



Universidad de Los Andes.
Departamento de Matemáticas
Postgrado de Matemáticas.
Grupo de Análisis Funcional

Manipulabilidad
en Teoría de Elección Social

BdigitalLula.ve

Lic. Jahn Franklin Leal H.

Trabajo de Grado
Para optar al Grado de
Magister Scientiae en Matemáticas
Tutor: Dr. Ramón Pino Pérez

DONACION

Mérida-Venezuela

2005

SERBIULA
Tulio Febres Cordero

C.C.Reconocimiento

Quisiera agradecerle a mi madre Gaudys y a mis hermanos Ernesto, Josué, Eva y Karina por ser mi fuente de inspiración para el éxito que he tenido hasta ahora. Una persona que ha sido mi maestro incondicional y que gracias a él me he orientado en esta línea de investigación; profesor Ramón Pino, gracias. Y gracias a todas las personas que de alguna u otra forma me han ayudado y apoyado para estar en este escalafón de mis éxitos. No me puedo olvidar de una bella dama que ha estado a mi lado durante estos últimos años; Silvana este logro también es tuyo.

Jahn Franklin Leal

Julio - 2005

Bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Sobre relaciones modulares y preórdenes totales	5
2.2. Algunos preórdenes totales definidos con “distancias”.	13
3. Teorema de Imposibilidad	17
3.1. Introducción	17
3.2. Algunas Funciones de Elección.	19
3.3. Propiedades de las funciones de elección	23
3.4. Comentarios sobre algunas propiedades	24
3.5. Teorema de Imposibilidad de Arrow	26
4. El Teorema de manipulabilidad	33
4.1. Esquema Voto o Función de Juego	33
4.2. Manipulabilidad para Esquemas de Votos	34
5. Extensiones del Teorema de manipulabilidad	43
5.1. Manipulabilidad de Funciones de Elección Social	43
5.2. Generalizando Gibbard.	46

5.3. Otro Teorema de Manipulabilidad	48
5.4. Observaciones finales	56
Bibliografía	59

Bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

CAPÍTULO 1

Introducción

La naturaleza benigna provee de manera que en cualquier parte halles algo que aprender.
Leonardo Da Vinci.

La teoría de la elección social trata sobre la toma de decisiones colectivas a partir de las preferencias de los individuos que conforman una sociedad. Estas preferencias están representadas mediante relaciones binarias sobre el conjunto de alternativas. Tengamos presente que los individuos pueden tener opiniones distintas sobre las alternativas sociales. El problema general consiste en lo siguiente: Dado un grupo de *alternativas* (candidatos) y un grupo de *individuos* (votantes) con sus preferencias sobre los *candidatos* ¿Cómo elegir los “mejores” *candidatos* para todo el grupo de *individuos*?, ¿En qué medida el método escogido es “bueno”?

Desde el siglo XVIII hasta ahora fueron apareciendo diversos trabajos académicos que apuntaban a solucionar los problemas de la votación, pero no tuvieron continuidad hasta comienzos del Siglo XX. En 1951 K. Arrow probó un resultado extraordinario que le dio un nuevo vigor y un nuevo enfoque a lo que hoy se llama la “Teoría de Elección Social”. Este resultado es conocido como El Teorema de Imposibilidad de Arrow, también llamado la paradoja de Arrow. Allí se demuestra que no es posible diseñar reglas para la toma de decisiones sociales o políticas que obedezcan al mismo tiempo a un cierto conjunto de criterios “razonables”.

Ese teorema fue enunciado y demostrado por el Premio Nobel de Economía Kenneth Arrow como parte de su tesis de doctorado: *Social choice and individual values*, y popularizado en su

libro del mismo nombre en 1951. Sus contribuciones a la Teoría de Elección Social le valieron, entre otros trabajos, el Premio Nobel de Economía en 1972.

Uno de los temas importantes dentro de la Teoría de Elección Social es el de Manipulabilidad de las funciones de elección social. Grosso modo, una función de elección social (un sistema de voto) es manipulable si hay una situación en que uno de los votantes puede mentir para hacer que el resultado lo favorezca. Sorprendentemente los trabajos de Gibbard y Satterthwaite, de 1973 y 1975 ([7], [19] respectivamente), nos dicen que todo sistema de voto es manipulable o dictatorial. Cabe aclarar que ellos se refieren a sistemas de voto que arrojan siempre un único ganador (funciones univaluadas). Ellos no estudian el problema de las funciones generales de elección que pueden arrojar empates (funciones multivaluadas) y que de hecho dependen de dos parámetros: las preferencias de la población de votantes y de un conjunto de candidatos a elegir, que en general es un subconjunto de todos los candidatos posibles.

Más recientemente, Salvador Barberà [3] y Jean-Pierre Benoit [4] han establecido resultados de manipulabilidad para funciones de elección multivaluadas bajo ciertas condiciones sobre los perfiles de preferencias de los votantes. Sus trabajos son en muchos aspectos similares al trabajo de Gibbard y Satterthwaite. Ellos cambian el tipo de objetos a considerar: en vez de candidatos ellos consideran conjuntos de candidatos. Ese es el espacio de alternativas y es sobre esas alternativas que la población de votantes expresa sus preferencias. De hecho, ellos no consideran todas las preferencias posibles en ese espacio de alternativas, sino que consideran solamente algunas que tienen una estructura muy particular. Es importante notar que el Teorema de Imposibilidad de Arrow, es una herramienta fundamental en las pruebas de los teoremas de manipulabilidad conocidos.

El trabajo nuestro está motivado en la siguiente pregunta: ¿Habrá un resultado de manipulabilidad para funciones de elección generales?

Nosotros introducimos una noción de manipulabilidad para funciones de elección generales que nos parece muy natural. Ella depende de una manera de interpretar una preferencia sobre los candidatos, como una preferencia sobre conjuntos de candidatos. Usando el teorema de Gibbard - Satterthwaite establecemos un teorema de manipulabilidad para funciones de elección generales.

También usando las ideas de la prueba del teorema de Gibbard - Satterthwaite intentamos dar una versión más fuerte del teorema de manipulabilidad. La prueba está hecha módulo una conjetura que aún no hemos podido probar. A pesar de que ese resultado no está completo, la técnica y el avance de nuestros resultados nos parecieron lo suficientemente importantes para incluirlos en esta memoria.

Este trabajo está organizado en cuatro capítulos. El primer capítulo establece resultados y definiciones básicas de las matemáticas que serán utilizados en los capítulos subsecuentes. Ellos

se necesitan para la mejor comprensión del texto. El segundo capítulo trata sobre la Teoría de Elección Social. Allí, luego de una breve introducción al concepto de elección social, definimos funciones de elección social y algunas de sus propiedades. Además, dedicamos una sección al famoso resultado de Arrow que es conocido como el Teorema de Imposibilidad de Arrow. Con la preocupación de que este trabajo sea autocontenido, damos una prueba detallada de la versión que usaremos en los capítulos tres y cuatro. El tercer capítulo está dedicado a establecer el teorema de manipulabilidad de Gibbard - Satterhwaite.

El capítulo cuarto y último constituye nuestro aporte. Allí extendemos la noción de manipulabilidad y mostramos un nuevo resultado de manipulabilidad de funciones de elección basado en el teorema de Gibbard - Satterhwaite [7, 19]. También establecemos una versión más fuerte del resultado previo módulo cierta conjetura.

Bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

CAPÍTULO 2

Preliminares

Este pequeño capítulo está dedicado a presentar los resultados y definiciones básicas utilizadas en los capítulos subsiguientes. El lector con experiencia matemática podrá obviarlo y solamente consultarlo cuando fuese necesario.

Usaremos las notaciones usuales de la lógica para establecer y enunciar propiedades matemáticas. Así los símbolos $\wedge, \vee, \implies, \iff, \forall, \exists$ y \neg , denotarán la conjunción (“y”), la disyunción (“o”), la implicación (“implica”), la doble implicación (“si, y sólo si”), cuantificador universal, (“para todo”), cuantificador existencial (“existe”) y la negación (“no”) respectivamente.

Como es usual, cuando R es una relación (binaria) escribiremos $x \not R y$ en vez de $\neg(x R y)$; por ejemplo $x \neq y, x \not< y, x \not\leq y, x \not> y, x \not\geq y$, en vez de $\neg(x = y), \neg(x < y), \neg(x \leq y), \neg(x > y)$ y $\neg(x \geq y)$ respectivamente.

2.1. Sobre relaciones modulares y preórdenes totales

Consideremos un conjunto X . Denotaremos $\mathcal{P}^*(X) = \{V \subseteq X : V \neq \emptyset\}$.

Definición 2.1 Dado un conjunto X , una relación $<$ sobre X es llamada orden lineal (o total) si satisface:

- (i) $\forall x \in X \quad [x \not< x]$ (**Irreflexividad**).
- (ii) $\forall x, y, z \in X \quad [x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z]$ (**Transitividad**).

(iii) $\forall x, y \in X, x \neq y, [x < y \vee y < x]$ (**Totalidad**).

Definición 2.2 Dado un conjunto X , una relación \prec sobre X se llama modular-1 si existe una aplicación $f : X \rightarrow Y$, con $(Y, <)$ un orden lineal, tal que para todos $x, y \in X$ se cumple

$$x \prec y \iff f(x) < f(y). \quad (2.1)$$

Las siguientes dos definiciones también caracterizan una relación modular. Estas son equivalentes a la definición anterior como mostraremos en la proposición 2.1.

Definición 2.3 Dado un conjunto X , una relación \prec sobre X se llama modular-2 si satisface

(i) $\forall x \in X [x \not\prec x]$ (**Irreflexividad**).

(ii) $\forall x, y, z \in X [x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z]$ (**Transitividad**).

(iii) $\forall x \forall y \forall z [x \prec z \wedge (x \not\prec y \wedge y \not\prec x) \rightarrow y \prec z]$. (**Estratificación**).

Definición 2.4 Dado un conjunto X , una relación \prec sobre X se llama modular-3 si satisface

(m1) $\forall x, y \in X, \neg(x \prec y \wedge y \prec x)$.

(m2) $\forall x, y, z \in X, [x \prec z \rightarrow (x \prec y \vee y \prec z)]$.

En el siguiente resultado mostraremos la equivalencia entre las tres definiciones anteriores.

Proposición 2.1 Las definiciones 2.2, 2.3 y 2.4 son equivalentes. Por consiguiente una relación que satisface cualquiera de ellas, será llamada **modular**.

Demostración.

Primero mostraremos que la definición 2.3 se obtiene a partir de la definición 2.2.

(i) Debemos ver la irreflexividad, es decir, se debe cumplir que $\forall x \in X, [x \not\prec x]$.

En efecto, $x \not\prec x \iff f(x) \not\prec f(x)$, pero es cierto que $f(x) \not\prec f(x)$ por ser $<$ irreflexiva, luego $x \not\prec x$.

(ii) Debemos ver la transitividad, es decir, se debe cumplir que:

$$\forall x, y, z \in X [x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z].$$

Asumamos que $x \prec y$ e $y \prec z$. Como,

$$[x \prec y \wedge y \prec z] \iff [f(x) < f(y) \wedge f(y) < f(z)],$$

se tiene que $f(x) < f(y)$ y $f(y) < f(z)$. Por ser $<$ transitiva se tiene que $f(x) < f(z)$, y usando 2.1 se tiene que $x \prec z$.

(iii) Por último veremos que \prec satisface la estratificación:

$$\forall x \forall y \forall z \quad [x \prec z \wedge (x \not\prec y \wedge y \not\prec x) \longrightarrow y \prec z].$$

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $[x \prec z \wedge (x \not\prec y \wedge y \not\prec x)]$ y que $y \not\prec z$. Del hecho $y \not\prec z$ se tiene que $f(y) \not\prec f(z)$ y como $<$ es total y sabemos que $y \neq z$ (ya que $x \prec z$ pero $y \not\prec z$), se tiene que $f(z) < f(y)$. Además, $x \prec z$ implica que $f(x) < f(z)$ y por ser $<$ transitiva se tiene que $f(x) < f(y)$, es decir, $x \prec y$ lo que contradice el hecho que x e y son incomparables.

Como segundo paso veremos que la definición 2.4 se obtiene a partir de la definición 2.3.

(m1) Debemos ver que $\forall x, y \in X, \neg(x \prec y \wedge y \prec x)$. Razonemos por el absurdo. Supongamos que $x \prec y$ e $y \prec x$. Como \prec es transitiva se tiene que $x \prec x$ lo que contradice la irreflexividad de \prec .

(m2) Veamos que \prec satisface la siguiente propiedad:

$$\forall x, y, z \in X, \quad [x \prec z \longrightarrow (x \prec y \vee y \prec z)].$$

En efecto, si y es incomparable con x , se tiene $x \not\prec y \wedge y \not\prec x$, y usando la propiedad de estratificación se tiene $y \prec z$.

Ahora, si y es comparable con x , se tiene $x \prec y$ o $y \prec x$. En el primer caso no hay nada que probar y en el segundo caso, usando la transitividad de \prec , se tiene que $y \prec z$.

Finalmente veremos que la definición 2.2 se obtiene a partir de la definición 2.4.

Sea X un conjunto dotado con la relación \prec modular-3. Definamos la relación $x \sim y$ de la siguiente manera:

$$x \sim y \iff x \not\prec y \wedge y \not\prec x. \quad (2.2)$$

Esta relación \sim es llamada la relación de indiferencia asociada a \prec . Probemos que \sim es una relación de equivalencia.

Notemos que la propiedad (m1) implica que $x \not\prec x$, así $x \sim x$ para cualquier $x \in X$.

Si $x \sim y \wedge y \sim z$, claramente, usando (m2), se tiene que $x \sim z$, ya que de lo contrario tendríamos $x \prec z$ o $z \prec x$ y en el primer caso (m2) implica que $x \prec y$ o $y \prec z$ lo cual viola la hipótesis $x \sim z \wedge y \sim z$; para el segundo caso usando de nuevo (m2) se tiene que $z \prec y$ o $y \prec x$ lo que de nuevo viola la hipótesis $x \sim z \wedge y \sim z$.

Finalmente la simetría es evidente por definición.

Ahora definimos $[x]$ como la clase de equivalencia de x con respecto a la relación \sim , es decir,

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

Definamos $Y = \{[x] : x \in X\}$ y definamos una relación $<$ sobre Y de la siguiente manera:

$$[x] < [y] \iff x < y. \quad (2.3)$$

Veamos que $<$ esta bien definida, es decir, no depende del representante: si $x \sim x'$ y $y \sim y'$, entonces $x < y$ implica $x' < y'$.

En efecto, como $x < y$, usando **(m2)** y el hecho que $x \sim x'$, necesariamente $x' < y$; de igual manera, como $x' < y$, usando **(m2)** y del hecho que $y \sim y'$, se tiene que $x' < y'$.

Ahora veamos que $<$ es un orden lineal sobre Y .

(i) Debemos ver $\forall [x] \in Y$, se cumple que $[x] \not< [x]$. En efecto, $[x] \not< [x] \iff x \not< x$. Así, usando la propiedad **(m1)** y tomando $y = x$ se tiene que $x \not< x$, por lo tanto $[x] \not< [x]$.

(ii) Ahora probaremos que $<$ satisface la siguiente propiedad:

$$\forall [x], [y], [z] \in Y, \quad [[x] < [y] \wedge [y] < [z]] \Rightarrow [x] < [z].$$

En efecto, $[x] < [y]$ y $[y] < [z]$ si, y sólo si, $x < y$ e $y < z$. Como $x < y$, usando la propiedad **(m2)** se tiene que $x < z$ o $z < y$, pero en virtud de **(m1)** $z < y$ no es posible, por lo tanto se tiene $x < z$, es decir, $[x] < [z]$.

(iii) Finalmente debemos ver que $\forall [x], [y] \in Y$, con $[x] \neq [y]$, se cumple que $[x] < [y] \vee [y] < [x]$. Razonemos por el absurdo. Supongamos que existen $[x] \neq [y]$ en Y , con $[x] \neq [y]$ tales que $[x] \not< [y]$ e $[y] \not< [x]$. Por lo tanto $x \not< y$ e $y \not< x$, es decir $x \sim y$, lo que implica que $[x] = [y]$ lo que es una contradicción.

