

## 2.5. Vibraciones Libres sin Amortiguamiento

Consideremos el caso mostrado en la figura 2.1



Figura 2.1: Sistema Masa-Resorte

Se considera que: Sólo pueden ocurrir desplazamientos verticales del peso  $W$ .

- la masa del resorte sea pequeña en comparación con la del peso  $W$ .
- El sistema tiene un grado de libertad.

Las vibraciones que son producidas únicamente por la fuerza elástica del resorte  $k$  se llaman vibraciones libres o naturales. El desplazamiento  $u$  es considerado positivo en dirección vertical, ya sea hacia abajo o hacia arriba. La fuerza de atracción del resorte en cualquier posición es  $F = W + ku$ ,  $k$  es la constante del resorte, la masa del cuerpo vibrante es  $m = W/g$ , peso dividido por la aceleración, donde  $g$  es la aceleración producida por la fuerza de gravedad, la aceleración del cuerpo es dada por

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \ddot{u}$$

La ecuación diferencial de movimiento es

$$\frac{W}{g} \ddot{u} = W - (W + ku)$$

Esta ecuación es válida para cualquier posición del cuerpo. Introduciendo la notación

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{kg}{W} = \frac{g}{\delta_{est}}$$

la ecuación toma la forma siguiente

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \tag{2.2}$$

**Solución.** Para resolverla, se considera que  $u = e^{st}$  es una solución. Tomando la segunda derivada y sustituyendo en la ecuación (2.2) se tiene :

$$(s^2 + \omega^2)e^{st} = 0 \leftrightarrow s^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm \omega i$$

una solución particular de la ecuación es

$$u(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

una solución general de la ecuación es

$$u(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (2.3)$$

$\omega$  = peso ;  $u$  = desplazamiento vertical desde su posición de equilibrio

$$\omega^2 = \frac{g}{\delta}, \quad \delta = \frac{\omega}{k}$$

desviación o deflexión del resorte. Las funciones son periódicas que se repiten en un intervalo de tiempo

$$\omega(\tau + t) - \omega t = 2\pi$$

Este intervalo se llama el período de vibración

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{est}}{g}}$$

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}}$$

El movimiento vibratorio representado por la ecuación (2.2) se llama movimiento armónico. Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se obtienen en las condiciones iniciales  $t = 0$ ,

$$C_1 = u_0 \quad y \quad C_2 = \frac{\dot{u}_0}{\omega}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.2) se tiene

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (2.4)$$

Se ve que en este caso la vibración consta de dos partes: Una vibración que es proporcional a  $\cos \omega t$  y que depende del desplazamiento inicial del peso, y otra que es proporcional a  $\sin \omega t$  y depende de la velocidad inicial  $\dot{u}_0$ . Como se muestra en la figura 2.2:

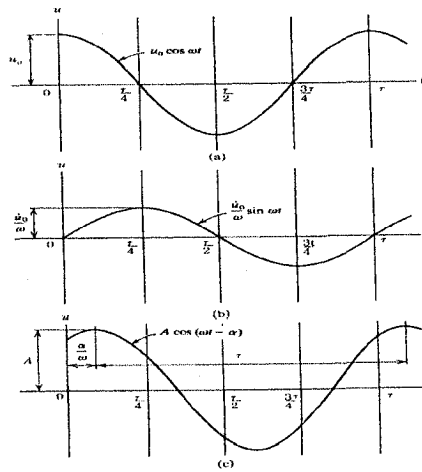
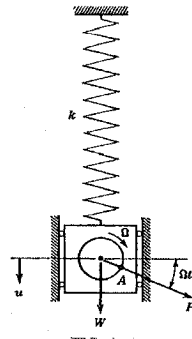


Figura 2.2: Desplazamiento-Velocidad

## 2.6. Vibraciones Forzadas: Estado Estable

Como un ejemplo de vibraciones forzadas, considere un motor de peso  $\omega$  en el resorte el cual se desliza en dirección vertical.

Este sistema tiene un frecuencia natural

Figura 2.3: Sistema masa-Resorte-Motor de peso  $\omega$

$$\omega = \sqrt{\frac{kg}{m}}$$

Se supone que el motor gira a una velocidad angular  $\Omega$  y su rotor tiene un desequilibrio que crea una fuerza centrífuga de rotación  $p$ , el cual produce vibraciones forzadas al sistema, además de la fuerza gravitatoria y la fuerza del resorte, se tiene una componente vertical  $p \sin \Omega t$ .

Así la ecuación de movimiento es:

$$\frac{\omega}{g} \ddot{u} = -ku + p \sin \Omega t$$

Introduciendo la notación

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{kg}{m} \quad y \quad q = \frac{p}{m} = \frac{pg}{m}$$

se obtiene la ecuación diferencial

$$\ddot{u} + \omega^2 u = p \sin \Omega t \quad (2.5)$$

**Solución.** Una solución particular de esta ecuación se obtiene suponiendo que  $u$  es proporcional a  $\sin \Omega t$ , esto es tomando

$$u_p = C_3 \sin \Omega t \quad (2.6)$$

$C_3$  es una constante, derivando y sustituyendo en la ecuación (2.3) se tiene que

$$C_3 = \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Así, la solución particular buscada es

$$u(t) = \frac{q \sin \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2}$$

sumando a esta solución particular (2.3) se obtiene

$$u(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{q \operatorname{sen} \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (2.7)$$

Esta ecuación contiene dos constantes de integración y representa la solución general de la ecuación (2.3). Los primeros dos términos representan vibraciones libres y el tercer término depende de la fuerza perturbadora, representa la vibración forzada del sistema. Se observa que esta última vibración tiene el mismo período.

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

Sustituyendo  $C_3$  en la ecuación (2.4) ignorando la vibración libre se obtienen las llamadas vibraciones forzadas en estado estable definida por la ecuación:

$$x_p = \left( \frac{p}{k} \operatorname{sen} \Omega t \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right)$$

el factor

$$\frac{p}{k} \operatorname{sen} \Omega t$$

es la deflexión que produce la fuerza perturbadora y el factor

$$\frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

representa la acción dinámica de esta fuerza. El valor absoluto de esta cantidad es usualmente llamado el factor de magnificación o amplificación

$$\beta = \left| \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right|$$

se observa que depende únicamente de la razón que se obtiene dividiendo la frecuencia de la fuerza perturbadora entre la fuerza de la vibración libre del sistema en la gráfica con los valores del factor de amplificación como ordenada y la razón como abscisa.

## 2.7. Vibraciones Forzadas: Estado Transitorio

En la ecuación (2.5) el último término representa las vibraciones forzadas. La amplitud de la vibración libre puede determinarse mediante la solución general de (2.5), tomando condiciones iniciales. En  $t = 0$  el desplazamiento y la velocidad del cuerpo vibrante sean iguales a cero.

Para  $t = 0$  se tiene  $\dot{u} = 0$  y así

$$C_1 = 0 \quad C_2 = -\frac{q\omega/\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.5) se tiene

$$u(t) = \frac{q}{\Omega^2 - \omega^2} \left\{ \text{sen}\omega t - \frac{\omega}{\Omega} \text{sen}\Omega t \right\} \quad (2.8)$$

El movimiento consta de dos partes, vibración libre proporcional a  $\text{sen}\Omega t$ , y vibración forzada proporcional a  $\text{sen}\omega t$ .

Consideremos el caso en que la frecuencia de la fuerza perturbadora es muy próxima a la frecuencia de las vibraciones libres del sistema,  $\omega$  se acerca a  $\Omega$  Si

$$\Omega - \omega = 2\Lambda.$$

Donde es una pequeña cantidad, y despreciando un pequeño término con el factor

$$\frac{2\Lambda}{\Omega}$$

La ecuación (2.5) será :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{2q}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \frac{(\omega + \Omega)t}{2} \operatorname{sen} \frac{(\omega - \Omega)t}{2} \\
 &= \frac{2q \operatorname{sen} \Lambda t}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \frac{(\omega + \Omega)t}{2} \\
 &\simeq -\frac{q \operatorname{sen} \Lambda t}{2\omega \Lambda} \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

como  $\Lambda$  es una pequeña cantidad, la función  $\operatorname{sen} \Lambda t$  varía lentamente, y su período igual a  $2\pi/\Lambda$ , es grande. La ecuación representando vibraciones de período  $2\pi/\omega$  y de amplitud variable igual a

$$q \operatorname{sen} \frac{\Lambda t}{2\omega \Lambda}$$

esta clase de vibraciones se llama pulsación y se muestra en la figura 2.4

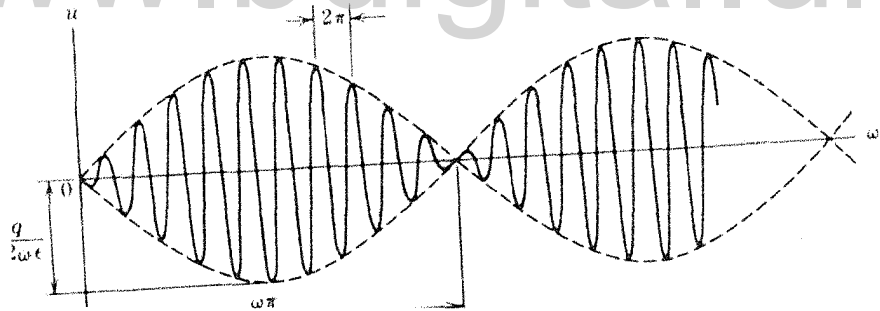


Figura 2.4: Pulsaciones

El período de pulsación, igual a  $\frac{\pi}{\Lambda}$ , aumenta a medida que  $\omega$  se aproxima a  $\Omega$  ésto es la resonancia. Para  $\omega = \Omega$  en la ecuación anterior se puede sustituir  $\Lambda t$ , en vez de  $\text{sen}\Lambda t$ , y se obtiene:

$$u(t) = -\frac{qt}{2\omega} \cos\omega t$$

La amplitud de vibración en la ecuación crece indefinidamente con el tiempo, como se muestra en la figura 2.5

