

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA
MENCIÓN DISEÑO Y MANUFACTURA

**Simulación Dinámica de Manipuladores Móviles por medio de las
ecuaciones de Gibbs-Appell**

WWW.BDIGITAL.ULA.VE



Autor: Ing. Pedro Araujo
Tutor: PhD. Sebastián Provenzano

Mérida, Mayo 2012

DONACION

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA
MENCIÓN DISEÑO Y MANUFACTURA

Simulación Dinámica de Manipuladores Móviles por medio de las ecuaciones de Gibbs-Appell

Trabajo presentado como requisito para optar al Título de Msc. en Ingeniería Mecánica,
Mención Diseño y Manufactura

Autor: Ing. Pedro Araujo

Tutor: PhD. Sebastián Provenzano

Mérida, Mayo 2012

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

DEDICATORIA

*A Nazaret, Daniela y Juan David quienes con su alegría y amor,
llenar de entusiasmo cada día,
Y con su recuerdo
duermo feliz todas las noches.*

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Sebastián Provenzano, por su apoyo incondicional y su disposición a ayudarme en mi mejoramiento profesional.

A la profesora Mary Vergara por depositar en mí su confianza y darme su apoyo a lo largo de estos años.

Al departamento de Ciencias Aplicadas de la Escuela Básica de la Facultad de Ingeniería por permitirme reencontrarme con mi carrera.

A la ilustre Universidad de los Andes, siempre contribuyendo en el desarrollo profesional y personal de su planta profesoral.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

RESUMEN

En este trabajo son desarrolladas las ecuaciones dinámicas de movimiento para un sistema manipulador móvil, haciendo uso de las ecuaciones de Gibbs-Appell. La cinemática impone en el modelo restricciones de tipo no holonómica, que son consideradas en el análisis, e incorporadas a las ecuaciones dinámicas. El mecanismo se basa en un vehículo tipo triciclo sobre el que se encuentra apoyado un brazo manipulador robótico tipo serial, cuyas juntas son de revolución. Se hace uso de dos notaciones para la transformación de las variables cinématicas, la notación de Sheth-Uicker y la mucha más difundida notación de Denavit-Hartenberg, para modelar la plataforma móvil y el brazo robótico, respectivamente.

Se desarrolla un algoritmo que permiten resolver el problema dinámico directo, de una manera bastante eficiente, a partir de acoplar algoritmos que se realizaron en investigaciones anteriores, pero que modelaban ambos componentes de manera independiente, la plataforma móvil o el brazo manipular por separado.

El algoritmo propuesto se desarrolla en MATLAB, y los resultados obtenidos son comparados para su validación con un modelo desarrollado en un programa comercial de simulación dinámica.

ABSTRACT

In this work the dynamics equation of movement for a mobile manipulator are developed. The derived centralized model is based on Gibbs-Appell equations. The imposed kinematic nonholonomic constraints are included and incorporated into the dynamics.

The mechanism consists in a mobile vehicle in which is joining a robot manipulator, which have only revolution pair. We used two notations, at first Sheth-Uicker notation was used for the mobile vehicle, and then Denavit-Hartenberg notation was used for the robot manipulator.

Algorithms to solve the forward dynamics problems of open chain robots are developed, in an efficient way. This algorithms are developed, based on others algorithms, which solve the dynamics problems, one for the mobile vehicle and the other one for the robot manipulator.

The proposed algorithm is developed in MATLAB R2008a. Then, the results are compared to validate it, with a model develop in commercial software in dynamics simulation.

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA	i
AGRADECIMIENTO	ii
RESUMEN	iii
ABSTRACT	iv
ÍNDICE	v
CAPÍTULO I	1
Introducción	2
Planteamiento del problema	3
Objetivos	5
Justificación	5
Organización de la tesis	6
CAPÍTULO II	7
Marco teórico	8
Dinámica de robots manipuladores móviles	8
Restricciones no holonómicas	13
Ecuaciones de Gibbs-Appell	13
Antecedentes	18
CAPÍTULO III	23
Simulación dinámica de un manipulador móvil	24
Parámetros del robot manipulador móvil	24
Asignación de los sistemas de coordenadas	25
Notación Sheth-Uicker	26
Punto instantáneo coincidente	28

Matrices de rotación en la notación Sheth-Uicker	29
Cinemática de la plataforma móvil	34
Cinemática del brazo manipulador	39
Dinámica de la plataforma móvil	40
Dinámica del brazo manipulador	43
Matriz de inercia	45
Vector bias	48
Algoritmo para resolver el problema dinámico inverso	49
Ejemplo de Aplicación	56
CAPÍTULO IV	66
Conclusiones	67
Recomendaciones	68
ANEXOS	69
Anexo 1. Notación y terminología	70
Anexo 2 Algebra matricial	74
Anexo 3 Parámetros del manipulador móvil	77
BIBLIOGRAFÍA	81

WWW.BDIGITAL.VE

CAPÍTULO I

Introducción

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

CAPÍTULO I

Introducción

La robótica ha tenido un desarrollo significativo en los últimos 40 años, gracias en gran parte a la evolución que también ha alcanzado la informática, lo que se ha visto reflejado en el creciente número de investigaciones realizadas en el área, así como en el desarrollo de cada vez más centros de investigación vinculados a la robótica.

El desarrollo de la robótica se ha extendido a todas sus áreas, teniendo especial énfasis en el estudio de las cadenas abiertas, realizándose gran número de investigaciones acerca del modelado de brazos robóticos [1].

Actualmente, en lo que respecta al modelado del comportamiento dinámico de un brazo robótico, el problema se enfoca en encontrar algoritmos que sean computacionalmente eficientes, por encima de buscar el principio mecánico que mejor se adecue al robot que se esté estudiando.

Por otro lado, en un principio los brazos robóticos, se consideraban que se encontraban siempre sobre una base fija o inmóvil; la necesidad de hacer manipulaciones en entornos de trabajo peligrosos, así como la de aumentar la maniobrabilidad de estos robots, generó la investigación y seguidamente la construcción de manipuladores móviles [2], por lo tanto los brazos robóticos ya no se encontraban siempre sobre bases fijas.

Esta consideración de bases móviles, permite a los manipuladores robóticos adentrarse a espacios de trabajo que son humanamente imposibles de acceder, además como es obvio, le permite al manipulador ampliar su campo de trabajo y prácticamente alcanzar cualquier punto de su entorno. Estas mejoras en el funcionamiento de los manipuladores robóticos, han provocado que recientemente se muestre considerable atención por el análisis de métodos que permitan resolver el modelado de robots móviles, especialmente cuando aparecen aceleraciones de tipo no holónoma [3].

Al respecto, se encuentra en la literatura estudios de manipuladores móviles, haciendo uso de los principios mecánicos más conocidos como el Newton-Euler, Lagrange-Euler [4, 5 y 6]. Sin embargo, como se ha observado a lo largo de gran número de investigaciones realizadas, cualquiera que sea el principio utilizado para

lograr un algoritmo computacional eficiente, ésta resulta en una complejidad semejante [7].

Un inconveniente que presentan algunos principios de la dinámica, es que no pueden modelar restricciones de tipo no holónomas, que como es sabido se encuentran frecuentemente en elementos que tienen partes rodantes, por lo que algunos investigadores que han utilizado principios como Newton-Euler o Lagrange-Euler, tomaron ciertas consideraciones para evitar este inconveniente, tal como resolver el manipulador móvil por una vía holonómica [5], o no considerar todas las restricciones del modelo [4 y 6].

Es aquí cuando son relevantes algunos principios de la dinámica, que no han sido tan ampliamente estudiados, como lo son las ecuaciones de Gibbs-Appell, o las relacionadas ecuaciones de Kane, pues ambas manejan de manera indistinta las restricciones holonómicas y las no holonómicas. Así, al estudiar un manipulador móvil a partir de las ecuaciones de Gibbs-Appell se evita el problema de no poder incluir las restricciones no holonómicas en el modelo.

Las ecuaciones de Gibbs-Appell, fueron desarrolladas de manera independiente por Gibbs (1879) y luego por Appell (1899). Son ecuaciones consideradas como uno de los más grandes avances de la mecánica analítica, se destacan por su simplicidad en como son desarrolladas y sobre todo porque incluyen indistintamente a cualquier restricción, sea de tipo holonómica o no holonómica. Además, estas ecuaciones parten de un principio que no está basado en la energía cinética.

Aunque se supone que el principio mecánico que se utilice, para el análisis de un sistema manipulador robótico móvil, no afectará la complejidad del modelo computacional que se desarrolle, al menos el uso de las ecuaciones de Gibbs-Appell, permitirá incluir restricciones no holonómicas, tan frecuentes en robots que tienen partes rodantes.

Planteamiento del Problema

La resolución de los problemas dinámicos de un modelo cualquiera, y en particular de manipuladores móviles, se clasifican en dos problemas distintos, el problema dinámico directo (PDD) y el problema dinámico inverso (PDI). El PDD es el problema en el que, conocidas las fuerzas o pares ejercidos en los actuadores de un manipulador, se quiere definir el movimiento obtenido, así como las velocidades y

aceleraciones resultantes. El PDI permite definir las fuerzas necesarias que deben ser aplicadas en el sistema para que este realice un movimiento específico.

El PDI tiene su aplicación a nivel industrial en que a partir de él, se pueden desarrollar sistemas de control para manipuladores robóticos. La importancia del PDI radica en que por medio de éste, se pueden realizar simulaciones de manipuladores robóticos. Ambos problemas presentan complicaciones generadas principalmente por la existencia de ecuaciones altamente no lineales.

A lo largo de los años se han desarrollado diversos procedimientos para resolver los dos problemas dinámicos explicados sobre los manipuladores robóticos, en principio los métodos utilizados conducían a algoritmos de formulación cerrada. Luego se lograron algoritmos de forma recursiva, a partir de principios como el de Newton-Euler o Lagrange-Euler. Procedimientos posteriores emplearon las ecuaciones de Kane y las de Gibbs-Appell, que permitieron adicionar de manera eficiente restricciones del tipo no holonómicas en los modelos.

De todas estas ecuaciones, las ecuaciones de Gibbs-Appell son las menos estudiadas, sin embargo, por la simplicidad implícita de las ecuaciones, es probable que se logre un menor número de operaciones aritméticas, en consecuencia, algoritmos que sean más fáciles de construir. Adicionalmente, las ecuaciones de Gibbs-Appell, por su naturaleza, permiten incluir restricciones al elemento terminal del manipulador sin necesidad de utilizar los multiplicadores de Lagrange.

Por otro lado, en los años recientes las computadoras han aumentado considerablemente la velocidad de funcionamiento, se pudiera pensar por esta afirmación que es irrelevante la búsqueda de algoritmos más veloces, no obstante, los sistemas mecánicos también han incrementado su velocidad, por lo que se ha exigido más eficiencia en los algoritmos desarrollados, para que puedan ir a la par de la velocidad de los sistemas mecánicos actuales.

De igual manera, otro aspecto que ha tomado mayor relevancia en los últimos años, se refiere a la estabilidad numérica que presentan los algoritmos desarrollados, y estudios realizados al respecto [8] han demostrado importantes diferencias entre algunos algoritmos conocidos.

El resolver el problema del modelado dinámico de un manipulador móvil, específicamente el problema de simulación, a partir de las ecuaciones de Gibbs-Appell, representa un importante aporte en el área, puesto que esto podría significar el encontrar un algoritmo bastante eficiente, en parte por la simplicidad de las ecuaciones de Gibbs-Appell. Además, el hecho de incluir restricciones holonómicas

de manera natural sin el uso de los multiplicadores de Lagrange, que provocan el aumento de la complejidad del modelo, podría generar resultados importantes.

Objetivos

El presente trabajo tiene por objetivo general desarrollar un algoritmo eficiente para simular el comportamiento dinámico de un robot manipulador móvil, haciendo uso de las ecuaciones de Gibbs-Appell. El robot está conformado por una base móvil sobre la que se encuentra un brazo robótico. Los brazos son considerados como barras rígidas unidas a partir de nodos de tipo revolución.

De manera específica en este trabajo también se investiga lo siguiente:

- Se proponen formulaciones para resolver el PDD de un manipulador móvil.
- Desarrollo de un algoritmo para simular el comportamiento dinámico de un manipulador móvil sometido a restricciones de tipo no holonómicas.

Justificación

El creciente desarrollo de la robótica, ha permitido la amplia difusión de manipuladores robóticos a nivel mundial, lo que ha conllevado al desarrollo de manipuladores más versátiles y más eficientes, entre otros aspectos, ha exigido el aumento de la velocidad de funcionamiento de estos robots industriales. Consecuentemente, se hace necesario que los algoritmos desarrollados para controlar estos robots sean cada vez más eficientes, rápidos y estables.

El desarrollo de algoritmos que se basen en principios que simulen de la manera menos compleja posible el comportamiento dinámico de un manipulador robótico, y que además incluyan de manera más completa todas las restricciones que se aplican al modelo, se hace totalmente imprescindible.

En la actualidad, se exige el desarrollo de algoritmos que sean lo más eficiente posible, desde el punto de vista de la estabilidad numérica, y de la rapidez del método.

Organización de la Tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2, se presenta una revisión de la literatura relacionada al área de estudio del presente trabajo, es decir, la dinámica de manipuladores robóticos móviles. También, en este capítulo, se presenta una explicación de las bases teóricas necesarias para la comprensión del presente trabajo.

En el capítulo 3, se desarrolla un algoritmo que permite resolver el problema de simulación dinámica del robot manipulador móvil, luego se presenta la resolución de dos ejemplos de aplicación, resueltos con el algoritmo desarrollado y comparados con una simulación del sistema robótico desarrollada en un programa comercial de simulación dinámica.

El capítulo 4 muestra las conclusiones a las que se llegó en este trabajo después del análisis realizado, así como también algunas sugerencias para trabajos futuros.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

CAPÍTULO II

Marco Teórico

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

CAPÍTULO II

Marco Teórico

Dinámica de robots manipuladores móviles:

El problema de resolver la dinámica de un robot, se refiere a encontrar las ecuaciones matemáticas que describan el comportamiento dinámico del robot, resultando frecuentemente en ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que son altamente no lineales.

Un manipulador robótico será un robot que está conformado por un conjunto de brazos unidos entre sí por pares o nudos; se considera que los brazos que lo conforman son totalmente rígidos, lo cual en un modelo real no es cierto, pero representa una muy buena aproximación, ya que los manipuladores robóticos reales son altamente rígidos. Por otro lado, los nudos que pueden ser prismáticos o de revolución, se consideran no flexibles y también se consigue una muy buena aproximación con respecto a los robots industriales. Ambas consideraciones conllevan a una gran simplificación del modelo, al que una vez formuladas las ecuaciones dinámicas que rigen su comportamiento, se le pueden adicionar los efectos que no se están considerando.

El manipulador robótico va colocado en un extremo a una plataforma, mientras que en el otro extremo lleva acoplada la herramienta que realizará la tarea asignada al robot.

La plataforma puede ser fija o móvil. En este caso, por tratarse de un manipulador robótico móvil, se entiende que esta plataforma puede moverse. Los estudios referidos a los manipuladores móviles comenzaron a desarrollarse recientemente, y se entiende como un brazo robótico que se encuentra sobre una plataforma móvil.

De esta manera, al combinar la plataforma móvil con el brazo manipulador, se aumentan las ventajas que tendría un sistema fijo [9]. Como ya se dijo, el hecho de permitir que la base sea móvil, aumenta el campo de trabajo del brazo manipulador; adicionalmente, los grados de libertad que la plataforma móvil le agrega al sistema, le permite al usuario ampliar las opciones para lograr un movimiento específico. Sin embargo, este incremento de los grados de libertad, produce un incremento en la complejidad del análisis del modelo que se está estudiando, además, al incluir la interacción entre la superficie y el manipulador robótico móvil, así como también al

considerar la presencia de restricciones no holónomas, la complejidad del sistema nuevamente se ve aumentada.

Otro problema importante en el modelado dinámico de manipuladores robóticos móviles, está relacionado con la redundancia cinemática del manipulador, tal y como expresa Blanco Rojas en [10]. Según lo explica Blanco en su tesis doctoral, la resolución de “la redundancia de sistemas móviles es la clave de la coordinación de los movimientos de la base móvil y el manipulador”.

Como es sabido, gran parte de los brazos manipuladores tienen seis grados de libertad, si a estos se le adiciona los grados de libertad de la base móvil, que pueden ser tres, dos de ellos especifican el desplazamiento de la base móvil y un tercer grado de libertad que indica la orientación del vehículo. Sabiendo además que generalmente el jacobiano de una base móvil no es cuadrado, siendo el rango de la matriz jacobiana menor que el número de incógnitas, provocando la redundancia cinemática y por lo tanto la solución del sistema no será única. El problema se convierte en un problema de optimización en el que hay que aprovechar al máximo los grados de libertad redundantes, para lograr una solución que se adecue mejor a determinados criterios que se han definido para la optimización.

Por otro lado, en cuanto a la aplicación que se tiene de los manipuladores robóticos móviles, podemos decir que actualmente la manipulación móvil es un tema de bastante interés, principalmente en campos como la exploración espacial, las operaciones militares, entre otros, aunque a nivel industrial la aplicación de manipuladores móviles no ha sido muy explotada. Probablemente uno de los factores que más influye en que en los ambientes industriales no haya difundido los manipuladores móviles en gran medida, es el hecho de que los espacios industriales se encuentran ampliamente definidos y por lo tanto requiere una gran inversión hacer el cambio a manipuladores móviles.

Otro aspecto destacable en la utilización de manipuladores robóticos móviles, está directamente relacionado con la planificación de la trayectoria que el robot móvil debe realizar, lo que incluye la ruta que el robot debe seguir, los inconvenientes generados por los obstáculos que pudieran existir y la existencia del contacto entre superficie y el sistema de locomoción del manipulador que puede generar grandes distorsiones en el control del movimiento del manipulador.

Al respecto existen estudios relacionados, con la planificación de la trayectoria de vehículos o robots móviles, como los explicados en [11]. Esto trae como consecuencia que los robots manipuladores móviles requieran de una serie de sensores que puedan especificar la posición del mismo en cierto instante, para así

definir los cambios que se deben hacer para corregir los errores inevitables en la trayectoria, que pueden ir desde sensores ópticos, hasta sistemas de posicionamiento global. Esto se traduce en un aumento de costos en la fabricación de los manipuladores robóticos móviles. No obstante, estas últimas líneas, queda claro que se relacionan con el proceso de control del manipulador móvil, que no es el tema que nos concierne en este trabajo, pero si es un tema que ha sido mayormente estudiado en relación a los manipuladores robóticos móviles.

