Universidad de los Andes.
Postgrado de Matemáticas.
Facultad de Ciencias.
Mérida-Venezuela.

# Funciones de $\kappa\varphi$-Wiener-Variación Acotada en $\mathbb{R}^2$

Lic. Paredes C. Andrey



Julio, 2014.

Universidad de los Andes.
Postgrado de Matemáticas.
Facultad de Ciencias.
Mérida-Venezuela.

# Funciones de $\kappa\varphi$-Wiener-Variación Acotada en $\mathbb{R}^2$



Presentado por: Lic. Paredes C. Andrey
Tutor: Dr. José Giménez.
Cotutor: Dr. Nelson Merentes.

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial, para optar al Título de Magister Scientiarum, Mención Matemática.

Julio, 2014.

A VICTOR Y ANTONIA,
*"A quienes les debo, entre muchas otras cosas,*
*la magnífica experiencia de estar viva..."*

# Agradecimientos

*La* GRATITUD *es el sentimiento que más* HUMILDAD *concentra y más* AMOR *expande.*

*Detrás de cada logro siempre hay personas que nos apoyan y creen en nosotros, seres especiales que nos acompañan a lo largo de nuestro camino, que nos impulsan a seguir adelante en nuestros proyectos, brindándonos, de diferentes maneras, su solidaridad.*

*Es por ello que quiero expresar mis más sincera gratitud a:*

*Dios y Santa Bárbara, cuya fe ha mantenido siempre viva la esperanza de lograr cada una de mis metas.*

*A mis padres, Victor y Antonia personas excepcionales que me han brindado su amor y apoyo incondicional en todo momento.*

*A mi hermana Alicia y su esposo Edgar, por su gran colaboración para lograr este sueño. Sin su ayuda no lo hubiese logrado.*

*A mis hermanos Víctor, Guillermo y Virginia y mis sobrinos, Valentina, Manuel y Sebastián, quienes llenan mi vida de alegrías y hacen que sea hermosa.*

*A mis maestros, quienes son parte esencial de este logro, gracias por todas las enseñanzas brindadas durante mis estudios, en especial a mi tutor el profesor José Giménez, quien confió en mí y me dio la oportunidad de trabajar con él.*

*Al Dr. Nelsón Merentes por su oportuna ayuda en el transcurso de mis estudios de postgrado.*

*A mis amigos: Vincenzo, Emily, Guiliana, Roa y muy en especial a Cesar Torres por brindarme la más generosa y desinteresada amistad.*

*A la ilustre Universidad de Los Andes, por permitirme formar parte de ella.*

*Al personal del Postgrado de Matemática de la ULA, quienes me dieron su ayuda durante el transcurso de mis estudios de maestría.*

*Al Consejo de Desarrollo Científico Humanístico, Tecnológico y de las Artes, CDCHTA, por su colaboración para la realización de este proyecto. Código del proyecto* ***C-1879-05-Em****.*

*Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional, aunque no las nombré agradezco infinitamente su amistad y apoyo. Unas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón.*

**Lic. Andrey C. Paredes C. Funciones de w-$\kappa\varphi$-Variación Acotada en $\mathbb{R}^2$** . Universidad de Los Andes. Tutor: Dr. José Giménez. Febrero, 2014.


## Resumen

El objetivo principal del presente trabajo de grado es el de extender la noción de $\kappa\varphi$-variación acotada, *en el sentido de Wiener*, a funciones reales definidas en un rectángulo $I_a^b$ del plano. La investigación que nos condujo a desarrollar este concepto está basada en la fusión de las nociones de $\varphi$-variación acotada, *en el sentido de Wiener* y de $\kappa$-variación o variación en el sentido de Korenblum. La estrategia metodológica utilizada se fundamenta en la técnicas desarrolladas por Hardy y Vitali, para funciones en dos variables; en particular, utilizamos las ideas desarrolladas por Chistyakov en [6]. Realizamos un estudio minucioso de la clase de funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada en un variable introducidas por S. Kim y J. Kim en 1986 y basándonos en los resultados por ellos obtenidos, se demostró que la clase $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ de las funciones $f : I_a^b \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\kappa\varphi$-variación finita, *en el sentido de Wiener*, a las cuales hemos llamado funciones de W-$\kappa\varphi$-variación acotada, tiene propiedades similares. Posteriormente, se establecieron condiciones necesarias y suficientes para que la clase $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ fuese un espacio vectorial, con la suma y multiplicación por escalares definidas de la manera usual. Se dotó al espacio con una norma, haciendo uso del funcional de Minkowski, la cual le da una estructura de espacio de Banach. Por último se estudió una serie de inclusiones entre estos espacios.


**Palabras claves: Funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada, Funcional de Minkowski, Espacio de Banach.**

# Índice general

# Introducción

En 1881 Camille Jordan [14], como consecuencia del análisis que hizo sobre la prueba dada por Dirichlet, concerniente a la convergencia de Series de Fourier, de funciones monótonas a trozos, introdujo el concepto de función de Variación Acotada, como aquellas funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, tales que

$$V(f;[a,b]) := \sup_{\xi} \sum |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi = \{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo [a,b]. Jordan demostró que éstas funciones se pueden representar como diferencia de dos funciones monótonas (*Teorema de Representación de Jordan*), obteniendo así, la validez del criterio de Dirichlet para esta clase de funciones. De hecho, dicha clase de funciones, denotada por $BV[a,b]$, resulta ser un espacio vectorial, el cual tiene una estructura de espacio de Banach, con la norma

$$\|f\| := |f(a)| + V(f;[a,b]), \;\; f \in BV[a,b].$$

El interés generado por la noción clásica de función de variación acotada, ha conducido a algunas generalizaciones del concepto; principalmente destinadas a la búsqueda de clases de funciones "más amplia", cuyos elementos tengan serie de Fourier puntualmente convergente. Como en el caso clásico, estas generalizaciones también han encontrado diversas aplicaciones en el estudio de ciertas ecuaciones diferenciales parciales e integrales y también en la teoría de operadores de composición lineales y no lineales, para los cuales se consideran las llamadas condiciones de actuación, éstas pueden involucrar: acotación, continuidad, compacidad (en el caso lineal), condición de Lipschitz local o globalmente.

Entre los años 1920-1923, el matemático norteamericano Norbert Wiener, en la consecución de un modelo matemático para el movimiento Browniano, introduce la noción de funciones con variación cuadrática, espacio constituido por aquellas funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que

$$V_2^W(f) := \sup \sum |f(x_i) - f(x_{i-1})|^2 < \infty$$

donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi = \{x_0, \dots, x_n\}$ de [a,b].

Este tipo de variación es utilizado en el análisis de procesos estocásticos, tales como, el proceso de Wiener o norma movimiento Browniano, siendo este un proceso de Levi, que ocurre usualmente en las matemáticas puras y aplicadas, economía, finanzas cuantitativas y física.

El proceso de Wiener dio lugar a numerosos estudios en distintas ramas de matemática, tales como, estudio de martingalas de tiempo continuo; cálculo estocástico, proceso de difusión, entre otros. También es utilizado en la representación integral gaussiana del proceso de ruido blanco, en errores instrumentales en la teoría de filtrados y fuerzas desconocidas en la teoría de control.

Poco tiempo después en [31], este concepto fue generalizado a valores $p > 2$, actualmente conocido como $p$-variación, *en el sentido de Wiener.* Esta clase de funciones, denotada por $BV_p^W[a,b]$, tiene una estructura de espacio vectorial, mas aún es un espacio de Banach, con la norma

$$\|f\|_p := |f(a)| + (V_p^W(f))^{\frac{1}{p}},$$

donde $(V_p^W(f))$ es la $p$-variación, *en el sentio de Wiener* de la función.

Cabe destacar que esta clase de funciones tienen serie de Fourier convergente.

Posteriormente, en el año 1937 L.C Young en [32], generaliza la noción de $p$-variación acotada, introduciendo el concepto de $\varphi$-variación acotada, *en el sentido de Wiener*, donde $\varphi$ es una $\varphi$-función; es decir, $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

1. continua en $[0,\infty)$;
2. $\varphi(t) = 0$ si $t = 0$;
3. creciente en $[0,\infty)$;
4. $\varphi(t) \longrightarrow \infty$, cuando $t \longrightarrow \infty$.

Young definió la clase de funciones que tienen $\varphi$-variación acotada, *en el sentido de Wiener*, en el intervalo [a,b] como aquellas funciones $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que

$$V_\varphi^W := \sup_\xi \sum \varphi(|f(x_i) - f(x_{i-1})|),$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo [a,b]. Un estudio completo de estas funciones fue realizado por los matemáticos polacos J. Musielak y W. Orlicz en 1959 [18] [19]. También se puede consultar [17] [21].

Siguiendo este orden de ideas, en el año 1975 B. Korenblum [15], introduce la noción de *$\kappa$-variación* de una función, mientras estudiaba el problema de representación de funciones armónicas, definidas en el disco unitario del plano complejo, mediante integrales de Poisson de ciertas funciones, llamadas pre-medidas, definidas en sub-intervalos de $[0,\ 2\pi]$. Esta noción difiere de la noción clásica de variación y de otras variaciones conocidas, en el hecho de que el concepto de Korenblum maximiza razones entre sumas de Jordan y la, así llamada, entropía generada por una función distorsión $\kappa$ (kappa), la cual mide longitudes en el dominio de las funciones. Un punto débil de esta noción es que los funcionales de $\kappa$-variación asociados no son necesariamente crecientes respecto a refinamiento de particiones ni sub-aditivos respecto a subdivisiones de un intervalo.

Una ventaja, por otra parte, lo constituye el hecho de que toda función de $\kappa$-variación acotada se puede descomponer como la diferencia de dos funciones estructuralmente más sencillas; a saber, funciones $\kappa$-decrecientes.

Una función de distorsión $\kappa : [0,1] \to [0,1]$, es una función continua, estrictamente creciente, cóncava, $\kappa(0) = 0$ y $\kappa(1) = 1$, y tiene pendiente infinita en el origen; esto es, $\lim_{t\to 0^+} \frac{\kappa(t)}{t} = \infty$.

Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es de $\kappa$- variación acotada en [a,b] si

$$\kappa V(f) := \sup_{\xi} \frac{\sum |f(x_i) - f(x_{i-1})|}{\sum \kappa\left(\frac{|x_i - x_{i-1}|}{b-a}\right)},$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo [a,b].

De esto surge, de manera natural, un nuevo concepto de variación acotada; a saber, las funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada, *en el sentido de Wiener*, derivada de la combinación de la *$\kappa$-variación* y la $\varphi$-variación, *en el sentido de Wiener*. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, se dice de *$\kappa\varphi$-variación acotada, en el sentido de Wiener* y se denota por $f \in \kappa\varphi BV^W_{[a,b]}$ si

$$\kappa V^W_\varphi(f) = \kappa V^W_\varphi(f,[a,b]) := \sup_{\xi} \frac{\sum \varphi(|f(x_i) - f(x_{i-1})|)}{\sum \kappa\left(\frac{|x_i - x_{i-1}|}{b-a}\right)} < \infty,$$

donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo [a,b].

Notemos que el conjunto de esta clase de funciones es no vacío ya que contiene a las funciones constantes, este tipo de variación ha sido objeto de estudio desde el año 1986, siendo pioneros en su estudio los hermanos Sung Ki Kim and Jongsik Kim en [25]. En el Capítulo 2 haremos un estudio detallado de esta clase de funciones.

Las nociones de variación acotada comentadas anteriormente estan definidas para funciones definidas en un intervalo de $\mathbb{R}$. Sin embargo, desde principios del siglo XX, diversos matemáticos se dedicaron a la extensión del concepto de variación acotada (dada por Jordan) a funciones reales definidas en un rectángulo del plano. En los años 1905-1906 G. Hardy [13] y Vitali [29] presentan la primera extensión del concepto. Además, C. Arzelà [4], M. Fréchet [11], L. Tonelli [27], Pierpoint [23], entre otros, también presentaron otras formas de extender al plano la noción de variación acotada. Una revisión extensa y detallada de las diversas definiciones de variación bidimensional y las relaciones existentes entre ellas, fue elaborada por C.R. Adams y A. Clarkson ([1], [2]).

En el año 1990, G. Zawadzka, introduce otra manera de generalizar el concepto clásico de variación, el cual se diferencia de los nombrados anteriormente, ya que este se obtiene variando el conjunto de llegada de las funciones. Siendo más precisos, Zawadzka introduce el concepto de variación acotada para funciones *conjunto-valuadas*.

Más tarde, en el año 2002, V.V Chistyakov [6], revisando las nociones de variación de Hardy y Vitali, introduce el concepto de variación total de Hardy-Vitali de una función vectorial de $n$ variables y demuestra un Teorema de representación para la clase de funciones reales definidas en un rectángulo con variación total acotada.

Posteriormente, en el año 2010, J. Guerrero en su tesis Doctoral [12], extiende a $\mathbb{R}^2$ la noción de variación acotada en el sentido de Hardy-Vitali-Wiener. En este trabajo de grado, **introducimos la noción de funciones de $\kappa\varphi$-variación, para funciones reales definidas en un rectángulo**. Este concepto es una extensión del concepto introducido por S. Kim y J. Kim en [25], basándonos en las técnicas desarrolladas por Chistyakov en [6].

Existen otras generalizaciones de la noción de variación que no mencionamos debido a la poca incidencia en el estudio que estamos realizando, sin embargo, un lector interesado en el tema, puede consultar los trabajos de M. Schramm [26], F. Riesz [24], D. Watermann [30], entre otros.

Este trabajo ha sido organizado en tres capítulos, cada uno a su vez subdividido en secciones. En el primero de ellos exponemos de manera resumida los conceptos de variación acotada, variación de tipo Wiener y $\kappa$-variación, sobre intervalos compactos, y las propiedades de estas funciones. Además, dedicamos una sección especial al estudio de las propiedades de las $\varphi$-función, esencial para el desarrollo de este trabajo de grado.

En el segundo capítulo introducimos la noción de las función de $\kappa\varphi$-Wiener-variación acotada, definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sus propiedades. Por último, desarrollamos el concepto de funciones $\kappa\varphi$-decrecientes y se muestra que toda funcion $\kappa\varphi$-decreciente es de $\kappa\varphi$-Wiener-variación acotada.



En el tercer capítulo, desarrollamos el tema principal de este trabajo. En la primera parte introducimos la noción de $\kappa\varphi$-Wiener-variación acotada para funciones reales definidas en un rectángulo y se exponen algunas de sus propiedades. En la segunda sección se establecen condiciones necesarias y suficientes para que esta clase de funciones sea un espacio vectorial, con la suma y multiplicación por escalar usuales. En la tercera parte se dota al espacio de una norma, la cual le da una estructura de espacio de Banach. En la sección cuatro, se presentan la relación de estas funciones con las funciones factorizables de Adams-Clarkson. Finalizamos el capítulo mostrando algunas inclusiones entre dos clases de funciones generadas a partir de dos $\kappa$-funciones distintas o dos $\varphi$ funciones distintas.

Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo se expondrán algunos resultados básicos sobre de la teoría de espacios funcionales; en particular, espacios de funciones con algún tipo variación y en especial, funciones de variación acotada (en el sentido clásico de Jordan), funciones con $\varphi$-variación acotada y funciones con $\kappa$-variación finita, que serán útiles para el ulterior desarrollo y comprensión del trabajo.

Comenzaremos con la noción clásica de función de variación acotada, una clase de funciones estrechamente ligadas con las funciones monótonas. En esta primera parte nos limitaremos a enunciar los resultados más importantes, para la demostración de los mismos indicaremos las referencias, donde el lector interesado pueda consultarlos.



## 1.1. Funciones de Variación Acotada

En lo que sigue [a,b] denota un intervalo compacto con $a < b$. Una partición del intervalo [a,b] es un subconjunto finito de puntos $\xi = t_0, t_1, \ldots, t_n \subset [a,b]$ tal que $a \in \xi$ y $b \in \xi$. Denotaremos por $\mathcal{P}([a,b])$ a la familia de todas las particiones posibles $\xi$ de [a,b].

Camille Jordan en 1881 [14], introduce la noción de función de variación acotada de la siguiente manera:

**Definición 1.1.** Sea $f$ definida en [a,b] y $\xi \in \mathcal{P}([a,b])$. $f$ es de variación acotada en [a,b] si el número

$$V(f) = V(f;[a,b]) := \sup_{\xi} \sum |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi \in \mathcal{P}([a,b])$.

Usualmente el número $V(f;[a,b])$ es llamado *variación en el sentido de Jordan* ó simplemente variación de la función $f$ en [a,b]. Si $V(f;[a,b])$ es finito, entonces diremos que la función tiene variación acotada o variación finita en [a,b].

Esta clase de funciones es usualmente denotada por $BV[a,b] = BV([a,b],\mathbb{R})$, el cual es un espacio vectorial con la suma y multiplicación usual de funciones. Algunas propiedades básicas consecuentes de la definición de variación acotada las expondremos en la siguiente proposición, para los detalles de las demostraciones se puede consultar [3].

**Proposición 1.1.** *Sea $f \in BV[a,b]$, entonces*

1. *$f$ es una función constante si, y sólo, si $V(f) = 0$.*

2. *$f$ es acotada en [a,b] y además*

$$\|f(t)\|_\infty \leq |f(a)| + V(f) \quad \textit{para todo} \quad t \in [a,b],$$

*donde* $\|f(t)\|_\infty := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

3. *Si $[c,d] \subset [a,b]$, entonces $f$ es variación acotada en [c,d] y además $V(f;[c,d]) \leq V(f;[a,b])$.*

4. *(Aditividad) Si $c \in (a,b)$, entonces $f$ es de variación acotada en [a,c] y en [c,b] y se tiene que*

$$V(f;[a,b]) = V(f;[a,c]) + V(f;[c,b]).$$

El siguiente resultado es de gran relevancia ya que proporciona ejemplos de funciones de variación acotada, ver [3].

**Proposición 1.2.**

1. *Si $f$ es monótona en [a,b], entonces $f$ es de variación acotada en [a,b] y además*

$$V(f;[a,b]) = |f(b) - f(a)|.$$

2. *Si $f$ es continua en [a,b] y $f'$ existe y es acotada en (a,b), entonces $f$ es de variación acotada en [a,b].*



El ejemplo que sigue, muestra que la condición de continuidad y/o acotación de una función no es una condición suficiente para que la función sea de variación acotada.

**Ejemplo 1.1.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

$f$ es continua y acotada, pero $f \notin BV([0,1])$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$P_n := \left\{0,\, 1,\, \frac{2}{(2k+1)\pi}\right\}_{k=0}^{n} = \left\{0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \ldots, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}, 1\right\}.$$

Así, $f\left(\dfrac{2}{(2k+1)\pi}\right) = \dfrac{(-1)^k 2}{(2k+1)\pi}$, para $k = 0,1,2,\ldots n$. En consecuencia, la variación de $f$ correspondiente a una partición $P_n$, con $n$ par, será:

$$\begin{aligned} V(f;P_n) &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k+1)} + \frac{2}{\pi} + \left|\frac{2}{\pi} - \operatorname{sen}(1)\right| \\ &> \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+2)} \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

Luego, $f \notin BV[0,1]$.

Por otro lado, el espacio $BV[a,b]$ dotado con la norma

$$\|f\|_{BV} := |f(a)| + V(f), \quad f \in BV[a,b]$$

es un espacio de Banach (ver [3]). En relación a esto, L. Maligranda y W. Orlicz en [17], muestran que este espacio tiene estructura de álgebra de Banach (es decir, un espacio vectorial dotado de un producto algebraico, el cual es normado y completo con la norma del álgebra) respecto a ciertas normas equivalentes a $\|.\|_{BV}$.

Cabe mencionar la relación existen entre el espacio $BV[a,b]$ con otros espacios de funciones. Una clase de funciones que está estrechamente relacionada con la funciones de variación acotada, son las funciones ***absolutamente continuas***; es decir, aquellas funciones,

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tales que, para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon,$$

*para cada n subintervalos abiertos disjuntos* $(a_k, b_k)$ *de [a,b], n=1,2,..., tal que la suma de sus longitudes* $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ *sea menor que* $\delta$. Este espacio es denotado por $AC[a,b]$.

De la definición anterior se sigue que toda función absolutamente continua es uniformemente continua por lo tanto continua (tomando n=1) y de variación acotada, por lo tanto

$$AC[a,b] \subset BV[a,b].$$

Más aun,

$$C^n[a,b] \subset Lip[a,b] \subset AC[a,b] \subset BV[a,b],$$

donde $C^n[a,b]$ es el espacio de funciones $n-$***veces continuamente diferenciables*** y $Lip[a,b]$ el espacio de la funciones ***Lipschitzianas***; es decir, aquellas funciones

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tales que, existe* $0 < L \leq 1$ *tal que para cualquier par de puntos* $x, y \in [a,b]$

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|.$$

En general, se define el espacio $H_\alpha[a,b]$ de las funciones ***Hölderianas***, con constante $\alpha$ como aquellas funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tales que, existe* $0 < L \leq 1$ *tal que para cualquier par de puntos* $x, y \in [a,b]$

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|^\alpha.$$

Si $\alpha = 1$, entonces $Lip[a,b] \subset H_\alpha[a,b]$.

A continuación presentaremos un resultado útil para calcular la variación de una función sin recurrir a la definición 1.1, en el que juega un papel importante las funciones absolutamente continuas, el cual fue mostrado por D.E Varberg en [28],

**Teorema 1.1.** *Si $f \in BV[a,b]$ es absolutamente continua, entonces*

$$V(f) = \int_a^b |f'(t)|dt.$$

En otras palabras, este Teorema dice que si $f$ es absolutamente continua y de variación acotada, entonces la longitud de arco de $f$ es finita (curva rectificable).

Otra manera de calcular la variación de una función, en el caso de que sea continua, es utilizando la indicatrix de Banach. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, **la indicatrix de Banach** se define como la función $N(y)$ donde $N(y)$ es el número de veces que $f$ asume el valor $y$ para $x \in [a,b]$; $N(y) = +\infty$ si el valor $y$ se asume infinitas veces.
Banach comprobó ([20]), lo siguiente:

**Teorema 1.2.** *Si $f$ es una función continua de variación acotada en $[a,b]$, entonces*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(y)dy = V(f).$$

Siguiendo este orden de ideas, enunciaremos ahora uno de los resultados más importantes sobre esta clase de funciones, el cual fue presentado por Jordan en [14], donde se establece la íntima relación entre las funciones de variación acotada y las funciones monótonas, Jordan demostró que toda función de variación acotada se puede escribir como diferencia de dos funciones monótonas. Para ser más precisos, Jordan demuestra que:

**Teorema 1.3** (Teorema de Representación de Jordan). *Sea $f$ definida sobre [a,b]. Entonces $f$ es de variación acotada en [a,b] si, y sólo si, $f$ puede expresarse como diferencia de dos funciones crecientes.*

Notemos que esta representación no es única, pues si, $f = f_1 - f_2$, en donde $f_1$ y $f_2$ son funciones crecientes, se tiene también que $f = (f_1 + g) - (f_2 + g)$, siendo $g$ una función creciente arbitraria y ello nos proporciona una nueva representación de $f$.

La importancia de este resultado radica en que algunas propiedades de las funciones monótonas se pueden transferir a las funciones de variación acotada. Tales como:

- Existencia límites laterales en todo punto de $[a,b]$.
- Conjunto de discontinuidades numerable.
- Existencia de la derivada c.s en [a,b].
- Riemann-integrabilidad.
- Convergencia puntual de la serie de Fourier (Dirichlet).

Para finalizar esta sección, otra forma de caracterizar estas funciones, que enfatiza la estructura intrínseca de las mismas, fue dada por H. Federer en 1969 (ver [10]), este mostró el siguiente resultado:

**Teorema 1.4.** *$f \in BV[a,b]$ si, y sólo si, $f = h \circ g$, donde $h$ es monótona y $g : h([a,b]) \to \mathbb{R}$ es Lipschitz, con constante de Lipschitz menor o igual a* 1.

## 1.2. Generalizaciones de Wiener y Young

En esta sección expondremos dos generalizaciones de la noción clásica de variación acotada, estudiadas por los célebres matemáticos Norbert Wiener y Laurence Chisholm Young. Presentaremos de forma sucinta una serie de definiciones y propiedades conocidas acerca de estos tipos de variaciones, para funciones definidas en $\mathbb{R}$.

### 1.2.1. Funciones de $p$-variación en el sentido de Wiener

A continuación presentamos una de las primeras generalizaciones de la noción de variación, la cual fue introducida por Norbert Wiener en el año 1924, conocida como *variación cuadrática* de una función ó 2-*variación acotada*. Como en el caso clásico de variación, este tipo de variación tiene diversas aplicaciones en distintas ramas de la matemática pura y aplicada. La variación cuadrática es utilizada frecuentemente en el análisis de procesos estocásticos, tales como el movimiento Browniano y martingalas; por lo tanto desempeña un papel significativo en el cálculo estocástico, procesos de difusión e inclusive en la teoría del potencial. Por otra parte también es utilizada en algunas áreas de la ingeniería electrónica; a saber, en el proceso de ruido blanco, por ende en la teoría de control (fuerzas desconocidas) y en teoría de filtrado (errores instrumentales).

Wiener introduce la noción de función con 2-variación acotada en un intervalo [a,b] como sigue:

**Definición 1.2.** Una función $f$ definida en [a,b], se dice que es de 2-variación acotada, si el número,

$$V_2^W(f) = V_2^W([a,b]) := \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^2,$$

es finito donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi \in \mathcal{P}([a,b])$.

Si $V_2^W(f)$ es finito, entonces se dice que $f$ es de segunda variación acotada.

Más adelante, está definición fue extendida a valores de $p > 2$:

**Definición 1.3.** Si $f$ es definida en [a,b]. Entonces, $f$ es de $p$-variación, *en el sentido de Wiener* $(1 < p < \infty)$ si

$$V_p^W(f) = V_p^W(f,[a,b]) := \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p,$$

es finito donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi$ de $\mathcal{P}([a,b])$.

Al número $V_p^W(f)$ se le denomina $p$-variación, *en el sentido de Wiener* de la función $f$ en el intervalo [a,b]. Si $V_p^W(f) < \infty$, se dice que $f$ tiene $p$-variación finita.

La clase de funciones con $p$-variación finita es denotado por $BV_p[a,b]$, este conjunto es no vacío, pues al menos contiene a las funciones constantes.

De hecho, $BV_p[a,b]$ con las operaciones puntuales usuales, resulta ser un álgebra, el cual tiene una estructura de álgebra de Banach al dotarlo con la norma

$$\|f\|_p := |f(a)| + (V_p^W(f))^{\frac{1}{p}} \quad f \in BV_p[a,b].$$

Como puede observarse en la definición 1.3, si $p = 1$ la 1-variación coincide con la definición clásica de función de variación acotada, en éste sentido, como se muestra en [5] las funciones con $p$-variación acotada, verifican propiedades similares a las de las funciones con variación acotada. En la siguiente proposición se enumeran algunas propiedades de las funciones con $p$-variación acotada.

**Proposición 1.3.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces*

1. $V_p^W(f) = 0$ *si, y sólo si, $f$ es constante.*

2. *Toda función de p-variación acotada en [a,b] es acotada en [a,b].*

3. *Si $f$ es de p-variación acotada en [a,b] y $c \in \mathbb{R}$, entonces $V_p^W(f + c) = V_p^W(f)$.*

4. *Si $f$ es de p-variación acotada en [a,b], entonces la función definida por $V(x) := V_p^W(f,[a,x])$ con $a < x \leq b$ y $V(a) = 0$ es no decreciente.*

5. *Si $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $p < q$, entonces $V_p^W([a,b]) \subset V_q^W([a,b])$.*

6. $Lip_{\frac{1}{p}}[a,b] \subseteq V_p^W([a,b])$.

### 1.2.2. Funciones de $\varphi$-Variación acotada

Continuando con las generalizaciones del concepto de variación dada por Wiener, introducimos ahora un tipo de variación que generaliza el concepto de $p$-variación, y por ende a las funciones de variación acotada. Este concepto fue presentado en 1937 por L.C Young. La idea de este nuevo concepto es reemplazar a la función $x \to |x|^p$ por una nueva función con características similares llamada $\varphi$-función ó función de Young (cuyo nombre se debe a que Young fue el primero en trabajar con esta clase de funciones).

**Definición 1.4.** $\varphi$ es una $\varphi$-función si, $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

1. $\varphi$ es continua en $[0,\infty)$;

2. $\varphi(t) = 0$ si $t = 0$;

3. $\varphi$ es creciente en $[0,\infty)$;

4. $\varphi(t) \longrightarrow \infty$, cuando $t \longrightarrow \infty$.