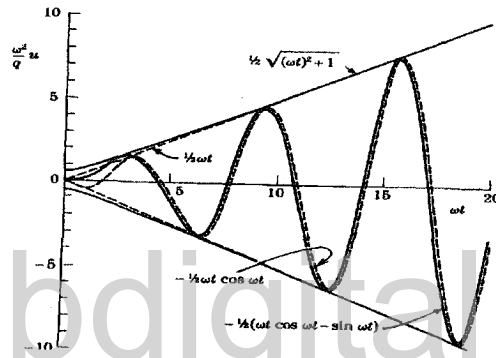


Figura 2.5: Amplitud

## 2.8. Vibraciones Libres con Amortiguamiento

Los sistemas con movimiento armónico simple no disipan energía durante la oscilación. Sin embargo, todo sistema real lleva implícita la existencia de fuerzas disipativas debido a lo cual el movimiento armónico simple cesa después que ha transcurrido cierto período de tiempo. Esas fuerzas disipativas son el reflejo de la existencia del amortiguamiento en el sistema. Las vibraciones libres amortiguadas son un modelo simplificado del comportamiento de los sistemas real es cuando sobre los mismos actúan fuerzas excitadoras con período muy pequeños de duración. El sistema es estudiado a partir del cese de esa acción.

Las propiedades de estos sistemas serán determinadas considerando el amortiguamiento es de carácter viscoso, el cual es proporcional a la velocidad.

$$\frac{\omega}{g}\ddot{u} = \omega - (\omega - ku) + c\dot{u}$$

el coeficiente  $c$  representa el amortiguamiento viscoso o constante viscosidad.

El signo menos indica que la fuerza actúa en sentido contrario de la velocidad.

Dividiendo la ecuación entre  $m = \omega/g$  y usando la notaciones

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{kg}{\omega} \quad y \quad 2n = \frac{c}{m} = \frac{cg}{\omega}$$

se obtiene la siguiente ecuación para vibraciones libres con amortiguamiento viscoso.

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

**Solución.** Se asume una solución de la forma

$$u = Ce^{rt}$$

derivando y sustituyendo se tiene que

$$r^2 + 2nr + \omega^2 = 0$$

se obtienen

$$r = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$$

Se considera primero el caso en que la cantidad  $n^2$  depende del amortiguamiento, es menor que la cantidad  $\omega^2$  en tal caso la cantidad

$$\omega_d^2 = \omega^2 - n^2$$

es positiva y se obtienen dos raíces complejas de  $r$ :

$$r_1 = -n + i\omega_d \quad y \quad r_2 = -n - i\omega_d$$

llevando estas raíces a la expresión se tienen dos soluciones particulares de la ecuación. La suma o la diferencia de estas dos raíces, multiplicada por una constante es también una solución .

$$u_1 = \frac{C_1}{2}(e_1^r t + e_2^r t) = C_1 e^{-nt} \cos \omega_d t \quad (2.10)$$

$$u_2 = \frac{C_2}{2}(e_1^r t - e_2^r t) = C_2 e^{-nt} \sen \omega_d t \quad (2.11)$$

sumando ambas soluciones, se obtiene la solución general

$$u(t) = e^{-nt}(C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sen \omega_d t)$$

$C_1$  y  $C_2$  son constantes que en cada caso particular deben ser determinada por las condiciones iniciales. El factor  $e^{-nt}$  decrece gradualmente con

el tiempo y resultarán gradualmente amortiguadas, representa una función periódica con una frecuencia angular  $\omega_d$ , donde

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - n^2}$$

es llamado frecuencia angular de vibraciones amortiguada.

El período es

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n^2}{\omega^2}\right)}}$$

Comparando este período con el período  $\tau = 2\pi/\omega$  obtenido antes para las vibraciones sin amortiguamiento, vemos que el período de vibración amortiguada  $\tau_d$  es alto, pero si  $n$  es pequeña en comparación con  $\omega$ , este aumento es una pequeña cantidad que puede ser despreciada. Por las condiciones iniciales para  $t = 0$  el cuerpo vibrante es desplazado de su posición de equilibrio en un valor  $u_0$  y tiene una velocidad inicial  $\dot{u}_0$

$$u_0 = C_1 \quad y \quad C_2 = \frac{\dot{u}_0 + nu_0}{\omega_d}$$

sustituyendo en la ecuación se tiene que

$$u(t) = e^{-nt} \left( u_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{u}_0 + nu_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right)$$

El primer término de esta expresión, que es proporcional a  $\cos \omega_d t$  depende únicamente del desplazamiento inicial  $u_0$  y el segundo término, es proporcional a  $\sin \omega_d t$ , depende tanto del desplazamiento inicial  $u_0$  como de la velocidad  $\dot{u}_0$ . La ecuación puede ser escrita en la forma equivalente

$$u(t) = Ae^{-nt} (\cos \omega_d t - \alpha_d)$$

el máximo valor es

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{u_0^2 + \frac{(i_0 + nu_0)^2}{\omega_d^2}}$$

y

$$\alpha_d = \tan^{-1} \left( \frac{C_1}{C_2} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{i_0 + nu_0}{\omega_d u_0} \right)$$

en la figura 2.6 vemos que la curva es tangente al desarrollo de  $\pm Ae^{-nt}$  en los puntos  $m_1, m_2, m_3$ , y  $m'_1, m'_2, m'_3$  donde  $t = 0, t = \tau, t = 2\tau, \dots$ ;  $t = \tau/2, t = 3\tau/2, \dots$

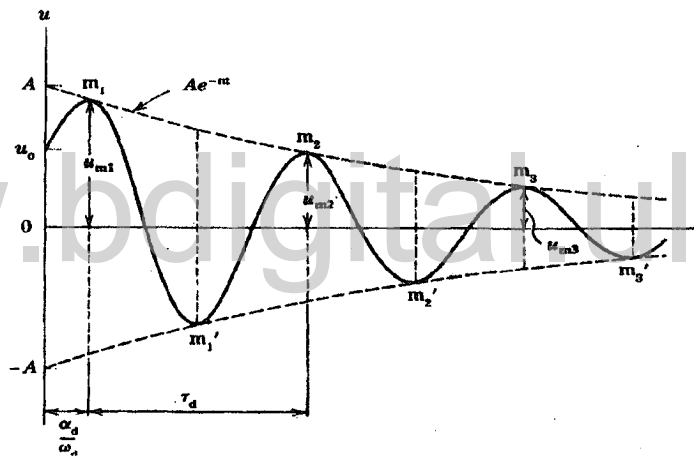


Figura 2.6: Diagrama de Aceleración, Velocidad y Distancia vs Tiempo

## 2.9. Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento Viscoso

En la sección precedente discutimos vibraciones libres de una masa resorte-suspendida con amortiguamiento viscoso. Ahora consideraremos el caso donde, además de una fuerza del resorte  $-ku$  y una fuerza que resiste  $-c\dot{u}$ , hay también una fuerza que varía armónicamente y que actúa externamente en la masa que vibra. Como se ha visto en la sección anterior, una fuerza que perturba puede ser producida por un motor desequilibrado que funciona con velocidad angular constante  $\Omega$ . Así, la fuerza centrífuga que rota  $q$ , al actuar según lo demostrado en la figura, tiene una componente vertical  $q\cos\Omega t$ . Bajo tales condiciones, la ecuación del movimiento para la masa suspendida  $m$  del motor se convierte

$$m\ddot{u} = -ku + c\dot{u} + q\cos\Omega t$$

**Solución.** dividiendo por  $m$  y introduciendo la notación

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad 2n = \frac{c}{m}$$

se obtiene

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega^2 u = q\cos\Omega t \quad (2.12)$$