En cuanto a lo que sí es el tema de estudio de este trabajo, en muchos de los estudios recientemente realizados, que corresponden al análisis de manipuladores robóticos móviles, se emplean con cierto énfasis métodos geométricos y modelos cinemáticos simplificados. Sin embargo, cuando en el análisis del manipulador se consideran velocidades altas, los aspectos dinámicos deben ser tomados en cuenta [11].

Como se ha detallado con anterioridad, en el presente trabajo será utilizado el principio de Gibbs-Appell, para desarrollar el modelado de un manipulador robótico móvil, siendo uno de los principios menos utilizados para la resolución de problemas de modelado dinámico, otros principios, como el de Newton-Euler, Lagrange-Euler han tenido mucha más difusión. Sin embargo, independiente del principio mecánico que se aplique para resolver el modelado dinámico de un sistema robótico cualquiera, la ecuación general que se vaya a emplear siempre tiene la misma forma:

$$\tau = D(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + C(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + J^T(\vec{q})\vec{F} \quad (2.1)$$

en donde τ es el vector de fuerzas y pares ejercidos en cada uno de los actuadores del sistema mecánico, D representa la matriz de inercia del sistema como una función de las coordenadas generalizadas del sistema, \vec{q} , $\dot{\vec{q}}$ y $\ddot{\vec{q}}$ son los vectores de posición, velocidad y aceleración de los nodos del sistema, respectivamente, C es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, J^T representa la matriz jacobiana del manipulador y \vec{F} es el vector de fuerzas externas aplicadas al sistema mecánico. La ecuación general presentada arriba, planteada de esta manera trata del PDI, puesto que así se determinan las fuerzas y momentos que deben ser ejercidos en los actuadores para lograr una configuración específica del sistema en estudio.

Cuando se resuelve el PDD, se debe expresar la ecuación de tal manera que las aceleraciones de los nodos sean determinados en función del resto de los parámetros (vector de fuerzas y pares ejercidos en los nodos, de fuerzas centrífugas y de Coriolis, fuerzas externas aplicadas, parámetros del manipulador, velocidades y

posiciones de los nodos). Posteriormente de un proceso de integración, se pueden determinar las velocidades y luego las posiciones del robot.

Esta expresión, se acostumbra representarla de la siguiente manera.

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \vec{\varphi}) \quad (2.2)$$

en donde el único elemento que aparece en esta expresión y que no está en la expresión 2.1 es el término $\vec{\varphi}$, conocido como el vector bias, y no es más que un vector que agrupa fuerzas centrífugas, gravitatorias y de coriolis.

Cabe acotar, que en este trabajo se utilizan coordenadas independientes para definir el comportamiento dinámico del sistema robótico, como se acostumbra en casi la totalidad de los estudios realizados en el área, logrando de esta manera que el modelo del sistema presente un número mínimo de ecuaciones. Se utiliza además la notación Denavit-Hartenberg (D-H) [12], debido a la ventajas que ofrece la aplicación de la misma, puesto que se pueden expresar las relaciones cinemáticas que hay entre las barras del robot, con un mínimo de parámetros. Sin embargo, la notación D-H ha sido muy utilizada, pero en los artículos en las que se encuentra su aplicación, normalmente no involucran partes rodantes como las planteadas en la presente investigación, para el manipulador móvil.

Básicamente, el inconveniente de aplicar la notación D-H en partes rodantes se produce por el tipo de par que existe en estos mecanismos móviles. Según se entiende, los pares inferiores son aquellos que se expresan como una función a partir de dos superficies en movimiento relativo, los pares superiores, a diferencia de los inferiores, son función, como es en el caso de una rueda de un robot móvil, de un punto de contacto ideal.

Puesto que las matrices de transformación de los manipuladores dependen de la posición y orientación de dos juntas sucesiva, la notación D-H conduce a una asignación ambigua de la matriz de transformación en cadenas cerradas múltiples tal como las que se encuentran en los manipuladores móviles [13]. Esta ambigüedad según afirma Muir, surge de la decisión del orden de las juntas cuando hay más de dos juntas en un solo par.

La notación definida según el criterio de Sheth-Uicker [14], es una notación desarrollada en el año 1972, y nace como una necesidad de obtener de manera sistemática los sistemas de coordenadas locales y sus consecuentes matrices de rotación, en mecanismos que involucran partes rodantes.

En función de lo anteriormente descrito, se sugiere como adecuado, utilizar ambas notaciones para la definición de los sistemas de coordenadas y de las inherentes matrices de transformación. Obviamente, el uso de las dos notaciones se hace por separado, es decir, que para la parte del mecanismo que se relacione con la plataforma móvil del robot se utilizará la notación de Sheth-Uicker, o sea, que el sistema de referencia global, mas el sistema de referencia de la plataforma móvil y de las ruedas del vehículo, seguirán la convención de Sheth-Uicker. A partir del punto de montaje del brazo manipulador en la plataforma móvil, hasta el punto de colocación del elemento terminal, es conveniente el uso de la notación de Denavit-Hartenberg, por su simplicidad en la definición de los sistemas de referencia y matrices de transformación, en especial para mecanismos con pares inferiores (de revolución y prismáticos).

Finalmente, cabe destacar como se explica en [11], que la orientación y posición del manipulador robótico móvil, se puede definir tomando en cuenta, en primer lugar la posición del brazo robótico con respecto a un sistema de coordenada fijado sobre la plataforma móvil, que según hemos afirmado, seguirá la notación Denavit-Hartenberg. Seguidamente, se debe considerar el desplazamiento de la plataforma tomando como referencia un sistema de coordenada global que está fijado a la superficie por donde se desliza la plataforma, utilizando la notación Sheth-Uicker. De esta manera, el movimiento general del sistema es la suma de la configuración que alcanza el brazo manipulador con respecto a la plataforma, más la configuración que consigue la plataforma con respecto a la superficie sobre la que se desliza. Es así como en la mayoría de las investigaciones se plantea el problema de posición y orientación del manipulador móvil, siendo responsabilidad de la plataforma la posición del manipulador móvil, el brazo robótico se encarga de la orientación del elemento terminal, así cada movimiento se desarrolla de manera independiente; primero la posición de la plataforma y luego la orientación del brazo.

Otros autores en cambio, prefieren hacer el estudio del sistema por completo, mezclando las ecuaciones de la plataforma y del manipulador en un sólo sistema, tal como en [2]. Sin embargo, son pocos los que analizan el problema de manera integral como un manipulador móvil encargado de posicionar y orientar el elemento terminal. Según Blanco [10], esto haría que el sistema ofrezca una solución mucho más robusta al combinar las dos capacidades de desplazamiento y orientación, aunque se complique el análisis por el aumento de los grados de libertad del sistema.

Restricciones no holónomas:

Cuando en un sistema mecánico, una restricción definida, aunque sea como una restricción de velocidad, se puede llegar a expresar de la manera de ecuación de restricción geométrica, esta restricción se denomina *holónoma*. En cambio, cuando en un sistema no se pueden definir una restricción, como restricción de tipo geométrica, a partir de la restricción de velocidad, debido a que esta no puede ser integrada, esta restricción se denomina *no holónoma*.

En un sistema mecánico en donde las restricciones pueden ser satisfechas a partir de las velocidades generalizadas del sistema y esta condición no puede ser expresada por su condición equivalente a partir de las coordenadas de posición generalizadas, se dice que se trata de un sistema no holónomo [15]. Las restricciones no holónomas, normalmente se encuentran en sistemas en donde existen partes rodantes, así como también a partir de la conservación de momento angular, entre otros.

En general, las restricciones de un sistema mecánico pueden ser expresadas como una función de las coordenadas generalizadas y del tiempo, es decir:

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad (2.3)$$

donde i es el número de ecuaciones de restricción impuestas al sistema y n es el número de coordenadas generalizadas. Al determinar la derivada parcial de la ecuación anterior, el resultado conduce a lo siguiente:

$$\dot{f}_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_j} f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad (2.4)$$

La primera de las dos ecuaciones, se expresa como una ecuación de restricción geométrica o de configuración, más la segunda ecuación de restricción, se conoce como restricción de velocidad.

Ecuaciones de Gibbs-Appell:

Las ecuaciones de Gibbs-Appell son unas ecuaciones de la mecánica analítica, que fueron desarrolladas por el norteamericano Josiah Willard Gibbs en el año 1879 y luego redescubiertas por el francés Paul Emile Appell en el año 1899 de manera independiente. En un estudio realizado por Vega, en el año 1983 [16], asegura que el estudio de Gibbs es mucho más profundo que el desarrollado por Appell, e incluso

asevera que uno de los más graves errores de Appell, fue el no mencionar la fuente de su investigación. Según el autor en la investigación de Appell, se debió referir a la investigación de Gibbs, a pesar de que Appell en ningún momento afirma que lo hubiese hecho.

La mayoría de los expertos en el área afirma que estas ecuaciones representan uno de los más grandes avances en lo que se refiere a la mecánica analítica, siendo que parten de un principio diferente al de la mayoría de los principios mecánicos, que es el de no definirse a través de la energía cinética del sistema. Mientras en las ecuaciones de Lagrange, las fuerzas de inercia generalizadas son funciones cuadráticas de las velocidades, es decir, son expresadas en términos de la energía cinética, en las ecuaciones de Gibbs-Appell las fuerzas de inercia generalizadas son expresadas en términos cuadráticos de la aceleración [17], lo que se conoce en la literatura como energía de la aceleración.

Adicionalmente, presentan la gran ventaja que puede incluir indistintamente las restricciones holónomas y las no holónomas, siendo esta una de sus más grandes virtudes. Sin embargo, su estudio ha sido muy escasamente difundido, e incluso en muchos textos básicos de la mecánica, apenas se comentan y en algunos casos no se nombran.

Otra punto relevante de las ecuaciones de Gibbs-Appell, es la manera como son definidas, pues se considera que es una de las formas más simples y comprensivas de las ecuaciones de movimiento descubiertas [1], aunque la aplicación de estas ecuaciones en muchos problemas sencillos de la mecánica, normalmente requiere de bastante análisis [18], quizás sea por esto que son tan poco utilizadas.

Ahora estas ecuaciones han sido definidas a partir de distintos criterios. En este trabajo las ecuaciones de Gibbs-Appell serán definidas a partir del teorema de los trabajos virtuales, como se propone por Shabana [17].

Como se define a partir del teorema del trabajo virtual, las fuerzas de inercia generalizadas de un cuerpo rígido generan un trabajo virtual (iW_i) que se define a partir de la siguiente ecuación:

$$\delta {}^iW_i = \int_{V_i} \rho_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \delta \mathbf{r}_i dV_i \quad (2.5)$$

en donde ρ_i es la densidad del cuerpo rígido y V_i es su volumen. El vector \mathbf{r}_i es el vector de posición global de un punto arbitrario del cuerpo rígido, que puede ser expresado en función de las coordenadas generalizadas y del tiempo:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \quad (2.6)$$

que al ser derivado

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (2.7)$$

el diferencial del tiempo desaparece por tratarse de desplazamientos virtuales en donde el tiempo no cambia.

Luego, sustituyendo (2.7) en (2.5) se obtiene

$$\delta {}^i W_i = \int_{V_i} \rho_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} dV_i \quad (2.8)$$

en donde

$${}^i Q_i = \int_{V_i} \rho_i \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{q}} \ddot{\mathbf{r}}_i dV_i \quad (2.9)$$

se define como el vector de fuerzas de inercia generalizadas (${}^i Q_i$) del cuerpo i asociados con las coordenadas generalizadas del sistema.

Por otra parte, el vector de velocidad absoluta de un punto arbitrario en un cuerpo rígido es definido, así:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \\ \dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.10)$$

de donde se puede deducir

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.11)$$

y por un procedimiento semejante, también se deduce

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.12)$$

al sustituir (2.12) en (2.9) se obtiene la siguiente ecuación:

$${}^i Q_i = \int_{V_i} \rho_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{r}}_i dV_i \quad (2.13)$$

que se puede desarrollar de la siguiente manera

$${}^i Q_i = \int_{V_i} \rho_i \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i \right) \right]^T dV_i \quad (2.14)$$

de aquí se puede extraer la función S que se conoce como la función de Gibbs, la misma es una cantidad escalar, que queda configurada de la siguiente manera:

$$S_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i dV_i \quad (2.15)$$

Luego a partir de esta ecuación, se puede determinar el vector de fuerzas generalizadas del cuerpo i asociadas con las coordenadas generalizadas, con la ayuda de la siguiente ecuación

$${}^i Q_i = \frac{\partial S_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.16)$$

de esta manera queda definida la ecuación de Gibbs-Appell.

Cuando se trata de varios elementos que conforman un sistema mecánico multicuerpo, la ecuación involucra otros parámetros, relacionados con la rotación de los elementos. Para definir la ecuación de Gibbs-Appell para un cuerpo rígido que no sea una partícula, nos basaremos en un procedimiento que explica Provenzano [1] en su tesis de doctorado.

En primer lugar, definimos la función de Gibbs para un cuerpo rígido compuesto por n partículas en un sistema referencial de inercia [1]:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 \quad (2.17)$$

donde m_k es la masa de la partícula y $\dot{\mathbf{r}}_k$ es la aceleración de la partícula. Luego, se puede desglosar la función de Gibbs como la suma de dos términos expresados en coordenadas cartesianas, el primero vinculado a la aceleración lineal del cuerpo rígido y el segundo vinculado a su aceleración angular.

$$S = S_t + S_r \quad (2.18)$$

la contribución del cuerpo rígido a la función de Gibbs debido a su traslación será:

$$S_t = \frac{1}{2} m (\ddot{\mathbf{r}}_G)^T \ddot{\mathbf{r}}_G \quad (2.19)$$

donde $\ddot{\mathbf{r}}_G$ es la aceleración del centro de masas del cuerpo rígido. Mientras que la contribución del cuerpo rígido debido a su rotación, es

$$S_r = \frac{1}{2} m \iiint (\ddot{\mathbf{r}})^T \ddot{\mathbf{r}} dm \quad (2.20)$$

donde $\ddot{\mathbf{r}}$ es la aceleración lineal de cualquier punto del cuerpo rígido de masa dm , y es debida al movimiento de rotación del cuerpo con respecto a su centro de masas:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}_{0,i} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{0,i}) \quad (2.21)$$

donde $\vec{\omega}$ y $\dot{\vec{\omega}}$ son los vectores de velocidad y aceleración angular del cuerpo rígido, $\vec{r}_{0,i}$ el vector posición de la partícula con respecto al centro de masas.

Desarrollando la ecuación anterior se tiene para la componente x lo siguiente:

$$\ddot{r}_i^x = -r_{0,i}^x (\omega_y^2 + \omega_z^2) + r_{0,i}^y (\omega_x \omega_y + \dot{\omega}_z) + r_{0,i}^z (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) \quad (2.22)$$

Luego, la ecuación (2.22) se sustituye en la ecuación (2.20) y además se identifican términos que coinciden con la definición del tensor de inercia del cuerpo rígido:

$$\begin{aligned} S_r = & \frac{1}{2} I_{xx} \dot{\omega}_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \dot{\omega}_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \dot{\omega}_z^2 - \\ & -(I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \dot{\omega}_x - (I_{zz} - I_{xx}) \omega_x \omega_z \dot{\omega}_y - (I_{xx} - I_{yy}) \omega_x \omega_y \dot{\omega}_z + \\ & + I_{xy} (\omega_y^2 \dot{\omega}_z - \omega_x^2 \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_z \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z \dot{\omega}_y - \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y) + \\ & + I_{xz} (\omega_x^2 \dot{\omega}_y - \omega_z^2 \dot{\omega}_y + \omega_y \omega_z \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y \dot{\omega}_x - \dot{\omega}_x \dot{\omega}_z) + \\ & + I_{yz} (\omega_z^2 \dot{\omega}_x - \omega_y^2 \dot{\omega}_x + \omega_x \omega_y \dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z \dot{\omega}_z - \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z) + f(\vec{\omega}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Que escrita de manera matricial resulta así:

$$S_r = \frac{1}{2} (\dot{\vec{\omega}})^T I_G \dot{\vec{\omega}} + (\dot{\vec{\omega}})^T (\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} I_G) + f(\vec{\omega}) \quad (2.24)$$

de la ecuación anterior podemos eliminar los términos que son función de la velocidad angular $f(\vec{\omega})$, puesto que son irrelevantes, ya que la función de Gibbs debe ser derivada respecto de las aceleraciones generalizadas, para así determinar el valor del vector de fuerzas generalizadas, como se explicó en la ecuación (2.16).

Licencia Creative Commons:

En conclusión la función de Gibbs, en función de variables expresadas en coordenada cartesianas, para un sistema mecánico que está conformado por n cuerpos rígidos, queda expresada de la siguiente manera:

$$S = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i (\ddot{r}_{G_i})^T \ddot{r}_{G_i} + \frac{1}{2} (\dot{\vec{\omega}}_i)^T I_{G_i} \dot{\vec{\omega}}_i + (\dot{\vec{\omega}}_i)^T (\vec{\omega}_i \wedge I_{G_i} \vec{\omega}_i) \right] \quad (2.25)$$

Antecedentes

El campo de la robótica ha sido un campo ampliamente estudiado, a pesar de que su estudio se remonta hasta aproximadamente sólo unas cuatro décadas atrás, y donde la mayoría de los artículos se enfocan en los manipuladores fijos, debido a su amplia aplicación en ambientes industriales.

Entre las primeras investigaciones se encuentra un trabajo realizado por Uicker en el año 1965 [19], en donde se determinaron ecuaciones que modelaban el movimiento de unos mecanismos especiales, haciendo uso de las ecuaciones de Lagrange y de matrices de transformación homogéneas.

Por su parte, el estudio de robots manipuladores móviles es más reciente y se observan investigaciones desde hace alrededor de dos décadas. Quizás, esto se debe a que probablemente los primeros manipuladores que se conocen fueron los utilizados en los desastres nucleares de “Three Mile Island” en 1979 y “Chernobyl” en 1986 [10]. Sin embargo, entre los primeros trabajos importantes que se observan en el área específica, se destaca el trabajo realizado Muir y Neuman [13] en el año 1986, donde desarrollan el modelo cinemático para un robot móvil con ruedas. En este trabajo, se utiliza la notación de Sheth-Uicker para modelar cinemáticamente seis modelos diferentes de robots móviles con ruedas, que van desde las ruedas convencionales hasta las omnidireccionales o tipo bola. Se incluye entre los modelos analizados, un triciclo semejante al utilizado en el trabajo actual.

