

TJ217
G63



DISEÑO DE FILTROS ROBUSTOS PARA DETECCIÓN Y
DIAGNÓSTICO DE FALLAS, BASADOS EN CONTROL LMI,
PARA SISTEMAS LINEALES

por

Godoy M. Solben A.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO
PARCIAL PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
MAGISTER SCIENTIAE EN INGENIERÍA DE CONTROL Y AUTOMATIZACIÓN

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MÉRIDA, VENEZUELA

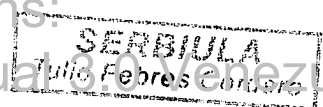
ENERO 2007



COMUNICACION

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)



A Dios Todopoderoso...

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido	VIII
Índice de Figuras	IX
Agradecimientos	XI
Resumen	XIII
Introducción General	1
1. Diseño de Controladores \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ mediante LMI	3
1.1. Introducción	3
1.2. Bases Matemáticas	5
1.2.1. Normas	5
1.2.1.1. Norma de Vectores y Matrices	5
1.2.1.2. Normas de Señales y Sistemas	7
1.2.2. Desigualdades Matriciales Lineales (LMIs)	11
1.3. Diseño de Controladores.	15
1.3.1. Control por realimentación del vector de estados	16
1.3.1.1. Control en \mathcal{H}_2 .	16
1.3.1.2. Control en \mathcal{H}_∞ .	20
1.3.2. Ejemplos	21
1.3.3. Control por realimentación dinámica de la salida.	28
1.3.3.1. Control en \mathcal{H}_2 .	30
1.3.3.2. Control en \mathcal{H}_∞ .	34
1.3.4. Ejemplos	36
1.4. Aplicaciones de Diseño de Controladores	38
1.4.1. Controladores con Anti-Rebote Robusto en \mathcal{H}_∞	38
1.4.2. Ejemplos	46
1.5. Región de Estabilidad	49
1.5.1. Ejemplos	55
2. Filtros de DDF en Sistemas Dinámicos	61
2.1. Introducción	61
2.2. Sistemas Lineales	63
2.2.1. Condiciones para el diagnóstico de Fallas	69

2.2.1.1.	Subespacio de Accesibilidad	69
2.2.1.2.	Condición de Detectabilidad	70
2.2.1.3.	Condición de Separabilidad	71
2.2.2.	Generación Robusta de Residuos	71
2.2.3.	Filtro basado en un Observador.	72
2.2.3.1.	Ejemplo Numérico	76
2.2.4.	Filtraje Robusto mediante un Post-Filtro	78
2.2.4.1.	Ejemplo Numérico	84
2.2.5.	Filtros Robustos de detección de fallas en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	86
2.2.5.1.	Ejemplo Numérico	91
2.3.	Sistemas Lineales Discretos	93
2.3.1.	Filtraje Robusto mediante un Post-Filtro	93
2.3.2.	Filtro Robusto de Detección de Fallas	95
2.3.3.	Filtros Robustos de detección de fallas en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	95
Conclusiones		97
Recomendaciones		99
Bibliografía		100

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Índice de figuras

1.1. Salidas. Lazo abierto y Control del Sistema.	22
1.2. Salida Lazo abierto	24
1.3. Control en \mathcal{H}_2	25
1.4. Control en \mathcal{H}_∞	26
1.5. Salida lazo abierto	27
1.6. Salidas Controladas en \mathcal{H}_2	28
1.7. Salidas Controladas en \mathcal{H}_∞	29
1.8. Salidas del Control en tiempo discreto mediante LMI en \mathcal{H}_2	38
1.9. Sistema de Control con Saturación de Actuadores.	41
1.10. Sistema de Control con Saturación en el Actuador.	42
1.11. Salidas del Control con Saturación. Salidas Controladas con Saturación. . .	48
1.12. Salidas del Control sin Saturación. Salidas Controladas sin Saturación . . .	49
1.13. Semiplano a la izquierda.	50
1.14. Semiplano a la derecha.	51
1.15. Cono centrado en cero.	52
1.16. Circunferencia.	53
1.17. Circulo Unitario	54
1.18. Algunas Regiones de Estabilidad para Sistemas en tiempo Discreto	56
1.19. Sistema en lazo abierto.	57
1.20. Salidas Controladas.	58
2.1. Fallas en Actuadores	64
2.2. Fallas en Sensores	65
2.3. Fallas en el Proceso	65
2.4. Filtro para la detección de Fallas en los actuadores	67
2.5. Filtro para la detección de Fallas en los sensores	67
2.6. Filtro para la detección de Fallas en el proceso	68
2.7. Esquema para la detección robusta de fallas	72
2.8. Salida del Sistema	77
2.9. Esquema de Post-filtraje.	82
2.10. Diagrama de Valores Singulares.	86
2.11. Respuestas del filtro a las señales de perturbación y falla.	87
2.12. Diagrama de Valores Singulares.	93
2.13. Respuestas del filtro a las señales de perturbación y falla.	94

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

x

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Agradecimientos

Doy mi inmensa gratitud a todas aquellas Personas e Instituciones que por su solidaridad, colaboración, paciencia y fé, han hecho posible el desarrollo de esta Tesis de Maestria. Es oportuno hacer un especial reconocimiento a:

Mi tutor y maestro, **Dr. Addison Ríos Bolívar**.

Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico (CDCHT) de la Universidad de Los Andes, por su apoyo en el desarrollo de los Proyectos: I-795-04-02-A; I-796-04-02-EM.

Mis Padres, fuente de bendiciones, **Ademar Godoy y Miriam de Godoy**.

Mi compañero de vida, amor incondicional, **Carlos Barrios**.

Mi amigo, **Sebastian Medina** Profesor de la Escuela de Ingeniería de Sistemas de la Universidad de Los Andes.

Dr. Thomas Bandes, Director del Consejo de Estudios de Postgrado de la Universidad de Los Andes.

A mis Profesores del Postgrado de Ingeniería de Automatización y Control, de la Universidad de Los Andes, en especial, al **Dr. Jesús Rodríguez Millán**, **Dr. Franklin Rivas Echeverría**, **Dr. Miguel Ríos Bolívar**, **Dr. Ferenc Szigeti**.

A mis Profesores del Postgrado de Automatización e Instrumentación, de la Universidad de Los Andes, en especial, al **Dr. Oscar Camacho**, Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes, **Dr. José Luis Paredes**,

MSc. Jesús Calderón.

MSc. Henry Garmendia, Investigador Agenda PDVSA-ULA, Laboratorio de Petróleo, Escuela de Ingeniería Química, Universidad de Los Andes.

Lic. Luisa Díaz, Secretaria del Postgrado de Computación de la Universidad de Los Andes.

Sra. Ana Rosa Muñoz, Secretaria del Postgrado de Ingeniería de Control y Automatización de la Universidad de Los Andes.

Lic. Milagros Mejía de Bastidas, Secretaria de la División de Estudios de Postgrado de la Universidad de Los Andes.

Personal de Vigilancia de la Facultad de Ingeniería de La Universidad de Los Andes.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Solben Godoy Méndez

U.L.A., Mérida, 2007

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Resumen

La confiabilidad integral de un proceso productivo se mide en relación con el nivel de seguridad que se puede garantizar en cada uno de los subprocesos que lo constituyen. La garantía de la seguridad exige de sofisticados sistemas que deben responder oportuna y adecuadamente ante cualquier situación del proceso productivo. En particular, si el proceso de producción presenta eventualmente, cualquier anomalía, se debe contar con sistemas que permitan distinguir y evaluar tal situación y a su vez, los sistemas de control deben responder en la dirección de minimizar o rechazar los impactos negativos que se puedan presentar, es decir, los sistemas deben ser tolerantes a los eventos no considerados como de operación normal.

Dado que la confiabilidad está relacionada con el concepto de seguridad, en los cuales los elementos de base son los sub-sistemas de detección y diagnóstico de fallas, (DDF). Los DDF se distinguen porque, a partir de los sensores, indicadores y de las variables medidas, permiten una supervisión continua y constante del comportamiento evolutivo de la producción.

Por Definición las fallas son funcionamientos anómalos que perturban la operación normal del sistema, causando una declinación inaceptable del desempeño integral de dicho sistema.

El concepto de diagnóstico de fallas se refiere tanto a la detección como a la localización de la falla, es decir, además de poder determinar si una falla está presente se requiere saber que componente es el que la está ocasionando.

La tarea de diagnóstico (detección y localización) puede realizarse en dos pasos principales:

Generación de residuos. Consiste en la Obtención de señales que contienen información sobre las fallas solamente. Estas señales son llamadas residuos. En el caso ideal los residuos son cero cuando no hay fallas y difieren de cero en la presencia de una falla.

Evaluación de residuos. Este paso pretende la extracción de la información contenida en los residuos. La evaluación proporciona información sobre el tiempo en el que una falla ocurrió y sobre el elemento en el cual esta falla está actuando. Se pueden presentar fallas tanto en los actuadores como en los sensores del sistema. Bajo esta consideración, donde existen múltiples fallas posibles, con diferentes direcciones, el problema de separabilidad de las fallas se hace evidente. Se debe construir un generador de residuos que nos permita distinguir cual de las fallas se ha hecho presente. En el contexto del problema de la separación de las fallas, es importante, entonces, analizar como se propagan las fallas dentro de la dinámica del error de estimación y que propiedades direccionales deben caracterizarlas.

Si en algún momento dado una falla se hace presente, la propagación de la misma en el espacio de estados, debido a su dirección de falla, ésta no debe estar contenida en el subespacio inobservable del sistema, lo cual permitirá su detectabilidad por medio de las salidas.

El objetivo de este trabajo es la Síntesis de Filtros de Detección de Fallas mediante técnicas LMI's, el cual es desarrollado en dos capítulos.

El primer Capítulo refiere el diseño de controladores tanto en tiempo continuo como discreto, para sistemas lineales invariantes en el tiempo, los cuales tiene múltiples objetivos en el desempeño en lazo cerrado para controladores por realimentación del vector de estados, Controladores por realimentación dinámica de la salida y Controladores con Antirebote Robusto. Para ello se recurre al concepto de normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ .

El segundo Capítulo propone la estrategia para el diseño de filtros robustos para la detección y diagnóstico de fallas en sistemas lineales a partir de un Post-filtro, cuya construcción es por la vía de la síntesis de controladores óptimos basados en las LMI's.

Introducción General

El control automático ha jugado un papel vital en el avance de la Ingeniería y de la ciencia. Este control debe cumplir con ciertas características, como lo son: estabilidad relativa, velocidad de respuesta rápida y amortiguamiento razonables. También poder reducir a un valor tolerantemente pequeño, el efecto de los errores de modelaje y de las señales exógenas. Estas especificaciones han de ser interpretadas en términos matemáticos, para luego, mediante simulaciones del modelo, verificar el índice de comportamiento del sistema resultante en respuesta a diversas señales y perturbaciones. Por otro lado, cuando un sistema de producción es dotado de esos mecanismos de control y de confiabilidad, entonces es capaz de adaptarse, rápidamente, a perturbaciones que intervienen sobre el sistema y su ambiente, lo cual garantiza condiciones de producción seguras. La complejidad de los sistemas de producción exige la construcción de sofisticados dispositivos que garanticen adecuados niveles de seguridad y productividad. Dentro de estos elementos se encuentran los sistemas de confiabilidad y monitoreo de procesos, los cuales están fundamentados en los mecanismos de diagnóstico y detección de fallas. El elemento fundamental en un sistema de supervisión, monitoreo y diagnóstico de fallas es el Filtro de Detección y Diagnóstico ó filtro FDI, el cual debe ser diseñado para operar en condiciones adversas debido a la presencia de señales externas desconocidas, de las incertidumbres y a los distintos regímenes de operación de los procesos. Los filtros de detección y diagnóstico de fallas tienen dos funciones primordiales: la primera es la generación de residuos que informan sobre la ocurrencia de un modo de excepción (falla). La segunda es, a partir del análisis de los residuos, indicar cual dispositivo está en falla.

El objetivo de este trabajo es la Síntesis de Filtros de Detección de Fallas mediante técnicas LMI's, el cual es desarrollado en dos capítulos.

El primer Capítulo refiere el diseño de controladores tanto en tiempo continuo como discreto, para sistemas lineales invariantes en el tiempo, los cuales tiene múltiples objetivos en el desempeño en lazo cerrado para controladores por realimentación del vector de estados, Controladores por realimentación dinámica de la salida y Controladores con Antirebote Robusto. Para ello se recurre al concepto de normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , tomando en cuenta que dicho control debe estabilizarse internamente y su construcción dependerá del tipo de sistema planteado.

El segundo Capítulo propone la estrategia para el diseño de filtros robustos para la detección y diagnóstico de fallas en sistemas lineales a partir de un Post-filtro, cuya construcción es por la vía de la síntesis de controladores óptimos basados en las LMI's. Esta síntesis de controladores óptimos considera las incertidumbres como señales de perturbación o ruido, señales que conducen al planteamiento a índices de desempeño mezclados, para obtener la ganancia del filtro dinámico.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Capítulo 1

Diseño de Controladores \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ mediante LMI

1.1. Introducción

Los sistemas de control han jugado un papel vital en el avance de la Ingeniería y de la ciencia, siendo objeto de intensa investigación y estudio. Campos como la teoría de control robusto permite estudiar el efecto de las incertidumbres y perturbaciones sobre el sistema. Este control debe cumplir con ciertas características, como lo son: estabilidad relativa, velocidad de respuesta rápida, además de sensibilidad, atenuación y amortiguamiento razonables. También poder reducir a un valor tolerantemente pequeño, el efecto de los errores y las señales exógenas a la salida del sistema. Estas especificaciones han de ser interpretadas en términos matemáticos, para luego, mediante simulaciones del modelo, verificar el índice de comportamiento del sistema resultante en respuesta a diversas señales y perturbaciones.

El presente Capítulo está basado en el diseño de sistemas de control para sistemas lineales invariantes en el tiempo, como lo son, el control por realimentación del vector de estados y el control por realimentación dinámica de la salida (control dinámico); para ello se emplean técnicas matemáticas basadas en Desigualdades Matriciales Lineales (Problemas de programación semidefinida), tanto en tiempo continuo como discreto, mediante normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , que luego serán empleados en el capítulo dos para el diseño de filtros. Se demuestra que los controladores tienen rechazo a perturbaciones y un funcionamiento

adecuado en presencia de incertidumbres.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

1.2. Bases Matemáticas

1.2.1. Normas

Se hace necesario referirse a las normas, ya que son operaciones matemáticas realizadas sobre un vector, matriz, señal, sistema, etc, que a su vez, se comparan con las normas de otro vector, matriz, señal, las cuales permiten dar información sobre el tamaño del elemento que se le aplica la norma. Se enfatiza el concepto en señales y sistemas, ya que, cantidades físicas, tales como voltajes, corrientes, temperaturas, presiones, etc., dependen del tiempo y se pueden interpretar como funciones del mismo (señales).

1.2.1.1. Norma de Vectores y Matrices

Al desarrollar modelos matemáticos de sistemas de control moderno, se encuentra que las ecuaciones diferenciales involucradas pueden hacerse bastante complicadas debido a la multiplicidad de entradas y salidas de un sistema complejo que puede llegar a los centenares. Para simplificar las expresiones de los sistemas de ecuaciones, es ventajoso utilizar la notación vectorial-matricial. La simplicidad de notación lograda indicando operaciones en vectores y matrices es muy conveniente para el trabajo teórico, y en realidad, resulta importante en el análisis y síntesis de sistemas de control moderno. Recurriendo a la notación de vectores y matrices se pueden manipular problemas, siguiendo la forma sistematizada de representación del sistema de ecuaciones, y resolviendo sus cálculos en computadora.

1.2.1.1.1 Norma de un Vector

En varias aplicaciones físicas aparecen cantidades tales como temperatura y rapidez, que poseen únicamente "magnitud". estas cantidades pueden representarse por números reales que se llaman *escalares*. De otra parte, hay también, cantidades, tales como fuerza y velocidad que poseen a la vez "magnitud y dirección". Estas cantidades pueden representarse por flechas (que tienen longitudes y direcciones apropiadas y parten desde un punto de referencia O) y se llaman *vectores*.

Se hace mención a la norma de un vector,

Definición 1 Sea C^n el espacio lineal de los números complejos de dimensión n . Diremos $x \in C^n$ implicando:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ con } x_i \in C \quad (1.1)$$

Las normas más comunes en C^n están dadas por:

$$\|x\|_p \triangleq (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \quad p = 1, 2, \infty$$

donde $|x_i|$ es la magnitud de x_i y $\|x\|_\infty$ se dice como:

$$\max_i |x_i|$$

Para un m -vector real $x = [x_1, \dots, x_m]^T \in R^m$, se define la norma de Euclidean

$$\|x\| = (x^T x)^{1/2} = (x_1^2, \dots, x_m^2)^{1/2} \quad (1.2)$$

1.2.1.1.2 Norma de una Matriz

Una matriz es una composición de vectores por columnas o por filas. Se hace mención a la norma de una matriz:

Definición 2 Para una matriz real de $n \times m$, la norma absoluta de una matriz, es el elemento de mayor valor absoluto de una matriz:

$$\|A\|_A = \max_{ij} (|a_{ij}|) \quad (1.3)$$

la norma euclidiana

$$\|A\|_E = \sqrt{\text{traza}(A^T \cdot A)} = \sqrt{\sum_{i,j} |d_{ij}|^2}$$

y la norma espectral

$$\|A\|_S = \sqrt{\text{mayor valor propio de } (A^T \cdot A)}$$

1.2.1.2. Normas de Señales y Sistemas

1.2.1.2.1. Señales

Definición 3 Una señal es una función $s : T \rightarrow W$ donde $T \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto de tiempo y W es un conjunto denominado espacio de señal.

Una señal $s : T \rightarrow \mathbb{R}^q$ representa en cada instante de tiempo $t \in T$ un vector :

$$s(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_q(t) \end{pmatrix}.$$

El "tamaño" de una señal se mide por normas.

Definición 4 Sea W un espacio lineal sobre un campo K , \mathbb{R} o \mathbb{C} . Una norma sobre W es una función denotada por $\|\cdot\|, \|\cdot\| : W \rightarrow \mathbb{R}$, la cual tiene las siguientes propiedades:

1. $\|s\| \geq 0$.
2. $\|s\| \geq 0 = 0$ si y solamente si $s = 0$.
3. $\|\alpha s\| = |\alpha| \|s\|$.
4. $\|s + p\| \leq \|s\| + \|p\|$,

donde $s, p \in W$ y $\alpha \in K$.

Dado un espacio lineal W y una norma $\|\cdot\|$ sobre W , el par $(W, \|\cdot\|)$ denota un *espacio normado*.

Así, por ejemplo;

En el caso de señales :

1. Si $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ se define la norma- p :

$$\|s(t)\|_p := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|_p^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Los casos particulares de interés son :

a) La norma-1 :

$$\|\mathfrak{s}(t)\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{s}(t)| dt.$$

b) La norma-2, la energía de una señal :

$$\|\mathfrak{s}(t)\|_2 := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{s}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Un ejemplo particular, se refiere a la señal $\mathfrak{s}(t)$ la cual se describe por la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad \mathfrak{s}(t) = Cx(t),$$

donde A y C son matrices de dimensiones apropiadas.

Se sabe que $\mathfrak{s}(t) = Ce^{At}x_0$, $x(0) = x_0$. Si A es Hurwitz entonces

$$\|\mathfrak{s}(t)\|_2^2 = \int_0^{\infty} \mathfrak{s}(t)^T \mathfrak{s}(t) dt = x_0^T e^{A^T t} C^T C e^{At} x_0 dt = x_0^T \mathfrak{D} x_0.$$

\mathfrak{D} es el *grammiano de observabilidad* el cual satisface la ecuación :

$$A^T \mathfrak{D} + \mathfrak{D} A + C^T C = 0.$$

1.2.1.2.1.1. Norma 2 de una señal en Tiempo Discreto:

Considerese los sistemas discretos lineales invariantes en el tiempo y sea $x(k)$ una función de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. La norma l_p de x se define como:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|_p^p \right)^{1/p}$$

$|\cdot|$ es la norma p del vector $x(k)$, $k \in \mathbb{R}$ es el conjunto de los números enteros. Es de interés son las normas donde $p = 1, 2, \infty$.

1.2.1.2.1.2. Norma ∞ de una señal en Tiempo Discreto :

La norma con $p = \infty$ se define como:

$$\|x\|_\infty = \sup_k \max_i |x_i(k)|$$

1.2.1.2.2. Sistemas

Un *sistema* se refiere a cualquier conjunto \mathcal{S} de señales. El sistema describe las relaciones entre estos dos conjuntos independientes de señales: un conjunto de *señales de entradas* y un conjunto de *señales de salidas*, mismas que pueden ser caracterizadas por funciones de transferencia, representaciones en espacio de estados, ecuaciones diferenciales, etc.

1.2.1.2.2.1. Norma \mathcal{H}_2

Definición 5 Sea $T(s)$ la función de transferencia de un sistema (una entrada, una salida). La Norma \mathcal{H}_2 , $\|T\|_2$, se define por:

$$\|T\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega)T(-j\omega)d\omega \right)^{1/2},$$

Para el caso multivariable se tiene:

Definición 6 Sea $T(s)$ la función de transferencia de un sistema multivariable. La Norma \mathcal{H}_2 , $\|T\|_2$, se define por:

$$\|T\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{traza}[T(j\omega)T^T(-j\omega)]d\omega \right)^{1/2},$$

1.2.1.2.2.2. Norma \mathcal{H}_∞

Definición 7 Sea $T(s)$ la función de transferencia de un sistema (una entrada, una salida) estable y con respuesta frecuencial $\hat{t}(\omega)$. La Norma \mathcal{H}_∞ , $\|T\|_\infty$, se define por:

$$\|T\|_\infty := \max_{\omega \in R} |\hat{t}(\omega)|,$$

Para el caso multivariable se realiza a través de la descomposición en valores singulares de matrices.

Definición 8 Sea $T(s)$ la función de transferencia de un sistema multivariable estable. La Norma \mathcal{H}_∞ , $\|T\|_\infty$, se define por:

$$\|T\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T(j\omega)),$$

donde $\bar{\sigma}$ es el valor singular máximo

Comentario 1.1 *Se han definido las normas 2 e infinito de señales y sistemas. En muy pocos casos, estas definiciones proporcionan un medio eficaz para el cálculo de tales normas, por lo que se presenta un conjunto de medios que nos permiten el cálculo de estas normas en sistemas lineales con representación de estados.*

Teorema 1 *Sea el sistema dinámico en tiempo continuo:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\omega(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D\omega(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ vector de perturbaciones externas; $y(t) \in \mathbb{R}^p$ vector de salidas medibles; las matrices A, B, C, D , son matrices reales de dimensiones apropiadas.

Donde la función de transferencia del sistema es:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Sea A una matriz hurwitz (estable), entonces

$$\|T(s)\|_2^2 = \text{Tr}(CL_c C^T) = \text{Tr}(B^T L_o B)$$

L_c es el gramiano de controlabilidad y L_o es el gramiano de observabilidad y satisfacen:

$$AL_c + L_c A^T + BB^T = 0$$

$$A^T L_o + L_o A + C^T C = 0$$

Teorema 2 Para el sistema (1.4), las siguientes proposiciones son equivalentes [40, 31, 34, 32]:

1. A es una matriz estable y $\|T(s)\|_{\infty} \leq \gamma$.
2. Existe una matriz P semidefinida positiva tal que

$$A^T P + PA + \gamma^{-2} P B B^T P + C^T C < 0,$$

Otra forma de obtener estas normas, es mediante *Desigualdades Matriciales Lineales (LMIs)*.

1.2.2. Desigualdades Matriciales Lineales (LMIs)

Las LMI's se refieren a restricciones sobre vectores. Es una técnica de gran alcance en la formulación y diseño para una variedad de problemas lineales de control basada en la linealización de el modelo del sistema. Las desigualdades matriciales están restringidas para ser utilizadas sobre sistemas lineales tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. El uso de LMI ofrece medios numéricamente manejables para atacar los planteamientos que carecen de una solución analítica. Esta operación siempre sacrifica información del modelo, pero da la posibilidad de utilizar una gran cantidad de resultados existentes [34, 32, 35, 37, 36].