Esta es la ecuación de movimiento para vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso,  $2n$  es el coeficiente de amortiguamiento del sistema con vibraciones forzadas. Una solución de la ecuación es de la forma

$$u(t) = M\cos\Omega t + N\sin\Omega t$$

donde  $N$  y  $M$  son constantes. Para determinar estas constantes se deriva la ecuación y se sustituye para obtener:

$$(-\Omega^2 M + 2n\Omega N + \omega^2 M - q)\cos\Omega t + (-\Omega^2 N - 2n\Omega M + \omega^2 N)\sin\Omega t$$

esta ecuación se satisface para todo  $t$  si y sólo si las expresiones entre paréntesis se anulan. Para calcular  $N$  y  $M$  se tiene una ecuación algebraica lineal

$$-\Omega^2 M + 2n\Omega N + \omega^2 M = q$$

$$-\Omega^2 N - 2n\Omega M + \omega^2 N = 0$$

se obtiene

$$M = \frac{q(\omega^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}$$

$$N = \frac{q(2n\Omega)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}$$

la solución general de la ecuación es

$$u(t) = e^{-nt} (C_1 \cos\omega_d t + C_2 \sin\omega_d t) + M \cos\Omega t + N \sin\Omega t$$

los primeros dos términos en la ecuación representan vibraciones libres amortiguadas, mientras que los dos últimos términos representan vibraciones forzadas amortiguadas. Las vibraciones libres tienen el período  $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ , según lo discutido en la sección precedente; y las vibraciones forzadas tienen el período  $T = 2\pi/\Omega$ , el cuál es idéntico con el período de la fuerza perturbadora que lo produce. Se observa que debido al factor  $e^{-nt}$  las vibraciones tienden a cero gradualmente, dejando solamente las vibraciones forzadas constantes representadas por los dos últimos términos. Estas vibraciones forzadas son mantenidas indefinidamente por la acción de la fuerza

que perturba y, por lo tanto, son de gran importancia práctica. En la sección anterior, se han discutido las vibraciones forzadas sin amortiguamiento, ahora se verá cómo son afectados los amortiguamientos. La ecuación anterior de estado estacionario de la respuesta se puede escribir en la forma equivalente del fase-ángulo como

$$u(t) = A \cos(\Omega t - \theta)$$

donde

$$A = \sqrt{M^2 + N^2} \quad (2.13)$$

$$= \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \quad (2.14)$$

$$= \frac{q/\omega^2}{\sqrt{1 - \Omega^2/\omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2/\omega^4}} \quad (2.15)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{N}{M} \right) \quad (2.16)$$

$$= \tan^{-1} \left( \frac{2n\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \quad (2.17)$$

$$= \tan^{-1} \left( \frac{2n\Omega/\omega^2}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right) \quad (2.18)$$

Se observa que las vibraciones forzadas de estado estacionario con amortiguamiento viscoso son un movimiento armónico simple que tiene amplitud constante  $A$

---

## CAPÍTULO 3

# SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN VIBRACIONES MECÁNICAS

---

### 3.1. Introducción

En la plataforma básica del Matlab los programas de Runge-Kutta para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden son `ode23` y `ode45`. El programa `ode23` resuelve sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, usa las fórmulas de Runge-Kutta de segundo y tercer orden; `ode45` resuelve sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden usando las fórmulas de Runge-Kutta de cuarto y quinto orden. Hay también, en la plataforma básica del Matlab, la función `ode23p` que realiza lo que la función `ode23` hace y además calcula el gráfico de la evolución en el tiempo de los primeros dos o tres componentes de la solución. Además, Matlab dispone de otros métodos para resolver ecuaciones diferenciales que no están en la plataforma básica. Hay que destacar los programas ODE suite que contienen varias funciones para resolver ecuaciones diferenciales.

Este conjunto de rutinas puede variar de versión en versión de Matlab. El usuario debe consultar el manual de su versión de Matlab para determinar las rutinas disponibles. La rutina `ode45` corresponde a una implementación de un

método de Runge Kutta de paso variable, y es la rutina usada en los ejemplos dados en este estudio. Las otras rutinas siguen la misma convención de uso. La selección de la rutina más adecuada en cada caso depende del problema que se quiere resolver y de la precisión deseada (para más detalles ver manual de Matlab).

A continuación se presentan ejemplos de aplicación de resolución de problemas. Se consideran los siguientes casos:

- Péndulo simple linealizado: Vibración torsional
- Sistema masa-resorte-amortiguado
- Vibraciones forzadas: estado estable
- Vibraciones libres con amortiguamiento
- Vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso

### 3.2. Péndulo simple linealizado: Vibración torsional

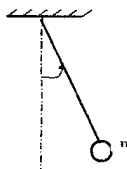


Figura 3.1: Péndulo Simple Linealizado

La ecuación diferencial más común en vibraciones del tipo Péndulo simple linealizado para pequeños valores del ángulo es:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

### Solución.

Para resolver esta ecuación se necesita un programa principal que aplique el método de solución y de un programa auxiliar que defina la ecuación a resolver. Se usará el método Runge-Kutta para resolver sistemas de primer orden. Si la ecuación no fuese de primer orden, es necesario transformarla. En el presente ejemplo, la ecuación es de segundo orden, entonces hay que hacer un cambio de variable para transformarla en un sistema de dos ecuaciones de primer orden.

$$\begin{aligned} y_1 = \theta &\Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{\theta} \\ y_2 = \dot{\theta} &\Rightarrow \dot{y}_2 = \ddot{\theta} \end{aligned}$$

En resumen, se tienen dos ecuaciones de primer orden, dadas por

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{g}{l}y_1$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, es necesario crear un archivo de función con la definición de dicho sistema. Esto se hace escribiendo la ecuación diferencial en la forma **péndulo.m**:

```
function py = pp(t, y)
[t, Y] = ode(@pp, [0 10], [0 1]);
plot(t, Y(:, 1))
```

```
title('Pendulo simple linealizado');
```

```
xlabel('Tiempo');
```

```
ylabel('Theta');
```

```
l = 2;
```

```
g = 9,8;
```

```
dy = zeros(2, 1);
```

```
dy(1) = y(2);
```

```
dy(2) = -g/l*y(1);
```

[0 1] es el vector de las condiciones iniciales.

[0 10] es el tiempo inicial y tiempo final.

[t, Y] = ode(@pp, [0 10], [0 1]); es el comando que llama el programa **pd.m**.

Este comando tiene como salida el vector [t Y], donde  $t$  es el tiempo y  $Y$  es una matriz. `plot(t, Y(:, 1))`. El programa muestra el gráfico (figura 3.2)

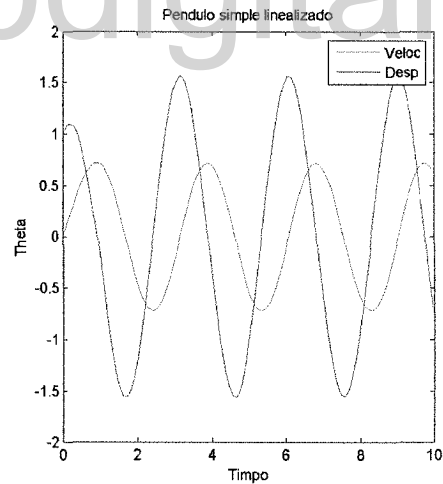


Figura 3.2: Péndulo Simple Linealizado con el Tiempo y Desplazamiento

Ahora se resuelve el sistema de ecuaciones por el método de la matriz exponencial.

```

A=[0,1;-10,0];           %matriz de coeficientes%
C=[0 1];                 %Condiciones iniciales%
t0=0;                    %Valor inicial del tiempo%
tf=1;                    % Valor final del tiempo%
h=0.025;                 % longitud de paso%
k=(tf-t0)/h;             %calculo del numero de iteraciones%
g=C; tab=[t0,C]; for i=1:k
    t0=t0+h;
    w=(expm(A*(t0))*C')';
    g=[g;w];
    tab2=[t0,w];
    tab=[tab;tab2];
end
u=0:h:tf; plot(u',g)
    tab ;
tab =

```

0	0	1.0000
0.0250	0.0250	0.9969
0.0500	0.0498	0.9875
0.0750	0.0743	0.9720
0.1000	0.0983	0.9504
0.1250	0.1218	0.9229

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN VIBRACIONES MECÁNICAS31

0.1500	0.1444	0.8896
0.1750	0.1662	0.8507
0.2000	0.1869	0.8066
0.2250	0.2065	0.7574
0.2500	0.2248	0.7034
0.2750	0.2416	0.6451
0.3000	0.2570	0.5828
0.3250	0.2707	0.5168
0.3500	0.2828	0.4475
0.3750	0.2931	0.3755
0.4000	0.3015	0.3011
0.4250	0.3081	0.2249
0.4500	0.3128	0.1472
0.4750	0.3155	0.0687
0.5000	0.3162	-0.0103
0.5250	0.3150	-0.0893
0.5500	0.3118	-0.1677
0.5750	0.3066	-0.2450
0.6000	0.2995	-0.3208
0.6250	0.2906	-0.3946
0.6500	0.2798	-0.4659
0.6750	0.2673	-0.5344
0.7000	0.2531	-0.5994
0.7250	0.2374	-0.6608
0.7500	0.2201	-0.7180

www.bdigital.ula.ve

0.7750	0.2015	-0.7707
0.8000	0.1816	-0.8186
0.8250	0.1606	-0.8614
0.8500	0.1386	-0.8989
0.8750	0.1157	-0.9307
0.9000	0.0921	-0.9566
0.9250	0.0679	-0.9767
0.9500	0.0433	-0.9906
0.9750	0.0184	-0.9983
1.0000	-0.0065	-0.9998