Otra investigación que se destaca es la realizada por Yamamoto [20] en 1992, se realiza el estudio de un manipulador móvil, en donde básicamente se planifica el movimiento de la plataforma móvil, para que alcance una posición que le permite al brazo manipulador realizar una actividad específica, el análisis se basa en las ecuaciones de Lagrange. Luego el mismo autor, en 1994, desarrolla un trabajo más profundo en el que analiza el manipulador móvil, haciendo una coordinación eficiente entre el movimiento del manipulador y el desplazamiento de la plataforma móvil sobre la que se apoya el manipulador [6].

En 1995 Chen y Zalzal [4] utilizan el principio de Newton-Euler, para obtener la dinámica completa de un robot manipulador móvil, con una restricción no holónoma, obteniendo trayectorias bastante eficientes tanto para la plataforma, como para las juntas del manipulador, a partir de algoritmos eficientes.

En 1997, Desai y Kuar [21], estudian dos robots manipuladores móviles cooperantes, que manejan un objeto en común. Desarrollaron cálculos que permiten obtener trayectorias óptimas, así como definir las fuerzas y torques aplicadas en los actuadores, para conseguir maniobras en presencia de obstáculos. Se incluyeron en el análisis restricciones del tipo no holónoma en velocidad.

Tanner (1998) [2], realizó un estudio en donde desarrolla las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento de manipuladores móviles que trabajan en cooperación manipulando un objeto deformable, basados en las relacionadas ecuaciones de Kane. En el análisis se incluyen restricciones cinemáticas no holónomas e incorporadas en la dinámica del sistema.

Más recientemente encontramos una serie de investigaciones sobre manipuladores móviles, pero como se observa en la mayor parte de ellas, están orientadas fundamentalmente a realizar análisis de control de los mecanismos, sin que sea la parte más relevante las ecuaciones dinámicas que serán empleadas.

Por ejemplo, en el año 2003, Bayle y colegas [22] proponen un modelado sistemático de un manipulador móvil no holónomo conformado por un brazo robótico montado sobre una plataforma móvil con ruedas. Con ese modelo generaron una definición estándar de maniobrabilidad para el caso de manipuladores móviles. En su investigación fueron desarrolladas varias aplicaciones, particularmente como ellos lo afirman, relacionadas con el control del sistema robótico.

No obstante en el año 2002 Yu y Chen [23], presentan un enfoque general para el estudio dinámico de sistema manipulador móvil sometido a restricciones de tipo no holónomas. En este artículo se estudia un robot compuesto por un manipulador serial con múltiples grados de libertad, que se encuentra montado sobre una plataforma móvil con ruedas autónomas. Se emplea una formulación de tipo ascendente recursiva para obtener la ecuación que describe el movimiento del sistema manipulador móvil, en donde se utiliza completamente las ecuaciones de movimiento existentes tanto en el manipulador robótico como en la plataforma móvil. En esta investigación también se pueden observar los términos que representan la interacción entre la plataforma móvil y el manipulador robótico.

En 2009 Yang y colegas [24] realizan un estudio de la cinemática y de la dinámica de un robot de 7 grados de libertad, consistente de una base móvil de dos grados de libertad definido como un sistema de suspensión elástica lineal, y un manipulador flexible de 5 grados de libertad.

El modelo para el sistema dinámico del manipulador móvil con ruedas fue derivado en términos de un sistema de coordenadas cartesianas, y para su estudio los autores se basaron tanto en las ecuaciones dinámicas de Lagrange como en las ecuaciones de Newton-Euler, siendo un planteamiento de tipo matricial. Aquí también se incluyó en el modelo la interacción entre la base y el manipulador que conforman el robot, que vienen de la deformación elástica del manipulador y del movimiento del sistema de suspensión. Destaca la suposición de considerar que el sistema mecánico en estudio se desplaza a una velocidad constante, y además, el vehículo se mueve sobre una superficie irregular que puede ser descrita a partir de una curva sinusoidal.

También en 2009 Moosavian y colegas [25], realizan una investigación semejante a la de Yang y colegas [24], estudiando el diseño cinemático y el modelado dinámico para un robot móvil con ruedas sobre el que se monta un serial paralelo. El propósito desde el punto de vista de la cinemática es realizar un movimiento estable, cuando el manipulador maneja objetos pesados. Adicionalmente en este trabajo, Moosavian y colegas utilizan un sistema de ruedas diferenciales para mover la plataforma. También se basa en las ecuaciones de Lagrange y en las de Newton-Euler para resolver el problema.

Por su parte en lo que a las ecuaciones de Gibbs-Appell (G-A) se refiere, no se encuentran muchas investigaciones referentes a las ecuaciones, aunque ya ha pasado más de un siglo desde su descubrimiento.

Pudiéramos inferir que la dificultad que presentan estas ecuaciones, para ser analizado un mecanismo cualquiera, ha contribuido al escaso estudio de las mismas, de hecho las primeras investigaciones importantes que se reportan sobre las ecuaciones de Gibbs-Appell, datan de finales de los años 80, cuando Desloge [26] publica investigaciones en las que resalta la facilidad con que las ecuaciones de G-A manejan la dinámica de los sistemas mecánicos, pero principalmente llama la atención porque en sus investigaciones señala que las ecuaciones de Kane se relacionan mucho con las de G-A. Esta afirmación atrajo la atención de algunos investigadores que quizás trataban de verificar la validez de las ecuaciones de Kane [27, 28, 29] llegando a conclusiones semejantes, en que las ecuaciones de G-A y las de Kane tenían mucho en común.

Entre estas primeras investigaciones, también se encuentran algunas que no las relacionan con las ecuaciones de Kane, como por ejemplo en 1987, Papastravridis [30] analizó, las que llamó como la ecuación de Appell (como usualmente se refieren algunos investigadores de la Europa Oriental), para derivar de una manera vectorial la ecuación general de Appell de movimiento, luego a partir de estas ecuaciones, determinar la reacción generadas por las restricciones en un problema linealmente no holónomo.

En 1998 Udwadia y Kalaba [31] desarrollaron unas ecuaciones que denominaron las ecuaciones de Gibbs-Appell explícitas. En este artículo, los autores desarrollan una forma extendida de las ecuaciones de Gibbs-Appell y mostraron su equivalencia con la forma inversa generalizada de la ecuación de movimiento.

Provenzano (2001) [1], utilizó las ecuaciones de Gibbs-Appell para modelar un robot manipulador fijo. Se incluyeron en los modelos, restricciones en el elemento terminal del manipulador, incluso el análisis de robots cooperantes y adicionalmente se propusieron procedimientos para incluir restricciones holónomas y no holónomas en el elemento terminal. En el modelado se logró encontrar algoritmos altamente eficientes, de hecho, uno de los algoritmos desarrollados, fue realizado bajo notación tensorial, lo que lo convierte en uno de los algoritmos más eficientes conocidos hasta el momento.

Luego en el año 2003 Martinenko [3], estudia el movimiento de un vehículo tipo Ackerman que consta de dos pares de ruedas, analizado en distintas situaciones, para lo cual utilizó las ecuaciones de Gibbs-Appell. En algunos casos la solución hallada fue la exacta, en cambio en otras se utilizó un método de promedios para describir el comportamiento. Su trabajo realiza el análisis considerando restricciones no holónomas.

Los problemas dinámicos directos e inversos son abordados por diferentes autores. Mata en 2002 [32], resuelve el problema dinámico inverso a partir de dos algoritmos basados en las ecuaciones de Gibbs-Appell. Ambos algoritmos son desarrollados usando principalmente variables vectoriales, y expresados en forma recursiva.

En 2007 Díaz [33] propone una formulación sistemática para resolver el problema dinámico directo de robots paralelos, haciendo uso de la ecuación de Gibbs-Appell explícita, desarrollada por Udwadia y Kalaba. Díaz convierte el sistema mecánico restringido en un sistema conformado por cadenas abiertas para determinar la resolución del problema dinámico directo.

Ese mismo año, Kuleshov [34] realiza un modelo matemático para un *skateboard* con un grado de libertad por medio de las ecuaciones de Gibbs-Appell, analiza la estabilidad del movimiento del *skateboard* asumiendo que el conductor no controla el vehículo, considera que el *skateboard* se encuentra sometido a restricciones de tipo holónomas.

Las ecuaciones de Gibbs-Appell son nuevamente utilizadas, para estimar parámetros dinámicos en robots manipuladores, por Benimeli [35] en 2008. En esta tesis se determinan los parámetros dinámicos tanto de manera teórica como experimental, además se aborda el tema de la generación de trayectorias optimizadas del manipulador.

Freire en 2008 [36] determina los voltajes que se deben aplicar a los motores colocados en las ruedas de un robot móvil para que describa un movimiento específico. El modelo desde el punto de vista mecánico se basa en las ecuaciones de Gibbs-Appell, desarrolladas en trabajos anteriores [3].

Otro estudio realizado sobre el comportamiento cinemático y dinámico de robots móviles, se observa en Campion y otros [37]. Este estudio muestra, que de acuerdo a la estructura genérica de las ecuaciones del modelo, se pueden clasificar en diferentes tipos, de cada uno de los cuales surgen preguntas relacionadas con la no holonomía, movilidad y control, configuración de motorización entre otras.

Ríos y Bueno (2008) realizan el modelo matemático de un robot móvil [38], representado por un vehículo de dos ruedas con tracción diferencial, sin considerar restricciones no holónomas. El modelo hace más énfasis en la cinemática del robot que en la dinámica, además incluye aspectos eléctricos del robot. El modelo incluso involucra elementos como los motores de las ruedas, encoder, entre otros.

En cuanto a la planificación de la trayectoria de vehículos robóticos se encuentra una gama importante de estudios, entre los que se destacan, Blanco [10], Gómez Bravo [39], Aníbal Ollero [11].

Hongliang Yuan (1998) [40], presenta un control de sistemas no holónomos, donde asegura que la mayoría de estos sistemas pueden ser transformados en forma de cadena, la cual es considerada una forma canónica de los sistemas no holónomos. En estos trabajos se estudió el problema del continuo control de retroalimentación de los sistemas de cadenas, entonces consideran la aplicación de la planeación de movimiento óptimo y de control dinámico de un vehículo submarino autónomo no holónimo.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

CAPÍTULO III

Simulación Dinámica de un Manipulador Móvil

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

CAPÍTULO III

Simulación dinámica de un manipulador móvil

En el capítulo anterior se definió la ecuación general de Gibbs-Appell para resolver el problema dinámico en cualquier sistema mecánico, esta ecuación, sin embargo, se encuentra de una forma que no resulta práctica para la resolución de algún problema específico, mucho menos para la simulación del sistema mecánico.

En el presente capítulo se plantea la simulación dinámica de un manipulador móvil, es decir, la resolución del problema dinámico directo de un manipulador móvil, por medio de las ecuaciones de Gibbs-Appell; en este capítulo, a diferencia del capítulo anterior, la ecuación de Gibbs-Appell será desarrollada de tal manera que resulte conveniente para el análisis del caso que particularmente se está estudiando. En la primera parte del capítulo se definen los parámetros generales del manipulador móvil, tales como el tipo de manipulador, el sistema empleado para la maniobrabilidad del vehículo entre otros, luego se especifica la manera como se emplearán los sistemas de coordenadas que se utilizarán en el modelo completo, basados en las notaciones anteriormente nombradas. Seguidamente se resuelve el problema cinemático del manipulador móvil y finalmente se resuelve el problema dinámico. Se propone al final del capítulo un algoritmo que resuelve el problema dinámico directo y se muestra un ejemplo de aplicación resuelto con el algoritmo propuesto.

Parámetros del robot manipulador móvil:

Un robot móvil, cuando está compuesto por ruedas, se puede definir como un robot que es capaz de moverse en una superficie por medio del conjunto de ruedas ensambladas en el robot y que tienen contacto con la superficie. El sistema que se estudia en esta tesis, presenta sobre la plataforma móvil, un brazo manipulador robótico con seis grados de libertad.

La plataforma móvil que se propone para el manipulador móvil, se trata de un vehículo tipo triciclo, que como se observa en la literatura del área, también pudiera representar al modelo de un vehículo tipo Ackerman, pues, con ciertas consideraciones de tipo geométrico, los vehículos tipo Ackerman se pueden modelar como si se trataran de un triciclo. Este triciclo está compuesto por tres ruedas convencionales centradas, siendo una sola de ellas direccionable y las otras dos fijas.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Adicionalmente, para el análisis de la parte móvil del robot se deben asumir ciertas consideraciones, que se observan casi de manera invariable en las investigaciones en las que se analizan robots móviles y que se describen a continuación:

Al igual que ocurre con el manipulador, la plataforma móvil del robot se considera totalmente rígida, no existen partes flexibles en la plataforma móvil, incluyendo las ruedas.

También se supone que en cada una de las ruedas existe como máximo un actuador que le permite direccionar la rueda con respecto al resto del vehículo y que actúa siempre en la dirección perpendicular a la superficie. En el caso del triciclo la rueda delantera es la única direccionable y las dos ruedas traseras son fijas.

Operacionalmente, los vehículos se desplazan sobre una superficie plana, y en este caso particular, se considera que está orientada de manera horizontal. A su vez, las ruedas no presentan un deslizamiento con respecto al piso en la dirección de avance de la rueda. Tampoco desliza en la dirección perpendicular a la rueda, es decir, en la misma dirección del eje de la rueda, por lo tanto no existe derrapamiento de ninguna rueda; esta condición puede ser eliminada cuando la rueda se considera omnidireccional.

En cuanto a la otra parte del robot, que es la que se encuentra sobre la plataforma móvil, se ubica allí un manipulador de seis grados de libertad, formado por barras rígidas continuas e interconectadas entre sí, por medio de pares de revolución. Este manipulador puede llevar en su elemento terminal una herramienta que ejecuta algún trabajo específico, pero que no se considera en la presente tesis.

Con esta idea preliminar del tipo de manipulador robótico móvil que es el empleado en esta investigación, se procede a hacer una descripción de la notación utilizada para definir los sistemas de coordenadas.

Asignación de los sistemas de coordenadas:

Como se estableció en el capítulo anterior, en el manipulador móvil, se emplea la notación Sheth-Uicker para la plataforma móvil del robot y Denavit-Hartenberg para el brazo manipulador robótico, para definir los sistemas de coordenadas locales, así como las respectivas matrices de transformación.

La razón de utilizar estas dos notaciones se debe, como se comentó con anterioridad, al hecho de que para robots móviles se hace conveniente el uso de la notación Sheth-Uicker, por las razones descritas. No obstante, la notación Denavit-Hartenberg resulta muy ventajosa por la utilización mínima de parámetros que requiere, y por la facilidad para ser modeladas, consecuentemente. Para el brazo manipulador se utiliza la notación D-H por encima de la S-U, logrando una utilización adecuada de las notaciones disponibles.

En este capítulo se dará un explicación de cómo se implementa la notación de Sheth-Uicker, debido a que la misma ha sido muy poco difundida y se hace pertinente su explicación, en cuanto a la notación Denavit-Hartenberg que es mucho más conocida, su implementación es mostrada en los anexos al final de este libro.

Notación Sheth-Uicker.

En principio, siguiendo la metodología empleada por Sheth-Uicker, tal y como se propone en Muir [13], se debe definir un sistema de coordenadas fijo a la superficie por donde se desplaza el vehículo $\{F\}$, este sistema representa el sistema de coordenadas global y no presenta ningún tipo de desplazamiento ni rotación, el eje z del sistema global se encuentra perpendicular a la superficie de desplazamiento.

Seguidamente, se define un sistema de coordenadas solidario a la plataforma móvil $\{R\}$, en el que su origen se ubica en un punto específico del vehículo, que en el caso del triciclo, se ubica en la parte central del eje trasero del vehículo. La dirección del eje z es paralela a la del sistema de coordenadas global, el eje x de este sistema mantiene la dirección del eje longitudinal del vehículo. Este segundo sistema de referencia rota de acuerdo a la rotación que sufra el vehículo completo.

El siguiente sistema de referencia corresponde al punto en donde se encuentra la articulación de direccionamiento de la rueda con respecto a la plataforma $\{H\}$, es decir, que en el caso del triciclo, existirán tres ejes de este tipo $\{H_1, H_2 \text{ y } H_3\}$. Este sistema de referencia se encuentra fijo al cuerpo del robot móvil y no presenta rotación con respecto al sistema de referencia anterior. Su eje z coincide con la dirección del eje de la articulación de direccionamiento de cada rueda.

En este mismo punto se encuentra otro sistema de referencia $\{S\}$, el mismo se diferencia del anterior en cuanto a que la dirección del eje x coincide con la dirección de la rueda a la que corresponda el sistema. En consecuencia el sistema nuevo rota con respecto al sistema de referencia anterior, siempre alrededor del eje z , pues estos

dos sistemas tienen sus ejes z coincidentes y también tienen sus orígenes coincidentes. Nuevamente, estos son múltiples sistemas de referencia, es decir, que existen tantos sistemas de referencia como ruedas presente el vehículo $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. Para el triciclo, el sistema $\{S\}$ de la rueda orientable, sí rota con respecto al anterior, mientras que para las ruedas fijas, los sistemas de referencia $\{H\}$ y $\{S\}$ son idénticos, por lo que la matriz de transformación es igual a la matriz identidad.

El último sistema de referencia que involucra a la parte móvil del robot se relaciona con la rueda $\{C\}$. Este sistema de referencia tiene su origen en el punto de contacto entre la rueda y la superficie de desplazamiento y su eje z es perpendicular a la superficie de desplazamiento del vehículo. Su eje x sigue la orientación de la rueda. En las ruedas fijas el sistema de referencia $\{C\}$ es paralelo a los dos sistemas de referencia anteriores $\{H\}$ y $\{S\}$, es decir, que para una rueda fija los tres últimos sistemas de referencia son casi idénticos. En el triciclo todos los sistemas de referencia mantienen sus ejes z paralelos entre sí.

En definitiva resulta $2+3N$ sistemas de referencia, en donde N es el número de ruedas que posee el robot.

La figura 3.1 muestra la asignación de coordenadas de un robot móvil genérico. A la izquierda se muestra una representación isométrica y en el lado derecho se observa el robot visto desde la parte superior.