Para concluir, tenemos Y dotado con un orden lineal $<$ y definimos $f : X \rightarrow Y$ de la siguiente manera $f(x) = [x]$. Por definición tenemos $x < y$ si, y sólo si, $f(x) < f(y)$. Esto termina la prueba. ■

Definición 2.5 Dado un conjunto X , una relación \preceq sobre X es llamada preorden total si satisface:

(p1) $\forall x \in X \quad [x \preceq x]$ (**Reflexividad**).

(p2) $\forall x, y, z \in X \quad [x \preceq y \wedge y \preceq z \Rightarrow x \preceq z]$ (**Transitividad**).

(p3) $\forall x, y \in X \quad [x \preceq y \vee y \preceq x]$ (**Totalidad**).

Note que a diferencia de los órdenes totales, lo que un preorden total no necesariamente cumple es la antisimetría, es decir, no se cumple que $\forall x, y \in X \quad [x \preceq y \wedge y \preceq x \Rightarrow x = y]$

Sean RM y P los conjuntos de relaciones modulares y preórdenes totales sobre X respectivamente, es decir,

$$\begin{aligned} RM &= \{ \prec: \prec \text{ es una relación modular sobre } X \} \\ P &= \{ \preceq: \preceq \text{ es un preorden total sobre } X \}. \end{aligned}$$

Teorema 2.1 *Existe una biyección entre las relaciones modulares y los preórdenes totales sobre un conjunto X .*

Demostración.

- Dada una relación modular \prec definimos una relación \preceq de la siguiente manera:

$$a \preceq b \iff [a \prec b \vee a \sim b],$$

donde \sim es la relación definida en (2.2) la cual, ya vimos, es una relación de equivalencia.

Veamos que \preceq es efectivamente un preorden total.

Reflexividad: Claramente esta propiedad es satisfecha ya que para todo $x \in X$ se tiene $x \preceq x$ si, y sólo si, $x \prec x$ o $x \sim x$, pero esto último siempre ocurre, pues \sim es una relación de equivalencia.

Transitividad: Supongamos que $x \preceq y \wedge y \preceq z$. Consideremos cuatro casos:

- (i) $x \prec y \wedge y \prec z$, se concluye, usando transitividad de \prec , que $x \prec z$, por lo tanto $x \preceq z$.
- (ii) $x \prec y \wedge y \sim z$, se concluye, usando **(m2)**, que $x \prec z$ (pues $z \prec y$ está prohibido por $y \sim z$), de donde $x \preceq z$.
- (iii) $x \sim y \wedge y \prec z$, se concluye, usando estratificación, que $x \prec z$, de donde $x \preceq z$.
- (iv) $x \sim y \wedge y \sim z$. Usando la transitividad de \sim se concluye que $x \sim z$, por lo tanto $x \preceq z$.

Totalidad: Debemos ver que para todo $x, y \in X$ se cumple que $x \preceq y$ o $y \preceq x$. Si $x \sim y$, claramente $x \preceq y$. Si $x \not\sim y$, entonces $x \prec y$ o $y \prec x$. Así, $x \preceq y$ o $y \preceq x$.

Hemos definido una función φ que envía una relación modular \prec en un preorden total \preceq , es decir, $\prec \xrightarrow{\varphi} \preceq$.

- Ahora construyamos una función ψ que envía un preorden total \preceq en una relación modular \prec , es decir, definimos $\preceq \xrightarrow{\psi} \prec$ de la siguiente manera:

$$a \prec b \iff [a \preceq b \text{ y } b \not\preceq a]$$

Veamos que \prec es efectivamente un relación modular.

Irreflexividad: Debemos ver que para todo $x \in X$ se cumple que $x \not\prec x$, es decir, $x \not\preceq x$ o $x \preceq x$, pero $x \preceq x$ es cierto por ser \preceq reflexiva. Así, \prec es irreflexiva.

Transitividad: Supongamos que $x \prec y \wedge y \prec z$, es decir, $x \preceq y \wedge y \not\preceq x$, $y \preceq z \wedge z \not\preceq y$. Por transitividad de \preceq se tiene $x \preceq z$. Falta ver que $z \not\preceq x$. En efecto, si suponemos $z \preceq x$, entonces usando la transitividad de \preceq tenemos $z \preceq y$, lo cual contradice la hipótesis $z \not\preceq y$.

Estratificación: Debemos ver que para todo $x, y, z \in X$ se cumple que: $x \prec z$ y y incomparable con x , implica $y \prec z$. Supongamos que $x \prec z$ y y incomparable con x . Esto significa:

$$x \prec z \iff [x \preceq z \wedge z \not\preceq x] \quad (2.4)$$

y $x \sim y$ es equivalente a $x \preceq y \wedge y \preceq x$. En efecto,

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff x \not\prec y \wedge y \not\prec x \\ &\iff (x \not\preceq y \vee y \preceq x) \wedge (y \not\preceq x \vee x \preceq y) \\ &\iff (x \not\preceq y \wedge y \not\preceq x) \vee (x \not\preceq y \wedge x \preceq y) \vee (y \preceq x \wedge y \not\preceq x) \vee (y \preceq x \wedge x \preceq y) \end{aligned}$$

Pero $(x \not\preceq y \wedge y \not\preceq x)$ no puede ocurrir porque \preceq es total y tampoco puede ocurrir $(x \not\preceq y \wedge x \preceq y)$ o $(y \preceq x \wedge y \not\preceq x)$ por ser contradictorias. Así la única que ocurre es $(y \preceq x \wedge x \preceq y)$, por lo tanto

$$x \sim y \iff x \preceq y \wedge y \preceq x.$$

Así, cuando $x \prec z$ y $x \sim y$ se tiene $x \preceq z$, $z \not\preceq x$, $x \preceq y$ e $y \preceq x$. De allí, $y \preceq z$ (por transitividad de \preceq). Falta ver que $z \not\preceq y$. Si no fuese así tendríamos $z \preceq y$ y por transitividad, $z \preceq x$, lo cual es una contradicción. En conclusión tenemos $y \preceq z$ y $z \not\preceq y$, es decir, $y \prec z$.

Hemos probado que \prec es modular.

Así, hemos construido dos funciones φ y ψ , tales que

$$\begin{aligned} \varphi : RM &\longrightarrow P \\ \psi : P &\longrightarrow RM. \end{aligned}$$

Para terminar la prueba del teorema, basta notar que

$$\varphi \circ \psi = id_P \text{ y } \psi \circ \varphi = id_{RM},$$

es decir φ es una biyección con inversa ψ . ■

El teorema 2.1 hará que a veces confundamos un preorden total \preceq con su relación modular \prec y viceversa.

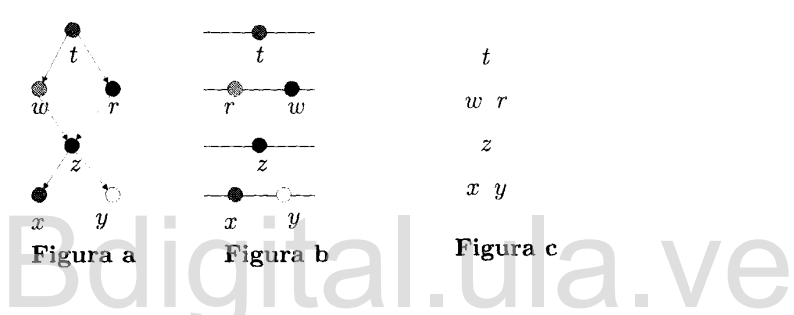
Notación Gráfica:

Sean \prec y \preceq la relación modular y el preorden total respectivamente, definidos por:

$$\prec = \{(x, z), (x, w), (x, r), (x, t), (y, z), (y, w), (y, r), (y, t), (z, w), (z, r), (z, t), (w, t), (r, t)\}$$

$$\preceq = \prec \cup \{(x, x), (y, y), (z, z), (w, w), (r, r), (t, t), (x, y), (y, x), (w, r)\}$$

Nosotros usaremos la siguiente notación para representar de manera gráfica y abreviada las relaciones anteriores:



El grafo dirigido en la **Figura a** expresa lo siguiente: Las flechas indican el orden de relación, por ejemplo, $t \rightarrow w$ significa que $w \prec t$ y w y r son incomparables con respecto a la relación modular \prec . Así, \prec es la clausura transitiva del grafo de la figura a y \preceq es la clausura transitiva de $\prec \cup \sim$ generadas por la **Figura a**, por ejemplo, se cumple $w \preceq r$ y $r \preceq w$.

El la **Figura b** se expresan \prec y \preceq mediante niveles, donde los elementos que están en el nivel mas bajo son “mejores” con respecto a la relación modular \prec , o al preorden total \preceq que los elementos que están en niveles superiores por ejemplo, $x \prec z$ y $y \prec z$. Los elementos que están en el mismo nivel son “indiferentes” (incomparables), por ejemplo, $x \preceq y$ y $y \preceq x$.

La **Figura c**, es simplemente una abreviación de la **Figura a** y la **Figura b**, y es la que generalmente usaremos posteriormente.

Definición 2.6 Sean \preceq_1 y \preceq_2 preórdenes totales sobre un conjunto X . Definimos una relación $\preceq_{lex}(\preceq_1, \preceq_2)$ (para simplificar la notación la llamaremos \preceq_{lex}) sobre X de la siguiente manera:

$$\forall a, b \in X, \quad a \preceq_{lex} b \iff [a \prec_1 b \vee (a \sim_1 b \wedge a \preceq_2 b)].$$

Lema 2.1 La relación \preceq_{lex} es un preorden total sobre X .

Demostración.

Reflexividad: Debemos ver que $\forall x \in X \ [x \preceq_{\text{lex}} x]$. En efecto, $x \preceq_{\text{lex}} x$ significa

$$[x \prec_1 x \vee (x \sim_1 x \wedge x \preceq_2 x)].$$

Ya que \sim_1 y \preceq_2 son reflexivas, ocurre $x \sim_1 x$ y $x \preceq_2 x$. En consecuencia $x \preceq_{\text{lex}} x$.

Transitividad: Debemos ver que $\forall x, y, z \in X$ si $x \preceq_{\text{lex}} y \wedge y \preceq_{\text{lex}} z$ entonces $x \preceq_{\text{lex}} z$, es decir, queremos ver que

$$x \prec_1 z \vee (x \sim_1 z \wedge x \preceq_2 z) \quad (2.5)$$

Notemos que

$$x \preceq_{\text{lex}} y \wedge y \preceq_{\text{lex}} z \iff [x \prec_1 y \vee (x \sim_1 y \wedge x \preceq_2 y)] \wedge [y \prec_1 z \vee (y \sim_1 z \wedge y \preceq_2 z)].$$

Veamos los posibles casos:

Caso 1: $x \prec_1 y \wedge y \prec_1 z$. Claramente, por transitividad de \preceq_1 , se tiene $x \prec_1 z$. Por lo tanto se cumple (2.5).

Caso 2: $x \prec_1 y \wedge (y \sim_1 z \wedge y \preceq_2 z)$. Aquí tenemos que $x \prec_1 y \wedge y \sim_1 z$ implica que $x \prec_1 z$. Por lo tanto se cumple (2.5).

Caso 3: $(x \sim_1 y \wedge x \preceq_2 y) \wedge y \prec_1 z$. En particular tenemos que $x \prec_1 z$. Así, se cumple (2.5).

Caso 4: $(x \sim_1 y \wedge x \preceq_2 y) \wedge (y \sim_1 z \wedge y \preceq_2 z)$. Como $x \sim_1 y \wedge y \sim_1 z$ se tiene que $x \sim_1 z$. Por otra parte, como $x \preceq_2 y \wedge y \preceq_2 z$ se tiene que $x \preceq_2 z$. Por lo tanto tenemos que $x \sim_1 z$ y $x \preceq_2 z$ y de nuevo se cumple (2.5).

Totalidad: Debemos ver que $\forall x, y \in X \ [x \preceq_{\text{lex}} y \vee y \preceq_{\text{lex}} x]$. Es decir, debemos ver que

$$[x \prec_1 y \vee (x \sim_1 y \wedge x \preceq_2 y)] \vee [y \prec_1 x \vee (y \sim_1 x \wedge y \preceq_2 x)]. \quad (2.6)$$

Como \preceq_1 es un preorden total entonces siempre sucede que $x \prec_1 y$ o $y \prec_1 x$ o bien $x \sim_1 y$. También se tiene que $x \preceq_2 y$ o $y \preceq_2 x$, gracias a la totalidad de \preceq_2 . De este hecho es fácil ver que 2.6 se cumple. ■

Definición 2.7 Sea X un conjunto finito y sean $A, B \in \mathcal{P}^*(X)$. Definimos una relación \leq_{car} entre la cardinalidad de dos conjuntos como sigue: $A \leq_{\text{car}} B$ si, y sólo si, el número de elementos que tiene el conjunto A es menor o igual que el número de elementos que tiene el conjunto B .

Se puede verificar fácilmente que la relación \leq_{car} es un preorden total sobre $\mathcal{P}^*(X)$.

Definición 2.8 Dado $V \subseteq X$ y \preceq un preorden total sobre X , definimos:

$$\text{mín}(V, \preceq) := \text{mín}\{x \in V : \forall y \in V, x \preceq y\}.$$

Los dos siguientes lemas tienen una prueba inmediata.

Lema 2.2 Si \preceq es un preorden total sobre X y $V \subseteq X$, $a \in V$ se tiene que: si $a \in \text{mín}(V, \preceq)$ y $b \in V \setminus \text{mín}(V, \preceq)$ entonces $a \prec b$.

Lema 2.3 Si \preceq es un preorden total sobre X y $V \subseteq X$, $V \neq \emptyset$ se tiene que: $a \notin \text{mín}(V, \preceq)$ si, y sólo si, existe $b \in V$ tal que $b \prec a$.

Lema 2.4 Sean \preceq_1 y \preceq_2 preórdenes totales sobre un conjunto X .

Consideremos \preceq_{lex} y $V \in \mathcal{P}^*(X)$. Entonces

$$\text{mín}(V, \preceq_{lex}) = \text{mín}(\text{mín}(V, \preceq_1), \preceq_2).$$

Demostración. Sea $a \in \text{mín}(V, \preceq_{lex})$, esto significa que $a \in V$ y para todo $b \in V$ se tiene que $a \preceq_{lex} b$, es decir, $a \prec_1 b$ o $(a \sim_1 b \wedge a \preceq_2 b)$.

Primero notemos que $a \in \text{mín}(V, \preceq_1)$; si no, existe $b \in V$ tal que $b \prec_1 a$ (ver Lema 2.3) y esto contradice el hecho que $a \prec_1 b$ o $a \sim_1 b$.

Sea $B = \text{mín}(V, \preceq_1)$. Veamos ahora que $a \in \text{mín}(B, \preceq_2)$. Si suponemos lo contrario, tenemos que existe $b \in B$ tal que $b \prec_2 a$, pero esto contradice el hecho que $a \preceq_2 b$.

Recíprocamente, si $a \in \text{mín}(\text{mín}(V, \preceq_1), \preceq_2)$, tenemos que $a \in \text{mín}(V, \preceq_1)$, es decir, $\forall b \in V$ se tiene $a \preceq_1 b$.

Ahora bien, los elementos de V se pueden dividir en dos categorías, $B = \text{mín}(V, \preceq_1)$ y su complemento, es decir, $V \setminus B$. Así, si $b \in V$ se cumple que, $b \in B$ o bien $b \in V \setminus B$. En el primer caso tenemos que $a \prec_1 b$ (ver Lema 2.2) y en el segundo caso se tiene $a \sim_1 b$, pero como $b \in B$ se tiene $a \preceq_2 b$, pues $a \in \text{mín}(B, \preceq_2)$. En resumen, tenemos que para todo $b \in V$ sucede que

$$a \prec_1 b \quad \text{o bien,} \quad (a \sim_1 b \wedge a \preceq_2 b),$$

es decir, $a \preceq_{lex} b$. Esto implica que $a \in \text{mín}(V, \preceq_{lex})$. ■

2.2. Algunos preórdenes totales definidos con "distancias".

Definición 2.9 Dado un conjunto A definimos $\mathcal{M}(A)$ como el conjunto formado por todos los multiconjuntos cuyos elementos están en A . Por ejemplo si, $A = \{a, b, c\}$, entonces $\{a, a, a, b, b\} \in \mathcal{M}(A)$.

Además dados $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(A)$ denotamos la unión de multiconjuntos por $\mu_1 \sqcup \mu_2$, el cual es el multiconjunto formado por los elementos que están o bien en μ_1 , o bien en μ_2 . Por ejemplo, $\{a, b, b\} \sqcup \{b, a\} = \{a, a, b, b, b\}$.