Algunos ejemplos de $\varphi$ funciones:

**Ejemplo 1.2.**

1. $\varphi(t) = t^{\alpha}$, con $\alpha > 1$. (ver figura 1.1).

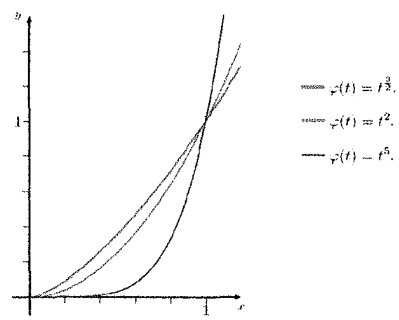


Figura 1.1:

2. $\varphi(t) = \alpha(e^{\beta x} - 1)$, con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. (ver figura 1.2)



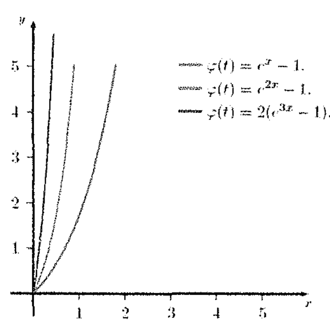


Figura 1.2:

Denotaremos por $\Phi$ a la clase de todas las $\varphi$-funciones. Al final de esta sección se desarrollan las propiedades que cumple este tipo de funciones.

Young introdujo el concepto de $\varphi$-variación acotada, *en el sentido de Wiener* de una función de la siguiente manera:

**Definición 1.5.** Sea $f$ definida en [a,b] y $\varphi \in \Phi$. Se dice que $f$ es de $\varphi$-variación acotada, *en el sentido de Wiener* si,

$$V_\varphi^W(f) := \sup_\xi \sum \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|),$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi \in \mathcal{P}([a,b])$.

Denotaremos por $V_\varphi^W[a,b]$ a la clase de funciones que tienen $\varphi$-variación finita, *en el sentido de Wiener*, en el intervalo [a,b]. Notemos que $V_\varphi^W[a,b]$ es no vacío, ya que al menos contiene a las funciones constantes.

El siguiente resultado nos facilita la construcción de ejemplos de funciones con $\varphi$-variación finita.

**Proposición 1.4.** *Si $\varphi \in \Phi$ es convexa, entonces la $\varphi$-variación de una función monótona definida en el intervalo [a,b] es igual a $\varphi(|f(b) - f(a)|)$.*



*Demostración.* Sea $\varphi \in \Phi$ convexa; es decir,

$$\varphi(\lambda t + (1-\lambda)s) \leq \lambda\varphi(t) + (1-\lambda)\varphi(s),$$

para todo $t, s \in [a,b]$ y $\lambda \in (0,1)$. Consideremos $f$ definida en [a,b] creciente (estrictamente creciente) y sea $\xi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición del intervalo [a,b]. Por la Proposición 1.2, se tiene que $V(f) = |f(b) - f(a)|$, de esto y dado que $\varphi$ es una función creciente,

$$\sup_\xi \sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|) \geq \varphi(|f(b) - f(a)|). \tag{1.2}$$

Por otro lado, como $\varphi$ es convexa, entonces $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ es no-decreciente. En efecto;

Sean $0 < s < t$, entonces $0 < \frac{s}{t} < 1$, como $\varphi$ es convexa, tenemos

$$\varphi(s) = \varphi\left(\frac{s}{t}t\right) = \varphi\left(\frac{s}{t}t + \left(1 - \frac{s}{t}\right)0\right) \leq \frac{s}{t}\varphi(t) + \left(1 - \frac{s}{t}\right)\varphi(0) = \frac{s}{t}\varphi(t),$$

por lo tanto, $\dfrac{\varphi(s)}{s} \leq \dfrac{\varphi(t)}{t}$, con $0 < s < t$.
Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{(|f(t_i) - f(t_{i-1}))|}|f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Por ser $f$ creciente, se tiene que $|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq |f(b) - f(a)|$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Y, además, dado que $\frac{\varphi(t)}{t}$ es no-decreciente,

$$\frac{\varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{|f(t_i) - f(t_{i-1})|} \leq \frac{\varphi(|f(b) - f(a)|)}{|f(b) - f(a)|}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|) &\leq \frac{\varphi(|f(b) - f(a)|)}{|f(b) - f(a)|} \sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|) \\
&= \frac{\varphi(|f(b) - f(a)|)}{|f(b) - f(a)|} |f(b) - f(a)| \\
&= \varphi(|f(b) - f(a)|).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $V_\varphi^W(f) \leq \varphi(|f(b) - f(a)|)$, de esto y de (1.2) se sigue que

$$V_\varphi^W(f) = \varphi(|f(b) - f(a)|).$$

$\square$

Claramente se puede observar de la definición de $\varphi$-variación que si $\varphi(t) = t^p$ con $1 \leq p < \infty$, entonces la $\varphi$-variación coincide con la $p$-variación.

La clase de funciones $V_\varphi^W[a,b]$ no es necesariamente un espacio vectorial, un ejemplo de ello se puede ver en [9]. Con el fin de garantizar que $V_\varphi^W[a,b]$ fuese un espacio vectorial los matemáticos J. Musilak y W. Orlicz en 1959 ([18]), establecen condiciones necesarias y suficientes en $\varphi$ para que esta clase de funciones sea un espacio vectorial, siendo más precisos, demuestran que:

*$V_\varphi^W[a,b]$ es un espacio vectorial si, y sólo si, $\varphi$ verifica la **condición** $\delta_2$; es decir, si existen números positivos $a > 0$ y $M > 0$ tal que*

$$\varphi(2t) \leq M\varphi(t), \quad para \quad 0 \leq t \leq a. \tag{1.3}$$

Una propiedad importante de la clase de funciones $V_\varphi^W[a,b]$, se presenta a continuación, lo cual nos permitirá conocer de forma más explícita la estructura del espacio generado por $V_\varphi^W[a,b]$.

**Teorema 1.5.** *Si $\varphi \in \Phi$. Entonces la clase $V_\varphi^W[a,b]$ es un conjunto simétrico y convexo; es decir, si $f \in V_\varphi^W[a,b]$, entonces $-f \in V_\varphi^W[a,b]$ y para todo $f, g \in V_\varphi^W[a,b]$ si $\alpha, \beta \in (0,1)$, entonces $\alpha f + \beta g \in V_\varphi^W[a,b]$.*

Para la demostración se puede consultar [18]. Como consecuencia del Teorema anterior tenemos que el espacio vectorial generado por esta clase de funciones denotado por $BV_\varphi^W[a,b] = BV_\varphi^W([a,b], \mathbb{R})$, es igual al conjunto:

$$\{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \text{existe}\, \lambda > 0 \,\text{tal que}\, V_\varphi^W(\lambda f) < \infty\}.$$

Por otro lado, $BV_\varphi^W[a,b]$ es un espacio normado dotado con la norma

$$\|f\|_\varphi := \|f(a)\| + p_\varphi(f), \quad f \in BV_\varphi^W[a,b],$$

donde

$$p_\varphi(f) := inf\,\{\epsilon > 0 : V_\varphi^W(f/\epsilon) \leq 1\}.$$

### Propiedades de las $\varphi$-funciones

Maligranda y Orlicz establecieron condiciones sobre $\varphi$ para asegurar que la clase de funciones $V_\varphi^W([a,b])$ fuese un espacio vectorial, por tal motivo esta sección la dedicaremos a demostrar algunas propiedades de las $\varphi$-funciones, lo cual será de utilidad para el desarrollo de los próximos capítulos.

Iniciamos presentando dos propiedades básicas que cumplen las $\varphi$-funciones, omitiremos la demostración ya que es consecuencia inmediata de la definición de $\varphi$-función.

**Proposición 1.5.**

1. *$\Phi$ es un espacio vectorial.*

2. *La clase $\Phi$ es cerrada bajo multiplicación, inversas y composición de funciones. Además, si $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, entonces $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \text{máx}\{\varphi_1, \varphi_2\}$ y $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \text{mín}\{\varphi_1, \varphi_2\}$ también están en $\Phi$.*

**Proposición 1.6.** *Si $\varphi$ es convexa, entonces*

$$\begin{cases} \varphi(kt) \leq k\varphi(t) & \text{para } 0 \leq k < 1, \quad t \geq 0 \\ \varphi(kt) \geq k\varphi(t) & \text{para } k \geq 1, \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

*Demostración.* Sea $0 \leq k < 1$, entonces por la convexidad de $\varphi$ y dado que $\varphi(0) = 0$, resulta

$$\varphi(kt) = \varphi(kt - (1-k)0) \leq k\varphi(t) + (1-k)\varphi(0) = k\varphi(t).$$

Si $k \geq 1$, entonces de la desigualdad anterior y teniendo en cuenta que $\dfrac{1}{k} < 1$, tenemos

$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{1}{k}kt\right) \leq \frac{1}{k}\varphi(kt).$$

Por lo tanto,

$$k\varphi(t) \leq \varphi(kt).$$

□

El estudio de esta clase de funciones ha tenido gran repercusión en la construcción de otros espacios de funciones con algún tipo de variación, al adicionarles otras condiciones, como por ejemplo que sean convexas. Otras condiciones de uso frecuente son las llamadas condiciones $\infty_1$ y $\delta_2$.

**Definición 1.6** (Condición $\infty_1$). Se dice que una $\varphi$–función cumple la condición $\infty_1$ si

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty.$$

Geométricamente esta condición significa que a valores grandes de "$t$" la gráfica de la función $\varphi$ está por encima de las rectas que pasan por el origen. Las funciones que cumple con tal condición son conocidas como $N$–funciones.

**Definición 1.7** (Condición $\delta_2$). $\varphi$ satisface la condición $\delta_2$, si existen números positivos $a > 0$ y $M > 0$ tal que

$$\varphi(2t) \leq M\varphi(t), \quad \textit{para} \quad 0 \leq t \leq a. \tag{1.5}$$

**Proposición 1.7.** *La condición $\delta_2$ es equivalente a la siguiente condición: Para todo $a' > 0$ existe $\omega(a') \geq 1$ tal que*

$$\varphi(2t) \leq \omega(a')\varphi(t), \quad \textit{para} \quad 0 \leq t \leq a'. \tag{1.6}$$

*Demostración.* Por hipótesis existen $a > 0$ y $M > 0$ tales que

$$\varphi(2t) \leq M\varphi(t), \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq a.$$

Entonces, para $t = \dfrac{a}{2}$, se tiene que $\varphi(a) \leq M\varphi\left(\dfrac{a}{2}\right)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\geq \varphi(a)\frac{1}{M\varphi(a/2)}\varphi(t) \\ &= \frac{1}{M}\frac{\varphi(a)}{\varphi(2t)}\frac{\varphi(t)}{\varphi(a/2)}\varphi(2t). \end{aligned}$$

Así, para $a' > a$ y todo $t \in [\frac{a}{2}, a']$ se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{M\varphi(2t)}{\varphi(a)}\varphi(t) &\geq \frac{\varphi(t)}{\varphi(a/2)}\varphi(2t) \\ &\geq \varphi(2t), \end{aligned}$$

Tomando $\omega(a') = \dfrac{M\varphi(2t)}{\varphi(a)}$, se obtiene que

$$\varphi(2t) \leq \omega(a')\varphi(t)$$

para $0 \leq t \leq a'$.

$\square$

Dada $\varphi \in \Phi$, el hecho anterior nos permite definir una función, $\Omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, (dependiente de $\varphi$) de la forma siguiente:

$$\Omega(a') = \begin{cases} M & \text{si } 0 < a' < a \\ M\dfrac{\varphi(2a')}{\varphi(a)} & \text{si } a' \geq a. \end{cases} \tag{1.7}$$

Dado que $\varphi$ es no decreciente, entonces $\Omega$ es creciente. Además, $\Omega$ esta acotada inferiormente por 1; es decir, $\Omega(a') \geq M \geq 1$.

El resultado siguiente es de gran importancia para mostrar que ciertos conjuntos de funciones que definiremos en los capítulos posteriores son espacios vectoriales con la suma y multiplicación por escalar usual de funciones.

**Lema 1.1.** *Si $\varphi \in \Phi$ satisface la condición $\delta_2$, entonces*

$$\varphi(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) \leq \Omega^{n-1}((n-1)a')[\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \ldots \varphi(u_n)],$$

*para $0 < u_i \leq a'$. Donde $\Omega(a')$ es como en (1.7).*

*Demostración.* Haremos la prueba por inducción sobre $n$.
Para $n = 2$. Como $\varphi$ satisface la condición $\delta_2$, entonces para todo $a'$ existe $\Omega(a') \geq 1$ tal que

$$\varphi(2u_1) \leq \Omega(a')\varphi(u_1), \quad \textit{para } 0 < u_1 \leq a'.$$

y

$$\varphi(2u_2) \leq \Omega(a')\varphi(u_2), \quad \textit{para } 0 < u_2 \leq a'.$$

Supongamos sin perdida de generalidad que $0 < u_1 < u_2$, entonces $0 < u_1 + u_2 < 2u_2$, dado que $\varphi$ es no decreciente, tenemos

$$\begin{aligned}\varphi(u_1 + u_2) &\leq \varphi(2u_1) + \varphi(2u_2)\\ &\leq \Omega(a')\varphi(2u_1) + \Omega(a')\varphi(2u_2)\\ &= \Omega(a')(\varphi(2u_1) + \varphi(2u_2)),\end{aligned}$$

para todo $0 < u_i \leq a'$ con $i = 1, 2$.
Si $n = 3$ con $0 < u_1, u_2, u_3 \leq a'$, entonces $0 < u_1 + u_2, u_3 \leq 2a'$ (pues $u_1 + u_2 \leq 2u_2 \leq 2a'$ y $u_3 \leq a' < 2a'$).

Aplicando el caso anterior a $u_1 + u_2, u_3$ y $2a'$, se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi((u_1 + u_2) + u_3) &\leq \Omega(2a')[\varphi(u_1 + u_2) + \varphi(u_3)]\\ &\leq \Omega(2a')[\Omega(a')\varphi(u_1 + u_2) + \varphi(u_3)]\\ &\leq \Omega(2a')[\Omega(2a')\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \Omega(a')\varphi(u_3)]\\ &= \Omega^2(2a')[\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \Omega(a')\varphi(u_3)],\end{aligned}$$

para todo $0 < u_i \leq a'$ con $i = 1, 2, 3$.

Supongamos cierto para $n$-valores de $u$ y mostremos que se cumple para $(n+1)$-valores de $u$, además supongamos sin perdida de generalidad que $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$.

Dado que $0 < u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1} \leq a'$, entonces $0 < u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} \leq na'$. Aplicando la hipótesis inductiva para $0 < u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$ y $na'$, se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi((u_1+u_2+\ldots+u_n)+u_{n+1}) &\leq \Omega(na')[\varphi(u_1+u_2+\ldots+u_n)+\varphi(u_{n+1})]\\ &\leq \Omega(na')[\Omega^{n-1}((n-1)a')(\varphi(u_1)+\ldots+\varphi(u_n))+\varphi(u_{n+1})]\\ &\leq \Omega(na')[\Omega^{n-1}(na')\varphi(u_1)+\ldots+\varphi(u_n))\\ &\quad+\Omega^{n-1}(na')\varphi(u_{n+1})]\\ &= \Omega^n(na')[\varphi(u_1)+\ldots+\varphi(u_n)+\varphi(u_{n+1})]\end{aligned},$$

para todo $0 < u_i \leq a'$ con $i = 1, 2, \ldots, n$.

En consecuencia

$$\varphi(u_1+u_2+\ldots+u_n) \leq \Omega^{n-1}((n-1)a')[\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\ldots\varphi(u_n)],$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

**Lema 1.2.** *Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$. Entonces la convergencia de la serie $\sum\varphi_1(u_n)$ implica la convergencia de la serie $\sum\varphi_2(u_n)$ para toda sucesión de números no-negativos $u_n$ si, y sólo si, existen números $a > 0$ y $b > 0$ tal que $\varphi_2(u) \leq b\varphi_1(u)$ para $0 < u \leq a$.*

*Demostración.* Supongamos que existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que $\varphi_2(u) \geq b\varphi_1(u)$ para $0 < u \leq a$. Sea $\varphi_1(a) = \dfrac{1}{n^2}$ y $b = n$. Denotemos al valor $u$ correspondiente por $u_n$. Por otro lado, sea $k_n$ el menor entero positivo tal que

$$\frac{1}{n^2} < k_n\varphi(u_n) < \frac{2}{n^2}.$$

Para cada $k_n$, consideremos

$$\begin{array}{lcr} u'_1 = u_1; u'_2 = u_1; & \ldots & ; u'_{k_1} = u_1\\ u'_{k_1+1} = u_2; u'_{k_1+2} = u_2; & \ldots & ; u'_{k_1+k_2} = u_2\\ \vdots & & \\ u'_{k_1+k_2+\ldots k_{n-1}+1} = u_n; u'_{k_1+k_2+\ldots k_{n-1}+2} = u_n; & \ldots & ; u'_{k_1+k_2+\ldots k_{n-1}k_n} = u_n.\end{array}$$

Luego, $u'_n = u_m$ para $k_1 + k_2 + \ldots + k_{m-1} < n < k_1 + k_2 + \ldots + k_m$, $m = 1, 2, \ldots$.
Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(u'_n) = \sum_{n=1}^{\infty}k_n\varphi_1(u_n) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$$

la cual es convergente. Por otra parte,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_2(u'_n) = \sum_{n=1}^{\infty}k_n\varphi_2(u_n) > \sum_{n=1}^{\infty}nk_n\varphi_1(u_n) > \sum_{n=1}^{\infty}n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n},$$

lo que implica que $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_2(u'_n)$ es divergente y esto contradice la hipótesis.

Recíprocamente, supongamos que $\sum\varphi_1(u_n)$ es convergente y que existen números $a > 0$ y $b > 0$ tal que $\varphi_2(u) \leq b\varphi_1(u)$ para $0 < u \leq a$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_2(u_n) &= \sum_{n=1}^{r-1}\varphi_2(u_n)+\sum_{n=r}^{+\infty}\varphi_2(u_n)\\ &\leq \sum_{n=1}^{r-1}\varphi_2(u_n)+b\sum_{n=r}^{+\infty}\varphi_1(u_n).\end{aligned}$$

*Por lo que, la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_2(u_n)$ *es convergente.*

□

## 1.3. Funciones de $\kappa$-Variación Acotada

En el año 1975, Boris Korenblum como consecuencia del estudio que realizaba referente al problema de representación de funciones armónicas, definidas en el disco unitario en el plano complejo, por medio de integrales de Poisson, introduce una nueva generalización del concepto clásico de variación acotada, conocida como $\kappa$-variación acotada, este tipo de variación se diferencia de las otras generalizaciones ya que este concepto maximiza razones entre sumas de Jordan, y la así llamada, entropía generada por una función de distorsión $\kappa$ (kappa), la cual es introducida para la medida de intervalos en el dominio y no en el rango de la función. Un punto débil de esta noción es que los funcionales de $\kappa$-variación asociados no son necesariamente crecientes respecto a refinamiento de particiones ni sub-aditivos respecto a subdivisiones de un intervalo, más sin embargo, una ventaja, lo constituye el hecho de que toda función de $\kappa$-variación acotada se puede descomponer como la diferencia de dos funciones estructuralmente más sencillas; a saber, funciones $\kappa$-decrecientes.



Al igual que las secciones anteriores sólo demostraremos los resultados directos de la definición de $\kappa$-variación, y los resultados clásicos de análisis nos limitaremos a citarlos.

Iniciaremos presentando la noción de función de distorsión, conocida en algunos textos como $\kappa$-función y algunas propiedades de la misma.

**Definición 1.8.** Sea $\kappa:[0,1]\to[0,1]$. Se dice que $\kappa$ es una función de distorsión, si satisface las siguientes propiedades:

1. Es continua;

2. estrictamente creciente y cóncava;

3. $\kappa(0)=0$ y $\kappa(1)=1$;

4. tiene pendiente infinita en el origen; esto es $\lim_{t\to 0^+}\frac{\kappa(t)}{t}=\infty$.

**Ejemplo 1.3.**

1.
$$\kappa(t)=\begin{cases} t(1-\ln(t)) & \text{si } t\neq 0\\ 0 & \text{si } t=0.\end{cases}$$

2. $\kappa(t) = \sqrt{2t - t^2}$.

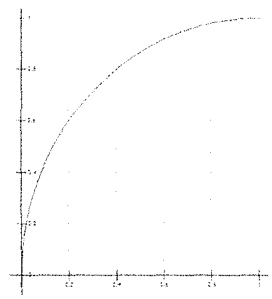

Figura 1.3:

Denotaremos por $\mathcal{K}$ al conjunto de todas las funciones de distorsión.

Algunas propiedades de estas funciones las exponemos en la siguiente proposición.

**Proposición 1.8.** *Sea $\kappa$ una función de distorsión. Entonces*

1. *(Sub-aditividad) $\kappa(t+s) \leq \kappa(t) + \kappa(s)$, para $t, s \in [0,1]$, siempre que $t + s \in [0,1]$*
2. $$\frac{1}{\kappa(t)+\kappa(s)} \leq \frac{1}{\kappa(t+s)} \leq \frac{1}{\kappa(t)} + \frac{1}{\kappa(s)},$$ *para $t, s \in [0,1]$, siempre que $t + s \in [0,1]$.*

*Demostración.*

1. Sean $t, s \in [0,1]$ tal que $t + s \in [0,1]$, supongamos sin perdida de generalidad que $t > s$, por ser $\kappa$ cóncava, tenemos que
$$\frac{\kappa(t+s) - \kappa(t)}{(t+s) - t} \leq \frac{\kappa(t+s) - \kappa(s)}{(t+s) - t} \leq \frac{\kappa(s) - \kappa(0)}{(s-0)}$$
en consecuencia,
$$\kappa(t+s) - \kappa(t) \leq \kappa(s)$$
y así, $\kappa(t+s) \leq \kappa(t) + \kappa(s)$.

2. La primera desigualdad es clara. Verifiquemos la segunda, $t \leq t+s$ y $s \leq t+s$ por ser $\kappa$ creciente, tenemos
$$\begin{aligned} \kappa(t)\kappa(s) &\leq \kappa(t+s)\kappa(t+s) \\ &\leq (\kappa(t)+\kappa(s))\kappa(t+s) \end{aligned}$$
Por lo tanto,
$$\frac{\kappa(t)+\kappa(s)}{\kappa(t)\kappa(s)} \geq \frac{1}{\kappa(t+s)},$$

es decir,
$$\frac{1}{\kappa(t)}+\frac{1}{\kappa(s)}\geq\frac{1}{\kappa(t+s)}\geq\frac{1}{\kappa(t)+\kappa(s)}.$$

□

**Definición 1.9.** Sea $\kappa\in\mathcal{K}$ y $\xi=t_1<t_2<\ldots<t_n$ partición [a,b], llamaremos $\kappa$-entropía de $\xi$ (relativo a [a,b]), y la denotaremos por $\kappa(\xi)=\kappa(\xi,[a,b])$ al número
$$\kappa(\xi):=\sum_{i=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}|}{b-a}\right),$$
donde $t_0=a$ y $t_n=b$. Para un subconjunto $F$ cerrado de [a,b], definamos
$$\kappa(F)=\kappa(F,[a,b])=\sup\{\kappa(\xi):\xi\,\text{es una partición de }[a,b]\}.$$
Notemos que $\kappa(\varnothing)=0$.

Para ilustrar esta definición, a continuación se presentan algunos ejemplos de $\kappa$-entropía

## Ejemplo 1.4.

1.
$$\kappa(t)=\begin{cases}t(1-\log(t)) & \text{si } t\neq 0\\ 0 & \text{si } t=0.\end{cases}\tag{1.8}$$
$\kappa(F)=\kappa_s(F)$ es llamada ***entropía de Shannon***.

2. $\kappa(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha<1)$, aquí $\kappa(F)=\kappa_{l,\alpha}(F)$ y es llamada la ***entropía Lipchitziana***.

3. $\kappa(s)=(1-\frac{1}{2}\log t)^{-1}$, $\kappa(F)=\kappa_d(F)$ y es llamada la ***entropía de Dini***.

Por otra parte, como consecuencia de la Proposición 1.8 se tiene que para toda partición $\xi$ del intervalo $[a,b]$,
$$\sum_{i=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}|}{b-a}\right)\geq 1$$

Algunas propiedades elementales que se deducen de la definición de $\kappa$-entropía, se describen en la siguiente proposición.

**Proposición 1.9.** *Sea $\kappa\in\mathcal{K}$. Entonces*

1. *Si $F_1\subset F_2$, entonces $\kappa(F_1)\leq\kappa(F_2)$.*

2. $\kappa(F_1\cup f_2)\leq\kappa(F_1)+\kappa(F_2)$.

Teniendo presente la noción de $\kappa$-entropía, introducimos la noción de $\kappa$-variación acotada dada por Korenblum:

**Definición 1.10.** Sea $f$ definida en [a,b] y $\kappa \in \mathcal{K}$. $f$ es de $\kappa$-variación acotada si,

$$\kappa V(f) = \kappa(f,[a,b]) := \sup_{\xi} \frac{\sum |f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\sum \kappa(\xi;[a,b])},$$

es finito,donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi$ de $\mathcal{P}([a,b])$.

Un punto importante que se deriva de la definición anterior es que si $\kappa V(f) < \infty$, entonces los límites $f(t^+)$ y $f(t^-)$ existen para $a \le t < b$ y $a < t \le b$ respectivamente. En efecto;

Sea $B := \limsup_{x\to t^+} f(x)$ y sea $A := \liminf_{x\to t^+} f(x)$, entonces $B \ge A$. Consideremos dos sucesiones $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{t'_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergiendo a $t$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = B \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f(t'_n) = A.$$

Supongamos además que $t_1 > t'_1 > \dots t_n > t'_n > \dots$.
Como $\kappa V(f) \le M < \infty$, entonces

$$|f(t_n) - f(t'_n)| \le M\kappa\left(\frac{t_n - t'_n}{b-a}\right) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ya que $\kappa$ y $|\cdot|$ son continuas, tomando límite a ambos lados, nos da

$$|B - A| \le 0,$$

y esto si y sólo si $A = B$, por tanto $f(t^+)$ existe para todo $a \le t < b$. Una prueba similar muestra que el límite $f(t^-)$ existe para todo $a < t \le b$.

Otro aspecto relevante de la definición de $\kappa$- entropía es que toda función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, con $\kappa V(f) < \infty$ genera una "medida"sobre el conjunto de todos los intervalos $I \subset [a,b]$, a modo de ejemplo, si consideramos $f([\alpha,\beta]) = f(\beta^+) - f(\alpha^-)$, $f((\alpha,\beta)) = f(\beta^-) - f(\alpha^+)$, $f([\alpha,\beta)) = f(\beta^-) - f(\alpha^-)$ y $f((\alpha,\beta]) = f(\beta^+) - f(\alpha^+)$. Como $\kappa V(f) < \infty$, esta medida se puede extender a todo conjunto abierto $G \subset [a,b]$, tal que $f(\partial G) < \infty$ ($\partial G$ frontera de G) por la fórmula $f(G) = \sum_j f(I_j)$, donde $I_j$ son las componentes de $G$.

Denotemos por $\kappa BV[a,b]$ al conjunto de todas las funciones de $\kappa$-variación acotada en [a,b]; es decir,

$$\kappa BV[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \kappa V(f) < \infty\}.$$

$\kappa BV[a,b]$ es no vacío ya que al menos contiene a las funciones constantes. Además, toda función de variación acotada es de $\kappa$-variación acotada; esto es $BV([a,b]) \subset \kappa BV([a,b])$. En efecto, si $f \in BV[a,b]$, entonces para toda partición $\xi \in \mathcal{P}([a,b])$ se verifica que

$$\begin{aligned} \kappa V(f) &= \sup_{\xi} \frac{\sum |f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\ &\le \sup_{\xi} \sum |f(t_i) - f(t_{i-1})|. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in \kappa BV([a,b])$.