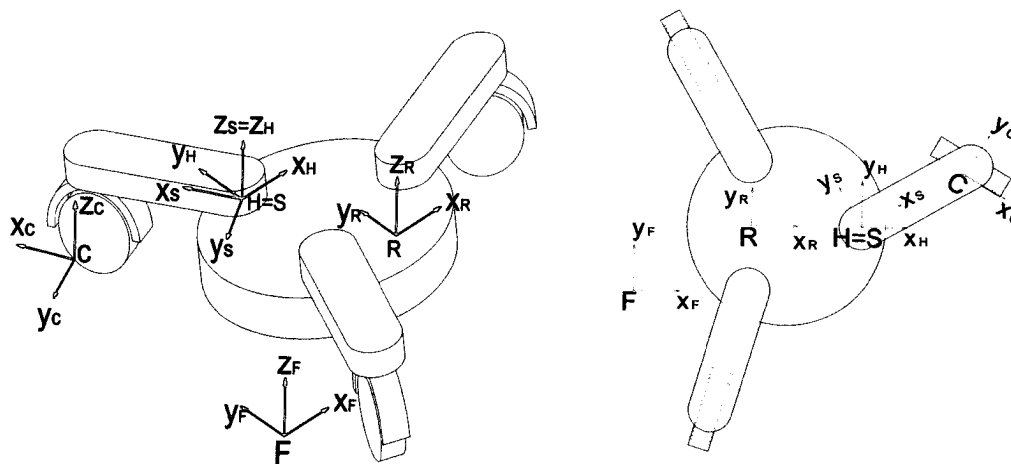


Figura 3.1. Asignación de coordenadas según la notación Sheth-Uicker.

Adicionalmente, la notación Sheth-Uicker requiere definir dos sistemas de referencia que están relacionados con la posición instantánea del robot, y que están fijos con respecto al sistema de coordenadas global. Estos dos sistemas se colocan,

uno en una posición y orientación correspondiente a la posición y orientación del sistema de referencia del cuerpo del robot $\{R\}$, y el otro coincidiendo con el sistema de referencia del punto de contacto de la rueda con la superficie $\{C\}$.

Los dos sistemas adicionales no son relevantes para determinar la posición de los elementos del robot respecto del sistema global, pero son vitales para relacionar las velocidades y las aceleraciones de los diferentes elementos del robot móvil con respecto al sistema global.

Para poder comprender su utilidad, es necesario definir un concepto que es la base de estos dos nuevos sistemas, el concepto de los puntos instantáneos coincidentes.

Punto instantáneo coincidente.

Un punto instantáneo coincidente tiene importancia cuando transcurre un diferencial de tiempo, de allí que sea relevante para el cálculo de velocidades y aceleraciones.

En un primer instante el punto instantáneo coincidente se encuentra en el sitio en donde está el origen del sistema de coordenadas del robot. En ese punto instantáneo se define un sistema de referencia que también es instantáneo, por lo que los ejes y orientaciones entre ambos sistemas son los mismos. Por ejemplo, en el origen del sistema de referencia $\{R\}$, se define un punto instantáneo coincidente; en ese momento se genera un nuevo sistema de referencia $\{\bar{R}\}$.

Al instante siguiente el punto instantáneo coincidente sigue en la misma posición, puesto que se supone que este sistema está solidario a la superficie de desplazamiento, sin embargo, el punto en donde se coloca el sistema de referencia del robot se ha desplazado una cierta cantidad. El sistema de coordenadas asignado al robot $\{R\}$ tiene una posición que resulta semejante a la del sistema de coordenada del punto coincidente $\{\bar{R}\}$, y al determinar la matriz de rotación que relaciona ambos sistemas, ésta se aproxima a una matriz identidad, pero al diferenciarla con respecto al tiempo, en esta matriz aparecen términos que se relacionan con la velocidad lineal y angular del vehículo, y en consecuencia la matriz obtenida no corresponde a una matriz identidad. Igualmente, al volver a diferenciar la matriz, aparecen términos de aceleración lineal y angular del robot.

Aunque la posición del sistema de referencia $\{R\}$ con respecto a la posición del sistema de referencia $\{\bar{R}\}$ sea igual a cero para cualquier instante, la velocidad y

la aceleración del sistema $\{R\}$ con respecto a la velocidad y la aceleración del sistema $\{\bar{R}\}$ será distinta de cero cuando el sistema se encuentra en movimiento.

La motivación de utilizar esta herramienta conceptual de los puntos instantáneos coincidentes, está en que las velocidades y aceleraciones de los sistemas de coordenadas que se encuentran en movimiento pueden ser calculadas en cualquier instante con respecto al punto instantáneo [13].

El otro sistema de referencia se halla en el punto instantáneo coincidente ubicado en el punto de contacto de la rueda con la superficie. Por lo tanto existe un sistema de referencia que se denominará $\{\bar{C}\}$ y que coincide en posición con el sistema de referencia $\{C\}$.

En la tabla 3.1 se resumen los sistemas de coordenadas empleados en el robot móvil según Sheth-Uicker.

Tabla 3.1 Asignación de los sistemas de coordenadas.

Nombre	Descripción
F	Sistema fijo a la superficie de desplazamiento, z es perpendicular a la superficie.
R	Sistema de coordenadas principal del robot, se mueve con el cuerpo del robot. z es perpendicular a la superficie.
\bar{R}	Punto instantáneo coincidente cuerpo del robot, es fijo con respecto a la superficie de desplazamiento. Coincide con $\{R\}$
H	Sistema que se mueve con el cuerpo del robot, ubicado en el punto de cada articulación de direccionamiento. z tiene la dirección de la articulación.
S	Se mueve con el elemento de direccionamiento del robot. z tiene la dirección de la articulación.
C	Se mueve con el elemento de direccionamiento del robot. Su origen es el contacto superficie rueda. z es perpendicular a la superficie y x tiene la dirección de la rueda.
\bar{C}	Punto instantáneo coincidente contacto con el suelo, es fijo respecto a la superficie de desplazamiento. Coincide con $\{C\}$

Matrices de rotación en la notación Sheth-Uicker.

Las matrices de rotación según la notación Sheth-Uicker, a diferencia de las matrices de rotación determinadas según la notación Denavit-Hartenberg, no siguen un procedimiento sistemático para ser determinadas, sino que cada matriz de rotación debe ser determinada de manera independiente, encontrándose algunas que resultan ser invariables con respecto al tiempo y otras que si cambian al transcurrir un instante de tiempo.

Las matrices relacionan primero el robot al sistema de referencia global (relacionan {R} con {F}), luego cada punto de articulación de direccionamiento de cada rueda con el cuerpo del robot ({H} con {R}). La transformación de los sistemas {S} a {H}, determina solo orientación por tener el origen en el mismo punto. La última matriz de transformación, relaciona el punto de contacto con el direccionamiento de la rueda ({C} con {S}).

Como consecuencia de que el sistema es una cadena cerrada en donde existe una conexión múltiple, debido a que posee varias ruedas, no se hace una transformación completamente lineal, como aparece en la notación Denavit-Hartenberg. En primer lugar, se puede transformar con una sola matriz de transformación el sistema de referencia colocado en el punto de contacto de la rueda al sistema de referencia global. Por otro lado, la transformación de los sistemas {H} al sistema {R}, resulta ser una transformación múltiple y se repite de acuerdo al número de ruedas que posea el vehículo, al igual que el número de transformaciones entre los sistemas {S} y {H} y entre los sistemas {C} y {S} es igual al número de ruedas que posee el robot.

En el triciclo, para todos los sistemas de referencia ya se advirtió que se considerará que sus ejes z serán siempre perpendiculares a la superficie de desplazamiento, por lo tanto todos los ejes z serán paralelos entre sí, situación que facilitará el cálculo cinemático, puesto que se simplifican las matrices de transformación.

Como se sabe, las matrices de rotación permiten definir la posición de un punto ubicado en un sistema de referencia con respecto a otro sistema de referencia, esto se expresa a partir de la siguiente expresión.

$${}^a\mathbf{r} = {}^a\pi_b \cdot {}^b\mathbf{r} \quad (3.1)$$

Donde ${}^a\mathbf{r}$ y ${}^b\mathbf{r}$ representan un vector de posición llamado \mathbf{r} , expresado en el sistema de coordenadas a y b respectivamente, ${}^a\pi_b$ representa a la matriz de transformación.

Luego, al derivar esta expresión con respecto del tiempo, se puede encontrar la relación de transformación de la velocidad de un punto ubicado en un sistema de coordenadas con respecto a otro sistema de coordenadas, obteniéndose la siguiente expresión:

$${}^a\dot{\mathbf{r}} = {}^a\dot{\mathbf{T}}_b \cdot {}^b\mathbf{r} \quad (3.2)$$

Esta expresión resulta simple debido a que el vector de posición del punto no cambia con el tiempo, puesto que es fijo con respecto al sistema de referencia al que se encuentra referido originalmente (es decir, ${}^b\dot{\mathbf{r}} = 0$). En consecuencia para conseguir la velocidad de un punto con respecto al sistema de referencia global, debemos conocer la derivada de las matrices de rotación que se involucren en la transformación.

Al diferenciar nuevamente, se determina la expresión que permite determinar la aceleración de un punto ubicado en un sistema de referencia con respecto al sistema de referencia global.

$${}^a\ddot{\mathbf{r}} = {}^a\ddot{\mathbf{T}}_b \cdot {}^b\mathbf{r} \quad (3.3)$$

Nuevamente, se consigue una expresión inicialmente muy simple, por la misma razón de la anterior (${}^b\dot{\mathbf{r}} = 0$). Es necesario conocer así, las segundas derivadas de las matrices de transformación que se involucran en la ecuación.

Las matrices de transformación que son necesarias para definir la posición de cualquier punto del robot móvil, con respecto al sistema de coordenadas global, involucran todos los sistemas de referencia que se indicaron más arriba, incluyendo los definidos por los puntos instantáneos coincidentes. En resumen son $\{F\}$, $\{\bar{R}\}$, $\{R\}$, $\{H\}$, $\{S\}$, $\{C\}$ y $\{\bar{C}\}$, en ese mismo orden. También por tratarse de una cadena cinemática cerrada, se puede determinar la transformación desde el sistema final hasta el principal, es decir, desde $\{\bar{C}\}$ hasta $\{F\}$, pero desarrollado por otra vía sin pasar por todos los sistemas de referencia que existen en el robot.

Las matrices de transformación entre los sistemas de referencia definidos y sus derivadas sencillas y dobles se muestran a continuación:

En la tabla 3.2 se muestran las matrices de transformación involucradas en la notación.

Tabla 3.2 Matrices de transformación del sistema.

Transformación F- \bar{R}	${}^F R_{\bar{R}} = \begin{bmatrix} \cos({}^F \theta_{\bar{R}}) & -\text{sen}({}^F \theta_{\bar{R}}) & 0 & {}^F x_{\bar{R}} \\ \text{sen}({}^F \theta_{\bar{R}}) & \cos({}^F \theta_{\bar{R}}) & 0 & {}^F y_{\bar{R}} \\ 0 & 0 & 1 & {}^F z_{\bar{R}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Transformación \bar{R} -R	$\bar{R} R_R = \begin{bmatrix} \cos(\bar{R} \theta_R) & -\text{sen}(\bar{R} \theta_R) & 0 & \bar{R} x_R \\ \text{sen}(\bar{R} \theta_R) & \cos(\bar{R} \theta_R) & 0 & \bar{R} y_R \\ 0 & 0 & 1 & \bar{R} z_R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Transformación R-H	${}^R R_H = \begin{bmatrix} \cos({}^R \theta_H) & -\text{sen}({}^R \theta_H) & 0 & {}^R x_H \\ \text{sen}({}^R \theta_H) & \cos({}^R \theta_H) & 0 & {}^R y_H \\ 0 & 0 & 1 & {}^R z_H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Transformación H-S	${}^H R_S = \begin{bmatrix} \cos({}^H \theta_S) & -\text{sen}({}^H \theta_S) & 0 & 0 \\ \text{sen}({}^H \theta_S) & \cos({}^H \theta_S) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Transformación S-C	${}^S R_C = \begin{bmatrix} \cos({}^S \theta_C) & -\text{sen}({}^S \theta_C) & 0 & {}^S x_C \\ \text{sen}({}^S \theta_C) & \cos({}^S \theta_C) & 0 & {}^S y_C \\ 0 & 0 & 1 & {}^S z_C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Transformación \bar{C} -C	$\bar{C} R_C = \begin{bmatrix} \cos(\bar{C} \theta_C) & -\text{sen}(\bar{C} \theta_C) & 0 & \bar{C} x_C \\ \text{sen}(\bar{C} \theta_C) & \cos(\bar{C} \theta_C) & 0 & \bar{C} y_C \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C} z_C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Transformación F- \bar{C}	${}^F R_{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \cos({}^F \theta_{\bar{C}}) & -\text{sen}({}^F \theta_{\bar{C}}) & 0 & {}^F x_{\bar{C}} \\ \text{sen}({}^F \theta_{\bar{C}}) & \cos({}^F \theta_{\bar{C}}) & 0 & {}^F y_{\bar{C}} \\ 0 & 0 & 1 & {}^F z_{\bar{C}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

De las matrices de transformación indicadas en la tabla anterior, algunas son constantes a lo largo del tiempo, mientras otras matrices si varían. Las matrices de transformación constantes son: ${}^F R_{\bar{R}}$, ya que el punto \bar{R} se encuentra fijado a la superficie de desplazamiento, ${}^R R_H$, por encontrarse ambos sistemas solidarios al cuerpo del robot móvil, ${}^S R_C$, puesto que ambos sistemas se encuentran en el elemento que soporta la rueda y la matriz ${}^F R_{\bar{C}}$ también, por encontrarse \bar{C} en la superficie de desplazamiento.

Esto quiere decir que al derivar estas matrices en función del tiempo la matriz resultante es igual a la matriz identidad. En cambio las otras matrices son distintas de cero, y su utilidad surge para relacionar la velocidad de los distintos elementos del robot, tal y como ya fue explicado. En la tabla 3.3 se presentan las primeras derivadas

de las matrices de transformación que no son constantes y en la tabla 3.4 se presentan las segundas derivadas de las matrices de transformación, que serán utilizadas para determinar la aceleraciones del sistema mecánico en estudio.

Tabla 3.3 Primera derivada de las matrices de transformación del sistema.

Transformación \bar{R} -R	$\bar{R}\dot{R}_R = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{R}\dot{\theta}_R & 0 & \bar{R}\dot{x}_R \\ \bar{R}\dot{\theta}_R & 0 & 0 & \bar{R}\dot{y}_R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Transformación H-S	${}^H\dot{R}_S = \begin{bmatrix} -\text{sen}({}^H\theta_S){}^H\dot{\theta}_S & -\text{cos}({}^H\theta_S){}^H\dot{\theta}_S & 0 & 0 \\ \text{cos}({}^H\theta_S){}^H\dot{\theta}_S & -\text{sen}({}^H\theta_S){}^H\dot{\theta}_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Transformación \bar{C} -C	$\bar{C}\dot{R}_C = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{C}\dot{\theta}_C & 0 & \bar{C}\dot{x}_C \\ \bar{C}\dot{\theta}_C & 0 & 0 & \bar{C}\dot{y}_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tabla 3.4 Segunda derivada de las matrices de transformación del sistema.

Transformación \bar{R} -R	$\bar{R}\ddot{R}_R = \begin{bmatrix} -\bar{R}\dot{\theta}_R^2 & -\bar{R}\ddot{\theta}_R & 0 & \bar{R}\ddot{x}_R \\ \bar{R}\ddot{\theta}_R & -\bar{R}\dot{\theta}_R^2 & 0 & \bar{R}\ddot{y}_R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Transformación H-S	${}^H\ddot{R}_S = \begin{bmatrix} -\text{sen}({}^H\theta_S){}^H\ddot{\theta}_S - \text{cos}({}^H\theta_S){}^H\dot{\theta}_S^2 & -\text{cos}({}^H\theta_S){}^H\ddot{\theta}_S + \text{sen}({}^H\theta_S){}^H\dot{\theta}_S^2 & 0 & 0 \\ \text{cos}({}^H\theta_S){}^H\ddot{\theta}_S - \text{sen}({}^H\theta_S){}^H\dot{\theta}_S^2 & -\text{sen}({}^H\theta_S){}^H\ddot{\theta}_S - \text{cos}({}^H\theta_S){}^H\dot{\theta}_S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Transformación \bar{C} -C	$\bar{C}\ddot{R}_C = \begin{bmatrix} -\bar{C}\dot{\theta}_C^2 & -\bar{C}\ddot{\theta}_C & 0 & \bar{C}\ddot{x}_C \\ \bar{C}\ddot{\theta}_C & -\bar{C}\dot{\theta}_C^2 & 0 & \bar{C}\ddot{y}_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Es el interés de la presente investigación, determinar la velocidad y la aceleración que sufre el cuerpo del robot como efecto de la aplicación de los pares y fuerzas aplicadas en ciertos puntos del vehículo, lo que significa resolver el problema dinámico directo. Surge así, la necesidad de relacionar velocidades y aceleraciones entre las diversas partes del robot móvil.

La siguiente sección está dedicada a determinar el comportamiento de la base móvil del robot, apoyado en las ventajas que ofrece la notación Sheth-Uicker.

Cinemática de la plataforma móvil:

Con la ayuda de la información definida por la notación de Sheth-Uicker, se puede determinar, por ejemplo, la incidencia que tendrán las velocidades y aceleraciones aplicadas en la rueda direccionable del robot, en el cuerpo del robot, igualmente el aporte total de las ruedas en el movimiento global del robot. Para esto se aplica la lógica que describe Gracia y colegas [41], para definir la matriz de velocidades generalizadas del cuerpo del robot en función de las velocidades generalizadas de la rueda direccionable del triciclo.