Si u es un vector, entonces u_k denotará la k -ésima coordenada de u .

Definición 2.10 Sea \mathcal{D} un conjunto formado por vectores de dimensión finita cuyas entradas son números naturales. Definimos la función $\downarrow: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, que ordena los vectores de manera decreciente, como sigue:

$\downarrow(v_1, \dots, v_n) = (v_{k_1}, \dots, v_{k_n})$, donde $v_{k_i} \geq v_{k_{i+1}}$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $\{v_{k_1}, \dots, v_{k_n}\} = \{v_1, \dots, v_n\}$ (la última igualdad como multiconjunto).

Ejemplo 2.1 Consideremos un vector $w = (2, 5, 6, 7, 9, 2, 5, 9)$. Así, $\downarrow(w) = (9, 9, 7, 6, 5, 5, 2, 2)$.

Definición 2.11 Sean $V = (v_1, \dots, v_n)$ y $W = (w_1, \dots, w_n)$ dos vectores de números naturales. Definimos el orden \leq_{olex} lexicográfico¹ entre los vectores V y W , de la siguiente manera:

$V \leq_{olex} W$ sii $V = W$ o bien $V <_{olex} W$, en donde

$$V <_{olex} W \iff \exists i \leq n \text{ tal que } v_i < w_i \text{ y } \forall j < i \text{ se tiene } v_j = w_j.$$

es decir, en la primera componente i en que difieren se tiene $v_i < w_i$ ².

$$V =_{olex} W \iff V = W.$$

Ejemplos 2.1

- Si $v = (3, 6, 5, 9, 1)$ y $w = (3, 5, 8, 1, 1)$, entonces $w <_{olex} v$.
- Si $v = (8, 3, 2, 9, 8)$ y $w = (9, 1, 1, 1, 1)$, entonces $v <_{olex} w$.
- Si $v = (3, 3, 3, 3, 1)$ y $w = (3, 3, 3, 3, 2)$, entonces $v <_{olex} w$.

Definición 2.12 Sea $X = \{x_0, \dots, x_k\}$ un conjunto finito alternativas. Sea

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{N}$$

una distancia, es decir, una función que satisface:

$$(i) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X,$$

¹Es muy fácil ver que \leq_{olex} es un orden lineal.

²Es muy fácil ver que $<_{olex}$ es un orden lineal estricto

$$(ii) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X,$$

$$(iii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Podemos extender d a una función entre elementos de X y conjuntos formados por elementos de X , de la siguiente manera

$$\begin{aligned} d^* : X \times \mathcal{P}^*(X) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ d^*(x, A) &= \min_{y \in A} (d(x, y)) \end{aligned}$$

Sea $A \subseteq X$ y \preceq un preorden total sobre X . Se construye \preceq_A un preorden total de la manera siguiente:

$$x \preceq_A y \iff d^*(x, A) \leq d^*(y, A)$$

Notación: Si \preceq es un preorden total sobre X , denotaremos $\min(\preceq)$ al conjunto $\min(X, \preceq)$.

Definición 2.13 Sea \preceq preorden total sobre X y $A = \min(X, \preceq)$. Diremos que \preceq es d -consistente si $\preceq = \preceq_A$.

Ejemplo 2.2 La siguiente distancia es llamada distancia de Hamming (estudiada en la Teoría de Códigos, ver [10], [11], [12] y [13]) y la definimos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{N} \\ d(x_i, x_j) &= \# \text{ de coordenadas en que difieren } x_j \text{ y } x_i \end{aligned}$$

Sea $X = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$. Consideremos los preórdenes \preceq_1 y \preceq_2 dados por:

$$\begin{array}{cc} (1, 1, 0) & (1, 1, 0)(0, 0, 0) \\ (0, 1, 0)(1, 0, 0)(1, 1, 1) & (1, 0, 0)(1, 0, 1)(0, 1, 1) \\ (1, 0, 1)(0, 0, 0)(0, 1, 1) & (0, 1, 0)(1, 1, 1) \\ (0, 0, 1) & (0, 0, 1) \\ \uparrow & \uparrow \\ \preceq_1 & \preceq_2 \end{array}$$

Resulta fácil verificar que el preorden \preceq_1 es d -consistente, mientras que \preceq_2 no lo es.

Notación: Si \preceq es un preorden total sobre X , y $V \subseteq X$, denotaremos por $\preceq|_V$ a la restricción de \preceq al conjunto V , es decir.

$$\preceq|_V = \{(x, y) \in V^2 : x \preceq y\}.$$

Por extensión, si u es un vector de preórdenes totales sobre X , digamos $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$, y $V \subseteq X$, definimos

$$u|_V = (\preceq_{1|_V}, \dots, \preceq_{n|_V})$$

Ejemplo 2.3 Si $X = \{x, y, z, w\}$, $V = \{x, z\}$ y \preceq está representado por:

z
 w
 xw

entonces $\preceq|_V$ estará representado por:

z
 x

Bdigital.ula.ve

CAPÍTULO 3

Teorema de Imposibilidad

3.1. Introducción

La Teoría de Elección Social trata sobre la toma de decisiones colectivas a partir de las preferencias de los individuos que conforman una sociedad.

El problema general consiste en lo siguiente: Dado un grupo de *alternativas* (candidatos) y un grupo de *individuos* (votantes) con sus preferencias sobre los *candidatos* ¿cómo elegir los “mejores” *candidatos* para todo el grupo de *individuos*?, ¿en qué medida el método escogido es “bueno”?

Comenzaremos introduciendo los conceptos básicos de la Teoría de Elección Social. Asumiremos que tenemos un conjunto de n votantes, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, y que cada uno de los individuos ya tiene totalmente clara su preferencia sobre los candidatos. Consideraremos el conjunto de alternativas o *candidatos* representado como $X = \{x, y, z, \dots\}$ que supondremos siempre finito.

Primero debemos ver cómo representar las preferencias de cada individuo. Esto lo haremos mediante una relación que necesariamente será un preorden total, es decir, una relación transitiva, reflexiva y total (ver la definición 2.5). Así, la relación \preceq_i , representa la preferencia del individuo i respecto a las alternativas. Así, si $x, y \in X$, entonces $x \preceq_i y$ significa que el individuo i considera a la alternativa x al menos tan buena como a la alternativa y .

De manera natural, es fácil aceptar que \preceq_i es un preorden total, pues para cada individuo i y para dos candidatos, x, y , siempre sucede que $x \preceq_i y$ o $y \preceq_i x$. La transitividad expresa la

coherencia de las preferencias.

Pasamos luego a definir la preferencia estricta para un individuo entre dos candidatos, es decir, la relación estricta \prec_i asociada a \preceq_i se define así:

$$x \prec_i y \text{ si y sólo si, } x \preceq_i y \wedge y \not\preceq_i x.$$

Como ya vimos en los preliminares, esta relación es modular.

De manera similar podemos definir la relación de indiferencia, que representará el caso en que a un individuo le sea indiferente votar por una alternativa tanto como por la otra. Esta relación de indiferencia \simeq_i asociada a \preceq_i se define así:

$$x \simeq_i y \text{ si, y sólo si, } x \preceq_i y \wedge y \preceq_i x.$$

Como ya vimos en los preliminares, esta relación es de equivalencia.

Teniendo las posibles preferencias de cada individuo, podemos representar las preferencias de n individuos mediante un vector, el cual llamaremos *perfil*, donde guardaremos esta información. Es decir, un *perfil* u es un vector de la forma

$$u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n),$$

donde cada componente \preceq_i es un preorden total y para cada i , la relación \preceq_i representa la preferencia del individuo i . Así, cada componente de u almacena la información respecto al voto de algún individuo.

Es importante resaltar que se pueden definir muchas maneras de elegir. Dependiendo del caso en que se esté trabajando o de los resultados que la sociedad o una persona en particular aspire tener, el método será más o menos adecuado. Así, para comenzar, daremos una definición general de función de elección y presentaremos algunas ejemplos de ellas.

Puede ser el caso que de un grupo de alternativas X se esté interesado en elegir sobre un subconjunto de X , en este sentido definiremos una *agenda* V como cualquier subconjunto de X no vacío, es decir, $V \subseteq X$. Dicho esto, pasaremos a definir el concepto de Función de Elección.

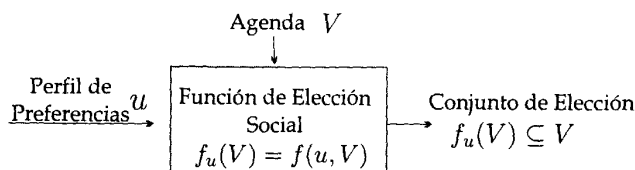
Sean $\mathcal{P}^*(X) = \{V \subseteq X : V \neq \emptyset\}$, \mathcal{P} el conjunto de todos los preórdenes totales y \mathcal{P}^n el conjunto de todos los perfiles de tamaño n .

Observación 3.1 *En todo el trabajo siempre supondremos que la cardinalidad del conjunto de alternativas o candidatos es mayor o igual que tres y la cardinalidad del conjunto de individuos o votantes también es mayor o igual que tres.*

Definición 3.1 Sea X un conjunto de alternativas. Se define una función de elección, como una función:

$$f : P^n \times P^*(X) \longrightarrow P^*(X), \text{ tal que } \forall u \in P^n, \forall V \in P^*(X), \quad f(u, V) \subseteq V.$$

Denotaremos $f(u, V)$ por $f_u(V)$. El siguiente diagrama esquematiza la definición:



3.2. Algunas Funciones de Elección.

La Regla de Borda

El primer ejemplo que consideramos es la Regla de Borda (Ver [1], [8] y [14] en las referencias). Esta función se considera una de las funciones más importantes en la Teoría de Elección, y consiste en una manera de establecer niveles, con respecto a las preferencias de los individuos, entre los candidatos. Veamos su definición precisa.

Sean $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Para cada elemento i de un perfil $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_m)$ existe una función $r_i(x)$ definida por:

$$r_i(x) = k \iff k \text{ es el mayor entero tal que } \exists x_0, x_1, \dots, x_k \in X \text{ con } x_j \prec_i x_{j+1} \text{ y } x_k = x.$$

Luego definimos

$$r(x) = \sum_{i=1}^n r_i(x).$$

$r(x)$ es llamado el ingrediente principal de la *Función Global de Borda*:

Luego

$$f_u^B(V) = \{x \in V : r(x) \preceq r(y), \forall y \in V\}.$$

Otra manera de definir la regla de Borda es asociando a un perfil u un preorden total \preceq_u^B definido mediante:

$$x \preceq_u^B y \iff r(x) \leq r(y).$$

En consecuencia podemos expresar la Regla de Borda como $f_u^B(V) = \min(V, \preceq_u^B)$. Es fácil ver que ambas definiciones coinciden y que \preceq_u^B es un preorden total.

Las siguientes funciones están definidas a partir de distancias. Estas funciones se encuentran con más detalles en [14].

La Función f^Σ

Sea $d : X \times X \rightarrow \mathbb{N}$ una distancia y consideremos una extensión de d como sigue:

$$\begin{aligned} d^* &: X \times \mathcal{P}^*(X) \rightarrow \mathbb{N} \\ d^*(x, A) &= \min_{y \in A} (d(x, y)). \end{aligned}$$

Definición 3.2 Definimos la distancia d^Σ entre un elemento de X y un multiconjunto de $\mathcal{P}(X)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d^\Sigma &: X \times \mathcal{M}(\mathcal{P}(X)) \rightarrow \mathbb{N} \\ d^\Sigma(x, \mu) &= \sum_{A \in \mu} d^*(x, A). \end{aligned}$$

Dado un perfil $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_k)$ se le puede asociar un elemento $\rho_u \in \mathcal{M}(\mathcal{P}(X))$, llamado el conjunto de preferencias principales, de la siguiente manera:

$$\rho_u = \{\min(\preceq_1), \dots, \min(\preceq_k)\}. \quad (3.1)$$

Ahora se define \preceq_u^Σ asociado a un perfil u :

$$x \preceq_u^\Sigma y \iff d^\Sigma(x, \rho_u) \leq d^\Sigma(y, \rho_u).$$

Finalmente se puede definir f_u^Σ como la función de elección asociada a \preceq_u^Σ , es decir,

$$f_u^\Sigma(V) = \min(V, \preceq_u^\Sigma).$$

Observación 3.2 Es fácil ver que \preceq_u^Σ es un preorden total.

Esta función tiene un buen comportamiento para los perfiles d -consistentes (ver [10], [11] y [14]). Donde un perfil $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ es d -consistente si cada \preceq_i , $i = 1, \dots, n$ es d -consistente. (ver definición 2.13).

Para ilustrar el comportamiento de esta función veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1 Sea $X = \{x_0, \dots, x_{15}\}$ un conjunto de dieciséis alternativas y $N = \{1, 2, 3, 4\}$ cuatro votantes.

Codifiquemos las alternativas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} x_0 = (0, 0, 0, 0) & x_1 = (0, 0, 0, 1) & x_2 = (0, 0, 1, 0) & x_3 = (0, 0, 1, 1) \\ x_4 = (0, 1, 0, 0) & x_5 = (0, 1, 0, 1) & x_6 = (0, 1, 1, 0) & x_7 = (0, 1, 1, 1) \\ x_8 = (1, 0, 0, 0) & x_9 = (1, 0, 0, 1) & x_{10} = (1, 0, 1, 0) & x_{11} = (1, 0, 1, 1) \\ x_{12} = (1, 1, 0, 0) & x_{13} = (1, 1, 0, 1) & x_{14} = (1, 1, 1, 0) & x_{15} = (1, 1, 1, 1) \end{array}$$

Definamos la siguiente distancia:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$d(x_i, x_j) = \# \text{ de coordenadas en que difieren } x_j \text{ y } x_i$$

Esta distancia es llamada distancia de Hamming (estudiada en la Teoría de Códigos, ver [10], [11], [12] y [13]).

Sea $u = (\preceq_1, \preceq_2, \preceq_3, \preceq_4)$, tal que el perfil asociado $\rho_u = \{\min(\preceq_1), \dots, \min(\preceq_4)\}$ viene dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min(\preceq_1) &= \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\} & \min(\preceq_2) &= \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\} \\ \min(\preceq_3) &= \{(0, 0, 0, 0)\} & \min(\preceq_4) &= \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Sea $V = X \setminus \{(0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$ y para cada $i = 1, \dots, 4$, sea $\varphi_i = \min(\preceq_i)$. Veremos que $f_u^\Sigma(V) = \{(1, 1, 1, 1)\}$. Para ello usaremos la siguiente tabla, donde en la primera columna tenemos las alternativas, en las entradas de las siguientes cuatro columnas tenemos la distancia de cada alternativa a cada φ_i y en la última, la distancia al multiconjunto correspondiente (la suma de las cuatro entradas precedentes de la fila en cuestión). El resultado son la o las alternativas que dan el mínimo en la última columna.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	d^Σ
$(0, 0, 0, 0)$	3	3	0	2	8
$(0, 0, 0, 1)$	3	3	1	3	10
$(0, 0, 1, 0)$	2	2	1	1	6
$(0, 0, 1, 1)$	2	2	2	2	8
$(0, 1, 0, 0)$	2	2	1	1	6
$(0, 1, 0, 1)$	2	2	2	2	8
$(0, 1, 1, 1)$	1	1	3	1	6
$(1, 0, 0, 0)$	2	2	1	2	7
$(1, 0, 0, 1)$	2	2	2	3	9
$(1, 0, 1, 1)$	1	1	3	2	7
$(1, 1, 0, 1)$	1	1	3	2	7
$(1, 1, 1, 1)$	0	0	4	1	5

Así, $f_u^\Sigma(V) = \{(1, 1, 1, 1)\}$.

La Función f^{GMax}

Para presentar la siguiente función daremos unas definiciones previas:

Definición 3.3 Consideremos $\rho = \{A_1, \dots, A_n\}$ un multiconjunto, donde cada $A_i \in \mathcal{P}^*(X)$. Sea $x \in X$, definimos

$$d^{GM_{ax}}(x, \rho) = \downarrow (d^*(x, A_1), \dots, d^*(x, A_n)).$$

es decir, el vector ordenado de distancias de x a cada A_i , ver definición 2.10.