**Proposición 1.10.** *$\kappa BV[a,b]$ es un espacio vectorial.*

*Demostración.* Sean $f, g \in \kappa BV[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\kappa V(f+\alpha g) &= \sup_{\xi} \frac{\sum |(f+\alpha g)(t_i) - (f+\alpha g)(t_{i-1})|}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\
&= \sup_{\xi} \frac{\sum |f(t_i) + \alpha g(t_i) - f(t_{i-1}) - \alpha g(t_{i-1})|}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\
&\leq \sup_{\xi} \frac{\sum |f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} + \alpha \sup_{\xi} \frac{\sum |(g(t_i) - g(t_{i-1}))|}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\
&= \kappa V(f) + \alpha \kappa V(g).
\end{aligned}$$

□

El espacio $\kappa BV[a,b]$ dotado con la norma $\|\cdot\|_\kappa : \kappa BV[a,b] \to [0,\infty)$, definida por

$$\|f\|_\kappa := |f(a)| + \kappa BV[a,b], \quad f \in \kappa BV[a,b],$$

es un espacio de Banach, la demostración de este hecho se puede ver en [15].

**Proposición 1.11** (Propiedades de las funciones con $\kappa$-variación acotada).

1. *Si $f \in \kappa BV[a,b]$ es constante, entonces $\kappa V(f) = 0$.*

2. *Si $f \in \kappa BV[a,b]$, entonces $f$ es acotada y $\|f(t)\|_\infty \leq |f(a)| + \frac{3}{2}\kappa V(f)$ para todo $t \in [a,b]$.*

3. *Si $f, g \in \kappa BV[a,b]$, entonces $fg \in \kappa BV[a,b]$.*

Como consecuencia de (3) de la Proposición anterior, y dado que $\kappa BV[a,b]$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\kappa$, entonces $\kappa BV[a,b]$ es un álgebra de Banach.

Considerando lo antes expuesto, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.6.** *$\kappa BV[a,b]$ equipado con la norma*

$$\|f\|_\kappa^1 = \|f\|_\infty + \alpha \|f\|_\kappa, \quad f \in \kappa BV[a,b] \, y \, \alpha > 0$$

*es un álgebra de Banach y las normas $\|f\|_\kappa$ y $\|f\|_\kappa^1$ son equivalentes.*

Para la demostración de este Teorema usaremos un resultado presentado por Maligranda y Orlicz en [17].

**Teorema 1.7.** *Sea $\mathbb{X}$ el espacio vectorial de funciones acotadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supongamos que $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|$ tal que $\mathbb{X}$ es invariante bajo el producto usual de funciones. Si*

$$\|f.g\| \leq \|f\|_\infty \|g\| + \|f\| \|g\|_\infty \, f, g \in \mathbb{X},$$

*entonces el espacio $\mathbb{X}$ con la norma $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\| + \|\cdot\|_\infty$, es un álgebra de Banach. Además, si la norma $\|\cdot\|_1$ implica la convergencia en la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes.*

*Demostración.* (Demostración del Teorema 1.6)

Basta mostrar que $\|fg\|_\kappa^1 \leq \|f\|_\kappa^1 \|g\|_\kappa^1$ para todo $f, g \in \kappa BV[a,b]$

$$\begin{aligned}
\|fg\|_\kappa^1 &= \|fg\|_\infty + \alpha\|fg\|_\kappa \\
&\leq \|f\|_\infty\|g\|_\infty + \alpha\|f\|_\infty\|g\|_\kappa + \alpha\|g\|_\infty\|f\|_\kappa + \alpha^2\|f\|_\kappa\|g\|_\kappa \\
&= (\|f\|_\infty + \alpha\|f\|_\kappa)(\|g\|_\infty + \alpha\|g\|_\kappa) \\
&= \|f\|_\kappa^1\|g\|_\kappa^1.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 1.11, tenemos que existe $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_\kappa$, $f \in \kappa BV[a,b]$. Así,

$$\begin{aligned}
\alpha\|f\|_\kappa &\leq \|f\|_\kappa^1 \\
&= \|f\|_\infty + \alpha\|f\|_\kappa \\
&\leq M\|f\|_\kappa + \alpha\|f\|_\kappa \\
&= (M+\alpha)\|f\|_\kappa.
\end{aligned}$$

Por consiguiente $\|\cdot\|_\kappa$ y $\|\cdot\|_\kappa^1$ son equivalentes.

□

**Proposición 1.12.** *Si $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{K}$ tal que $\kappa_1 \leq \kappa_2$, entonces $\kappa_1 BV([a,b],\mathbb{R}) \subset \kappa_2 BV([a,b],\mathbb{R})$.*

*Demostración.* Sea $f \in \kappa_1 BV([a,b],\mathbb{R})$, entonces



$$\begin{aligned}
\kappa_2 V(f) &= \sup_\xi \frac{\sum|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\sum \kappa_2(\xi;[a,b])} \\
&\leq \sup_\xi \frac{\sum|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\sum \kappa_1(\xi;[a,b])} \\
&= \kappa_1 V(f).
\end{aligned}$$

Así, $\kappa_1 BV([a,b],\mathbb{R}) \subset \kappa_2 BV([a,b],\mathbb{R})$.

□

### 1.3.1. Funciones $\kappa$-decrecientes

Uno de los resultados más importante sobre este clase de funciones es el Teorema de Representación de Korenblum, antes de enunciarlo es necesario tener en cuenta la siguiente definición.

**Definición 1.11.** Una función definida en [a,b], se dice que es $\kappa$-decreciente con constante $c \geq 0$, si para cada intervalo $I = [t,s] \subseteq [a,b]$ se tiene

$$f(I) \leq c\kappa(I/|b-a|).$$

donde $f(I) := f(s) - f(s)$ y $\kappa(I) = \kappa(t) - k(s)$.

**Ejemplo 1.5. Funciones $\kappa$-decrecientes**

1. Toda función continua de Hölder con constante $\alpha$ es $\kappa$-decreciente, con $\kappa(t) = t^{\alpha}$.

2. Toda función decreciente es $\kappa$-decreciente, tomando $c = 0$.

De la Proposición 1.2 toda función decreciente es de variación acotada, la siguiente proposición establece un hecho similar para las funciones $\kappa$-decrecientes.

**Proposición 1.13.** *Si $f$ es una función $\kappa$-decreciente, entonces $f \in \kappa BV[a,b]$.*

El recíproco de esta Proposición no es cierto. En efecto;

Sea $\kappa \in \mathcal{K}$ y $f(t) = \sqrt{\kappa(t)}$ con $t \in [0,1]$, entonces $f$ es de $\kappa$-variación finita, ya que $f$ es creciente y por ende de variación acotada, pero $f$ no es $\kappa$-decreciente, ya que

$$\frac{f(t) - f(0)}{\kappa(t-0)} = \frac{1}{\kappa(t)} \to +\infty$$

cuando $t \to 0^+$

**Teorema 1.8** (Teorema de Representación de Korenblum).
*Toda función de $\kappa$-variación acotada es la diferencia de dos funciones $\kappa$-decrecientes.*

Una demostración detallada de este Teorema se puede ver en [7].

Capítulo 2

# Funciones de $\kappa\varphi$-Wiener-Variación Acotada en $\mathbb{R}$

Con el objetivo de sentar bases firmes para desarrollar el tema principal de este trabajo de grado, en este capítulo estudiaremos las funciones de $\kappa\varphi$-Wiener-Variación Acotada en $\mathbb{R}$, concepto que se deriva de las combinación de las nociones de $\varphi$-variación y $\kappa$-variación. Además, estableceremos ciertos convenios de notación y terminología que se utilizaran a largo del capítulo.
En la sección 3 se expone uno de los resultados más importantes sobre esta clase funciones, se muestra que esta clase de funciones es un espacio de Banach con la norma definida mediante el Funcional de Minkowski.



## 2.1. Definición y terminología

Igual que en el capítulo anterior, en este trabajaremos en un intervalo compacto $[a,b]$ y $\mathcal{P}([a,b])$ designa al conjunto de todas las particiones posibles del intervalo $[a,b]$.

Definamos a continuación, cuando una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es de $\kappa\varphi$-variación acotada.

**Definición 2.1.** Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se dice de $\kappa\varphi$-variación acotada, *en el sentido de Wiener* y se denota por $\kappa\varphi V^W(f)=\kappa\varphi V^W(f,[a,b])$, si

$$\kappa\varphi V^W(f):=\sup\frac{\sum_{i=1}^{n}\varphi(|f(t_i)-f(t_{i-1})|)}{\sum\kappa(\xi;[a,b])},$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi=\{t_i\}_{i=1}^n\in\mathcal{P}([a,b])$.

El número $\kappa\varphi V^W(f)$ se denomina $\kappa\varphi$-Wiener-variación de la función $f$ en el intervalo [a,b]. Si $\kappa\varphi V^W(f)<\infty$ se dice que $f$ tiene $\kappa\varphi$-Wiener-variación finita.

Denotaremos por $\kappa\varphi V^W([a,b])$ a la clase de funciones definidas en [a,b] que tienen $\kappa\varphi$-variación finita; es decir,

$$\kappa\varphi V^W([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\kappa\varphi V^W(f)<\infty\}.$$

**Observación 2.1.** Evidentemente de la definición 2.1, el conjunto $\kappa\varphi V^W([a,b])$ es no vacío, ya que al menos contiene a las funciones constantes. Dado que $\sum\kappa(\xi;[a,b])\geq 1$ se sigue que toda función con $\varphi$-variación acotada tiene $\kappa\varphi$-variación finita, en consecuencia

$$V_{\varphi}^{W}([a,b]) \subset \kappa\varphi V^{W}([a,b]).$$

En la siguiente proposición desarrollaremos algunas propiedades de la clase $\kappa\varphi V^{W}([a,b])$.

**Proposición 2.1.**

1. *$\kappa\varphi V^{W}(f) \geq 0$, para toda $f \in \kappa\varphi V^{W}([a,b])$.*
2. *Si $f \in \kappa\varphi V^{W}([a,b])$, entonces $-f \in \kappa\varphi V^{W}([a,b])$ y además $\kappa\varphi V^{W}(-f) = \kappa\varphi V^{W}(f)$.*
3. *$\kappa\varphi V^{W}(f) = 0$ si, y sólo si, $f$ es una función constante.*
4. *Si $f \in \kappa\varphi V^{W}([a,b])$, entonces $f$ es acotada.*
5. *Si $\varphi$ es convexa, entonces $\kappa\varphi V^{W}(\cdot)$ es convexa.*

*Demostración.* Sea $\xi = \{t_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{P}([a,b])$.

1. De la definición de $\kappa\varphi$-variación, se sigue que $\kappa\varphi V^{W}(f) \geq 0$ para toda $f \in \kappa\varphi V^{W}([a,b])$.
2. Sea $f \in \kappa\varphi V^{W}([a,b])$, entonces

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi V^{W}(-f) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|-f(t_i) - (-f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|-1|(|f(t_i) - f(t_{i-1})|))}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\
&= \kappa\varphi V^{W}(-f).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $-f \in \kappa\varphi V^{W}([a,b])$.

3. Supongamos que $\kappa\varphi V^{W}(f) = 0$, entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} = 0.$$

De esto, se sigue que

$$\frac{\varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} = 0, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

por consiguiente

$$\varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|) = 0, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dado que $\varphi(t) = 0$ si $t = 0$, entonces

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| = 0, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

por lo tanto,

$$f(t_i) = f(t_{i-1}), \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

y esto es cierto para toda partición $\xi$ de [a,b], lo que muestra que $f$ es constante.

Recíprocamente supongamos que $f$ es una función constante, de la definición de $\kappa\varphi$-variación acotada se sigue que $\kappa\varphi V^W(f) = 0$.

4. Sea $f \in \kappa\varphi V^W([a,b])$, entonces existe $M > 0$ tal que $\kappa\varphi V^W(f) = M$, por consiguiente

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \leq M,$$

para toda partición $\xi$ de [a,b].

En particular para $\xi : a = t_0 < t_1 = t < t_2 = b$, tenemos

$$\frac{\varphi(|f(t) - f(a)|) + \varphi(|f(b) - f(t)|)}{\kappa\left(\frac{t-a}{b-a}\right) + \kappa\left(\frac{b-t}{b-a}\right)} \leq M,$$

por lo tanto

$$\varphi(|f(t) - f(a)|) \leq M\left(\kappa\left(\frac{t-a}{b-a}\right) + \kappa\left(\frac{b-t}{b-a}\right)\right).$$

Ya que $\kappa\left(\frac{t-a}{b-a}\right) \leq 1$ y $\kappa\left(\frac{b-t}{b-a}\right) \leq 1$ para todo $t \in [a,b]$, resulta

$$\varphi(|f(t) - f(a)|) \leq 2M.$$

De donde

$$|f(t) - f(a)| \leq \varphi^{-1}(2M),$$

lo cual implica que

$$|f(t)| \leq |f(a)| + \varphi^{-1}(2M), \quad \text{para todo} \quad t \in [a,b].$$

Así, $f$ es acotada en $[a,b]$.

5. Supongamos que $\varphi$ es una función convexa; es decir, para todo $x, y \in [0,\infty)$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ se cumple que

$$\varphi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

Sean $f, g \in \kappa\varphi V^W[a,b]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W(\alpha f + \beta g) &= \sup \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(|(\alpha f + \beta g)(t_i) - (\alpha f + \beta g)(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&= \sup \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(|\alpha f(t_i) + \beta g(t_i) - \alpha f(t_{i-1}) - \beta g(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&= \sup \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(|\alpha(f(t_i) - f(t_{i-1})) + \beta(g(t_i) - g(t_{i-1}))|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&\le \sup \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(\alpha|(f(t_i) - f(t_{i-1}))| + \beta|(g(t_i) - g(t_{i-1}))|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&\le \sup \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha\varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|) + \beta\varphi(g(t_i) - g(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&= \alpha \sup \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} + \beta \sup \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(|g(t_i) - g(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&= \alpha\kappa\varphi V^W(f) + \beta\kappa\varphi V^W(g).
\end{aligned}$$

□

En el resultado siguiente mostramos que $\kappa\varphi V^W([a,b])$ es un conjunto convexo.

**Proposición 2.2.** *Sean $\varphi \in \Phi$, $\kappa \in \mathcal{K}$. Si $f, g \in \kappa\varphi V^W([a,b])$, entonces*

$$\kappa\varphi V^W(\alpha f + \beta g) \le \kappa\varphi V^W(f) + \kappa\varphi V^W(g)$$

*con $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$.*

*Demostración.* Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$ tal que $\alpha + \beta = 1$ y $x, y \ge 0$. Luego, $\alpha x + \beta y$ es un punto del segmento de recta que une a $x$ con $y$, por consiguiente $x \le \alpha x + \beta y \le y$ ó $y \le \alpha x + \beta y \le x$.
$\varphi$ es una función creciente, por lo tanto

$$\varphi(x) \le \varphi(\alpha x + \beta y) \le \varphi(y)$$

ó

$$\varphi(y) \le \varphi(\alpha x + \beta y) \le \varphi(x).$$

Se sigue que

$$\varphi(\alpha x+\beta y)\leq \max\{\varphi(x),\varphi(y)\}\leq \varphi(x)+\varphi(y). \tag{2.1}$$

Sea $\xi\in\mathcal{P}([a,b])$, entonces

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W(\alpha f+\beta g) &= \sup\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(|(\alpha f+\beta g)(t_i)-(\alpha f+\beta g)(t_{i-1})|)}{\sum\kappa(\xi;[a,b])}\\
&= \sup\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(|\alpha(f(t_i)-f(t_{i-1}))+\beta(g(t_i)-g(t_{i-1}))|)}{\sum\kappa(\xi;[a,b])}\\
&\leq \sup\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(|(f(t_i)-f(t_{i-1}))+(g(t_i)-g(t_{i-1}))|)}{\sum\kappa(\xi;[a,b])} \quad (\text{por } (2.1))\\
&\leq \sup\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(|f(t_i)-f(t_{i-1})|+|g(t_i)-g(t_{i-1})|)}{\sum\kappa(\xi;[a,b])} \quad (\text{por ser } \varphi \text{ creciente})\\
&\leq \sup\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(|f(t_i)-f(t_{i-1})|)}{\sum\kappa(\xi;[a,b])}+\sup\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(|g(t_i)-g(t_{i-1})|)}{\sum\kappa(\xi;[a,b])}\\
&= \kappa\varphi V^W(f)+\kappa\varphi V^W(g).
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia de la Proposición 2.1 (2) y la Proposición anterior, tenemos que espacio vectorial generado por $\kappa\varphi V^W([a,b])$; es decir, $(\langle\kappa\varphi V^W([a,b])\rangle)$ es igual a

$$\{f:[a,b]\to\mathbb{R} : \text{existe}\,\lambda>0 \quad \text{tal que} \quad \lambda f\in\kappa\varphi V^W([a,b])\},$$

y lo denotaremos por $\kappa\varphi BV^W([a,b])$.

## 2.2. Condición necesaria y suficiente en $\varphi$ para que la clase $\kappa\varphi V^W([a,b])$ sea un espacio vectorial

Igual que en la clase de funciones $V_\varphi^W([a,b])$, no se puede garantizar que la familia de funciones con $\kappa\varphi$-variación, *en el sentido de Wiener* sea un espacio vectorial. El objetivo primordial de esta sección es fijar bajo que condiciones $\kappa\varphi V^W([a,b])$ es un espacio vectorial.

Iniciaremos extendiendo el Lema 1.1 a la clase $\kappa\varphi V^W([a,b])$.

**Lema 2.1.** *Sea $\varphi\in\Phi$, $\kappa\in\mathcal{K}$ y $f_k:[a,b]\to\mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots l$ funciones uniformemente acotadas; es decir, existe $K>0$ tal que $\|f_k\|_\infty\leq K$, $k=1,2,\ldots l$. Si $\varphi$ satisface la condición $\delta_2$, entonces*

$$\kappa\varphi V^W(f_1+\ldots+f_l)\leq\Omega^{l-1}((l-1)2K)[\kappa\varphi V^W(f_1)+\ldots+\kappa\varphi V^W(f_l)], \tag{2.2}$$

*donde $\Omega$ es la función definida en 1.7.*
*Además, si $c \in \mathbb{R}$ y $m$ es el menor entero no negativo tal que $|c| \leq 2^m$, entonces*

$$\kappa\varphi V^W(cf) \leq \Omega'(m)(\kappa\varphi V^W(f)) \tag{2.3}$$

*Demostración.* Mostremos primero (2.2). Sea $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$ partición de [a,b] y $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots l$, funciones uniformemente acotadas. Entonces

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W(f_1 + \ldots + f_l) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|(f_1 + \ldots + f_l)(t_i) - (f_1 + \ldots + f_l)(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|(f_1(t_i) - f_1(t_{i-1})) + \ldots + (f_l(t_i) - f_l(t_{i-1})|))}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|f_1(t_i) - f_1(t_{i-1})| + \ldots + |f_l(t_i) - f_l(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])}.
\end{aligned}$$

Dado que $|f_k(t_1) - f_k(t_{i-1})| \leq |f_k(t_1)| + |f_k(t_{i-1})| \leq 2K$ y aplicando el Lema 1.1, con $a' = 2K$, resulta

$$\varphi(|f_1(t_i) - f_1(t_{i-1})| + \ldots + |f_l(t_i) - f_l(t_{i-1})|) \leq \Omega^{l-1}((l-1)2K)(\varphi(|f_1(t_i) - f_1(t_{i-1})|) + \ldots + \varphi(|f_l(t_i) - f_l(t_{i-1})|).$$

En consecuencia,

$$\sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\sum_{j=1}^{l} |f_j(t_i) - f_j(t_{i-1})|\right)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \leq \Omega^{l-1}((l-1)2K) \sup \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} \varphi|f_j(t_i) - f_j(t_{i-1})|}{\sum \kappa(\xi; [a,b])}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W(f_1 + \ldots + f_l) &\leq \Omega^{l-1}((l-1)2K) \sup \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} \varphi|f_j(t_i) - f_j(t_{i-1})|}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&= \Omega^{l-1}((l-1)2K)[\kappa\varphi V^W(f_1) + \kappa\varphi V^W(f_2) + \ldots + \kappa\varphi V^W(f_l)].
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $m$ es el menor entero no negativo tal que $|c| \leq 2^m$, entonces

$$\varphi(|c|t) \leq \varphi(2^m t) = \varphi(2(2^{m-1})t).$$

Si $0 < t \leq K$, resulta $0 < 2^{m-1}t \leq 2^{m-1}K$, aplicando el Lema 1.1 tenemos

$$\varphi(2(2^{m-1})t) \leq \Omega((2^{m-1}K)\varphi(2^{m-1})),$$

por lo que

$$\varphi(|c|t) \leq \Omega((2^{m-1}K))\varphi(2^{m-1}t).$$

Luego, si $0 < t \leq K$, entonces $2^{m-1}t \leq 2^{m-1}tK \leq 2^{m-1}K$, aplicando el Lema 1.1 y teniendo en cuenta que $\Omega(2^{m-2}t) \leq \Omega(2^{m-1}K)$, obtenemos

$$\varphi(|c|t) \leq \Omega^2((2^{m-1}K)\varphi(2^{m-2}t)).$$

Por un proceso inductivo sobre $m \in \mathbb{N}$, resulta

$$\varphi(|c|t) \leq \Omega^m((2^{m-1}K))\varphi(t).$$

Sea $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{P}([a,b])$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función uniformemente acotada por $K > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W(cf) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^n \varphi(|cf(t_i) - cf(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^n \varphi(|c|(|f(t_i) - f(t_{i-1})|))}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\
&\leq \sup \Omega^m((2^{m-1}K) \frac{\sum_{i=1}^n \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\
&= \Omega^m((2^{m-1}K) \sup \frac{\sum_{i=1}^n \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \\
&= \Omega^m((2^{m-1}K)\kappa\varphi V^W(f).
\end{aligned}$$

□

El Teorema siguiente establece una condición necesaria para que la clase de funciones $\kappa\varphi V^W([a,b])$ sea un espacio vectorial.

**Teorema 2.1.** *Si $\varphi \in \Phi$ satisface la condición $\delta_2$ y $\kappa \in \mathcal{K}$, entonces*

$$\kappa\varphi V^W([a,b]) = \kappa\varphi BV^W([a,b]).$$

*donde $\kappa\varphi BV^W([a,b])$ es el espacio generado por $\kappa\varphi V^W([a,b])$.*

*Demostración.* Supongamos que $\varphi$ satisface la condición $\delta_2$. Por definición

$$\kappa\varphi BV^W([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \text{existe } \lambda > 0 \text{ tal que } \lambda f \in \kappa\varphi V^W([a,b])\},$$

De modo que si $f \in \kappa\varphi V^W([a,b])$, tomando $\lambda = 1$,

$$\kappa\varphi V^W([a,b]) \subseteq \kappa\varphi BV^W([a,b]).$$

Por otra lado, si $f \in \kappa\varphi BV^W([a,b])$. Entonces existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda f \in \kappa\varphi V^W([a,b])$, de la Proposición 2.1 (d) existe $K > 0$ tal que $|\lambda f| \leq K$. Consideremos ahora al menor entero positivo $m$ tal que $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \leq 2^m$.

Por el Lema 2.1, se sigue que

$$\kappa\varphi V^W(f) = \kappa\varphi V^W\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) \leq \Omega^m(2^{m-1}K)(\kappa\varphi V^W(\lambda f)).$$

Lo que implica que, $f \in \kappa\varphi V^W([a,b])$. Así,

$$\kappa\varphi V^W([a,b]) = \kappa\varphi BV^W([a,b]).$$

□

Mostraremos ahora una condición necesaria y suficiente para que se cumpla la contención de dos conjuntos de funciones generados a partir de dos $\varphi$-funciones distintas, resultado que nos ayudará a mostrar el recíproco del Teorema anterior. En una sección posterior se presentar otros condiciones para garantizar la conteción entre estas familias de funciones.

**Teorema 2.2.** *Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ y $\kappa \in \mathcal{K}$. Entonces, $\kappa\varphi_1 V^W([a,b]) \subseteq \kappa\varphi_2 V^W([a,b])$ si, y sólo si, existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tal que $\varphi_2(t) \leq \beta\varphi_1(t)$ para $0 \leq t \leq \alpha$.*

*Demostración.* Supongamos que existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que $\varphi_2(t) \leq \beta\varphi_1(t)$ para $0 \leq t \leq \alpha$, equivalentemente para cada $\alpha' > 0$ existe $\beta(\alpha') > 0$ tal que $\varphi_2(t) \leq \beta(\alpha')\varphi_1(t)$ para $0 \leq t \leq \alpha$. (la demostración de esta afirmación es análoga a la Proposición 1.7)

Sea $f \in \kappa\varphi_1 V^W([a,b])$, entonces $\kappa\varphi_1 V^W(f) < \infty$ y además existe $K > 0$ tal que $|f|_\infty \leq K$ (Proposición 2.1).

Para toda partición $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$ de [a,b], vale $|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq 2K$. Luego, aplicando el Lema 2.1 con $\alpha' = 2K$, se obtiene que

$$\varphi_2(|f(t_i) - f(t_{i-1})|) \leq \beta(2K)\varphi_1(|f(t_i) - f(t_{i-1})|), \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq \alpha.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_2(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \leq \beta(2K)\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])}.$$

Y, por lo tanto

$$\sup\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_2(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \leq \beta(2K)\sup\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])},$$

es decir,

$$\kappa\varphi_2 V^W(f) \leq \beta(2K)\kappa\varphi_1 V^W(f) < \infty,$$

lo que muestra que $\kappa\varphi_1 V^W([a,b]) \subseteq \kappa\varphi_2 V^W([a,b])$.

Recíprocamente supongamos que $\kappa\varphi_1 V^W([a,b]) \subseteq \kappa\varphi_2 V^W([a,b])$ y además supongamos que para cada $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, se cumple que $\varphi_2(t) \geq \beta\varphi_1(t)$ siempre que $0 \leq t \leq \alpha$.

Por el Lema 1.2 existe una sucesión de números positivos $u_n$ tal que la serie $\Sigma\varphi_1(u_n)$ converge y la serie $\Sigma\varphi_1(u_n)$ diverge.

Sea $w_n$ una sucesión (fija) creciente del intervalo [a,b] y consideremos la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} u_n & \text{si } t = w_n \\ 0 & \text{si } t \neq w_n. \end{cases}$$

$n = 1, 2, \ldots$

$f \in \kappa\varphi_1 V^W([a,b])$. En efecto, notemos que

$$\varphi_1(|u_n - u_{n-1}|) \leq \begin{cases} \varphi_1(|u_n|) & \text{si } u_{n-1} \leq u_n \\ \varphi_1(|u_{n-1}|) & \text{si } u_n \leq u_{n-1} \end{cases} \leq \varphi_1(u_n) + \varphi_1(u_{n-1}).$$

Para cualquier partición $\xi = \{t_i\}_{i=1}^m$ de [a,b], vale

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi_1(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} &= \frac{\varphi_1(|f(t_1)|) + \varphi_1(|f(t_{m-1})|) + \sum_{i=1}^{m-1} \varphi_1(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \varphi_1(|f(t_i)|) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_1(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \varphi_1(|u_n|) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_1(|u_n|)}{\sum \kappa(\xi; [a,b])} \\
&\leq 2\sum_{i=1}^{m} \varphi_1(|u_n|) < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \in \kappa\varphi_1 V^W([a,b])$. Pero $f \notin \kappa\varphi_2 V^W([a,b])$.
En efecto, considerando la partición $\pi = \{t_i\}_{i=1}^{2m}$ de [a,b] tal que $t_{2i+1} = w_i$ para $i = 1, 2, \ldots, m-2$ y $t_{2i} = \dfrac{w_{i-1} + w_i}{2}$ para $i = 1, 2, \ldots, m-1$, y teniendo en cuenta que $f(t_{2i}) = 0$, resulta

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{2m-1} \varphi_2(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\pi;[a,b])} &= \frac{\varphi_2(|f(t_1) - f(t_0)|) + \ldots + \varphi_2(|f(t_{2m-1}) - f(t_{2m-2})|)}{\sum \kappa(\pi;[a,b])} \\
&= \frac{2\varphi_2(|f(t_1)|) + \ldots + 2\varphi_2(|f(t_{2m-3})|) + \varphi(|f(t_{2m-1})|)}{\sum \kappa(\pi;[a,b])} \\
&= \frac{2\sum_{i=1}^{m-2} \varphi_2(|u_{2i+1}|) + \varphi_2(|u_{2m-1}|)}{\sum \kappa(\pi;[a,b])} \\
&\geq \frac{2\sum_{i=1}^{m-2} \varphi_2(|u_{2i+1}|)}{\sum \kappa(\pi;[a,b])} \\
&\geq \frac{\sum_{i=1}^{m-2} \varphi_2(|u_i|)}{\sum \kappa(\pi;[a,b])},
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\kappa\varphi_2 V^W(f) &= \frac{\sum_{i=1}^{2m-1} \varphi_2(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\pi;[a,b])} \\
&\geq \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_2(|u_i|)}{\sum \kappa(\pi;[a,b])} \to \infty.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $f \notin \kappa\varphi_2 V^W([a,b])$. Lo cual contradice la hipótesis de que $\kappa\varphi_1 V^W([a,b]) \subseteq \kappa\varphi_2 V^W([a,b])$. □

Ahora mostraremos el recíproco del Teorema 2.1.