En principio se define esta relación de manera general, para cualquier tipo de vehículo, para luego particularizar el caso de un vehículo tipo triciclo. Se comienza con encontrar la relación que describe la posición del punto de contacto de una rueda con respecto al sistema de coordenadas global:

$${}^F \mathbf{r} = {}^F R_{\bar{R}} \cdot {}^{\bar{R}} R_R \cdot {}^R R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Ci} \cdot {}^{Ci} \mathbf{r} \quad (3.4)$$

donde ${}^F R_{\bar{R}}$ es una matriz de rotación, que transforma del sistema \bar{R} al sistema F , sin embargo, este vector también se puede describir si tomamos otro camino, como se observa en la siguiente ecuación:

$${}^F \mathbf{r} = {}^F R_{\bar{Ci}} \cdot {}^{\bar{Ci}} R_{Ci} \cdot {}^{Ci} \mathbf{r} \quad (3.5)$$

Igualando las ecuaciones (3.4) y (3.5), y eliminando el vector ${}^{Ci} \mathbf{r}$, se obtiene lo siguiente:

$${}^F R_{\bar{R}} \cdot {}^{\bar{R}} R_R \cdot {}^R R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Ci} = {}^F R_{\bar{Ci}} \cdot {}^{\bar{Ci}} R_{Ci} \quad (3.6)$$

y se puede despejar ${}^{\bar{R}} R_R$

$${}^{\bar{R}} R_R = {}^{\bar{R}} R_F \cdot {}^F R_{\bar{Ci}} \cdot {}^{\bar{Ci}} R_{Ci} \cdot {}^{Ci} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_R \quad (3.7)$$

Seguidamente, se deriva esta expresión y se consigue el siguiente resultado (basados en los corolarios de las matrices de transformación que se muestran en los anexos):

$$\begin{aligned} {}^{\bar{R}} \dot{R}_R = & {}^{\bar{R}} R_F \cdot {}^F R_{\bar{Ci}} \cdot {}^{\bar{Ci}} \dot{R}_{Ci} \cdot {}^{Ci} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_R + \\ & + {}^{\bar{R}} R_F \cdot {}^F R_{\bar{Ci}} \cdot {}^{\bar{Ci}} R_{Ci} \cdot {}^{Ci} R_{Si} \cdot {}^{Si} \dot{R}_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_R \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por su parte, en función de eliminar la dependencia de la matriz de rotación ${}^{\bar{R}} \dot{R}_R$ con respecto al sistema de coordenadas global se puede extraer de la ecuación (3.6) la siguiente relación:

$${}^{\bar{R}}R_F \cdot F R_{\bar{C}i} = {}^{\bar{R}}R_R \cdot {}^R R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Ci} \cdot {}^{Ci} R_{\bar{C}i} \quad (3.9)$$

esto se reemplaza en la ecuación (3.8):

$$\begin{aligned} {}^{\bar{R}}\dot{R}_R = & {}^{\bar{R}}R_R \cdot {}^R R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Ci} \cdot {}^{Ci} R_{\bar{C}i} \cdot \dot{\bar{C}i} \dot{R}_{Ci} \cdot {}^{Ci} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_R + \\ & + {}^{\bar{R}}R_R \cdot {}^R R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_{Si} \cdot {}^{Si} \dot{R}_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_R \end{aligned} \quad (3.10)$$

${}^{\bar{R}}R_R$ es una matriz identidad, así que:

$$\begin{aligned} {}^{\bar{R}}\dot{R}_R = & {}^R R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Ci} \cdot {}^{Ci} R_{\bar{C}i} \cdot \dot{\bar{C}i} \dot{R}_{Ci} \cdot {}^{Ci} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_R + \\ & + {}^R R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_{Si} \cdot {}^{Si} \dot{R}_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_R \end{aligned} \quad (3.11)$$

Resolviendo de acuerdo a como se describe cada matriz según las tablas 3.2 y 3.3, se encuentra una matriz simplificada para cada término de la ecuación (3.11):

$${}^{\bar{R}}\dot{R}_R = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\bar{R}}\dot{\theta}_R & 0 & \dot{\bar{R}}\dot{x}_R \\ \dot{\bar{R}}\dot{\theta}_R & 0 & 0 & \dot{\bar{R}}\dot{y}_R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & {}^R R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Ci} \cdot {}^{Ci} R_{\bar{C}i} \cdot \dot{\bar{C}i} \dot{R}_{Ci} \cdot {}^{Ci} R_{Si} \cdot {}^{Si} R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_R = \\ & = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\bar{C}i}\dot{\theta}_{Ci} & 0 & \dot{\bar{C}i}\dot{\theta}_{Ci} \cdot {}^R x_{Ci} + \dot{\bar{C}i}\dot{y}_{Ci} \cdot \cos({}^R\theta_{Ci}) - \dot{\bar{C}i}\dot{x}_{Ci} \cdot \sen({}^R\theta_{Ci}) \\ \dot{\bar{C}i}\dot{\theta}_{Ci} & 0 & 0 & -\dot{\bar{C}i}\dot{\theta}_{Ci} \cdot {}^R y_{Ci} + \dot{\bar{C}i}\dot{y}_{Ci} \cdot \sen({}^R\theta_{Ci}) + \dot{\bar{C}i}\dot{x}_{Ci} \cdot \cos({}^R\theta_{Ci}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$${}^R R_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_{Si} \cdot {}^{Si} \dot{R}_{Hi} \cdot {}^{Hi} R_R = \begin{bmatrix} 0 & {}^{Hi}\dot{\theta}_{Si} & 0 & -{}^{Hi}\dot{\theta}_{Si} \cdot {}^R x_{Hi} \\ -{}^{Hi}\dot{\theta}_{Si} & 0 & 0 & {}^{Hi}\dot{\theta}_{Si} \cdot {}^R y_{Hi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde:

$${}^R\theta_{Ci} = {}^R\theta_{Hi} + {}^{Hi}\theta_{Si} + {}^{Si}\theta_{Ci}$$

$${}^R x_{Ci} = {}^R x_{Hi} + {}^{Si}y_{Ci} \cdot \sen({}^R\theta_{Hi} + {}^{Hi}\theta_{Si}) + {}^{Si}x_{Ci} \cdot \cos({}^R\theta_{Hi} + {}^{Hi}\theta_{Si})$$

$${}^R y_{Ci} = {}^R y_{Hi} + {}^{Si}y_{Ci} \cdot \cos({}^R\theta_{Hi} + {}^{Hi}\theta_{Si}) - {}^{Si}x_{Ci} \cdot \sen({}^R\theta_{Hi} + {}^{Hi}\theta_{Si})$$

de tal manera, que se consigue un sistema de ecuaciones que resuelve el problema:

Licencia Creative Commons:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\bar{R}\dot{\theta}_R & 0 & \bar{R}\dot{x}_R \\ \bar{R}\dot{\theta}_R & 0 & 0 & \bar{R}\dot{y}_R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{c}^i\dot{\theta}_{Ci} & 0 & \bar{c}^i\dot{\theta}_{Ci} * {}^R x_{Ci} + \bar{c}^i\dot{y}_{Ci} * \cos({}^R\theta_{Ci}) - \bar{c}^i\dot{x}_{Ci} * \sin({}^R\theta_{Ci}) \\ \bar{c}^i\dot{\theta}_{Ci} & 0 & 0 & -\bar{c}^i\dot{\theta}_{Ci} * {}^R y_{Ci} + \bar{c}^i\dot{y}_{Ci} * \sin({}^R\theta_{Ci}) + \bar{c}^i\dot{x}_{Ci} * \cos({}^R\theta_{Ci}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & {}^{Hi}\dot{\theta}_{Si} & 0 & -{}^{Hi}\dot{\theta}_{Si} * {}^R x_{Hi} \\ -{}^{Hi}\dot{\theta}_{Si} & 0 & 0 & {}^{Hi}\dot{\theta}_{Si} * {}^R y_{Hi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

luego de simplificar el sistema se obtiene lo siguiente:

$$\bar{R}\vec{\dot{p}}_R = \begin{bmatrix} \bar{R}\dot{x}_R \\ \bar{R}\dot{y}_R \\ \bar{R}\dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos({}^R\theta_{Ci}) & -\sin({}^R\theta_{Ci}) & {}^R y_{Ci} & {}^R y_{Hi} \\ \sin({}^R\theta_{Ci}) & \cos({}^R\theta_{Ci}) & {}^R x_{Ci} & {}^R x_{Hi} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{c}^i x_{Ci} \\ \bar{c}^i y_{Ci} \\ \bar{c}^i \dot{\theta}_{Ci} \\ {}^{Hi} \dot{\theta}_{Si} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

esta ecuación representa la configuración $\bar{R}\vec{\dot{p}}_R = \bar{J}i * \dot{q}i$, donde $\dot{q}i$ es el vector de velocidades generalizadas de la rueda i , y $\bar{J}i$ es el Jacobiano de la rueda i .

Recuérdese que la ecuación (3.13) representa el aporte de una sola rueda en el vector de velocidades generalizadas del cuerpo del robot. Cuando se quiere determinar el vector de velocidades del cuerpo del robot, es necesario determinar el aporte de todas las ruedas del robot. Todas estas ecuaciones se combinan para formar la matriz que resuelve el vector de velocidades del robot:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \bar{R}\vec{\dot{p}}_R = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

que representa una matriz de la forma $Ax = B * y$ y donde I_i representa una matriz identidad de tamaño 3 x 3. Este sistema se puede resolver por medio de una aproximación por mínimos cuadrados

$$x = (A \cdot A^T)^{-1} A^T \cdot B \cdot y \quad \text{ó} \quad \bar{R}\vec{\dot{p}}_R = (A \cdot A^T)^{-1} A^T \cdot B \cdot \dot{q} \quad (3.15)$$

En el caso de estudio del robot móvil, el término $(A \cdot A^T)^{-1} A^T \cdot B$ representa el jacobiano completo del vehículo. Por lo que la ecuación definitiva es:

$$\bar{R}\vec{\dot{p}}_R = J \cdot \dot{q} \quad (3.16)$$

Se describe en [42] que para que el robot no sufra deslizamiento, debe cumplir con la siguiente condición:

$$\Omega(A) \cdot B \cdot \dot{q} = 0 \quad (3.17)$$

En donde $\Omega(A)$ se puede expresar como $\Omega(A) = A \cdot (A \cdot A^T)^{-1} \cdot A^T - I$

Muñoz y colegas [42] afirman que si el producto $\Omega(A) \cdot B$ resulta nulo es indicativo de que existe una solución y por lo tanto, esto implica que existe una sola rueda en contacto con el suelo. La solución calculada según la ecuación (3.15) debe ser consistente, para lo cual se deberá verificar la condición interpuesta en la ecuación (3.17).

Un triciclo tendrá el aporte de las tres ruedas en su movimiento general. Se deben definir en primer lugar los tres jacobianos de cada una de las ruedas:

$$J_1 = \begin{bmatrix} r & -l \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad J_2 = \begin{bmatrix} r & l \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad J_3 = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & -m & m \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (3.18)$$

En donde r , l y m están referidos a parámetros geométricos del triciclo, r es el radio de la rueda, l es la distancia que hay desde el centro del eje trasero del triciclo hasta la rueda de ese eje, m es la distancia desde el centro del eje trasero hasta el eje de rotación de la rueda delantera. En la siguiente figura se detallan los parámetros geométricos del triciclo, basado en el Neptuno (Bicun-unicsan-whemor) según se detalla en [13].

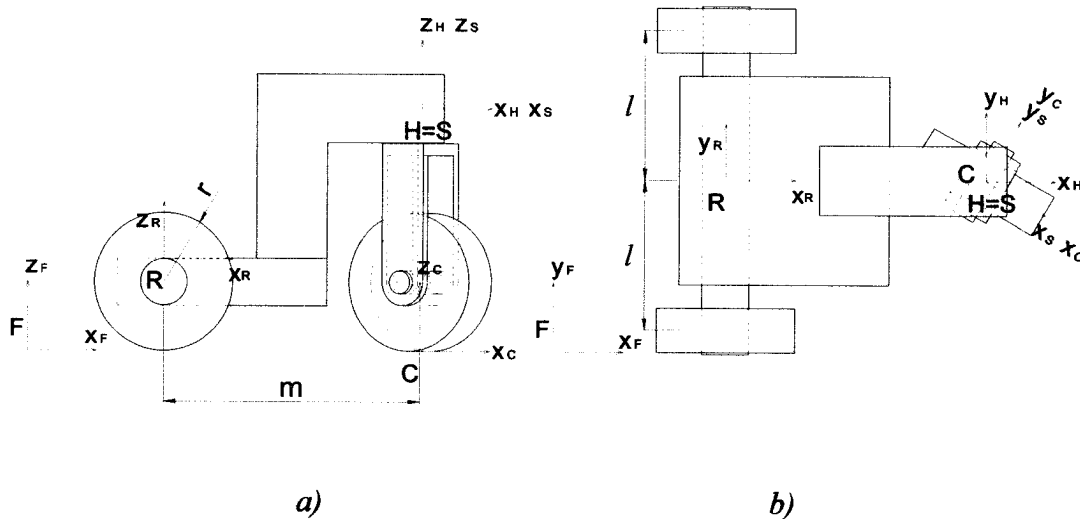


Figura 3.2. Neptuno (Bicun-unicsan-whemor). a) Vista superior. b) Vista lateral.[13]

Luego de operar, se obtiene el jacobiano del vehículo móvil, según el algoritmo descrito anteriormente:

$$\begin{bmatrix} \bar{R}\dot{x}_R \\ \bar{R}\dot{y}_R \\ \bar{R}\dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ 0 \\ \text{sen } \beta/m \end{bmatrix} \cdot \bar{c} \dot{x}_C \quad (3.19)$$

en donde $\bar{c}\dot{x}_C$, representa la velocidad lineal de la rueda a lo largo de su dirección, $\bar{R}\dot{x}_R$ y $\bar{R}\dot{y}_R$, la velocidad lineal en el punto central del eje trasero del vehículo, mientras que $\bar{R}\dot{\theta}_R$ representa la velocidad angular del eje trasero. Con esta ecuación se pueden definir las velocidades del cuerpo del vehículo en función de las velocidades de las ruedas del mismo.

En lo que respecta a las aceleraciones del robot móvil, según Muir y Neuman [13], la aceleración de un robot móvil con ruedas se debe calcular aplicando lo que ellos denominan el corolario de la cascada de las aceleraciones, que se explican en los anexos de este trabajo.

Se afirma en dicha investigación que las aceleraciones del mecanismo no se pueden formular a partir de diferenciar los resultados obtenidos en el análisis de velocidades del mecanismo, puesto que genera operaciones que no son permitidas por el álgebra matricial de las coordenadas de transformación, lo cual, contrasta con los mecanismos que contienen sólo pares inferiores, en los cuales las aceleraciones pueden ser obtenidas de la diferenciación de los resultados obtenidos para las velocidades del mecanismo, cabe destacar que la expresión que consiguieron en esta investigación es equivalente a la ecuación (3.13).

Sin embargo, Muñoz y colegas [42], obtienen las aceleraciones de un robot móvil luego de derivar la expresión que relaciona las velocidades del cuerpo del robot con las velocidades de la rueda por medio del jacobiano del robot móvil.

De esta manera, la relación entre las aceleraciones del cuerpo del robot y las aceleraciones de sus ruedas se puede determinar al diferenciar la ecuación (3.19); recuérdese que esta ecuación corresponde a la forma expresada en la ecuación (3.16), que luego de diferenciarla resulta así,

$$\bar{R}\ddot{p}_R = j \cdot \dot{q} + J \cdot \ddot{q} \quad (3.20)$$

pero, nuevamente esta ecuación corresponde al caso general de un robot móvil; luego, en el caso particular de robot móvil tipo triciclo, el resultado será el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \bar{R} \ddot{x}_R \\ \bar{R} \ddot{y}_R \\ \bar{R} \ddot{\theta}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \operatorname{sen} \beta \\ 0 \\ \dot{\beta} / m * \cos \beta / m \end{bmatrix} \cdot \bar{c} \dot{x}_C + \begin{bmatrix} \cos \beta \\ 0 \\ \operatorname{sen} \beta / m \end{bmatrix} \cdot \bar{c} \ddot{x}_C \quad (3.21)$$

Finalmente, a partir de las ecuaciones (3.19) y (3.21) se puede determinar la cinemática de la base móvil del robot, para luego relacionarla con la cinemática del brazo manipulador que completa el sistema mecánico en estudio. Este segundo análisis cinemático, en donde se estudia el brazo manipulador, se detalla en la siguiente sección.

Cinemática del brazo manipulador:

En esta sección se evalúa la cinemática del brazo robótico partiendo de la notación Denavit-Hartenberg. Esta notación obviamente, ha sido mucho más difundida que la notación Sheth-Uicker, por lo que su descripción se encuentra en los anexos finales del presente trabajo, ya que es de suponer que la misma es bien conocida por los especialistas en el área.

El brazo manipulador que se utiliza en esta investigación, para validar los resultados es un robot Puma 560 fabricado por la empresa Unimation. Este brazo manipulador posee seis grados de libertad y todas sus articulaciones son pares de revolución, en los anexos se presentan los parámetros geométricos e inerciales de este robot y en la figura A.3 se muestra esquemáticamente el robot.

De esta manera, en las siguientes líneas se describen las expresiones por medio de las cuales se determinan de manera recursiva las variables cinemáticas del mecanismo, las cuales se derivan según se describe en Mata [43], pero que luego de ser desarrolladas, se encuentran como se describen en Provenzano [1] donde se muestran algo más explícitas.

$${}^i \vec{\omega}_i = {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \vec{\omega}_i + \rho_i {}^i \vec{z}_i \dot{q}_i \quad (3.22)$$

$${}^i \dot{\vec{\omega}}_i = {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_{i-1} + \rho_i {}^i \vec{z}_i \ddot{q}_i + \rho_i [{}^i R_{i-1} {}^{i-1} \vec{\omega}_i \wedge ({}^i \vec{z}_i \dot{q}_i)] \quad (3.23)$$

$${}^i \ddot{\vec{r}}_{O_i} = {}^i R_{i-1} [{}^{i-1} \ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}} + {}^{i-1} \vec{\omega}_{i-1} \wedge ({}^{i-1} \vec{\omega}_{i-1} \wedge {}^{i-1} \vec{r}_{O_{i-1}, O_i}) + {}^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_{i-1} \wedge {}^{i-1} \vec{r}_{O_{i-1}, O_i}] \\ + (1 - \rho_i) [{}^i \vec{z}_i \ddot{q}_i + 2({}^i \vec{\omega}_i \wedge {}^i \vec{z}_i \dot{q}_i)] \quad (3.24)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$${}^i\ddot{\tau}_{G_i} = {}^i\ddot{\tau}_{O_i} + {}^i\vec{\omega}_i \wedge ({}^i\vec{\omega}_i \wedge {}^i\vec{\tau}_{O_i,G_i}) + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \wedge {}^i\vec{\tau}_{O_i,G_i} \quad (3.25)$$

en donde ρ_i es 0 para pares prismáticos y 1 para pares de revolución. Estas ecuaciones permiten relacionar las variables cinemáticas del brazo manipulador del sistema mecánico en estudio, de tal manera que el conjunto de ecuaciones (3.19), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) y (3.25), determinan el análisis cinemático completo del manipulador robótico móvil.

Se debe aclarar que la barra, que según las ecuaciones anteriores representa la barra 0 (cero), es aquella barra donde comienza el manipulador robótico y que se encuentra apoyada en la base de la plataforma móvil. Por otra parte, resulta también importante destacar, que las condiciones iniciales del brazo robótico, es decir, las velocidades y aceleraciones de la base del manipulador son aportadas por la cinemática de la plataforma, según se describió en la sección anterior.