Definición 3.4 Sea u un perfil y sea $\rho_u = \{A_1, \dots, A_k\}$ el multiconjunto asociado a u poniendo $A_i = \min(\preceq_i)$. Definimos $\preceq_u^{GM_{ax}}$, un preorden total asociado a u , de la siguiente manera

$$x \preceq_u^{GM_{ax}} y \iff d^{GM_{ax}}(x, \rho) \leq_{lex} d^{GM_{ax}}(y, \rho),$$

Así, dada una agenda $V \in \mathcal{P}^*(X)$ podemos definir una función de elección de la siguiente manera:

$$f_u^{GM_{ax}}(V) = \min(V, \preceq_u^{GM_{ax}}).$$

De nuevo, debemos señalar que esta función tiene un buen comportamiento para los perfiles d -consistentes. (Ver [10], [11] y [14]).

En el siguiente ejemplo u es d -consistente.

Ejemplo 3.2 Sea $X = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$, d la distancia de Hamming y $u = (\preceq_1, \preceq_2, \preceq_3)$ un perfil dado por:

$$u = \begin{cases} (1, 1, 0) & (0, 1, 1) & (0, 1, 1) \\ (0, 1, 0)(1, 0, 0)(1, 1, 1) & (0, 1, 0)(0, 0, 1)(1, 1, 1) & (0, 1, 0)(0, 0, 1)(1, 1, 1) \\ (1, 0, 1)(0, 0, 0)(0, 1, 1) & (1, 0, 1)(0, 0, 0)(1, 1, 0) & (1, 0, 1)(0, 0, 0)(1, 1, 0) \\ (0, 0, 1) & (1, 0, 0) & (1, 0, 0) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \preceq_1 & \preceq_2 & \preceq_3 \end{cases}$$

Sea $\rho_u = \{A_1, A_2, A_3\}$, donde $A_1 = \{(0, 0, 1)\}$, $A_2 = \{(1, 0, 0)\}$ y $A_3 = \{(1, 0, 0)\}$ el perfil asociado a u , y consideremos $V = X$. Observando, mediante la tabla, el comportamiento de la distancia podemos concluir que

$$f_u^{GM_{ax}} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 1)\}.$$

	A_1	A_2	A_3	$d^{GM_{ax}}$
(0, 0, 0)	1	1	1	(1, 1, 1)
(0, 0, 1)	0	2	2	(2, 2, 0)
(0, 1, 1)	1	3	3	(3, 3, 1)
(0, 1, 0)	2	2	2	(2, 2, 2)
(1, 0, 1)	1	1	1	(1, 1, 1)
(1, 1, 0)	3	1	1	(3, 1, 1)
(1, 0, 0)	2	0	0	(2, 0, 0)
(1, 1, 1)	2	2	2	(2, 2, 2)

3.3. Propiedades de las funciones de elección

En esta sección definiremos ciertas propiedades importantes, estudiadas en la Teoría de Elección Social.

1. **Dominio Estándar (DE)** Una función de elección $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ satisface Dominio Estándar si f es total y además $|X| \geq 3$ y $n \geq 3$.
2. **Dictador (D)** Una función de elección f tiene un Dictador si existe $i \in N$ tal que para cualquier perfil u , para todo x , toda agenda V , si $x \in V$ y $x \prec_i y$ entonces $y \notin f_u(V)$.
3. **Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI)** Una función de elección f cumple (IAI) siempre que para cualesquiera dos perfiles u, u' y $V \in \mathcal{P}^*(X)$,

$$\text{si } u|_V = u'|_V \text{ entonces } f_u(V) = f_{u'}(V).$$

4. **Explicaciones Transitivas (ET)** Una función de elección f cumple con (ET) si para todo perfil u existe un preorden total \preceq_u tal que

$$f_u(V) = \min(V, \preceq_u).$$

5. **Condición Fuerte de Pareto (PF)**

Una función de elección f cumple (PF) si, para todos $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ y V se tiene que:

Si

- a) $\forall i \in N, x \preceq_i y,$
- b) $\exists j \in N, x \prec_j y,$
- c) $x \in V,$

entonces $y \notin f_u(V)$.

6. **Condición Débil de Pareto (PD) o unanimidad**

Una función de elección f cumple (PD) si, para todos $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ y V se tiene que:

Si

- a) $\forall i \in N, x \prec_i y,$
- b) $x \in V,$

entonces $y \notin f_u(V)$.

3.4. Comentarios sobre algunas propiedades

La siguiente proposición forma parte del folklore de la Teoría de Elección Social y será muy útil en lo sucesivo:

Teorema 3.1 *Suponga que una función de elección f satisface Explicaciones Transitivas y Dominio Estándar. Para cada perfil u definimos \preceq_u de la siguiente manera:*

$$x \preceq_u y \iff x \in f_u(\{x, y\}).$$

entonces

- (i) \preceq_u es un preorden total.
- (ii) $f_u(V) = \min(V, \preceq_u)$
- (iii) \preceq_u es el único preorden total con la propiedad (ii).

Demostración.

- (i) Veamos la transitividad si $x \preceq_u y$ y $y \preceq_u z$ entonces $x \preceq_u z$. En efecto, $x \preceq_u y$ si y sólo si $x \in f_u(\{x, y\})$ y $y \preceq_u z$ si y sólo si $y \in f_u(\{y, z\})$. Como f tiene Explicaciones Transitivas Ω_u se tiene que: $x \in f_u(\{x, y\})$ implica que $x\Omega_u y$ y $x \in f_u(\{y, z\})$ implica que $y\Omega_u z$, así tenemos $x\Omega_u y$ y $y\Omega_u z$. Pero

$$[x\Omega_u y \wedge y\Omega_u z] \implies x\Omega_u z \implies x \in f_u(\{x, z\}) \implies x \preceq_u z.$$

Es claro que la relación es total. En efecto, como f satisface Dominio Estándar entonces $f_u(\{x, y\}) \neq \emptyset$. Luego siempre sucede que $x \in f_u(\{x, y\})$ ó $y \in f_u(\{x, y\})$, es decir, $x \preceq_u y$ ó $y \preceq_u x$.

Es obvio que la relación es reflexiva. En efecto, como $f_u(V) \neq \emptyset$ se tiene que $x = f_u(\{x\})$, luego $x \in f_u(\{x\})$, es decir, $x \preceq_u x$.

- (ii)-(iii) Veamos ahora que $f_u(V) = \min(V, \preceq_u)$ y que \preceq_u es el único preorden con esta propiedad.

Para todo preorden total Ω_u tal que

$$f_u(V) = \min(V, \Omega_u)$$

mostraremos que $\Omega_u = \preceq_u$. Sabemos que existe uno, pues f tiene explicaciones transitivas.

Veamos las dos implicaciones:

a.- Sean $x, y \in X$. Si $x \preceq_u y$ entonces $x\Omega_u y$.

En efecto, como $x \preceq_u y$, $x \in f_u(\{x, y\})$ esto implica que $x \in \text{mín}(\{x, y\}, \Omega_u)$, es decir $x\Omega_u y$.

b.- Sean $x, y \in V$. Si $x\Omega_u y$ entonces $x \preceq_u y$.

Es claro ya que, si $x\Omega_u y$ entonces $x \in f_u(\{x, y\})$ y esto implica, por la definición de \preceq_u , que $x \preceq_u y$. ■

El siguiente lema tiene una prueba inmediata.

Lema 3.1 *Si una función de elección $f : P^n \times P^*(X) \longrightarrow P^*(X)$ satisface la propiedad de Explicaciones Transitivas y $|X| \geq 3$, $|N| \geq 3$, entonces satisface la propiedad de Dominio Estándar.*

Es importante notar que la única propiedad de Dominio Estándar que nos falta es que la función debe ser total, lo cual se obtiene de Explicaciones Transitivas. De acuerdo a la Observación 3.1, una manera abreviada de enunciar este lema sería: si una función satisface Explicaciones Transitivas, también satisface Dominio Estándar.

El siguiente lema es una caracterización muy útil de Independencia de Alternativas Irrelevantes bajo la hipótesis de Explicaciones Transitivas:

Lema 3.2 *Si f es una función de elección que satisface Explicaciones Transitivas y además para todo $x, y \in X$, $y \neq x$ y para todo $u, u' \in P^n$ se cumple*

$$\left[u|_{\{x,y\}} = u'|_{\{x,y\}} \implies f_u(\{x,y\}) = f_{u'}(\{x,y\}) \right], \quad (3.2)$$

entonces, para todo $V \in \mathcal{P}(X)$ se cumple que

$$\left[u|_V = u'|_V \implies f_u(V) = f_{u'}(V) \right],$$

Demostración. Supongamos que $u|_V = u'|_V$ y debemos ver que $f_u(V) = f_{u'}(V)$. Como f satisface Explicaciones Transitivas, entonces u tiene asociado un preorden total \preceq_u y análogamente u' tiene asociado un preorden total $\preceq_{u'}$. Además, $f_u(V) = \text{mín}(V, \preceq_u)$ y $f_{u'}(V) = \text{mín}(V, \preceq_{u'})$. Probaremos que para todo $x, y \in V$ se cumple que $x \preceq_u y$ si, y sólo si, $x \preceq_{u'} y$ lo que implica que en particular $\text{mín}(V, \preceq_u) = \text{mín}(V, \preceq_{u'})$.

De la hipótesis $u|_V = u'|_V$ se tiene que para todo $x, y \in V$ se cumple que $u|_{\{x,y\}} = u'|_{\{x,y\}}$ y usando 3.2 se tiene que $f_u(\{x,y\}) = f_{u'}(\{x,y\})$. En consecuencia, usando el Teorema 3.1 se tiene que $x \preceq_u y$ si, y sólo si, $x \in f_u(\{x,y\})$ y además \preceq_u es único, concluimos que $x \preceq_u y$ si, y sólo si, $x \preceq_{u'} y$. ■

3.5. Teorema de Imposibilidad de Arrow

En las secciones anteriores hemos visto algunas funciones de elección social y hemos definido ciertas propiedades que se desearía que una función cumpliera. Una pregunta muy natural que uno puede plantearse, es si existen funciones “ideales”. Al menos que cumplan con las siguientes propiedades, que parecen todas muy razonables:

1. Dominio Estándar,
2. Pareto Fuerte,
3. Independencia de Alternativas Irrelevantes,
4. Explicaciones Transitivas,
5. No Dictador.

Sorprendentemente no existen. Este resultado es conocido como El Teorema de Imposibilidad de Arrow¹, también llamado la paradoja de Arrow (con escasa precisión, el Teorema de la Imposibilidad de la Democracia). Él establece que no es posible diseñar reglas para la toma de decisiones sociales o políticas que obedezcan al mismo tiempo a un cierto conjunto de criterios “razonables”.

Fue enunciado y demostrado por primera vez por el Premio Nobel de Economía Kenneth J. Arrow como parte de su tesis de doctorado *Social choice and individual values* y popularizado en su libro del mismo nombre de 1951.

Veremos a continuación ciertas propiedades y algunos teoremas, para luego demostrar el *Teorema de Arrow* suponiendo que si una función de elección cumple las primera cuatro propiedades, entonces existe un dictador. En realidad probaremos un teorema un poco más fuerte sustituyendo la propiedad de Pareto Fuerte por la de Pareto Débil, es decir, probaremos que: si una función f satisface Dominio Estándar, Pareto Débil, Independencia de Alternativas Irrelevantes y Explicaciones Transitivas, entonces f tiene un dictador. Así, como Pareto Fuerte implica Pareto Débil, habremos probado que toda función que satisface Dominio Estándar, Pareto Fuerte, Independencia de Alternativas Irrelevantes y Explicaciones Transitivas, tiene un dictador.

Propiedades de Decisibilidad

Definición 3.5 Sea $N = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de individuos y f una función de elección. Un conjunto $S \subseteq N$ es *Decisivo Localmente para x contra y* , si para cada perfil u y cada

¹ver [1],[9], [14].

agenda $V \subseteq X$

si:

- 1.- $x \prec_i y$ para todo $i \in S$;
- 2.- $y \prec_j x$ para todo $j \in N \setminus S$;
- 3.- $x \in V$.

entonces $y \notin f_u(V)$

Definición 3.6 Sea $N = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de individuos y f una función de elección. Un conjunto $S \subseteq N$ es Decisivo para x contra y , si para cada perfil u y cada agenda $V \subseteq X$ si:

- 1.- $x \prec_i y$ para todo $i \in S$;
- 2.- $x \in V$.

entonces $y \notin f_u(V)$

Notación:

- Cuando un conjunto $S \subseteq N$ es Decisivo para x contra y , escribiremos $x D_S^* y$,
- Cuando un conjunto $S \subseteq N$ es Decisivo Localmente para x contra y , escribiremos $x D_S y$.

Observación 3.3 Notemos que Decisivo implica Decisivo Localmente.

Ahora vamos a establecer los resultados claves para la prueba.

Observación 3.4 Sea f que satisface Explicaciones Transitivas. Para ver que se cumple $a D_S^* b$, basta ver que $a \prec_u b$ para cualquier perfil u que cumple la hipótesis de decisibilidad (i.e. para todo $i \in S$ se tiene $a \prec_i b$), ya que en ese caso si $\{a, b\} \subseteq V$, entonces $b \notin f_u(V) = \min(V, \preceq_u)$, pues a es un testigo de que b no es minimal.

Teorema 3.2 (Primer Teorema de Contagio)

Supongamos que una función de elección $f : P^n \times P^*(X) \rightarrow P^*(X)$ satisface

1. Dominio Estándar;
2. Pareto Débil;

3. *Independencia de Alternativas Irrelevantes;*

4. *Explicaciones Transitivas.*

Sean a, b, c tres puntos diferentes de X . Si $aD_S b$, entonces $aD_S^* c$.

Demostración. Supongamos que $aD_S b$. Sea u un perfil y S tal que para todo $i \in S$ se tiene $a \prec_i c$. Queremos ver que si $a \in V$ entonces $c \notin f_u(V)$. Como f satisface explicaciones transitivas, basta ver que $a \prec_u c$, es decir $a \preceq_u c$ y $c \not\prec_u a$, ya que en ese caso c no sería minimal en V con respecto a \preceq_u y entonces $c \notin f_u(V)$. Para ver que $a \preceq_u c$ y $c \not\prec_u a$, en virtud de la proposición 3.1 basta ver que $f_u(\{a, c\}) = \{a\}$.

Construimos ahora un perfil u' restringido a $\{a, b, c\}$ tal que:

- para todo $i \in S$ se cumple que $a \prec'_i b \prec'_i c$,
- para todo $k \in N \setminus S$ se cumple que $b \prec'_k a$, $b \prec'_k c$, y a guarda la misma relación con c en \prec'_k que \prec_k .

Como f tiene Dominio Estándar se tiene que $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ y $\{b, c\}$ son agendas posibles. Como $aD_S b$ con respecto a u' se tiene $f_{u'}(\{a, b\}) = \{a\}$. Usando la Propiedad de Pareto Débil se tiene $f_{u'}(\{b, c\}) = \{b\}$. Debemos ver que $f_{u'}(\{a, c\}) = \{a\}$.

Como $f_{u'}$ cumple con Explicaciones Transitivas, es decir, $f_{u'}$ tiene asociado un preorden $\preceq_{u'}$, que satisface la proposición 3.1, se tiene

$[f_{u'}(\{a, b\}) = \{a\} \implies a \preceq_{u'} b]$ y $[f_{u'}(\{b, c\}) = \{b\} \implies b \preceq_{u'} c]$ luego por transitividad $a \preceq_{u'} c$,

así $a \in f_{u'}(\{a, c\})$. Supongamos que $c \in f_{u'}(\{a, c\})$, es decir, $c \preceq_{u'} a$. Sin embargo ya tenemos que $b \preceq_{u'} c$ y usando transitividad obtendremos que $b \preceq_{u'} a$, es decir, $b \in f_{u'}(\{a, b\}) = \{a\}$ lo que es una contradicción. Así $f_{u'}(\{a, c\}) = \{a\}$.

Para finalizar, observe que, por construcción $u|_{\{a, c\}} = u'|_{\{a, c\}}$. Así, como f satisface Independencia de Alternativas Irrelevantes se tiene que $f_u(\{a, c\}) = f_{u'}(\{a, c\}) = \{a\}$. ■

Teorema 3.3 (Segundo Teorema de Contagio)

Supongamos que una función de elección $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ satisface

1. *Dominio Estándar;*
2. *Pareto Débil;*
3. *Independencia de Alternativas Irrelevantes;*
4. *Explicaciones Transitivas.*

Sean a, b, c tres puntos diferentes de X . Si $aD_S b$, entonces $cD_S^* b$.