**Teorema 2.3.** *Sea $\varphi \in \Phi$ y $\kappa \in \mathcal{K}$. Entonces, si $\kappa\varphi V^W([a,b]) = \kappa\varphi BV^W([a,b])$ entonces $\varphi$ cumple la condición $\delta_2$.*

*Demostración.* Sea $f \in \kappa\varphi V^W([a,b])$, como $\kappa\varphi V^W([a,b])$ es lineal, entonces $2f \in \kappa\varphi V^W([a,b])$. Consideremos $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ y $\varphi_2(t) = \varphi(2t)$, las cuales están bien definidas. Entonces,

$$\kappa\varphi_1 V^W([a,b]) \subseteq \kappa\varphi_2 V^W([a,b]),$$

ya que si $f \in \kappa\varphi_1 V^W([a,b])$, entonces

$$\kappa\varphi_2 V^W(f) = \kappa\varphi_1 V^W(2f) < \infty.$$

Luego, por el Teorema 2.2, existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que

$$\varphi_2(t) \leq \beta\varphi_1(t),$$

para $0 < t \leq \alpha$; o sea,

$$\varphi(2t) \leq \beta\varphi(t),$$

para $0 < t \leq \alpha$, y esto es exactamente la condición $\delta_2$. □

## 2.3. El espacio de Banach $\kappa\varphi BV^W([a,b],\mathbb{R})$

En el análisis funcional una herramienta utilizada usualmente para dotar a un espacio vectorial de una semi-norma es el Funcional de Minkowski. En esta sección dotaremos al espacio vectorial $\kappa\varphi BV^W([a,b],\mathbb{R})$ de una norma, la cual estará determinada por el funcional de Minkowski asociado a una clase importante de funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada.

Iniciaremos con un breve resumen acerca del Funcional de Minkowski.

**Definición 2.2.** Un conjunto arbitrario $A$ de un espacio espacio vectorial $\mathbb{X}$, se dice que es absorbente si, para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un número $\alpha > 0$ tal que para cada $|\lambda| \leq \alpha$ tiene que $\lambda x \in A$.

**Definición 2.3.** Un conjunto arbitrario $A$ de un espacio vectorial $\mathbb{X}$, se dice que es balanceado si, para cada $x \in \mathbb{X}$, se cumple que $\lambda x \in A$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| \leq 1$.

**Definición 2.4.** *Un conjunto $A$ se dice que es absolutamente convexo si es convexo y balanceado.*

**Definición 2.5.** Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial y $\mathcal{A}$ un subconjunto absorbente de $\mathbb{X}$. El funcional de Minkowski de $\mathcal{A}$ denotado por $\rho$ es la aplicación $\rho : \mathbb{X} \to \mathcal{A}$ definida por

$$\rho_{\mathcal{A}}(x) := \text{ínf}\{r > 0 : \frac{x}{r} \in \mathcal{A}\}.$$

Equivalentemente,

$$\rho_{\mathcal{A}}(x) := \text{ínf}\{r > 0 : x \in r\mathcal{A}\}.$$

Si el conjunto $\mathcal{A}$ es absolutamente convexo, el funcional de Minkowski asociado a $\mathcal{A}$ resulta ser una semi-norma en $\mathbb{X}$.

**Observación 2.2.** *La bola (abierta o cerrada) $A$ de un espacio normado genera el funcional de* Minkowski $\rho(x) = \|x\|$. Todas las vecindades de cero de un espacio vectorial topológico tienen un funcional de Minkowski.

En la Proposición siguiente las referencias topologícas en $\mathbb{X}$ se harán con respecto a la topología generada por el funcional de Minkowski.

**Proposición 2.3** (Propiedades del funcional de Minkowski).

1. $0 \leq \rho(x) < \infty$ *para todo* $x \in \mathbb{X}$.
2. *(Homogeneidad)* $\rho(\alpha x) = \alpha\rho(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{X}$ *y para todo* $\alpha > 0$.
3. *(Subaditividad)* $\rho(x_1 + x_2) \leq \rho(x_1) + \rho(x_2)$, *para todo* $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$.
4. $\overline{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{X} : \rho(x) \leq 1\}$.

5. $int(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{X} : \rho(x) < 1\}$.

Antes de definir el operador de Minkowski asociado a un conjunto del espacio $\kappa\varphi BV^W([a,b])$, necesitamos algunos resultados preliminares.

**Lema 2.2.** *Sea $\varphi \in \Phi$ convexa y $\kappa \in \mathcal{K}$. Entonces*

1. $\lim\limits_{\beta\to 0^+} \kappa\varphi BV^W(\beta f) = 0$, *para toda* $f \in \kappa\varphi BV^W([a,b])$.

2. $\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \leq 1\} \neq \varnothing$.

*Demostración.*

1. Sea $f \in \kappa\varphi BV^W([a,b])$, entonces por definición existe $\lambda > 0$ tal que $\kappa\varphi V^W(\lambda f) < \infty$. Dado que $\varphi$ es convexa por la Proposición 2.1 $\kappa\varphi TV^W(\cdot)$ es convexa.
Para $0 < \beta < \lambda$, obtenemos
$$\kappa\varphi BV^W(\beta f) = \kappa\varphi BV^W\left(\frac{\beta}{\lambda}\lambda f\right) \leq \frac{\beta}{\lambda}\kappa\varphi V^W(\lambda f) < \infty$$
Por tanto, si $\beta \to 0^+$, entonces $\kappa\varphi BV^W(\beta f) \to 0$.

2. Como $\lim\limits_{\beta\to 0^+} \kappa\varphi BV^W(\beta f) = 0$, para toda $f \in \kappa\varphi BV^W([a,b])$, existe un $\beta$ suficientemente pequeño tal que $\kappa\varphi BV^W(\beta f) \leq 1$ (por definición de límite).
Por lo tanto, si $f \in \kappa\varphi BV^W([a,b])$, entonces $\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \leq 1\} \neq \varnothing$.

□

Por razones de comodidad trabajaremos con funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $f(a) = 0$.

Designaremos por $\kappa\varphi BV_0^W([a,b])$ al conjunto de funciones con $\kappa\varphi$-Wiener-variación acotada que se anulan en $a$; es decir,
$$\kappa\varphi BV_0^W([a,b]) := \{f \in \kappa\varphi BV^W([a,b]) : f(a) = 0\}.$$

Teniendo en cuenta que el espacio vectorial $\kappa\varphi BV_0^W([a,b])$ es simétrico, convexo y el conjunto $\kappa\varphi V_0^W$ es absorbente y ya que el conjunto $\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \leq 1\} \neq \varnothing$, se define el funcional de Minkowski $\rho_{\kappa\varphi}$ asociado a $\kappa\varphi BV_0^W([a,b])$ como sigue:

**Definición 2.6.** Si $\varphi \in \Phi$ es convexa y $\kappa \in \mathcal{K}$. Se define el funcional de Minkowski $\rho_{\kappa\varphi} : \kappa\varphi BV_0^W([a,b]) \to \mathbb{R}^+$ como
$$\rho_{\kappa\varphi}(f) := \inf\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \leq 1\}.$$

En relación a esto, definimos $\|\cdot\|_{\kappa\varphi}^W : \kappa\varphi BV_0^W([a,b]) \to \mathbb{R}$ por
$$\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W := \rho_{\kappa\varphi}(f).$$

Algunas propiedades de $\rho_{\kappa\varphi}(\cdot)$

**Lema 2.3.** *Sea $\varphi \in \Phi$ convexa y $\kappa \in \mathcal{K}$. Entonces*

1. *Si $t, t' \in [a,b]$, entonces $|f(t) - f(t')| \leq \varphi^{-1}(3)\rho_{\kappa\varphi}(f)$ para toda $f \in \kappa\varphi BV_0^W([a,b])$.*

2. *$\kappa\varphi V^W(f/\rho_{\kappa\varphi}(f)) \leq 1$ si $\rho_{\kappa\varphi}(f) > 0$.*

3. *Si $K > 0$, entonces*

   a) *$\rho_{\kappa\varphi}(f) \leq k$ si, y sólo si, $\kappa\varphi V^W(f/k) \leq 1$.*
   b) *Si $\kappa\varphi V^W(f/\rho_{\kappa\varphi}(f)) = 1$, entonces $\rho_{\kappa\varphi}(f) = 1$.*

4. *Si $0 \leq \rho_{\kappa\varphi}(f) \leq 1$, entonces $\kappa\varphi V^W(f) \leq \rho_{\kappa\varphi}(f)$.*

5. *$\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \leq 1\} = (\rho_{\kappa\varphi}(f), \infty)$.*

*Demostración.*

1. Sea $f \in \kappa\varphi BV_0^W([a,b])$. Para todo $\lambda > 0$ se tiene que $\kappa\varphi V^W(f/\lambda) \leq 1$.
   En consecuencia, para toda partición $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$ de [a,b],

$$\frac{\varphi\left(\dfrac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\lambda}\right)}{\sum \kappa(\xi, [a,b])} \leq \sup \frac{\sum \varphi\left(\dfrac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\lambda}\right)}{\sum \kappa(\xi, [a,b])} \leq 1.$$

   En particular para $\xi : a = t_0 =< t_1 = t' < t_2 = t < t_3 = b$, se tiene

$$\frac{\varphi\left(\dfrac{|f(t') - f(a)|}{\lambda}\right) + \varphi\left(\dfrac{|f(t) - f(t')|}{\lambda}\right) + \varphi\left(\dfrac{|f(b) - f(t)|}{\lambda}\right)}{\kappa\left(\dfrac{|t' - a|}{b-a}\right) + \kappa\left(\dfrac{|t - t'|}{b-a}\right) + \kappa\left(\dfrac{b-t}{b-a}\right)} \leq 1.$$

   De esto,

$$\frac{\varphi\left(\dfrac{|f(t) - f(t')|}{\lambda}\right)}{\kappa\left(\dfrac{|t' - a|}{b-a}\right) + \kappa\left(\dfrac{|t - t'|}{b-a}\right) + \kappa\left(\dfrac{b-t}{b-a}\right)} \leq 1.$$

   Luego,

$$\varphi\left(\frac{|f(t) - f(t')|}{\lambda}\right) \leq 3,$$

   pues $\kappa\left(\dfrac{|t_i - t_{i-1}|}{b-a}\right) \leq 1$. Y, así,

$$\left(\frac{|f(t) - f(t')|}{\lambda}\right) \leq \varphi^{-1}(3).$$

   Equivalentemente,

$$|f(t) - f(t')| \leq \varphi^{-1}(3)\lambda, \quad \text{para todo} \quad \lambda \geq \rho_{\kappa\varphi}(f),$$

y por definición de $\rho_{\kappa\varphi}(f)$, se sigue que

$$|f(t) - f(t')| \leq \varphi^{-1}(3)\rho_{\kappa\varphi}(f).$$

2. Sea $\lambda \in \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \leq 1\}$ y $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$ partición de [a,b]. Entonces,

$$\kappa\varphi V^W(f/\lambda) = \sup \frac{\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\lambda}\right)}{\sum \kappa(\xi, [a,b])} \leq 1.$$

Dado que $\varphi$ es continua y $\rho_{\kappa\varphi}(f) > 0$, se sigue que

$$\sup \frac{\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\rho_{\kappa\varphi}(f)}\right)}{\sum \kappa(\xi, [a,b])} = \lim_{\lambda \to \rho_{\kappa\varphi}(f)} \frac{\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\lambda}\right)}{\sum \kappa(\xi, [a,b])} \leq \lim_{\lambda \to \rho_{\kappa\varphi}(f)} 1 = 1.$$

Así,

$$\kappa\varphi V^W(f/\rho_{\kappa\varphi}(f)) \leq 1.$$

3. *a*) Supongamos que $\rho_{\kappa\varphi}(f) \leq k$.
Si $\rho_\kappa\varphi(f) = 0$, entonces por la definición de ínfimo, existe $k'$ tal que $0 < k' < k$ y $\kappa\varphi V^W(f/k') \leq 1$. Dado que $\varphi$ es no decreciente, se sigue que

$$\kappa\varphi V^W(f/k) \leq \kappa\varphi V^W(f/k') \leq 1.$$

Si $0 < \rho_{\kappa\varphi}(f) \leq k$, entonces $\dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{\rho_{\kappa\varphi}(f)}$, luego por (b), tenemos que

$$\kappa\varphi V^W(f/k) \leq \kappa\varphi V^W(f/\rho_{\kappa\varphi}(f)) \leq 1.$$

Recíprocamente, supongamos que $\kappa\varphi V^W(f/k) \leq 1$, entonces $k \in \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \leq 1\}$, por lo cual

$$\rho_{\kappa\varphi}(f) \leq k.$$

*b*) Supongamos que $\rho_{\kappa\varphi}(f) \neq k$, entonces $\rho_{\kappa\varphi}(f) > k$ ó $\rho_{\kappa\varphi}(f) < k$.
Luego, por la parte anterior se tiene que $\kappa\varphi V^W(f) > 1$ ó $\kappa\varphi V^W(f) < 1$ respectivamente, siendo en ambos casos una contradicción. Por lo tanto, $\rho_{\kappa\varphi}(f) = k$.

4. Si $\rho_{\kappa\varphi}(f) = 0$, entonces por 3 (a) $\kappa\varphi V^W(f/k) \leq 1$ para $k > 0$. Por otro lado, $\kappa\varphi V^W(\cdot)$ es un funcional convexo y $\dfrac{1}{k} < 1$, entonces

$$\kappa\varphi V^W\left(\frac{f}{k}\right) \leq \frac{1}{k}\kappa\varphi V^W(f) < 1.$$

Equivalentemente

$$\kappa\varphi V^W(f) \le k, \quad 0 < k < 1.$$

Lo cual implica que $\kappa\varphi V^W(f)$ es cota inferior del conjunto $\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f) \le 1\}$, en otras palabras

$$\kappa\varphi V^W(f) \le \rho_{\kappa\varphi}(f).$$

Si $0 < \rho_{\kappa\varphi}(f) \le 1$, entonces $1 \le \dfrac{1}{\rho_{\kappa\varphi}(f)}$. Dado que $\varphi$ es convexa, obtenemos que

$$\kappa\varphi V^W(f) = \kappa\varphi V^W\left(\frac{\rho_{\kappa\varphi}(f)}{\rho_{\kappa\varphi}(f)}f\right) \le \rho_{\kappa\varphi}(f)\kappa\varphi V^W\left(\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi}(f)}\right).$$

Por consiguiente,

$$\frac{\kappa\varphi V^W(f)}{\rho_{\kappa\varphi}(f)} \le \kappa\varphi V^W\left(\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi}(f)}\right) \le 1,$$

y

$$\kappa\varphi V^W(f) \le \rho_{\kappa\varphi}(f).$$

5. Si $k \in \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \le 1\}$, entonces $\kappa\varphi V^W(f/k) \le 1$.
   Por lo tanto $\rho_{\kappa\varphi}(f) \le k$, en consecuencia $k \in (\rho_{\kappa\varphi}(f), \infty)$.

   Si $k \in (\rho_{\kappa\varphi}(f), \infty)$, entonces $\rho_{\kappa\varphi}(f) < k < \infty$, equivalentemente $\dfrac{1}{\rho_{\kappa\varphi}(f)} > \dfrac{1}{k}$, como $\varphi$ es no-decreciente

   $$\kappa\varphi V^W\left(\frac{f}{k}\right) < \kappa\varphi V^W\left(\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi}(f)}\right) \le 1, \quad \text{por (3)}$$

   Por lo tanto, $\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \le 1\} = (\rho_{\kappa\varphi}(f), \infty)$.

□

**Observación 2.3.** Por la primera parte del Lema anterior, se sigue que

$$|f| \le |f(a)| + \varphi^{-1}(3)\rho_{\kappa\varphi}(f), \quad \text{para toda} \quad f \in \kappa\varphi BV^W([a,b]),$$

pues $|f(t) - f(a)| \le \varphi^{-1}(3)\rho_{\kappa\varphi}(f)$.

**Teorema 2.4.** *Si $\varphi \in \Phi$ es convexa, entonces el espacio $\kappa\varphi BV_0^W([a,b])$ con la norma*

$$\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}^W(\cdot) = \rho_{\kappa\varphi}(\cdot)$$

*es un espacio normado.*

*Demostración.* Verifiquemos si $\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}^W = \rho_{\kappa\varphi}(\cdot)$, define una norma en $\kappa\varphi BV_0^W([a,b])$.

1. Si $f \equiv 0$, entonces $\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W = \text{ínf}\{\epsilon : \kappa\varphi V^W(0) \le 1\} = 0$. Recíprocamente si $\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W = 0$ entonces por el Lema 2.3 parte (4)

   $$\kappa\varphi V_0^W(f) \le \rho_{\kappa\varphi}(f) = 0$$

por lo tanto $\kappa\varphi V_0^W(f) = 0$ y esto pasa si, y sólo si, $f$ es constante.

2. $\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W \geq 0$, para todo $f \in \kappa\varphi BV_0^W([a,b])$ por definición de $\rho_{\kappa\varphi}(f)$.

3. Veamos si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que $\|\alpha f\|_{\kappa\varphi,0}^W = \alpha\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W$.
   Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in \kappa\varphi BV_0^W([a,b])$ tal que $\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W \neq 0$. Por Lema 2.2 existe $\epsilon$ suficientemente pequeño tal que
$$\kappa\varphi V_0^W\left(\frac{|\alpha|f}{\epsilon}\right) \leq \epsilon.$$
   Equivalentemente,
$$\kappa\varphi V^W\left(\frac{f}{\epsilon/|\alpha|}\right) \leq 1,$$
   en consecuencia $\dfrac{\epsilon}{|\alpha|} \in \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \leq 1\}$, lo cual implica que
$$|\alpha|\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W \leq 1.$$
   Así, $|\alpha|\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W$ es una cota inferior del conjunto $\{\epsilon : \kappa\varphi V^W(|\alpha|f/\epsilon) \leq 1\}$; esto es,
$$|\alpha|\|f\|_{\kappa\varphi,0} \leq \|\alpha f\|_{\kappa\varphi,0}^W. \tag{2.4}$$
   Por otro lado, por Proposición 2.1, resulta
$$\kappa\varphi V^W\left(\frac{\alpha f}{|\alpha|\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W}\right) = \kappa\varphi V^W\left(\frac{|\alpha|f}{|\alpha|\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W}\right) = \kappa\varphi V^W\left(\frac{f}{\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W}\right) \leq 1.$$
   Es decir,
$$|\alpha|\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W \in \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi V^W(\alpha f/\epsilon) \leq 1\}.$$
   Y, por lo tanto
$$\|\alpha f\|_{\kappa\varphi,0}^W \leq |\alpha|\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W. \tag{2.5}$$
   De 2.4 y 2.5, se sigue que $\|\alpha f\|_{\kappa\varphi,0}^W = \alpha\|f\|_{\kappa\varphi,0}^W$, para toda $f \in \kappa\varphi BV_0^W([a,b])$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. (Desigualdad triangular)
   Sean $f, g \in \kappa\varphi BV_0^W([a,b])$. Si $f = 0$ ó $g = 0$, entonces
$$\|f + g\|_{\kappa\varphi,0}^W = \|f\|_{\kappa\varphi,0}^W + \|g\|_{\kappa\varphi,0}^W.$$

Supongamos que $f \neq 0$ y $g \neq 0$. Notemos que

$$\frac{\rho_{\kappa\varphi}(f)}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}+\frac{\rho_{\kappa\varphi}(g)}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}=1.$$

Dado que $\rho_{\kappa\varphi}(f)>0$ y $\rho_{\kappa\varphi}(g)>0$, y por Lema 2.3, tenemos

$$\kappa\varphi V^W\left(\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi}(f)}\right)\leq 1 \quad \text{y} \quad \kappa\varphi V^W\left(\frac{g}{\rho_{\kappa\varphi}(g)}\right)\leq 1.$$

Como $\kappa\varphi V^W(\cdot)$ es un funcional convexo en $\kappa\varphi BV_0^W([a,b])$, resulta

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W\left(\frac{f+g}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}\right) &= \kappa\varphi V^W\left(\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}+\frac{g}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}\right)\\
&= \kappa\varphi V^W\left(\frac{\rho_{\kappa\varphi}(f)}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi}(f)}\right.\\
&\qquad \left.+\frac{\rho_{\kappa\varphi}(g)}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}\frac{g}{\rho_{\kappa\varphi}(g)}\right)\\
&\leq \frac{\rho_{\kappa\varphi}(f)}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}\kappa\varphi V^W\left(\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi}(f)}\right)\\
&\qquad +\frac{\rho_{\kappa\varphi}(g)}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}\kappa\varphi V^W\left(\frac{g}{\rho_{\kappa\varphi}(g)}\right)\\
&\leq \frac{\rho_{\kappa\varphi}(f)}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}+\frac{\rho_{\kappa\varphi}(g)}{\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)\in\{\epsilon>0 : \kappa\varphi V^W((f+g)/\epsilon)\leq 1\}.$$

Y, por lo tanto,

$$\|f+g\|^W_{\kappa\varphi,0}=\rho_{\kappa\varphi}(f+g)\leq\rho_{\kappa\varphi}(f)+\rho_{\kappa\varphi}(g)=\|f\|^W_{\kappa\varphi,0}+\|g\|^W_{\kappa\varphi,0}.$$

□

**Proposición 2.4.** *Para toda función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y todo $\alpha\in\mathbb{R}$*

$$\kappa\varphi V^W(f+\alpha)=\kappa\varphi V^W(f),$$

*es decir, $\kappa\varphi V^W(\cdot)$ es invariante por traslación.*

*Demostración.* Sea $\xi=\{t_i\}_{i=1}^n$ partición de [a,b], entonces

$$
\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W(f+\alpha) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|(f+\alpha)(t_i)-(f+\alpha)(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi,[a,b])} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|(f(t_i)+\alpha-f(t_{i-1})-\alpha|))}{\sum \kappa(\xi,[a,b])} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i)-f(t_{i-1}))}{\sum \kappa(\xi,[a,b])} \\
&= \kappa\varphi V^W(f).
\end{aligned}
$$

□

Definamos ahora en el espacio $\kappa\varphi BV^W([a,b])$ la función $\|\cdot\|^W_{\kappa\varphi} : \kappa\varphi BV^W([a,b]) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|^W_{\kappa\varphi} := |f(a)| + \rho_{\kappa\varphi}(f-f(a)),$$

donde $\rho_{\kappa\varphi}(f-f(a)) = \inf\{\epsilon : \kappa\varphi V^W((f-f(a))/\epsilon) \leq 1\} = \inf\{\epsilon : \kappa\varphi V^W(f/\epsilon) \leq 1\} = \rho_{\kappa\varphi}(f)$.

Así,

$$\|f\|^W_{\kappa\varphi} = |f(a)| + \rho_{\kappa\varphi}(f).$$

Del Teorema anterior se deriva el siguiente resultado.



**Teorema 2.5.** *Si $\varphi \in \Phi$ es convexa, entonces $\|\cdot\|^W_{\kappa\varphi}$ define una norma sobre el espacio de funciones $\kappa\varphi BV^W([a,b])$.*

*Demostración.* Verifiquemos que $\|\cdot\|^W_{\kappa\varphi}$ es una norma.

1. $\|f\|^W_{\kappa\varphi} \geq 0$ para todo $f \in \kappa\varphi BV^W([a,b])$, pues $|f(a)| \geq 0$ y $\rho_{\kappa\varphi}(f) \geq 0$.

2. $\|f\|^W_{\kappa\varphi} = 0$ si, y sólo si $f = 0$. En efecto;

   Si $f = 0$, entonces $f(a) = 0$ y $\rho_{\kappa\varphi}(f) = 0$, por lo tanto $\|f\|^W_{\kappa\varphi} = 0$.
   Si $\|f\|^W_{\kappa\varphi} = 0$, entonces $|f(a)| = 0$ y $\rho_{\kappa\varphi}(f) = 0$, por la parte 3) del Lema 2.3 se deduce que

   $$0 \leq \kappa\varphi V^W(f) \leq \|f\|^W_{\kappa\varphi} = 0$$

   entonces

   $$\kappa\varphi V^W(f) = 0.$$

   Así, $f$ es constante, por lo tanto $f(t) = f(a) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.

3. $\|\alpha f\|^W_{\kappa\varphi} = |\alpha|\|f\|^W_{\kappa\varphi}$. En efecto;

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|^W_{\kappa\varphi} &= |\alpha f(a)| + \rho_{\kappa\varphi}(\alpha(f - f(a))) \\
&= |\alpha||f(a)| + \|\alpha(f - f(a))\|^W_{\kappa\varphi,0} \\
&= |\alpha||f(a)| + |\alpha|\|(f - f(a))\|^W_{\kappa\varphi,0} \\
&= |\alpha|(|f(a)| + \|(f - f(a))\|^W_{\kappa\varphi,0}) \\
&= |\alpha|(|f(a)| + \rho_{\kappa\varphi}((f - f(a)))) \\
&= |\alpha|\|f\|^W_{\kappa\varphi}.
\end{aligned}$$

4. (Desigualdad triangular.)

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^W_{\kappa\varphi} &= |(f+g)(a)| + \rho_{\kappa\varphi}(((f+g) - (f+g)(a))) \\
&= |(f+g)(a)| + \|(f - f(a)) + (g - g(a))\|^W_{\kappa\varphi,0} \\
&\leq |f(a)| + |g(a)| + \rho_{\kappa\varphi}(f+g) \\
&\leq |f(a)| + |g(a)| + \rho_{\kappa\varphi}(f) + p_{\kappa\varphi}(g) \\
&= \|f\|^W_{\kappa\varphi} + \|g\|^W_{\kappa\varphi}.
\end{aligned}$$

□



Hemos mostrado que los espacios $\kappa\varphi BV^W_0([a,b])$ y $\kappa\varphi BV^W([a,b])$ son espacios normados, ahora mostraremos que dichos espacios resultan ser completos con las normas que hemos definido; es decir, mostraremos que son espacios de Banach. Antes de mostrar dicha afirmación es conveniente mostrar primero el siguiente Lema.