Luego de determinada la cinemática del sistema mecánico, se procede a determinar la dinámica del modelo, que como ya es sabido, se desarrolló siguiendo la formulación de Gibbs-Appell. En lo referido a la base móvil del robot, se hace uso de la ecuación desarrollada por Martinenko [3] en el año 2004, mientras que para la parte que corresponde al brazo manipulador del robot, se utiliza el estudio desarrollado por Provenzano [1] en el año 2001.

Dinámica de la plataforma móvil:

Martinenko [3] en el año 2004, desarrolló las ecuaciones que modelan la dinámica de un robot móvil de cuatro ruedas tipo Ackerman, aunque realmente en el modelo desarrollado no se emplea el mecanismo conocido como Ackerman, sino que en lugar de esto, el modelo tiende a parecerse más al modelo del triciclo mostrado en la figura 3.2, aunque posee cuatro ruedas. Además, es sabido que mediante ciertos procedimientos, se puede lograr relacionar los modelos de vehículos que siguen la configuración Ackerman a los que siguen la configuración de triciclo.

Para la aplicación de la ecuación de Gibbs-Appell en un sistema mecánico cualquiera, en Ginsberg [18] se describe un breve procedimiento. En primer lugar, se define una serie de coordenadas generalizadas que satisfacen cualquier restricción de tipo holónoma, luego se seleccionan tantas velocidades, que son denominadas cuasi velocidades, como grados de libertad posea el sistema. Luego, por medio de un análisis cinemático, se relacionan las velocidades generalizadas con las cuasi velocidades. El análisis cinemático debe describir en términos de las coordenadas

generalizadas y de las cuasi velocidades y cuasi aceleraciones, todos los parámetros de aceleración requeridos para formar la denominada energía de aceleración o la función de Gibbs. Luego se determinan las fuerzas generalizadas por medio de, por ejemplo, un análisis de trabajos virtuales, para asociarlas con la función de Gibbs.

En el artículo de Martinenko [3], el autor desarrolla la ecuación de Gibbs-Appell para el robot móvil descrito, tomando en consideración dos cuasi velocidades, a saber, la velocidad lineal del cuerpo del vehículo (V), calculada en el punto medio del eje trasero del vehículo y la velocidad angular relativa ($\dot{\beta}$) del eje delantero con respecto a la plataforma del vehículo.

Así que obtiene la función de Gibbs para el robot móvil:

$$S = \frac{1}{2}(m + m_0 \operatorname{tg}^2 \beta) \dot{V}^2 + \frac{I_2}{b} \operatorname{tg} \beta \dot{V} \dot{\beta} + \frac{1}{2} I_2 \dot{\beta}^2 + \frac{m_0 \operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} V \dot{V} \dot{\beta} + \frac{I_2}{b \cos^2 \beta} V \dot{\beta} \dot{\beta} \quad (3.26)$$

en donde:

$$m = 3m_E + 3m_F + m_C + m_B$$

$$I_2 = I_B + m_F \left(\frac{r_F^2}{2} + 3l_F^2 \right)$$

$$m_0 = b^{-2} \left(I_2 + I_C + m_E \frac{r_E^2}{2} + m_C a^2 + m_B b^2 + 3m_F b^2 + 3m_E l_E^2 \right)$$

adicionalmente, b es la distancia que existe entre los ejes delanteros y traseros del vehículo, m_E es la masa de la rueda trasera, m_F es la masa de la rueda delantera, m_C es la masa de la plataforma, m_B es la masa del eje delantero. I_B es el momento de inercia del eje delantero alrededor de su punto de rotación con respecto a la plataforma, I_C es el momento de inercia de la plataforma del vehículo sobre el centro de gravedad de la misma, l_E es la mitad de la longitud del eje trasero del vehículo, l_F es la mitad de la longitud del eje delantero, r_E es el radio de las ruedas traseras y finalmente, r_F es el radio de las ruedas delanteras.

El término de la expresión anterior $m_E r_E^2 / 2$, se entiende como el momento de inercia del eje trasero sobre el punto medio de este eje. De igual manera, el término $m_F r_F^2 / 2$ es el momento de inercia del eje delantero sobre el punto en donde este eje rota con respecto a la plataforma.

Recordando que la derivada parcial de la función de Gibbs respecto de las cuasi aceleraciones, da como resultado la fuerza generalizada que se relaciona con dicha aceleración.

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{V}} = Q_V; \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{\beta}} = Q_{\beta};$$

Se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de dos ecuaciones.

$$(m + m_0 \operatorname{tg}^2 \beta) \dot{V} + \frac{I_2}{b} \operatorname{tg} \beta \ddot{\beta} + \frac{m_0 \operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} V \dot{\beta} = F \quad (3.27)$$

$$I_2 \ddot{\beta} + \frac{I_2}{b} \operatorname{tg} \beta \dot{V} + \frac{I_2}{b \cos^2 \beta} V \dot{\beta} = M \quad (3.28)$$

en donde F es la fuerza que debe ser aplicada en el punto medio del eje trasero del vehículo para que se pueda desplazar, mientras que M es el momento a aplicar en el eje delantero para lograr la rotación del vehículo. Este es el sistema de ecuaciones para resolver el problema dinámico inverso (que no se resuelve en este trabajo), por lo tanto las ecuaciones (3.27) y (3.28) permiten resolver las fuerzas y pares necesarios para lograr el movimiento deseado de la plataforma del robot.

Puesto que lo que se desea es resolver el problema dinámico directo, las ecuaciones anteriores deben ser desarrolladas para expresarlas de tal manera que permitan calcular las aceleraciones lineal y angular de la plataforma móvil. Estas ecuaciones también fueron desarrolladas por Martinenko [3], en el artículo anteriormente citado, pero tomando ciertas consideraciones, como por ejemplo el asumir que la fuerza F aplicada de manera lineal en el punto medio del eje trasero de la plataforma es nula; pero sin tomar en cuenta esta fuerza nula, también se pueden desarrollar, tal y como se muestran a continuación:

$$\dot{V} = \frac{b^2}{\mu_0 b^2 - I_2 \operatorname{tg}^2 \beta} F - \frac{b \operatorname{tg} \beta}{\mu_0 b^2 - I_2 \operatorname{tg}^2 \beta} M + \frac{\operatorname{tg} \beta (I_2 - m_0 b^2)}{\cos^2 \beta (\mu_0 b^2 - I_2 \operatorname{tg}^2 \beta)} V \dot{\beta} \quad (3.29)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{b \operatorname{tg} \beta}{I_2 \operatorname{tg}^2 \beta - \mu_0 b^2} F - \frac{b^2 \mu_0}{I_2^2 \operatorname{tg}^2 \beta - \mu_0 I_2 b^2} M + \frac{b m}{\cos^2 \beta (I_2 \operatorname{tg}^2 \beta - \mu_0 b)} V \dot{\beta} \quad (3.30)$$

Recuérdese que V es la velocidad del punto central del eje trasero de la plataforma móvil, por lo tanto \dot{V} es la aceleración lineal de ese punto; β es la

orientación de las ruedas delanteras con respecto al vehículo, $\ddot{\beta}$ es la aceleración angular de dicho punto. En estas ecuaciones μ_0 se define como:

$$\mu_0 = m + m_0 t g^2 \beta$$

Con las ecuaciones (3.29) y (3.30) se determinan las aceleraciones lineal y angular de la plataforma móvil, luego de un proceso de integración numérica se pueden determinar las velocidades y posiciones de la plataforma móvil, específicamente, estas ecuaciones permiten calcular la velocidad lineal y la posición del punto medio del eje trasero del vehículo, así como también, la velocidad angular y la orientación del eje delantero.

Resta por el momento determinar las ecuaciones que permitirán resolver la dinámica de los brazos manipuladores del robot.

Dinámica del brazo manipulador:

Para determinar la dinámica de la parte del robot que corresponde a los brazos manipuladores, se utiliza la investigación realizada por Provenzano [1] en el año 2001.

Este análisis comienza a partir de la función de Gibbs que fue desarrollada en el capítulo anterior (2.25). Como es sabido, la ecuación debe derivarse en función de las aceleraciones para definir la ecuación dinámica del sistema.

En consecuencia, para conseguir los pares que deben ser aplicados en el brazo manipulador se debe derivar en función de las aceleraciones la ecuación (2.25), y el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_j = \sum_{i=j}^n \left[\frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \ddot{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T \ddot{r}_{G_i} + \frac{1}{2} m_i (\ddot{r}_{G_i})^T \frac{\partial \ddot{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T I_{G_i} \dot{\omega}_i + \frac{1}{2} (\dot{\omega}_i)^T I_{G_i} \frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_j} + \left(\frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T (\dot{\omega}_i \wedge I_{G_i} \dot{\omega}_i) \right] \quad (3.31) \end{aligned}$$

Luego de agrupar términos semejantes el resultado es:

$$\tau_j = \sum_{i=j}^n \left[m_i (\ddot{r}_{G_i})^T \frac{\partial \ddot{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} + (\dot{\omega}_i)^T I_{G_i} \frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_j} + \left(\frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T (\dot{\omega}_i \wedge I_{G_i} \dot{\omega}_i) \right] \quad (3.32)$$

Si incluimos el vector de la aceleración de la gravedad la ecuación (3.32) queda expresada de la siguiente manera:

$$\tau_j = \sum_{i=1}^n \left[m_i (\ddot{\vec{r}}_{G_i} - \vec{g})^T \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} + (\dot{\vec{\omega}}_i)^T I_{G_i} \frac{\partial \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} + \left(\frac{\partial \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T (\vec{\omega}_i \wedge I_{G_i} \vec{\omega}_i) \right] \quad (3.33)$$

Esta ecuación, sin embargo, es la que resuelve el problema dinámico inverso, y en este trabajo se desea determinar el problema dinámico directo, por lo tanto la ecuación de Gibbs-Appell que se desarrolla debe ser expresada de tal manera que permita calcular el problema directo.

La manera de expresar la ecuación de Gibbs-Appell, según la ecuación (3.33), es solamente una forma de expresarla, y es sabido que se pueden deducir de distintas maneras, tal es el caso de la ecuación de Gibbs-Appell como fue desarrollada por Vukobratovic y Potkonjak en el año 1985 [44], y luego por Desoyer y Lugner en 1989 [45]. La expresión de Gibbs-Appell según estos autores queda expresada de esta manera:

$$S = \frac{1}{2} \ddot{\vec{q}}^T \mathbf{D} \ddot{\vec{q}} + \vec{\varphi}^T \ddot{\vec{q}} + f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \quad (3.34)$$

Esta expresión muestra a la función de Gibbs en términos de las coordenadas generalizadas y de una manera bastante compacta. En la ecuación (3.34), \mathbf{D} representa la matriz de inercia del sistema en estudio, $\vec{\varphi}$ es un vector que agrupa fuerzas centrífugas, gravitatorias y de coriolis, y que se conoce con el nombre de vector bias, luego aparece un término que no es relevante en el análisis puesto que no es función de la aceleración.

Esta manera de expresar la función de Gibbs, resulta ser bastante apropiada para resolver el problema dinámico directo, pues tal y como es planteada por Provenzano [1], luego de derivarla parcialmente respecto a las aceleraciones de los nudos se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\vec{q}}} = \mathbf{D} \ddot{\vec{q}} + \vec{\varphi} \quad (3.35)$$

Que es la base para plantear una formulación que resuelve el problema dinámico directo. Así pues, recordando que la parcial de la ecuación de Gibbs-Appell respecto de las aceleraciones de los nudos es igual al vector de fuerzas generalizadas, la ecuación anterior, luego de reordenarla, puede ser expresada de la siguiente manera:

Licencia Creative Commons:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}^{-1}(\vec{\tau} - \vec{\varphi}) \quad (3.36)$$

En la ecuación (3.36) se puede observar que para determinar el vector de aceleraciones es necesario conocer varios términos, que son la matriz de inercia del sistema (\mathbf{D}), el vector bias ($\vec{\varphi}$), el vector de fuerzas o pares generalizados que ejercen los actuadores ($\vec{\tau}$), para luego resolver la ecuación. Seguidamente, después de un proceso de integración, se logra conseguir las velocidades y posiciones de los elementos del sistema en estudio.

Por lo tanto, todo el proceso comienza con plantear un método para hallar la matriz de inercia del sistema, luego el vector bias, y seguidamente se ensambla la ecuación con el vector de fuerzas aplicadas en los nodos, para determinar así las aceleraciones generalizadas

Matriz de inercia

Haciendo una simple derivación parcial, nuevamente con respecto a las aceleraciones de nudo, de la expresión (3.35), la segunda derivada resulta en lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \ddot{\mathbf{q}} \partial \ddot{\mathbf{q}}} = \mathbf{D} \quad (3.37)$$

Esta expresión muestra la relación que guarda la matriz de inercia del sistema con la ecuación de Gibbs-Appell, lo que se denomina como la matriz hesiana de la función de Gibbs. Luego, sustituyendo la ecuación de Gibbs presentada en el capítulo anterior (ecuación 2.25) en la ecuación (3.37) y hallando la segunda derivada de (2.25), podemos determinar una ecuación que permite determinar la matriz de inercia del sistema:

$$\mathbf{D}_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 S_i}{\partial \ddot{q}_j \partial \ddot{q}_k} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{\partial^i \vec{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \frac{\partial^i \vec{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} \right] + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial^i \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \mathbf{I}_{G_i} \frac{\partial^i \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_j} \right] \quad (3.38)$$

Se observan dos términos importantes, la primera sumatoria que se relaciona con las aceleraciones lineales y la segunda sumatoria vinculada a las aceleraciones angulares.

En lo que respecta a los términos de la derivada parcial de las aceleraciones angulares respecto de las aceleraciones de los nudos $\left(\frac{\partial \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k}\right)$, estos se desarrollan a partir de la ecuación (3.23):

$$\frac{\partial \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left({}^i R_{i-1} {}^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_{i-1} + \rho_i {}^i \vec{z}_i \ddot{q}_i + \rho_i [{}^i R_{i-1} {}^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_i \wedge ({}^i \vec{z}_i \dot{q}_i)] \right) \quad (3.39)$$

En donde según la notación Denavit-Hartenberg el vector ${}^i \vec{z}_i = [0 \ 0 \ 1]^T$. El término $\frac{\partial \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j}$ se puede determinar mediante el siguiente método recursivo:

$$\text{si } i < j \quad \frac{\partial \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.40)$$

$$\text{si } i > j \quad \frac{\partial \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} = {}^i R_{i-1} {}^{i-1} R_{i-2} \dots {}^{j-2} R_j \frac{\partial \dot{\vec{\omega}}_j}{\partial \ddot{q}_j} \quad (3.41)$$

$$\text{si } i = j \quad \frac{\partial \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} = {}^i \vec{z}_i \quad (3.42)$$

En cuanto a los términos que se vinculan con la aceleración lineal, se evalúa de la siguiente manera. En primer lugar, se determina el término $\frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{0_i}}{\partial \ddot{q}_j}$, el cual es necesario para definir los términos $\left(\frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k}\right)$, y se desarrolla a partir de la ecuación (3.24) de la misma manera como se determinó la derivada parcial anterior:

$$\frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{0_i}}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left({}^i R_{i-1} [{}^{i-1} \ddot{\vec{r}}_{0_{i-1}} + {}^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_{i-1} \wedge ({}^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_{i-1} \wedge {}^{i-1} \vec{r}_{0_{i-1},0_i}) + {}^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_{i-1} \wedge {}^{i-1} \vec{r}_{0_{i-1},0_i}] \right) \quad (3.43)$$

Esto es para pares de tipo de revolución; luego, cuando se comienza a desarrollar esta ecuación se simplifica y se tiene:

$$\frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{0_i}}{\partial \ddot{q}_j} = {}^i R_{i-1} \left(\frac{\partial {}^{i-1} \ddot{\vec{r}}_{0_{i-1}}}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial {}^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_{i-1}}{\partial \ddot{q}_j} \wedge {}^{i-1} \vec{r}_{0_{i-1},0_i} \right) \quad (3.44)$$

Nuevamente se puede determinar esta expresión por medio de un procedimiento recursivo:

$$\text{si } i \leq j \quad \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{0_i}}{\partial \ddot{q}_j} = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.45)$$

$$\text{si } i > j \quad \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{0_i}}{\partial \ddot{q}_j} = {}^i R_{i-1} \left(\frac{\partial^{i-1} \ddot{\vec{r}}_{0_{i-1}}}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_{i-1}}{\partial \ddot{q}_j} \wedge {}^{i-1} \vec{r}_{0_{i-1}, 0_i} \right) \quad (3.46)$$

Se ha limitado la presente investigación, al desarrollo del algoritmo para pares de revolución, por lo tanto no se desarrollan las derivadas parciales cuando el par es prismático.

Ahora si se puede determinar la derivada parcial que corresponde a la del vector de la aceleración del centro de gravedad, que se obtiene de derivar la expresión (3.25).

$$\frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} ({}^i \ddot{\vec{r}}_{0_i} + {}^i \vec{\omega}_i \wedge ({}^i \vec{\omega}_i \wedge {}^i \vec{r}_{0_i, G_i}) + {}^i \dot{\vec{\omega}}_i \wedge {}^i \vec{r}_{0_i, G_i}) \quad (3.47)$$

Al operar se obtiene

$$\frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial {}^i \ddot{\vec{r}}_{0_i}}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial {}^i \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} \wedge {}^i \vec{r}_{0_i, G_i} \quad (3.48)$$

Según Provenzano [1], esta ecuación también se resuelve de manera recursiva, a través del siguiente procedimiento:

$$\text{Si } i < j \quad \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.49)$$

$$\text{Si } i \geq j \quad \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial {}^i \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} \wedge {}^i \vec{r}_{0_j, G_i} \quad (3.50)$$

donde:

$${}^i \vec{r}_{0_j, G_i} = {}^i \vec{r}_{0_j, 0_{j+1}} + {}^i \vec{r}_{0_{j+1}, G_i} \quad (3.51)$$

Las ecuaciones, con las que se determinan las derivadas parciales de las aceleraciones angulares y lineales, son sustituidas en la ecuación (3.38) y de esta manera se obtiene la matriz de inercia del sistema.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Vector bias

El siguiente paso en el procedimiento, es determinar el vector bias para el brazo manipulador robótico; para esto se utiliza un método propuesto por Walker y Orin [46] en el año 1982, en donde afirman que el vector bias se puede determinar de una manera eficiente, al adecuar correctamente los algoritmos que se utilizan para determinar el problema dinámico inverso, tomando como consideración que se deben anular, en el algoritmo, los términos que resultan estar relacionados con las aceleraciones de nudos. De esta manera al determinar el problema dinámico inverso tomando estas consideraciones, el resultado obtenido es el vector bias.