Demostración. Sea u un perfil y S tal que para todo $i \in S$ se tiene $c \prec_i b$. Como en la prueba del teorema anterior, basta ver que $f_u(\{b, c\}) = \{c\}$. (ver Observación 3.4).

Consideremos u' un perfil restringido a $\{a, b, c\}$ y sea S tal que:

- para todo $i \in S$ se tiene $c \prec'_i a \prec'_i b$,
- para cada $k \in N \setminus S$ se tiene $b \prec'_k a$ y $c \prec'_k a$, y b, c guardan la misma relación en \preceq'_k que en \preceq_k .

Usando la propiedad de Dominio Estándar podemos considerar las agendas $\{a, b\}, \{b, c\}$ y $\{a, c\}$. Como $aD_S b$ se tiene que $f_{u'}(\{b, a\}) = \{a\}$. Usando la propiedad de Pareto Débil se tiene que $f_{u'}(\{a, c\}) = \{c\}$. Como f satisface Explicaciones Transitivas se tiene que

$$a \prec_{u'} b \text{ y } c \prec_{u'} a, \text{ así se tiene que } c \prec_{u'} b.$$

En consecuencia $f_{u'}(\{b, c\}) = \{c\}$. Como $u_{\{b, c\}} = u'_{\{b, c\}}$ y f satisface Independencia de Alternativas Irrelevantes, necesariamente $f_u(\{b, c\}) = f_{u'}(\{b, c\}) = \{c\}$. ■

Teorema 3.4 (Teorema General de Contagio)

Supongamos que una función de elección $f : \mathcal{P}^n \times \mathcal{P}^*(X) \rightarrow \mathcal{P}^*(X)$ satisface

1. Dominio Estándar;
2. Pareto Débil;
3. Independencia de Alternativas Irrelevantes;
4. Explicaciones Transitivas.

Si $xD_S y$ para algún par de alternativas, entonces $zD_S^* w$, para cualesquiera $z, w \in X, z \neq w$.

Demostración. Supongamos que $xD_S y$; queremos probar $zD_S^* w, z, w \in X$. Trabajaremos la prueba en dos partes, primero demostrando el contagio sobre 3 alternativas y usando esto para demostrar el contagio sobre todo X .

Parte 1 Primero demostraremos el Teorema sobre 3 alternativas.

Tenemos $xD_S y$. Sea t una tercera alternativa en X . Queremos demostrar que $aD_S^* b$ sucede entre cualquier par (a, b) de alternativas diferentes en $\{x, y, t\}$.

- Usando el Primer Teorema de Contagio y el hecho de que $xD_S y$ se tiene:

$$xD_S^* t; \tag{3.3}$$

- Del Segundo Teorema de Contagio se tiene:

$$tD_S^*y, \quad (3.4)$$

- pero por Observación (3.3), xD_S^*t implica $xD_S t$. Esto con el Primer Teorema de Contagio nos dice que:

$$xD_S^*y; \quad (3.5)$$

- y como $xD_S t$, con el Segundo Teorema de Contagio se tiene:

$$yD_S^*t; \quad (3.6)$$

- de esta última y por 3.3 obtenemos $yD_S t$. Por el Primer Teorema de Contagio,

$$yD_S^*x; \quad (3.7)$$

- finalmente, de (3.4), y la Observación 3.3, se tiene $tD_S y$. Luego por el Primer Teorema de Contagio se tiene:

$$tD_S^*x; \quad (3.8)$$

Así se asegura que $xD_S y$ implica aD_S^*b entre cualquier par (a, b) de alternativas diferentes de $\{x, y, t\}$.

Parte 2 Continuaremos asumiendo que $xD_S y$. Sean $w, z \in X$.

Si uno ó ambos están en $\{x, y\}$ entonces, por la Parte 1 se tiene que zD_S^*w . Por lo tanto, necesitamos solamente considerar el caso donde $\{z, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset$.

Consideremos $\{x, y, z\}$. Por la Parte 1 se tiene xD_S^*z , y por la Observación (3.3), $xD_S z$. Ahora considerando $\{x, w, z\}$, aplicamos la Parte 1 para obtener zD_S^*w . ■

Teorema 3.5 Teorema de Imposibilidad de Arrow.

Si una función f de elección social satisface las siguientes propiedades:

1. Dominio Estándar,
2. Pareto Débil,
3. Independencia de Alternativas Irrelevantes,
4. Explicaciones Transitivas,

entonces f tiene un dictador.

Demostración. Supongamos que existe una función de elección que satisface las cinco propiedades.

En virtud de Pareto Débil, N es *Decisivo*. Definamos $\mathcal{S} := \{M \subseteq N : M \text{ es Decisivo}\}$. Es claro que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, pues $N \in \mathcal{S}$.

Ahora consideremos $S \in \mathcal{S}$ tal que $|S| \leq |M| \quad \forall M \in \mathcal{S}$, es decir, S es un conjunto decisivo de cardinalidad minimal. Probaremos que $|S| = 1$, lo cual significa que existe un dictador. Supongamos que $|S| \geq 2$. Consideremos el conjunto $S \setminus \{i\}$ donde $i \in S$. Es claro que $S \setminus \{i\} \neq \emptyset$, pues $|S| \geq 2$.

Como f satisface dominio Estándar podemos considerar u un perfil restringido a $V = \{x, y, z\} \subseteq X$ tal que:

$$\begin{aligned} i &\quad \mapsto \quad x \prec_i y \prec_i z \\ \forall j \in S \setminus \{i\} &\quad \mapsto \quad y \prec_j z \prec_j x \\ \forall k \in N \setminus S &\quad \mapsto \quad z \prec_k x \prec_k y \end{aligned}$$

Como S es decisivo y para todo $i \in S$, $y \prec_i z$, se tiene $f_u(\{y, z\}) = \{y\}$, así $y \prec_u z$.

Veamos que ocurre entre $\{x, y\}$. Supongamos que $f_u(\{x, y\}) = \{y\}$. Usando independencia de alternativas irrelevantes se tiene que $x D_{S \setminus \{i\}} y$, luego usando el *Teorema General* $S \setminus \{i\}$ es decisivo, lo que contradice el hecho que S es de tamaño minimal, por lo tanto $f_u(\{x, y\}) \neq \{y\}$. Luego, se tiene que $x \preceq_u y$.

Además sabemos que $y \prec_u z$ y $x \preceq_u y$ por lo tanto usando transitividad se tiene $x \prec_u z$. Así se muestra que $\{i\}$ es *Decisivo Localmente* para x contra z . Luego, por *Teorema General*, $\{i\}$ es *Decisivo*, lo que contradice la minimalidad de la cardinalidad de S . En consecuencia $|S| = 1$, es decir, existe un dictador. ■

Bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

CAPÍTULO 4

El Teorema de manipulabilidad

Con el fin de que este trabajo sea autocontenido exponemos en este capítulo la prueba del teorema de manipulabilidad para esquemas de votos que son funciones univaluadas (como lo veremos más adelante). Hemos escogido exponer la prueba de Gibbard, pues pensamos que sus ideas se pueden generalizar al caso de funciones de elección que son funciones multivaluadas y que trataremos en el capítulo siguiente.

Notación: De aquí en adelante las letras u, s, v, w, t representarán perfiles y u_i, s_i, v_i, w_i, t_i representarán relaciones modulares sobre $X = \{\text{conjunto de todas las alternativas}\}$ y V representará el conjunto de las posibles salidas. P denota el conjunto de todos los preórdenes sobre X y P^n denota los perfiles de tamaño n .

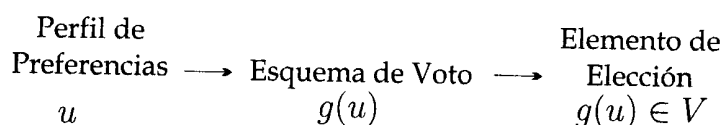
4.1. Esquema Voto o Función de Juego

Definición 4.1 Una función g que asigna a cada elemento $u = (u_1, \dots, u_n) \in P^n$ una alternativa, la llamaremos Esquema de Voto o Función de Juego. Es decir, $g : P^n \rightarrow X$.

Definición 4.2 Dado un perfil $u = (u_1, \dots, u_k, \dots, u_n)$ y un preorden total \preceq , podemos definir un nuevo perfil $u[\preceq/k]$ como el perfil que resulta de reemplazar en la k -ésima coordenada de u por \preceq . Más precisamente:

$$u[\preceq/k] = (u_1, \dots, u_{k-1}, \preceq, u_{k+1}, \dots, u_n).$$

El siguiente esquema representa el funcionamiento de un esquema de voto:



Las siguientes propiedades serán necesarias para establecer el resultado de manipulabilidad según Gibbard - Satterhwaite.

1. **Dominio Estándar Gibbard** Un esquema de voto g satisface la propiedad Dominio Estándar Gibbard¹ si, $|X| \geq 3$, $|N| \geq 3$ y para cada $x \in X$ existe $u \in P^n$ tal que $g(u) = \{x\}$.

2. **Dictador Gibbard**

Un individuo $k \in N$ es un dictador Gibbard para un esquema de voto g si, para cada $x \in X$ existe un preorden \prec^* tal que para todo u se tiene $g(u[\prec^*/k]) = x$.

4.2. Manipulabilidad para Esquemas de Votos

Definición 4.3 Diremos que un esquema de voto g es manipulable si existen $k \leq n$, $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$, $y \preceq \in P$ tales que

$$g(u[\preceq/k]) \prec_k g(u),$$

donde \prec_k es la relación modular estricta asociada a \preceq_k .

La definición anterior quiere decir que si el individuo k , que tiene preferencia \preceq_k , miente colocando otra preferencia \preceq , obtendrá un resultado que es estrictamente más favorable para lo que él desea realmente que es \preceq_k .

Las siguientes definiciones son de suma importancia para establecer resultados previos que serán las herramientas claves para la demostración del Teorema 4.1

Definición 4.4 Diremos que \preceq^* es \preceq -dominante para un individuo k ssi para todo $u \in P^n$ se tiene que

$$g(u[\preceq^*/k]) \preceq g(u).$$

Definición 4.5 Una función de juego es trivial si para cada $k \in N$ y todo preorden total \preceq existe un \preceq^* que es \preceq -dominante para k .

El resultado principal en los trabajos de Gibbard - Satterhwaite (ver [7], [19]) es el siguiente:

¹Por simplicidad exigimos que g sea sobreyectiva. En realidad Gibbard exige una condición menos fuerte: que el rango de g tenga cardinalidad mayor o igual a 3.

Teorema 4.1 *Si un esquema de voto g satisface Dominio Estándar Gibbard, entonces g tiene un Dictador Gibbard o g es manipulable.*

El siguiente Teorema lo enunciamos para presentar inmediatamente la demostración del Teorema 4.1 pero posteriormente será demostrado.

Teorema 4.2 *Si g es un esquema de voto que satisface Dominio Estándar Gibbard y además es trivial, entonces g es dictatorial.*

Demostración. [del Teorema 4.1]

Supongamos que g es un esquema de voto y es no dictatorial. Entonces, por el Teorema 4.2, g es no trivial. Así, existe algún k y existe un preorden \preceq , tal que todo preorden total \preceq^* no es \preceq -dominante para k .

Entonces, en particular, \preceq no es \preceq -dominante para k . En consecuencia para algún perfil $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ no es posible que

$$g(u[\preceq/k]) \preceq g(u),$$

es decir,

$$g(u) \prec g(u[\preceq/k]).$$

Esto muestra que g es manipulable. En efecto, tomemos como perfil $s = u[\preceq/k]$ y tomemos $\preceq' = \preceq$. Así

$$g(s[\preceq'/k]) \prec g(s).$$

■

Antes de entrar en la demostración del Teorema 4.2 estableceremos algunas definiciones.

Definición 4.6 *Sea un orden lineal sobre X , llamémoslo \leq . Para cada preorden total \preceq sobre X y para cada $V \subseteq X$, definimos un orden lineal \preceq^V sobre X de la siguiente manera:*

$$(a) [(x \in V) \wedge (y \in V)] \longrightarrow [x \preceq^V y \longleftrightarrow x \prec y \vee (x \simeq y \wedge x \leq y)].$$

$$(b) [(x \in V) \wedge (y \notin V)] \longrightarrow x \preceq^V y.$$

$$(c) [(x \notin V) \wedge (y \notin V)] \longrightarrow [x \preceq^V y \longleftrightarrow x \leq y]$$

Observación 4.1 *Es fácil ver que \prec^V es un orden lineal estricto sobre X .*

Una vez definido \preceq^V , dado un perfil $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$, podemos definir un nuevo perfil de la siguiente manera

$$u^V = (\preceq_1^V, \dots, \preceq_n^V).$$

Las siguientes dos lemas muestran propiedades muy importantes de \preceq^V :

Lema 4.1 Si $Z \subseteq V$, entonces $(u^V)^Z = u^Z$.

Demostración. Basta considerar el caso en que $u = (\preceq)$, por lo tanto, debemos probar que: Si $Z \subseteq V$, entonces $(\preceq^V)^Z = \preceq^Z$. Por razones de notación llamaremos $\preceq_1 = \preceq^V$, $\preceq_2 = \preceq_1^Z$ y $\preceq_3 = \preceq^Z$. Así, probaremos que $\preceq_2 = \preceq_3$, es decir, para $x, y \in X$ se debe cumplir que:

$$x \preceq_2 y \iff x \preceq_3 y. \quad (4.1)$$

Veamos los posibles casos:

1) $x, y \in Z$:

Usando (a) de la definición 4.6, tenemos tres subcasos:

- Si $x \prec y$, entonces se tiene $x \preceq_3 y$. Como $Z \subseteq V$, se tiene que $x \prec_1 y$, luego $x \preceq_2 y$.
- Si $x \simeq y$ y $x < y$, claramente $x \prec_3 y$ y $x \prec_1 y$ y como $Z \subseteq V$ se tiene $x \prec_2 y$.
- Si $x = y$ se tiene trivialmente $x \preceq_2 x$ y $x \preceq_3 x$.

2) $x \in Z$ y $y \notin Z$:

Usando (b) de la definición 4.6, se tiene que $x \prec_3 y$. El hecho que $y \notin Z$ implica directamente que $x \prec_2 y$ ya que $x \preceq_2 y = \preceq_1^Z$.

3) $x \notin Z$ y $y \notin Z$:

Supongamos que $x < y$ (el caso $x = y$ es trivial). Usando (c) de la definición 4.6, tenemos $x \prec_3 y$. También por (c) tenemos $x \prec_2 y$. ■

La siguiente propiedad tiene una prueba inmediata

Lema 4.2 Sean u, u' dos perfiles y $V \subseteq X$. Si $u_{1^V} = u'_{1^V}$, entonces $u^V = u'^V$.

Demostración. [del Teorema 4.2]

Sea $g : P^n \rightarrow X$ un esquema de voto. Definimos, para cada i , la aplicación $\sigma_i : P \rightarrow P$ tal que para cada \preceq se tiene que $\sigma_i(\preceq)$ es \preceq -dominante para i .

Para cada perfil $u = (u_1, \dots, u_n)$ definimos $\sigma : P^n \rightarrow P^n$ de la siguiente manera:

$$\sigma(u) = (\sigma_1(u_1), \dots, \sigma_n(u_n))$$

Finalmente, definimos una función $\nu : P^n \rightarrow X$ de la siguiente manera:

$$\nu(u) = g(\sigma(u)). \quad (4.2)$$

Ahora, dado un perfil u vamos a definir una relación \prec_u sobre X de la siguiente manera

$$x \prec_u y \iff [x \neq y \wedge \nu(u^{\{x,y\}}) = x]. \quad (4.3)$$

Una vez definido \prec_u , podemos definir la relación \preceq_u :

$$x \preceq_u y \iff [x = y \vee \nu(u^{\{x,y\}}) \neq y]. \quad (4.4)$$

Observemos que $x \preceq_u y \iff \neg(y \prec_u x)$. Claramente, si $x \prec_u y$, entonces $x \preceq_u y$.

Ahora vamos a definir una función de elección f tal que, dado un perfil u , se tiene $f(u) = \prec_u$. Es importante notar que f puede ser vista como una función $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \rightarrow \mathcal{P}^*(X)$ definida así:

$$f(u, V) = \min(V, \preceq_u). \quad (4.5)$$

Los dos siguientes lemas son cruciales para la demostración del Teorema 4.2, más precisamente, para terminar la demostración del Teorema 4.2 estableceremos dos afirmaciones cuyas demostraciones están sujetas los lemas siguientes.