**Lema 2.4.** *Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $(\kappa\varphi BV^W([a,b], \|\cdot\|^W_{\kappa\varphi})$, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy con la norma $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy.*

*Demostración.* Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(\kappa\varphi BV^W_0([a,b])$; es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon$ tal que

$$\|f_n - f_m\|^W_{\kappa\varphi,0} < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad m,n \geq N_\epsilon.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\|f_n - f_m\|^W_{\kappa\varphi,0}}{\epsilon} \leq 1 \quad \text{siempre que} \quad m,n \geq N_\epsilon$$

En otras palabras,

$$\rho_{\kappa\varphi}(f_n - f_m) < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad m,n \geq N_\epsilon.$$

Por Lema 2.3 parte (c), se tiene que

$$\kappa\varphi V^W((f_n - f_m)/\epsilon) \leq 1.$$

En particular, para la partición $a = t_0 < t_1 = t = b$, resulta que

$$\frac{\varphi\left(|(f_n - f_m)(t)|/\epsilon\right)}{\sum \kappa\left(\xi, [a,b]\right)} \leq 1.$$

Entonces,

$$\varphi\left(\frac{|(f_n - f_m)(t)|}{\epsilon}\right) \leq 3 \quad \text{para todo} \quad t \in [a,b]$$

Y, así,

$$\|(f_n - f_m)(t)\| \leq \varphi^{-1}(3)\epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varphi^{-1}(3)\epsilon.$$

Lo que muestra que $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ con $\|\cdot\|_\infty$. □

**Teorema 2.6.** *Si $\varphi \in \Phi$ es convexa y $\kappa \in \mathcal{K}$, entonces $(\kappa\varphi BV_0^W([a,b]), \|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}^W)$ es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $((\kappa\varphi BV_0^W([a,b])$, por Lema 2.4 $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy en $\mathbb{R}$.
$(f_n)_{n\geq 1}$ converge en $\mathbb{R}$ pues $\mathbb{R}$ es completo; esto es,



$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Consideremos la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

f esta bien definida por (2.6). Para cada $x \in [a,b]$, se cumple por la definición de límite que, para cada $\epsilon > 0$ existe un entero $N_\epsilon$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad n \geq N_\epsilon.$$

En consecuencia,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n'}(x)| + |f_{n'}(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n, n' \geq N_\epsilon.$$

Lo que quiere decir que,

$$f_n(x) \quad \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}} \quad f(x).$$

Veamos que

$$f_n(x) \quad \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}^W}} \quad f(x).$$

Sea $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$ partición de [a,b], entonces

$$
\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W\left(\frac{f_n - f}{\epsilon}\right) &= \sup \frac{\sum \varphi\left(\frac{(f_n - f)(t_i) - (f_n - f)(t_{i-1})}{\epsilon}\right)}{\sum \kappa(\xi,[a,b])} \\
&= \sup \frac{\sum \varphi\left(\frac{f_n(t_i) - f_n(t_{i-1})}{\epsilon} - \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{\epsilon}\right)}{\sum \kappa(\xi,[a,b])} \\
&= \sup \frac{\sum \varphi\left(\frac{f_n(t_i) - f_n(t_{i-1})}{\epsilon} - \lim_{n' \to \infty} \frac{f_{n'}(t_i) - f_{n'}(t_{i-1})}{\epsilon}\right)}{\sum \kappa(\xi,[a,b])}. \\
&= \sup \lim_{n' \to \infty} \frac{\sum \varphi\left(\frac{f_n(t_i) - f_n(t_{i-1})}{\epsilon} - \frac{f_{n'}(t_i) - f_{n'}(t_{i-1})}{\epsilon}\right)}{\sum \kappa(\xi,[a,b])} \\
&= \sup \lim_{n' \to \infty} \frac{\sum \varphi\left(\frac{f_n(t_i) - f_n(t_{i-1}) - f_{n'}(t_i) + f_{n'}(t_{i-1})}{\epsilon}\right)}{\sum \kappa(\xi,[a,b])}
\end{aligned}
$$

Por otra parte, tomando $n, n' > N_\epsilon$, tales que

$$\|f_n - f_{n'}\|^W_{\kappa\varphi,0} < \epsilon,$$

se cumple que

$$
\begin{aligned}
1 \geq \kappa\varphi V^W\left(\frac{f_n - f_{n'}}{\epsilon}\right) &= \sup \frac{\sum \varphi(|(f_n - f_{n'})(t_i) - (f_n - f_{n'})(t_{i-1}))|/\epsilon}{\sum \kappa(\xi,[a,b])} \\
&\geq \frac{\sum \varphi(|(f_n - f_{n'})(t_i) - (f_n - f_{n'})(t_{i-1}))|/\epsilon}{\sum \kappa(\xi,[a,b])}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$1 \geq \lim_{n' \to \infty} \frac{\sum \varphi\left(\frac{|f_n(t_i) - f_n(t_{i-1}) - f_{n'}(t_i) + f_{n'}(t_{i-1})|}{\epsilon}\right)}{\sum \kappa(\xi,[a,b])}.$$

Esto es cierto para cualquier partición $\xi$ de $[a,b]$, por lo tanto

$$1 \geq \kappa\varphi V^W\left((f_n - f)/\epsilon\right),$$

siempre que $n \geq N_\epsilon$. Por lo cual

$$\frac{f_n - f}{\epsilon} \in \kappa\varphi BV^W([a,b]).$$

Por lo tanto, $f \in \kappa\varphi BV^W([a,b])$. Quedando así, demostrado que $\kappa\varphi BV_0^W([a,b])$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|^W_{\kappa\varphi,0}$.

$\square$

**Teorema 2.7.** *Si $\varphi \in \Phi$ es convexa, entonces $((\kappa\varphi BV^W([a,b]), \|\cdot\|^W_{\kappa\varphi})$ es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $((\kappa\varphi BV^W([a,b]), \|\cdot\|^W_{\kappa\varphi})$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon$ tal que

$$\|f_n - f_m\|^W_{\kappa\varphi,0} < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad m,n \geq N_\epsilon.$$

Por definición de $\|\cdot\|^W_{\kappa\varphi}$, tenemos

$$|f_n(a) - f_m(a)| + \|(f_n - f_m) - (f_n - f_m)(a)\|^W_{\kappa\varphi,0} < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n,m > N_\epsilon$$

Haciendo $g_n = f_n - f(a)$ para $n \geq 1$, resulta

$$\|g_n - g_m\|^W_{\kappa\varphi} = \|(f_n - f_n(a) - (g_m - g_m(a))\|^W_{\kappa\varphi,0} < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n,m > N_\epsilon$$

Por lo tanto, $(g_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\kappa\varphi BV^W_0([a,b])$ y por Teorema 2.6 existe $g \in \kappa\varphi BV^W_0([a,b])$ tal que $g_n$ converge a $g$.
Por otro lado, $|f_n(a) - f_m(a)| < \epsilon$ para todo $n,m > N_\epsilon$; es decir, la sucesión es de Cauchy en $\mathbb{R}$, y dado que $\mathbb{R}$ es completo, existe $f_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(a) \xrightarrow{n\to\infty} f_0.$$

Sea $f = f_0 + g$, entonces $f \in \kappa\varphi BV^W([a,b])$, pues $f_0, g \in \kappa\varphi BV^W_0([a,b])$.

Además,

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|^W_{\kappa\varphi} &= |f_n(a) - f(a)| + \|(f_n - f) - (f_n - f)(a)\|^W_{\kappa\varphi,0} \\ &= |f_n(a) - f(a)| + \|g_n - g\|^W_{\kappa\varphi,0} \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

Así, $f_n$ converge a $f$ con la norma $\|\cdot\|^W_{\kappa\varphi}$. Lo que muestra que $((\kappa\varphi BV^W([a,b]), \|\cdot\|^W_{\kappa\varphi})$ es un espacio de Banach. □

En los siguientes resultados establecemos algunas relaciones entre estas familias de funciones.

**Teorema 2.8.** *Sean $\kappa$, $\kappa_1$, $\kappa_2 \in \mathcal{K}$ y $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2 \in \Phi$. Entonces*

1. *Para $\varphi$ fija y $\kappa_1 \leq \kappa_2$ se tiene que $\kappa_1\varphi BV^W[a,b] \subset \kappa_2\varphi BV^W[a,b]$.*

2. *Para $\kappa$ fija y $\varphi_2 \leq \varphi_1$, se tiene que $\kappa\varphi_1 BV^W[a,b] \subset \kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$.*

3. *Si $\kappa_1 \leq \kappa_2$ y $\varphi_2 \leq \varphi_1$, entonces $\kappa_1\varphi_1 BV^W[a,b] \subset \kappa_2\varphi_2 BV^W[a,b]$.*

*Demostración.*

1. Sea $f \in \kappa_1\varphi BV^W[a,b]$ y $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$ partición de [a,b]. Dado que $\kappa_1(t) \leq \kappa_2(t)$ para todo $t \in [0,1]$, tenemos

$$\frac{\sum_{i=1}^n \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa_2(\xi;[a,b])} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa_1(\xi;[a,b])}.$$

Dado que la desigualdad anterior es cierta para cualquier partición de [a,b], tenemos

$$\sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa_2(\xi;[a,b])} \leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa_1(\xi;[a,b])} < \infty.$$

Así, $f \in \kappa_2\varphi BV^W[a,b]$, por lo tanto $\kappa_1\varphi BV^W[a,b] \subset \kappa_2\varphi BV^W[a,b]$.

2. Sea $f \in \kappa\varphi_1 BV^W[a,b]$ y $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$ partición de [a,b]. Dado que $\varphi_2 \leq \varphi_1$, tenemos

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_2(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])},$$

lo cual resulta ser cierta para cualquier partición de [a,b], tomando supremo a ambos lados de la desigualdad anterior, se tiene

$$\sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_2(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} < \infty.$$

Por lo tanto $f \in \kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$, esto muestra que $\kappa\varphi_1 BV^W[a,b] \subset \kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$.

3. Sea $f \in \kappa_1\varphi_1 BV^W[a,b]$ y $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$ partición de [a,b]. Dado que $\kappa_1 \leq \kappa_2$ y $\varphi_2 \leq \varphi_1$, se tiene

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_2(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa_2(\xi;[a,b])} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa_1(\xi;[a,b])}.$$

Siendo esto válido para cualquier partición de [a,b], se concluye que

$$\sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_2(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa_2(\xi;[a,b])} \leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)}{\sum \kappa_1(\xi;[a,b])} < \infty.$$

Por lo tanto, $f \in \kappa_2\varphi_2 BV^W[a,b]$; esto es, $\kappa_1\varphi_1 BV^W[a,b] \subset \kappa_2\varphi_2 BV^W[a,b]$.

□

**Teorema 2.9.** *Sea $\kappa \in \mathcal{K}$ y $\varphi_1$, $\varphi_2 \in \Phi$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\kappa\varphi_1 BV^W[a,b] \subset \kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$;
2. *$\varphi_2 \prec \varphi_1$ globalmente (es decir, existe una constante $C$ positiva tal que $\varphi_2(t) \leq \varphi(Ct)$ para $t \geq 0$);*
3. *Existe una constante $C$ tal que $\|f\|_{\kappa\varphi_2}^W \leq C\|f\|_{\kappa\varphi_1}^W$.*

**Demostración 1.** 1) $\Rightarrow$ 2). Supongamos que $\varphi_1$ no domina globalmente a $\varphi_2$; es decir, para toda constante $C > 0$ existe $t > 0$ tal que $\varphi_2(t) > \varphi_1(Ct)$. De acuerdo con esto, existe una sucesión $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ estrictamente creciente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$ y $\varphi_2(t_n) > \varphi_1(2^{2n}nt_n)$. Como $\varphi$ es convexa y $2^n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 1.6, resulta

$$\varphi_1(nt_n) = \varphi_1\left(\frac{1}{2^{2n}}2^{2n}nt_n\right) \leq \frac{1}{2^{2n}}\varphi_1(2^{2n}nt_n).$$

Por lo que,

$$2^{2n}\varphi_1(nt_n) \leq \varphi(2^{2n}nt_n) < \varphi_2(t_n).$$

Por otra parte, sea $\{I_n\}$ un sucesión de intervalos no solapados de $[a,b]$ tales que

$$|I_n| = \frac{b-a}{2^n}\frac{\varphi_1(t_1)}{\varphi_1(nt_n)},$$

siendo posible tal sucesión, puesto que

$$\sum |I_n| = \sum \frac{b-a}{2^n}\frac{\varphi_1(t_1)}{\varphi_1(nt_n)} < \sum \frac{b-a}{2^n} = b-a,$$

ya que $\dfrac{\varphi_1(t_1)}{\varphi_1(nt_n)} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} nt_n & \text{si } x \in I_n,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases} \tag{2.7}$$

Mostremos que $f \in \kappa\varphi_1 BV^W[a,b]$. Para cualquier partición de [a,b] se sigue que

$$\frac{\sum \varphi_1(f(I_n))}{\sum \kappa(I_n,[a,b])} = \frac{\sum \varphi_1(nt_n)|I_n|}{\sum \kappa(I_n,[a,b])} \leq \sum \frac{1}{2^n}\varphi_1(t_1)|b-a| < \infty.$$

Por lo tanto, $f \in \kappa\varphi_1 BV^W[a,b]$. Pero $f \notin \kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$. En efecto; mostremos que para $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha f \notin \kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$, para ello, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha m > 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{n=1} \varphi_2(\alpha(f(I_n)))}{\sum \kappa(I_n,[a,b])} &= \frac{\sum\limits_{n=1} \varphi_2(\alpha nt_n)|I_n|}{\sum \kappa(I_n,[a,b])} \\
&\geq \frac{\sum\limits_{n=m} \varphi_2(t_n)|I_n|}{\sum \kappa(I_n,[a,b])} \\
&> \frac{\sum\limits_{n=m} 2^{2n}\varphi_1(nt_n)|I_n|}{\sum \kappa(I_n,[a,b])} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=m} 2^{n}\varphi_1(t_1)|b-a|}{\sum \kappa(I_n,[a,b])} = \infty.
\end{aligned}$$

Esto contradice que $\kappa\varphi_1 BV^W[a,b] \subset \kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$, por lo tanto $\varphi_1$ domina globalmente a $\varphi_2$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $f \in \kappa\varphi_1 BV^W[a,b]$. Por hipótesis existe $C > 0$ tal que $\varphi_2(t) \leq \varphi_1(Ct)$ para todo $t \geq 0$.
Dado $\lambda \in \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_1 V^W((Cf)/\epsilon) \leq 1\}$, entonces $\kappa\varphi_1 V^W((Cf)/\lambda) \leq 1$. Para cualquier partición $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$ de $[a,b]$, vale

$$1 \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(|Cf(t_i) - Cf(t_{i-1})|/\lambda)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_2(|Cf(t_i) - Cf(t_{i-1})|/\lambda)}{\sum \kappa(\xi;[a,b])}.$$

Lo que implica que $\lambda \in \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_2 V^W((f)/\epsilon) \leq 1\}$, así

$$\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_1 V^W((Cf)/\epsilon) \leq 1\} \subset \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_2 V^W((f)/\epsilon) \leq 1\}.$$

En consecuencia,

$$\inf\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_2 V^W((f)/\epsilon) \leq 1\} \leq \inf\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_1 V^W((Cf)/\epsilon) \leq 1\}.$$

Lo que quiere decir que $\|f\|^W_{\kappa\varphi_2} \leq \|Cf\|^W_{\kappa\varphi_1} = C\|f\|^W_{\kappa\varphi_1}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $f \in \kappa\varphi_1 BV^W[a,b]$. Dado que $\|f\|^W_{\kappa\varphi_2} \leq C\|f\|^W_{\kappa\varphi_1}$, para algún $C > 0$, entonces el conjunto $\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_2 V^W((f)/\epsilon) \leq 1\}$ es distinto de vacío, por tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\kappa\varphi_2 V^W((f)/\epsilon) \leq 1.$$

Luego, por ser $\kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$ un espacio vectorial $\dfrac{f}{\epsilon} \in \kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$. Por lo tanto, $f \in \kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$. Y, así, queda mostrado que $\kappa\varphi_1 BV^W[a,b] \subset \kappa\varphi_2 BV^W[a,b]$.

## 2.4. Funciones $\kappa\varphi$-decrecientes

En esta sección presentamos algunos resultados desarrollados en [22].

**Definición 2.7.** Sea $f$ un función definida en un intervalo [a,b]. Se dice que $f$ es $\kappa\varphi$-decreciente en [a,b] si existe una constante positiva $C$ tal que

$$\varphi(|f(I)|) \leq C\kappa\left(\frac{|I|}{b-a}\right),$$

para cualquier intervalo $I = [x,y] \subset [a,b]$, donde $f(I) = f(y) - f(x)$ y $|I| = y - x$.

Sabemos que toda función decreciente es de variación acotada y que toda función $\kappa$-decreciente es de $\kappa$-variación acotada, el siguiente Teorema extiende este hecho para las funciones $\kappa\varphi$-decrecientes.

**Teorema 2.10.** *Si $f$ es $\kappa\varphi$-decreciente en [a,b], entonces $f \in \kappa\varphi BV^W[a,b]$.*

*Demostración.* Sea $f$ $\kappa\varphi$-decreciente en [a,b], entonces por definición existe una constante $C$ positiva tal que

$$\varphi(|f(t)-f(s)|) \leq C\kappa\left(\frac{|t-s|}{b-a}\right),$$

para $a \leq t < s \leq b$. Luego, para cualquier partición $\xi : a = t_0 < t_1 \ldots t_n = b$ vale,

$$\varphi(|f(t_i)-f(t_{i-1})|) \leq C\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}|}{b-a}\right),$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(|f(t_i)-f(t_{i-1})|) \leq C\sum_{i=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}|}{b-a}\right),$$

lo cual es cierto para cualquier partición de intervalo [a,b]y como $\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}|}{b-a}\right) \geq 1$ resulta que $\kappa\varphi V^W(f) \leq C$, por lo tanto, $f$ es de $\kappa\varphi$-variación acotada, *en el sentido de Wiener.*

□

**Lema 2.5.** *Si $f$ es $\kappa\varphi$-decreciente en [a,b], entonces para cada $a \leq x < b$ y $a < z \leq b$,*

$$f(z^+) = \lim_{t\to z^+} f(t)$$

*y*

$$f(z^-) = \lim_{t\to z^-} f(t),$$

*existen.*

*Demostración.* Sea $B = \overline{\lim}_{t\to x^+} f(t)$ y $A = \underline{\lim}_{t\to x^+} f(t)$. De las propiedades de límites $B \geq A$. Consideremos $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{x'_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesiones que convergen a $z$ tales que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$ y $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = A$.

Podemos suponer sin perdida de generalidad que $x_1 > x'_1 > x_2 > x'_2 > \ldots x_n > x'_n > \ldots$, entonces como $f$ es $\kappa\varphi$-decreciente,

$$\varphi(|f(x_n)-f(x'_n)|) \leq C\kappa\left(\frac{x_n-x'_n}{b-a}\right).$$

Tomando límite a ambos lados de la desigualdad y teniendo en cuenta que $\varphi$ y $\kappa$ son funciones continuas, tenemos $\varphi(|B-A|) \leq 0$, lo que implica que $|B-A| = 0$, por lo tanto $A = B$, así $f(z^+)$ existe.
Un razonamiento análogo muestra que $f(z^-)$ existe. □

Como consecuencia del Lema anterior tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.11.** *Si $f$ es una función $\kappa\varphi$-decreciente en el intervalo [a,b], entonces $f$ es continua en [a,b].*

*Demostración.* Sea $a \leq x < x_0 < y \leq b$. Dado que $f$ es $\kappa\varphi$-decreciente en [a,b], se tiene que

$$\varphi(|f(x)-f(x_0)|) \leq C\kappa\left(\frac{x-x_0}{b-a}\right)$$

y

$$\varphi(|f(y) - f(x_0)|) \leq C\kappa\left(\frac{y - x_0}{b - a}\right).$$

Haciendo $x \to x_0$ y $y \to x_0$ y por ser $\varphi$ y $\kappa$ continuas,

$$\varphi(|f(x^+) - f(x_0)|) \leq 0 \quad \text{y} \quad \varphi(|f(y^-) - f(x_0)|) \leq 0,$$

por el Lema anterior $f(x^+)$ y $f(x^-)$ existen, en consecuencia $|f(x^+) - f(x_0)| = 0$ y $|f(x^-) - f(x_0)| = 0$, por lo tanto $f(x^+) = f(x^-) = f(x_0)$, así $f$ es continua.

□

Capítulo 3

# Funciones de $\kappa\varphi$-Wiener-Variación Acotada en $\mathbb{R}^2$

Luego de que Camille Jordan introdujera la noción de función de variación acotada, diversos autores se dedicaron a generalizar el concepto a funciones de más de una variable. El primer avance exitoso en la generalización del concepto a funciones de varias variables se debe a Arzelá [4] y a Hardy [13], quienes en 1905 extienden el concepto a funciones definidas en dos variables. Posteriormente Vitali [29] también logra extender dicho concepto, cabe destacar que esta generalización también se consideró de forma independiente por Frechet, Lebesgue y De la Vallée Poussin. Otro matemático que contribuyó a esta generalización fue Leonida Tonelli [27], quien introdujo una clase de funciones continuas de variación acotada en 1926, para extender su método directo para encontrar soluciones a los problemas en el cálculo de variaciones en más de una variable, esta variación es llamada comúnmente "variación avión Tonelli", más tarde en 1936 Lamberto Cesari [16] cambió la condición de continuidad por integrabilidad, una condición menos restrictiva, obteniendo así la clase de funciones de variación acotada en varias variables en toda su generalidad. Esta extensión del concepto de variación acotada es utilizada a menudo para estudiar, series de Fourier en varias variables, la teoría geométrica de la medida, cálculo de variaciones, entre otras.

Basado en las técnicas utilizadas por Chistyakov en [6] en el estudio que realizó sobre la noción de total variación acotada, dada por Hardy y Vitali, nos proponemos, en este capítulo, extender la noción de función de $\kappa\varphi$-Wiener-Variación Acotada a funciones definidas en un rectángulo. Siendo éste el objetivo principal de este trabajo de grado.

## 3.1. Definición y algunas propiedades

Sean $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ con $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$, denotaremos por $I_a^b$ al rectángulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$, y por $\mathbb{R}^{I_a^b}$ al espacio de todas las funciones $f : I_a^b \to \mathbb{R}$.

Para $\xi : a_1 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_m = b_1$ y $\eta : a_2 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = b_2$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente, y $f \in \mathbb{R}^{I_a^b}$, definamos

$$\begin{aligned}
\Delta_{10} f(t_i, s_j) &= f(t_i, s_j) - f(t_{i-1}, s_j). \\
\Delta_{01} f(t_i, s_j) &= f(t_i, s_j) - f(t_i, s_{j-1}). \\
\Delta_{11} f(t_i, s_j) &= f(t_{i-1}, s_{j-1}) - f(t_{i-1}, s_j) - f(t_i, s_{j-1}) + f(t_i, s_j).
\end{aligned}$$

**Definición 3.1.** Sean $\kappa \in \mathcal{K}$, $\varphi \in \Phi$ y $f \in \mathbb{R}^{I_a^b}$,

1. Para $x_2 \in [a_2, b_2]$ fijo. Denotaremos mediante $\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) = \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f(\cdot, x_2))$ la $\kappa\varphi$-Wiener-variación horizontal de la función $f(\cdot, x_2)(t) = f(t, x_2)$ en $[a_1, b_1]$ por

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) := \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\Delta_{10} f(t_i, x_2))|}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])},$$

donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\xi$ de $[a_1, b_1]$. Ver figura 3.1

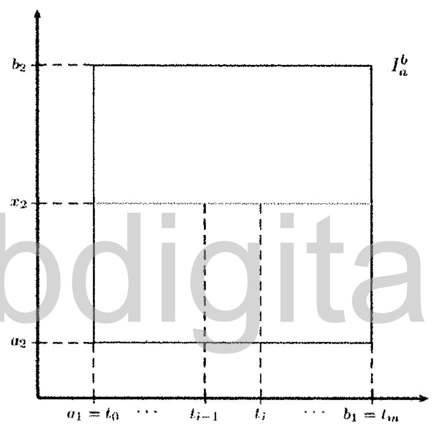


Figura 3.1: $\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f)$-Variación horizontal.

2. Para $x_1 \in [a_1, b_1]$ fijo. Denotaremos mediante $\kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) = \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f(x_1, \cdot))$ la $\kappa\varphi$-Wiener-variación vertical de la función $f(x_1, \cdot)(s) = f(x_1, s)$ en $[a_2, b_2]$ por

$$\kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) := \sup \frac{\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{01} f(x_1, s_j))|}{\sum \kappa(\eta; [a_2, b_2])},$$

donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $\eta$ de $[a_2, b_2]$. Ver figura 3.2

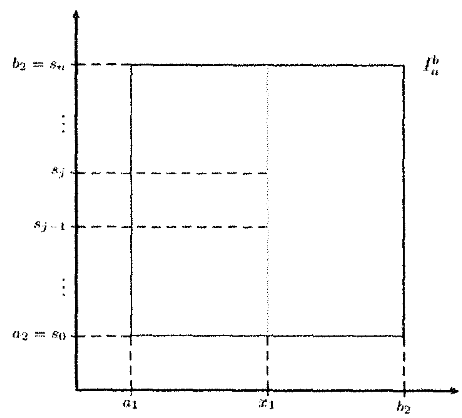


Figura 3.2: $\kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f)$-Variación vertical.

3. Definamos la $\kappa\varphi$-Wiener-variación, en dos dimensiones de la función $f$, la cual es denotada por $\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f)$, por

$$\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f) := \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11} f(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)},$$

donde el supremo es considerado sobre todas las particiones $(\xi, \eta)$ de $I_a^b$. (ver Figura 3.3)

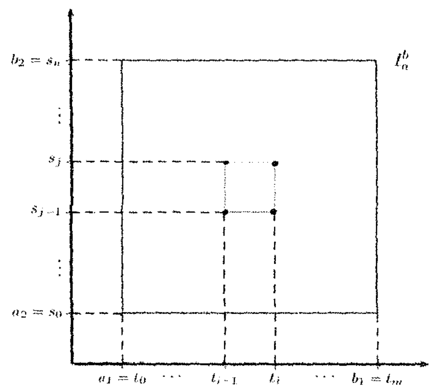


Figura 3.3: $\kappa\varphi V^W_{[I_a^b]}(f)$-Variación bidimensional.

**Definición 3.2.** Si $f \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ definiremos la $\kappa\varphi$-Wiener-variación total de $f$ y la denotaremos por $\kappa\varphi TV^W(f) = TV^W(f, I_a^b)$, por

$$\kappa\varphi TV^W(f) := \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f(\cdot, a_2)) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f(a_1,\cdot)) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f).$$



Diremos que la función $f$ es de $\kappa\varphi$-Wiener-variación total acotada ó $\kappa\varphi$-Wiener-variación finita en $I_a^b$ si

$$\kappa\varphi TV^W(f) < \infty.$$

Designaremos por $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ al conjunto de todas las funciones $f \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ que tienen $\kappa\varphi$-Wiener-variación total acotada; es decir,

$$\kappa\varphi V^W(I_a^b) = \{f \in \mathbb{R}^{I_a^b} : \kappa\varphi TV^W(f) < \infty\}.$$

**Observación 3.1.** De la definición 3.2, se sigue que el conjunto $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ es no vacío, ya que al menos contiene a las funciones constantes (la $\kappa\varphi$-variación de esta función es cero).

Comenzaremos el estudio sistemático de la clase de funciones $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$, deduciendo algunas propiedades que se derivan de la definición 3.2.

**Proposición 3.1.** *Sea $\kappa \in \mathcal{K}$, $\varphi \in \Phi$. Entonces*

1. $\kappa\varphi TV^W(f) \geq 0$ *para toda* $f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$.
2. *El funcional* $\kappa\varphi TV^W(\cdot) : \kappa\varphi V^W(I_a^b) \to \mathbb{R}$ *es par; es decir,* $\kappa\varphi TV^W(-f) = \kappa\varphi TV^W(f)$.
3. $\kappa\varphi TV^W(f) = 0$ *si, y sólo si,* $f$ *es una función constante.*
4. *Si* $f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$, *entonces* $f$ *es acotada en* $I_a^b$.

5. *Si $\varphi$ es convexa, entonces $\kappa\varphi TV^W(\cdot)$ es un funcional convexo.*

*Demostración.*

1. Por definición $\kappa\varphi TV^W(f) = \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f(\cdot,a_2)) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f(a_1,\cdot)) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f)$.

   Cada término de esta suma es no negativo, por lo tanto $\kappa\varphi TV^W(f) \geq 0$, para toda función $f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$.

2. Notemos que

$$|\Delta_{10}(-f(t_i,s_j))| = |\Delta_{10}f(t_i,s_j)|; \quad |\Delta_{01}(-f(t_i,s_j))| = |\Delta_{01}f(t_i,s_j)|$$

   y

$$|\Delta_{11}(-f(t_i,s_j))| = |\Delta_{11}f(t_i,s_j)|.$$

   Lo que implica que

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(-f) = \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f); \quad \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(-f) = \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f)$$

   y

$$\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(-f) = \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f).$$

   De modo que $\kappa\varphi TV^W(-f) = \kappa\varphi TV^W(f)$.

3. Supongamos que $\kappa\varphi TV^W(f) = 0$. De la parte 1) se sigue que

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) = 0, \quad \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) = 0 \quad \text{y} \quad \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f) = 0.$$

   Sean $\xi = \{t_i\}_{i=1}^m$ y $\eta = \{s_j\}_{j=1}^n$ particiones de $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$ respectivamente. De la definición de $\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f)$, tenemos

$$\frac{\sum_{i=1}^m \varphi(|\Delta_{10}f(t_i,a_2)|)}{\sum_{i=1}^m \kappa(\xi;[a_1,b_1])} = 0,$$

   para toda partición $\xi$ de $[a_1,b_1]$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^m \varphi(|\Delta_{10}f(t_i,a_2)|) = 0.$$

   $\varphi$ es una función positiva, así que

$$\varphi(|f(t_i,a_2) - f(t_{i-1},a_2)|) = 0, \quad \text{para} \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad t_i,t_{i-1} \in [a_1,b_1],$$

ya que $\varphi(t) = 0$ si $t = 0$, entonces

$$|f(t_i, a_2) - f(t_{i-1}, a_2)| = 0, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad t_i, t_{i-1} \in [a_1, b_1].$$

En consecuencia

$$f(t_i, a_2) = f(t_{i-1}, a_2), \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{3.1}$$

para toda partición $\xi$ de $[a_1, b_1]$.