En esta sección se presenta, de manera introductoria, un estudio sobre las *Desigualdades Matriciales Lineales*, LMI, y su aplicación en la teoría de control. Esto es,

Definición 9 Una LMI es una restricción sobre un vector $x \in \mathbb{R}^m$ de la forma

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0,$$

donde las matrices simétricas $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son dadas y el símbolo $F \geq 0$ significa que F es simétrica y semi-definida positiva, es decir que, para todo vector v , $v^T F v \geq 0$. Pueden tenerse desigualdades matriciales lineales no estrictas si la desigualdad es del tipo mayor o igual.

Las LMI's han emergido como una poderosa herramienta en la solución de problemas debido a sus propiedades numéricas, [4]:

- La computación es rápida y confiable. Existen algoritmos muy eficientes de solución tales como los basados en el *método de puntos interiores*, [4].
- Se pueden encontrar todas las soluciones incluyendo las soluciones óptimas.
- Si no hay solución es muy fácil mostrarlo.

Definición 10 *Sistema de LMI's.* Un sistema de desigualdades matriciales lineales es un conjunto finito de LMI's

$$F_1(x) > 0, \dots, F_k(x) > 0.$$

Todo sistema de LMI's se puede re-escribir como una única LMI. Específicamente,

$$F(x) := \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(x) \end{pmatrix} > 0.$$

La última desigualdad tiene sentido ya que $F(x)$ es simétrica para cualquier x . Además, puesto que el conjunto de autovalores de $F(x)$ es simplemente la unión de los autovalores de $F_1(x), \dots, F_k(x)$, cualquier x que satisface $F(x) > 0$ también satisface el sistema $F_1(x) > 0, \dots, F_k(x) > 0$ y viceversa.

La determinación de la existencia de soluciones para las LMI's se caracteriza por el *problema de factibilidad*.

Supóngase que $F, G, H : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{S}$ son funciones afines. La prueba de que exista o no soluciones $x \in \mathbb{V}$ de $F(x) > 0$, se llama el problema de factibilidad. La LMI se dice factible si tal x existe, por el contrario, la LMI $F(x) > 0$ se dice infactible.

Los conjuntos factibles establecen la *convexidad*, una propiedad importante en la solución de problemas de optimización.

El conjunto

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{V} \mid F(x) < 0\}$$

es *convexo*.

1.2.2.1. Complemento de Schur.

El *Complemento de Schur* es una herramienta matemática que permite llevar las Desigualdades Matriciales (convexas) No Lineales a Desigualdades Matriciales Lineales.

Lema 1 Dadas las matrices P, Q, R ; las siguientes proposiciones son equivalentes,

1.

$$S = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^T & R \end{pmatrix} > 0$$

2.

$$P > 0 \text{ y } R - Q^T P^{-1} Q > 0$$

ó

3.

$$R > 0 \text{ y } P - QR^{-1}Q^T > 0$$

4.

$$S = \begin{pmatrix} -P & Q \\ Q^T & -R \end{pmatrix} < 0$$

5.

$$P > 0 \text{ y } Q^T P^{-1} Q - R < 0$$

ó

6.

$$R > 0 \text{ y } QR^{-1}Q^T - P < 0$$

Las LMI's permiten caracterizar las normas de sistemas, por tanto, * La norma 2 y la norma ∞ se pueden definir como una restricción LMI.

1.2.2.2. Sistemas Continuos:

1.2.2.2.1. Norma 2 :

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Lema 2 Sea el sistema definido por (1.4), $\|T\|_2 < \mu$, $\mu > 0$, si y solo si existen matrices $X > 0$, $W > 0$ tales que satisfacen lo siguiente

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T & B \\ (o)^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} W & CX \\ (o)^T & X \end{bmatrix} > 0; \quad \text{tr}[W] < \mu \quad , D = 0. \quad (1.5)$$

Prueba ver [19, 22]

1.2.2.2. Norma ∞ :

Lema 3 (Lema Real Acotado). Sea el sistema definido por (1.4), $\|T\|_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$, si y solo si existe una matriz $X > 0$, tal que satisface lo siguiente

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ (o)^T & -\gamma I & D^T \\ (o)^T & (o)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.6)$$

Prueba ver [4, 42]

1.2.2.3. Sistemas Discretos:

Sea el sistema en tiempo discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\omega(k) \\ y(k) &= Cx(k) + D\omega(k) \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $\omega(k) \in \mathbb{R}^\omega$ vector de perturbaciones externas ; $y(k) \in \mathbb{R}^p$ vector de salidas medibles; las matrices A, B, C, D , son matrices reales de dimensiones apropiadas.

1.2.2.3.1. Norma 2:

Lema 4 Sea el sistema definido por (1.7), $\|T\|_2 < \mu$, $\mu > 0$, si y solo si existen matrices $X > 0$, $W > 0$ tales que satisfacen lo siguiente

$$\begin{bmatrix} X & XA & XB \\ (o)^T & X & 0 \\ (o)^T & (o)^T & I \end{bmatrix} > 0 ; \quad \begin{bmatrix} W & C \\ (o)^T & X \end{bmatrix} > 0; \quad (1.8)$$

Prueba ver [11, 41]

1.2.2.3.2. Norma ∞ :

Lema 5 Sea el sistema definido por (1.7), $\|T\|_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$, si y solo si existe una matriz $X > 0$, tal que satisface lo siguiente

$$\begin{bmatrix} X & XA & XB & 0 \\ (o)^T & X & 0 & C^T \\ (o)^T & (o)^T & I & D^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (1.9)$$

Prueba ver [11, 3]

Todas estas definiciones serán aplicadas en diseño de Controladores.

1.3. Diseño de Controladores.

El comportamiento de un sistema se hace óptimo al escoger un vector de control $u(t)$ de tal forma que el índice de desempeño se mínimice (o máximice, dependiendo del índice de desempeño seleccionado), tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. Cabe destacar que, en general, un sistema de control óptimo bajo un determinado índice de funcionamiento, no es óptimo bajo otros índices de funcionamiento. La característica de un sistema de control óptimo basado en un índice de comportamiento, es una función lineal de las variables de estado, lo que implica que se necesita realimentar todas las variables de estado. Esto requiere que todas estas variables estén disponibles para realimentar. Por

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

tanto es deseable representar el sistema en términos de variables de estado medibles. En sistemas complicados, es bastante improbable que no se puedan medir todas las variables de estado. Entonces hay que estimar las que no pueden ser medidas y utilizar los valores estimados para generar las señales de control óptimo. El uso de un método matricial permite la solución a éste problema. A continuación se desarrollan ambos planteamientos.

1.3.1. Control por realimentación del vector de estados

Múltiples condiciones para el análisis y diseño de sistemas de control se han desarrollado utilizando *LMIs* [40, 31, 35, 36]. Para resolver el problema de diseño integrado con realimentación de los estados, se plantea una serie de condiciones tipo *LMI*, basadas en la descripción de un sistema lineal e invariante en el tiempo, en variables de estado, suponiendo que todos ellos están disponibles para su realimentación. Para un sistema lineal de este tipo se pueden imponer restricciones tipo *LMI* para garantizar condiciones en la operación de la planta a lazo cerrado.

1.3.1.1. Control en \mathcal{H}_2 .

El funcionamiento en \mathcal{H}_2 es útil para manejar aspectos estocásticos tales como ruido de la medida y disturbios al azar.

1.3.1.1.1. Caso en Tiempo Continuo

Problema: Sea el sistema dinámico definido por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}\omega(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}u(t) + D_{22}u(t) \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados, el vector de control $u(t) \in \mathbb{U}^m$, $\omega(t) \in \mathbb{R}^\omega$, vector de perturbaciones externas ; $y(t) \in \mathbb{R}^p$, vector de salidas medibles ; $z(t) \in \mathbb{R}^z$, vector de

salidas a controlar; las matrices $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$ son matrices reales de dimensiones apropiadas; con $C_2 = I, D_{11} = D_{12} = D_{21} = D_{22} = 0$. Se desea diseñar un control $u = kx(t)$ tal que:

- 1) El sistema sea estable en lazo cerrado
- 2) $\|T_{zw}\|_2 < \mu$

Lema 6 Sea el sistema definido por (1.10), dicho sistema es estabilizable por un control por realimentación del vector de estados dado por $u = kx(t)$, con $k = ZX^{-1}$, si y solo si, existen matrices $X > 0, W > 0$ y una matriz rectangular Z , tales que, las siguientes desigualdades matriciales son satisfechas:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + Z^T B_2^T + B_2 Z & B_1 \\ (0)^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} W & C_1 X \\ (0)^T & X \end{bmatrix} > 0; \quad \text{tr}[W] < \mu, \quad D_{11} = 0. \quad (1.11)$$

Prueba. Sea el sistema (1.10). El sistema es estable si existe una matriz $P > 0$ simétrica, tal que

$$A^T P + P A < 0 \quad (1.12)$$

entonces:

$$\text{Sea } u = kx; \quad \dot{x} = Ax + B_2(kx); \quad A = (A + B_2 k)$$

$$(A + B_2 k)^T P + P(A + B_2 k) < 0 \quad (1.13)$$

Notamos que (1.13) es una desigualdad no lineal, por lo que hacemos $X = P^{-1}$ con $X > 0$.

Multiplicamos a (1.12) por la derecha y por la izquierda por X :

$$P^{-1} A^T P P^{-1} + P^{-1} P A P^{-1} < 0 \quad = \quad X A^T + A X < 0 \quad =$$

$$X(A + B_2 k)^T + (A + B_2 k)X < 0 \quad =$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$XA^T + Xk^T B_2^T + AX + B_2 kX < 0 \quad ; \quad (1.14)$$

Nuevamente observamos que (1.14) es una desigualdad no lineal. Se tiene la ganancia del control $k = ZX^{-1}$ donde $Z = kX$. Sustituimos Z en (1.14) para hacerla lineal y nos queda:

$$XA^T + Z^T B_2^T + AX + B_2 Z < 0 \quad (1.15)$$

Mediante la ecuación (1.15) y las LMIs (1.5), se consiguen las expresiones (1.11) para hallar los valores de X y Z .

1.3.1.1.2. Caso en Tiempo Discreto

Problema: Sea el sistema dinámico definido por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1\omega(k) + B_2u(k) \\ z(k) &= C_1x(k) + D_{11}\omega(k) + D_{12}u(k) \\ y(k) &= C_2x(k) + D_{21}\omega(k) + D_{22}u(k) \end{aligned} \quad (1.16)$$

con $D_{11} = 0, D_{22} = 0, C_2 = I, D_{21} = 0, D_{12} = 0$ y el par (A, B_2) estabilizable. Se desea diseñar un control $u = kx(k)$ tal que:

- 1) El sistema es estable en lazo cerrado
- 2) $\|T_{zw}\|_2 < \mu$

Lema 7 *Sea el sistema definido por (1.16), dicho sistema es estabilizable por un control por realimentación del vector de estados dado por $u = kx(k)$, con $k = ZX^{-1}$, si y solo si, existen matrices $X > 0, W > 0$ y una matriz rectangular Z , tales que, las siguientes desigualdades matriciales son satisfechas:*

$$\begin{bmatrix} X & (AX + B_2Z)^T & XB_1 \\ (o) & X & 0 \\ (o)^T & (o)^T & I \end{bmatrix} > 0 ; \quad \begin{bmatrix} W & C_1 \\ (o)^T & X \end{bmatrix} > 0; \quad (1.17)$$

Prueba. Para los sistemas en tiempo discreto se procede de forma similar que en continuo, sólo que, la ecuación de Lyapunov [25] cambia:

$$A^T P A - P < 0 ; \quad P > 0 \quad (1.18)$$

entonces:

$$\text{Sea } u = kx; \quad x(k+1) = Ax + B_2(kx); \quad A = (A + B_2k)$$

$$(A + B_2k)^T P (A + B_2k) - P < 0 \quad (1.19)$$

Notamos que (1.19) es una desigualdad no lineal, por lo que hacemos $X = P^{-1}$ con $X > 0$.

Multiplicamos a (1.19) por la izquierda por X:

$$P^{-1}(A + B_2k)^T P (A + B_2k) - P^{-1}P < 0 = X(A + B_2k)^T P (A + B_2k) - I < 0 = (AX + B_2kX)^T P (A + B_2k) - I < 0$$

nos queda:

$$(AX + B_2Z)^T P (A + B_2k) - I < 0 \quad (1.20)$$

Ahora multiplicamos a (1.20) por la derecha por X:

$$(AX + B_2Z)^T P (A + B_2k) P^{-1} - P^{-1} < 0 = (AX + B_2Z)^T P (A + B_2k) X - X < 0$$

nos queda:

$$(AX + B_2Z)^T X^{-1} (AX + B_2Z) - X < 0 \quad (1.21)$$

(1.21) está en la forma del complemento shur, por lo que puede expresarse como una LMI,

$$\begin{bmatrix} X & (AX + B_2Z)^T \\ (AX + B_2Z) & X \end{bmatrix} > 0; \quad (1.22)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

y si X y Z son soluciones factibles, entonces, $\mathbf{k} = ZX^{-1}$, estabiliza el sistema. De acuerdo con la dinámica del sistema (1.16), con base en (1.22), se encuentra la expresión (1.17).

1.3.1.2. Control en \mathcal{H}_∞ .

Un controlador se diseña para regular la salida de una planta sujeta a entradas externas, tales como perturbaciones, ruidos del sensor y las señales de referencia. La norma \mathcal{H}_∞ surge en el problema del regulador principalmente bajo dos circunstancias: cuando hay un conjunto de señales exógenas y cuando hay incertidumbre en la planta. El funcionamiento en \mathcal{H}_∞ es conveniente para hacer cumplir la robustez, para modelar la incertidumbre y las especificaciones de desempeño. La síntesis (*Procedimiento directo, que hace que un sistema funcione de un modo especificado*) de controladores óptimos en \mathcal{H}_∞ basados en LMI tiene su fundamento en el Lema Real Acotado.

1.3.1.2.1. Caso en Tiempo Continuo

Problema: Sea el sistema dinámico definido por (1.10). Se desea diseñar un control $u = \mathbf{k}x(t)$ tal que:

- 1) El sistema sea estable en lazo cerrado
- 2) $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$

Lema 8 Sea el sistema definido por (1.10), dicho sistema es estabilizable por un control por realimentación del vector de estados dado por $u = \mathbf{k}x(t)$, con $\mathbf{k} = ZX^{-1}$, si y solo si, existen matrices $X > 0$, y una matriz rectangular Z , tales que, las siguientes desigualdades matriciales son satisfechas:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + Z^T B_2^T + B_2 Z & XB_1 & C_2^T \\ (o)^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ (o)^T & (o)^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.23)$$

Prueba. Las expresiones se derivan de la misma manera que en la norma \mathcal{H}_2 en tiempo continuo.

1.3.1.2.2. Caso en Tiempo Discreto

Problema: Sea el sistema dinámico definido por (1.16). Se desea diseñar un control $u = \mathbf{k}x(k)$ tal que:

- 1) El sistema es estable en lazo cerrado
- 2) $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$

Lema 9 Sea el sistema definido por (1.16), dicho sistema es estabilizable por un control por realimentación del vector de estados dado por $u = \mathbf{k}x(k)$, con $\mathbf{k} = ZX^{-1}$, si y solo si, existe una matriz $X > 0$, y una matriz rectangular Z , tales que, la siguiente desigualdad matricial es satisfecha:

$$\begin{bmatrix} X & AX + B_2Z & XB_1 & 0 \\ (o)^T & X & 0 & C_2^T \\ (o)^T & (o)^T & I & D_{11}^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (1.24)$$

Prueba. Las expresiones se derivan de la misma manera que en la norma \mathcal{H}_2 en tiempo discreto.

1.3.2. Ejemplos

Ejemplo Numérico 1. (Tiempo Continuo)

Sea el sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

Resultados obtenidos mediante Matlab©

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Autovalores en lazo abierto:

- 7.2765 ;
- 5.5740 ;
- $-1.4252 + 0.1993i$;
- $-1.4252 - 0.1993i$;

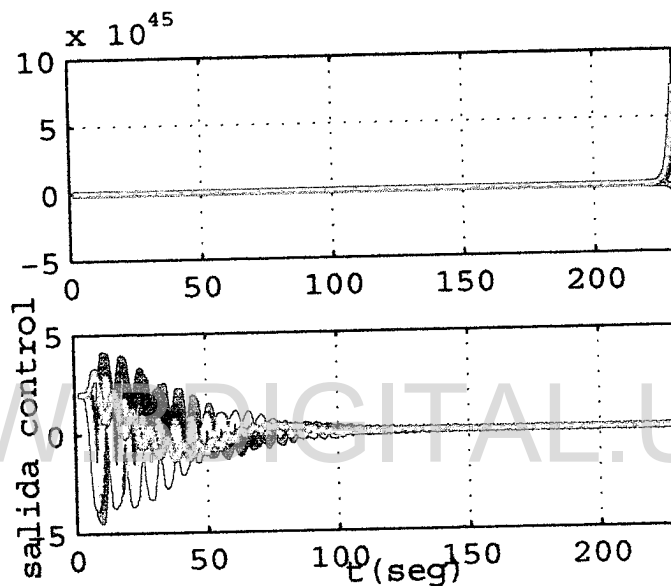


Figura 1.1: Salidas. Lazo abierto y Control del Sistema.

La Figura 1.1 muestra el comportamiento inestable del sistema. Al aplicarle el control, este logra estabilizar la señal, de manera satisfactoria. Los autovalores reflejan tal afirmación.

Ganancia del Control:

$$k = \begin{pmatrix} -26.1983 & 5.3326 & -4.8535 & -30.7102 \\ -9.4709 & 12.8056 & 16.3916 & -15.2912 \\ -13.2353 & 1.1681 & -4.0991 & -10.6833 \end{pmatrix}$$

Autovalores en lazo cerrado:

$$-0.8626 + 26.7282i ;$$

$$-0.8626 - 26.7282i ;$$

$$-0.7155 + 1.9732i ;$$

$$-0.7155 - 1.9732i ;$$

Ejemplo Numérico 2. (Tiempo Continuo)

Sea el sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 8 & -2 & 3 & -2,4495 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Resultados obtenidos mediante el Toolbox LMI de Matlab©

Autovalores en lazo abierto:

$$-4.8037 ;$$

$$-1.3229 + 1.6696i ;$$

$$-1.0814 - 1.6696i ;$$

$$-1.0000 ;$$

En \mathcal{H}_2 :

$$\mu = 0,2168 ;$$

Ganancia del Control:

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\mathbf{k} = 1.0e + 004 \begin{pmatrix} -1.3697 & 0.0418 & 0.4291 & -1.0902 \\ 0.0466 & -1.2049 & -0.1081 & 0.2749 \end{pmatrix}$$

Autovalores en lazo cerrado:

-146.2917 ;

-77.6913 ;

-8.5270 ;

-3.8292 ;

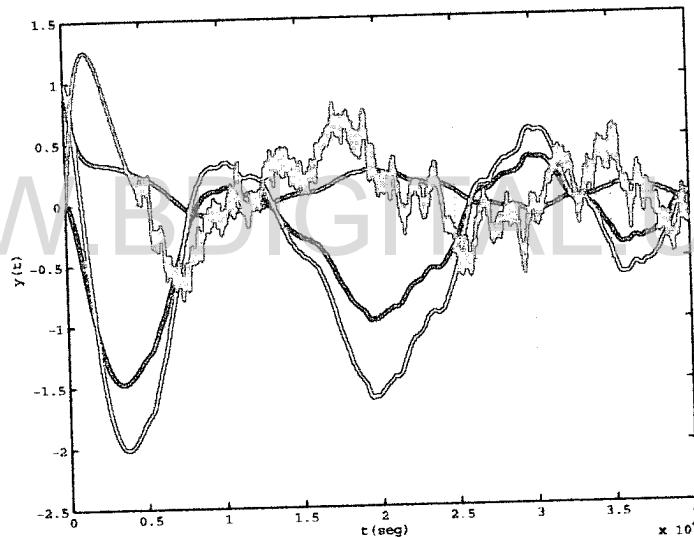


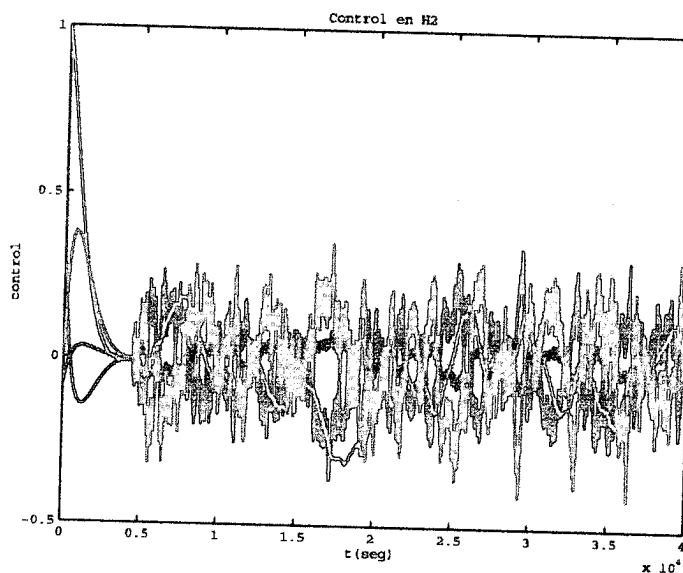
Figura 1.2: Salida Lazo abierto

En \mathcal{H}_∞ :

$\gamma = 0,1192$;

Ganancia del Control:

$$\mathbf{k} = 1.0e + 003 * \begin{pmatrix} -1.0572 & 0.0151 & 0.5990 & -5.7620 \\ 0.0150 & -1.0019 & -0.1492 & 1.4403 \end{pmatrix}$$

Figura 1.3: Control en \mathcal{H}_2

Autovalores en lazo cerrado:

-1.0169 ;

-0.9990 ;

-0.0499 ;

-0.0018 ;

La Figura 1.2 muestra la salida del sistema en lazo abierto en presencia de señales de ruido y perturbaciones. El desempeño del control en \mathcal{H}_2 , Figura 1.3 y \mathcal{H}_∞ , Figura 1.4, reduce notablemente el efecto de tales señales.