Lema 4.3 *Consideremos un perfil $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ y sea $s = \sigma(u)$. Supongamos que para un perfil s' , y alternativas x e y , $x \neq y$ se satisface que:*

- (1) $(\forall i)[y \prec_i x \rightarrow s'_i = s_i]$
- (2) $(\forall i)[x \prec_i y \vee y \prec_i x]$
- (3) $y \preceq_u x$,

entonces $x \neq g(s')$.

Demostración. Supongamos que $x = g(s')$. Sea $u^* = u^{\{x,y\}}$, y consideremos $w = \sigma(u^*)$. Como $y \preceq_u x$ se tiene que

$$x = y \vee x \neq \nu(u^*),$$

y como $x \neq y$ se tiene que $x \neq \nu(u^*) = g(\sigma(u^*)) = g(w)$. Por lo tanto $x \neq g(w)$. Construimos una sucesión s^0, \dots, s^n de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s^0 &= s' \\ s^1 &= s^0[w_1/1] \\ s^2 &= s^0[w_2/2] \\ &\vdots \\ s^k &= s^{k-1}[w_k/k] = (w_1, \dots, w_k, s'_{k+1}, \dots, s'_n) \\ &\vdots \\ s^n &= w \end{aligned}$$

La sucesión s^0, \dots, s^n también se puede definir así: $s^n = t$ y $s^{k-1} = s^k[s'_k/k]$. Esta doble visión de la sucesión s^0, \dots, s^n será muy importante en la prueba.

Como $x = g(s')$ y $x \neq g(w)$, se tiene que $x = g(s^0)$ pero $x \neq g(s^n)$. Sea k el menor índice tal que $g(s^k) \neq x$. Note que $k \geq 1$.

Mostraremos lo siguiente:

Afirmación: w_k no es \prec_k^* -dominante para k o s_k no es \prec_k -dominante para k .

Como $w_k = \sigma_k(\prec_k^*)$ y $s_k = \sigma_k(\prec_k)$, en cualquier caso la caracterización de σ es violada. Así, suponer que $x = g(s')$ nos lleva a una contradicción.

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1 $g(s^k) = y \wedge y \prec_k x$.

Notemos que $k \geq 1$. Como $g(s^{k-1}) = x$, $g(s^k) \prec_k g(s^{k-1})$ por hipótesis, y $s^{k-1} = s^k[s'_k/k]$, no es el caso que $g(s^k[s'_k/k]) \preceq_k g(s^k)$, así s'_k no es \prec_k -dominante para k . Pero, como $y \prec_k x$, por (1) de la hipótesis, $s'_k = s_k$, así s_k no es \prec_k -dominante para k .

Caso 2 $g(s^k) \neq y \vee x \prec_k y$.

Veamos que $x \prec_k^* g(s^k)$. En efecto:

- Si $g(s^k) = y$, entonces por hipótesis $x \prec_k y$, y por (a), de la definición 4.6, y la definición de u^* , se tiene que $x \prec_k^* y = g(s^k)$.
- Si $g(s^k) \neq y$, entonces como $g(s^k) \neq x$, se tiene que $g(s^k) \notin \{x, y\}$, y por (b), de la definición 4.6, de nuevo $x \prec_k^* g(s^k)$.

Ahora bien, $x = g(s^{k-1})$, y $s^k = s^{k-1}[w_k/k]$ y como $g(s^{k-1}) \prec_k^* g(s^k)$, w_k no es \prec_k^* -dominante para k .

Por otra parte $w_k = \sigma_k(\prec_k^*)$, es decir w_k es \prec_k^* -dominante para k , lo que es una contradicción.

Así, suponer que $x = g(s')$ nos lleva a una contradicción. Por lo tanto $x \neq g(s')$. ■

Lema 4.4 Sea u un perfil. Si $(\forall i)[x \prec_i y \vee y \prec_i x]$ e $y \preceq_u x$, entonces $\nu(u) \neq x$.

Demostración. Claramente las hipótesis (2) y (3) son satisfechas en el Lema 4.3. Tomando $s' = s = \sigma(u)$, la condición (1) también es satisfecha; por lo tanto $g(s') \neq x$. Como $g(s') = g(\sigma(u)) = \nu(u)$, se tiene que $\nu(u) \neq x$. ■

La siguiente afirmación establece que la función f definida en la expresión 4.5 cumple con cuatro de las condiciones de Arrow y será demostrada posteriormente.

Afirmación 4.1 *f* satisface Dominio Estándar, Independencia de Alternativas Irrelevantes (ii), Pareto Débil y Explicaciones Transitivas. Así, en virtud del Teorema de Arrow tiene un dictador.

Afirmación 4.2 El dictador de *f* es un dictador para *g*.

En efecto. Sea *k* el dictador para *f*. Recordemos que $k \in N$ es un dictador para *g* si, para cada $y \in X$ existe un preorden \preceq^* tal que

$$(\forall u) [g(u[\preceq^*/k]) = y]. \quad (4.6)$$

Sea \preceq^y un preorden tal que

$$(\forall x)[x \neq y \longrightarrow y \prec^y x]$$

y sea $\preceq^* = \sigma_k(\preceq^y)$. Usaremos el Lema 4.3 para mostrar que \preceq^* satisface la expresión 4.6.

Sea $s' = (s'_1, \dots, s'_n)$ un perfil tal que $s'_k = \preceq^y$, y supongamos que $x \neq y$. Luego $y \prec^y x$. Mostraremos que $g(s') \neq x$ y esto vale para cualquier x que es diferente de y , así necesariamente $g(s') = y$.

Sea $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ un perfil tal que

(a) $\preceq_k = \preceq^y$

(b) $(\forall i)[i \neq k \longrightarrow x \prec_i y]$,

y sea $s = \sigma(u)$. Entonces $s_k = \sigma_k(\preceq_k) = \sigma_k(\preceq^y) = \preceq^* = s'_k$.

Así,

- Por (b), sólo el individuo k prefiere a y sobre x ,
- (1) del Lema 4.3 es satisfecha,
- Por construcción, (2) del Lema 4.3, es satisfecha.
- Como $y \prec_k x$ y k es un dictador para *f*, se tiene que $y \prec_u x$. Así (3) del Lema 4.3 es satisfecha.

Luego, por el Lema 4.3 se tiene que $x \neq g(s')$. Como esto vale para cualquier $x \neq y$ necesariamente $g(s') = y$. ■

Demostración. [de la Afirmación 4.1]

- *f* satisface Dominio Estándar. Esto es inmediato.

- **f satisface Pareto Débil.** En efecto. Sea u un perfil, debemos ver que si $(\forall i)x \prec_i y$, entonces $x \prec_u y$.

Como $x \in X$, entonces por Dominio Estándar Gibbard, para algún perfil s' se tiene que $g(s') = x$. Si $s = \sigma(u)$, entonces todas las hipótesis de la Proposición 4.3 son satisfechas excepto (3) y la conclusión es violada. Por lo tanto (3) es falsa, es decir, $x \prec_u y$.

- **f satisface Independencia de Alternativas Irrelevantes.** En efecto. Sea $V = \{x, y\}$, y consideremos $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ y $u' = (\preceq'_1, \dots, \preceq'_n)$ perfiles y supongamos que $u|_V = u'|_V$ es decir,

$$(\forall i)(\forall x)(\forall y)[(x \in V) \wedge (y \in V) \longrightarrow (x \preceq_i y \longleftrightarrow x \preceq'_i y)]$$

En virtud del Lema 4.2, se tiene que $u^{\{x,y\}} = u'^{\{x,y\}}$, y en consecuencia

$$x \in \nu(u^{\{x,y\}}) \longleftrightarrow x \in \nu(u'^{\{x,y\}}),$$

lo que quiere decir, $x \prec_u y \longleftrightarrow x \prec_{u'} y$.

- **f satisface Explicaciones Transitivas i.e. \prec_u es una relación modular.**

En efecto. Usaremos la caracterización 2.4 (ver preliminares) de una relación modular, es decir, debemos ver que \prec_u satisface las siguientes dos propiedades:

$$(m1) \quad \forall x, y \in X, \quad \neg(x \prec_u y \wedge y \prec_u x).$$

$$(m2) \quad \forall x, y, z \in X, \quad [x \prec_u z \longrightarrow (x \prec_u y \vee y \prec_u z)].$$

Es fácil ver que \prec_u satisface (m1).

Veamos que (m2) también es cierto. Sea $u' = u^{\{x,y,z\}}$. Entonces en virtud del Lema 4.1, $u'^{\{x,z\}} = u^{\{x,z\}}$. Note que

$$x \prec_u z \longleftrightarrow [x \neq z \wedge x = \nu(u^{\{x,z\}})],$$

$$x \prec_{u'} z \longleftrightarrow [x \neq z \wedge x = \nu(u'^{\{x,z\}})],$$

luego se tiene que $x \prec_{u'} z \longleftrightarrow x \prec_u z$.

De manera similar se tiene que

$$x \prec_{u'} y \longleftrightarrow x \prec_u y \quad y \quad y \prec_{u'} z \longleftrightarrow y \prec_u z.$$

Entonces, sólo necesitamos mostrar que para todo x, y y z ,

$$x \prec_{u'} z \longrightarrow [x \prec_{u'} y \vee y \prec_{u'} z]$$

Supongamos que $x \prec_{u'} z$. Claramente $x \neq z$ puesto que $x \prec_{u'} z$ significa

$$x \neq z \wedge x = \nu(u'^{\{x,z\}}).$$

Si $y = x$, se tiene $y \prec_{u'} z$, y si $y = z$, se tiene $x \prec_{u'} y$. Falta ver los casos $y \neq x$ y $z \neq y$. Entonces por la observación 4.1 para u' , cada \prec'_i es un orden lineal, y

$$(\forall i) [(x \prec'_i y \vee y \prec'_i x) \wedge (x \prec'_i z \vee z \prec'_i x) \wedge (y \prec'_i z \vee z \prec'_i y)]$$

Caso 1 $x = \nu(u')$.

Entonces usando la contrapositiva del Corolario 4.4, se tiene que $x \prec_{u'} y$.

Caso 2 $x \neq \nu(u')$.

Como $x \prec_{u'} z$, por el Lema 4.4 se tiene que $z \neq \nu(u')$. Si $w \notin \{x, y, z\}$, entonces por (b) de la definición 4.6 y la definición de u' se tiene que

$$(\forall i) x \prec'_i w.$$

Así, usando el hecho que f satisface Pareto Débil se tiene

$$x \prec_{u'} w,$$

y por el Lema 4.4, $w \neq \nu(u')$. Entonces tenemos $x \neq \nu(u')$, $z \neq \nu(u')$, y si $w \notin \{x, y, z\}$, entonces $w \neq \nu(u')$.

Por lo tanto, por eliminación, $y = \nu(u')$ y usando la contrapositiva del Lema 4.4 se tiene que $y \prec_{u'} z$.

Así terminamos la prueba de la Afirmación 4.1. ■

Bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

CAPÍTULO 5

Extensiones del Teorema de manipulabilidad

En este capítulo vamos a introducir el concepto de manipulabilidad para funciones de elección generales (definidas en el capítulo 3). Motivados por las ideas de Gibbard - Satterhwaite para establecer resultados de manipulabilidad para Esquemas de Votos nos concentramos en establecer un concepto de manipulabilidad y resultados análogos a los de los autores citados, módulo cierta conjetura, para funciones de elección, que son funciones “multivaluadas”. A diferencia de los Esquemas de Voto, las funciones de elección que se estudian en este capítulo tienen como argumento un par (perfil y agenda) y dan como resultado un subconjunto no vacío de la agenda, es decir, posiblemente varios elementos de X , (en este sentido decimos “multivaluadas”); esta situación es llamada por algunos autores *empates* (ver [4]).

5.1. Manipulabilidad de Funciones de Elección Social

En esta sección supondremos que las funciones de elección satisfacen Explicaciones Transitivas y Dominio Estándar. En virtud del teorema 3.1 sabemos que una función de elección social f que satisface explicaciones transitivas y dominio Estándar, está unívocamente determinada por una función que a cada perfil u le asocia un preorden total \preceq_u , de tal manera que

$$f(u, V) = f_u(V) = \min(V, \preceq_u). \quad (5.1)$$

Así pues, confundiremos a f con la función que asocia a u , el preorden \preceq_u . En consecuencia, vamos a estudiar funciones de la forma $f : P^n \rightarrow P$; y la función de elección que ella

determina, por abuso de lenguaje, la llamaremos f . Así, si $f(u) = \preceq_u$, escribiremos

$$f_u(V) = \text{mín}(V, f(u)) = \text{mín}(V, \preceq_u). \quad (5.2)$$

De aquí en adelante cuando hablemos de funciones de elección serán funciones de la forma $f : P^n \rightarrow P$ y escribiremos $f(u) = \preceq_u$, las que mediante la ecuación 5.1 definen buenas funciones de elección.

Definición 5.1 Sea \preceq un preorden total sobre X . Para $A, B \in \mathcal{P}^*(X)$ definimos

$$A \sqsubseteq_{\preceq} B \iff [\exists a \in \text{mín}(A, \preceq) \wedge \exists b \in \text{mín}(B, \preceq) \text{ tal que } a \preceq b]. \quad (5.3)$$

y

$$A \sqsubseteq_{\preceq} B \iff A \sqsubset_{\preceq} B \text{ o bien } A \approx'_{\preceq} B \text{ y } A \leq_{\text{car}} B. \quad (5.4)$$

El siguiente ejemplo ilustra la definición anterior.

Ejemplo 5.1

La figura (a) representa un preorden de preferencia \preceq mediante niveles. Allí podemos observar que los conjuntos A y B cumplen la siguiente relación: $A \sqsubset_{\preceq} B$ y por lo tanto $A \sqsubseteq_{\preceq} B$.

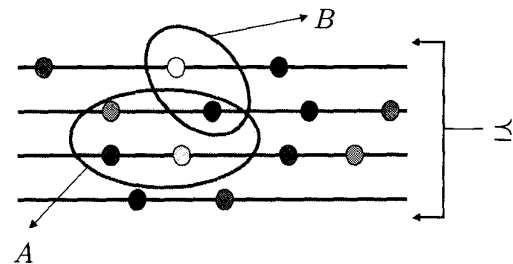


Figura (a)

En la figura (b) podemos observar que los conjuntos B y C cumplen la siguiente relación: $C \approx'_{\preceq} B$ y además $C =_{\text{car}} B$, por lo tanto $C \approx_{\preceq} B$.

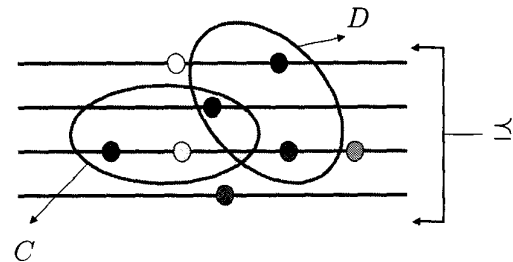


Figura (b)

En la figura (c) vemos que los conjuntos E y F cumplen la siguiente relación: $E \approx'_{\preceq} F$ pero $E <_{car} F$, por lo tanto $E \sqsubseteq_{\preceq} F$.

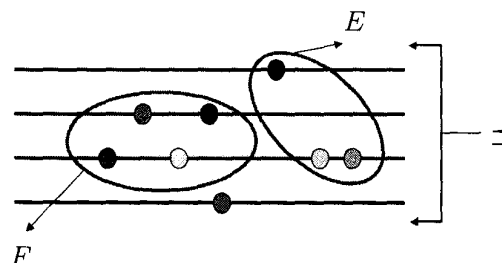


Figura (c)

Proposición 5.1 Si \preceq es un preorden total sobre X , entonces \sqsubseteq'_{\preceq} es un preorden total sobre $\mathcal{P}^*(X)$.

Demostración. En efecto, por definición $\sqsubseteq_{\preceq} = \text{lex}(\sqsubseteq'_{\preceq}, \leq_{car})$. Así, en virtud del Lema 2.1 basta ver que \sqsubseteq'_{\preceq} y \leq_{car} son preórdenes totales.