De forma similar, para $\kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) = 0$ resulta

$$f(a_1, s_j) = f(a_1, s_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.2}$$

para toda partición $\eta$ de $[a_2, b_2]$.

En particular, para las particiones $\xi : a_1 = t_0 < t_1 = x_1 < t_2 = x_2 < t_3 = b_1$ y $\eta : a_2 = s_0 < s_1 = y_1 < s_2 = y_2 < s_3 = b_2$, de (3.1) y (3.2) se sigue que

$$f(a_1, a_2) = f(t, a_2) = f(a_1, s),$$

para todo $t \in [a_1, b_1]$ y para todo $s \in [a_2, b_2]$, lo que muestra que $f$ es constante en $I^b_a$.

Recíprocamente supongamos que $f$ es una función constante en $I^b_a$, entonces

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) = 0, \quad \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) = 0 \quad \text{y} \quad \kappa\varphi V^W_{I^b_a}(f) = 0.$$

Por lo tanto, $\kappa\varphi TV^W(f) = 0$.

4. Sea $f \in \kappa\varphi TV^W(I^b_a)$. Entonces, existe $M > 0$ tal que $\kappa\varphi TV^W(f) = M$.
De la definición de $\kappa\varphi TV^W(f)$, se obtiene

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) \le M, \quad \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) \le M \quad \text{y} \quad \kappa\varphi V^W_{I^b_a}(f) \le M,$$

para toda partición $\xi$, $\eta$ de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente.

En particular, para las particiones $\xi : \{a_1 = t_0 < t_1 = t < t_2 = b_1\}$ y $\eta : \{a_2 = s_0 < s_1 = s < s_2 = b_2\}$, tenemos

$$\frac{\varphi(|f(t, a_2) - f(a_1, a_2)|) + \varphi(|f(b_1, a_2) - f(t, a_2)|)}{\kappa\left(\dfrac{t - a_1}{b_1 - a_1}\right) + \kappa\left(\dfrac{b_1 - t}{b_1 - a_1}\right)} \le M.$$

Como $\kappa\left(\dfrac{t - a_1}{b_1 - a_1}\right) \le 1$ y $\kappa\left(\dfrac{b_1 - t}{b_1 - a_1}\right) \le 1$ para todo $t \in [a_1, b_1]$, se sigue que

$$\varphi(|f(t, a_2) - f(a_1, a_2)|) + \varphi(|f(b_1, a_2) - f(t, a_2)|) \le 2M.$$

De modo que,

$$|f(t,a_2)-f(a_1,a_2)|+|f(b_1,a_2)-f(t,a_2)|\leq\varphi^{-1}(2M).$$

Por lo tanto,

$$|f(t,a_2)|\leq|f(a_1,a_2)|+\varphi^{-1}(2M) \tag{3.3}$$

para todo $t\in[a_1,b_1]$. De manera análoga, se muestra que

$$|f(a_1,s)|\leq|f(a_1,a_2)|+\varphi^{-1}(2M) \tag{3.4}$$

para todo $s\in[a_2,b_2]$.

De la definición de $V^W_{I_a^b}(f)$ para $i=1$ y $j=1$, resulta

$$\varphi(|\Delta_{11}f(t_1,s_1)|)\leq 4M;$$

esto es,

$$\varphi(|f(a_1,a_2)-f(t,a_2)-f(a_1,s)+f(t,s)|)\leq 4M$$

para todo $(t,s)\in I_a^b$, de donde

$$|f(a_1,a_2)-f(t,a_2)-f(a_1,s)+f(t,s)|\leq\varphi^{-1}(4M).$$



$\varphi^{-1}$ es creciente ya que $\varphi(t)$ es creciente. Así, de (3.3) y (3.4) se sigue que

$$|f(t,a_2)|\leq|f(a_1,a_2)|+\varphi^{-1}(4M),\quad |f(a_1,s)|\leq|f(a_1,a_2)|+\varphi^{-1}(4M)$$

para todo $t\in[a_1,b_1]$ y para todo $s\in[a_2,b_2]$ respectivamente.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|f(t,s)| &= |f(t,a_2)-f(a_1,a_2)+f(a_1,s)-f(a_1,a_2)\\
&\quad +f(a_1,a_2)+f(t,s)-f(a_1,s)-f(t,a_2)+f(a_1,a_2)|\\
&\leq |f(t,a_2)-f(a_1,a_2)|+|f(a_1,s)-f(a_1,a_2)|\\
&\quad +|f(a_1,a_2)+f(t,s)-f(a_1,s)-f(t,a_2)+f(a_1,a_2)|\\
&\leq f(a_1,a_2)+\varphi^{-1}(4M)\\
&= f(a)+\varphi^{-1}(4M),
\end{aligned}$$

para todo $(t,s)\in I_a^b$. Así, $f$ es acotada.

5. Supongamos que $\varphi$ es convexa. Sean $\alpha,\beta\in[0,1]$ tales que $\alpha+\beta=1$ y $f,g\in\mathbb{R}^{I_a^b}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi TV^W(\alpha f+\beta g) &= \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(\alpha f+\beta g)+\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(\alpha f+\beta g)+\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(\alpha f+\beta g)\\
&= \sup\frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}(\alpha f+\beta g)(t_i,a_2))|}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}\\
&\quad+\sup\frac{\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{01}(\alpha f+\beta g)(a_1,s_j))|}{\sum\kappa(\eta;[a_2,b_2])}\\
&\quad+\sup\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{11}(\alpha f+\beta g)(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)}\\
&= \sup\frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\alpha\Delta_{10}f(t_i,a_2)+\beta\Delta_{10}g(t_i,x_2))|}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}\\
&\quad+\sup\frac{\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\alpha\Delta_{01}f(a_1,s_j)+\beta\Delta_{01}g(x_1,s_j)|)}{\sum\kappa(\eta;[a_2,b_2])}\\
&\quad+\sup\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\alpha\Delta_{11}f(t_i,s_j)+\beta\Delta_{11}g(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)}\\
&\le \sup\frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\alpha\Delta_{10}f(t_i,a_2)|+|\beta\Delta_{10}g(t_i,a_2))|}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}\\
&\quad+\sup\frac{\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\alpha\Delta_{01}f(a_1,s_j)|+|\beta\Delta_{01}g(a_1,s_j)|)}{\sum\kappa(\eta;[a_2,b_2])}\\
&\quad+\sup\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\alpha\Delta_{11}f(t_i,s_j)|+|\beta\Delta_{11}g(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha\varphi(|\Delta_{10} f(t_i, a_2)|) + \beta\varphi(|\Delta_{10} g(t_i, a_2)|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\quad + \sup \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha\varphi(|\Delta_{01} f(a_1, s_j)|) + \beta\varphi(|\Delta_{01} g(a_1, s_j)|)}{\sum \kappa(\eta; [a_2, b_2])} \\
&\quad + \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha\varphi(|\Delta_{11} f(t_i, s_j)|) + \beta\varphi(|\Delta_{11} g(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)} \\
&= \alpha \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\Delta_{10} f(t_i, a_2)|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} + \beta \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\Delta_{10} g(t_i, a_2)|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} + \alpha \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\Delta_{01} f(a_1, s_j)|)}{\sum \kappa(\eta; [a_2, b_2])} \\
&\quad + \beta \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\Delta_{01} g(a_1, s_j)|)}{\sum \kappa(\eta; [a_2, b_2])} + \alpha \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11} f(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)} \\
&\quad + \beta \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11} g(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)} = \alpha(\kappa\varphi TV^W(f)) + \beta(\kappa\varphi TV^W(g)).
\end{aligned}
$$

□

Mostraremos ahora que la clase de funciones $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ es un conjunto convexo; es decir, que toda combinación convexa de elementos de $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ pertenece a $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$.

**Proposición 3.2.** *Sean $\kappa \in \mathcal{K}$, $\varphi \in \Phi$ y $f, g \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$. Entonces, si $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$, se tiene que*

$$\kappa\varphi TV^W(\alpha f + \beta g) \leq \kappa\varphi TV^W(f) + \kappa\varphi TV^W(g).$$

*Demostración.* Mostremos que

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(\alpha f + \beta g) \leq \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) + \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(g).$$

Para $\alpha$, $\beta \in [0,1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$ y $x, y \geq 0$, tenemos que $\alpha x + \beta y$ es un punto del segmento de recta que une a los puntos $x$ e $y$. Luego, como $\varphi$ es una función creciente, resulta

$$\varphi(\alpha x + \beta y) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} \leq \varphi(x) + \varphi(y). \tag{3.5}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(\alpha f + \beta g) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\Delta_{10}(\alpha f + \beta g)(t_i, a_2))|}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\alpha\Delta_{10} f(t_i, a_2) + \beta\Delta_{10} g(t_i, a_2))|}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\Delta_{10} f(t_i, a_2)|) + \varphi(|\Delta_{10} g(t_i, a_2))|}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \quad \text{(por 3.5)} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\Delta_{10} f(t_i, a_2))}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} + \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\Delta_{10} g(t_i, a_2))}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&= \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) + \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(g).
\end{aligned}
$$

Utilizando los mismos argumentos, se prueba que

$$\kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(\alpha f + \beta g) \leq \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(g).$$



Probemos que

$$\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(\alpha f + \beta g) \leq \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(g).$$

$$
\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(\alpha f + \beta g) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11}(\alpha f + \beta g)(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\alpha\Delta_{11} f(t_i, s_j) + \beta\Delta_{11} g(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\alpha\Delta_{11} f(t_i, s_j)| + |\beta\Delta_{11} g(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11}f(t_i,s_j)|) + \varphi(|\Delta_{11}g(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \quad \text{(por 3.5)} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11}f(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&\quad + \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11}g(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&= \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(g).
\end{aligned}
$$

De manera que,

$$
\begin{aligned}
\kappa\varphi TV^W_{I_a^b}(\alpha f + \beta g) &= \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(\alpha f + \beta g) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(\alpha f + \beta g) \\
&\quad + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(\alpha f + \beta g) \\
&\leq \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) + \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(g) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) \\
&\quad + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(g) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(g) \\
&= \kappa\varphi TV^W_{I_a^b}(f) + \kappa\varphi TV^W_{I_a^b}(g).
\end{aligned}
$$

□

En virtud de las dos Proposiciones anteriores, $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ resulta ser un conjunto simétrico y convexo. Así, el espacio vectorial generado por $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$, el cual denotaremos por $\kappa\varphi BV^W(I_a^b)$ es

$$\kappa\varphi BV^W(I_a^b) = \{f \in \mathbb{R}^{I_a^b} : \text{existe } \lambda > 0 \text{ tal que } \lambda f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)\}.$$

**Proposición 3.3.** *Sean $\kappa \in \mathcal{K}$ y $\varphi \in \Phi$. Entonces*

$$V_\varphi^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi V^W(I_a^b).$$

*Demostración.* Sea $f \in V_\varphi^W(I_a^b)$, por lo tanto

$$TV_\varphi^W = \varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) + \varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) + \varphi V^W_{I_a^b}(f) < \infty,$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\kappa\varphi TV^W(f) &= \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f) \\
&\leq \varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) + \varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) + \varphi V^W_{I_a^b}(f) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$ y así,

$$V_\varphi^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi V^W(I_a^b).$$

□

En el año 2010 J. Guerrero en su tesis Doctoral [12] extiende el resultado presentado por Musielak- Orlicz en [18] a funciones definidas en el plano, precisamente demuestra que

*Si $\varphi \in \Phi$ satisface la condición $\delta_2$, entonces $BV^W(I_a^b) \subset V_\varphi^W(I_a^b)$*

Lo que implica que, si $\varphi$ satisface la condición $\delta_2$, entonces se verifica la siguiente cadena de inclusiones

$$BV^W(I_a^b) \subset V_\varphi^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi V^W(I_a^b).$$

Al igual que en el capítulo 2, no podemos asegurar que la clase de funciones $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ sea un espacio vectorial, estableceremos condiciones sobre $\varphi$ y $\kappa$ de tal manera que $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ sea un espacio vectorial.

## 3.2. Condiciones necesarias y suficientes en $\varphi$ para que la clase $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ sea un espacio vectorial

En esta sección estudiaremos bajo que condiciones la familia de funciones $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ es un espacio vectorial.



El siguiente Lema es una extensión del Lema 2.1, el cual nos garantiza que si $\varphi$ satisface la condición $\delta_2$, entonces la clase $\kappa\varphi V^W(I_a^b)$ es cerrada respecto a la suma y multiplicación usual de funciones.

**Lema 3.1.** *Sean $\kappa \in \mathcal{K}$, $\varphi \in \Phi$ y $f_k \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$, $k = 1,2,3\ldots,l$ funciones uniformemente acotadas (es decir, existe $K > 0$ tal que $\|f_k\|_\infty \le K$). Si $\varphi$ satisface la condición $\delta_2$, entonces*

*1.*
$$\kappa\varphi TV^W(f_1 + \ldots + f_l) \le \Omega^{l-1}((l-1)4K)[\kappa\varphi TV^W(f_1) + \ldots + \kappa\varphi TV^W(f_l)],$$

*donde $\Omega$ es la función definida en 1.7 en el capítulo 1.*

*2. Si $c \in \mathbb{R}$ y $p$ es el menor entero positivo tal que $|c| \le 2^p$, entonces*

$$\kappa\varphi TV^W(cf) \le \Omega'(p)\kappa\varphi TV^W(f).$$

*Demostración.*

1. Sean $\xi = \{t_i\}_{i=1}^m$ y $\eta = \{s_j\}_{j=1}^n$ particiones de $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$ respectivamente, y $f_k \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$, $k = 1,2,3\ldots,l$ funciones uniformemente acotadas, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}(f_1+\ldots+f_l)(t_i,x_2))|}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])} &= \frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}(f_1)(t_i,a_2)+\ldots+\Delta_{10}f_l(t_i,x_2))|}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}\\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}(f_1)(t_i,a_2)|+\ldots+|\Delta_{10}f_l(t_i,x_2)|)}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}.
\end{aligned}
$$

Por hipótesis las funciones $f_k$ son acotadas, por lo tanto

$$|\Delta_{10}f_k(t_i,a_2)| = |f_k(t_i,a_2)-f_k(t_{i-1},a_2)| \leq 2K,$$

para $k=1,\ldots,l$. Aplicando el Lema 1.1 con $a'=2K$, resulta

$$
\begin{aligned}
\varphi(|\Delta_{10}(f_1)(t_i,a_2)|+\ldots+|\Delta_{10}f_l(t_i,a_2)|) \;\leq\; & \Omega^{l-1}((l-1)2K)\big[\varphi(|\Delta_{10}(f_1)(t_i,a_2)|)+\ldots\\
& \ldots+\varphi(|\Delta_{10}f_l(t_i,a_2)|)\big].
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}(f_1)(t_i,a_2)|+\ldots+|\Delta_{10}f_l(t_i,a_2|)}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}\\
\leq\;& \Omega^{l-1}((l-1)2K)\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\big[\varphi(|\Delta_{10}(f_1)(t_i,a_2)|)+\ldots+\varphi(|\Delta_{10}f_l(t_i,a_2)|)\big]\right)}{\left(\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])\right)}\\
\leq\;& \Omega^{l-1}((l-1)2K)\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}f_1(t_i,a_2)|)}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}+\ldots+\frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}f_l(t_i,a_2)|)}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}\right).
\end{aligned}
$$

Tomando supremo en ambos lados de la desigualdad anterior y por las propiedades del mismo, se tiene que

$$\kappa\varphi V^{W}_{[a_1,b_1]}(f_1+\ldots+f_l) \leq \Omega^{l-1}((l-1)2K)\big[\kappa\varphi V^{W}_{[a_1,b_1]}(f_1)+\ldots+\kappa\varphi V^{W}_{[a_1,b_1]}(f_l)\big].$$

Análogamente se prueba que

$$\kappa\varphi V^{W}_{[a_2,b_2]}(f_1+\ldots+f_l) \leq \Omega^{l-1}((l-1)2K)\big[\kappa\varphi V^{W}_{[a_2,b_2]}(f_1)+\ldots+\kappa\varphi V^{W}_{[a_2,b_2]}(f_l)\big].$$

Verifiquemos una desigualdad análoga para la variación bidimensional $\kappa\varphi V^{W}_{(I_a^b)}(f_1+\ldots+f_l)$. Observemos que para $k=1,2\ldots,l$,

$$|\Delta_{11}f_k(t_i,s_j)| \leq 4K.$$

Aplicando el Lema 1.1 para $a' = 4K$, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(|\Delta_{11}(f_1 + \ldots + f_l)(t_i, s_j)|) &= \varphi(|\Delta_{11}(f_1)(t_i, s_j)| + \ldots + |\Delta_{11}(f_l)(t_i, s_j)\\
&\leq \varphi(|\Delta_{11}(f_1)(t_i, s_j)| + \ldots + |\Delta_{11}(f_l)(t_i, s_j)|)\\
&\leq \Omega^{l-1}((l-1)4K)\big[\varphi(|\Delta_{11}(f_1)(t_i, s_j)|) +\\
&\quad \ldots + \varphi(|\Delta_{11}(f_l)(t_i, s_j)|)\big].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f_1 + \ldots + f_l) = \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11}(f_1 + \ldots + f_l)(t_i, s_j))(t_i, s_j)|)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)}$$

$$\leq \Omega^{l-1}((l-1)4K) \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11}(\varphi(|\Delta_{11}(f_1)(t_i, s_j)| + \ldots + \varphi(|\Delta_{11}(f_l)(t_i, s_j)|))}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)}$$

$$= \Omega^{l-1}((l-1)4K)\big[\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f_1) + \ldots + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f_l)\big].$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi TV^W(f_1 + \ldots + f_l) &= \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f_1 + \ldots + f_l) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f_1 + \ldots + f_l)\\
&\quad + \kappa\varphi V^W_{[I_a^b]}(f_1 + \ldots + f_l)\\
&\leq \Omega^{l-1}((l-1)2K)\big[\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f_1) + \ldots + \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f_l)\big]\\
&\quad + \Omega^{l-1}((l-1)2K)\big[\kappa\varphi V^W_{[a_2,b_1]}(f_2) + \ldots + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f_l)\big]\\
&\quad \Omega^{l-1}((l-1)4K)\big[\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f_1) + \ldots + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f_l)\big]\\
&\leq \Omega^{l-1}((l-1)4K)\Big[\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f_1) + \ldots + \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f_l)\\
&\quad + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f_1) + \ldots + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f_l)\\
&\quad + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f_1) + \ldots + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f_l)\Big]\\
&= \Omega^{l-1}((l-1)4K)\Big[\kappa\varphi TV^W(f_1) + \ldots + \kappa\varphi TV^W(f_l)\Big].
\end{aligned}$$

2. Dado $c \in \mathbb{R}$. Sea $p$ el menor entero no negativo tal que $|c| \leq 2^p$. Entonces por el Lema 1.1

$$\varphi(|c|t) \leq \Omega^p(2^{p-1}K).$$

Para cualquier partición $\xi = \{t_i\}_{i=1}^m$ de $[a_1, b_1]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(cf) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}(cf)(t_i,a_2)|)}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|c||\Delta_{10}(f)(t_i,a_2)|)}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])} \\
&\leq \sup \frac{\Omega^p(2^{p-1}K)\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}f(t_i,a_2)|)}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])} \\
&\leq \Omega^p(2^{p-1}K)\sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}f(t_i,a_2)|)}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])} \\
&= \Omega^p(2^{p-1}K)\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f).
\end{aligned}$$

Análogamente se prueba que

$$\kappa\varphi^W_{[a_2,b_2]}(cf) \leq \Omega^p(2^{p-1}K)\kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f).$$

Calculemos $\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(cf)$

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(cf) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{11}(cf)(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|c|(|\Delta_{11}f(t_i,s_j)|))}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&\leq \Omega^p(2^{p-1}K)\sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{11}f(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&= \Omega^p(2^{p-1}K)\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi TV^W(cf) &= \kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(cf) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(cf) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(cf) \\
&\le \Omega^p(2^{p-1}K)(\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f)) \\
&= \Omega^p(2^{p-1}K)\kappa\varphi TV^W(f).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.1.** *Si $\varphi \in \Phi$ satisface la condición $\delta_2$ y $\kappa \in \mathcal{K}$, entonces*

$$\kappa\varphi V^W(I_a^b) = \kappa\varphi BV^W(I_a^b),$$

*donde $\kappa\varphi BV^W(I_a^b) = \{f \in \mathbb{R}^{I_a^b} : \text{ existe } \lambda \quad \text{tal que} \quad \lambda f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)\}$.*

*Demostración.* Supongamos que $\varphi$ satisface la condición $\delta_2$. Si $f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$, basta tomar $\lambda = 1$ para que $f \in \kappa\varphi BV^W(I_a^b)$, por lo tanto

$$\kappa\varphi V^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi BV^W(I_a^b).$$

Por otro lado, sea $f \in \kappa\varphi BV^W(I_a^b)$, entonces existe $\lambda$ tal que $\lambda f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$, de la Proposición 3.1 la función $\lambda f$ es acotada; es decir, existe $K > 0$ tal que $\|\lambda f\|_\infty \le K$.
Y, sea $p$ el menor entero no negativo tal que $\frac{1}{\lambda} \le 2^p$. Entonces



$$\kappa\varphi TV^W(f) = \kappa\varphi TV^W\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) \le \Omega^p(2^{p-1}K)(\kappa\varphi TV^W(\lambda f)) < \infty.$$

Por lo tanto,

$$\kappa\varphi BV^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi V^W(I_a^b).$$

Así,

$$\kappa\varphi V^W(I_a^b) = \kappa\varphi BV^W(I_a^b).$$

□

El recíproco del Teorema anterior resulta ser verdadero, pero para demostralo primero necesitaremos mostrar el resultado siguiente.

**Teorema 3.2.** *Sean $\kappa \in \mathcal{K}$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$. Entonces, $\kappa\varphi_1 V^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi_2 V^W(I_a^b)$ si, y sólo si, existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que $\varphi_2(t) \le \beta\varphi_1(t)$ para $0 < t \le \alpha$.*

*Demostración.* Supongamos que $\kappa\varphi_1 V^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi_2 V^W(I_a^b)$ y que existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que $\varphi_2(t) \ge \beta\varphi_1(t)$ para $0 < t \le \alpha$.

Por el Lema 1.2 existe una sucesión $t'_n \ge 0$ ó $s'_n \ge 0$ tal que las series

$$\sum \varphi_1(t'_n) < \infty \quad \text{y} \quad \sum \varphi_2(t'_n) = \infty$$

ó

$$\sum \varphi_1(s'_n) < \infty \quad \text{y} \quad \sum \varphi_2(s'_n) = \infty.$$

Sea $z_n$ (ó $z'_n$) sucesión en $(a_1, b_1)$ (ó $(a_2, b_2)$) creciente. Definamos la función $f : I_a^b \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} t'_n & \text{si } t = w_n \text{ y } s = y_1 \in [a_2, b_2]/\{z'_n\} \\ s'_n & \text{si } s = z'_n \text{ y } t = x_1 \in [a_1, b_1]/\{z_n\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Puesto que

$$|t'_i - t'_{i-1}| \le \begin{cases} |t'_i| & \text{si } t'_{i-1} \le t'_i \\ |t'_{i-1}| & \text{si } t'_i \le t'_{i-1} \end{cases} \tag{3.2}$$

Entonces

$$\varphi(|t'_i - t'_{i-1}|) \le \begin{cases} \varphi(|t'_i|) & \text{si } t'_{i-1} \le t'_i \\ \varphi(|t'_{i-1}|) & \text{si } t'_i \le t'_{i-1} \end{cases} \le \varphi(|t_i|) + \varphi(|t_{i-1}|). \tag{3.3}$$

Para $\xi$ y $\eta$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente, teniendo en cuenta que $f(t_0, a_2) = 0$ y $f(t_{m-1}, a_2) = 0$, tendremos

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi_1(|\Delta_{10} f(t_i, a_2)|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} &= \frac{\varphi_1(|f(t_1, a_2)|) + \varphi_1(|f(t_m, a_2)|) + \sum_{i=2}^{m-1} \varphi_1(|\Delta_{10} f(t_i, a_2)|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\le \frac{2\sum_{i=1}^{m} \varphi_1(f(t_i, a_2)) + \sum_{i=2}^{m-1} \varphi_1(|\Delta_{10} f(t_i, a_2)|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\le \frac{2\sum \varphi_1(|t'_i|) + \sum_{i=2}^{m-1} \varphi_1(|\Delta_{10} f(t_i, a_2)|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\le \frac{2\sum \varphi_1(|t'_i|) + \sum \varphi_1(|t'_i - t'_{i-1}|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\le \frac{2\sum \varphi_1(|t'_i|) + \sum \varphi_1(|t'_i|) + \sum \varphi_1(|t'_{i-1}|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\le \frac{4\sum \varphi_1(|t'_i|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\le 4\sum \varphi_1(|t'_i|) < \infty.
\end{aligned}$$

La desigualdad anterior es cierta para cualquier partición de $[a_1, b_1]$, por lo tanto

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1, b_1]} < \infty.$$

Aplicando el mismo razonamiento anterior, obtenemos

$$\kappa\varphi V^W_{[a_2, b_2]} < \infty.$$

Por otro lado, notemos que para cualesquiera $(t_i, s_j)$,

$$\Delta_{11} f(t_i, s_j) = 0.$$

Lo que implica que $\kappa\varphi V_{I_a^b}(f) = 0$. De esta manera $f \in \kappa\varphi_1 V^W(I_a^b)$.

Por otra parte, consideremos la partición $\xi : \{t_i\}_{i=1}^{2m}$ con $t_{2i+1} = z_i$, $i = 1, 2, \ldots, m-2$ y $t_{2i} = \dfrac{(z_{i-1} + z_i)}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, en este caso $f(t_{2k}, a_2) = 0$ para $k = 1, \ldots m-1$, de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{2m-1} \varphi_2(|\Delta_{10} f(t_i, a_2))|}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} &= \frac{\varphi_2(|\Delta_{10} f(t_1, a_2)|) + \ldots + \varphi_2(|\Delta_{10} f(t_{2m-1}, a_2)|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&= \frac{\varphi_2(|f(t_{2m-1}, a_2)|) + 2\sum_{i=0}^{m-2} \varphi_2(|f(t_{2i+1}, a_2)|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&= \frac{\varphi_2(|t'_{2m-1}|) + 2\sum_{i=0}^{m-2} \varphi_2(|t'_{2i+1}|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\geq \frac{2\sum_{i=0}^{m-2} \varphi_2(|t'_{2i+1}|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\geq \frac{\sum_{i=0}^{m-2} \varphi_2(|t'_i|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])}
\end{aligned}$$

Obteniendo de esta manera que

$$\kappa\varphi V^W(f) \geq \frac{\sum_{i=0}^{m-2} \varphi_2(|t'_i|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])},$$

y esto tiende a $\infty$ cuando $m \to \infty$. Lo que implica que $\kappa\varphi_2 TV^W(f) = \infty$ y por ende $f \notin \kappa\varphi_2 V^W(I_a^b)$, contradiciendo la hipótesis, por lo tanto existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que $\varphi_2(t) \leq \beta\varphi_1(t)$ para $0 < t \leq \alpha$. □

En el Teorema que sigue se muestra el recíproco del Teorema 3.1.

**Teorema 3.3.** *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\kappa \in \mathcal{K}$. Si $\kappa\varphi V^W(I_a^b) = \kappa\varphi BV^W(I_a^b)$, entonces $\varphi$ satisface la condición $\delta_2$.*

*Demostración.* Por ser $\kappa\varphi BV^W(I_a^b)$ un espacio vectorial, para $f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$, también $2f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$. Definiendo $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ y $\varphi_2(t) = 2\varphi(t)$, se obtiene que $\kappa\varphi_1 V^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi_2 V^W(I_a^b)$ y por el Teorema 3.2 existen constantes $\alpha$ y $\beta$ tales que $\varphi_2(t) \leq \beta\varphi_1(t)$ para $0 < t \leq \alpha$; esto es,

$$\varphi(2t) \leq \beta\varphi(t),$$

lo que es equivalente a la condición $\delta_2$. $\square$

## 3.3. El espacio de Banach $\kappa\varphi BV^W(I_a^b,\mathbb{R})$

En esta sección nos dedicaremos a dotar al espacio $\kappa\varphi BV^W(I_a^b,\mathbb{R})$ de un norma, para ello utilizaremos el funcional de Minkowski, tal como se hizo en el espacio $\kappa\varphi BV^W([a,b],\mathbb{R})$.