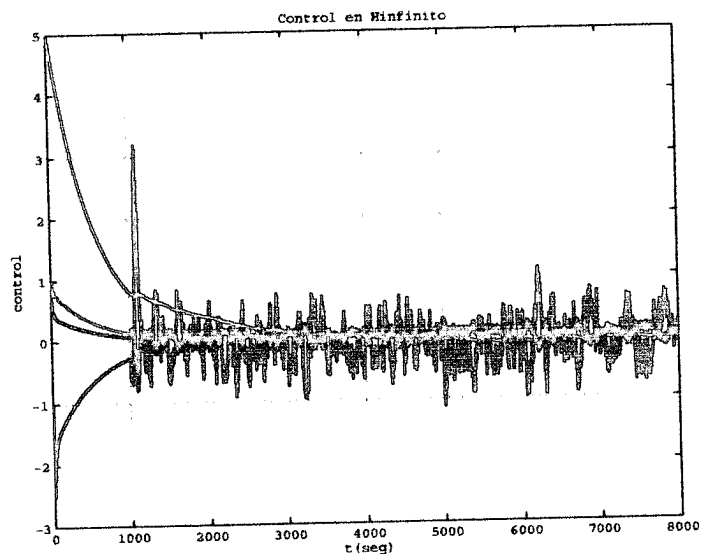
Ejemplo Numérico 3. (Tiempo Continuo)

Sea el sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Figura 1.4: Control en \mathcal{H}_∞

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = 0$$

Resultados obtenidos mediante el Toolbox LMI de Matlab©

En \mathcal{H}_2 :

$$\mu = 0,0406 ;$$

Ganancia del Control:

$$k = 1.0e + 004 * \begin{pmatrix} -2.8022 & -2.1187 & -0.2003 & -5.0045 \\ -1.9643 & -2.7879 & -0.1121 & -4.7997 \end{pmatrix}$$

En \mathcal{H}_∞ :

$$\gamma = 0,1251 ;$$

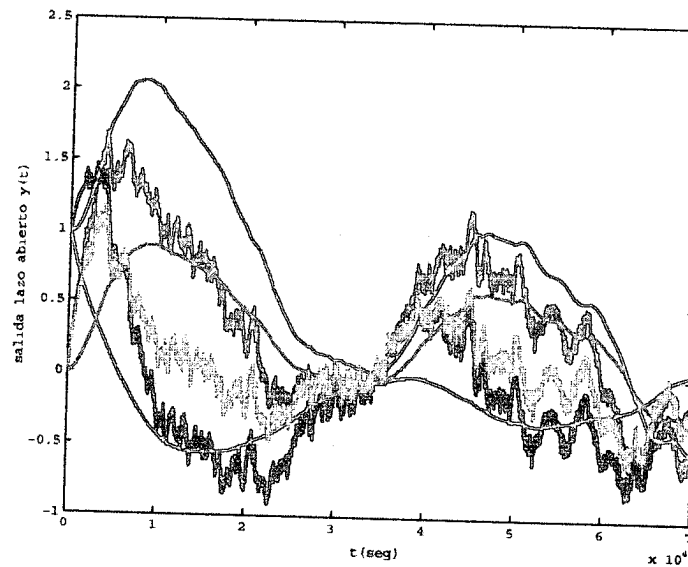


Figura 1.5: Salida lazo abierto

Ganancia del Control:

$$k = \begin{pmatrix} -177.7766 & 12.5575 & -3.7919 & -13.8109 \\ -20.3311 & -7.9267 & -5.9941 & -27.0153 \end{pmatrix}$$

Autovalores en lazo cerrado:

- 206.3024;
- 136.4868 ;
- 13.9513 ;
- 9.4377 ;

Los resultados obtenidos satisfacen las condiciones establecidas para la aplicación de normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ en el problema de controladores. En las gráficas obtenidas se aprecian variaciones producidas por las señales de ruido presentes en los sistemas estudiados. Los controladores diseñados garantizan la estabilidad interna del sistema, minimizan el ruido, se observan diferencias considerables entre los tiempos de respuesta en lazo abierto y lazo cerrado.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

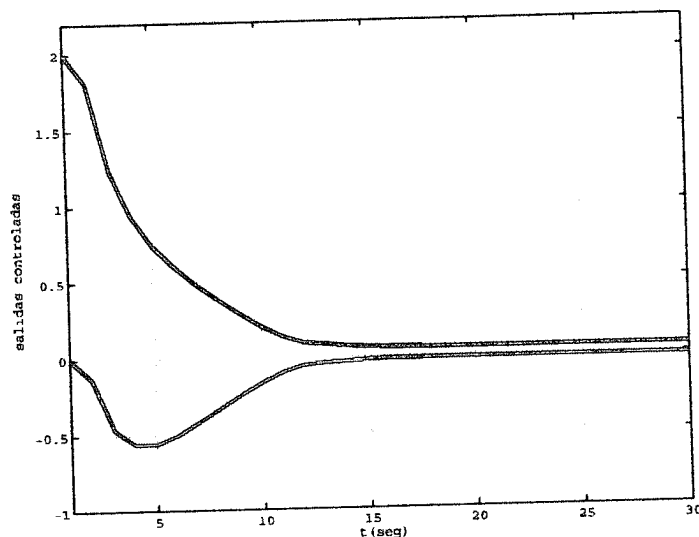


Figura 1.6: Salidas Controladas en \mathcal{H}_2

Comentario 1.2 *Hasta ahora hemos considerado todos los estados del sistema. A continuación se desarrolla un control por realimentación dinámica de la salida.*

1.3.3. Control por realimentación dinámica de la salida.

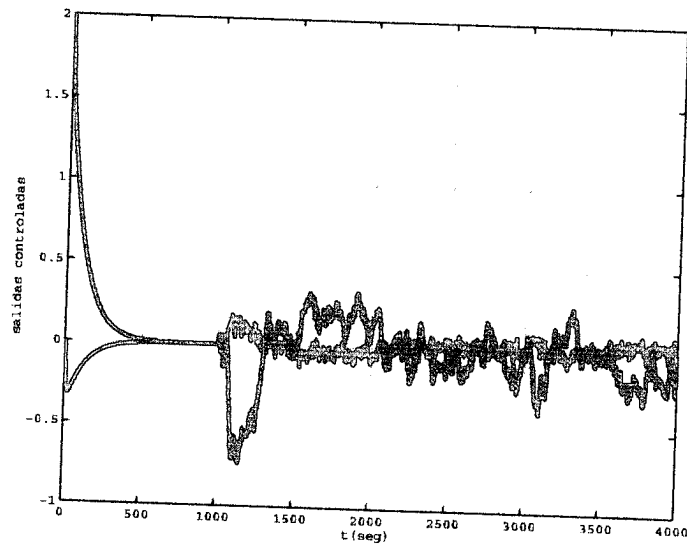
El control dinámico por realimentación de la salida se diseña cuando las salidas no están físicamente disponibles para su medición, y sólo una parte de ellas puede usarse para control.

Problema: Sea el sistema dinámico (1.10). Se desea diseñar un controlador dinámico:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= A_c \zeta(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c \zeta(t) + D_c y(t)\end{aligned}\tag{1.25}$$

tal que:

- El sistema en lazo cerrado $T_{zw}(s)$ sea estable

Figura 1.7: Salidas Controladas en \mathcal{H}_∞

$$b. \|T_{zw}\|_2 < \mu \text{ ó } \|T_{zw}\|_\infty < \gamma$$

En este caso, las matrices del sistema en lazo cerrado corresponden en:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2(C_c\zeta + D_c y) \\ &= Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2C_c\zeta + B_2D_c(C_2x(t)) = \end{aligned} \quad (1.26)$$

Así;

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_2D_cC_2)x(t) + B_2C_c\zeta + B_1\omega(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}\omega(t) \\ y(t) &= C_2x(t) \end{aligned} \quad (1.27)$$

En lazo cerrado,

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A + B_2 D_c C_2)x(t) + B_2 C_c \zeta(t) + B_1 \omega \\
\dot{\zeta}(t) &= B_c C_2 x(t) + A_c \zeta(t) \\
z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} \omega
\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= \begin{pmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{pmatrix}; \\
\mathbb{B} &= \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{C} = (C_1 \quad 0) \quad \mathbb{D} = 0
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ son las matrices en lazo cerrado y A_c, B_c, C_c, D_c son las matrices del control a obtener. La función de transferencia en lazo cerrado está dada por:

$$T_{z\omega}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{array} \right) = \mathbb{C}(sI - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{B} + \mathbb{D} \tag{1.29}$$

A continuación se desarrollan las expresiones correspondientes para el control dinámico tanto en \mathcal{H}_2 como en \mathcal{H}_∞ , en tiempo continuo y en tiempo discreto.

1.3.3.1. Control en \mathcal{H}_2

1.3.3.1.1. Caso en Tiempo Continuo

Problema: Sea el sistema definido por (1.10). Se desea calcular el control dinámico definido por la ecuación (1.25) que satisfaga un requerimiento en \mathcal{H}_2 .

Lema 10 *El sistema definido por (1.10) es estabilizable por un control por realimentación dinámica de la salida de orden completo dado por (1.25) tal que $\|T_{z\omega}\|_2 < \mu$, si y solo si existen matrices simétricas $\mathbf{X} > 0$ y $\mathbf{Y} > 0$ de orden n ; la matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, satisfaciendo las siguientes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T + \mathbf{L} + \mathbf{L}^T & \mathbf{A} + \mathbf{NC}_2 + \mathbf{Q}^T & \mathbf{B}_1 + \mathbf{ND}_{21} \\ (o)^T & \mathbf{YA} + \mathbf{A}^T\mathbf{Y} + \mathbf{FC}_2 + \mathbf{C}_2^T\mathbf{F}^T & \mathbf{YB}_1 + \mathbf{FD}_{21} \\ (o)^T & (o)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.30)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{C}_1\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{M} & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}\mathbf{C}_2 \\ (o)^T & \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ (o)^T & (o)^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0; \quad (1.31)$$

$$\text{traza}[\mathbf{W}] < \mu \quad ; \mu > 0$$

El controlador se obtiene de

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} & -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{B}_2 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{X} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} & 0 \\ -\mathbf{C}_2\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Prueba

Multiplicamos la primera desigualdad de (1.5) por la derecha por $\mathcal{T} := \text{diag}[\mathbb{T}, \mathbf{I}]$ y por la izquierda por \mathcal{T}^T y la segunda desigualdad de (1.5) la multiplicamos por $\mathcal{J} := \text{diag}[\mathbf{I}, \mathbb{T}]$ y por la izquierda por \mathcal{J}^T . Así, por la derecha

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AX}\mathbb{T} + \mathbf{XA}^T\mathbb{T} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbb{T} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

ahora, multiplicando por la izquierda por \mathcal{T}^T la misma desigualdad nos queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{AX}\mathbb{T} + \mathbf{XA}^T\mathbb{T} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbb{T} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}^T\mathbf{AX}\mathbb{T} + \mathbb{T}^T\mathbf{XA}^T\mathbb{T} & \mathbb{T}^T\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T\mathbb{T} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.34)$$

Multiplicamos ahora la segunda desigualdad de (1.5) por la derecha por \mathcal{J} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{C}\mathbf{X} \\ \mathbf{X}\mathbf{C}^T & \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbb{T} \\ \mathbf{X}\mathbf{C}^T & \mathbf{X}\mathbb{T} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

y por la izquierda nos queda

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & CXT \\ XC^T & XT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & CXT \\ T^T XC^T & T^T XT \end{bmatrix} > 0 \quad (1.36)$$

De (1.34) y (1.36) se tienen las siguientes expresiones:

$$T^T XAT, T^T XA^T T; T^T B, CXT; T^T XC^T, T^T XT$$

$$T^T AXI = \begin{bmatrix} AX + DC_2 X + CU \\ YAX + YDC_2 X + VB_p C_2 X + YCU + VA_p U \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} AX Y + DC_2 X Y + CUY + AU^T V^T + DC_2 U^T V^T + CYV^T \\ YAX Y + YDC_2 X Y + VB_p C_2 X Y + YCUY + VA_p UY + YAU^T V^T + \\ VB_p C_2 U^T V^T + YCYV^T + VA_p YV^T \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

$$T^T B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 + DD_{21} \\ B_p D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 + DD_{21} \\ YB_1 + YDD_{21} + VB_p D_{21} \end{bmatrix}; \quad (1.38)$$

$$CXT = [C_1 X + D_{12} D_p C_2 X + D_{12} C_p U \quad C_1 X Y + D_{12} D_p C_2 + D_{12} C_p UY + C_1 U^T Y + D_{12} C_p YV^T] \quad (1.39)$$

$$T^T XC^T = \begin{bmatrix} X & U^T \\ I & YU^T + VY \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_p C_2 \\ D_{12} C_p \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} XC_1 + XD_{12} D_p C_2 + U^T D_{12} C_p \\ C_1 + D_{12} + D_p C_2 + YU^T D_{12} C_p + VY D_{12} C_p \end{bmatrix}; \quad (1.40)$$

$$T^T XI = \begin{bmatrix} X & I \\ I & YU^T V^T + VYV^T \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

En (1.37, 1.38, 1.39, 1.40, 1.41) se observan expresiones no lineales, por lo que se hace necesario un cambio de variable para linealizar las mismas :

$$M = D_c C_2 X + C_c U \quad ; \quad R = D_c \quad ; \quad (1.42)$$

de (1.32) se tiene:

$$Q := A_c V U + F C_2 X - A X V - L V - N C_2 X V$$

$$F := V B_c + Y D$$

$$L := C U + N C_2 X$$

$$N := D$$

sustituyendo en (1.37, 1.38, 1.39, 1.40, 1.41), finalmente nos queda la expresión para el control dinámico en \mathcal{H}_2 planteadas en (1.30) y (1.31).

1.3.3.1.2. Caso en Tiempo Discreto

Problema: Sea el sistema definido por (1.16). Se desea calcular el control dinámico en tiempo discreto definido por la ecuación (1.43) que satisfaga un requerimiento en \mathcal{H}_2 .

$$\begin{aligned} \zeta(k+1) &= A_c \zeta(k) + B_c y(k) \\ u(k) &= C_c \zeta(k) + D_c y(k) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Lema 11 *El sistema discreto definido por (1.16) es estabilizable por un control por realimentación dinámica de la salida de orden completo dado por (1.43) tal que $\|T_{zw}\|_2 < \mu$, si y solo si existen matrices simétricas $X > 0$ y $Y > 0$ de orden n ; la matriz $Q, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $N \in \mathbb{R}^{n \times p}, F \in \mathbb{R}^{n \times p}, R \in \mathbb{R}^{q \times p}, M \in \mathbb{R}^{q \times m}$, satisfaciendo las siguientes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} X & \parallel & AX + L & A + NC_2 & B_1 + ND_{21} \\ (o)^T & Y & Q & YA + FC_2 & YB_1 + FD_{21} \\ (o)^T & (o)^T & X & \parallel & 0 \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & Y & 0 \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & (o)^T & \parallel \end{bmatrix} > 0 \quad (1.44)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_1 X & C_1 \\ (o)^T & X & \mathbb{I} \\ (o)^T & (o)^T & Y \end{bmatrix} > 0; \quad (1.45)$$

$$\text{traza}[W] < \mu \quad ; \mu > 0 \quad ; \mathbb{D} = D_{11} = 0$$

El controlador estabilizante está dado por (1.32).

Prueba Los cálculos se realizan de la misma forma que en tiempo continuo.

1.3.3.2. Control en \mathcal{H}_∞

1.3.3.2.1. Caso en Tiempo Continuo

Problema: Sea el sistema definido por (1.10). Se desea calcular el control dinámico en tiempo continuo definido por la ecuación (1.25) que satisfaga un requerimiento en \mathcal{H}_∞ .

Lema 12 El sistema definido por (1.10) es estabilizable por un control por realimentación dinámica de la salida de orden completo dado por (1.25) tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, si y solo si existen matrices simétricas $X > 0$ y $Y > 0$ de orden n ; la matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$, satisfaciendo las siguientes LMIs:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2 L + L^T B_2^T & A + B_2 R C_2 + Q^T \\ (o)^T & YA + A^T Y + F C_2 + C_2^T F^T \\ (o)^T & (o)^T \\ (o)^T & (o)^T \\ (o)^T & (o)^T \end{bmatrix} < 0 \quad (1.46)$$

$$\begin{bmatrix} B_1 + B_2 R D_{21} & B_2 & X C_1^T & L^T \\ Y B_1 + F D_{21} & Y B_2 + M & C_1^T & C_2^T R^T \\ -\mu I & 0 & D_{11} & D_{21} R^T \\ (o)^T & -\mu I & 0 & 0 \\ (o)^T & (o)^T & -\mu I & 0 \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.46)$$

El controlador se obtiene de (1.32).

Prueba

Multiplicamos la desigualdad (1.6) por la derecha por $T := \text{diag}[T, 1, 1]$ y por la izquierda por T^T . Así, por la derecha tenemos:

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\mu I & D^T \\ C & D & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T X T + X A T & XB & C^T \\ B^T X T & -\mu I & D^T \\ C T & D & -\mu I \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Multiplicamos la desigualdad (1.47) por la izquierda se tiene:

$$\begin{bmatrix} T^T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\mu I & D^T \\ C & D & -\mu I \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} T^T A^T X T + T^T X A T & T^T X B & T^T C^T \\ B^T X T & -\mu I & D^T \\ C T & D & -\mu I \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

De (1.48) se tienen las siguientes expresiones:

$$T^T X A T, T^T X A^T T; T^T X B, C T; D^T$$

$$D = D_{12} D_p D_{21} + D_{11} \quad (1.49)$$

$$C T = [C_1 + D_{12} D_p C_2 \quad D_{12} C_p] \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & V^T \end{bmatrix} =$$

$$[C_1 + D_{12} D_p C_2 \quad Y C_1 + Y D_{12} D_p C_2 + V^T D_{12} C_p] \quad (1.50)$$

$$T^T X B = \begin{bmatrix} X B_1 + X D D_{21} + U^T B_p D_{21} \\ B_1 + D D_{21} + Y U^T B_p D_{21} + V Y B_p D_{21} \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

En (1.49, 1.50 y 1.51) podemos apreciar nuevamente las no linealidades por lo que se hace necesario el cambio de variable mediante (1.32). Finalmente, sustituyendo en (1.48) nos queda la expresión del control de H_∞ planteada en (1.46).

1.3.3.2.2. Caso en Tiempo Discreto

Problema: Sea el sistema definido por (1.16). Se desea calcular el control dinámico en tiempo discreto definido por la ecuación (1.43) que satisfaga un requerimiento en \mathcal{H}_∞ .

Lema 13 *El sistema discreto definido por (1.16) es estabilizable por un control por realimentación dinámica de la salida de orden completo dado por (1.43) tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, si y solo si existen matrices simétricas $\mathbf{X} > 0$ y $\mathbf{Y} > 0$ de orden n ; la matriz $\mathbf{Q}, \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{q \times p}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, satisfaciendo la siguiente LMI:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbb{1} & \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{L} & \mathbf{A} + \mathbf{N}\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_1 + \mathbf{N}\mathbf{D}_{21} & 0 \\ (o)^T & \mathbf{Y} & \mathbf{Q} & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \mathbf{F}\mathbf{C}_2 & \mathbf{Y}\mathbf{B}_1 + \mathbf{F}\mathbf{D}_{21} & 0 \\ (o)^T & (o)^T & \mathbf{X} & \mathbb{1} & 0 & \mathbf{X}\mathbf{C}_1^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & \mathbf{Y} & 0 & \mathbf{C}_1^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & (o)^T & \mathbb{1} & \mathbf{D}_{11}^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & (o)^T & (o)^T & \gamma \mathbb{1} \end{bmatrix} > 0 \quad (1.52)$$

El controlador estabilizante está dado por (1.32).

Prueba Los cálculos se realizan de la misma forma que en tiempo continuo [40].

1.3.4. Ejemplos

Ejemplo Numérico (Tiempo discreto)

Sea el sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 0.0074 & -0.1109 & -0.2061 & -0.1565 \\ 0.6607 & 0.1969 & 0.2652 & 0.4389 \\ 1.1011 & -0.6827 & 1.2485 & 0.7315 \\ 0.5097 & -0.5128 & 0.2187 & -1.1277 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -0.0198 \\ 0.1637 \\ 0.2728 \\ 0.2009 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Resultados obtenidos mediante el Toolbox LMI de Matlab©

En \mathcal{H}_∞ :

$$\mu = 0,8155 ;$$

Matrices del Control Dinámico:

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} -0.2711 & -0.3877 & 0.1907 & -0.0141 \\ 0.5811 & -1.1227 & 0.1404 & -0.0289 \\ 0.4613 & -0.2068 & 0.1102 & -0.2617 \\ -0.8647 & 0.0099 & -0.1188 & 0.3897 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} -0.1811 & 0.0582 & 0.7798 & -0.0838 \\ 0.3509 & 1.1095 & -0.7066 & 0.1578 \\ 0.9909 & -1.1593 & 1.8586 & 1.2486 \\ 0.8447 & -0.0627 & 0.8008 & -2.1279 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{pmatrix} -0.1191 & -0.2548 & 0.6693 & -0.0117 \\ 0.1624 & 0.1639 & -0.2710 & -0.3379 \\ -0.2856 & -0.0608 & -0.1439 & -0.2327 \\ -0.6117 & 0.4797 & -0.0200 & 0.1780 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_c = \begin{pmatrix} 0.3021 & -0.0664 & -0.5684 & -0.0815 \\ -0.0664 & -0.6470 & 0.5502 & 0.0025 \\ -0.5684 & 0.5502 & -0.8843 & -0.5030 \\ -0.0815 & 0.0025 & -0.5030 & 0.8130 \end{pmatrix}$$

Se considera el análisis de la robustez en lazo cerrado. Se garantiza el desempeño del diseño, a pesar, de los cambios desconocidos en las señales de perturbación y ruido.

Autovalores en lazo cerrado:

$$-0.9778 ;$$

$$-0.5837 ;$$

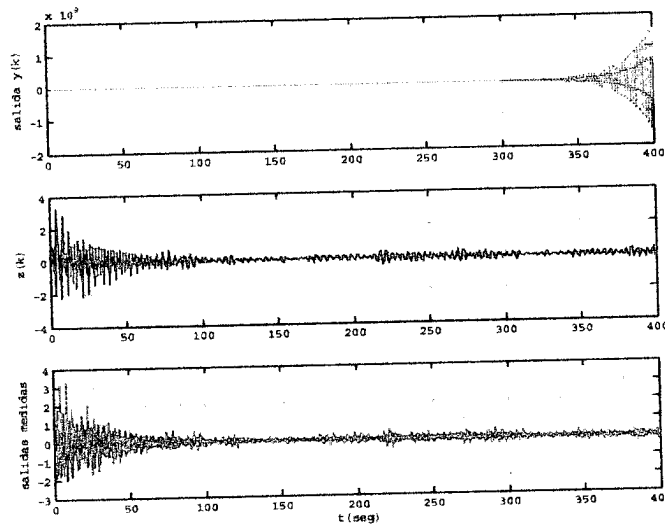


Figura 1.8: Salidas del Control en tiempo discreto mediante LMI en \mathcal{H}_2

$$-0.1401 + 0.9261i ;$$

$$-0.1401 - 0.9261i ;$$

$$0.2190 + 0.9478i ;$$

$$0.2190 - 0.9478i ;$$

$$0.7019 + 0.0740i ;$$

$$0.7019 - 0.0740i ;$$

1.4. Aplicaciones de Diseño de Controladores

Se han presentado las técnicas para diseño de Controladores por realimentación del vector de Estados y por realimentación dinámica de la salida mediante normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ . A continuación se muestra una aplicación apoyada, en lo hasta ahora planteado, y, que tiene como base, la formulación general de la síntesis de un controlador antirebote multivariable.

1.4.1. Controladores con Anti-Rebote Robusto en \mathcal{H}_∞

Los procesos industriales controlados, en general, presentan problemas de saturación en el actuador. En la teoría de control, esta restricción se denomina, *el límite de problema*

de control, lo cual conduce a considerar técnicas y métodos que admiten la instalación práctica de los sistemas de control. Estos sistemas pueden operar en diversos ambientes, desarrollando múltiples objetivos. Donde cada situación específica define el modo de acción, lo que puede requerir un cambio en el control. Estas formas de cambio se reflejan en las entradas de la planta, considerando que las salidas del control pueden variar.

Como resultado de sustituciones y limitaciones, las entradas de la planta serán diferentes a la salida del control. Cuando esto sucede, las salidas del control no conducen apropiadamente la planta y los estados del mismo se actualizan fuertemente, [18, 21]. Este efecto se denomina rebote. En términos generales, el rebote es inconsistente entre la entrada del control tomada del proceso y los estados internos de la planta. Las causas adversas del rebote causan un deterioro importante en el desempeño del sistema, sobrepasando los límites y generando inestabilidad, [21, 5].

El problema de rebote puede ser manejado mediante la compensación, donde, un primer estado, es designado por el sistema de control sin tomar en cuenta las restricciones, y un segundo estado, donde se encuentra algún esquema de compensación, cuya propuesta es disminuir las restricciones y los efectos de cambio. El último diseño ha sido denominado *Problema de transferencia antirebote sin salto (AWBT)*, [18],[36, 37].

En [18] se presenta una estructura general del problema AWBT. El desarrollo está basado sobre el modelo del diseño de un control lineal, el cual ignora las entradas no lineales e incorpora el método de un compensador AWBT para minimizar estos efectos adversos, convenientes a algunas entradas no lineales en el control. El principal avance de esta metodología es que no restringe el diseño del control lineal original.