Que \leq_{car} es un preorden total es inmediato. Ahora probemos que \sqsubseteq'_{\preceq} es un preorden total. La reflexividad, transitividad y totalidad son inmediatas gracias a la reflexividad, transitividad y totalidad de \preceq . ■

La relación \sqsubseteq'_{\preceq} asociada a \preceq trata de extender de manera natural las preferencias sobre los elementos de X expresadas por \preceq , a preferencias sobre $\mathcal{P}^*(X)$ expresadas por la relación \sqsubseteq'_{\preceq} . En palabras, $A \sqsubseteq'_{\preceq} B$ significa que los mejores elementos de A (según \preceq) son preferidos o indiferentes a los mejores elementos de B (según \preceq).

La relación \sqsubseteq_{\preceq} se puede parafrasear de la siguiente manera: $A \sqsubseteq_{\preceq} B$ si, y sólo si, los mejores elementos de A (según \preceq) son estrictamente preferidos (según \preceq) a los mejores elementos de B (según \preceq); o bien, en el caso que los mejores elementos de A y de B (según \preceq) estén en el mismo nivel (todos relacionados según \preceq), la cardinalidad de A es menor o igual que la cardinalidad de B , es decir, en el caso de que los mejores de A y de B estén en el mismo nivel entonces se prefiere al conjunto más preciso (más pequeño).

Observación 5.1 Podríamos imaginar otras maneras “naturales” de extender \preceq a un preorden total sobre $\mathcal{P}^*(X)$. ¿Cuál es la mejor manera? es un problema abierto. También lo es si otras maneras son adecuadas para extender el Teorema de Gibbard - Satterthwaite. Estos interesantes problemas no son estudiados en este trabajo.

Definición 5.2 Una función de elección f se dice manipulable si existen $\preceq \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{P}^n$, y $V \in \mathcal{P}^*(X)$ tales que

$$f_{u[\preceq/k]}(V) \sqsubseteq_{\preceq k} f_u(V).$$

donde $\sqsubseteq_{\preceq k}$ es la relación modular asociada a \sqsubseteq_{\preceq} .

Como en el caso de manipulabilidad de Gibbard - Satterhwaite, la definición anterior quiere decir que si el individuo k , que tiene preferencia \preceq_k , miente colocando otra preferencia \preceq , obtendrá un resultado que es estrictamente más favorable para lo que él desea realmente que es \sqsubseteq_{\preceq_k} , la extensión natural de \preceq_k .

Ilustremos este concepto con la regla de Borda.

Ejemplo 5.2 Consideremos la regla de Borda f^B definida en el capítulo 3 (ver sección 3.2).

Veamos la siguiente situación, que simula información recopilada por una encuestadora para una elección donde participan tres candidatos y tres electores.

Sean $X = \{x, y, z\}$ el conjunto de candidatos y $u = (\preceq_1, \preceq_2, \preceq_3)$ las preferencias de los tres votantes sobre los candidatos, como se muestra en la figura:

votante 1	y	x	z
votante 2	z	z	x
votante 3	x	y	zy
	\preceq_1	\preceq_2	\preceq_3
	----- u		

Claramente $r(x) = 6$, $r(y) = 5$ y $r(z) = 5$, de donde la regla de Borda nos daría como resultado $f_u(V) = \{y, z\}$, para $V = \{y, z\}$. (Los mejores son los que tienen el rango minimal).

Notemos que el individuo 1 prefiere a z sobre y . Ahora bien, si él cambia su opinión "sincera" por otra preferencia, por ejemplo \preceq^* , podrá obtener un mejor resultado respecto a su preferencia \preceq_1 . Esta situación la ilustramos en la figura, donde $u' = u[\preceq^* / 1]$.

votante 1	y	x	z
votante 2	x	z	x
votante 3	z	y	zy
	\preceq^*	\preceq_2	\preceq_3
	----- u'		

Si aplicamos la regla de Borda obtenemos que $r(y) = 5$ y $r(z) = 4$, de donde tenemos como resultado $f_{u'}(V) = \{z\}$. Así el individuo 1 ha manipulado su voto para obtener mejores resultados con respecto a su preferencia entre los candidatos z e y , ya que $\{z\} \sqsubseteq_{\preceq_1} \{y, z\}$.

5.2. Generalizando Gibbard.

Podemos deducir un resultado de manipulabilidad a partir del Teorema 4.1 de manipulabilidad para esquemas de votos. Para ello enunciaremos las siguientes propiedades:

- **Dominio Estándar Fuerte⁺ (DEF⁺)** Una función de elección f satisface DEF⁺ si satisface DS y además, para todo x en X existe $u \in P^n$ tal que para todo y se tiene que $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$.
- **Dictador Débil (DD)** Una función de elección f tiene un Dictador Débil k si para todo $y \in X$, existe $\preceq^y \in P$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que

Si $u_k = \preceq^y$ entonces $y \in f_u(\{x, y\})$.

Lema 5.1 *Si f satisface Explicaciones Transitivas y DEF^+ entonces para todo x , existe un perfil u tal que $f_u(X) = \{x\}$.*

Demostración. Dado x , tomemos u tal que para todo y se tiene $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$ (la existencia de u está garantizada por DEF^+). Ahora bien, como f satisface Explicaciones Transitivas, para toda agenda $V \in \mathcal{P}^*(X)$, $f_u(V)$ está determinado por \preceq_u de la siguiente manera:

$$f_u(V) = \text{mín}(V, \preceq_u)$$

Por la escogencia de u (propiedad de DEF^+), se tiene que $\text{mín}(X, \preceq_u) = \{x\}$. Si no fuese así existiría y tal que $y \preceq_u x$, entonces $\text{mín}(\{x, y\}, \preceq_u) \neq \{x\}$, i.e. $f_u(\{x, y\}) \neq \{x\}$ lo cual es una contradicción. ■

Teorema 5.1 (de Manipulabilidad 1) *Si f es una función de elección que satisface Dominio Estándar Fuerte⁺ y Explicaciones Transitivas, entonces f es manipulable o bien f tiene un Dictador Débil.*

Demostración. Sea $f : P^n \rightarrow P$ tal que f satisface DEF^+ . Sea \leq un orden lineal fijo sobre X .

Definimos $g : P^n \rightarrow X$ mediante

$$g(u) = \text{mín}(f_u(X), \leq). \quad (5.5)$$

Claramente g es un esquema de voto y satisface la propiedad de Dominio Estándar Gibbard (Lema 5.1). Luego por el Teorema 4.1 se tiene que g tiene un dictador Gibbard o g es manipulable.

Basta ver que las siguientes dos afirmaciones son ciertas:

Afirmación 1 Si g tiene un dictador Gibbard, entonces f tiene un dictador débil.

En efecto; sabemos que existe $k \in N$ tal que para todo $x \in X$, existe $\preceq_x \in P$, para todo $u \in P^n$ se cumple que

$$g(u[\preceq_x / k]) = x,$$

es decir, $x = \text{mín}(f_{u[\preceq_x / k]}(X), \leq)$. Claramente $x \in f_{u[\preceq_x / k]}(\{x, y\})$. Por lo tanto k también es dictador débil para f .

Afirmación 2 Si g es manipulable, entonces f es manipulable.

En efecto; como g es manipulable sabemos que existe $u \in P^n$, existe $k \in N$, y existe $\preceq \in P$ tal que

$$g(u[\preceq / k]) \prec_k g(u).$$

Definición 5.3 Sea f una función de elección y \preceq^* , \preceq preórdenes totales. Diremos que \preceq^* es \preceq -dominante según f para un individuo k , si, y sólo si, para todo perfil u y para toda agenda V se tiene

$$f_{u[\preceq^*/k]}(V) \sqsubseteq_{\preceq} f_u(V). \quad (5.7)$$

Definición 5.4 Una función de elección f es trivial si, y sólo si, para todo preorden $\preceq \in P$, para todo $k \in N$, existe $\preceq^* \in P$ tal que \preceq^* es \preceq -dominante según f para k .

El siguiente ejemplo nos muestra una función de elección que es trivial.

Ejemplo 5.3 Sea X un conjunto de alternativas, sea \preceq un preorden total fijo y definamos una función de elección de la siguiente manera: $f : P^n \rightarrow P$ tal que $f(u) = \preceq$. Esta función no depende de u , es decir, $f_u(V) = \min(V, \preceq)$; por lo tanto $f_{u[\preceq^*/k]}(V) = f_u(V)$ y se cumple la condición 5.7, es decir, f es trivial.

Teorema 5.3 Sea $f : P^n \rightarrow P$ tal que f satisface Dominio Estándar Fuerte. Si f es trivial entonces f tiene un Dictador Débil.

Para demostrar el Teorema 5.3 procedemos de la siguiente manera:

Sea \preceq^V como en la definición 4.6. Ya hemos visto que \preceq^V es un orden lineal sobre X , gracias a la Observación 4.1.

Una vez definido \preceq^V , dado un perfil $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$, podemos definir un nuevo perfil de la siguiente manera

$$u^V = (\preceq_1^V, \dots, \preceq_n^V).$$

Sea OL el conjunto de órdenes lineales sobre X . Definimos $g : P^n \rightarrow OL \subseteq P$ mediante

$$g(u) = \text{lex}(f(u), \leq) = \preceq_u^{\text{lex}}, \quad (5.8)$$

donde \leq es el orden lineal fijado antes. Es fácil ver que g está bien definida, i.e. que toma valores en OL .

Es importante notar que, usando (5.1) y el Lema 2.4, dado $V \in \mathcal{P}^*(X)$ podemos expresar

$$g_u(V) = \min(V, g(u)) = \min(f_u(V), \leq). \quad (5.9)$$

Observación 5.2 Note que para todo u y para todo V , $g_u(V)$ es un singleton; esto es debido a la igualdad 5.9 y el hecho que \leq es un orden lineal.

Como f es trivial podemos definir para cada i , una aplicación $\sigma_i : P \rightarrow P$ tal que para cada \preceq se tiene que $\sigma_i(\preceq)$ es \preceq -dominante para i .

Definimos $\sigma : P^n \rightarrow P^n$ de la manera siguiente: Si $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ entonces

$$\sigma(u) = (\sigma_1(\preceq_1), \dots, \sigma_n(\preceq_n)) \quad (5.10)$$

Definamos $\hat{g} : P^n \rightarrow P$ tal que $\hat{g}(u) = \hat{\succsim}_u$, donde

$$x \hat{\succsim}_u y \iff [x \neq y \wedge x g [\sigma(u^{x,y})] y], \quad (5.11)$$

es decir, $x \hat{\succsim}_u y$ si, y sólo si, $x \prec_{\sigma(u^{x,y})}^{lex} y$. que \hat{g} esté bien definida, i.e. que $\hat{\succsim}_u$ es un preorden total, es precisamente la Conjetura 1.

Conjetura 1 \hat{g} *satisface Explicaciones Transitivas.*

Observación Es importante notar que no todos los resultados siguientes están sujetos a la conjetura 1. En el caso de que un resultado dependa de la conjetura 1 colocaremos en su enunciado la hipótesis de Explicaciones Transitivas.

El siguiente resultado es muy importante en el desarrollo de la prueba del Teorema 5.3.

Teorema 5.4 *La función \hat{g} satisface Explicaciones Transitivas, Dominio Estándar, Pareto Débil, Independencia de Alternativas Irrelevantes y por lo tanto, en virtud del Teorema de Arrow, \hat{g} tiene un Dictador.*

De las propiedades que nos resta probar, Pareto Débil es la que resulta más laboriosa. Con el fin de probarla, comenzaremos por establecer ciertos resultados previos.

Proposición 5.2 *Sean $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$, $s = \sigma(u)$ y s' otro perfil. Supongamos que*

- (i) $\forall i [y \prec_i x \rightarrow s'_i = s_i]$
- (ii) $\forall i [y \prec_i x \vee x \prec_i y]$
- (iii) $y \hat{\succsim}_u x$.

Entonces $g_{s'}(\{x, y\}) = \{y\}$.

Demostración. Recordemos que $g_u(\{x, y\}) = \{x\}$ significa que

$$f_u(\{x, y\}) = \{x\} \quad \text{o bien} \quad [f_u(\{x, y\}) = \{x, y\} \wedge x < y]. \quad (5.12)$$

Vamos a razonar por reducción al absurdo. Supongamos que $g_{s'}(\{x, y\}) \neq \{y\}$, en virtud de la Observación 5.2 $g_{s'}(\{x, y\}) = \{x\}$, es decir,

$$f_{s'}(\{x, y\}) = \{x\} \quad \text{o bien} \quad [f_{s'}(\{x, y\}) = \{x, y\} \wedge x < y]. \quad (5.13)$$

Sea $u^* = u^{\{x, y\}}$ y sea $t = \sigma(u^*)$. Por (iii) tenemos que $y \widehat{\prec}_u x$, es decir, $\widehat{g}_u(\{x, y\}) = \{y\}$ y por (5.11) se tiene que $g_t(\{x, y\}) = \{y\}$. Luego por definición de g (5.8) se tiene

$$f_t(\{x, y\}) = \{y\} \quad \text{o bien} \quad [f_t(\{x, y\}) = \{x, y\} \wedge y < x]. \quad (5.14)$$

Recordemos que $s = \sigma(u)$ significa que $s = (\sigma_1(\preceq_1), \dots, \sigma_n(\preceq_n))$. Además $t = (t_1, \dots, t_n)$, donde $t_i = \sigma_i(\preceq_i^{\{x, y\}})$.

Consideremos la siguiente sucesión: $s^0 = s'$ y $s^{k+1} = s^k[t_{k+1}/k + 1]$, para $k = 0, \dots, n-1$. Así, tenemos una colección de $n + 1$ perfiles $\{s^0, \dots, s^n\}$ donde

$$\begin{aligned} s^0 &= s' \\ &\vdots \\ s^k &= (t_1, \dots, t_k, s'_{k+1}, \dots, s'_n) \\ &\vdots \\ s^n &= t \end{aligned}$$

La sucesión s^0, \dots, s^n se también puede definir así: $s^n = t$ y $s^{k-1} = s^k[s'_k/k]$. Esta doble visión de la sucesión s^0, \dots, s^n será muy importante en la prueba.

Notemos que $g_{s^0}(\{x, y\}) = \{x\}$ y $g_{s^n}(\{x, y\}) = \{y\}$. Sea k el menor entero tal que $g_{s^k}(\{x, y\}) = \{y\}$. Claramente $k \geq 1$ y $k \leq n$.

Usando (ii) de la hipótesis, pueden suceder sólo dos casos:

Caso 1 $y \prec_k x$.

Sabemos que $g_{s^{k-1}}(\{x, y\}) = \{x\}$ y $g_{s^k}(\{x, y\}) = \{y\}$. Como $y \prec_k x$ se tiene que $\{y\} \sqsubset_{\preceq_k} \{x\}$, lo que implica que

$$g_{s^k}(\{x, y\}) \sqsubset_{\preceq_k} g_{s^{k-1}}(\{x, y\}).$$

Note que $s^{k-1} = s^k[s'_k/k]$ pero por (i), de la hipótesis, $s'_k = s_k$, por lo tanto $s^{k-1} = s^k[s'_k/k] = s^k[s_k/k]$. Así tenemos

$$g_{s^k}(\{x, y\}) \sqsubset_{\preceq_k} g_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}).$$

Ahora bien, como $s_k = \sigma(\preceq_k)$, por definición, s_k debe ser \preceq_k -dominante según f para k , en particular se cumple:

$$f_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}) \sqsubseteq_{\preceq_k} f_{s^k}(\{x, y\}). \quad (5.15)$$

◊ Como $g_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}) = \{x\}$, se tiene

$$\underbrace{f_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}) = \{x\}}_1 \quad \text{o bien} \quad \underbrace{[f_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}) = \{x, y\} \wedge x < y]}_2$$

◊ Como $g_{s^k}(\{x, y\}) = \{y\}$, set tiene

$$\underbrace{f_{s^k}(\{x, y\}) = \{y\}}_3 \quad \text{o bien} \quad \underbrace{[f_{s^k}(\{x, y\}) = \{x, y\} \wedge y < x]}_4$$

Veamos ahora que no puede ocurrir ninguna combinación de los casos 1-2 con los casos 3-4:

- Si sucede 1 y 3 se tiene que $f_{s^k}(\{x, y\}) = \{y\}$ y $f_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}) = \{x\}$ se cumplen, pero como $y \prec_k x$, se tiene que

$$f_{s^k}(\{x, y\}) = \{y\} \sqsubset_{\preceq_k} f_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}) = \{x\},$$

lo que contradice 5.15.