Así tenemos el gráfico

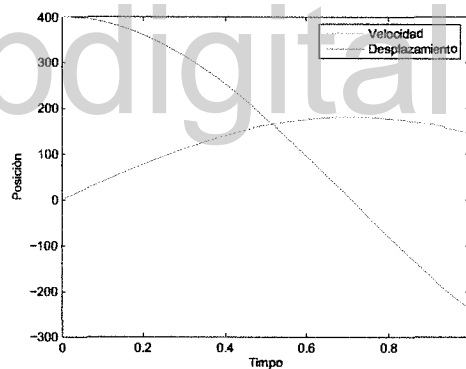


Figura 3.3: Velocidad y Desplazamiento

### 3.3. Sistema Masa-Resorte-Amortiguado

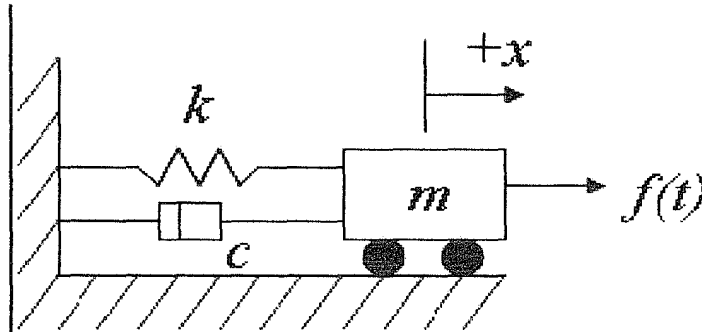


Figura 3.4: Sistema Masa-Resorte-Amortiguado

La ecuación correspondiente a este sistema es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a\text{sen}(t)$$

Para resolver esta ecuación se necesita un programa general, es decir, un programa que resuelva la ecuación para cualesquiera  $m$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $a$ , y condiciones iniciales dadas. El cambio de variables para transformar esta ecuación en un sistema de dos ecuaciones de primer orden es el siguiente:

$$y_1 = x \Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{x}$$

$$y_2 = \dot{y}_1 = \dot{x} \Rightarrow \dot{y}_2 = \ddot{x}$$

Con lo que se obtiene:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \frac{a}{m}\text{sen}(t) - \frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1$$

Para resolver este sistema de ecuaciones de primer grado, Matlab exige crear un archivo de función que defina dicho sistema. Esto se hace escribiendo la ecuación diferencial de la forma masa-resorte amortiguado;

```
function x = resorte
[t, X] = ode45(@pp, [0 10], [0 1]);
plot(t, X(:,1))
title('masa resorte amortiguado');
xlabel('Tiempo');
ylabel('Posición');
function dx = pp(t,x)
c = .5; a = 1 ; m = 2; k = 1; dx = zeros(2,1);
dx(1) = x(2); dx(2) = (a * sin(t) - c * x(2) - k * x(1))/(m);
```

Al ejecutar el programa se obtiene el gráfico que se muestra en la figura 3.5

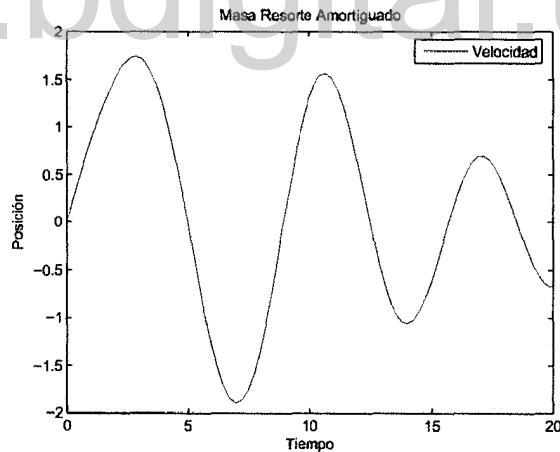


Figura 3.5: Sistema Masa-Resorte-Amortiguado

### 3.4. Vibraciones Forzadas: Estado Estable

La ecuación del sistema es:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = q \operatorname{sen}(\Omega t)$$

donde

$$q = \frac{pg}{w} \quad \text{y} \quad \omega^2 = \frac{kg}{w}$$

Para resolver esta ecuación se necesita un programa general, es decir, un programa que resuelva la ecuación para cualesquiera  $p, g, k, w$  y condiciones iniciales dadas. El cambio de variables para transformar esta ecuación en un sistema de dos ecuaciones de primer orden es el siguiente:

$$y_1 = x \Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{x}$$

$$y_2 = \dot{y}_1 = \dot{x} \Rightarrow \dot{y}_2 = \ddot{x}$$

Se obtiene:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = q \operatorname{sen}(\Omega t) - \omega^2 y_1$$

```
function vf[t, X] = ode45(@pp, [0 100], [0 1]);
plot(t, X(:, 1))
title('Vibraciones Forzadas: Estado Estable ');
xlabel('Tiempo'); ylabel('Posición');
function dx = pp(t, x) g = 8.9; w = 1; p = 2;
k = 1; q = (g * p)/w; c = (k * g/w)^1/2; omega = 1;
if t < 1;
f = 1;
```

```
else f = 0;
```

```
end
```

```
dx = zeros(2, 1); dx(1) = x(2); dx(2) = q * sin(omega * t) - c * x(1);
```

Al ejecutar el programa en Matlab vfeeb.m se obtiene el gráfico de la figura 3.6

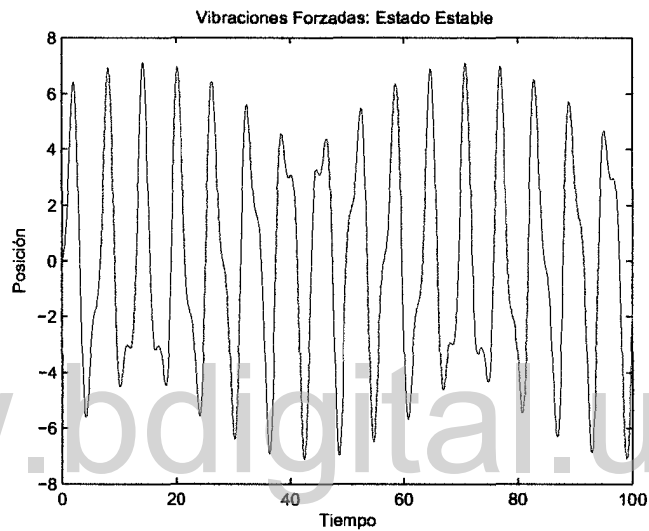


Figura 3.6: Vibraciones Forzadas: Estado Estable

### 3.5. Vibraciones Libres con Amortiguamiento

La ecuación correspondiente a este sistema es

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

De manera similar al caso anterior, se tiene para esta ecuación diferencial un gráfico como el que se muestra en la figura 3.7

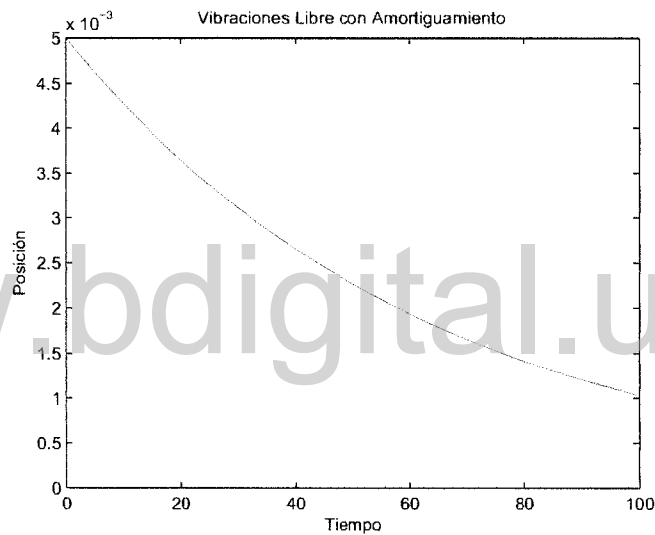


Figura 3.7: Vibraciones Libres con Amortiguamiento

### 3.6. Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento Viscoso

En este caso la ecuación diferencial es:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = q \cos \Omega t$$

cuya solución para  $q = 100$ ,  $p = 2$ ,  $w = 3$ ,  $n = 100$ ,  $\omega = 10$  es:

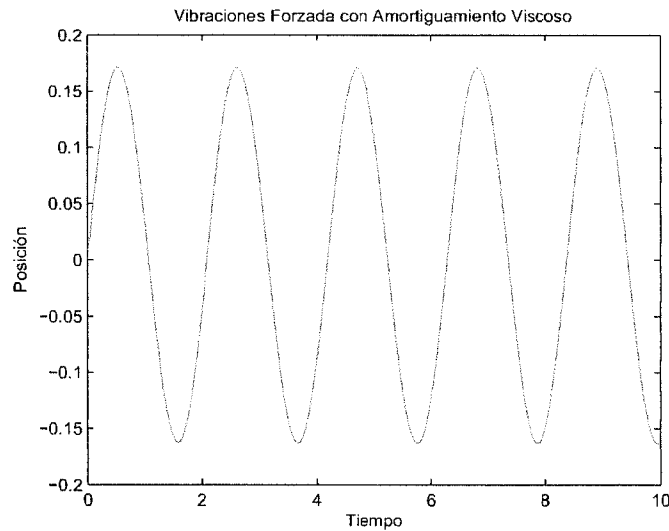


Figura 3.8: Vibraciones Forzadas con Amortiguamiento Viscoso

www.bdigital.ula.ve

### 3.7. Método de Runge-Kutta 4

function  $R = rk4(f, a, b, ya, M)$

ENTRADA:

$f$  es el vector de funciones introducida como una cadena.