En todos los casos el problema AWBT por compensación, la solución requiere de una señal residual que se obtiene entre la salida del control y la salida del actuador no lineal, [1, 5, 14, 18, 21, 49]. Esto puede ser una limitación para su implantación. En estos términos, se han realizado algunos planteamientos con el fin de implementar el compensador AWBT en procesos industriales, [34, 39].

Para el diseño de un compensador AWBT robusto, [23] presenta una formulación general de la síntesis de un controlador antirebote multivariable. El método resultante demuestra

elegancia en el desempeño, siempre y cuando las entradas no lineales son activadas por medio de la minimización del peso de la ganancia L_2 . El control AWBT, utiliza compensación estática, lo cual es calculado por optimización convexa, mediante desigualdades matriciales lineales. [45] Presenta un método basado en el desempeño de L_2 . Se encuentra un compensador anti-rebote y tanto el efecto nominal como el robusto pueden reducirse a un problema general de autovalores. [13] Estudia el aumento del anti-rebote lineal para sistemas de control con saturación en plantas lineales, en el caso especial, cuando el compensador puede solo modificar la entrada y la salida del controlador lineal, la acción antirebote a entradas exógenas es medida en términos de la ganancia L_2 , al seleccionar la acción de las salidas. [38] Muestra una propuesta para el diseño de un compensador AWBT por controladores PID basados sobre las características de la norma \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ con desigualdades matriciales lineales. Se considera la robustez para asegurar el desempeño en lazo cerrado, a pesar de los cambios desconocidos sobre los límites de saturación del actuador.

Se presenta el diseño de un controlador que se aplica a un sistema, el cual presenta saturación, que en la realidad puede reflejarse en los distintos equipos de un proceso industrial(valores máximos y mínimos de apertura de válvulas, sensores, amplificadores, etc). Esto puede generar ciclos de inestabilidad debido a dicha saturación, lo que, en ocasiones, limita la velocidad del control, sin obviar la presencia de perturbaciones y señales de ruido que acompañan a dicho sistema. Se propone un método para el problema de diseño del compensador con anti-rebote robusto; se considera el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2\sigma u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t), \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t), \end{aligned} \tag{1.53}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $\omega \in \mathbb{R}^r$ son las perturbaciones, $u \in \mathbb{R}^p$ son los controles, $z \in \mathbb{R}^m$ son las salidas controladas, $y \in \mathbb{R}^q$ son las salidas medidas. $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{21}$ son matrices conocidas, las cuales son de dimensión apropiada.

La función no lineal $\sigma(o)$ denota la saturación del actuador, la cual está definida por

$$\sigma(u_i) = \begin{cases} u_{i_{min}} & \text{si } u(t) < u_{i_{min}} \\ u(t) & \text{si } u_{i_{min}} \leq u(t) \leq u_{i_{max}} \\ u_{i_{max}} & \text{si } u(t) > u_{i_{max}}, i = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (1.54)$$

El problema del compensador ABWT es formulado por Figura (1.9), donde, es conveniente las limitaciones y/o substitutiones, y la presencia de las no linealidades entre las salidas del control y las entradas efectivas al proceso.

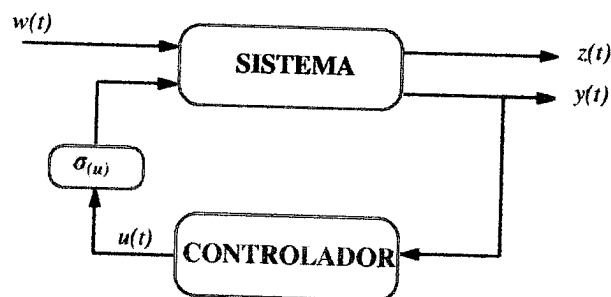


Figura 1.9: Sistema de Control con Saturación de Actuadores.

La entrada efectiva al control $\sigma(u)$ es una función no lineal $u(t)$ de la salida del controlador.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= A_c \zeta(t) + B_c y(t) + E_c [\sigma(u) - u] \\ u(t) &= C_c \zeta(t) + D_c \zeta(t) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Para satisfacer una serie requerimientos del control, se considera una dinámica del control por compensación dada por (1.55), donde A_c, B_c, C_c, D_c corresponden a las matrices dinámicas del controlador, las cuales son parámetros de diseño. E_c representa la ganancia del compensador, la cual también es un parámetro de diseño.

Cuando el sistema controlado está en saturación, la señal, $\vartheta = \sigma(u) - u$ es no nulo, y representa el deterioro, más allá de la inestabilidad presentada. Las matrices que describen la dinámica del controlador por compensación, son diseñadas sin considerar la saturación del actuador, mientras que el efecto de la misma en lazo cerrado es minimizado por

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

medio de la selección de la ganancia \mathbf{E}_c . La compensación tiene efecto cuando la señal $\vartheta = \sigma(u) - u$ es no nula, y adicional a la realimentación, ver Figura (1.10); la cual se incorpora para hacer que la señal sea nula, y es a través de la ampliación de la señal del control u , que ésta se presenta nuevamente en los límites de saturación del actuador.

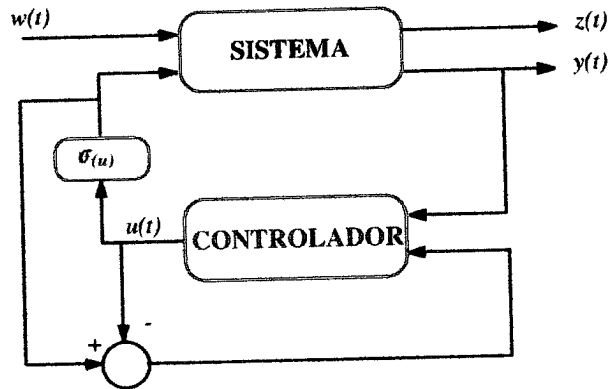


Figura 1.10: Sistema de Control con Saturación en el Actuador.

Así, el sistema en lazo cerrado está por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + B_1\omega + B_2u + B_2\vartheta \\
 \dot{\zeta} &= B_c C_2 x + A_c \zeta + E_c \vartheta \\
 z &= C_1 x + D_{11} \omega \\
 u &= D_c C_2 x + C_c \zeta(t) + D_c D_{21} \omega
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= (A + B_2 D_c C_2) x + B_2 C_c \zeta + \\
 &\quad (B_1 + B_2 D_c D_2) \omega + B_2 \vartheta \\
 \dot{\zeta} &= B_c C_2 x + A_c \zeta + B_c D_{21} \omega + E_c \vartheta \\
 z &= C_1 x + D_{11} \omega \\
 u &= D_c C_2 x + C_c \zeta(t) + D_c D_{21} \omega
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

La representación del sistema en lazo cerrado sin saturación, es estudiado para la función de transferencia de la perturbación ω con respecto a la salida del control z . En este caso, sea T_{zw} la función de transferencia tal que:

$$T_{zw}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{B}_1 \\ \hline \mathbb{C}_1 & \mathbb{D}_1 \end{array} \right) = \mathbb{C}_1(s\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{B}_1 + \mathbb{D}_1 \quad (1.58)$$

donde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A + B_2\mathbf{D}_c C_2 & B_2 C_c \\ \mathbf{B}_c C_2 & A_c \end{pmatrix}; \quad \mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} B_1 + B_2\mathbf{D}_c D_2 \\ \mathbf{B}_c D_{21} \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{C}_1 = (C_1 \quad 0); \quad \mathbb{D}_1 = D_{11}.$$

Para \mathcal{H}_∞ , sin saturación, es necesario diseñar una dinámica del control (1.55) tal que

1) El sistema en lazo cerrado (1.57) sea asintóticamente estable.

2) $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma, \gamma > 0$

Se conoce literatura sobre algunos planteamientos de control robusto, [4, 50, 10]. Es necesario conservar las propiedades de estabilidad cuando se presenta la saturación. Por medio de la estabilidad global se garantiza las entradas acotadas del sistema, a través del diseño de la ganancia del compensador, además de las condiciones de estabilidad robusta sobre las perturbaciones. La estabilidad en lazo cerrado se satisface, en primer lugar, por la selección apropiada de las matrices dinámicas del controlador. En segundo lugar, por no hacer mención sobre la estabilidad de las entradas acotadas del sistema, lo cual fortalece la estabilidad global del compensador. Algunos resultados pueden encontrarse en la literatura, [18, 19, 23].

Otro aspecto a considerar es la relación de la robustez con la operación de los actuadores. En este sentido, se diseña la ganancia del compensador de manera de garantizar la estabilidad en lazo cerrado y minimizar los efectos de la señal de perturbación ϑ sobre la señal del control u . Por consiguiente, tenemos dos señales de perturbación sobre el control, ω y

ϑ . El problema es diseñar un control con compensador tal que los efectos de las señales de perturbación sean mínimas. El problema puede focalizarse realizando un cambio en la norma \mathcal{H}_∞ .

Considerese la señal de perturbación dada por $\hat{\omega} = (\omega \ \vartheta)^T$, y la salida del controlador por $\hat{z} = (z \ u)^T$. Entonces, la función de transferencia en lazo cerrado $T_{\hat{z}\hat{\omega}}$ está dada por

$$T_{\hat{z}\hat{\omega}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.59)$$

donde

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 + B_2\mathbf{D}_c D_{21} & B_2 \\ \mathbf{B}_c D_{21} & \mathbf{E}_c \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ \mathbf{D}_c C_2 & C_c \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ \mathbf{D}_c D_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 14 *Sea la dinámica del sistema (1.53), se desea diseñar un controlador por compensación (1.55) tal que:*

- 1) *El sistema en lazo cerrado (1.57) sea asintóticamente estable.*
- 2) $\|T_{\hat{z}\hat{\omega}}\|_\infty < \gamma$.

Bajo esta formulación, se pueden obtener los índices de desempeño robusto con respecto a los cambios en los límites de saturación, lo cual es una típica demanda en los ambientes de control de los procesos industriales donde, los elementos del actuador: válvulas de control, actuadores hidráulicos, etc., pueden deteriorarse por el uso intensivo, partes obsoletas, degradación de los materiales de construcción, entre otros aspectos. Por lo tanto, es necesario diseñar mecanismos de compensación, y así garantizar algunas características de robustez, cuyos cambios son considerados en el manejo del desempeño del actuador, [39, 45].

En resumen, ha sido formulado el problema de síntesis de compensación de control robusto. Este puede ser resuelto mediante la estructura de \mathcal{H}_∞ empleando el método LMI, [42]. En este contexto, es posible desarrollar una técnica sistemática de diseño que combina

importantes aspectos de la síntesis de control por realimentación con el diseño de un compensador anti-rebote tomando la formulación de la técnica LMI.

1.4.1.1. Síntesis Control-Compensación

En este punto, nos proponemos satisfacer las restricciones que implica el diseño del compensador anti-rebote, de la forma como se formula en el problema de compensación-control. Así, queremos diseñar el controlador con compensación (1.55) tal que el sistema en lazo cerrado (1.57) sea asintóticamente estable y $\|T_{z\hat{w}}\|_{\infty} < \gamma$.

1.4.1.1.1. Formulación en \mathcal{H}_{∞}

Es bien conocido que la norma \mathcal{H}_{∞} tiene una caracterización de restricción LMI de acuerdo al Lema Real Acotado [4, 42].

Lema 15 *La desigualdad $\|T_{z\hat{w}}\|_{\infty} < \gamma$. se tiene si, y solo si, existe una matriz simétrica X , tal que se cumple (1.6). Se satisface la LMI :*

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2L + L^TB_2^T & A + B_2RC_2 + Q^T \\ (o)^T & YA + A^TY + FC_2 + C_2^TF^T \\ (o)^T & (o)^T \\ (o)^T & (o)^T \\ (o)^T & (o)^T \\ (o)^T & (o)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 + B_2RD_{21} & B_2 & XC_1^T & L^T \\ YB_1 + FD_{21} & YB_2 + M & C_1^T & C_2^TR^T \\ -\mu I & 0 & D_{11} & D_{21}R^T \\ (o)^T & -\mu I & 0 & 0 \\ (o)^T & (o)^T & -\mu I & 0 \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.60)$$

La matriz de ganancia de compensación E_c está dada por

$$E_c = V^{-1}M; \quad (1.61)$$

donde V y U son matrices no singulares que satisfacen $YX + VU = I$

El controlador se obtiene de (1.32).

$$A_c = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{C}_2\mathbf{X}\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{B}_2\mathbf{L}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{B}_2\mathbf{R}\mathbf{C}_2\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1}$$

$$B_c = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{B}_2\mathbf{R}$$

$$C_c = \mathbf{L}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{R}\mathbf{C}_2\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1}$$

$$D_c = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{M} = D_c C_c X + C_c U$$

Prueba

La prueba se basa sobre el procedimiento de linealización típica de desigualdades matriciales lineales a través de transformación congruente y cambios de variable para obtener los LMI's.

El índice de desempeño basado en la norma \mathcal{H}_∞ corresponde a la ganancia de las señales del controlador L_2 , con respecto a las señales de perturbación. Esta formulación garantiza la estabilidad en el caso de la saturación, con un mínimo efecto sobre la señal de salida del controlador. Esto también se acerca a los avances que toman en cuenta los efectos de las salidas medidas en la señal de saturación, lo cual pasa por alto en [6].

1.4.2. Ejemplos

Ejemplo Numérico

Sea el sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 & -1 \\ 18 & -11 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1.2 & -5 \\ 8 & -2 & 3 & -6 \end{pmatrix} x +$$

(1.62)

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sigma(u) \\
 z &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \\
 y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

Resultados obtenidos mediante el Toolbox LMI de Matlab ©

Intervalo de saturación [-25,25]

$$\gamma = 0,3676$$

$$A_c = 1.0e + 004 * \begin{pmatrix} -0.0006 & -0.0006 & -0.0000 & -0.0001 \\ 2.6429 & -3.4951 & -0.1996 & 0.0312 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0003 & -0.0003 \\ 0.0996 & 0.0304 & 2.7118 & -3.6164 \end{pmatrix}$$

$$B_c = 1.0e + 004 * \begin{pmatrix} 0.0005 & -0.0006 & 0.0000 & -0.0001 \\ -2.6410 & 3.4939 & 0.1996 & -0.0314 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0002 \\ -0.0988 & -0.0306 & -2.7116 & 3.6157 \end{pmatrix}$$

$$C_c = \begin{pmatrix} -0.3655 & 0.1541 & 0.0219 & -0.1497 \\ 0.1348 & -0.3841 & 0.0762 & 0.2617 \end{pmatrix}$$

$$D_c = \begin{pmatrix} -0.0166 & -0.0134 & 0.0216 & 0.0061 \\ 0.0059 & 0.0049 & -0.0079 & -0.0023 \end{pmatrix}$$

Ganancia de Compensación

$$E_c = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 \\ -0.1009 & 1.0454 \\ 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0946 & -0.0120 \end{pmatrix}$$

La Figura (1.11) presenta resultados de las simulaciones de las salidas del actuador con saturación, con compensación y sin compensación, así como también de las señales controladas con saturación, con y sin compensación. Apreciamos que en presencia de saturación, el sistema logra funcionar con compensación y sin compensación, pero el compensador logra un mejor comportamiento de la señal, la cual se refleja en el tiempo que tarda la señal en alcanzar la estabilidad.

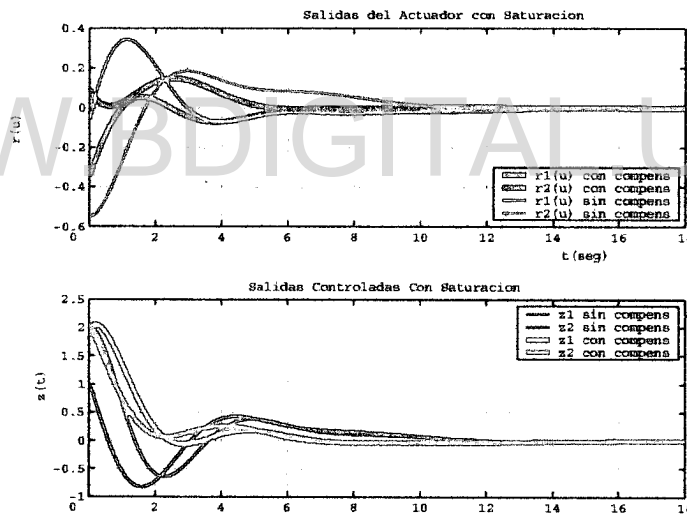


Figura 1.11: Salidas del Control con Saturación. Salidas Controladas con Saturación.

La Figura (1.12) refleja las salidas del actuador y las salidas controladas sin saturación y sin compensación, las cuales son muy similares a las salidas del actuador y las salidas controladas con saturación y compensación, lo que demuestra que el compensador cumple el objetivo planteado.

Se ha realizado una propuesta para el diseño de un control con antirebote robusto mediante

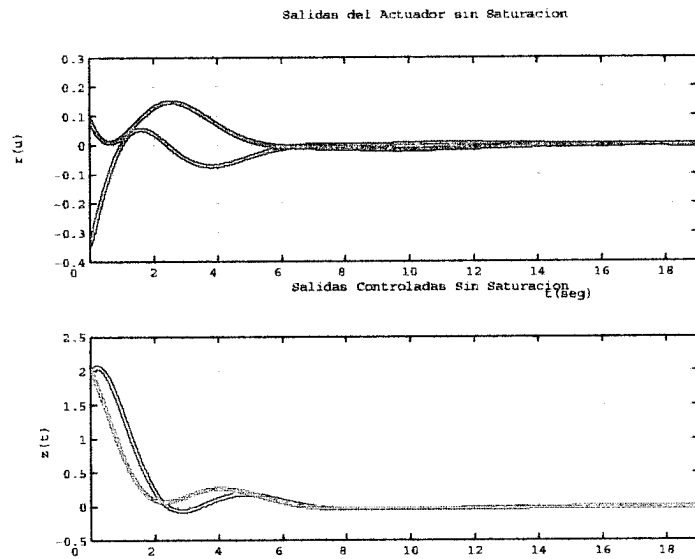


Figura 1.12: Salidas del Control sin Saturación. Salidas Controladas sin Saturación

controladores PID. La técnica se basa en normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ mediante Desigualdades Matriciales Lineales (LMI). Se considera el análisis de la robustez en lazo cerrado, de la salida del control con respecto a la diferencia entre la salida del actuador y la salida del control. Se garantiza el desempeño del actuador, a pesar, de los cambios desconocidos en los límites de saturación. El diseño de la ganancia de compensación robusta se obtiene mediante parámetros dependientes de la función de Lyapunov (menos conservativa), que describe un problema de optimización convexa. Este se presenta para LMIs, y puede ser resuelto por algoritmos especializados en tiempo polinomial.

1.5. Región de Estabilidad

La región de estabilidad es útil para la ubicación de polos. Bajo condiciones de LMI, estas regiones son subconjuntos convexos de la region donde el control se desempeña, incluyen regiones pertinentes como los discos, cónicas, etc, así como intersecciones de cualquiera de las anteriores, disponiendo del teorema de Lyapunov. Para el problema de control es posible obtener condiciones que permiten modificar el comportamiento temporal de

las respuestas de los sistemas, garantizando la ubicación de los polos a lazo cerrado en regiones del plano.

Definición 11 Una región LMI es cualquier región convexa \mathbf{R} que pueda describirse de la forma:

$$\mathbf{R} = \{z \in \mathbb{C} : L + zM + \bar{z}M^T\} < 0$$

donde:

$$L = L^T = [\lambda_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$M = [\mu_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m} \text{ con: } \alpha > 0 ; z = \alpha + j\beta ; z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\{z\} < \alpha$$

Algunas regiones LMI:

1. Semiplano a la izquierda de α .Figura (1.13)

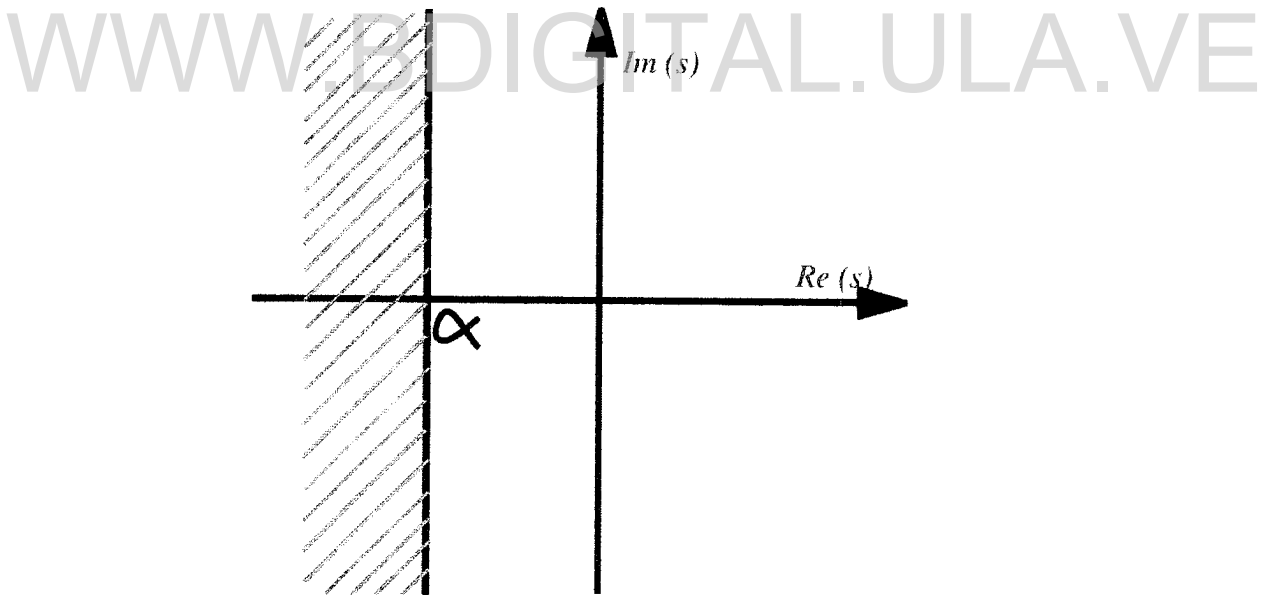


Figura 1.13: Semiplano a la izquierda.

$$\mathbf{R} = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} + 2\alpha\} < 0$$

Cuando $\alpha = 0$ da el semiplano izquierdo abierto.