En consecuencia, para determinar el vector bias, es necesario conocer previamente un algoritmo que permita calcular el problema dinámico inverso para el brazo manipulador. Este algoritmo es presentado también en Provenzano [1] y el mismo se basa en la ecuación (3.33):

$$\tau_j = \sum_{i=j}^n \left[m_i (\ddot{\mathbf{r}}_{G_i} - \ddot{\mathbf{g}})^T \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} + (\dot{\omega}_i)^T I_{G_i} \frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_j} + \left(\frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T (\omega_i \wedge I_{G_i} \omega_i) \right] \quad (3.33)$$

Esta ecuación permite calcular el vector de fuerzas generalizadas en el brazo robótico. Luego, los elementos cinemáticos que intervienen en esta ecuación, es decir, las velocidades y aceleraciones angulares y lineales, se calculan a partir de las ecuaciones (3.22), (3.23), (3.24) y (3.25), pero a las que les debemos eliminar los términos que se relacionan con las aceleraciones de los nudos, resultando en ecuaciones más simples:

$${}^i\omega_i = {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\omega_i \quad (3.52)$$

$${}^i\dot{\omega}_i = {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} \quad (3.53)$$

$${}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} = {}^iR_{i-1} \left[{}^{i-1}\ddot{\mathbf{r}}_{O_{i-1}} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \wedge ({}^{i-1}\omega_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{r}_{O_{i-1},O_i}) + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{r}_{O_{i-1},O_i} \right] \quad (3.54)$$

$${}^i\ddot{\mathbf{r}}_{G_i} = {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} + {}^i\omega_i \wedge ({}^i\omega_i \wedge {}^i\mathbf{r}_{O_i,G_i}) + {}^i\dot{\omega}_i \wedge {}^i\mathbf{r}_{O_i,G_i} \quad (3.55)$$

El resto de los elementos que constituyen la ecuación (3.33), como lo son las derivadas parciales de las aceleraciones angulares y lineales, son los mismos elementos que se determinaron en la sección anterior para el cálculo de la matriz de inercia.

Ahora la expresión dinámica definitiva para determinar el vector bias del brazo manipulador robótico, se obtiene de sustituir las ecuaciones (3.40), (3.41), (3.42), (3.45), (3.46), (3.49) y (3.50) en la expresión 3.33, resultando en lo siguiente:

$$\tau_j = \sum_{i=j}^n \left\{ m_i (-\vec{g})^T {}^i R_{i-1} \left[\left(\frac{\partial {}^i \vec{r}_{O_{i-1}}}{\partial \ddot{q}_j} + {}^{i-1} R_j {}^j \vec{z}_j \wedge {}^{i-1} \vec{r}_{O_{i-1}, O_i} \right) + {}^i R_j {}^j \vec{z}_j \wedge {}^i \vec{r}_{O_i, G_i} \right] + ({}^i R_j {}^j \vec{z}_j)^T ({}^i \vec{\omega}_i \wedge {}^i I_{G_i} {}^i \vec{\omega}_i) \right\} \quad (3.56)$$

Una vez determinado el vector bias del sistema mecánico que se está estudiando, así como la matriz de inercia del sistema, se puede determinar las aceleraciones de los nudos a partir de la ecuación (3.36), y luego de un proceso de integración se determinan las velocidades y posiciones de los nudos.

En conclusión, la determinación integral del sistema mecánico en estudio total se logra por intermedio de las ecuaciones (3.29), (3.30), (3.36), (3.38) y (3.56).

Algoritmo para resolver el problema dinámico inverso:

Una vez determinado el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento dinámico del sistema mecánico en estudio, se procede a desarrollar un algoritmo que permita simular de manera eficiente su comportamiento dinámico.

En este algoritmo se aplicará una idea que fue propuesta por Luh y colegas [47], que es introducir el vector de la aceleración de la gravedad en la base del robot, posteriormente esta propuesta de Luh, ha sido utilizada recurrentemente en las investigaciones y algoritmos realizados al respecto. Se considera que ésta es la manera más eficiente de introducir la aceleración de la gravedad en los algoritmos que resuelven el problema dinámico inverso de manera recursiva; como este algoritmo resuelve el problema dinámico directo, esta propuesta de Luh será aplicada en el cálculo del vector bias.

Por otra parte, antes de comenzar con el algoritmo, se explica a que se refieren cada uno de los parámetros que se establecen en el algoritmo:

q [$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8$] son las posiciones de los actuadores, q_1 , es la posición lineal del centro del eje delantero del vehículo, q_2 es la orientación angular

del eje delantero del vehículo, y de q_3 hasta q_8 , son las orientaciones angulares de cada una de las barras del brazo manipulador.

Los sistemas de coordenadas están ubicados en: 0 es un punto de referencia en la superficie de desplazamiento, 1 es el centro del eje trasero del vehículo, 2 es el centro del eje delantero del vehículo, 3 es el punto del vehículo en donde se monta el brazo manipulador y a partir de 4 hasta 9 son los puntos en donde se encuentran los actuadores del manipulador móvil.

Paso 1: Cómputo cinemático de la base móvil del robot:

$${}^1\dot{\vec{r}}_1 = [\dot{q}_1 \cos(q_2) \ 0 \ 0]^T$$

$${}^1\vec{\omega}_1 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1 \sin(q_2) / {}^1r_{x_{0_1,0_2}}]^T$$

Paso 2: Cómputo dinámico de la base móvil del robot:

$$\ddot{q}_1 = \frac{b^2}{\mu_0 b^2 - I_2 t g^2(q_2)} \tau_1 - \frac{b t g(q_2)}{\mu_0 b^2 - I_2 t g^2(q_2)} \tau_2 + \frac{t g(q_2) (I_2 - m_0 b^2)}{\cos^2(q_2) (\mu_0 b^2 - I_2 t g^2(q_2))} \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{b t g(q_2)}{I_2 t g^2(q_2) - \mu_0 b^2} \tau_1 - \frac{b^2 \mu_0}{I_2^2 t g^2(q_2) - \mu_0 I_2 b^2} \tau_2 + \frac{b m}{\cos^2(q_2) * (I_2 t g^2(q_2) - \mu_0 b)} \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

Paso 3: Cómputo de los términos $\frac{\partial^i \vec{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_j}$:

Asignar para $i=4, 5, \dots, n+3$

$$\frac{\partial^i \vec{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}} = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\frac{\partial^i \vec{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_{i-2}} = {}^i \mathbf{R}_{i-1} \frac{\partial^{i-1} \vec{\omega}_{i-1}}{\partial \ddot{q}_{i-2}}$$

Calcular para $j=4, 5, \dots, n+1$

para $i=j+2, j+3, \dots, n+3$

$$\frac{\partial^i \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_{j-1}} = {}^i \mathbf{R}_{i-1} \frac{\partial^{i-1} \dot{\omega}_{i-1}}{\partial \ddot{q}_{j-1}}$$

Paso 4: Cómputo de los términos $\frac{\partial^i \ddot{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j}$:

Calcular para $i=4, 5, \dots, n+2$

para $j=i+1, j+2, \dots, n+3$

$${}^j \ddot{r}_{O_{j-1}, O_i} = {}^j \mathbf{R}_{j-1} {}^{j-1} \ddot{r}_{O_{i-1}, O_i}$$

Calcular para $i= n+3, n+2, \dots, 5$

para $j=i-1, j-1, \dots, 4$

$${}^i \ddot{r}_{O_j, G_i} = {}^i \ddot{r}_{O_j, O_i} + {}^i \ddot{r}_{O_{j+1}, G_i}$$

Asignar para $i=4, 5, \dots, n+3$

$$\frac{\partial^i \ddot{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_{i-1}} = \frac{\partial^i \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}} \wedge {}^i \ddot{r}_{O_i, G_i}$$

Calcular para $i=5, 6, \dots, n+3$

para $j=4, 5, \dots, i-1$

$$\frac{\partial^i \ddot{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_{j-1}} = \frac{\partial^i \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_{j-1}} \wedge {}^j \ddot{r}_{O_i, G_j}$$

Paso 5: Cálculo de la matriz de inercia del brazo manipulador:

Asignar para $i=4, 5, \dots, n+3$

$$\frac{\partial^i \ddot{\alpha}_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}} = {}^i \mathbf{I}_{G_i} \frac{\partial^i \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

Calcular para $i= 5, 6, \dots, n+3$

para $j= 4, 5, \dots, i-1$

$$\frac{\partial^i \vec{\alpha}_i}{\partial \ddot{q}_{j-1}} = {}^i I_{G_i} \frac{\partial^i \vec{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_{j-1}}$$

Asignar para $i = 4, 5, \dots, n+3$

$$A_{n,i} = \left[\frac{\partial^n \vec{\omega}_n}{\partial \ddot{q}_{n-1}} \right]^T \frac{\partial^n \vec{\alpha}_n}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

Asignar para $i = 4, 5, \dots, n+2$

$$A_{i,i} = \left[\frac{\partial^i \vec{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}} \right]^T \frac{\partial^i \vec{\alpha}_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

Calcular para $i = 4, 5, \dots, n+2$

para $j = i+1, i+2, \dots, n$

$$A_{i,i} = A_{i,i} + \left[\frac{\partial^j \vec{\omega}_j}{\partial \ddot{q}_{i-1}} \right]^T \frac{\partial^j \vec{\alpha}_j}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

$$A_{j,i} = \left[\frac{\partial^j \vec{\omega}_j}{\partial \ddot{q}_{j-1}} \right]^T \frac{\partial^j \vec{\alpha}_j}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

Calcular para $j = 5, 6, \dots, n+2$

para $i = 4, 5, \dots, j-1$

para $k = j+1, j+2, \dots, n$

$$A_{j,i} = A_{j,i} + \left[\frac{\partial^k \vec{\omega}_k}{\partial \ddot{q}_{j-1}} \right]^T \frac{\partial^k \vec{\alpha}_k}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

Cálculo para $i = 4, 5, \dots, n+3$

$$\frac{\partial^i \vec{\beta}_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}} = m_i \frac{\partial^i \vec{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

Cálculo para $i = 4, 5, \dots, n+3$

$$B_{i,i} = \left[\frac{\partial^i \vec{\beta}_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}} \right]^T \frac{\partial^i \vec{r}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela ⁵²
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Cálculo para $i=4, 5, \dots, n+2$

para $j= i+1, i+2, \dots, n$

$$\frac{\partial^j \vec{\beta}_j}{\partial \ddot{q}_{i-1}} = m_j \frac{\partial^j \vec{\omega}_j}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

$$B_{i,i} = B_{i,i} + \left[\frac{\partial^j \vec{\beta}_j}{\partial \ddot{q}_{i-1}} \right]^T \frac{\partial^j \vec{r}_{G_j}}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

$$B_{j,i} = \left[\frac{\partial^j \vec{\beta}_j}{\partial \ddot{q}_{j-1}} \right]^T \frac{\partial^j \vec{r}_{G_j}}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

Calcular para $j= 5, 6, \dots, n+2$

para $i= 4, 5, \dots, j-1$

para $k= j+1, j+2, \dots, n$

$$B_{j,i} = B_{j,i} + \left[\frac{\partial^k \vec{\beta}_k}{\partial \ddot{q}_{j-1}} \right]^T \frac{\partial^k \vec{r}_{G_k}}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

Cálculo para $i=4, 5, \dots, n+3$

para $j= i, i+1, \dots, n$

$$D_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i}$$

Asignar para $i=4, 5, \dots, n+3$

para $j= i+1, i+2, \dots, n$

$$D_{j,i} = D_{i,j}$$

Paso 6: Cálculo del vector bias:

$${}^0\ddot{r}_0 = [0 \ 0 \ -g]^T$$

$${}^1\dot{r}_1 = [\dot{q}_1 \cos(q_2) \ 0 \ 0]^T$$

$${}^1\ddot{r}_1 = {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\ddot{r}_0 + [-\sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \ 0 \ 0]^T$$

$${}^1\vec{\omega}_1 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1 \sin(q_2) / {}^1r_{x_{O_1, O_2}}]^T$$

$${}^1\dot{\vec{\omega}}_1 = [0 \ 0 \ (\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2)) / {}^1r_{x_{O_1, O_2}}]^T$$

Cómputo cinemático del manipulador robótico:

Cálculo de las variables cinemáticas considerando aceleraciones de nudo cero.

$${}^3\vec{\omega}_3 = {}^3\mathbf{R}_1 {}^1\vec{\omega}_1$$

$${}^3\dot{\vec{\omega}}_3 = {}^3\mathbf{R}_1 {}^1\dot{\vec{\omega}}_1$$

$${}^3\ddot{\vec{r}}_{O_3} = {}^3\mathbf{R}_1 [{}^1\ddot{\vec{r}}_1 + {}^1\vec{\omega}_1 \wedge ({}^1\vec{\omega}_1 \wedge {}^1\vec{r}_{O_1, O_3}) + {}^1\dot{\vec{\omega}}_1 \wedge {}^1\vec{r}_{O_1, O_3}]$$

$${}^3\ddot{\vec{r}}_{G_3} = {}^3\ddot{\vec{r}}_{O_3}$$

Calcular para $i=4, 5, \dots, n+3$

$${}^i\vec{u}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}$$

$${}^i\vec{\omega}_i = {}^i\vec{u}_i + {}^i\vec{z}_i \dot{q}_{i-1}$$

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} + {}^i\vec{u}_i \wedge ({}^i\vec{z}_i \dot{q}_{i-1})$$

$${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} = {}^i\mathbf{R}_{i-1} [{}^{i-1}\ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \wedge ({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}, O_i}) + {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}, O_i}]$$

$${}^i\ddot{\vec{r}}_{G_i} = [{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\vec{\omega}_i \wedge ({}^i\vec{\omega}_i \wedge {}^i\vec{r}_{O_i, G_i}) + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \wedge {}^i\vec{r}_{O_i, G_i}]$$

Desarrollo de los términos $\frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial \ddot{q}_j}$

Calcular para $i=5, 6, \dots, n+3$

$$\frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial \ddot{q}_{i-2}} = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left(\frac{\partial {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}}{\partial \ddot{q}_{i-2}} \wedge {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}, O_i} \right)$$

Calcular para $j=3, 4, \dots, n$

para $i=j+3, j+6, \dots, n+3$

$$\frac{\partial {}^i \ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial \ddot{q}_j} = {}^i \mathbf{R}_{i-1} \left(\frac{\partial {}^{i-1} \ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}}}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial {}^{i-1} \dot{\vec{\omega}}_{i-1}}{\partial \ddot{q}_j} \wedge {}^{i-1} \vec{r}_{O_{i-1}, O_i} \right)$$

Desarrollo de los términos $\frac{\partial S_i}{\partial \ddot{q}_j}$

Calcular para $i= 4, 5, \dots, n+3$

$${}^i \vec{\xi}_i = {}^i \mathbf{I}_{G_i} \frac{\partial {}^i \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}}$$

$${}^i \vec{\vartheta}_i = {}^i \vec{\omega}_i \wedge ({}^i \mathbf{I}_{G_i} {}^i \vec{\omega}_i)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}} = m_i \left[({}^i \ddot{\vec{r}}_{G_i})^T \frac{\partial {}^i \ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_{i-1}} \right] + ({}^i \dot{\vec{\omega}}_i)^T {}^i \vec{\xi}_i + \left(\frac{\partial {}^i \dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_{i-1}} \right)^T {}^i \vec{\vartheta}_i$$

Computo del vector bias

Calcular para $j= 3, 4, \dots, n+2$

para $i=j+1, j+2, \dots, n+3$

$$\varphi_j = \varphi_j + \frac{\partial S_{i+1}}{\partial \ddot{q}_j}$$

Paso 7: Cálculo de las aceleraciones de los nudos:

Calcular para $i= 3, 4, \dots, n+2$

$$\ddot{q}_i = D_{i+1}(\tau_i - \varphi_i)$$

Con este algoritmo se pueden determinar las aceleraciones que se producen en el sistema robótico a partir de conocer las fuerzas o momentos que están siendo aplicados en los actuadores, Luego de un proceso de integración numérica se determina la velocidad y posteriormente la posición de los elementos que conforman este manipulador robótico móvil.

Ejemplo de aplicación

En esta última parte del capítulo, se presenta un ejemplo de aplicación, para un robot compuesto por un vehículo tipo triciclo, sobre el que se encuentra montado un robot manipulador articulado, que consta de seis eslabones, en consecuencia seis grados de libertad.

En el ejemplo, se determinan las aceleraciones que se generan en el robot manipulador móvil, luego de ser aplicado un estado de carga específico, seguidamente, por medio de un proceso de integración numérica, se determinan las velocidades y posiciones que adquiere el robot.

En lo que respecta a las características que se utilizan para el robot, las mismas se encuentran en los anexos al final del texto, y fueron basadas en el hipotético caso de colocar un robot PUMA 600, de la compañía Unimation y Co., sobre un vehículo Seekur desarrollado por Adept MobileRobots, pero con ciertas modificaciones.

La figura 3.3 ilustra el ensamblaje del robot PUMA 600 en el Seekur, como se propone en el ejemplo de aplicación:

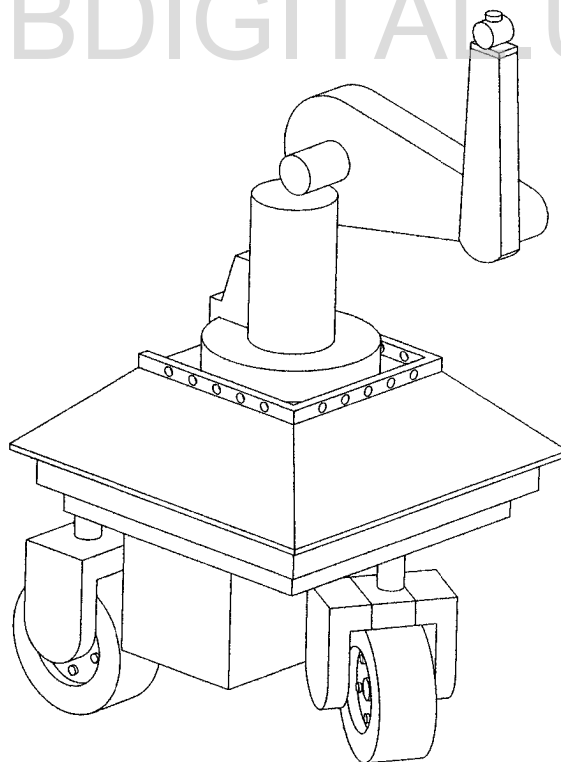


Figura 3.3 Ensamblaje PUMA-Seekur.