Designemos por $\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$ al espacio de todas las funciones de $\kappa\varphi BV^W(I_a^b)$ que se anulan en $a=(a_1,a_2)$; es decir

$$\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)=\{f\in\kappa\varphi BV^W(I_a^b): f(a)=0\}.$$

El Lema siguiente es una extensión del Lema 2.2, omitiremos la demostración, ya que es análoga a la realizada en el Lema 2.2.

**Lema 3.2.** *Sean $\kappa\in\mathcal{K}$ y $\varphi\in\Phi$ convexa. Si $f\in\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$, entonces*

1. $\lim\limits_{\beta\to 0^-}\kappa\varphi TV^W(\beta f)=0.$
2. $\{\epsilon>0:\kappa\varphi TV^W(f/\epsilon)\le 1\}\neq\varnothing.$

Puesto que el conjunto $\{\epsilon>0:\kappa\varphi TV^W(f/\epsilon)\le 1\}$ es no vacío y $\kappa\varphi V_0^W(I_a^b)$ es convexo y absorbente, se define el Funcional de Minkowski $\rho_{\kappa\varphi,0}$ asociado al espacio $\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$ como sigue:



**Definición 3.3** (Funcional de Minkowski). Si $\varphi$ es convexa se define el funcional de Minkowski asociado al espacio $\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$ por

$$\rho_{\kappa\varphi,0}(f):=\inf\{\epsilon:\kappa\varphi TV^W(f/\epsilon)\le 1\},\quad f\in\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b).$$

Definamos la función $\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}^W:\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)\to\mathbb{R}^+$, por

$$\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}^W(\cdot)=\rho_{\kappa\varphi,0}(\cdot).$$

Nuestro objetivo se centra ahora en demostrar que $\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}^W(\cdot)$ define una norma sobre el espacio $\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$, para ello es conveniente describir antes algunas propiedades de $\rho_{\kappa\varphi,0}$.

**Lema 3.3.** *Si $\varphi$ es convexa y $f\in\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$, entonces*

1. *Si $(t,s)$, $(t',s')\in I_a^b$, entonces $|f(t,s)-f(t',s')|\le 4\varphi^{-1}(9)\rho_{\kappa\varphi,0}(f)$.*
2. *Si $\rho_{\kappa\varphi,0}(f)>0$, entonces $\kappa\varphi TV^W(f/\rho_{\kappa\varphi,0}(f))\le 1$.*
3. *Si $K>0$, entonces*
   a) $\rho_{\kappa\varphi,0}(f)<K$ *si, y sólo si,* $\kappa\varphi TV^W(f/K)\le 1$.
   b) $\kappa\varphi TV^W(f/K)=1$ *si* $\rho_{\kappa\varphi,0}(f)=K$.
4. $\kappa\varphi TV^W(f)\le\rho_{\kappa\varphi,0}(f)$ *si* $0\le\rho_{\kappa\varphi,0}(f)\le 1$.

*5.* $\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi TV^W(f/\epsilon) \leq 1\} = (\rho_{\kappa\varphi,0}(f), \infty)$.

*Demostración.*

1. De la definición de $\rho_{\kappa\varphi,0}(f)$ se sigue que para todo $\lambda > \rho_{\kappa\varphi,0}(f)$

$$\kappa\varphi TV^W(f/\lambda) \leq 1.$$

De esto,

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f/\lambda) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f/\lambda) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f/\lambda) \leq 1.$$

Lo que implica que

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f/\lambda) \leq 1, \quad \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f/\lambda) \leq 1 \quad \text{y} \quad \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f/\lambda) \leq 1.$$

En particular para las particiones $\xi : a_1 = t_0 < t_1 = t' < t_2 = t < t_3 = b_1$ y $\eta : a_2 = s_0 < s_1 = s' < s_2 = s < s_3 = b_2$ de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente, se cumple

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f/\lambda) = \sup \frac{\sum_{i=1}^{3} \varphi(|\Delta_{10} f(t_i, a_2))|}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} \leq 1.$$

Como $\kappa(t) \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$ y $\varphi^{-1}$ es creciente, para $i = 2$ se obtiene,

$$\begin{aligned} \varphi(|f(t,a_2)| - f(t',a_2)|/\lambda) &\leq 3 \\ |f(t,a_2)| - f(t',a_2)|/\lambda &\leq \varphi^{-1}(3) \\ |f(t,a_2)| - f(t',a_2)|/\lambda &\leq \varphi^{-1}(9) \\ |f(t,a_2)| - f(t',a_2)| &= \lambda\varphi^{-1}(9). \end{aligned}$$

De forma similar, se prueba que

$$|f(a_1, s)| - f(a_1, s')| \leq \lambda\varphi^{-1}(9).$$

Por otra parte, para $i = 2$ y $j = 2$, se cumple

$$\frac{\varphi(\Delta_{11}(f/\lambda)(t_2, s_1))}{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)} \leq 1.$$

De esto,

$$\begin{aligned} \varphi(|\Delta_{11}(f/\lambda)(t_2, s_1)|) &\leq 9 \\ |f(t', s') - f(t', s) - f(t, s') + f(t, s)| &\leq \lambda\varphi^{-1}(9). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|f(t,s)-f(t',s')| &= |f(t,a_2)-f(t',a_2)+f(a_1,s)-f(a_1,s')\\ &\quad +f(t',a_2)-f(t',s)-f(t,a_2)+f(t,s)\\ &\quad +f(a_1,s')-f(a_1,s)-f(t',s')+f(t',s)|\\ &\leq |f(t,a_2)-f(t',a_2)|+|f(a_1,s)-f(a_1,s')|\\ &\quad +|f(t',a_2)-f(t',s)-f(t,a_2)+f(t,s)|\\ &\quad +|f(a_1,s')-f(a_1,s)-f(t',s')+f(t',s)|\\ &\leq 4\lambda\varphi^{-1}(9)\end{aligned}$$

para todo $\lambda \geq \rho_{\kappa\varphi,0}(f)$.
En particular para $\lambda = \rho_{\kappa\varphi,0}(f)$, así

$$|f(t,s)-f(t',s')| \leq 4\rho_{\kappa\varphi,0}(f)\varphi^{-1}(9)$$

para todo $(t,s)$, $(t',s') \in I_a^b$.

2. Sea $\lambda \in \{\epsilon : \kappa\varphi TV^W(f/\epsilon) \leq 1\}$, entonces

$$\kappa\varphi TV^W(f/\lambda) \leq 1.$$

En consecuencia, para cualesquiera particiones $\xi$ y $\eta$ de $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$, se tiene

$$\begin{aligned}1 \;\geq\; & \sup\frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}f(t_i,a_2)/\lambda))|}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}+\sup\frac{\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{01}f(a_1,s_j)|/\lambda)}{\sum\kappa(\eta;[a_2,b_2])}\\ &+\sup\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{11}f(t_i,s_j)|/\lambda)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)}.\end{aligned}$$

Luego, por ser $\varphi$ una función continua y $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) > 0$

$$\begin{aligned}&\frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}f(t_i,a_2)|/\rho_{\kappa\varphi,0}(f))}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}+\frac{\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{01}f(a_1,s_j)|/\rho_{\kappa\varphi,0}(f))}{\sum\kappa(\eta;[a_2,b_2])}\\ &+\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{11}f(t_i,s_j)|/\rho_{\kappa\varphi,0}(f))}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)}=\end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda\to\rho_{\kappa\varphi,0}(f)} \frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi(|\Delta_{10}f(t_i,a_2)|/\lambda)}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])} + \frac{\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{01}f(a_1,s_j)|/\lambda)}{\sum\kappa(\eta;[a_2,b_2])}$$
$$+\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{11}f(t_i,s_j)|/\lambda)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)}$$
$$\le \lim_{\lambda\to\rho_{\kappa\varphi,0}(f)} 1 = 1.$$

Por consiguiente

$$\kappa\varphi TV^W(f/\rho_{\kappa\varphi,0}(f)) \le 1.$$

3. a) Supongamos que $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) < K$; esto es,

$$\inf\{\epsilon : \kappa\varphi TV^W(f/\epsilon) \le 1\} < K.$$

Consideremos los siguientes casos:
Caso 1. Si $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) = 0$, entonces existe $K' > 0$ tal que $0 < K' < K$ y $\kappa\varphi TV^W(f/K') \le 1$, pues de no existir $K'$, entonces $\rho_{\kappa\varphi,0} = K > 0$, lo cual es una contradicción.
Puesto que $\varphi$ es una función no decreciente, entonces

$$\frac{\varphi(t)}{K} \le \frac{\varphi(t)}{K'}$$

para todo $t \in [0,\infty)$.
Por lo tanto

$$\kappa\varphi TV^W(f/K) \le \kappa\varphi TV^W(f/K') \le 1.$$

Caso 2. Si $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) > 0$. Por ser $\varphi$ no decreciente y como $\frac{1}{K} \le \frac{1}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}$, tenemos

$$\varphi\left(\frac{f(t)}{K}\right) \le \varphi\left(\frac{f(t)}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}\right) \le 1.$$

por la parte 2 de este Lema.

b) Supongamos que $\kappa\varphi TV^W(f/K) = 1$, entonces
-Si $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) < K$, entonces como $\kappa\varphi TV^W(\cdot)$ es convexo, se tiene que

$$\kappa\varphi TV^W(f/K) = \kappa\varphi TV^W\left(\frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}{K}\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}\right) \le \frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}{K}\kappa\varphi TV^W\left(\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}\right)$$
$$\le \frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}{K}\times 1 < 1$$

contradicción.

-Si $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) > K$, entonces por $(3a)$ $\kappa\varphi TV^W(f/K) > 1$, contradicción.
Por lo tanto,

$$\rho_{\kappa\varphi,0}(f) = K.$$

4. Si $0 < \rho_{\kappa\varphi,0}(f) \leq 1$, entonces $\dfrac{1}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)} \geq 1$. Dado que $\kappa\varphi TV^W(\cdot)$ es convexo,

$$1 \geq \kappa\varphi TV^W\left(\frac{1}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)} f\right) \geq \frac{1}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)} \kappa\varphi TV^W(f).$$

Por tanto,

$$\rho_{\kappa\varphi,0}(f) \geq \kappa\varphi TV^W(f).$$

Por otro lado, si $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) = 0$, entonces para todo $0 < K < 1$, por la propiedad $(3a)$ de este Lema.

$$\kappa\varphi TV^W(f/K) \leq 1.$$

$\kappa\varphi TV^W(\cdot)$ es convexo

$$\kappa\varphi TV^W\left(\frac{f}{K}\right) \leq \frac{1}{K} \kappa\varphi TV^W(f) < 1.$$

Así, $\kappa\varphi TV^W(f) \leq K$.

5. Verifiquemos ambas contenciones.
Sea $\lambda \in \{\epsilon : \kappa\varphi TV^W(f/\epsilon) \leq 1\}$, entonces $\kappa\varphi TV^W(f/\lambda) \leq 1$. Por definición

$$\rho_{\kappa\varphi,0}(f) \leq \lambda.$$

En consecuencia, $\lambda \in (\rho_{\kappa\varphi,0}(f), \infty)$.

Sea $\lambda \in (\rho_{\kappa\varphi,0}(f), \infty)$, entonces $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) < \lambda$. Por lo tanto,

$$\kappa\varphi TV^W(f/\lambda) \leq 1.$$

Lo que muestra que $\lambda \in \{\epsilon : \kappa\varphi TV^W(f/\epsilon) \leq 1\}$.
Así,

$$\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi TV^W(f/\epsilon) \leq 1\} = (\rho_{\kappa\varphi,0}(f), \infty).$$

□

**Teorema 3.4.** *Sean $\kappa \in \mathcal{K}$ y $\varphi \in \Phi$. Si $\varphi$ es convexa, entonces $\|\cdot\|^W_{\kappa\varphi,0}(\cdot)$ define una norma sobre el espacio $\kappa\varphi BV^W_0(I^b_a)$.*

*Demostración.* Verifiquemos que $\|\cdot\|^W_{\kappa\varphi,0} = \rho_{\kappa\varphi,0}(\cdot)$ es una norma en $\kappa\varphi BV^W_0(I^b_a)$.

1. Si $f \neq 0$, entonces de la definición de $\rho_{\kappa\varphi,0}(f)$, se sigue que $\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} > 0$ para todo $f \in \kappa\varphi BV^W_0(I^b_a)$.

Si $f \equiv 0$, entonces $\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} = \rho_{\kappa\varphi,0}(0) = 0$. Recíprocamente si $\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} = 0$, entonces por la propiedad (4) del Lema 3.3, se tiene

$$0 \leq \kappa\varphi TV^W(f) \leq \rho_{\kappa\varphi,0}(f) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\kappa\varphi TV^W(f) = 0.$$

Y así, por la Proposición 2.4 (3) $f$ es una función constante, pero $f(a) = f(a_1, a_2) = 0$. Por tanto $f(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in I^b_a$.

2. Sea $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ y $\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} \neq 0$. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$\kappa\varphi TV^W\left(\frac{|\lambda| f}{\epsilon}\right) \leq 1. \tag{3.3.1}$$

Equivalentemente se tiene

$$\kappa\varphi TV^W\left(\frac{f}{\epsilon/|\lambda|}\right) \leq 1;$$

es decir, $\epsilon/\lambda \in \{\epsilon : \kappa\varphi TV^W(f/\epsilon) \leq 1\}$. Por lo tanto

$$\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} \leq \epsilon/\lambda.$$

Es decir,

$$\lambda\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} \leq \epsilon.$$

En otras palabras, $\lambda\|f\|^W_{\kappa\varphi,0}$ es cota inferior del conjunto

$$\{\epsilon : \kappa\varphi TV^W((|\lambda| f)/\epsilon) \leq 1\}.$$

Por la Proposición 3.1, $\kappa\varphi TV^W(\cdot)$ es par, así

$$\kappa\varphi TV^W((|\lambda| f)/\epsilon) = \kappa\varphi TV^W((\lambda f)/\epsilon).$$

En consecuencia,

$$\lambda\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} \leq \|\lambda f\|^W_{\kappa\varphi,0}. \tag{3.3.2}$$

Para verificar la otra desigualdad, notemos que

$$\kappa\varphi TV^W\left(\frac{\lambda f}{|\lambda|\|f\|^W_{\kappa\varphi,0}}\right) = \kappa\varphi TV^W\left(\frac{|\lambda| f}{|\lambda|\|f\|^W_{\kappa\varphi,0}}\right) = \kappa\varphi TV^W\left(\frac{f}{\|f\|^W_{\kappa\varphi,0}}\right) \leq 1.$$

Por lo tanto, $\lambda\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} \in \{\epsilon : \kappa\varphi TV^W((|\lambda| f)/\epsilon) \leq 1\}$.

Por lo tanto,

$$\lambda\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} \geq \rho_{\kappa\varphi,0}(\lambda f) = \|\lambda f\|^W_{\kappa\varphi,0}. \tag{3.3.3}$$

De (3.3.2) y (3.3.3) se sigue que $|\lambda|\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} = \|\lambda f\|^W_{\kappa\varphi,0}$.

3. (Desigualdad triangular)
Si $f = 0$ ó $g = 0$, entonces $\|f+g\|^W_{\kappa\varphi,0} \leq \|f\|^W_{\kappa\varphi,0} + \|g\|^W_{\kappa\varphi,0}$.

Supongamos que $f \neq 0$ y $g \neq 0$, entonces $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) > 0$ y $\rho_{\kappa\varphi,0}(g) > 0$. Por la propiedad 2) del Lema 3.3, tenemos

$$\kappa\varphi TV^W\left(\frac{f}{\|f\|^W_{\kappa\varphi,0}}\right) \leq 1 \quad \text{y} \quad \kappa\varphi TV^W\left(\frac{g}{\|g\|^W_{\kappa\varphi,0}}\right) \leq 1.$$

Por otro lado,

$$\frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)+\rho_{\kappa\varphi,0}(g)} + \frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)+\rho_{\kappa\varphi,0}(g)} = 1.$$

Luego, como $\kappa\varphi TV^W(\cdot)$ es convexo, resulta

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi TV^W\left(\frac{f+g}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)+\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}\right) &= \kappa\varphi TV^W\Bigg(\frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)+\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)} \\
&\quad + \frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)+\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}\frac{g}{\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}\Bigg) \\
&\leq \frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)+\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}\kappa\varphi TV^W\left(\frac{f}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}\right) \\
&\quad + \frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)+\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}\kappa\varphi TV^W\left(\frac{g}{\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}\right) \\
&\leq \frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)+\rho_{\kappa\varphi,0}(g)} + \frac{\rho_{\kappa\varphi,0}(g)}{\rho_{\kappa\varphi,0}(f)+\rho_{\kappa\varphi,0}(g)} = 1;
\end{aligned}$$

es decir, $\rho_{\kappa\varphi,0}(f)+\rho_{\kappa\varphi,0}(g) \in \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi TV^W((f+g)/\epsilon) \leq 1\}$.
Por lo tanto,

$$\rho_{\kappa\varphi,0}(f+g) \leq \rho_{\kappa\varphi,0}(f) + \rho_{\kappa\varphi,0}(g).$$

Así, queda demostrado que $\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}$ define una norma sobre el espacio $\kappa\varphi BV^W_0(I^b_a)$.

□

**Proposición 3.4.** *Para toda función $f : I^b_a \to \mathbb{R}$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ vale*

$$\kappa\varphi TV^W(f+\alpha) = \kappa\varphi TV^W(f).$$

*Es decir, el operador $\kappa\varphi TV^W(\cdot)$ es invariante por traslación.*

*Demostración.* Observemos que

$$\Delta_{10}(f+\alpha)(t_i,a_2) = (f+\alpha)(t_i,a_2) - (f+\alpha)(t_{i-1},a_2) = f(t_i,a_2) - f(t_{i-1},a_2),$$

$$\Delta_{01}(f+\alpha)(a_1,s_j)=(f+\alpha)(a_1,s_j)-(f+\alpha)(a_1,s_{j-1})=f(t_i,a_2)-f(t_{i-1},a_2),$$

y

$$\begin{aligned}\Delta_{11}f(t_i,s_j) &= (f+\alpha)(t_{i-1},s_{j-1})-(f+\alpha)(t_{i-1},s_j)-(f+\alpha)(t_i,s_{j-1})+f(t_i,s_j)\\ &= (f)(t_{i-1},s_{j-1})-(f)(t_{i-1},s_j)-(f)(t_i,s_{j-1})+f(t_i,s_j).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}((f+\alpha))=\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f);$$

$$\kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}((f+\alpha))=\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f);$$

y

$$\kappa\varphi V^W_{I_a^b}((f+\alpha))=\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f).$$

Lo que implica que $\kappa\varphi TV^W(f+\alpha)=\kappa\varphi TV^W(f)$.

□

**Lema 3.4.** *Si $(f_n(x))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $(\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b),\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0})$, entonces $(f_n(x))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.*

*Demostración.* Sea $(f_n(x))_{n\geq 1}$ una sucesión $\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}$–Cauchy en $\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$, para todo $\epsilon>0$ existe $N_\epsilon\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n-f_m\|_{\kappa\varphi,0}<\epsilon \quad \text{siempre que} \quad m,n\geq N_\epsilon$$

por definición de $\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}$, resulta $\kappa\varphi TV^W\left(\frac{(f_n-f_m)(x)}{\epsilon}\right)\leq 1$.

En particular para las particiones $\xi: a_1=t_0<t_1=t<t_2=b_1$ y $\eta: a_2=s_0<s_1=s<s_2=b_2$ de $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$ respectivamente, resulta

$$\frac{\varphi\left(\frac{(|(f_n-f_m)(t,a_2)|)}{\epsilon}\right)}{\sum\kappa(\xi;[a_1,b_1])}\leq 1.$$

Por lo que $|(f_n-f_m)(t,a_2)|\leq\epsilon\varphi^{-1}(2)\leq\epsilon\varphi^{-1}(4)$.
Análogamente, se prueba que

$$|(f_n-f_m)(a_1,s)|\leq\epsilon\varphi^{-1}(2)\leq\epsilon\varphi^{-1}(4).$$

Por otra parte,

$$\frac{\varphi([|(f_n-f_m)(a_1,a_2)+(f_n-f_m)(t,s)-(f_n-f_m)(a_1,s)-(f_n-f_m)(t,a_2)|]/\epsilon)}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)}\leq 1.$$

De donde,

$$|(f_n-f_m)(a_1,a_2)+(f_n-f_m)(t,s)-(f_n-f_m)(a_1,s)-(f_n-f_m)(t,a_2)|\leq\epsilon\varphi^{-1}(4)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|(f_n - f_m)(t,s)| &\leq |(f_n - f_m)(t,a_2)| + |(f_n - f_m)(a_1,s)| \\ &\quad + |(f_n - f_m)(t,s) - (f_n - f_m)(a_1,s) - (f_n - f_m)(t,a_2)| \\ &\leq 3\epsilon\varphi^{-1}(4),\end{aligned}$$

para todo $(t,s) \in I_a^b$. Por lo tanto,

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup\{|(f_n - f_m)(t,s)| : (t,s) \in I_a^b\} \leq 3\epsilon\varphi^{-1}(4)$$

para todo $n, m \geq N_\epsilon$. Así, $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. □

**Teorema 3.5.** *Si $\varphi \in \Phi$ es convexa, entonces $(\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)), \|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}^W)$ es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ sucesión de Cauchy en $(\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b), \|\cdot\|_{\kappa\varphi,0})$, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ (por Lema 3.4). $\mathbb{R}$ es completo, lo que implica que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

para todo $x \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$.

Consideremos la función $f : (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Luego, para todo $x \in I_a^b$, vale

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{m'}(x)| + |f_{m'}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Lo que muestra que $f_n(x)$ converge a $f(x)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ (convergencia puntual)

Demostremos que $f_n(x)$ converge a $f(x)$ con la norma $\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}^W$. Para ello, sea $\epsilon > 0$ y $\xi = \{t_i\}_{i=1}^m$ partición de $[a_1, b_1]$. Como $\Delta_{10}(f_n - f)(t_i, a_2) = \Delta_{10}(f_n)(t_i, a_2) - \Delta_{10}(f)(t_i, a_2)$ y $\varphi$ es una función continua, obtenemos

$$\begin{aligned}\kappa\varphi V_{[a_1,b_1]}^W\left(\frac{f_n - f}{\epsilon}\right) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^m \varphi(\Delta_{10} f_n(t_i, a_2) - \Delta_{10} f(t_i, a_2))}{\sum \kappa(\xi, [a_1, b_1])} \\ &= \sup \frac{\sum_{i=1}^m \varphi(\Delta_{10}(f_n)(t_i, a_2) - \lim_{m'\to\infty} \Delta_{10}(f_{m'})(t_i, a_2))}{\sum \kappa(\xi, [a_1, b_1])} \\ &= \sup \lim_{m'\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^m \varphi(\Delta_{10}(f_n)(t_i, a_2) - \Delta_{10}(f_{m'})(t_i, a_2))}{\sum \kappa(\xi, [a_1, b_1])}.\end{aligned}$$

Por otro lado tomando $n, m' > N_\epsilon$ tales que

$$\|f_n - f_{m'}\|_{\kappa\varphi,0}^W < \epsilon/3;$$

es decir,

$$\text{ínf}\{\epsilon : \kappa\varphi TV^W(f_n - f_{m'}) \leq 1\} < \epsilon/3.$$

Por lo que

$$\kappa\varphi TV^W((f_n - f_{m'})/(\epsilon/3)) \leq 1.$$

Equivalentemente,

$$\kappa\varphi TV^W(3(f_n - f_{m'})/\epsilon) \leq 1.$$

Luego, por ser $\kappa\varphi TV^W(\cdot)$ convexa

$$1 \geq \kappa\varphi TV^W((f_n - f_{m'})/\epsilon) \geq 3\kappa\varphi TV^W((f_n - f_{m'})/\epsilon).$$

Por lo tanto,

$$\kappa\varphi TV^W((f_n - f_{m'})/\epsilon) \leq \frac{1}{3}.$$

Pero

$$\kappa\varphi TV^W((f_n - f_{m'})/\epsilon) \geq \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(\Delta_{10}(f_n)(t_i, a_2) - \Delta_{10}(f_{m'})(t_i, a_2))}{\sum \kappa(\xi, [a_1, b_1])}.$$

De modo que,

$$\frac{1}{3} \geq \lim_{m' \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(\Delta_{10}(f_n)(t_i, a_2) - \Delta_{10}(f_{m'})(t_i, a_2))}{\sum \kappa(\xi, [a_1, b_1])}.$$



Así,

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}\left(\frac{f_n - f}{\epsilon}\right) \leq \frac{1}{3}. \tag{3.3.4}$$

De forma similar se muestra que

$$\kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}\left(\frac{f_n - f}{\epsilon}\right) \leq \frac{1}{3} \tag{3.3.5}$$

todo para $n > N_\epsilon$. Para la variación bidimensional, *en el sentido de Wiener*, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \geq \kappa\varphi TV^W((f_n - f_{m'})/\epsilon) &\geq \kappa\varphi V^W_{I_a^b}\left(\frac{f_n - f_{m'}}{\epsilon}\right) \\ &\geq \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11}(f_n - f)(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{3} \geq \lim_{m' \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11}((f_n - f_{m'})/\epsilon)(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)}.$$

De modo que,

$$\kappa\varphi V_{I_a^b}^W\left(\frac{f_n - f}{\epsilon}\right) = \sup \lim_{m' \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{11}((f_n - f_{m'})/\epsilon)(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)} \leq \frac{1}{3}. \tag{3.3.6}$$

De (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6), se tiene

$$\kappa\varphi TV^W((f_n - f_{m'})/\epsilon) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \tag{3.3.7}$$

Esto quiere decir, que $(f_n - f_{m'})/\epsilon \in \kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$. Por ser $\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$ un espacio vectorial y $f_n \in \kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \in \kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$.

De (3.3.7) se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon$ tal que $\kappa\varphi TV^W((f_n - f)/\epsilon) \leq 1$, siempre que $n \geq N_\epsilon$ en consecuencia por el Lema 3.1, tenemos que

$$\|f_n - f\|_{\kappa\varphi,0}^W < \epsilon$$

Lo que muestra que $\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\kappa\varphi,0}^W$.

□

Definamos en $\kappa\varphi BV^W(I_a^b)$ la función $\|\cdot\|_{\kappa\varphi}^W : \kappa\varphi BV^W(I_a^b) \to [0, +\infty)$ dada por

$$\|f\|_{\kappa\varphi}^W := |f(a)| + \rho_{\kappa\varphi,0}(f - f(a)),$$

donde $\rho_{\kappa\varphi,0}(f - f(a)) = \inf\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi TV^W((f - f(a))/\epsilon) \leq 1\}$.
Pero por la Proposición 3.4, $\kappa\varphi TV^W((f - f(a)) = \kappa\varphi TV^W(f)$, por consiguiente

$$\rho_{\kappa\varphi,0}(f - f(a)) = \rho_{\kappa\varphi,0}(f).$$

Por lo tanto

$$\|\cdot\|_{\kappa\varphi}^W(f) := |f(a)| + \rho_{\kappa\varphi,0}(f - f(a)) = |f(a)| + \rho_{\kappa\varphi,0}(f).$$

Como consecuencia de los Teoremas 3.4 y 3.5, tenemos los dos resultados siguientes

**Teorema 3.6.** *Si $\varphi \in \Phi$ es convexa, entonces $(\kappa\varphi BV^W(I_a^b)), \|\cdot\|_{\kappa\varphi}^W)$ es un espacio normado.*

*Demostración.* Probemos que $\|\cdot\|_{\kappa\varphi}^W$ define una norma sobre el espacio $\kappa\varphi BV^W(I_a^b)$.

1. $\|f\|^W_{\kappa\varphi} > 0$ para toda $f \in \kappa\varphi BV^W(I_a^b)$, ya que $|f(a)| \geq 0$ y $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) > 0$.

2. Si $f \equiv 0$, entonces $|f(a)| = 0$ y $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) = 0$. Por lo tanto

$$\|f\|^W_{\kappa\varphi} = 0.$$

Si $\|f\|^W_{\kappa\varphi} = 0$, entonces $|f(a)| = 0$ y $\rho_{\kappa\varphi,0}(f) = 0$. Esto es, $f(a) = 0$ y $\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} = 0$, pero $\|f\|^W_{\kappa\varphi,0} = 0$ si, y sólo si $f$ es constante, por lo tanto $f(t,s) = f(a) = 0$.