2. Semiplano a la derecha de α . Figura (1.14)

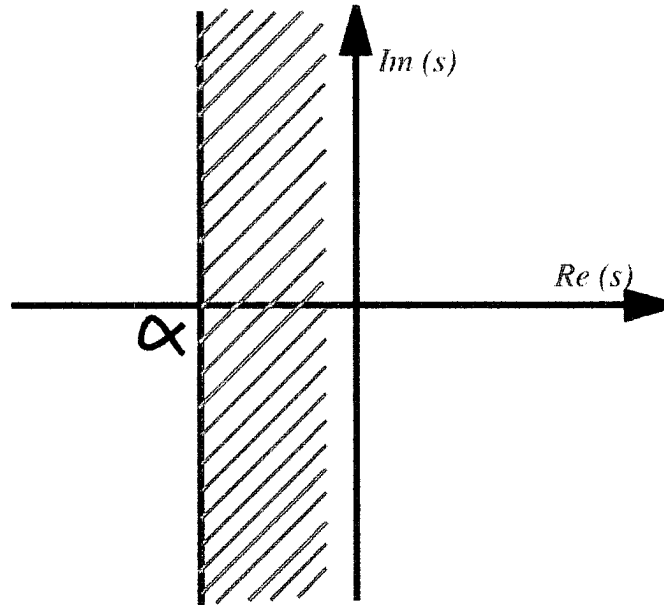


Figura 1.14: Semiplano a la derecha.

$$\mathbf{R} = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} + 2\alpha\} > 0$$

3. Cono con vértice en 0. Figura (1.15)

$$\mathbf{R} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{pmatrix} \sin\theta(z + \bar{z}) & \cos\theta(z - \bar{z}) \\ \cos\theta(z - \bar{z}) & \sin\theta(z + \bar{z}) \end{pmatrix} < 0 \right\}$$

4. Región circular centrada en $-\alpha$ y de radio r . Figura (1.16)

$$\mathbf{R} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{pmatrix} -r & \bar{z} + \alpha \\ z + \alpha & -r \end{pmatrix} < 0 \right\}$$

En tiempo Discreto. Para que el sistema sea estable, los polos en lazo cerrado deben estar en el plano z dentro del círculo unitario. Las regiones de estabilidad en tiempo

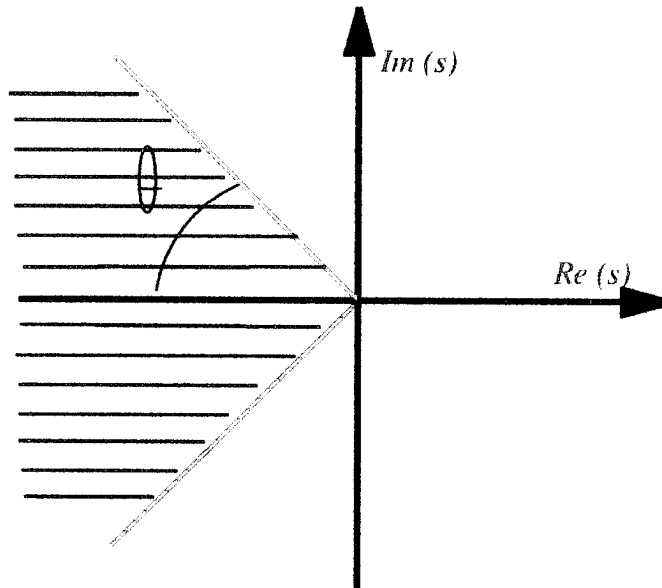


Figura 1.15: Cono centrado en cero.

discreto, son de la misma manera que en tiempo continuo, pero representadas dentro del círculo unitario.

Definición 12 Una región LMI es cualquier región convexa \mathbf{R} que pueda describirse de la forma:

$$\mathbf{R} = \{z \in \mathbf{C} : L + zM + \bar{z}M^T < 0\}$$

donde:

$$L = L^T = [\lambda_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$M = [\mu_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m} \text{ con: } \alpha > 0 ; z = \alpha + j\beta ; z \in \mathbf{C}; \text{Re}\langle z \rangle < \alpha$$

Región circular centrada en 0 y de radio 1. Fig (1.17)

* Para efectos de este trabajo, se establece la siguiente región de estabilidad en tiempo continuo:

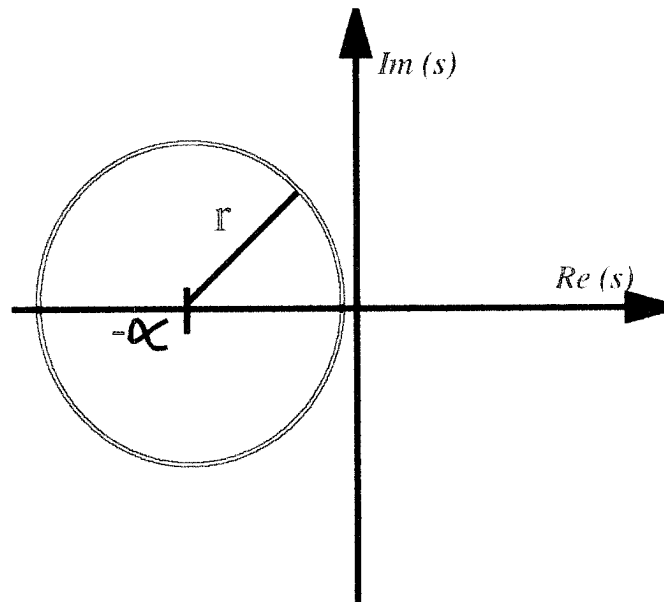


Figura 1.16: Circunferencia.

Lema 16 Sea una región definida por

$$[\lambda_{ij}P + \mu_{ij}AP + \nu_{ij}PA^T]_{1 \leq i, j \leq m} < 0 \quad \text{con} \quad P > 0$$

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} 2\alpha - (z - \hat{z}) & 0 \\ 0 & z + \hat{z} \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

Prueba : Sea

$$L = \begin{bmatrix} 2h_1 & 0 \\ 0 & -2h_2 \end{bmatrix} ; M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = M^T$$

Sea: $L + M_z + M_z^T < 0$ se dice:

$$\begin{bmatrix} 2h_1 & 0 \\ 0 & -2h_2 \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} AP + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} PA^T =$$

$$\begin{bmatrix} 2h_1P & 0 \\ 0 & -2h_2P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -AP & 0 \\ 0 & AP \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -PA^T & 0 \\ 0 & PA^T \end{bmatrix} =$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

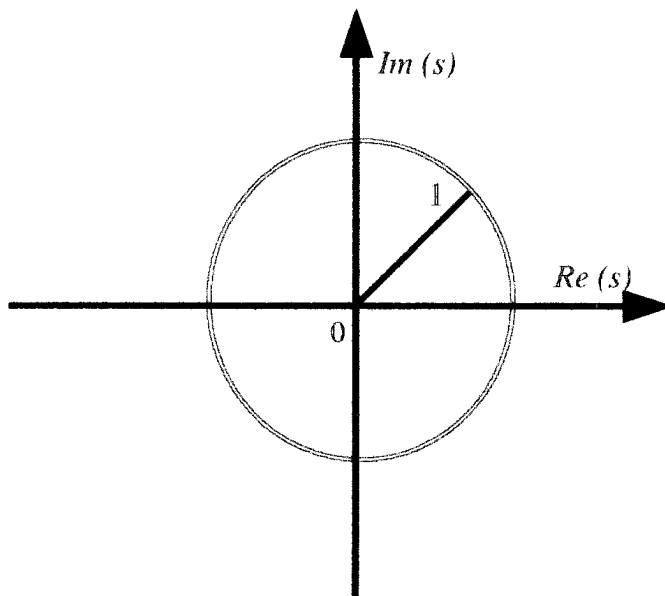


Figura 1.17: Círculo Unitario .

$$\begin{bmatrix} 2h_1P - (AP + PA^T) & 0 \\ 0 & -2h_2P + AP + PA^T \end{bmatrix} < 0 \quad (1.65)$$

De (1.65) se tiene:

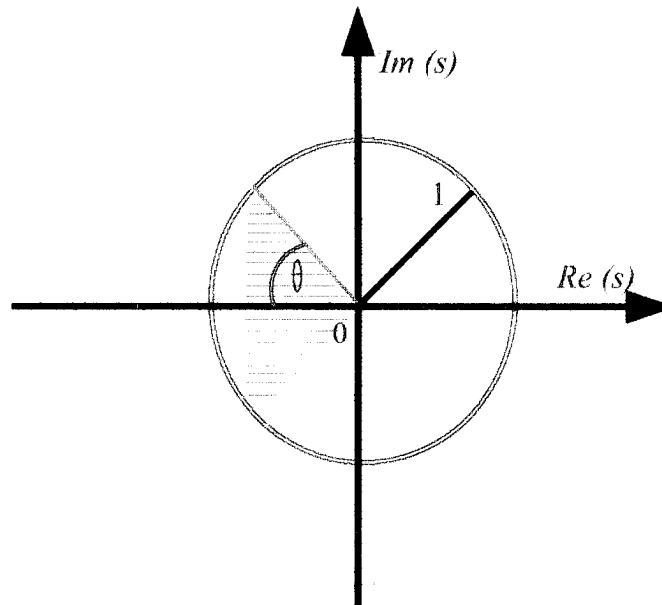
$$2h_1P - (AP + PA^T) < 0 \quad (1.66)$$

$$-2h_2P + AP + PA^T < 0 \quad (1.67)$$

Hacemos $P = X$ y $A = \mathbb{A}$ y sustituimos en (1.65). Multiplicamos a (1.65) por la derecha por $T := \text{diag}[I, I]$ y por la izquierda por T^T :

$$\begin{bmatrix} 2h_1T^T X T - T^T \mathbb{A} X T - T^T X \mathbb{A}^T T & 0 \\ 0 & -2h_2 X + \mathbb{A} X + X \mathbb{A}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (1.68)$$

las expresiones en (1.69) y (1.70) se obtienen mediante transformaciones matriciales lineales, realizando los cambios de variables correspondientes especificados cuando se consigue el control por realimentación de la salida. De donde obtenemos:



$$\begin{bmatrix} 2h_1X - (AX + XA^T + L + L^T) & 2h_1 - (A + Q^T + NC_2) \\ 2h_1 - (A^T + N^T C_2^T + Q) & 2h_1Y - (YA + A^T Y + FC_2 + C_2^T F^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.69)$$

$$\begin{bmatrix} -2h_2X - (AX + XA^T + L + L^T) & 2h_2Y + Q \\ 2h_2Y + Q^T & -2h_2Y + F + F^T \end{bmatrix} < 0 \quad (1.70)$$

1.5.1. Ejemplos

Ejemplo Numérico (Tiempo Continuo)

Sea el sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

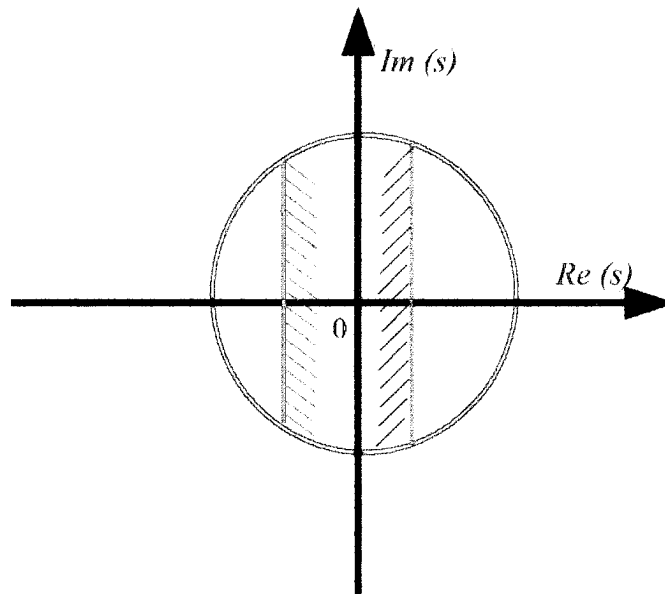


Figura 1.18: Algunas Regiones de Estabilidad para Sistemas en tiempo Discreto .

Resultados obtenidos mediante el Toolbox LMI de Matlab©

En \mathcal{H}_2 :

$$\mu = 0,2929 ;$$

Matrices del Control Dinámico:

$$\mathbf{A}_c = 1.0e + 005 * \begin{pmatrix} -0.6769 & -0.6450 & 0.0004 & -1.3216 \\ -0.5973 & -0.6843 & -0.0004 & -1.2813 \\ -0.5753 & -0.6309 & -0.0004 & -0.2059 \\ 0.3106 & 0.3467 & -0.0002 & 0.6577 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} -2.7884 & 3.7608 & -0.6541 & -1.3715 \\ 3.6508 & -4.5191 & 0.1318 & 6.8482 \\ -1.8305 & 0.4877 & 2.9526 & -1.5566 \\ 17.1931 & 46.2656 & 58.6645 & -41.7501 \end{pmatrix}$$

$$C_c = 1.0e + 005 * \begin{pmatrix} -0.6769 & -0.6450 & 0.0004 & -1.3216 \\ -0.5973 & -0.6843 & 0.0004 & -1.2814 \\ -0.5753 & -0.6309 & 0.0004 & -1.2059 \\ 0.3111 & 0.3478 & -0.0002 & 0.6590 \end{pmatrix}$$

$$D_c = \begin{pmatrix} 0.8161 & 2.3678 & -0.6862 & -2.0642 \\ 2.3678 & -2.5964 & -0.3780 & 5.8215 \\ -0.6862 & -0.3780 & 0.0000 & -3.6477 \\ -2.0642 & 5.8215 & -3.6477 & -2.8670 \end{pmatrix}$$

El ejemplo ilustra la aplicación de LMIs en la determinación de la región de estabilidad. En las graficas se observa como el control logra alcanzar la estabilidad, y se desempeña de manera satisfactoria.

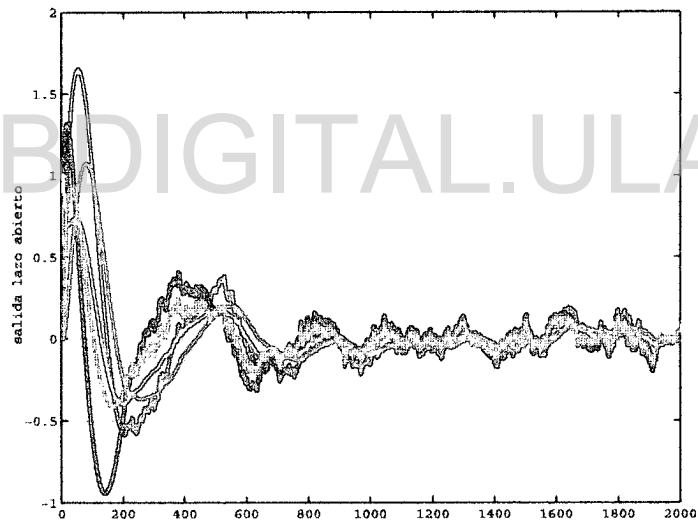


Figura 1.19: Sistema en lazo abierto.

Autovalores en lazo cerrado:

-6.4376 ;

-0.5920 ;

-0.0026 ;

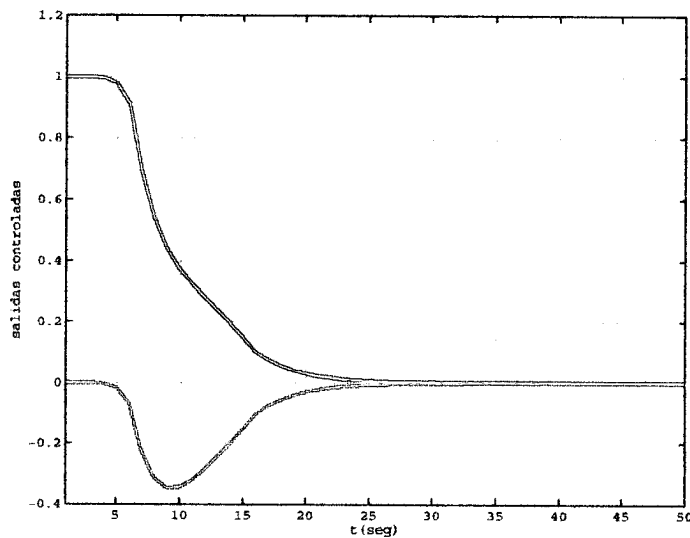


Figura 1.20: Salidas Controladas.

-0.0010 ;

-0.0003 ;

-0.0001 + 0.0000i ;

-0.4693 - 0.0000i ;

-0.0001 ;

Se establece una región de estabilidad para $h1 = -0,8$ y $h2 = -14$

Autovalores en lazo cerrado:

-12.2941 ;

-9.5177 ;

-5.2390 + 0.8427i ;

-5.2390 - 0.8427i ;

-3.3919 + 1.5615i ;

-3.3919 - 1.5615i ;

-1.0870 ;

-0.9626 ;

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Capítulo 2

Filtros de DDF en Sistemas Dinámicos

2.1. Introducción

Los sistemas de monitoreo, detección y diagnóstico, MDD, se fundamentan en su capacidad para responder ante situaciones inesperadas del comportamiento del proceso, su principal tarea es el Diagnóstico y Detección de Fallas (DDF). Los sistemas de detección de fallas son parte indispensable de una gran mayoría de los lazos de control actuales. De esto se puede tener constancia en la industria de la aviación, la industria automotriz, la industria de la energía eléctrica, en general.

El elemento fundamental en un sistema de supervisión, monitoreo y diagnóstico de fallas es el Filtro de Detección y Diagnóstico de Fallas, filtro FDI, el cual debe ser diseñado para operar en condiciones adversas debido a la presencia de señales externas desconocidas, de las incertidumbres y a los distintos regímenes de operación de los procesos.

El concepto de diagnóstico de falla se refiere tanto a la detección como a la localización de una falla, es decir, además de poder determinar si una falla está presente, se requiere saber que componente es el que la está ocasionando. Esto último es indispensable en la mayor parte de los casos para poder determinar una acción correctiva. La tarea de diagnóstico, detección y localización, puede realizarse en dos pasos principales:

- * Generación de residuos: Consiste en la obtención de señales que contienen información sobre las fallas y señales de perturbación. Estas señales son llamadas residuos.

En el caso ideal los residuos son cero cuando no hay fallas y difieren de cero en la presencia de una falla. Esa generación de residuales pasa por la construcción de un sistema dinámico (filtro), el cual debe generar dichos residuos, a través de las señales medidas y estimadas y bajo la presencia de incertidumbres en el modelo y de señales de perturbación:[8], [29], [33].

- * Evaluación de residuos: Extrae la información contenida en los residuos. Esta evaluación proporciona información sobre el tiempo en el que una falla ocurrió y sobre el elemento en el cual esta falla está actuando.

La presencia de incertidumbres y de perturbaciones producen serias dificultades para el diseño de filtros FDI, ya que no se cuenta, como lo impone la práctica, de una sensibilidad ilimitada para la detección de anomalías funcionales. Significa que, como consecuencia de las incertidumbres y perturbaciones, los valores estimados a través de modelo, no se corresponden exactamente con los valores medidos del proceso, y por lo tanto los residuos serán distintos de cero aún en ausencia de fallas. La producción de residuos parásitos, se pueden manifestar en generación de falsas alarmas durante la supervisión y monitoreo del proceso. Por el impacto que pudiese tener en la productividad, se debe evitar la generación de falsas alarmas mediante mecanismos de robustez aplicados en el diseño e implementación de los filtros FDI.

Varias técnicas de detección robusta han sido desarrolladas, dependiendo del tipo de incertidumbre. Por ejemplo, el filtro de detección clásico, [2, 15] es robusto a incertidumbres en el modo de falla pero requiere de un perfecto conocimiento de la dinámica de la planta y de las características del ruido. Mientras que la técnica de relación de verosimilitud máxima,[47], demanda un conocimiento preciso del modo de falla, las estadísticas del ruido y la dinámica de la planta. En cuanto a robustez ante incertidumbres del modelo, en [44] se estima una cota con respecto al efecto de las incertidumbres en los residuos, dicha cota utiliza para seleccionar un nivel de umbral adecuado. En [7, 29, 30] se utiliza un observador de entradas desconocidas en un intento por ocultar el ruido de ciertos canales de entradas y las incertidumbres del modelo en los residuos de salida. Dentro de ese mismo concepto, en [28] se emplea la técnica de asignación de la estructura propia, para el diseño

del observador, de modo que la señal residual esté desacoplada de las incertidumbres y perturbaciones, las cuales se asumen como entradas desconocidas. En ese método se utiliza la asignación de los autovectores por la derecha del filtro para lograr mayor libertad en el desacoplamiento. En caso de diseño de filtros robustos para sistemas a tiempo discreto, [41] considera el rechazo a perturbaciones mediante un observador generalizado.

Desde el punto de vista de generación de residuos, las fallas son detectables si sus características especiales son distinguibles de las correspondientes incertidumbres. Las fallas que tiene características frecuenciales o pertenecen al mismo subespacio del espacio de estado en relación a las incertidumbres, no pueden ser detectables siempre.

2.2. Sistemas Lineales

Para el diseño de Filtros de Diagnóstico y Detección de Fallas, se considera un modelo matemático (1.4), cuya dinámica es la de un sistema lineal, continuo e invariante en el tiempo, donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados, los controles $u \in \mathbb{U}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, las señales de salidas medidas; y las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ tienen dimensiones adecuadas; (A, C) es observable. En (1.4) se distinguen tres subsistemas:

- * Estructura principal representada por A .
- * Actuadores que se describen por B .
- * Sensores representados por C .

Cada uno de estos subsistemas pueden presentar situaciones anormales que no están contempladas dentro del modelo establecido, por lo que se hace necesario el diseño de esquemas de monitoreo para obtener señales que contengan información sobre fallas y señales de perturbación. Una situación de anomalía se determina por un valor que indica que el punto de operación está fuera de la vecindad de la referencia predefinida.

Definición 13 *Un proceso (1.4), se dice que está en un estado de operación normal si, sus variables de estados medidas (observadas) están en la vecindad de una referencia definida a priori.*

Definición 14 Las fallas son funcionamientos anómalos que perturban la operación normal de sistema, causando una declinación inaceptable del desempeño integral de dicho sistema.

Las fallas se pueden escribir en relación al modelo, así las fallas en los actuadores se pueden modelar como entradas aditivas en la dinámica del proceso, Figura (2.1)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_f f_a \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (2.1)$$

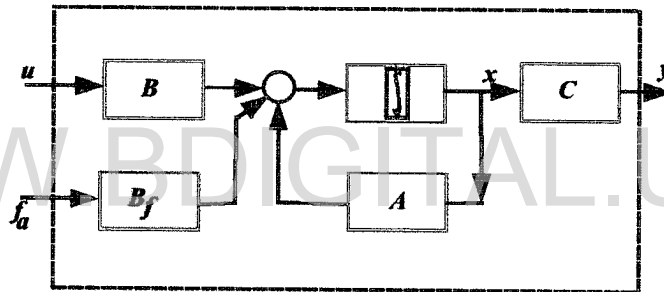


Figura 2.1: Fallas en Actuadores

Las fallas en los sensores se presentan como una función vectorial en el espacio de las salidas, Figura (2.2)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + C_f f_s\end{aligned}\quad (2.2)$$

Cuando las fallas se presentan en el proceso, los cambios se observan en la matriz que describe la dinámica del mismo, esto nos lleva a adoptar un modelo de fallas en el proceso

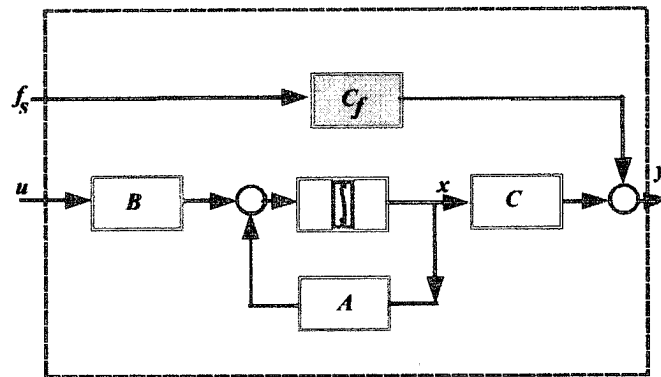


Figura 2.2: Fallas en Sensores

mediante la incorporación de una matriz dinámica adicional, donde f_a , f_s y f_p ; son funciones temporales vectoriales que se presentan en un determinado tiempo $t \geq t_o$, $t_o > 0$, con $f_p = x(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_f x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Es decir, f_a , f_s y $f_p = 0$; si $t < t_o$, y f_a , f_s y $f_p \neq 0$; si $t \geq t_o$. A_f , B_f , C_f ; son matrices de dimensiones apropiadas, indican las direcciones de fallas. Figura (2.3)

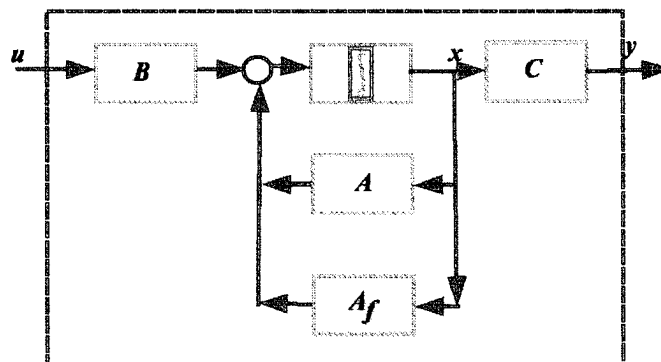


Figura 2.3: Fallas en el Proceso

El diseño de Filtros de Detección de Fallas se divide en dos etapas:

- * Generación de residuales, (problema de detección).
- * Evaluación de los residuales a objeto de determinar el origen de las fallas (problema de separación de las fallas).