$a$  y  $b$  son los puntos inicial y final

$ya$  es la condición inicial

$M$  es el número de pasos

SALIDA:

$R = [X \ Y]$  donde  $X$  es el vector de abscisas e  $Y$  es el vector de ordenadas

$h = (b - a)/M$  ;

$n = \text{length}(Ya)$ ; Número de ecuaciones  $X = \text{zeros}(1, M + 1)$ ;

$Y = \text{zeros}(1, M + 1)$ ;

$X = a : h : b$ ;

$Y(:, 1) = ya'$ ;

for j=1:M

$k1 = h * \text{feval}(f, X(j), Y(j))$ ;

$k2 = h * \text{feval}(f, X(j) + h/2, Y(j) + k1/2)$ ;

$k3 = h * \text{feval}(f, X(j) + h/2, Y(j) + k2/2)$ ;

$k4 = h * \text{feval}(f, X(j) + h, Y(j) + k3)$ ;

$Y(j+1) = Y(j) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6$ ;

end

$R = [X \ Y]$ ;

### 3.8. Método de Runge-Kutta para Sistemas

function  $RN = rk4N(F, a, b, Ya, M)$

ENTRADA:

$F$  es el vector de funciones introducidas como una cadena,  $a$  y  $b$  son los puntos inicial y final,  $Ya$  es el vector de condiciones iniciales.  $M$  es el número de pasos

SALIDA:

$RN = [X \ Y]$  donde  $X$  es el vector de abscisas e  $Y$  es la matriz de ordenadas

$h = (b - a)/M$ ;

$n = \text{length}(Ya)$ ; Número de ecuaciones

```

X = zeros(1, M + 1);
Y = zeros(n, M + 1);
X = a : h : b;
Y(:, 1) = Ya';

for j=1:M
    k1=h*feval(F,X(j),Y(:,j))';
    k2=h*feval(F,X(j)+h/2,Y(:,j)+k1/2)';
    k3=h*feval(F,X(j)+h/2,Y(:,j)+k2/2)';
    k4=h*feval(F,X(j)+h,Y(:,j)+k3)';
    Y(:,j+1)=Y(:,j)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end

```

$RN = [X; Y];$

### 3.9. Método de Runge-Kutta Fehlberg 45

function  $R = rkf45(f, a, b, ya, M, tol)$

ENTRADA:

$f$  es la función introducida como una cadena

$a$  y  $b$  son los puntos inicial y final

$ya$  es la condición inicial.

$M$  es el número de pasos

$tol$  es la tolerancia

SALIDA:

$R = [X \ Y]$  donde  $X$  es el vector de abscisas e  $Y$  es el vector de ordenadas

Se introducen los coeficientes necesarios para calcular el primer paso del método de Runge-Kutta- Fehlberg.

$$a2 = 1/4; b2 = 1/4; a3 = 3/8; b3 = 3/32; c3 = 9/32; a4 = 12/13;$$

$$b4 = 1932/2197; c4 = -7200/2197; d4 = 7296/2197; a5 = 1;$$

$$b5 = 439/216; c5 = -8; d5 = 3680/513; e5 = -845/4104; a6 = 1/2;$$

$$b6 = -8/27; c6 = 2; d6 = -3544/2565; e6 = 1859/4104;$$

$$f6 = -11/40; r1 = 1/360; r3 = -128/4275; r4 = -2197/75240; r5 = 1/50;$$

$$r6 = 2/55; n1 = 25/216; n3 = 1408/2565; n4 = 2197/4104; n5 = -1/5; big = 1e15;$$

$$h = (b-a)/M; hmin = h/64; hmax = 64*h; max1 = 200; Y(1) = ya; X(1) = a; j = 1;$$

$$br = b - 0,00001 * abs(b);$$

```
while (X(j)<b)
```

```
    if ((X(j)+h)>br)
```

```
        h=b-X(j);
```

```
    end.
```

Cálculo de los valores para rkf45

```
k1=h*feval(f,X(j),Y(j));
```

```
y2=Y(j)+b2*k1;
```

```
if big<abs(y2)
```

```
    break;
```

```
end
```

```
k2=h*feval(f,X(j)+a2*h,y2);
```

```
y3=Y(j)+b3*k1+c3*k2;
```

```

if big<abs(y3)
    break;
end
k3=h*feval(f,X(j)+a3*h,y3);
y4=Y(j)+b4*k1+c4*k2+d4*k3;
if big<abs(y4)
    break;
end
k4=h*feval(f,X(j)+a4*h,y4);
y5=Y(j)+b5*k1+c5*k2+d5*k3+e5*k4;
if big<abs(y5)
    break;
end
k5=h*feval(f,X(j)+a5*h,y5);
y6=Y(j)+b6*k1+c6*k2+d6*k3+e6*k4+f6*k5;\
if big<abs(y6)
    break;
end
k6=h*feval(f,X(j)+a6*h,y6);
err=abs(r1*k1+r3*k3+r4*k4+r5*k5+r6*k6);
ynew=Y(j)+n1*k1+n3*k3+n4*k4+n5*k5;
Control de error y de tamaño paso
if ((err<tol)|(h<2*hmin))
    Y(j+1)=ynew$;
    if ((X(j)+h)>br)

```

```

        X(j+1)=b;
    else
        X(j+1)=X(j)+h;
    end
    j=j+1;
end
if (err==0)
    s=0;
else
    s=0.84*(tol*h/err)^{0.25};
end
if ((s<0.75)\&(h>2*hmin));
    h=h/2;
end
if ((s>1.50)\&(2*h<hmax))
    h=2*h;
end
if ((big<abs(Y(j)))|(max1==j))
    break;
end
M=j;
if (b>X(j))
    M=j+1;
else
    M=j;

```

end

end

$R = [X \ Y];$

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

---

## CAPÍTULO 4

# MÉTODOS NUMÉRICOS

---

### 4.1. Introducción

Si existe una solución de una ecuación diferencial, esta solución representa un conjunto de puntos en el plano cartesiano. Mediante los métodos numéricos, es posible utilizar procedimientos que emplean la ecuación diferencial para obtener una sucesión de puntos cuyas coordenadas se aproximen a las coordenadas de los puntos de la curva de solución real. Pero una ecuación diferencial no necesita tener una solución, y, si la tiene, no siempre se puede expresar en forma explícita, en estos casos, tenemos que aceptar la aproximación que nos brindan los métodos numéricos. Los procedimientos numéricos para resolver ecuaciones lineales de primer orden se pueden adaptar para sistema de ecuaciones de primer orden.

A continuación, se expone el método de Runge-Kutta el cual es simple de aplicar y muy preciso en sus resultados. Se parte del caso de una ecuación diferencial de primer orden sencilla y luego se amplía para considerar sistemas. Tal vez el método más exacto para obtener soluciones aproximadas al problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

sea el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Los distintos métodos de Runge-Kutta se deducen a partir del desarrollo de  $y(x_n + h)$  en serie de

Taylor con residuo:

$$y(x_n + 1) = y(x_n + h) = y(x_n) + \frac{dy(x_n)}{dx} + \frac{h^2 d^2 y(x_n)}{2! dx^2} + \dots + \frac{h^{k+1} d^{k+1}(c)}{(k+1)! dx^{(k+1)}}$$

Cuando  $k = 1$  y el residuo  $h^2/2(dy(c)/dx)$  es pequeño, se obtiene la fórmula de interacción del procedimiento de Runge-Kutta de primer orden (o método básico de Euler).

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{dy(x_n)}{dx} = x_{n+1} + hf(x_n, y_n)$$

siendo el error local de truncamiento  $O(h^2)$  y el error global de  $O(h^1)$ . El procedimiento de Runge-Kutta de segundo orden (o método de Euler mejorado) consiste en hallar las constante  $a, b, \alpha$  y  $\beta$  tal que la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta h)$$

coincida con un polinomio de Taylor de segundo grado. Se puede demostrar que ello es posible siempre y cuando las constantes cumplan con las siguientes condiciones:

$$a + b = 1, \quad b\alpha = 1/2 \quad b\beta = 1/2$$

Este es un sistema de tres (3) ecuaciones con cuatro incógnitas, por lo tanto tiene una cantidad infinita de soluciones. Se ha comprobado que cuando se asume que  $a = b = 1/2$  y  $\alpha = \beta = 1$ , se obtienen buenos resultados, siendo el error local de truncamiento es  $O(h^3)$  y el error global es  $O(h^2)$ .

Nótese que la suma  $k_1 + bk_2$  es un promedio ponderado de  $k_1$  y  $K_2$ , ya que  $a + b = 1$ , y que a su vez  $k_1$  y  $k_2$  son múltiplos aproximados de la pendiente de la curva de solución  $y(x)$  en dos puntos distintos en el intervalo  $(x_n, x_{n+1})$ .

Finalmente, el procedimiento de Runge-Kutta de cuarto orden consiste en determinar las constantes adecuadas para que la fórmula

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3) \end{aligned}$$

coincida con un polinomio de Taylor de cuarto grado. En el sistema se tienen 11 ecuaciones con 13 incógnitas. Su error de truncamiento es  $O(h^5)$  y su error global es  $O(h^4)$ .