3. Para toda $f, g \in \kappa\varphi BV^W(I_a^b)$, se cumple

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^W_{\kappa\varphi} &= |f(a)+g(a)| + \rho_{\kappa\varphi,0}(f+g-(f+g)(a)) \\
&= |f(a)+g(a)| + \|((f-f(a))+(g-g(a)))\|_{\kappa\varphi,0} \\
&\leq |f(a)| + |g(a)| + \|((f-f(a))\|_{\kappa\varphi,0} + \|(g-g(a)))\|_{\kappa\varphi,0} \\
&= \|f\|_{\kappa\varphi,0} + \|g\|_{\kappa\varphi,0}.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.7.** *Si $\varphi \in \Phi$ es convexa, entonces el espacio $(\kappa\varphi BV^W(I_a^b)), \|\cdot\|^W_{\kappa\varphi})$ es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(\kappa\varphi BV(I_a^b)^W), \|\cdot\|^W_{\kappa\varphi})$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_{m'}\|^W_{\kappa\varphi} < \epsilon$, siempre que $n, m' \geq N_\epsilon$; es decir

$$|f_n(a) - f_{m'}(a)| + \rho^W_{\kappa\varphi,0}((f_n - f_{m'}) - (f_n(a) - f_{m'}(a))) < \epsilon$$

para todo $n, m' \geq N_\epsilon$.

Equivalentemente,

$$|f_n(a) - f_{m'}(a)| + \|f_n - f_n(a) - (f_{m'} - f_{m'}(a))\|^W_{\kappa\varphi,0} < \epsilon$$

para todo $n, m' \geq N_\epsilon$.

Sea $g_n = f_n - f_n(a)$ para todo $n \geq 1$, $g_n$ esta bien definida. $\{g_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto;

$$\|g_n - g_{m'}\|^W_{\kappa\varphi,0} = \|f_n - f_n(a) - (f_{m'} - f_{m'}(a))\|^W_{\kappa\varphi,0} < \epsilon$$

para todo $n, m' \geq N_\epsilon$. Por lo tanto, $(g_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b))$.

Luego, por ser $\kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$ un espacio completo, existe $g \in \kappa\varphi BV_0^W(I_a^b)$ tal que $g_n$ converge a $g$ con la norma $\|\cdot\|^W_{\kappa\varphi,0}$.

Por otro lado, $|f_n(a) - f_{m'}(a)| < \epsilon$ para todo $n, m' \geq N_\epsilon$; es decir la sucesión $(f_n(a))_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, dado que $\mathbb{R}$ es completo, existe $f_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(f_n(a))_{n\geq 1}$ converge a $f_0$.

Por lo tanto, $f_n = f_n(a) + g_n$ converge a $f_0 + g$ con la norma $\|\cdot\|^W_{\kappa\varphi}$.

$f_0 + g \in \kappa\varphi BV^W(I_a^b)$, ya que $f_0, g \in \kappa\varphi BV_0^W(I_a^b))$.
Por lo tanto, $(\kappa\varphi BV^W(I_a^b), \|\cdot\|_{\kappa\varphi}^W)$ es un espacio de Banach.

□

## 3.4. Funciones factorizables Adams-Clarkson

En esta sección estudiamos la relación existente entre las funciones con $\kappa\varphi$-variación acotada en $\mathbb{R}^2$ y las funciones factorizables. Mostraremos un resultado útil para construir ejemplos de funciones con $\kappa\varphi$-variación acotada finita en un rectángulo.

**Definición 3.4.** Sea $f : I_a^b \to \mathbb{R}$ y $\xi$, $\eta$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente. Definamos el incremento de $f$, denotado por $\Delta f$, como

$$\Delta f = \Delta f(t_i, s_j) = f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_i, s_j)$$

para $i = 1, 2 \ldots, m-1$ y $j = 1, 2 \ldots, n-1$.

**Definición 3.5.** $f \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ es factorizable en $I_a^b$ si, y sólo si,

$$f(t,s) = g(t)h(s)$$

para todo $(t,s) \in I_a^b$, donde $g : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ y $h : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ son funciones no nulas.



**Ejemplo 3.1.** $f(t,s) = e^{t+s} = e^t e^s = g(t)h(s)$.

**Proposición 3.5.** *Si la función $f : I_a^b \to \mathbb{R}$ es factorizable, entonces*

$$\Delta_{11} f(t,s) = \Delta g(t) \Delta h(s)$$

*para todo $(t,s) \in I_a^b$.*

*Demostración.* Sea $f(t,s) = g(t)h(s)$ para todo $(t,s) \in I_a^b$ y $\xi$, $\eta$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} f(t_i, s_j) &= f(t_{i-1}, s_{j-1}) - f(t_{i-1}, s_j) - f(t_i, s_{j-1}) + f(t_i, s_j) \\
&= g(t_{i-1})h(s_{j-1}) - g(t_{i-1})h(s_j) - g(t_i)h(s_{j-1}) + g(t_i)h(s_j) \\
&= [g(t_i) - g(t_{i-1})](-h(s_{j-1})) + [g(t_i) - g(t_{i-1})](h(s_j)) \\
&= [g(t_i) - g(t_{i-1})][h(s_j) - h(s_{j-1})] \\
&= \Delta g(t_i) \Delta h(s_j).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.8.** *Sean $\kappa \in \mathcal{K}$, $\varphi \in \Phi$ convexa y $f \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ factorizable, $f(t,s) = g(t)h(s)$. Entonces*

$$f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b) \text{ si, y sòlo si, } g \in \kappa\varphi BV^W([a_1, b_1]) \text{ y } \ h \in \kappa\varphi BV^W([a_2, b_2]).$$

*Demostración.* Sea $f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$ factorizable, entonces

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) + \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) + \kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f) < \infty.$$

Es claro que

$$\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) < \infty \quad \text{y} \quad \kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) < \infty.$$

Por lo tanto

$$\infty > \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|\Delta_{10} f(t_i, a_2))|}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])} = \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|g(t_i) - g(t_{i-1})||h(a_2)|)}{\sum \kappa(\xi; [a_1, b_1])}.$$

Esto quiere decir que la función $|h(a_2)|g \in \kappa\varphi V^W([a_1, b_1])$, y así $g \in \kappa\varphi BV^W([a_1, b_1])$.

De forma similar se prueba que $h \in \kappa\varphi BV^W([a_2, b_2])$.

Recíprocamente, supongamos que $g \in \kappa\varphi BV^W([a_1, b_1])$ y $h \in \kappa\varphi BV^W([a_2, b_2])$. Mostremos que $f(t,s) = g(t)h(s) \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$.

Para ello, sean $\xi$ y $\eta$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ respectivamente. Como $g \in \kappa\varphi V^W([a_1, b_1])$, entonces es acotada; es decir, existe $K > 0$ tal que $|g(s)| \leq K \leq K + 1$ para todo $s \in [a_2, b_2]$, luego por ser $\varphi$ creciente y convexa, tenemos

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) &= \sup \frac{\sum_{j=1}^{n} \varphi(|\Delta_{01} f(a_1, s_j))|}{\sum \kappa(\eta; [a_2, b_2])} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|h(t_j) - h(t_{j-1})||g(a_1)|)}{\sum \kappa(\eta; [a_2, b_2])} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|h(t_j) - h(t_{j-1})|(K+1))}{\sum \kappa(\eta; [a_2, b_2])} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} (K+1)\varphi(|h(t_j) - h(t_{j-1})|)}{\sum \kappa(\eta; [a_2, b_2])} \\
&\leq (K+1) \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(|h(t_j) - h(t_{j-1})|)}{\sum \kappa(\eta; [a_2, b_2])} < \infty.
\end{aligned}$$

Un procedimiento análogo muestra que $\kappa\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) < \infty$.

Sólo resta verificar si $\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f) < \infty$.

$$
\begin{aligned}
\kappa\varphi V^W_{I_a^b}(f) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|\Delta_{11}f(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|g(t_{i-1})h(s_{j-1})-g(t_{i-1})h(s_j)-g(t_i)h(s_{j-1})+g(t_i)h(s_j)|}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(|g(t_{i-1})K-g(t_{i-1})K-g(t_i)K+g(t_i)K|}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)})} \\
&= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(0)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$ y así $f \in \kappa\varphi V^W(I_a^b)$. □



## 3.5. Inclusiones entre espacios generados por estas familias de funciones

En esta sección presentamos bajo que condiciones se cumplen inclusiones entre espacios generados por estas familias de funciones.

**Teorema 3.9.** *Sean $\kappa$, $\kappa_1$, $\kappa_2 \in \mathcal{K}$ y $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2 \in \Phi$. Entonces*

1. *Para $\varphi$ fija y $\kappa_1 \leq \kappa_2$ se cumple que $\kappa_1\varphi BV^W(I_a^b) \subset \kappa_2\varphi BV^W(I_a^b)$.*
2. *Para $\kappa$ fija y $\varphi_2 \leq \varphi_1$, se cumple que $\kappa\varphi_1 BV^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi_2 BV^W(I_a^b)$.*
3. *Si $\kappa_1 \leq \kappa_2$ y $\varphi_2 \leq \varphi_1$, entonces $\kappa_1\varphi_1 BV^W(I_a^b) \subset \kappa_2\varphi_2 BV^W(I_a^b)$.*

*Demostración.*

1. Sea $f \in \kappa_1\varphi_1 BV^W(I_a, b)$, entonces por definición

$$\kappa_1\varphi V^W_{[a_1,b_1]}(f) < \infty; \qquad \kappa_1\varphi V^W_{[a_2,b_2]}(f) < \infty$$

y

$$\kappa\varphi V_{I_a^b}^W(f) < \infty.$$

Dada $\xi = \{t_i\}_{i=1}^m$ partición de $[a_1, b_1]$ y $\eta = \{s_j\}_{j=1}^n$ partición de $[a_2, b_2]$, como $\kappa_1 \leq \kappa_2$, implica que

$$\begin{aligned}
\kappa_2\varphi V_{[a_1,b_1]}^W(f) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^m \varphi(|\Delta_{10} f(t_i, a_2))|}{\sum \kappa_2(\xi; [a_1, b_1])} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^m \varphi(|\Delta_{10} f(t_i, a_2))|}{\sum \kappa_1(\xi; [a_1, b_1])} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_2\varphi V_{[a_2,b_2]}^W(f) &= \sup \frac{\sum_{j=1}^n \varphi(|\Delta_{01} f(a_1, s_j))|}{\sum \kappa_2(\xi; [a_2, b_2])} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{j=1}^n \varphi(|\Delta_{01} f(a_1, s_j))|}{\sum \kappa_1(\xi; [a_2, b_2])} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_2\varphi V_{I_a^b}^W(f) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi(|\Delta_{11} f(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \kappa_2\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi(|\Delta_{11} f(t_i, s_j)|)}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \kappa_1\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}\right)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

por lo tanto $\kappa_2\varphi TV^W(f) < \infty$, de modo que $f \in \kappa_1\varphi BV^W(I_a^b) \subset \kappa_2\varphi BV^W(I_a^b)$.

2. Sea $f \in \kappa\varphi_1 BV^W(I_a^b)$ y $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$, $\eta = \{s_j\}_{j=1}^m$ particiones de $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$, respectivamente.
   Dado que $\varphi_2 \leq \varphi_1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi_2 V^W_{[a_1,b_1]}(f) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi_2(|\Delta_{10} f(t_i,a_2))|}{\sum \kappa(\xi;[a_1,b_1])} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi_1(|\Delta_{10} f(t_i,a_2))|}{\sum \kappa(\xi;[a_1,b_1])} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi_2 V^W_{[a_2,b_2]}(f) &= \sup \frac{\sum_{j=1}^{n} \varphi_2(|\Delta_{01} f(a_1,s_j))|}{\sum \kappa(\xi;[a_2,b_2])} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{j=1}^{n} \varphi_2(|\Delta_{01} f(a_1,s_j))|}{\sum \kappa(\xi;[a_2,b_2])} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa\varphi_2 V^W_{I_a^b}(f) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi_2(|\Delta_{11} f(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi_2(|\Delta_{11} f(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

por lo tanto $\kappa\varphi_2 TV^W(f) < \infty$, así $\kappa\varphi_1 BV^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi_2 BV^W(I_a^b)$.

3. Sea $f \in \kappa_1\varphi_1 BV^W(I_a^b)$, entonces

$$\begin{aligned}
\kappa_2\varphi_2 V^W_{[a_1,b_1]}(f) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi_2(|\Delta_{10} f(t_i,a_2))|}{\sum \kappa_2(\xi;[a_1,b_1])} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi_1(|\Delta_{10} f(t_i,a_2))|}{\sum \kappa_1(\xi;[a_1,b_1])} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_2\varphi_2 V^W_{[a_2,b_2]}(f) &= \sup \frac{\sum_{j=1}^{n} \varphi_2(|\Delta_{01} f(a_1,s_j))|}{\sum \kappa_2(\xi;[a_2,b_2])} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{j=1}^{n} \varphi_1(|\Delta_{01} f(a_1,s_j))|}{\sum \kappa_1(\xi;[a_2,b_2])} \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_1\varphi_2 V^W_{I_a^b}(f) &= \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi_1(|\Delta_{11} f(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&\leq \sup \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi_2(|\Delta_{11} f(t_i,s_j)|)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \kappa\left(\frac{|t_i - t_{i-1}||s_j - s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)} \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f \in \kappa_2\varphi_2 BV^W(I_a^b)$, en consecuencia $\kappa_1\varphi_1 BV^W(I_a^b) \subset \kappa_2\varphi_2 BV^W(I_a^b)$.



□

**Teorema 3.10.** *Sea $\kappa \in \mathcal{K}$ y $\varphi_1$, $\varphi_2 \in \Phi$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\kappa\varphi_1 BV^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi_2 BV^W(I_a^b)$.
2. $\varphi_2 \prec \varphi_1$ *globalmente (es decir, existe una constante $C$ positiva tal que $\varphi_2(t) \leq \varphi_1(Ct)$ para $t \geq 0$).*
3. *Existe una constante $C$ tal que $\|f\|^W_{\kappa\varphi_2} \leq C\|f\|^W_{\kappa\varphi_1}$.*

*Demostración.*

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $\varphi_1 \nprec \varphi_2$, entonces para toda constante $C > 0$ existe $t > 0$ tal que $\varphi_2(t) > \varphi_1(Ct)$. De acuerdo con esto, existen $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{t'_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesiones estrictamente crecientes tales que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty \quad \text{y} \quad \varphi_2(t_n) > \varphi_1(2^{2n} n t_n)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} t'_n = \infty \quad \text{y} \quad \varphi_2(t'_n) > \varphi_1(2^{2n} n t'_n).$$

Como $\varphi$ es convexa y $2^n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 1.6, resulta

$$\varphi_1(nt_n) = \varphi_1\left(\frac{1}{2^{2n}} 2^{2n} n t_n\right) \leq \frac{1}{2^{2n}} \varphi_1(2^{2n} n t_n).$$

Por lo que,

$$2^{2n}\varphi_1(nt_n) \leq \varphi_1(2^{2n}t_n).$$

Análogamente, se tiene que

$$2^{2n}\varphi_2(nt'_n) \leq \varphi_2(2^{2n}t'_n).$$

Por otra parte, sean $\{I_n\}$ y $\{I'_n\}$ sucesiones de intervalos no solapados de $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$ respectivamente tales que

$$|I_n| = \frac{b_1-a_1}{2^n}\frac{\varphi_1(t_1)}{\varphi_1(nt_n)}$$

y

$$|I'_n| = \frac{b_2-a_2}{2^n}\frac{\varphi_1(t'_1)}{\varphi_1(nt'_n)}.$$

siendo posibles tales sucesiones, puesto que

$$\sum|I_n| = \sum\frac{b_1-a_1}{2^n}\frac{\varphi_1(t_1)}{\varphi_1(nt_n)} < \sum\frac{b_1-a_1}{2^n} = b_1-a_1,$$

ya que $\dfrac{\varphi_1(t_1)}{\varphi_1(nt_n)} < 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Análogamente se muestra que

$$\sum|I'_n| < b_2-a_2.$$

Sea $f : I_a^b \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} nt_n & \text{si } x\in I_n \text{ y } y\in[a_2,b_2]/I'_n,\ n\in\mathbb{N} \\ nt'_n & \text{si } y\in I'_n \text{ y } x\in[a_1,b_1]/I_n,\ n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.5.1}$$

Probaremos ahora que $f\in\kappa\varphi_1BV^W(I_a^b)$ pero $f\notin\kappa\varphi_2BV^W(I_a^b)$. Verifiquemos primero que $f\in\kappa\varphi_1BV^W(I_a^b)$.

$$\kappa\varphi_1V^W_{[a_1,b_1]}(f) = \frac{\sum\varphi_1(\Delta_{10}f(I_n))}{\sum\kappa(I_n,[a_1,b_1])} = \frac{\sum\varphi_1(nt_n)|I_n|}{\sum\kappa(I_n,[a_1,b_1])} \leq \sum\frac{1}{2^n}\varphi_1(t_1)|b_1-a_1| < \infty.$$

Por otro lado,

$$\kappa\varphi_1V^W_{[a_2,b_2]}(f) = \frac{\sum\varphi_1(\Delta_{01}f(I'_n))}{\sum\kappa(I'_n,[a_2,b_2])} = \frac{\sum\varphi_1(nt'_n)|I'_n|}{\sum\kappa(I'_n,[a_2,b_2])} \leq \sum\frac{1}{2^n}\varphi_1(t_1)|b_2-a_2| < \infty.$$

Sólo falta calcular la variación bidimensional, para ello, obsérvese que $\Delta_{11}f(t_i,s_j)=0$ para cualesquiera $t_i\in[a_1,b_1]$ y $s_j\in[a_2,b_2]$. Por lo tanto, $f\in\kappa\varphi_1BV^W(I_a^b)$.

Mostraremos ahora que $f\notin\kappa\varphi_2BV^W[I_a^b]$. Sea $0<\alpha\leq1$ y $m\in\mathbb{N}$ tal que $\alpha m>1$, entonces

$$
\begin{aligned}
\kappa\varphi_2 V^W_{[a_1,b_1]}(f) &= \frac{\sum\limits_{n=1} \varphi_2(\alpha(\Delta_{10} f(I_n)))}{\sum \kappa(I_n,[a_1,b_1])} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=1} \varphi_2(\alpha n t_n)|I_n|}{\sum \kappa(I_n,[a_1,b_1])} \\
&\geq \frac{\sum\limits_{n=m} \varphi_2(t_n)|I_n|}{\sum \kappa(I_n,[a_1,b_1])} \\
&> \frac{\sum\limits_{n=m} 2^{2n}\varphi_1(n t_n)|I_n|}{\sum \kappa(I_n,[a_1,b_1])} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=m} 2^{n}\varphi_1(t_1)|b_1-a_1|}{\sum \kappa(I_n,[a_1,b_1])} = \infty.
\end{aligned}
$$

Esto muestra que $f \notin \kappa\varphi_2 BV^W(I_a^b)$, lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto $\varphi_2 \prec \varphi_1$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $f \in \kappa\varphi_1 BV^W(I_a^b)$. Por hipótesis existe $C>0$ tal que $\varphi_2(t) \leq \varphi_1(Ct)$ para todo $t \geq 0$.
Dado $\lambda \in \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_1 TV^W((Cf)/\epsilon) \leq 1\}$, entonces $\kappa\varphi_1 TV^W((Cf)/\lambda) \leq 1$. Para cualquier partición $\xi = \{t_i\}_{i=1}^n$ y $\eta = \{s_j\}_{j=1}^m$ de $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$ respectivamente, vale

$$1 \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_1(|C\Delta_{10} f(t_i,a_2)|/\lambda)}{\sum \kappa(\xi;[a_1,b_1])};$$

$$1 \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_1(|C\Delta_{01} f(a_1,s_j)|/\lambda)}{\sum \kappa(\eta;[a_2,b_2])};$$

y

$$1 \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_1(|C\Delta_{11} f(t_i,s_j)|/\lambda)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\dfrac{|t_i-t_{i-1}||s_j-s_{j-1}|}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right)}.$$

Lo que implica que $\lambda \in \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_1 TV^W((f)/\epsilon) \leq 1\}$, esto significa que

$$\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_1 TV^W((Cf)/\epsilon) \leq 1\} \subset \{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_2 TV^W((f)/\epsilon) \leq 1\}.$$

En consecuencia,

$$\inf\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_2 TV^W((f)/\epsilon) \leq 1\} \leq \inf\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_1 TV^W((Cf)/\epsilon) \leq 1\}.$$

Es decir, $\|f\|^W_{\kappa\varphi_2} \leq \|Cf\|^W_{\kappa\varphi_1} = C\|f\|^W_{\kappa\varphi_1}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $f \in \kappa\varphi_1 BV^W(I_a^b)$. Dado que $\|f\|^W_{\kappa\varphi_2} \leq C\|f\|^W_{\kappa\varphi_1}$ para algún $C > 0$, entonces el conjunto $\{\epsilon > 0 : \kappa\varphi_2 TV^W((f)/\epsilon) \leq 1\}$ es distinto de vacío, por tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\kappa\varphi_1 TV^W((f)/\epsilon) \leq 1.$$

Luego, por ser $\kappa\varphi_2 BV^W(I_a^b)$ un espacio vectorial, se tiene que $\dfrac{f}{\epsilon} \in \kappa\varphi_2 BV^W(I_a^b)$.
Por lo tanto $f \in \kappa\varphi_2 BV^W(I_a^b)$. Y así, queda mostrado que $\kappa\varphi_1 BV^W(I_a^b) \subset \kappa\varphi_2 BV^W(I_a^b)$.

□

# Conclusión

En esta investigación se introduce el concepto de variación acotada de funciones en dos variables, a valores en $\mathbb{R}$, el el sentido de Korenblum y Wiener. En primer lugar, se extendió el concepto de $\kappa\varphi$-variación acotada, *en el sentido de Wiener* a un subconjunto del plano, hecho que resulta de la combinación de los conceptos de $\kappa$-variación y $\varphi$-variación. Para tal extensión nos basamos en el método de extensión utilizado por Chistyakov (ver[6]). Se realizó un estudio sistemático de las propiedades que cumplen las funciones pertenecientes a esta clase de funciones y se observó que estas propiedades son similares a las propiedades que satisfacen las funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada definidas en un intervalo de $\mathbb{R}$. Cabe añadir que una de las propiedades que no se pudo mostrar, es que si $\kappa\varphi TV^W(\cdot)$ es un funcional convexo entonces $\varphi$ es convexa.

Siguiendo este orden de ideas, como resultados de relevancia, se dieron condiciones necesarias y suficientes en $\varphi$ para que esta clase de funciones sea un espacio vectorial, con la suma y multiplicación por escalar usual de funciones. También se establecieron condiciones para que dos clases de funciones generadas a partir de dos $\varphi$-funciones distintas o dos $\kappa$ funciones distintas tengan una relación de inclusión.

En segundo lugar, mediante el Funcional de Minkowski, se logró dotar al espacio $\kappa\varphi BV^W(I_a^b)$ de una norma. Además se verificó que el espacio con esa norma es un espacio completo; es decir es un espacio de Banach. Alcanzando de esta manera todos los objetivos principales planteados al inicio de la investigación.

**Algunos problemas para investigar**.
Aquí presentamos algunos problemas para futuras investigaciones.

1. Definir las funciones $\kappa\varphi$-decrecientes en dos dimensiones y mostrar si estas funciones tienen W-$\kappa\varphi$-variación finita.

2. Determinar si es posible demostrar un Teorema de representación para estas funciones, tipo Jordan o tipo Korenblum.

3. Estudiar algunos problemas relacionados con el operador de composición lineal y no lineal, que involucren condiciones de actuación, como Lipschitzidad local o global, acotación uniforme, compacidad (en el caso lineal) y continuidad.

# Bibliografía


[1] C. R. Adams and J. A. Clarkson, *On definitions of bounded variation for functions of two variables,* Trans. Amer. Math. Soc., vol 35 nº 4 (1933) 824-854.

[2] C. R. Adams and J. A. Clarkson, *Properties of function $f(x,y)$ of bounded variation for functions,* Trans. Amer. Math. Soc., vol 36 nº 4 (1934) 771-730.

[3] T. M Apostol, *Análisis Matemático*. Segunda edición.

[4] C. Arzelá, *Sulle funzioni di por variabili un limitata variazione,* Reale Accademia delle Scienze Dell'stituto di Bologna, 100-107.

[5] L. Avila, *Funciones de p-variación acotada en el sentido de Wiener y Riesz,* trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Punto Fijo, Venezuela, 1994.

[6] V.V. Chistyakov, *Superposition Operators in the Algebra of Functions of two Variables whit Finite Total Variation,* Monatshefte für Mathematik 137 (2002), 99-114.

[7] D. Cyphert and J.Kelingos, *the decomposition of functions of bounded $\kappa$-variation into differences of $\kappa$-decreasing functions.* Studia Mathematica, T. LXXXL (1985)

[8] D.S Cyphert, *Generalized functions of bounded variation an their aplication to the theoryof harmonic functions,* Dissertation in Math., Vanderbilt Univ., Tenessee. 1982

[9] R. M Dudley and R. Norvaiša, *Concrete Functional Calculus.* Further volumes.

[10] H. Federer, *Geometric measure theory, Springer-Verlag,* Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[11] M. Fréchet, *Sur les fonctionnelles continuos,* C.R. Acad. Sci. Paris 150 (1910) 1231-1233

[12] J. Guerrero, *Extensión a $\mathbb{R}^2$ de la función de variación acotada en el sentido de Hardy-Vitali-Wiener.* Tesis Doctoral, Universidad Central de Venezuela, Caracas 2010

[13] G. H. Hardy *On double Fourier series, and especially those which represent the double zeta-function width real and inconmesurable parameters,* Quart. J. Math. Oxford 37 (1905), 53-79

[14] C. Jordan, *Sur la série de Fourier,* C. R. Acad. Sci. Paris,2 (1881).

[15] B. Korenblum, *An extension of the Nevanlinna theory,* Acta Math. 135 (1975), 187-219.

[16] L. Cesari, *Sulle funzioni un limitata variazone*, Annali della Scuola Normale Superiore (1936)

[17] L. Maligranda and W. Orlicz, *On some properties of functions of generalized variation*, Mh. Math.,104 (1987), 53-65

[18] J. Musielak and W. Orlicz, *On generalized variations (I),* Studia Math. 18 (1959), 11-41

[19] J. Musielak and W. Orlicz, *On modular spaces,* Studia Math. 18 (1959), 46-65.

[20] I. P. Natanson., *Theory of Functions of a Real Variable,* Vol.1, rev.ed., Frederick Ungar Publishing, New York, 1961.

[21] M.T. Neves, *$\varphi$-variación acotada en el sentido de Wiener y Riesz y el operador de composición,* trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Aragua, Venezuela, 1994.

[22] J. Park, *On the functions of Bounded $\kappa\varphi$-variations (I).* J. Appl. Math. Infotmations Vol.28(2010), Nº 1-2, pp 487-489.

[23] J. Pierpont, *Lectures in the theory of functions a real variables,* Dover, reprin (1959)

[24] F. Riesz, *Untersuchugen über Systeme Intergrierberer Funktionen,* Math. Analen 69 (1910) 449-497.

[25] S. K. Kim y J. Kim, *Functions of $\kappa\varphi$-variations bounded*, Bull. Korean Math Soc 23(1986), Nº 2, 171-175.

[26] M. Schramm, *Functions of bounded $\varphi$-variation and Riemann-Stieltjes integration,* Trans. Amer.Math. Soc. 267 (1985), Nº1, 49-63.

[27] L. Tonelli, *Sulla quadrature delle superficie,* Rend. Accad. Lincei. 3 (1926) 312-357

[28] D. E. Varberg *On absolutely continuous functions*, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 6-10, 831-834

[29] G. Vitali *Sulle funzioni integrali,* Atti Accad. Schi. Torino CI Sci. Natur. 40 (1905). 1021-1034

[30] G. Waterman, *On the convergence of furier series of functions of generalized bounded variation,* Studia Math. 44 (1972), 107-117.

[31] N. Wiener, *The quadratic variation of function and its Fourier coefficients*, Masachusett J. Math **3**(1924), 72-94.

[32] L. C. Young, *Sur une généralisation de la notion de variation de Pussance Piéme au Sens de N. Wiener et sur la convergence des Séries de Fourier,* C.R. Acad. Sci. París, Ser A-B (1937), No.240,470-472.