- Si sucede 1 y 4 se tiene que $f_{s^k}(\{x, y\}) = \{x, y\}$ y $f_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}) = \{x\}$.

Como $y \prec_k x$ y por definición \sqsubseteq_{\preceq_k} se tiene que

$$\{x, y\} \sqsubset_{\preceq_k} \{x\}, \text{ por lo tanto}$$

$$f_{s^k}(\{x, y\}) = \{x, y\} \sqsubset_{\preceq_k} f_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}) = \{x\}$$

lo que contradice 5.15.

- Si sucede 2 y 3 se tiene que $f_{s^k}(\{x, y\}) = \{y\}$ y $f_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}) = \{x, y\}$; pero por definición de \sqsubseteq_{\preceq_k} se tiene que $\{y\} \sqsubset_{\preceq_k} \{x, y\}$ ya que $\{y\} <_{car} \{x, y\}$. Por lo tanto

$$f_{s^k}(\{x, y\}) = \{y\} \sqsubset_{\preceq_k} f_{s^k[s_k/k]}(\{x, y\}) = \{x, y\},$$

lo que contradice 5.15.

- 2 y 4 es claramente imposible.

En cualquiera de los casos anteriores llegamos a una contradicción.

Caso 2 $x \prec_k y$.

De nuevo sabemos que $g_{s^{k-1}}(\{x, y\}) = \{x\}$ y $g_{s^k}(\{x, y\}) = \{y\}$.

Como $x \prec_k y$, por definición de $\sqsubseteq_{\leq k}$ se tiene que

$$\{x\} \sqsubseteq_{\leq k} \{y\},$$

es decir,

$$g_{s^{k-1}}(\{x, y\}) \sqsubseteq_{\leq k} g_{s^k}(\{x, y\});$$

pero como $s^k = s^{k-1}[t_k/k]$

$$g_{s^{k-1}}(\{x, y\}) \sqsubseteq_{\leq k} g_{s^{s^{-1}[t_k/k]}}(\{x, y\}).$$

Por definición de u_k^* se tiene $u_k^* = \preceq_k^{\{x, y\}}$, pero como $x \prec_k y$ se tiene $x \prec_k^{\{x, y\}} y$, así $\{x\} \sqsubseteq_{u_k^*} \{y\}$, por lo tanto

$$g_{s^{k-1}}(\{x, y\}) \sqsubseteq_{u_k^*} g_{s^{s^{-1}[t_k/k]}}(\{x, y\}). \quad (5.16)$$

Ahora bien,

◊ Como $g_{s^{k-1}}(\{x, y\}) = \{x\}$, se tiene

$$\underbrace{f_{s^{k-1}}(\{x, y\}) = \{x\}}_1 \quad \text{o bien} \quad \underbrace{[f_{s^{k-1}}(\{x, y\}) = \{x, y\} \wedge x < y]}_2$$

◊ Como $g_{s^{k-1}[t_k/k]}(\{x, y\}) = \{y\}$, set tiene

$$\underbrace{f_{s^{k-1}[t_k/k]}(\{x, y\}) = \{y\}}_3 \quad \text{o bien} \quad \underbrace{[f_{s^{k-1}[t_k/k]}(\{x, y\}) = \{x, y\} \wedge y < x]}_4$$

un análisis de casos, como antes, nos lleva siempre a contradecir el hecho de que t_k es u_k^* -dominante para k según f , particularmente,

$$f_{s^{k-1}[t_k/k]}(\{x, y\}) \sqsubseteq_{u_k^*} f_{s^{k-1}}(\{x, y\}). \quad (5.17)$$

Así, suponer que $g_{s'}(\{x, y\}) = \{x\}$ nos lleva a una contradicción en cualquier caso, lo que junto con la Observación 5.2 implica que $g_{s'}(\{x, y\}) = \{y\}$. ■

Observación 5.3 *Antes de comenzar a probar que la función \hat{g} satisface Pareto Débil debemos observar que si la función f satisface Dominio Estándar Fuerte entonces también dicha propiedad es satisfecha por la función g . Esto es consecuencia inmediata de la definición de \hat{g} .*

Proposición 5.3 \hat{g} *satisface Pareto Débil.*

Demostración. Supongamos que $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ y $(\forall i) x \prec_i y$. Debemos ver que $x \hat{\succ}_u y$. Como $x \in X$, entonces por Dominio Estándar Fuerte para g (c.f Observación 5.3) se tiene que existe s' tal que $g_{s'}(\{x, y\}) = x$. Tomemos $s = \sigma(u)$. Claramente las condiciones (i) y (ii) de la proposición anterior son satisfechas como también lo es el consecuente, por lo tanto la condición (iii) tiene que ser falsa, es decir, $y \hat{\succ}_u x$. Esto significa que $x = y$ (que no es posible, pues $x \prec_i y$) o bien $x g[\sigma(u^{\{x,y\}})] y$ (por definición de \hat{g}), lo que implica que $x \hat{\succ}_u y$. ■

Proposición 5.4 *Supongamos que \hat{g} satisface Explicaciones Transitivas. Entonces \hat{g} satisface Independencia de Alternativas Irrelevantes.*

Demostración. Como \hat{g} satisface Explicaciones Transitivas, entonces usando el Lema 3.2, basta considerar $V = \{x, y\}$ con $x \neq y$. Sea $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ y $u' = (\preceq'_1, \dots, \preceq'_n)$ perfiles y supongamos que $u|_V = u'|_V$ es decir,

$$(\forall i)(\forall x)(\forall y) [(x \in V) \wedge (y \in V) \longrightarrow (x \prec_i y \longleftrightarrow x \prec'_i y)]$$

En virtud del Lema 4.2 se tiene que $u^{\{x,y\}} = u'^{\{x,y\}}$, y en consecuencia

$$x \in g(\sigma(u^{\{x,y\}})) \longleftrightarrow x \in g(\sigma(u'^{\{x,y\}})),$$

lo que quiere decir, $x \hat{\succ}_u y \longleftrightarrow x \hat{\succ}_{u'} y$. ■

Ahora podemos probar muy fácilmente el Teorema 5.4.

Demostración del Teorema 5.4.

La Conjetura 1 nos dice que \hat{g} satisface Explicaciones Transitivas; en virtud del Lema 3.1 se tiene que \hat{g} satisface la propiedad de Dominio Estándar, como consecuencia de la Proposición 5.3 \hat{g} satisface la Pareto Débil y finalmente la Proposición 5.4 nos dice que \hat{g} satisface Independencia de Alternativas Irrelevantes. Así, en virtud del Teorema de Imposibilidad de Arrow, \hat{g} tiene un dictador. ■

Lema 5.2 *Si \hat{g} tiene un Dictador, entonces g tiene un Dictador Gibbard.*

Demostración. Sea k el dictador para \hat{g} . Recordemos que $k \in \mathbb{N}$ es un *dictador Gibbard* para g si, para cada $y \in X$ existe un preorden \preceq^* tal que para todo $u \in P^n$ se tiene

$$g_{u|_{\preceq^*/k}}(X) = \{y\}. \quad (5.18)$$

Sea \preceq^y el preorden tal que

$$(\forall x)[x \neq y \longrightarrow y \prec^y x] \wedge [\forall x \forall z (x \neq y \neq z \longrightarrow x \approx^y z)] \quad (5.19)$$

y sea $\preceq^* = \sigma_k(\preceq^y)$. Usaremos la Proposición 5.2 para mostrar que \preceq^* satisface la expresión 5.18.

Sea $s' = (s'_1, \dots, s'_n)$ un perfil tal que $s'_k = \sigma_k(\preceq^y)$, y supongamos que $x \neq y$. Luego por (5.19) $y \prec^y x$.

Sea $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ un perfil tal que

- (a) $\preceq_k = \preceq^y$
- (b) $(\forall i)[i \neq k \longrightarrow x \prec_i y]$,

y sea $s = \sigma(u)$. Entonces $s_k = \sigma_k(\preceq_k) = \sigma_k(\preceq^y) = \preceq^* = s'_k$.

Así tenemos,

- Por (b), sólo el individuo k prefiere a y sobre x . Así La condición (i) de la Proposición 5.2 es satisfecha.
- Usando (a) y (b) la condición (ii) de la Proposición 5.2 es satisfecha.
- Finalmente, como $y \prec_k x$ y k es un dictador para \hat{g} , se tiene que $y \hat{\succ}_u x$. Así, (iii) de la Proposición 5.2 es satisfecha.

Así, en virtud de la Proposición 5.2 se tiene que $g_{s'}(\{x, y\}) = \{y\}$. Pero si $g_{s'}(\{x, y\}) = \{y\}$ par todo x entonces $g_{s'}(X) = \{y\}$. Hemos probado entonces que \preceq^* satisface la expresión 5.18. ■

Lema 5.3 *Si g tiene un Dictador Gibbard, entonces f tiene un Dictador Débil.*

Demostración. Sea $k \in N$ el dictador Gibbard para g . En particular, para cada $y \in X$ existe un preorden \preceq^* tal que para todo $u \in P^n$ se tiene

$$g_{u[\preceq^*/k]}(\{x, y\}) = \{y\}. \quad (5.20)$$

Queremos ver que f tiene un Dictador débil, es decir, existe $j \in N$ tal que para todo $y \in X$, existe $\preceq^* \in P$, tales que para todo $u \in P^n$ y para todo $x \in X$ se cumple que

$$\text{si } u_k = \preceq^* \text{ entonces } y \in f_u(\{x, y\}).$$

Veremos que k es el dictador débil para f . En efecto. Sabemos que $g : P \longrightarrow P$ es tal que $g(u) = \text{lex}(f, \preceq)$, pero usando (5.9) tenemos que

$$g_u(\{x, y\}) = \text{mín}(\{x, y\}, g(u)).$$

Ahora, usando el Lema 2.4 y considerando $u' = u[\preceq^* / k]$ tenemos que

$$g_{u'}(\{x, y\}) = \{y\} = \text{mín}(f_{u'}(\{x, y\}), \leq).$$

Así, $f_{u'}(\{x, y\})$ no puede ser $\{x\}$. Por lo tanto $f_{u'}(\{x, y\}) = \{y\}$ o $f_{u'}(\{x, y\}) = \{x, y\}$. Así, $y \in f_u(\{x, y\})$. ■

Con esta última Afirmación demostramos el Teorema 5.3.

Proposición 5.5 *Si una función de elección f es no trivial, entonces f es manipulable.*

Demostración. Como f es no trivial, entonces existe $\preceq \in \mathcal{P}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $\preceq^* \in \mathcal{P}$ se tiene que \preceq^* no es \preceq -dominante para k relativo a f .

Es decir, existe un perfil $u \in \mathcal{P}^n$ y existe una agenda $V \in \mathcal{P}^*(X)$, (dependiendo de \preceq^*) tales que

$$f_u(V) \sqsubset_{\preceq} f_{u[\preceq^*/k]}(V). \quad (5.21)$$

Tomando $\preceq^* = \preceq$ y reemplazando en (5.21) se tiene que

$$f_u(V) \sqsubset_{\preceq} f_{u[\preceq/k]}(V),$$

lo que claramente nos da una situación de manipulación. ■

Demostración del Teorema 5.2.

La demostración es un corolario inmediato del Teorema 5.3 y de la Proposición 5.5. En efecto, sea $f : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{P}$ que satisface Dominio Estándar Fuerte. Si f es trivial, entonces en virtud del Teorema 5.3 f tiene un dictador débil. Si f no es trivial, entonces en virtud de la Proposición 5.5 se tiene que f es manipulable. ■

5.4. Observaciones finales

Quisiéramos terminar este trabajo con algunos comentarios sobre algunas perspectivas de trabajo.

Dentro de nuestros propósitos más inmediatos, como es de suponer, está probar la Conjetura 1, que nosotros intuimos que es válida.

También nos surgen algunas preguntas que no hemos tenido tiempo de estudiar en este trabajo y que quisiéramos atacar en un futuro próximo. Entre ellas tenemos:

- Se podrá caracterizar las extensiones “naturales”, de un preorden total \preceq sobre X a un preorden total \sqsubseteq sobre $\mathcal{P}^*(X)$, (por ejemplo: Ver definición 5.4) para las cuales los Teoremas 5.1 y 5.2 son válidos.
- Habrá una manera natural de ordenar esas extensiones naturales.
- Si suponemos que una función de elección f es manipulable entonces, como ya sabemos, existe una situación de manipulabilidad. Así, podemos preguntarnos qué tan “grande” es el espacio de las situaciones de manipulación de la función f , en otras palabras, cuál es la probabilidad real de manipular dicha función. Además, cuán complejo (algorítmicamente) puede resultar el proceso de crear una situación de manipulación para f .

Por último queremos insistir en las diferencia que hay entre nuestro aporte y algunos trabajos recientes. Como ya hemos dicho en la introducción de éste trabajo, Salvador Barberà [3] y Jean-Pierre Benoit [4] han establecido resultados de manipulabilidad para funciones de elección multivaluadas. Ellos consideran funciones multivaluadas que tienen la siguiente forma:

$$g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{P}(X),$$

donde el dominio \mathcal{D} está constituido por perfiles que son multiconjuntos de preórdenes sobre $\mathcal{P}(X)$ (cada componente del perfil es un preorden sobre conjuntos de candidatos) que además son muy particulares, i.e. están sujetos a ciertas propiedades de linealidad, en este sentido esas funciones no son totales. Más aún, dichas funciones no dependen del conjunto de alternativas (agenda), i.e. en el dominio sólo se consideran los perfiles. En nuestro trabajo consideramos funciones $f : \mathcal{P}^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ que dependen tanto de las preferencias sobre los candidatos como el conjunto de candidatos. Para nuestro conocimiento, este tipo de presentación de la problemática de manipulabilidad no se encuentra en la literatura que trata estos temas.

Bdigital.ula.ve

C.C.Reconocimiento

Bibliografía

- [1] K. J. Arrow. *Social choice and individual values*. 2nd ed., New Haven and London, Yale University Press, 1963.
- [2] K. J. Arrow, A. K. Sen, and K. Suzumura, editors. *Handbook of Social Choice and Welfare*. Elsevier, 2002.
- [3] S. Barberà, B. Dutta and A. Sen, Strategyproof Social Choice Correspondences, *J. of Economic Theory*, 101 (2001), 374–394.
- [4] J.-P. Benoit, Strategic manipulation in voting games when lotteries and ties are permitted, *J. of Economic Theory*, 102 (2002), 421–436.
- [5] Marquis de Condorcet. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Paris, 1785.
- [6] J.J O'Connor and E.F Robertson. The history of voting.
<http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Voting.html>
- [7] A. Gibbard, Manipulations of voting schemes: A general result, *Econometrica*, 41 (1973), 587-602.
- [8] J. S. Kelly, *Social Choice Theory: An Introduction*, Springer - Verlag, Berlin, 1988.
- [9] J. S. Kelly. *Arrow impossibility theorems*. New York, Academic Press, 1978.
- [10] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488-498, 1998.

- [11] S.Konieczny and R. Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In *Proceedings of the Fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU' 99)*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1638, pages 233-244, July 5-9 1999.
- [12] S.Konieczny and R. Pino Pérez. Merging Information: A qualitative framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5): 773-808, 2002.
- [13] S.Konieczny and R. Pino Pérez. *Propositional Belief Base Merging or how to Merge Beliefs/Goals coming from several Sources and some links with Social Choice Theory*. *Journal of Operational Research*, 160 (2005), no. 3, 785802.
- [14] J. Franklin Leal, *Posibilidad e Imposibilidad en la Teoría de Elección Social*. Trabajo de Grado. Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes, 2003.
- [15] May, Kenneth O., "A Set Independent, Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision," *Econometrica*, Vol. 20, No. 4 (Oct., 1952), pp. 680-384.
- [16] H. Moulin. *Axioms of cooperative decision making*. Monograph of the Econometric Society. Cambridge University Press, 1988.
- [17] V. Pareto. *Cours d'économie politique*. Rouge, Lausanne, 1897.
- [18] H. Rott. *Change, Choice and Inference*. Oxford, Oxford University Press, 2001.
- [19] M. A. Satterhwaite, Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions, *J. of Economic Theory* 10 (1975), 187-217.
- [20] A. K. Sen *Collective Choice and Social Welfare*. Amsterdam, Elsevier, 1979.
- [21] A. K. Sen *Choice, Welfare and Measurement*. Oxford, Blackwell, 1982.