El conjunto de valores de las constantes más utilizadas producen el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Este resultado se puede ampliar y utilizar el método de Runge-Kutta para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

## 4.2. Maple 8

Maple 8. es un programa simbólico que tiene comandos muy simples. Para ingresar una ecuación diferencial, hay que considerar que el programa no asume nada, por ejemplo, si se tiene una función  $f$  que depende de  $x(f(x))$  es necesario indicar esta dependencia a Maple.

A continuación se muestra un ejemplo con una ecuación de segundo grado

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen}(\theta) = 0$$

donde

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Una forma de ingresarla es:

$$\begin{aligned} \text{ec1} &:= \text{diff}(\text{theta}(t), t\$2) + g/l * \text{sin}(\text{theta}(t)) = 0; \\ \text{ec1} &:= \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) + \frac{g \text{sen}(\theta(t))}{l} = 0 \end{aligned}$$

## 4.3. Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Para resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODES por su nombre en inglés: Ordinary Differential Equations), se utiliza el comando "dsolve". Para una sola ecuación la sintaxis es muy simple como se muestra a continuación.

dsolve(ec1);

$$\int^{\theta(t)} \frac{5}{(490 \cos(a) + 25C1)^{1/2}} da - t - C2 = 0,$$

$$-\int^{\theta(t)} \frac{5}{(490\cos(a) + 25C1)^{1/2}} da - t - C2 = 0$$

#### 4.4. Resolución de Ecuaciones Diferenciales Mediante Aproximaciones Numéricas

Para activar esta opción dentro de Maple, se debe utilizar la opción `type=numeric`. Existe varios métodos numéricos disponibles para realizar estos cálculos. Por defecto el programa utiliza el `rkf45`. Más información sobre cómo operan los distintos procedimientos en la opción "Ayuda" en `Differential Equations>dsolve >numeric`.

Como se sabe, para obtener una aproximación numérica de una solución de una ecuación diferencial se debe establecer las condiciones iniciales del problema antes indicado.

Fijemos los valores de las constantes  $g = 9, 8$  y  $l = 1$ , y establezcamos las siguiente condiciones iniciales:

$$\theta(0) = \frac{\pi}{4} \quad y \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

$$ec1 := \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) + 9, 8 \text{sen}(\theta(t)) = 0$$

Resolvamos numéricamente la ecuación

```
f := dsolve(ec2, theta(0)=Pi/4, D(theta)(0)=0, theta(t), type=numeric,
output=listprocedure);
```

```
f := [t = (proc(t) ... endproc), theta(t) = (proc(t) ... endproc),
 $\frac{d}{dt}$ theta(t) = (proc(t) ... endproc)]
```

Simplemente el programa genera dentro de los procedimientos códigos que podemos ver, para luego ser llamados y obtener el valor de la solución

en un punto específico. Para poder rescatarlos, debemos asignar esos procedimientos a alguna variable. Podemos reconocer 3 procedimientos en esta respuesta, uno para el parámetro que, como es de esperar, retornará el mismo valor que le asignemos; y otros dos para el valor de  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$ . Por lo tanto, debemos tener dos variables para guardar estos últimos procedimientos, que son los que interesan.

$$th := subs(f, theta(t));$$

la salida es:

$$th := proc(t) \dots end proc$$

$$dth := subs(f, diff(theta(t), t));$$

la salida es:

$$dth := proc(t) \dots end proc$$

Para utilizar estos procedimientos, basta con tomar las variables como funciones, como se muestra a continuación. Los valores de  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  cuando  $t = 0$ .  $th(0)$ ; salida es 0,78539816339745 y  $dth(0)$ ; salida es 0.

Se comprueban las condiciones iniciales.

Ahora para  $t = 10$ .  $th(10)$ ; salida es 0,201796688280545117 y  $dth(10)$ ; salida es 2,31150108070641869.

Luego se puede obtener cualquier valor de  $\theta$  o su derivada. Como ya se ha dicho, Maple posee más de un método numérico de resolución. Sucede a menudo, especialmente cuando se trabaja con sistema de ecuaciones, que un método en particular es incapaz de resolver el problema. Por lo tanto, es necesario utilizar otro. Para hacer esto se debe agregar una opción extra

al comando `dsolve` que es `method=método`. Otros métodos disponibles son: `dverk78`, `classical`, `gear`, `lsode` y `taylorseries`.

```
f := dsolve(ec2, theta(0) = pi/4, D(theta)(0) = 0, theta(t),
type = numeric, output = listprocedure, method = classical); f := [t =
(proc(t)...end proc), theta(t) = (proc(t) ... endproc), d/dt theta(t) = (proc(t) ... end proc)]
```

La salida es idéntica, pero los procedimientos que se han creado son distintos. Para poder recuperarlos, sólo se debe seguir el procedimiento antes descrito.

## 4.5. Graficación de Soluciones

Maple posee la capacidad de graficar las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria (ODE) ó de un sistema de ODES, para lo cual resuelve las ecuaciones de forma numérica y automática. Sigamos con el ejemplo de la `ec1` y grafiquemos su solución entre  $t = 0$  y  $t = 10$ .

La sintaxis que se debe utilizar es:

```
DEplot( ecuaciones, var. Ind, intervalo ind., [[cond. Iniciales]]);
```

Pueden ser una o varias ecuaciones y debe haber tantas variables independientes como ecuaciones la variable  $t$  en el caso `ec1` debe ir en el lugar indicado en el paréntesis. Las condiciones iniciales deben colocarse entre doble paréntesis cuadrado. El intervalo de la variable independiente ( $t$  en el caso de `ec1`) debe ir en ese lugar. Las condiciones iniciales deben ir entre doble paréntesis cuadrado.

```
DEplot(ec1, theta(t), t=0..10, [[theta(0)=Pi/4, D(theta)(0)=0]]);
```

Se observa que el gráfico no tiene mucha precisión, pero ésta se puede aumentar especificando que se calcule un mayor número de puntos, para lo

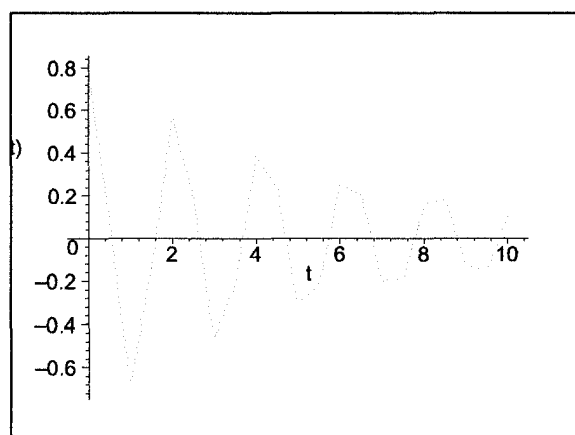


Figura 4.1: Péndulo Simple Amortiguado

cual se agrega la opción `stepsize` y se disminuye su valor en relación al utilizado anteriormente. Este valor puede variarse como se desee. Para el ejemplo se toma  $stepsize = 0,2$ , que especifica que se tomen puntos en la variable independiente a una distancia de 0,2 unidades uno del otro. Hay que tener en cuenta que cuanto menor sea `stepsize`, se generan mas puntos y, por lo tanto, el computador se demora mas tiempo en entregar el resultado.

```
DEplot(ec2, theta(t), t=0..10, [[theta(0)=Pi/4, D(theta)(0)=0]], stepsize=0.1);
```

Se nota una gran diferencia entre los dos gráficos. El primero muestra una oscilación que pareciera estar amortiguada, mientras que el segundo no. Dado que la ecuación que se ha considerado que corresponde a la ecuación diferencial del movimiento de un péndulo plano simple, este no es amortiguado. Por lo tanto, debido a su baja precisión, el primer gráfico nos muestra de forma fidedigna la solución.

Téngase en cuenta que Maple, especialmente en este tema, puede ser muy sensible al caos de las soluciones debido a que aproxima los valores. Una

forma de disminuir los errores es ampliar la cantidad de dígitos con los cuales trabaja el programa por defecto.