Los residuos son señales escalares o vectoriales que contienen la información sobre el tiempo y localización de las fallas, deben ser iguales a cero en ausencia de fallas y distintos de cero, cuando alguna fallas hace su aparición. Los Observadores de estado se pueden emplear para la generación de los residuos, [2, 15, 20, 46]. Se desea construir un observador clásico de orden completo, a objeto de producir un vector de estados estimados. Los residuos se producen al comparar la salida estimada con la salida verdadera. La solución del observador de orden completo [26, 16] para la ecuación (1.10)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) + L(y(t) - C_2\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C_2\hat{x}(t)\end{aligned}\quad (2.4)$$

donde $\hat{x}(t)$ es el estimado del vector de estados $x(t)$, $\hat{y}(t)$ son las salidas estimadas y L la ganancia de realimentación del Observador que se debe seleccionar adecuadamente. Considerando que el proceso puede presentar fallas en cualquiera de los subsistemas,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_f f_p + Bu(t) + B_f f_a \quad , \\ \eta(t) &= Ce(t) + C_f f_s.\end{aligned}\quad (2.5)$$

se define el error entre los estados y sus estimados:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t).\quad (2.6)$$

definiendo la salida:

$$\eta(t) = y(t) - \hat{y}(t).\quad (2.7)$$

donde la dinámica del error está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - LC)e(t) + A_f f_p + B_f f_a - LC_f f_s, \\ \eta(t) &= Ce(t) + C_f f_s. \end{aligned} \quad (2.8)$$

L debe seleccionarse de tal forma que el sistema $(A - LC)$ sea estable.

Se muestran los esquemas de las dinámicas de los filtros ante la presencia de fallas en actuadores, sensores y proceso, respectivamente.

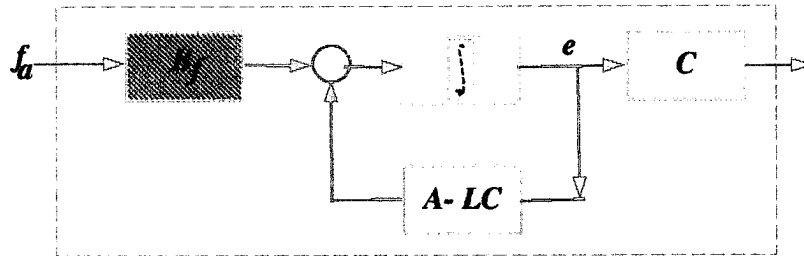


Figura 2.4: Filtro para la detección de Fallas en los actuadores

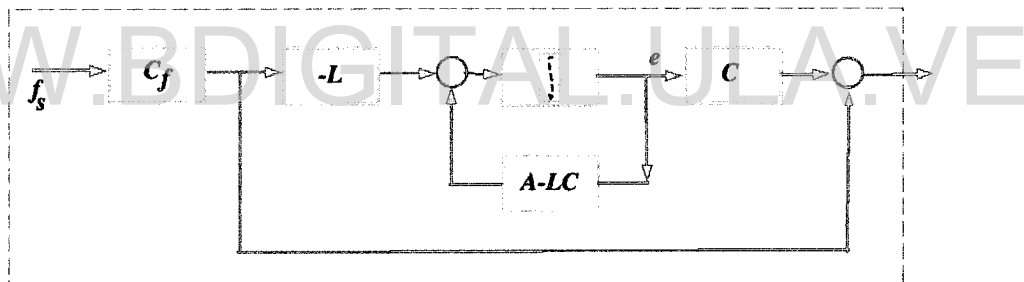


Figura 2.5: Filtro para la detección de Fallas en los sensores

En los esquemas anteriores apreciamos como las fallas se presentan de manera aditiva en la dinámica de el proceso, utilizando los resultados presentados en [27], donde las fallas en los sensores se pueden presentar como fallas en actuadores, se adopta el siguiente modelos para los sistemas que sean sometidos a fallas:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^k L_i v_i(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + \sum_{i=1}^k M_i v_i(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde:

- * $L_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, es la dirección de la falla. Se asume que estas direcciones son conocidas, linealmente independientes. Asimismo, $M_i \in \mathbb{R}^{q \times p}$ es la dirección de fallas en el subespacio de la salida
- * $v_i \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p$, es el modo de falla. Función independiente, arbitraria y desconocida, en el que $v_i(t) = 0$ si $t < t_1$; $v_i \neq 0$ para $t \in [t_1, t_1 + \tau]$ $\tau > 0$.
- * k_i , es el número de fallas.

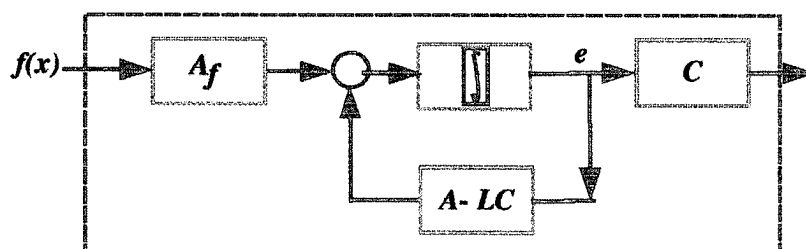


Figura 2.6: Filtro para la detección de Fallas en el proceso

En presencia de fallas múltiples, se generan distintas direcciones, por lo que se hace necesario elaborar un generador de residuos que permita visualizar cual de las fallas se manifiesta, ya que, es necesario separar dichas fallas.

Para ello se diseñan filtros basados en observadores, cuya ganancia debe ser tal, que el modo del vector de residuos tenga características en la dirección asociada con alguna dirección de falla conocida.

Bajo estas condiciones, considerando observador de estados (2.4) para el sistema (2.9), se plantea la dinámica del error de estimación,

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - LC)e(t) + \sum_{i=1}^k (L_i - LM_i)v_i(t) \quad , e(0) = x_o - \hat{x}_o \\ \eta(t) &= Ce(t) + \sum_{i=1}^k M_i v_i(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

L se selecciona de forma que $(A - LC)$ sea estable, si $v_i(t) \neq 0$, entonces $e(t) \neq 0$ y $\eta(t) \neq 0$, por lo que el efecto de falla en el proceso produce una innovación notoria de la salida del observador.

Comentario 2.1 *Para los sistemas en Tiempo Discreto, las fallas se presentan de forma similar que en los Sistemas en Tiempo Continuo.*

2.2.1. Condiciones para el diagnóstico de Fallas

El problema de separación de fallas es más complicado que el problema de detección tanto en sistemas continuos como en sistemas discretos. La separación de las fallas se obtiene al determinar a cual, de las direcciones de fallas, se aproxima el vector residual direccional. Entonces, se debe diseñar una matriz de ganancia del observador tal que la salida del error de estimación exhiba características unidireccionales asociadas con alguna de las direcciones de las fallas conocidas.

2.2.1.1. Subespacio de Accesibilidad

Se considera la dinámica del error en (2.10), suponiendo $M_i = 0, i = 1, \dots, k$; y que la i -ésima falla se ha activado, la cual se propagará en diferentes direcciones de espacio de estados (2.10), de acuerdo a su dirección L_i . Se define el sub-espacio de controlabilidad de Kalman del par $(A - LC)L_i$, [48, 16]. El sub-espacio de accesibilidad está determinado por el espacio de controlabilidad de Kalman de cada una de ellas. Esto es,

$$\mathcal{M}_i = \sum_{j=0}^{n-1} \text{Im}((A - LC)^j L_i), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.11)$$

El sub-espacio \mathcal{M}_i determina el espacio de propagación de la falla dentro del espacio de estado del sistema original. Este análisis de accesibilidad nos conduce a la selección de la matriz de ganancia L con el fin de que los efectos de los modos de las falla v_i sean asignados a sub-espacios independientes $\mathcal{M}_i \subseteq \mathbb{R}^n$.

También puede suceder, que la proyección sea sobre el sub-espacio inobservable del sistema, de modo que la fallas queda oculta y no se puede detectar. Es por esto, que se deben establecer condiciones para que esta situación no suceda.

Definición 15 *Para el Sistema dado en (2.10) el sub-espacio inobservable esta caracterizado por:*

$$\mathcal{U}_o = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(C(A - LC)^i)$$

Definición 16 Sea \mathcal{O}_o el sub-espacio complementario al sub-espacio inobservable \mathcal{U}_o , ($\mathbb{R}^n = \mathcal{O}_o \oplus \mathcal{U}_o$). Se define el sub-espacio de detección del observador, denotado por \mathcal{M}_o , como el sub-espacio del espacio de estado del error de estimación que es producido por todos los sub-espacios de accesibilidad de las fallas \mathcal{M}_i , $i = 1, \dots, k$, que pertenecen al sub-espacio \mathcal{O}_o ,

$$\mathcal{M}_o \triangleq \left[\bigcup_{i=1}^k \mathcal{M}_i \right] \cap \mathcal{O}_o$$

El sub-espacio de detección se define por los estados del sistema (2.10) que no están en el sub-espacio inobservable \mathcal{U}_o .

2.2.1.2. Condición de Detectabilidad

Por definición, cuando se presenta una falla, ésta no debe estar contenida en el sub-espacio inobservable, igualmente, debe estar en el sub-espacio de detección.

Sea $\mathcal{W}_{L_j} = \text{Im}(L_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$

Teorema 3 Sea el sistema representado por (2.9), con el par (C, A) detectable y $M_i = 0$, $i=1, \dots, k$. Entonces, la i -ésima falla, $i=1, \dots, k$ es detectable si

$$\mathcal{W}_{L_j} \cap \mathcal{U}_o = \{0\}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.12)$$

Definición 17 Una falla v_i , $i = 1, \dots, k$, para el sistema de diagnóstico (2.9) es detectable si existe un observador con ganancia L , asintóticamente estable, de tal manera que si la función $v_i : [0, \infty)$ es tal que $v_i(t) = 0$ si $t \leq t_o$, y $v_i \neq 0$ para $t \in [t_o, t_o + \tau]$, $\tau > 0$, entonces el error de salida $\eta(t) = CE(t) + M_i v_i(t)$ no es nulo en el intervalo $[t_o, t_o + \tau]$.

Si todas las fallas son detectables se dice que el error de estimación del sistema de diagnóstico es detectable.

2.2.1.3. Condición de Separabilidad

La separabilidad de las fallas se establece en la siguiente definición:

Teorema 4 *Sea el sistema representado por (2.9). Se dice que las fallas son separables si existe un observador de ganancia L tal que cada una de las fallas puede ser asignada a un sub-espacio independiente en el espacio de las salidas del error de estimación*

Definición 18 *Sea el sistema (2.9). Se dice que las fallas son separables si existe un observador de ganancia L y unos sub-espacios $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k \subset \mathbb{R}^q$, en el espacio de las salidas, tales que:*

1 *Las salidas del sistema del error dado por:*

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - LC)e(t) + (L_i - LM_i)v_i(t) \quad , \\ \eta_i(t) &= Ce(t) + M_i v_i(t). \end{aligned}$$

son tales que $\eta_i(t) \in \mathfrak{R}_i$ para $v_i: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, t > 0$

2

$$\mathfrak{R}_i \cap \left(\sum_{j \neq i}^{j=1} \mathfrak{R}_j \right) = 0$$

2.2.2. Generación Robusta de Residuos

Desde el punto de vista de robustez, la producción de los residuos debe considerar todas aquellas divergencias entre el modelo de diagnóstico y el proceso real.

Los modelos de incertidumbres y las perturbaciones externas en la Figura (2.7), al igual que la descripción de las fallas, representan entradas adicionales en la dinámica del proceso; en este caso, entradas desconocidas en los modelos de los sensores, actuadores y

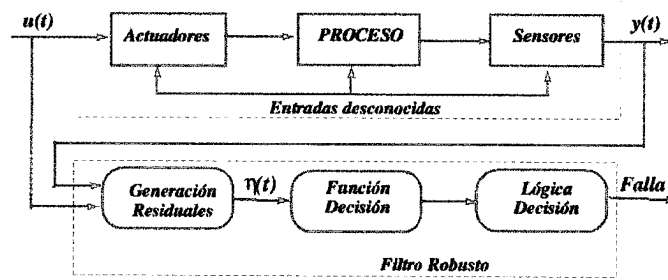


Figura 2.7: Esquema para la detección robusta de fallas

proceso. Los residuos son posteriormente procesados mediante una función de decisión, que garantiza la presencia de una falla y es la que evita las falsas alarmas. Finalmente los residuos son evaluados por una decisión lógica a los fines de distinguir el origen de las fallas.

Al observar la estrategia de control por realimentación de variable de estado surge la cuestión de cómo medir las variables de estado, ya que es posible que estas no tengan sentido físico, o que no sean medibles. Para solucionar este problema se plantea la utilización de un estimador de estado, u observador de estado, que es un elemento que intenta estimar el estado del sistema a partir de mediciones de las entradas y salidas al sistema (se supone que éstas sí tienen sentido físico y son medibles). Los Observadores de estado se pueden emplear para la generación de los residuos, [2, 15, 20, 46]. El objetivo de un observador robusto detector de fallas, es la determinación de la matriz de ganancia de observador L , que involucra tres objetivos: 1. Estabilidad, 2. Reducir los efectos de perturbaciones al residuo y 3. Aumentar los efectos de las fallas en el residuo.

2.2.3. Filtro basado en un Observador.

Se diseña un observador para minimizar el efecto del ruido. Posteriormente se diseñan filtros basados en observadores para detectar fallas.

2.2.4.1. Tiempo Continuo

Teorema 5 Sea el sistema de diagnóstico (2.9). El error de estimación del sistema es

detectable si, y solamente si, existe un observador de tipo Luenberger con ganancia L y asintóticamente estable de tal forma que la ecuación dinámica del error dada por:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - LC)e(t) + \sum_{i=1}^k (L_i - LM_i)v_i(t) \quad , \\ \eta(t) &= Ce(t) + M_i v_i(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

es invertible por la izquierda.

Problema en \mathcal{H}_2 : Sea el sistema dinámico definido por (1.10). Se desea diseñar un observador tal que:

- 1) $A - LC_2$ sea estable
- 2) $\|T_{zw}\|_2 < \mu$

Lema 17 Sea el sistema (1.10) es observable, entonces existe un filtro, donde las matrices de diseño satisface la siguiente LMI en \mathcal{H}_2 :

$$\begin{bmatrix} YA^T + AY + Q^T C_2^T - QC_2 C_2^T & \\ C_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} W & B_1^T Y \\ Y B_1 & Y \end{bmatrix} > 0; \quad \text{tr}[W] < \mu \quad (2.14)$$

Problema en \mathcal{H}_∞ : Sea el sistema dinámico definido por (1.10). Se desea diseñar un observador tal que:

- 1) $A - LC_2$ sea estable
- 2) $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$

Lema 18 Sea el sistema (1.10) es observable, entonces existe un filtro, donde las matrices de diseño satisface la siguiente LMI en \mathcal{H}_∞ :

$$\begin{bmatrix} YA^T + AY - Q^T C_2^T - QC_2 & Y B_1 & C_2^T \\ B_1^T Y & -\mu I & D_{11}^T \\ C_2 & D_{11} & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad Y > 0; \quad \gamma > 0 \quad (2.15)$$

Prueba

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2u + L(y(t) - C_2\hat{x})$$

$$\hat{y} = C_2\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC_2)\hat{x} + B_2u + LD_{21}\omega$$

$$\hat{y} = C_2\hat{x}$$

Se define el error de estimación como:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\eta(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

Así:

$$\dot{e}(t) = [Ax + B_1\omega + B_2u] - [(A - LC_2)\hat{x} + B_2u + LC_2x + LD_{21}\omega]$$

$$\eta(t) = (C_2x + D_{21}\omega) - (C_2\hat{x} + D_{21}\omega) =$$

$$= Ax - A\hat{x} + B_1\omega + B_2u + LC_2\hat{x} - B_2u - LC_2x - LD_{21}\omega$$

$$= C_2x - C_2\hat{x} =$$

Dinámica del error:

$$\dot{e}(t) = (A - LC_2)e(t) + (B_1 - LD_{21})\omega$$

$$\eta(t) = C_2e(t) \quad (2.16)$$

con función de transferencia:

$$T_{\eta\omega} = \left(\begin{array}{c|c} A - LC_2 & B_1 - LD_{21} \\ \hline C_2 & 0 \end{array} \right)$$

Multiplicamos a 1.12 por la derecha y por la izquierda por $Y = P^{-1}$, $Y > 0$, obteniendo la desigualdad no lineal:

$$Y A^T - Y C_2^T L^T + AY - LC_2 Y < 0 \quad (2.17)$$

Haciendo la ganancia del Observador $Q = YL \rightarrow L = Y^{-1}Q$ y sustituyendo en 2.17 :

$$Y A^T + AY - Q^T C_2^T - QC_2 < 0 \quad (2.18)$$

2.2.4.2. Tiempo Discreto

Problema en \mathcal{H}_2 : Sea el sistema dinámico definido por (1.16). Se desea diseñar un observador tal que:

- 1) $(A - LC_2)x(k)$ sea estable
- 2) $\|T_{zw}\|_2 < \mu$

Lema 19 Sea el sistema (1.16) es observable, entonces existe un filtro, donde las matrices de diseño satisfacen las siguientes LMIs en \mathcal{H}_2 :

$$\begin{bmatrix} (A - LC_2)^T Y (A - LC_2) - Y C_2^T \\ C_2 \end{bmatrix} > 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} W & CY \\ Y C^T & Y \end{bmatrix} > 0; \quad \text{tr}[W] < \mu \quad (2.19)$$

Problema en \mathcal{H}_∞ : Sea el sistema dinámico definido por (1.16). Se desea diseñar un observador tal que:

- 1) $(A - LC_2)x(k)$ sea estable
- 2) $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$

Lema 20 Sea el sistema (1.16) es observable, entonces existe un filtro de detección de fallas, donde las matrices de diseño satisface la siguiente LMI en \mathcal{H}_∞ :

$$\begin{bmatrix} (A - LC_2)^T Y (A - LC_2) - Y Y B_1 C_2^T \\ B_1^T Y & -\mu I & D_{11}^T \\ C_2 & D_{11} & -\mu I \end{bmatrix} > 0 \quad ; \quad Y > 0; \quad \mu > 0 \quad (2.20)$$

Prueba: Se realiza de igual forma que en tiempo continuo.

2.2.3.1. Ejemplo Numérico

Ejemplo Numérico

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

Resultados obtenidos mediante el Toolbox LMI de Matlab©

En \mathcal{H}_2 :

Ganancia del Observador:

$$L = \begin{pmatrix} 11.6048 & 3.4079 & 5.7799 & -18.5718 \\ 6.6440 & 2.9625 & 4.3505 & -11.1623 \\ 8.9431 & 3.1512 & 7.9622 & -16.2220 \\ -23.7063 & -7.3893 & -14.6465 & 42.9249 \end{pmatrix}$$

$$\mu = 0,8744 \quad ;$$

$$A = \begin{pmatrix} -15.6048 & -4.4079 & -6.7799 & 19.5718 \\ -6.6440 & -3.9625 & -4.3505 & 14.1623 \\ -8.9431 & -3.1512 & -8.9622 & 21.2220 \\ 31.7063 & 5.3893 & 17.6465 & -48.9249 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

Autovalores en lazo cerrado:

$$-1.0527 + 19.0722i ;$$

$$-1.0527 - 19.0722i ;$$

$$-0.9442 + 2.1804i ;$$

$$-0.9442 - 2.1804i ;$$

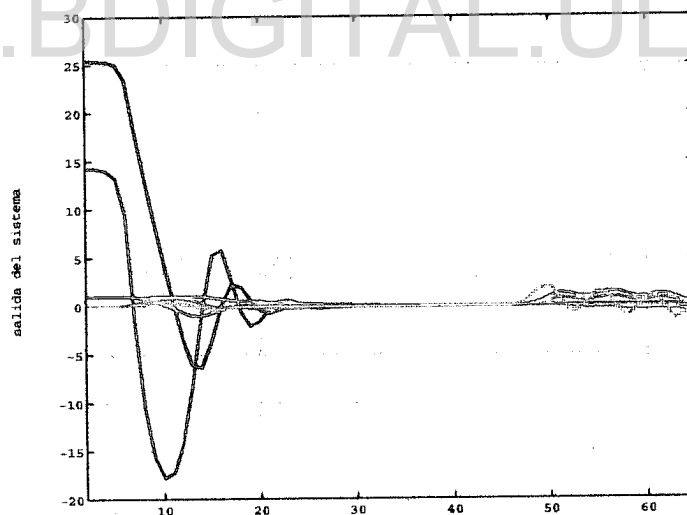


Figura 2.8: Salida del Sistema

En la (2.8) se observa como el sistema presenta señales de perturbación las cuales son detectadas por el observador, tiempo después de haber alcanzado su condición de estabilidad.

El observador diseñado considera ambos, robustez contra las perturbaciones y sensibilidad a las fallas. Un Observador de estado se puede emplear para la generación de los residuos. En el problema de síntesis de Filtros de detección y diagnóstico de fallas robustos la primera fase consiste en la generación de residuales, los cuales se utilizan, posteriormente, para el proceso de diagnóstico. Esa generación de residuales pasa por la construcción de un sistema dinámico (Filtro), el cual debe generar dichos residuos, solamente en la situación de fallas, a través de las señales medidas y estimadas y bajo la presencia de incertidumbres en el modelo y de señales de perturbación. En este caso, se busca la detección de fallas en presencia de perturbaciones, con la mejor sensibilidad posible, por lo que, en la mayoría de los casos, a pesar de que se cumplan las condiciones geométricas de separabilidad de fallas, el problema de diagnóstico es ubicado en un segundo nivel y la separación de las fallas se logra por un Filtrado múltiple. En el marco de estas ideas, se propone la estrategia de un Post-Filtro en el diseño del Filtro robusto de detección de fallas, cuya construcción es por la vía de la síntesis de controladores óptimos basados en las LMI's. Los controladores se construyen por realimentación dinámica de la salida medida y criterios en H_2 y/o H_∞ , mismos que derivan en el Post-Filtro para la detección y diagnóstico simultáneamente. La estrecha relación entre el Filtraje robusto y la generación de residuos para la detección robusta de fallas permite que se puedan derivar métodos de diagnóstico de fallas soportados por el Filtraje robusto.

2.2.4. Filtraje Robusto mediante un Post-Filtro.

Se plantea un problema de diseño de filtros robustos multiobjetivos, para la detección y el diagnóstico de fallas en sistemas lineales a partir de un post-filtro. La idea se fundamenta en la transformación del problema de diseño de filtros DDF a un problema de control óptimo. Como objetivo, se busca la detección de fallas, bajo condiciones de estabilidad asintótica y manejo de perturbaciones e incertidumbres.

Problema: Consideremos un sistema en espacio de estados representado por (1.10).

Se desea:

Determinar, la existencia de un sistema dinámico, denominado filtro y representado por

\mathcal{F} , el cual a partir de la señal medida, $y(t)$, permita generar un estimado, \hat{z} , de esa señal z bajo dos condiciones:

1. El filtro debe ser asintóticamente estable en el entendido de que en ausencia de perturbación y en tiempo límite se tenga un error de estimación nulo.
2. Bajo perturbación, el efecto de la misma a la salida del error de estimación debe ser mínimo, [9, 12, 17, 24, 43]. \mathcal{F} debe ser tal que:

- $\hat{z}(t) = \mathcal{F}y(t)$.

- Si se define el error de estimación como

$$e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t)$$

y $\omega(t) = 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_z(t) = 0$$

- Si se define $\mathcal{T}_{z\omega}$ como la función de transferencia del error de estimación a la perturbación:

1. En el enfoque \mathcal{H}_2 , entonces $\|\mathcal{T}_{z\omega}(s)\|_2 < \mu, \mu > 0$
2. En el enfoque \mathcal{H}_∞ , los valores singulares máximos de $\mathcal{T}_{z\omega}(s)$ deben ser mínimos, o menor que un cierto nivel de atenuación $\gamma > 0$, es decir,

$$\sup_{\omega \neq 0} \frac{\|e_z\|_2^2}{\|\omega\|_2^2} = \|\mathcal{T}_{z\omega}\|_\infty < \gamma$$

Un filtro admisible, si el par $(\mathcal{A}, \mathcal{C}_2)$ es detectable, es de la forma:

$$\mathcal{F}_L \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L(y(t) - C_2\hat{x}(t)) \\ \hat{z}(t) = C_1\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

donde L es una matriz de ganancia a ser diseñada.