Ahora resolvemos el mismo ejemplo con el sistema matricial

```
restar: with(linalg, coldim, diag, eigenvals, equal, exponential, multiply,
rowdim):
```

```
A:=matrix(2,2,[0,1,-10,0])
```

```
C:=matrix(2,1,[100,400]):
```

```
S:=simplify(multiply(exponential(A,t),C)):
```

```
matrix(2,1,[x(t),y(t)])=matrix(2,1,[collect(S[1,1],exp),collect(S[2,1],exp)]);
```

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 * \cos(\sqrt{10} * t) + 40 * \sqrt{10} * \sin(\sqrt{10} * t) \\ -100 * \sqrt{10} * \sin(\sqrt{10} * t) + 400 * \cos(\sqrt{10} * t) \end{pmatrix}$$

```
sys:= diff(x(t),t)=0*x(t)+1*y(t),diff(y(t),t)=-10*x(t)+0*y(t):
```

```
IC:= {x(0) = 100, y(0) = 400}:
```

```
ans:=combine(dsolve(sys union IC, x(t),y(t)),trig):
```

```
expr1:= subs(ans,x(t));
```

$$\text{expr1} := 100 * \cos(\sqrt{10} * t) + 40 * \sqrt{10} * \sin(\sqrt{10} * t)$$

```
expr2:= subs(ans,y(t));
```

$$\text{expr2} := -100\sqrt{10}\sin(\sqrt{10}t) + 400\cos(\sqrt{10}t)$$

```
plot([expr1,expr2],t = 0..5,color= [red,blue],tickmarks= [20,10],
```

```
style = [line,line],thickness=3,axes = BOXED,title = 'Solución del sistema
de ecuaciones diferenciales');
```

```
q:=dsolve(diff(x(t),t) = 0*x(t)+1*y(t), diff(y(t),t) = -10*x(t) + 0*y(t),
x(0) = 100, y(0) = 400, x(t), y(t), type = numeric, output = listprocedure):
```

```
q(0.3); [t(,3) = ,3, x(t)(,3) = 161,068239317942272,
y(t)(,3) = -23,8806966204809400]
```

```
with(plots):
```

```
A:=odeplot(q, [t, x(t)], 0..0.5, color = red):
```

```
B:=odeplot(q, [t, y(t)], 0..0.5, color = blue):
```

```
display(A, B, axes = boxed, title = 'Solución Numerica Runge-Kutta');
```

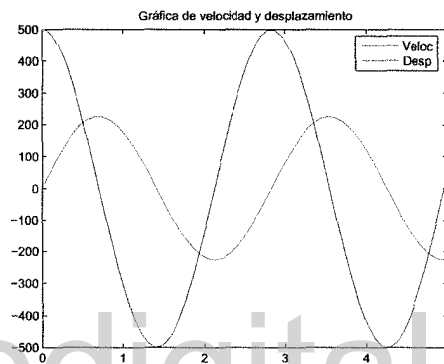


Figura 4.2: Desplazamiento, Velocidad - Tiempo

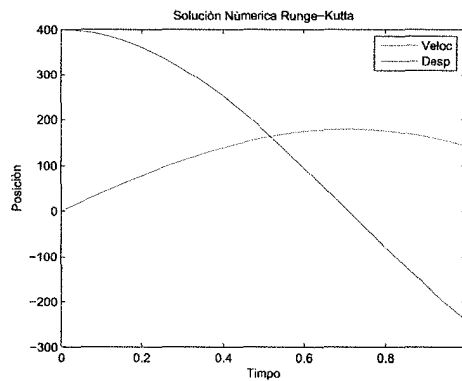


Figura 4.3: Desplazamiento, Velocidad - Tiempo

## 4.6. Movimiento Armónico Simple

Este caso corresponde a las vibraciones que experimenta un objeto de masa  $m$  en ausencia de fuerzas externas  $F(t) = 0$ . Se considera el amortiguamiento del sistema  $c = 0$ . La ecuación diferencial es

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

>  $ec := diff(x(t), t^2) + \omega_0^2 * x(t) = 0;$

$$ec := \left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

>  $dsolve(ec, x(0) = 1, D(x)(0) = 1, x(t));$

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} + \cos(\omega_0 t)$$

>  $y1 := unapply(rhs(dsolve(ec, x(0) = 1, D(x)(0) = 1, x(t))), t, \omega_0);$

$y1 := (t, \omega_0) \rightarrow \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} + \cos(\omega_0 t)$

>  $with(plots) :$

>  $p := plot(y1(t, 0.01), y1(t, 0.5), y1(t, 2), y1(t, 5), y1(t, 10), t = 0..6) :$

>  $t1 := textplot([3, 5, 'w_0 = 0,01'], [2, 30, 2, 5, 'w_0 = 0,5'], [3, 375, 1, 3, 'w_0 = 2'],$

$([0, 64, -1, 2, 'w_0 = 5'], [5, 64, 1, 2, 'w_0 = 10'], align = ABOVE, right) :$

>  $display(p, t1).$

Ella se obtuvo de acuerdo a la sección de Maple adjunta, en la cual primero definimos una función de dos variables, el tiempo  $t$ , y la frecuencia natural  $\omega_0$ , seguidamente obtuvimos la gráficas de las soluciones para distintos valores de  $\omega_0$  (0,01, 0,5, 5, y 10) y las superpusimos en un mismo plano  $t - y$ , al cual

se le asignó la variable  $p$ . Para identificar las diferentes gráficas superpuestas, definimos una variable  $t1$ , en el cual colocamos un rótulo a cada gráfica por medio del comando `textplot ( condiciones )`. Finalmente, superpusimos las variables  $p$  y  $t1$  y desplegamos el resultado usando el comando `display`.

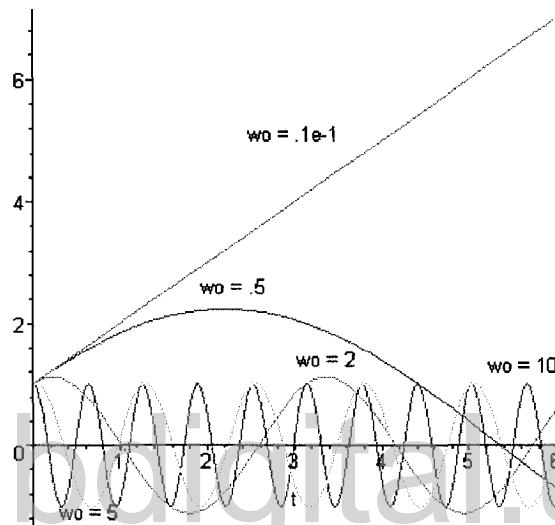


Figura 4.4: Oscilaciones Libres para Varias Frecuencias

---

## CAPÍTULO 5

# INTERFAZ DE USUARIO PARA LA COMPARACIÓN DE GRÁFICOS

---

### 5.1. Introducción

En este capítulo se dan instrucciones que le permitan al usuario generar en Matlab gráficas de funciones provenientes de datos de una interfaz construida en Visual Basic.net. Esta gráficas permiten la visualización, comparación y la posibilidad de guardar la imagen del gráfico generado, incluyendo los distintos cambios de variables realizados en la correspondientes función.

### 5.2. InterGraph

InterGraph ha sido diseñado con el propósito de asistir en labores educativas, como herramienta explicativa. Es una interfaz gráfica que permite comparar gráficos creados con Matlab.

Permite:

- Visualizar un gráfico original y uno modificado en una sola ventana, individualmente y en modo comparativo.
- Retener gráficos para compararlos entre ellos.
- Modificar rápidamente las variables de las expresiones usadas para generar gráficos.

InterGraph sólo permite la visualización de los gráficos y de las fórmulas utilizadas para crearlos, no permite ni ejecuta ninguna operación matemática de comparación.

### 5.3. Funcionamiento

InterGraph se conecta a Matlab utilizándolo como generador de gráficos, y utilizan archivos “m” de Matlab, los cuales pueden contener comentarios especiales. Estos archivos deben seguir ciertas reglas para poder ser procesados y lograr la creación de gráficos. (Vea los pasos listados en “Configurar un archivo m” ).

#### Requisitos del Sistema Intergraph

1. Windows XP/NT/2k
2. Matlab debe estar instalado; de no estarlo, Intergraph no funciona.
3. Disponer de Microsoft.NET Framework versión 1.1 o superior.
4. Cumplir con los requerimientos de Matlab.

Nota: Intergraph puede ser encontrado en Web de Microsoft.

### 5.4. Preparar Archivos de Matlab

1. Siempre termine sus líneas con punto y coma ( ; ).
2. Es recomendable que las variables estén bien definidas. En la mayoría de los casos se utilizan variables cuyo valor es el resultado de una expresión,

estas expresiones suelen ser muy largas y al colocarles una marca de variable es complicado modificar su valor en el panel de variables de InterGraph.

3. Para evitar este inconveniente, divida la expresión en expresiones más pequeñas y márkuelas como variables.
4. InterGraph desactiva las pausas, evite su uso para múltiples ploteos.
5. No utilice las animaciones. En futuras versiones se colocará esta compatibilidad que permitirá utilizarlas.

## 5.5. Configurar Variables

Para poder utilizar InterGraph de manera conveniente se deben realizar algunas modificaciones en los archivos de script de Matlab o archivos “m”.

Suponga que tiene un archivo “m” en mis documento llamado “demo.m” con el siguiente contenido:

1.  $x = 0 : \pi/100 : 2 * \pi;$
2.  $y = \sin(x);$
3.  $\text{plot}(x, y);$
4.  $\text{xlabel}('x = 0 : 2\pi');$
5.  $\text{ylabel}('Sine of x');$
6.  $\text{title}('Plot of the Sine Function', 'FontSize', 12);$

Recordar que si se agrega este archivo al directorio de fórmulas de InterGraph, tan sólo se podrá ver el gráfico original y no se podrá generar el gráfico de comparación con este mismo archivo, porque en este caso el programa genera el mismo gráfico original.

Para poder generar el gráfico de comparación se debe colocar un comentario especial en el archivo “demo.m”, el cual permite que InterGraph reconozca las variables y deje modificarlas para generar una variante de su gráfico original. El comentario debe comenzar con `% -- >` y tener la siguiente forma:

`% -- > variable - nombre : nombre - variable - valor : Valor - predeterminado - etiqueta : Texto - identificativo`

donde:

`Nombre - Variable` : Nombre de la variable tal y como se escribió en Matlab.