Proposición 1 Sea un sistema dinámico a diseñar y que denotaremos por \mathcal{F}_p , cuya excitación es una señal compuesta por la diferencia entre la salida medida y su estimado, y

genera una señal que se utiliza en la dinámica del filtro primario \mathcal{F}_L . Incorporando una señal de control en pre-adelanto a (2.21),

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + L(y(t) - C_2\hat{x}(t)) - \mathcal{B}_e u_e(t) \\ \hat{z}(t) &= C_1\hat{x}(t);\end{aligned}\quad (2.22)$$

donde $u_e(t)$ representa un control en pre-adelanto del filtro, y \mathcal{B}_e una matriz de dirección de esa señal y de dimensión apropiada. Esta señal se obtendrá a partir del Post-filtro. La dinámica del error de (2.8) resulta ser

$$\begin{aligned}\dot{e}_x(t) &= (A - LC_2)e_x(t) + (B_1 - LD)w(t) + \mathcal{B}_e u_e(t) \\ e_z(t) &= C_1 e_x(t);\end{aligned}\quad (2.23)$$

Si $\mathcal{B}_e = -(B_1 - LD)$ y $u_e = \omega$, se logra desacoplar (rechazar) completamente la perturbación.

Sea la innovación definida por

$$\begin{aligned}e_y(t) &= y(t) - C_2\hat{x}(t) \\ &= C_2 e_x(t) + Dw(t);\end{aligned}$$

considérese ahora, la dinámica del Post-filtro como

$$\mathcal{F}_p \begin{cases} \dot{\zeta}(t) = \mathbf{A}_p \zeta(t) + \mathbf{B}_p e_y(t) \\ u_e(t) = \mathbf{C}_p \zeta(t) + \mathbf{D}_p e_y(t) \end{cases}\quad (2.24)$$

donde las matrices \mathbf{A}_p , \mathbf{B}_p , \mathbf{C}_p y \mathbf{D}_p son diseñadas.

En lazo cerrado

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = (A - LC_2 + \mathcal{B}_e \mathbf{D}_p \mathbf{C}_2) e_x(t) + \mathcal{B}_e \mathbf{C}_p \zeta(t) + \\ \quad (B_1 - LD + \mathcal{B}_e \mathbf{D}_p D) \omega(t) \\ \dot{\zeta}(t) = \mathbf{B}_p C_2 e_x(t) + \mathbf{A}_p \zeta(t) + \mathbf{B}_p D \omega(t) \\ e_z(t) = C_1 e_x(t) \end{cases}$$

Ahora \mathcal{B}_e se considera un parámetro de diseño, sin restricciones sobre u_e , es decir, $u_e \in \mathbb{R}^q$. A partir de la innovación de la salida medida y del sistema descrito por (2.23), se obtiene el siguiente sistema dinámico

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = \mathcal{A}e_x(t) + \mathcal{B}_1\omega(t) + \mathcal{B}_e u_e(t) \\ e_z(t) = C_1 e_x(t) + D_{11}\omega(t) + D_{12}u_e(t) \\ e_y(t) = C_2 e_x(t) + D_{21}\omega(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

donde $\mathcal{A} = A - LC_2$, $\mathcal{B}_1 = B_1 - LD$. Para este sistema se debe diseñar u_e , via la salida medida e_y , de tal manera que el efecto de la perturbación a la salida controlada e_z , sea mínimo. La solución del problema viene a través de la realimentación dinámica de la salida medida, y cuyo *controlador resultante*, un controlador dinámico, es precisamente un post-filtro. Así el problema de filtraje óptimo se transforma en un problema de control óptimo robusto.

La función de transferencia $\mathcal{H}_{e_z\omega}(s)$ es

$$\mathcal{H}_{e_z\omega}(s) = \left(\begin{array}{cc|c} A + \mathcal{B}_e D_p C_2 & \mathcal{B}_e C_p & \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_e D_p D \\ \mathcal{B}_p C_2 & A_p & \mathcal{B}_p D \\ \hline C_1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El procedimiento para llegar hasta \mathcal{F}_p es como sigue:

- * Diseñar o seleccionar L . La matriz \mathcal{A} puede requerir de una estructura particular, como es el caso en el problema de diagnóstico de fallas.
- * Luego se diseña \mathcal{F}_p , considerando la matriz de control \mathcal{B}_e , también, como un parámetro de diseño. \mathcal{F}_p se obtiene como solución de un control óptimo en \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ para el sistema dado en (2.25).

2.2.3.1.1 Síntesis del Post-Filtro basado en LMI

Sea el sistema dinámico (2.25)

Sea un controlador por realimentación dinámica de la salida, definido por el sistema (2.24).

Se tiene en lazo cerrado

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = \mathcal{A}e_x(t) + \mathcal{B}\omega(t) \\ e_z(t) = \mathcal{C}e_x(t) + \mathcal{D}\omega(t) \end{cases} \quad (2.26)$$

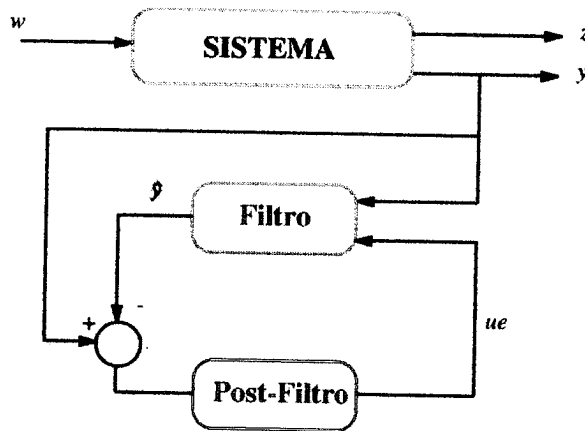


Figura 2.9: Esquema de Post-filtraje.

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{C}_2 & \mathbf{C} \\ \mathbf{B}_p\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_p \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_p\mathbf{D}_{21} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_p\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_p)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{11}\mathbf{D}_p\mathbf{D}_{21} + \mathbf{D}_{11};$$

y

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}_c\mathbf{C}_p, \quad \mathbf{D} = \mathbf{B}_c\mathbf{D}_p.$$

Por lo tanto, la función de transferencia $\mathcal{H}_{e_2w}(s)$ está dada por,

$$\mathcal{H}_{e_2w}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

2.2.3.1.1.1 Problema de control en \mathcal{H}_∞

En este enfoque se debe diseñar \mathbf{B}_c , y el controlador definido por (2.24) tal que $\|\mathcal{H}_{e_2w}\|_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$. Del Lema Real Acotado, se sabe que $\|\mathcal{H}_{e_2w}\|_\infty < \gamma$, si y solo si, existe una matriz simétrica $\mathcal{X} > 0$ [4] [10], tal que satisface la LMI (1.6)

Proposición 2 El sistema definido por (2.25) es estabilizable por un controlador dinámico dado por (2.24) tal que $\| \mathcal{H}_{e,w} \|_{\infty} < \gamma$, si y solo si existen matrices simétricas $\mathbf{X} > 0$ y $\mathbf{Y} > 0$ de orden n ; la matriz $\mathbf{Q}, \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{q \times p}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, satisfaciendo las siguientes LMIs:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{L} + \mathbf{L}^T & \mathbf{A} + \mathbf{N}\mathbf{C}_2 + \mathbf{Q}^T \\ (o)^T & \mathbf{Y}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^T\mathbf{Y} + \mathbf{F}\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2^T\mathbf{F}^T \\ (o)^T & (o)^T \\ (o)^T & (o)^T \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{N}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{X}\mathbf{C}_1^T + \mathbf{M}^T\mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{Y}\mathbf{B}_1 + \mathbf{F}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_1^T + \mathbf{C}_2^T\mathbf{R}^T + \mathbf{D}_{12}^T \\ -\mu\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{R}^T\mathbf{D}_{12}^T \\ (o)^T & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ (o)^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0$$

La matriz \mathcal{B}_e está dada por

$$\mathcal{B}_e = \mathbf{L}\mathbf{M}^T(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1}$$

El controlador estabilizante está dado por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} & -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{X} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} & 0 \\ -\mathbf{C}_2\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_p = (\mathcal{B}_e^T \mathcal{B}_e)^{-1} \mathcal{B}_e^T \mathbf{C}, \quad \mathbf{D}_p = \mathbf{R}$$

donde \mathbf{V} y \mathbf{U} son matrices cuadradas no singulares que satisfacen $\mathbf{Y}\mathbf{X} + \mathbf{V}\mathbf{U} = \mathbf{I}$

2.2.3.1.1.2 Filtrado Robusto en \mathcal{H}_{∞}

Lema 21 Considerese el sistema dado por (2.21). Para dicho sistema existe filtrado robusto \mathcal{H}_{∞} a través de un post-filtro en el entendido de que, el sistema definido por (2.25) es estabilizable por un controlador dinámico dado por (2.26) tal que $\| \mathcal{H}_{e,w} \|_{\infty} < \gamma$, si y solo si existen matrices simétricas $\mathbf{X} > 0$ y $\mathbf{Y} > 0$ de orden n ; la matriz $\mathbf{Q}, \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, satisfaciendo las siguientes LMIs:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{L} + \mathbf{L}^T & \mathbf{A} + \mathbf{N}\mathbf{C}_2 + \mathbf{Q}^T & \mathbf{B}_1 + \mathbf{N}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{X}\mathbf{C}_1^T \\ (o)^T & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{Y} + \mathbf{F}\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2^T\mathbf{F}^T & \mathbf{Y}\mathbf{B}_1 + \mathbf{F}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_1^T \\ (o)^T & (o)^T & -\mu\mathbf{I} & \mathbf{D} \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ (o)^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0$$

Para el cálculo del controlador, se siguen los mismos pasos que en el caso anterior.

2.2.4.1. Ejemplo Numérico

Ejemplo Numérico

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w + \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_1 \\ z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 \end{aligned}$$

Resultados obtenidos mediante el Toolbox LMI de Matlab©

Primera fase del diseño:

$$L = \begin{pmatrix} -3.6618 & -0.9832 \\ -1.1324 & 0.0034 \\ -0.0491 & -3.5000 \end{pmatrix}$$

Dinámica del error:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \begin{pmatrix} -0.7298 & 2.2702 & -20.4323 \\ -0.4919 & -1.4919 & -8.1729 \\ 40.0043 & 40.0043 & -1.5000 \end{pmatrix} e_x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w + \\ &\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} -0.9832 \\ 0.0034 \\ -3.5000 \end{pmatrix} v_2 + B_c u_c \\ e_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e_x \\ e_y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e_x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 \end{aligned}$$

Se considera $B_c \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Resultados método \mathcal{H}_∞ :

$$\gamma = 2,2778$$

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{pmatrix} -6.0907 & -1.1275 & -1.3244 \\ 2.7851 & -0.6818 & 0.0519 \\ 0.4747 & -0.0075 & -7.9257 \end{pmatrix} \\ B_f &= \begin{pmatrix} -0.1457 & -0.2297 \\ 2.1583 & -0.0376 \\ 0.4502 & -1.2500 \end{pmatrix} \\ C_f &= \begin{pmatrix} -1.0131 & 0.2298 & -0.0690 \\ 3.1802 & 0.6278 & -0.0027 \\ 0.0274 & 0.0014 & -0.3944 \end{pmatrix} \\ D_f &= \begin{pmatrix} 0.1691 & 0.0276 \\ -2.1324 & 0.0034 \\ -0.0383 & 0.7500 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La figura (2.10) muestra la respuesta frecuencial de la función de transferencia del error de la salida.

La figura (2.11) muestra las señales de perturbación y la presencia de fallas. Se hace evidente la presencia de ruido. Las fallas se manifiestan en 10 seg (actuador) y 20 seg (sensor), se aprecia que cada salida del error está asociada a cada falla, de manera que se logra la separabilidad, la presencia de la perturbación es minimizada, lo cual cumple

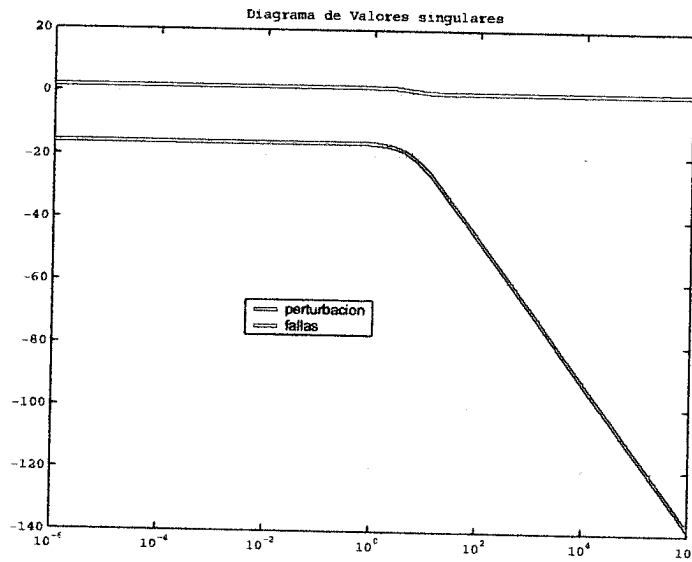


Figura 2.10: Diagrama de Valores Singulares.

con los requerimientos para distinguir la presencia de fallas bajo condiciones adversas de perturbaciones y/o incertidumbres.

2.2.5. Filtros Robustos de detección de fallas en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Se plantea un problema para el diseño de filtros robustos para la detección y el diagnóstico de fallas en sistemas lineales a partir de dos tipos de señales. La idea se fundamenta en establecer criterios $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ mezclados de diseño de filtros de Detección y Diagnóstico de fallas. Como objetivo, se busca la detección de fallas, bajo condiciones de estabilidad asintótica y manejo de perturbaciones e incertidumbres, garantizando el aumento de sensibilidad a fallas [40, 34, 37].

Lema 22 Considerese el siguiente modelo de diagnóstico con incertidumbres estructuradas:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + B_1\omega(t) + \\
 &\quad (B_2 + \Delta B(t))u(t) + F_1v(t), \\
 z(t) &= C_1x(t) + D_{11}\omega(t) + F_2v(t), \\
 y(t) &= (C_2 + \Delta C(t))x(t) + D_{21}\omega(t) + F_2v(t)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $z \in \mathbb{R}^m$ es la señal para cuantificar el desempeño, $y \in \mathbb{R}^p$, las señales de salidas medidas; $\omega \in \mathcal{L}_2$ es la señal de perturbación y v es el vector de

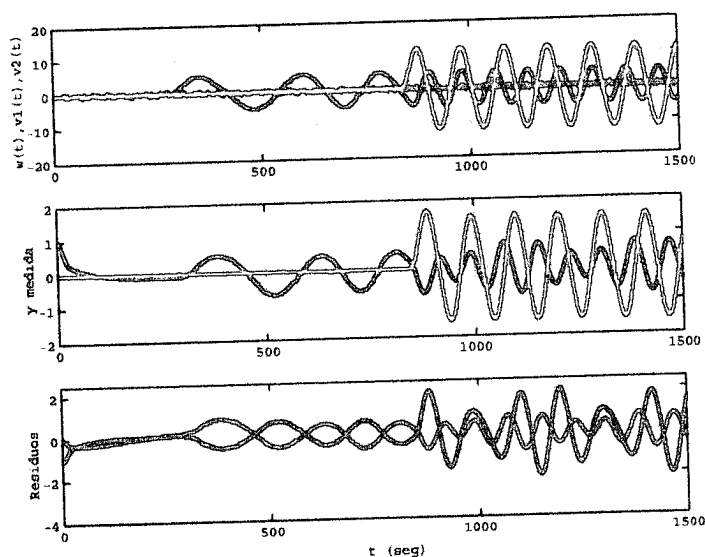


Figura 2.11: Respuestas del filtro a las señales de perturbación y falla.

fallas desconocidas. Las matrices $A, B_1, C_2, D_{11}, D_{21}$ tienen dimensiones adecuadas. Las incertidumbres se caracterizan por

$$\begin{aligned}\Delta A(t) &= G_1 E(t) H_1, & \Delta B(t) &= G_1 E(t) H_2, \\ \Delta C(t) &= G_2 E(t) H_1,\end{aligned}$$

para lo cual G_1, G_2, H_1, H_2 , son matrices constantes conocidas y de dimensiones apropiadas. $E(t)$ es una función matricial desconocida pero acotada. F_1, F_2 son las matrices de distribución de fallas, las cuales se asumen conocidas. El término $F_1 v(t)$ representa las fallas de actuadores o de componentes, mientras que $F_2 v(t)$ denota las fallas de sensores. Se asume que el par (C_2, A) es detectable.

El problema de detección robusta de fallas consiste en generar una señal residual $e_z(t)$ que satisfaga

$$\begin{aligned}F(e_z(t)) &\leq T_h & \text{si } v(t) = 0, \\ F(e_z(t)) &> T_h & \text{si } v(t) \neq 0,\end{aligned}\tag{2.28}$$

donde $F(e_z(t))$ es alguna medida del tamaño del residual, por ejemplo, una norma, y T_h es un valor umbral.

Así, sobre la base del modelo de diagnóstico es posible construir un filtro a partir del sistema dinámico siguiente:

$$\mathcal{F} \begin{cases} \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + B_2u(t) + \mathbf{K}e_y(t), \\ \hat{z}(t) = C_1\hat{x}(t), \\ \hat{y}(t) = C_2\hat{x}(t), \end{cases} \quad (2.29)$$

donde \mathbf{K} es la ganancia a seleccionar y $e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t)$. Si se define $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ y la señal residual $e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t)$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{e}_z(t) &= (A - \mathbf{K}C_2)e_x(t) + \mathbb{B}_1\tilde{\omega}(t) + \\ &\quad \mathbb{B}_2\omega(t) + (F_1 - \mathbf{K}F_2)v(t), \\ e_z(t) &= C_1e_x(t) + D_{11}\omega(t) + F_2v(t), \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde $\tilde{\omega}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$, la matriz $\mathbb{B}_1 = (\Delta A(t) - \mathbf{K}\Delta C_2 \quad \Delta B(t))$ y la matriz $\mathbb{B}_2 = B_1 - \mathbf{K}D_{21}$. La señal residual $e_z(t)$ en (2.30) depende de dos tipos de señales de perturbación: $\omega(t)$ y $\tilde{\omega}(t)$. La señal $\omega(t)$ se considera ruido blanco. El sistema (2.30) se asume estable entonces, $\|\tilde{\omega}(t)\| \leq \|x(t)\| + \|u(t)\|$, siempre que la entrada $u(t)$ sea acotada. Dado que las incertidumbres son acotadas, $E(t)$ es acotada, por lo que la dinámica del error estará influenciada por perturbaciones acotadas. El modelo de diagnóstico (2.27) puede estar influenciado por dos tipos de perturbaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \tilde{B}_1\tilde{\omega}(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) + F_1v(t), \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}\omega(t) + F_2v(t), \\ y(t) &= C_2x(t) + \tilde{D}_{21}\tilde{\omega}(t) + D_{21}\omega(t) + F_2v(t), \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde $\tilde{B}_1 = (\Delta A(t) \quad \Delta B(t))$ y $\tilde{D}_{21} = (\Delta C(t) \quad 0)$, lo cual conforman la señal de perturbación de potencia acotada.

La detección de fallas se garantiza cuando se decrementan los efectos de las perturbaciones sobre la señal residual. Para ello se obtiene niveles de atenuación μ y γ , los cuales, si además se establece la condición de separabilidad entre fallas y perturbaciones (2.31), entonces siempre es posible alcanzar que $F(e_z(t)) > T_h$ si $v(t) \neq 0$

Teorema 6 Detectabilidad: Sea $W_{L_i} = I_m(L_j)$, $j = 1, 2, \dots, f$. Considérese el modelo de diagnóstico definido por (2.31), donde el par (C_2, A) es detectable, U_o el sub-espacio inobservable y $M_i = 0$. Entonces, la i -ésima falla es detectable si

$$W_{L_i} \cap U_o = \{0\}, j = 1, 2, \dots, f; \quad (2.32)$$

Teorema 7 Separabilidad: Sea $W_{L_i} = I_m(L_j), j = 1, 2, \dots, f$. Considérese el modelo de diagnóstico definido por (2.31), y sea O su sub-espacio observable. Las fallas son separables si cada uno de W_L y cada una de las direcciones de fallas en la salida del error de estimación están desacopladas, es decir,

$$(Im(M_i) + OW_{L_i}) \cap (Im(M_j) + \sum_{j \neq i}^f OW_{L_i}) = \{0\}, j = 1, 2, \dots, f; \quad (2.33)$$

Así las condiciones de separabilidad y detectabilidad debe ser satisfechas. Entonces, minimizando los efectos de la perturbación sobre la señal residual la relación de ganancia falla-ruido S será grande.

Con el objeto de garantizar la detección robusta y el diagnóstico de fallas se debe diseñar K tal que:

- El sistema dinámico (2.30) sea asintóticamente estable.
- La relación de ganancia *falla-ruido* $S = \gamma_v/\gamma_\omega$ sea grande.

Problema : Dado el modelo de diagnóstico (2.29), diseñar K , para el filtro \mathcal{F} , tal que

- El sistema en lazo cerrado (2.30) sea asintóticamente estable.
- El efecto de la perturbación $\bar{\omega}$ y el efecto de ω sobre la señal residual e_z sean mínimos.

2.2.7.1. Síntesis del Filtro en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Se diseña K utilizando las normas \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ mezcladas soportadas por las técnicas de LMI. Consideremos el sistema dinámico del error (2.30) con respecto, únicamente, a las perturbaciones y la señal residual. así se definen las matrices de transferencias:

$$\mathcal{H}_{e_z \bar{\omega}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B_1 \\ \hline C & 0 \end{array} \right], \quad \mathcal{H}_{e_z \omega}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B_2 \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

donde

$$\mathbb{A} = A - \mathbf{K}C_2, \quad \mathbb{B}_1 = \tilde{B}_1 - \mathbf{K}\tilde{D}_{21},$$

$$\mathbb{B}_2 = B_1 - \mathbf{K}D_{21}, \quad \mathbb{C} = C_1, \quad \mathbb{D} = D_{11}$$

Con el objeto de garantizar la detección robusta y el diagnóstico de fallas, se debe diseñar \mathbf{K} tal que $\|\mathcal{H}e_z\tilde{\omega}\|_2 < \mu$, $\mu > 0$ y $\|\mathcal{H}e_z\omega\|_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$, como problema de optimización, esto es

$$\min_{\mathbf{K}} \{ \|\mathcal{H}e_z\tilde{\omega}\|_2 : \|\mathcal{H}e_z\omega\|_\infty < \gamma \}$$

Lema 23 La desigualdad $\|\mathcal{H}e_z\tilde{\omega}\|_2 < \mu$, se satisface si, y solamente si, existen matrices simétricas \mathbb{X}, \mathbb{W} tales que $\text{tr}(\mathbb{W}) < \mu$ y la LMI (1.5) es factible.

Lema 24 La desigualdad $\|\mathcal{H}e_z\tilde{\omega}\|_\infty < \gamma$, se satisface si, y solamente si, existe una matriz simétrica \mathbb{X} tal que (1.6) es factible.