`Valor - Predeterminado` : Valor inicial de la variable.

`Texto - Identificativo` : es el significado de la variable, por ejemplo: “Masa”, “Volumen”, “Tiempo”, etc...

Nota: Se debe modificar lo que está marcado con `????`, respetando los dos puntos (:), guiones (-), y textos:

`% -- > variable - nombre :???? - valor :???? - etiqueta :????`

Se puede observar que en el archivo se tienen dos variables “ $x, y$ ”. Tomando la variable  $x$  para nuestro ejemplo, en la línea 1 se agrega el siguiente comentario:

`x = 0 : pi/100 : 2 * pi; % -- > variable - nombre : x - valor : [0 : 0,1 :`

$pi]$  – etiqueta : algo

Este comentario le permitirá modificar el valor de  $x$  (en este caso la expresión “0 :  $pi/100$  :  $2 * pi$ ”) utilizando Intergraph.

Si en este punto se realiza esta modificación, se introducen nuevos datos en el archivo “demo.f”. Se observará que en el área de parámetros aparecerá “ $x$ ”.

Cambie el contenido de  $x$  por este otro:

0 :  $pi/10$  :  $6 * pi$  y presione Gráficar.

Se debe repetir el procedimiento con las variables que necesite para lograr el cambio en el gráfico.

Este comentario para las variables debe ser colocado en la misma línea de la  $x$ .

## 5.6. Configurar el Título

Para configurar el título que utiliza InterGraph para identificar el archivo, se debe agregar un comentario de la siguiente forma:

% – – > Título: El título.

Título: es el título del gráfico, por ejemplo “Seno Función”.

Importante: El título solo se utiliza para facilitar la búsqueda de un archivo en la lista de títulos y no interviene en el ploteo de los gráficos.

## 5.7. Configurar la Ecuación

Para configurar la ecuación que muestra InterGraph, se debe agregar un comentario de la siguiente forma:

% – – > Ecuación:  $Cos(x)$

Ecuación: es la ecuación que genera el gráfico, por ejemplo " $0 : \pi/100 : 2 * \pi i$ ".

## 5.8. Elementos de la Interfaz de Integraph

En el siguiente gráfico de Integraph, se muestran las diferentes ventanas del programa

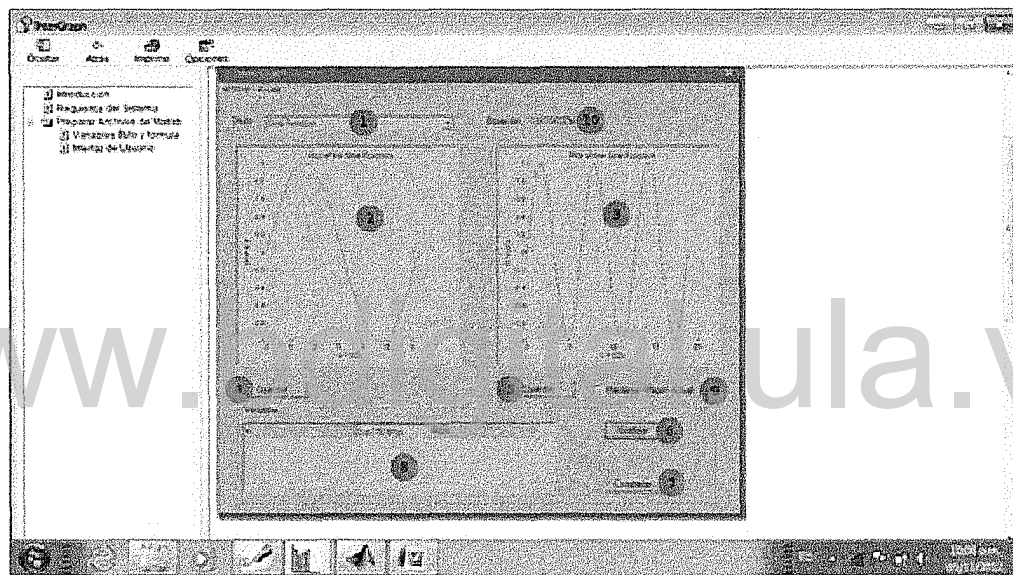


Figura 5.1: Interfaz

- 1: Selector de archivo. Muestra una lista de los archivos que se han colocado en la carpeta de scripts.
- 2: Imagen original. Despliega la imagen original del script seleccionado.
- 3: Imagen modificada. Despliega la imagen que se origina luego de que el script modifica las variables.
- 4: Guardar imagen original. Presenta el diálogo "Guardar como" para al-

cenar una copia de la imagen original.

5: Guardar imagen modificada. Presenta el diálogo “Guardar como” para almacenar una copia de la imagen modificada.

6: Graficar la función actual. Al presionar este botón ‘Graficar’ se genera un gráfico utilizando los valores modificados y se muestra en el área (3).

7: Mostrar la ventana de comparación. Abre una ventana en la que se muestran las dos imágenes, una al lado de la otra para realizar comparaciones.

8: Area de edición de variables. Permite modificar las variables del script.

9: Mantener la imagen actual. Al estar marcado, las gráficas generadas se colocarán una encima de la otra para poder relizar comparaciones de las mismas.

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)

---

## CONCLUSIONES

---

- La herramienta principal de este trabajo es el programa INTERGRAPH, el cual permite la enseñanza de las vibraciones mecánicas en ambiente de aula y de laboratorio.
- La capacidad Matlab-Intergraph-Visual Basic permite resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y es usada como una herramienta de enseñanza de dichas ecuaciones mediante la generación de gráficos y la comparación de los mismos.
- Como herramienta didáctica, el programa es muy flexible pues permite múltiples cambios de variables, que consecuentemente; tanto el instructor como el estudiante, tiene la posibilidad de analizar el comportamiento de sistemas mecánicos reales, mediante el gráfico correspondiente a cada cambio de variables, la comparación entre los mismos.

---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Jensen, Jens. Rios Gilberto, Rodriguez Oscar, Mojica Melquicedec. **Vibraciones Mecánicas**. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería - Publicaciones. Santafé de Bogotá D.C. 1993.
- [2] Mora Villate, Adolfo. **Tecnología del Control de Procesos Industriales**. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería - Publicaciones. Santafé de Bogotá D.C. 1994.
- [3] Kreyszig Erwin. **Matemáticas Avanzadas para Ingeniería**. Volumen 2. Limusa - Grupo Noriega Editores. México 1991. .
- [4] Thomson T. William. **Vibración. Manual del Ingeniero Mecánico**. Marks. Mc Graw Hill. Santafé de Bogotá D.C. 1997.
- [5] E. Hewitt , K. Stromberg. **Real and Abstract Analysis**. Springer, Berlin- Heidelberg-Verlang- New York.
- [6] Beer P. Ferdinand. Johnston Russel E. Jr. **Mecánica Vectorial para Ingenieros - Dinámica - Vibraciones Mecánicas**. Mc Graw Hill.Mxico 1990.
- [7] Shigley Edward Joseph. Mishke Charles R. **Diseño en Ingeniería Mecánica**. Mc Graw Hill. México - 1992.

- 
- [8] Beer P. Ferdinand. JOHNSTON Russel E. Jr. **Mecánica de Materiales**. Mc Graw Hill. Mxico 1991.
- [9] Gaviria Alfonso. **Principios Básicos y Aplicaciones en el Análisis de Vibraciones**. Asociación Colombiana de Ingenieros Mecánicos - Electricistas - Electrónicos y Afines. Sisposio de Mantenimiento Preventivo. Mayo de 1997
- [10] Gaviria Alfonso. **Proceso de Evolución y Proyección del Análisis de Vibraciones**. Asociación Colombiana de Ingenieros Mecánicos - Electricistas - Electrónicos y Afines. Simposio de Mantenimiento Preventivo. Mayo de 1997
- [11] Hashiyama, T.; Furuhashi, T.; Uchikawa, Y. **A study on finding fuzzy rules for semi-active suspension controllers with genetic algorithm** Dept. of Information Electronics Nagoya University Japan  
<http://www.bioele.nuee.nagoya-u.ac.jp/membe>
- [12] Lin, J. S.; Kanellakopoulos, I. **Road adaptative nonlinear design of active suspensions** Proceedings of the 1997 American Control Conference Albuquerque June 1997 pp 714-718  
<http://www.anse.ee.ucla.edu/ancg/as>
- [13] Lin, J. S.; Kanellakopoulos, I. **Modular adaptatiive design of active suspensions** Proceedings of the 36th Iee Conference on Decision and Control San Diego December 1997 pp 3626-3631  
<http://www.anse.ee.ucla.edu/ancg/as>
- [14] Bishop, D. Current AVCS deployment <http://www.ahs.volpe.dot.gov>

- 
- [15] <http://www.joviedo@eco.unc.edu.ar>
- [16] <http://www.hma@itesm.mx/>
- [17] <http://www.ecirera@ing.unne.edu.ar>
- [18] <http://www.redalyc.com/>
- [19] <http://www.gazateo@latinmail.com>
- [20] <http://www.ciindet.com.mx/resumenesacep.html>

[www.bdigital.ula.ve](http://www.bdigital.ula.ve)