Proposición 3 Sea el modelo de diagnóstico (2.27), con su equivalente (2.31). Dicho modelo admite un filtro \mathcal{F} tal que $\|\mathcal{H}e_z\tilde{\omega}\|_2 < \mu$ y $\|\mathcal{H}e_z\tilde{\omega}\|_\infty < \gamma$ si, y solo si, existen matrices de orden n simétricas $\mathbf{X} > 0$ y $\mathbf{W} > 0$; y la matriz \mathbf{Y} tal que se satisfacen las siguientes LMIs:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{Y}C_2 - C_2^T\mathbf{Y} & \mathbf{X}\tilde{B}_1 - \mathbf{Y}\tilde{D}_{21} \\ \tilde{B}_1^T\mathbf{X} - \tilde{D}_{21}^T\mathbf{Y} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 ; \quad (2.34)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & C_1\mathbf{X} \\ \mathbf{X}C_1^T & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 ; \quad \text{tr}[\mathbf{W}] < \mu, \quad \mu > 0 \quad (2.35)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} - C_2^T\mathbf{Y} - \mathbf{Y}C_2 & \mathbf{X}B_1 - \mathbf{Y}D_{21} & C_1^T \\ B_1^T\mathbf{X} - D_{21}^T\mathbf{Y}^T & -\gamma\mathbf{I} & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.36)$$

La ganancia del filtro está dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}.$$

Prueba:

La prueba se fundamenta en el procedimiento de la linealización de las desigualdades

matriciales mediante cambios de variable. Sean $\mathcal{X} = \mathbf{X}$, $\mathcal{W} = \mathbf{W}$. Sustituyendo las matrices originales en las desigualdades (2.34), (2.35) y (2.36) se obtienen desigualdades no lineales. Considerando $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{K}$ se obtiene la linealización.

En ambos casos, $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$; se obtienen niveles de atenuación μ y γ , además se establece que : $\mathbf{Im}(\tilde{B}) \cap \mathbf{Im}(F_1 - \mathbf{K}F_2) = \emptyset$, mediante una apropiada selección de \mathbf{K} .

2.2.5.1. Ejemplo Numérico

Ejemplo Numérico

Sea el modelo estabilizado de un avión :

$$A = \begin{pmatrix} -0.9813 & 0.0083 & -0.0454 & -0.2459 \\ 0.0117 & -0.5813 & -0.3898 & -1.6662 \\ 0.0457 & 0.1274 & -0.8230 & 0.4803 \\ 0.0117 & 0.0358 & 0.4433 & -1.1361 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0.2664 & 0.0365 \\ 1.7629 & -3.2664 \\ -2.3152 & 1.7209 \\ -0.6083 & 0.4660 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = C_1, \quad D_{21} = D_{11}.$$

Modelos de las Incertidumbres

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}; \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix} \quad E(t) \text{ aleatoria}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Matrices de distribución de las fallas

$$F_1 = 2B_2 ; \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Resultados obtenidos mediante el Toolbox LMI de Matlab©

$$K = 1.0e + 004 * \begin{pmatrix} 0.1727 & -0.0052 & -0.1727 & 0.0053 \\ -2.2161 & -0.0059 & 2.2162 & 0.0059 \\ 0.1583 & -0.0053 & -0.1583 & 0.0054 \\ -2.2236 & -0.0060 & 2.2237 & 0.0060 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_v = 49,9996 ; \quad \gamma_w = 8,1168e - 005$$

$$S = 6,1600e + 005 ;$$

$$\mu = 0,1540 ; \quad \gamma = 4,9211$$

La Figura (2.12) muestra el diagrama de los valores singulares correspondientes a las funciones de transferencia de la señal residual e_z con respecto a perturbaciones ω , incertidumbres $\tilde{\omega}$ y fallas ν . La ganancia máxima está asociada a la norma H_∞ , por lo que se aprecia la sensibilidad a la presencia de las fallas, lo que indica que realmente la técnica cumple su objetivo.

La Figura (2.13) muestra las señales que presenta el sistema, la salida medida $y(t)$ y los residuos. Tanto en la salidas medidas como en los residuos se puede distinguir la presencia de falla en el actuador en $t = 0.2$ seg y la falla en el sensor en $t = 3.2$ seg, lo cual confirma la robustez del Filtro diseñado. Se aprecia como la salida está asociada a la falla, de

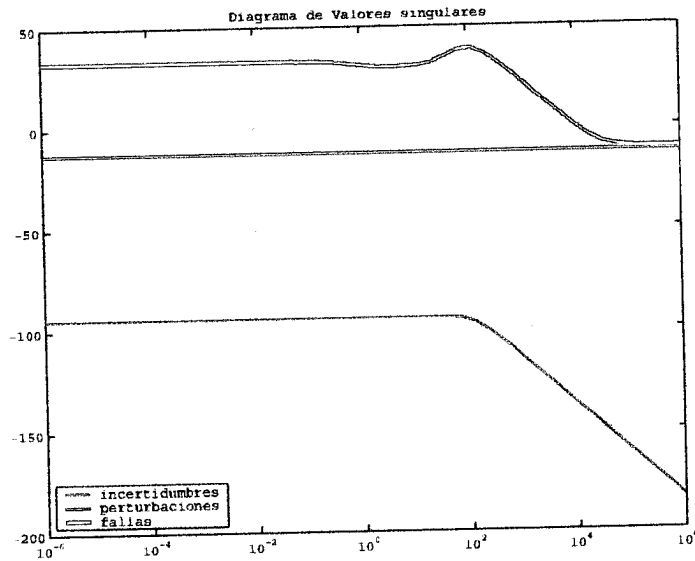


Figura 2.12: Diagrama de Valores Singulares.

manera que se logra la separabilidad, la perturbación es minimizada, lo cual cumple con los requerimientos para distinguir las fallas bajo condiciones adversas de perturbaciones y/o incertidumbres.

2.3. Sistemas Lineales Discretos

2.3.1. Filtrado Robusto mediante un Post-Filtro

Se plantea un problema para el diseño de filtros robustos para la detección y el diagnóstico de fallas en sistemas lineales a tiempo discreto a partir de un post-filtro. Los cálculos de diseño se realizan de la misma manera que para el caso en tiempo continuo. Por lo que sólo presentaremos los resultados logrados.

2.2.3.1.1 Síntesis del Post-Filtro basado en LMI

2.2.3.1.1.1 Problema de control en \mathcal{H}_∞

En este enfoque se debe diseñar \mathcal{B}_e , y el controlador definido por (2.37) tal que $\|\mathcal{H}_{e_z w}\|_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$. Del Lema Real Acotado, se sabe que $\|\mathcal{H}_{e_z w}\|_\infty < \gamma$, si y solo sí, existe una

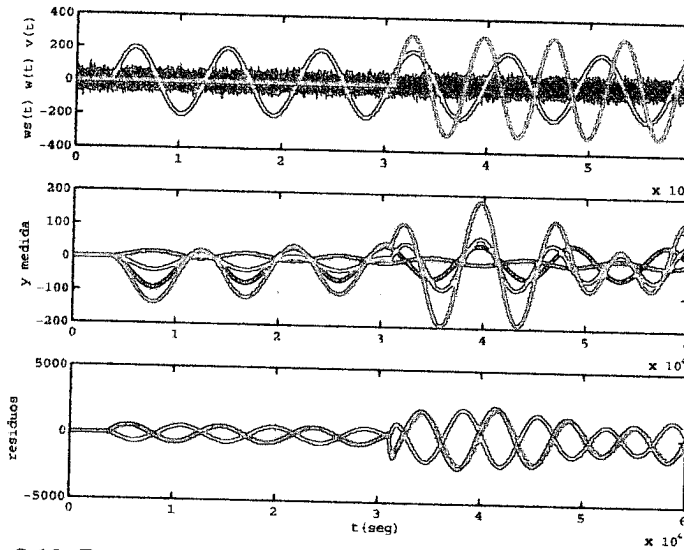


Figura 2.13: Respuestas del filtro a las señales de perturbación y falla.

matriz simétrica $\mathcal{X} > 0$, tal que [4] [10]

$$\mathcal{F}_p \begin{cases} \zeta(k+1) = \mathbf{A}_p \zeta(k) + \mathbf{B}_p e_y(k) \\ u_c(k) = \mathbf{C}_p \zeta(k) + \mathbf{D}_p e_y(k) \end{cases} \quad (2.37)$$

Lema 25 Sea Problema de control en \mathcal{H}_∞ definido por (1.43) tal que $\|\mathcal{H}_{e_z w}\|_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$, si y solo si, y existe una matriz simétrica \mathcal{X} tal que satisface la LMI (1.9).

nos queda la expresión para el control dinámico discreto en \mathcal{H}_∞ :

Proposición 4 El sistema discreto definido por (1.16) es estabilizable por un controlador dinámico discreto dado por (1.43) tal que $\|\mathcal{H}_{e_z w}\|_\infty < \mu$, si y solo si existen matrices simétricas $\mathbf{X} > 0$ y $\mathbf{Y} > 0$ de orden n ; la matriz $\mathbf{Q}, \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{q \times p}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, satisfaciendo la siguiente LMI:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbb{I} & \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{L} & \mathbf{A} + \mathbf{N}\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_1 + \mathbf{N}\mathbf{D}_{21} & 0 \\ (o)^T & \mathbf{Y} & \mathbf{Q} & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \mathbf{F}\mathbf{C}_2 & \mathbf{Y}\mathbf{B}_1 + \mathbf{F}\mathbf{D}_{21} & 0 \\ (o)^T & (o)^T & \mathbf{X} & \mathbb{I} & 0 & \mathbf{X}\mathbf{C}_1^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & \mathbf{Y} & 0 & \mathbf{C}_1^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & (o)^T & \mathbb{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & (o)^T & (o)^T & \gamma \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.38)$$

El controlador estabilizante está dado de la misma manera que en continuo, donde V y U son matrices cuadradas no singulares que satisfacen $YX + VU = I$

2.3.2. Filtro Robusto de Detección de Fallas

El diseño de filtros robustos se formula como extensión del problema de post-filtraje robusto de igual forma que para el caso continuo.

2.3.3. Filtros Robustos de detección de fallas en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Se plantea un problema para el diseño de filtros robustos para la detección y el diagnóstico de fallas en sistemas lineales en tiempo discreto a partir de dos tipos de señales.

2.3.3.1. Síntesis del Filtro en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Proposición 5 Sea el sistema definido por (1.16) en tiempo discreto. Dicho modelo admite un filtro \mathcal{F} tal que $\|H_{e_z\hat{w}}\|_2 < \mu$ y $\|H_{e_z\omega}\|_\infty < \gamma$, si y solo si existen matrices simétricas $X > 0$ y $W > 0$ y la matriz Y tal que se satisfacen las siguientes LMI:

$$\begin{bmatrix} X & XA - YC_2 & X\tilde{B}_1 - Y\tilde{D}_{21} \\ (o)^T & X & 0 \\ (o)^T & (o)^T & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_1 \\ (o)^T & X \end{bmatrix} > 0; \quad \text{tr}[W] < \mu, \quad D = 0. \quad (2.40)$$

$$\begin{bmatrix} X & XA - YC_2 & XB_1 - YD_{21} & 0 \\ (o)^T & X & 0 & C_1^T \\ (o)^T & (o)^T & I & D_{11}^T \\ (o)^T & (o)^T & (o)^T & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.41)$$

La ganancia del filtro está dada por

$$K = X^{-1}Y.$$

2.3.3.2. Conclusiones

Los ejemplos numéricos muestran como se obtiene el desacoplamiento de las señales de perturbación e incertidumbre con respecto a la presencia de fallas. La ley de control permite la detección de fallas al minimizarse el efecto de las perturbaciones sobre los residuos. Se alcanza la estabilidad asintótica de la dinámica del error.

Se ha establecido una relación entre el problema de detección robusta de fallas y el filtraje robusto, a través de filtros que permiten alta sensibilidad a las fallas y al mismo tiempo minimizar el efecto de las señales de perturbación. La finalidad ha sido generar residuos solamente bajo situaciones de fallas a pesar de la presencia de incertidumbres y señales de perturbación en el modelo.

Se logra la detección de fallas con la mejor sensibilidad posible. Bajo estos preceptos, la técnica logra atenuar el efecto de la perturbación, confirmando la fortaleza del método planteado.

La garantía del funcionamiento acertado del filtro, dependerá del conocimiento de los modelos de fallas y del sistema a diagnosticar.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Conclusiones

En este trabajo se han presentado las bases fundamentales para el diseño de sistemas de control para sistemas lineales, a partir de la caracterización de las normas como Desigualdades Matriciales Lineales (LMI). Esta formulación, que surge del paradigma de control óptimo robusto, permite la síntesis de controladores mediante la realimentación de estados, y mediante la realimentación dinámica de la salida.

A través de este enfoque, basado en las LMIs, se pueden establecer objetivos de desempeño múltiples, tales como región de estabilidad, velocidad de respuesta rápida, insensibilidad o atenuación de señales de perturbación, amortiguamiento, seguimiento, entre otros aspectos, criterios que, para uno de los cuales, se establece una LMI. Bajo este contexto, en este trabajo se le ha dado énfasis a garantizar índices de desempeño aceptables, tanto en sistemas continuos como discretos, debido a la presencia de señales de perturbación.

Como resultado del diseño de controladores basados en LMI, se ha presentado una técnica para la síntesis de compensación anti-windup (AW), misma que considera, para el cálculo de la ganancia de compensación, un índice de desempeño, según la norma-2 o la norma-infinita, debido al efecto de la saturación sobre la señal de control. Esto trae como consecuencia que el sistema controlador-compensación exhiba un cierto nivel de robustez frente a cambios desconocidos en la señal de control, lo cual es un avance importante para la solución del problema de control acotado.

Otro resultado importante de este trabajo ha sido la aplicación de la síntesis de controladores basados en LMI el problema de detectabilidad y separabilidad de fallas. En este

caso, el problema de construcción de filtros de diagnóstico de fallas ha sido transformado en un problema de control, donde la matriz de control se considera como un parámetro de diseño. Así, todos los resultados conocidos en la síntesis de controladores óptimos robustos pueden ser utilizados para el diseño de los filtros de detección y diagnóstico de fallas.

A partir de la formulación del problema de diagnóstico de fallas como un problema de control, entonces es posible establecer criterios multi-objetivos, según la naturaleza de las fallas, por lo tanto los resultados obtenidos amplían las posibilidades para la construcción de sistemas de diagnóstico, tomando en consideración el rechazo a perturbaciones, incertidumbres de modelos y la naturaleza de las anomalías.

Combinando los resultados de diseño de compensadores AW y la síntesis de filtros de detección y diagnóstico de fallas, es posible construir un mecanismo para la implantación del sistema controlador-compensación al considerar la saturación como una falla. De esta manera, la señal residual requerida para la realimentación adicional se puede estimar a partir de los residuos generados por el filtro de detección de fallas, lo que representa una implementación robusta ya que cambios desconocidos en los límites de saturación son tomados en cuenta por la estimación.

Recomendaciones

Este trabajo ha sido orientado hacia la detección de fallas en los sistemas lineales invariantes en el tiempo, por lo que se recomienda:

- * Desarrollar aplicaciones en Sistemas lineales variables en el tiempo, así como también en Sistemas no lineales.
- * Investigar sobre técnicas de diseño que permitan separar fallas, cuando se presenten de manera dependiente.
- * Desarrollar los controladores diseñados a nivel industrial.
- * Diseñar Filtros de Detección de Fallas que cumplan múltiples objetivos.
- * Diseñar Filtros de Detección de Fallas, en que la presencia de Saturación sea una señal de falla.
- * Combinar la Detección de Fallas con técnicas tales como el Reconocimiento de patrones.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Bibliografía

- [1] K. J. Åström and L. Rundqwist, *Integrator windup and how to avoid it*, 1989, pp. 1693–1698.
- [2] R.V. Beard, *Failure accommodation in linear systems through self-reorganization*, Ph.D. thesis, Mass. Inst. Technol., Cambridge, 1971.
- [3] P. Bernhard, *A min-max certainty equivalence principle, and its applications to continuous time, sampled data, and discrete time \mathcal{H}_∞ optimal control*, Tech. Report 1347, INRIA-Sophia Antipolis, 1990.
- [4] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, 1994.
- [5] P. J. Campo and M. Morari, *Robust control of processes subject to saturation nonlinearities*, *Comp. & Chem. Engineering* 14 (1990), 343–358.
- [6] Yong-Yan Cao, Zongli Lin, and David G. Ward, *\mathcal{H}_∞ antiwindup design for linear systems subject to input saturation*, *J. of Guidance, Control, and Dynamics* 25 (2002), no. 3, 455–463.
- [7] J. Chen, R.J. Patton, and H. Zhang, *Design of unknown input observers and robust fault detection filters*, *Int. Journal of Control* 63 (1996), no. 5, 85–105.
- [8] A. Edelmayer, J. Bokor, and L. Keviczky, *An \mathcal{H}_∞ filtering approach to robust detection of failures in dynamical systems*, 33th IEEE Conference on Decision and Control (Lake Buena Vista), 1994, pp. 3037–3039.
- [9] M. Fu, C.E. de Souza, and L. Xie, *\mathcal{H}_∞ estimation for uncertain systems*, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 2 (1992).

- [10] P. Gahinet and P. Apkarian, *A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control*, Int. J. of Robust and Nonlinear Control **4** (1994), no. 4, 421–448.
- [11] J. C. Geromel, J. Bernussou, G. García, and M.C. de Oliveira, *\mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for discrete-time linear systems*, 37th IEEE Conf. on Decision and Control (Tampa), 1998, pp. 146–151.
- [12] K.M. Grigoriadis and J.T. Watson, *Suboptimal \mathcal{H}_∞ filtering via linear matrix inequalities*, IFAC World Congress (San Francisco), 1996, pp. 197–202.
- [13] G. Grimm, A.R. Teel, and L. Zaccarian, *Linear LMI-based external anti-windup augmentation for stable linear systems*, Automatica **40** (2004), 1987–1996.
- [14] R. Hanus and M. Kinnaert, *Control of constrained multivariable systems using the conditioning technique*, Proc. Amer. Control Conference, 1989, pp. 1711–1718.
- [15] H.L. Jones, *Failure detection in linear systems*, Ph.D. thesis, Mass. Inst. Technol., Cambridge, 1973.
- [16] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice-Hall, 1980.
- [17] P.P. Khargonekar and M.A. Rotea, *Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering*, 31th IEEE Conf. on Decision and Control, 1992, pp. 2299–2304.
- [18] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, and C.Ñ. Nett, *A unified framework for the study of anti-windup designs*, Automatica **30** (1994), no. 12, 1869–1883.
- [19] M.V. Kothare and M. Morari, *Multivariable anti-windup controller synthesis using multi-objective optimization*, Proc. of the American Control Conference, 1997, pp. 3093–3097.
- [20] M.A. Massoumnia, *A geometric approach to the synthesis of failure detection filters*, IEEE Trans. Automatic Control **31** (1986), no. 9, 839–846.
- [21] M. Morari, *Some control problems in the process industries. essays on control: Perspectives in theory and applications*, Birhauser, 1993.
- [22] M. Morari and E. Zafiriou, *Robust process control*, Prentice hall, 1989.

- [23] E.F. Mulder, M.V. Kothare, and M. Morari, *Multivariable anti-windup controller synthesis using linear matrix inequalities*, *Automatica* **37** (2001), 1407–1416.
- [24] K.M. Nagpal and P.P. Khargonekar, *Filtering and smoothing in an \mathcal{H}_∞ setting*, *IEEE Trans. Automatic Control* **36** (1991), no. 2, 152–166.
- [25] J.-Geromel J.C. Oliveira, M.C.-Bernusson, *A new discrete - time robust stability condition*, *systems and control letters*, 1999, pp. 261–265.
- [26] J. O'Reilly, *Observers for linear systems*, Academic Press, 1983.
- [27] Jaehong Park and Giorgio Rizzoni, *A new interpretation of the fault detection filter: Part 1. closed-form algorithm*, *Int. J. Control* **60** (1994), 767–787.
- [28] R.J. Patton and J. Chen, *Robust fault detection using eigenstructure assignment: A tutorial consideration and some new results*, 30th IEEE Conference on Decision and Control (Brighton), 1991, pp. 2242–2247.
- [29] ———, *Observer-based fault detection and isolation: Robustness and applications*, *Control Eng. Practice* **5** (1997), 671–682.
- [30] R.J. Patton, P.M. Frank, and R.N. Clark, *Issues of fault diagnosis for dynamical systems*, Springer-Verlag, 2000.
- [31] A. Ríos-Bolívar, *Sur la synthèse de filtres de détection de défaillances*, Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001.
- [32] A. Ríos-Bolívar and G. Garcia, *An fdi robust filter based-on lmi control*, 7th WSEAS Int. Conf. on AUTOMATIC CONTROL, MODELING and SIMULATION (ACMOS '05). Prague, Czech Republic. 13 al 15 Marzo de 2005, pp 242–247.
- [33] A. Ríos-Bolívar and G. García, *Robust filters for faults detection and diagnosis: An \mathcal{H}_∞ optimization approach*, LAAS Report No. 00359 (Toulouse - France), 2000.
- [34] A. Ríos-Bolívar and G. Garcia, *Control por compensación de la saturación y filtros de detección de fallas*, IV Congreso de Automatización y Control, CAC-2003 (Mérida - Venezuela), 2003, pp. CD-ROM.

- [35] A. Ríos-Bolívar and S. Godoy, *Diseño de filtros de detección de fallas en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LTI basado en LMI*. V Congreso de Automatización y Control (CAC'05). Caracas, Noviembre 2005.
- [36] ———, *Multivariable Anti-Windup Controller Desig using $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Multiobjectives*. ICGST Int. Conf. on Automatic Control and System Engineering; ACSE-05 Conference, Vol 1, pp 28-34. Egypt, December 2005.
- [37] ———, *Robust anti-windup controller synthesis: A mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ setting.*, Venice, Italy, Nov. 2005. WSEAS Int. Conf. on Dynamical Systems and Control (CONTROL' , 05), pp 208–213.
- [38] A. Ríos-Bolívar, G. Mousalli-Kayat, and F. Rivas-Echeverría, *Implementation of AWBT compensation using ANN*, WSEAS Transaction on Systems **3** (2004), 402–407.
- [39] A. Ríos-Bolívar, F. Rivas, and G. Garcia, *Robust anti-windup compensation for PID controllers*, 7th WSEAS Int. Conf. on Automatic Control, Modelling and Simulation, ACMOS-05 (Prague - Czech Republic), 2005, pp. 242–247.
- [40] A. Ríos-Bolívar and F. Szigeti, *A fdi filter based-on inversion for nonlinear systems*, Advances in Systems Science: Measurements, Circuits and Control, vol. 1, ch. 3, pp. 35–40, WSES Press, 2001.
- [41] A. Ríos-Bolívar, F. Szigeti, G. García, and J. Bernussou, *A fault detection and isolation filter for discrete-time linear systems with disturbances*, Dynamic and Control Conference Dycons'99 (Ottawa - Canada), 1999.
- [42] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, *Multiobjective output-feedback control via lmi optimization*, IEEE Trans. Automatic Control **42** (1997), no. 7, 896–911.
- [43] U. Shaked and Y. Theodor, *\mathcal{H}_∞ -optimal estimation: A tutorial*, 31st IEEE Conf. Decision and Control (Tucson), 1992, pp. 2278–2286.
- [44] C.C. Tsui, *A general failure detection, isolation, and accomodation system with model uncertainty and measurement noise*, IEEE Trans. Aut. Control **39** (1994), no. 11, 2318–2321.

- [45] Nobutaka Wada and Masami Saeki, *Design of a static anti-windup compensator that optimizes \mathcal{L}_2 performance: An LMI based approach*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation (Taipei - Taiwan), 2003, pp. 2628–2633.
- [46] J.E. White and J.L. Speyer, *Detection filter design: Spectral theory and algorithms*, IEEE Trans. Automatic Control **32** (1987), 593–603.
- [47] A.S. Willsky, *A survey of design methods for failure detection in dynamical systems*, Automatica **12** (1976), no. 11, 601–611.
- [48] W.M. Wonham, *Linear multivariable control: A geometric approach*, Springer-Verlag, 1985.
- [49] A. Zheng, M. V. Kothare, and M. Morari, *Anti-windup design for internal model control*, Tech. Report CIT-CDS Technical Memo, CalTech, 1993.
- [50] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice-Hall, 1996.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