Con el algoritmo propuesto, fue desarrollado un código en el programa Matlab R2008a y fue comparado para su respectiva validación con un modelo realizado en el programa comercial de simulación dinámica.

Se considera que al principio del algoritmo, el vehículo se encuentra en reposo y sus velocidades y aceleraciones en todos sus puntos son nulas. Al vehículo se le aplica una fuerza de 150 N, en el punto central del eje trasero del triciclo, que le genera un desplazamiento en la dirección longitudinal del vehículo, adicionalmente se aplica un par de 0.3 N-m, en el eje delantero del triciclo, que le permite direccionar la rueda delantera. Finalmente, sobre cada una de las articulaciones del brazo articulado se aplican pares, que son representados según el vector τ y que expresan los pares aplicados desde el brazo 1 hasta el brazo final $\tau = [6; 50; 10; -0.1; -0.5; -0.1] \text{N-m}$. El tiempo que se consideró para realizar las corridas fue de 1 segundo.

A continuación, se muestran gráficas en donde se indican las aceleraciones obtenidas en todo el mecanismo; en cada gráfico se puede comparar las curvas que muestran el resultado obtenido según el algoritmo propuesto en esta tesis, que son denominadas PDD-MM, con las curvas que muestran el resultado obtenido según el modelo realizado en el programa comercial, que son denominadas PDD-CO.

Las figuras 3.4 a y b, representan las aceleraciones que fueron estudiadas en el triciclo, que son la aceleración lineal en el punto medio del eje trasero, en la dirección longitudinal del vehículo, y la aceleración angular en la rueda delantera del triciclo a lo largo del eje z perpendicular a la superficie de desplazamiento del vehículo:

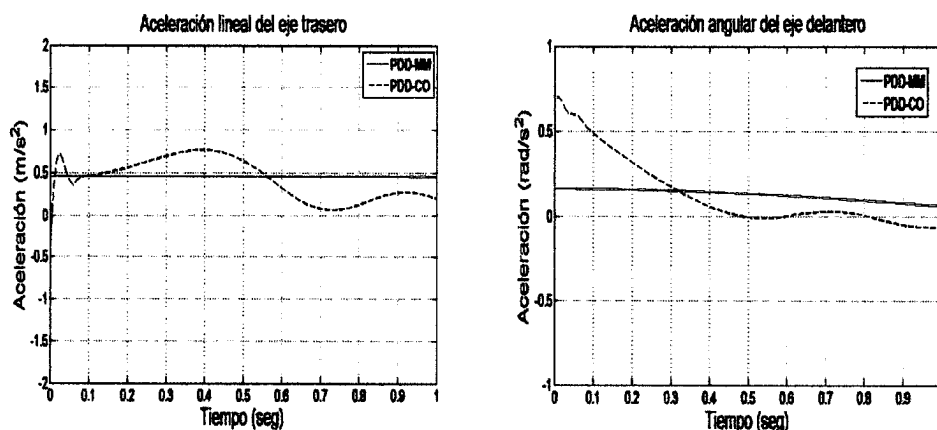
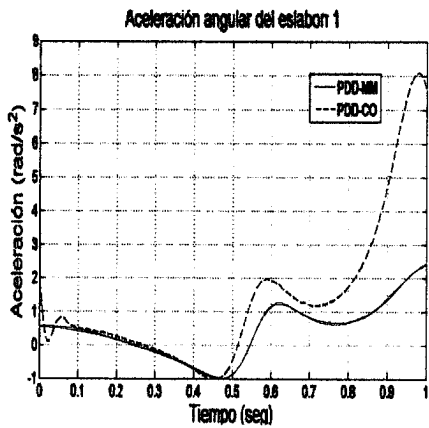
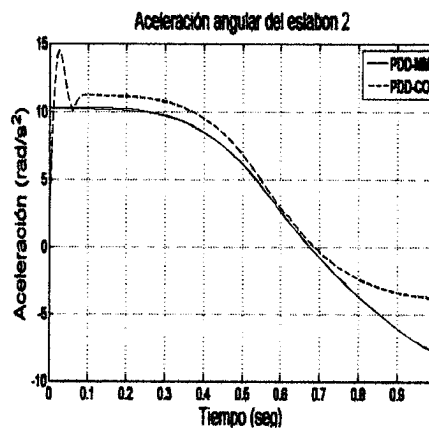


Figura 3.4.a) Aceleración lineal, eje trasero. b) Aceleración angular, eje delantero.

La figura 3.4.c, hasta la 3.4.h muestran las aceleraciones angulares de los brazos del manipulador articulado.

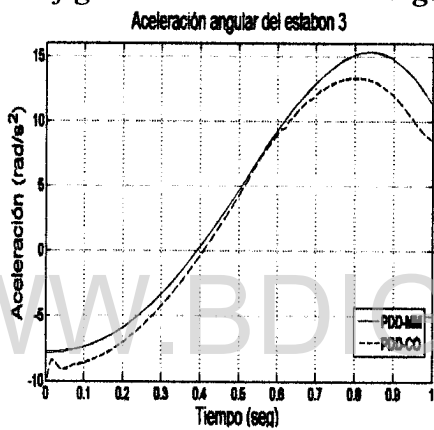


c)

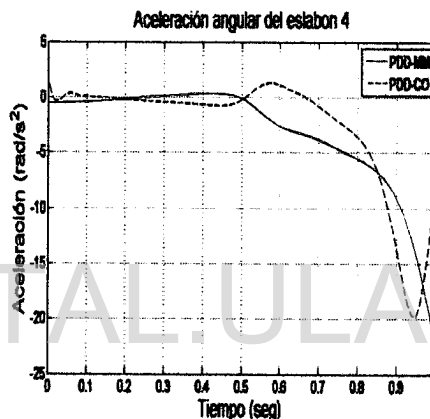


d)

figura 3.4 Aceleraciones angulares del c) eslabón 1; d) eslabón 2.

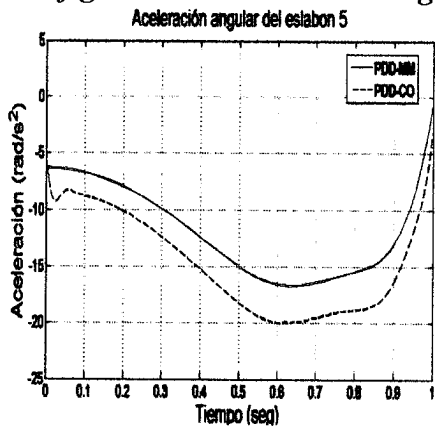


e)

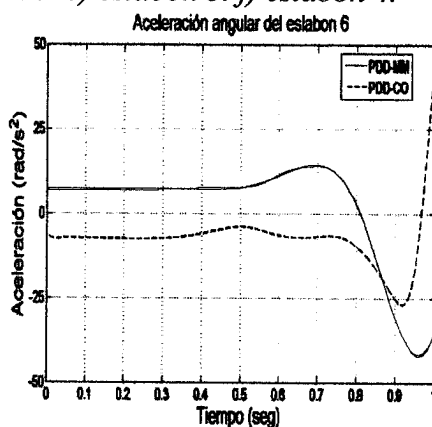


f)

figura 3.4 Aceleraciones angulares del e) eslabón 3. f) eslabón 4.



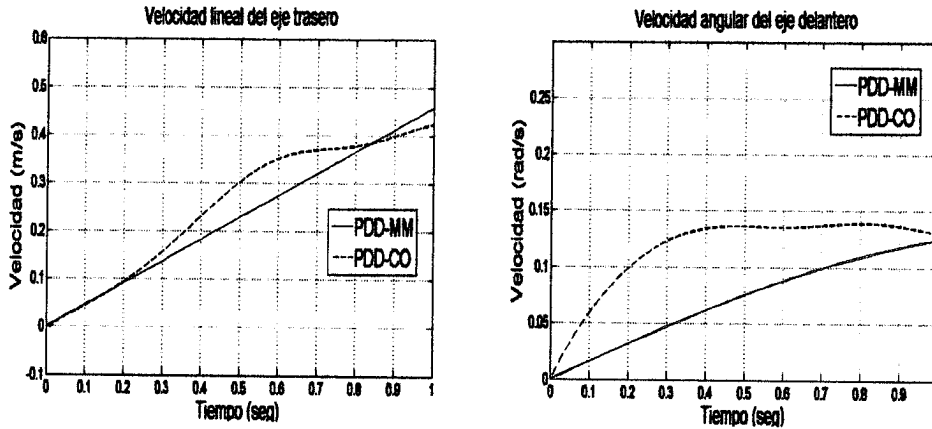
g)



h)

figura 3.4 Aceleraciones angulares del g) eslabón 5. h) eslabón 6.

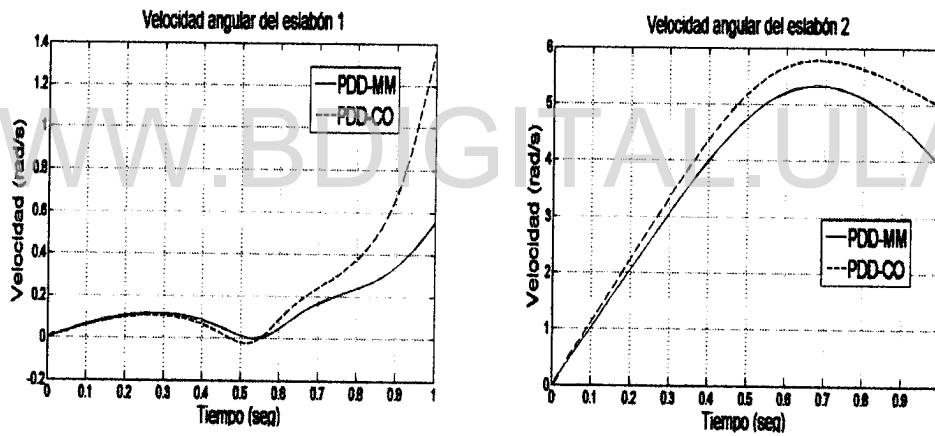
Las velocidades y las posiciones obtenidas en el procedimiento se muestran en las siguientes figuras, las figuras 3.5 muestran velocidades lineales o angulares según cada caso, y las figuras 3.6 muestran desplazamientos o rotaciones de cada caso.



a)

b)

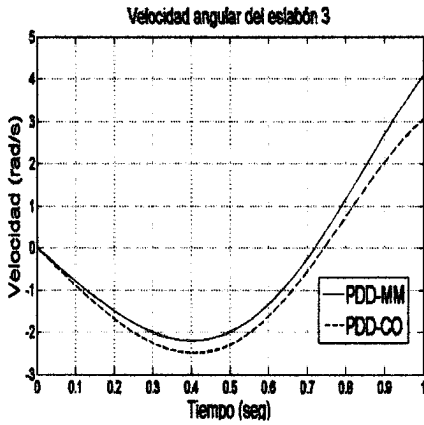
Figura 3.5.a) Velocidad lineal, eje trasero. b) Velocidad angular eje delantero.



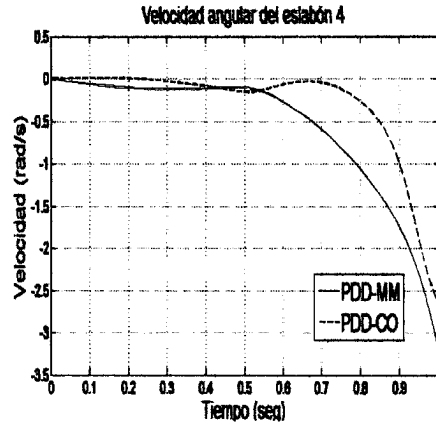
c)

d)

Figura 3.5. Velocidad angular del c) eslabón 1; d) eslabón 2;

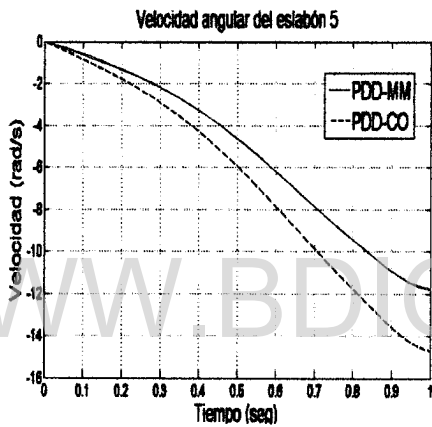


e)

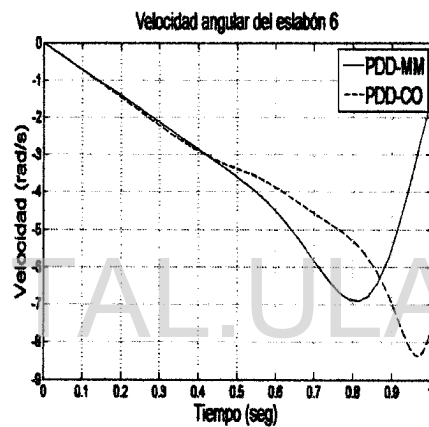


f)

Figura 3.5. Velocidad angular del e) eslabón 3; f) eslabón 4.

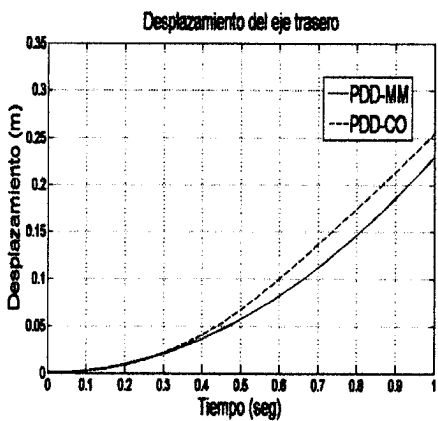


g)

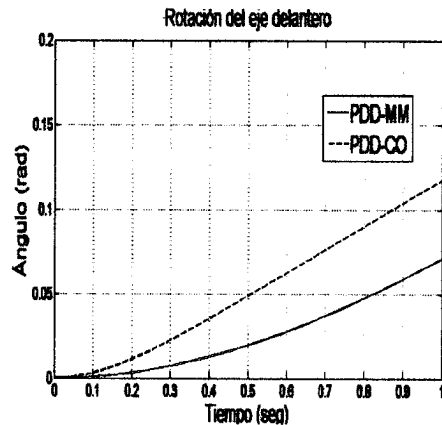


h)

Figura 3.5. Velocidad angular del g) eslabón 5; h) eslabón 6.

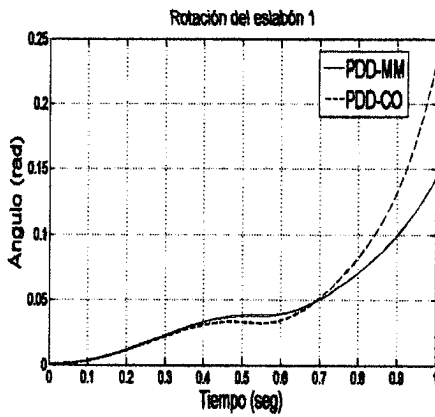


a)

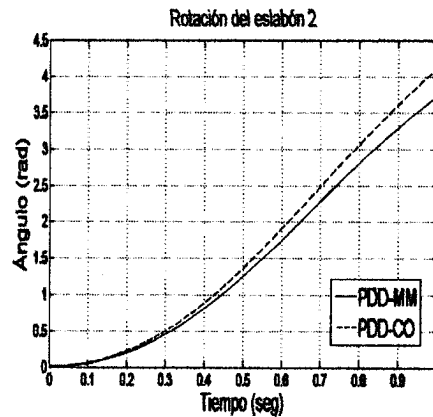


b)

Figura 3.6. a) Desplazamiento lineal, eje trasero. b) Rotación angular eje delantero.

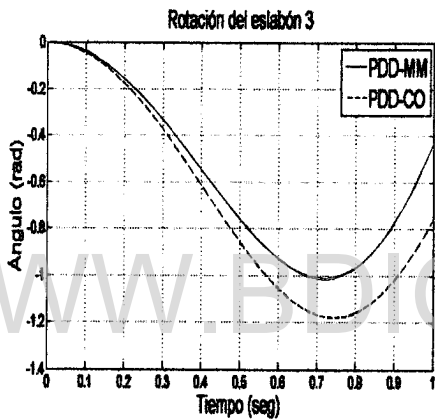


c)

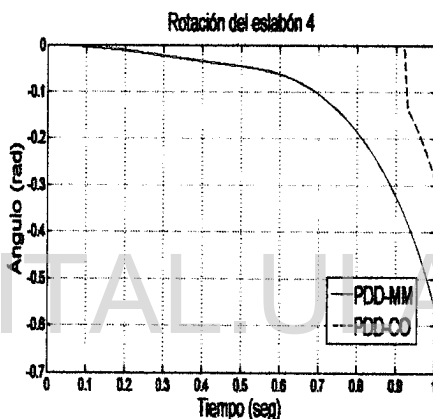


d)

Figura 3.6. Rotación angular c) eslabón 1; d) eslabón 2.

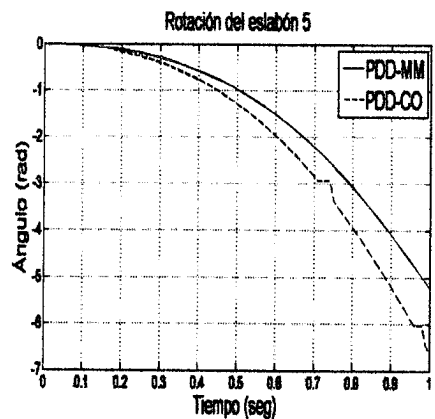


e)

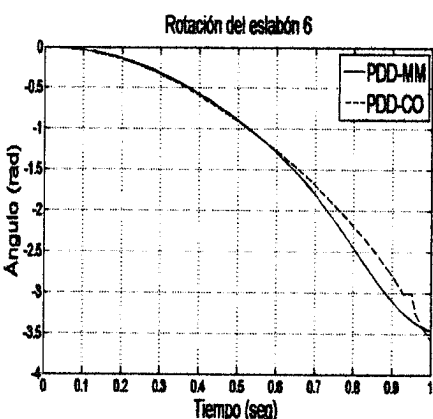


f)

Figura 3.6. Rotación angular e) eslabón 3; f) eslabón 4.



g)



h)

Figura 3.6. Rotación angular g) eslabón 5; h) eslabón 6.

Adicionalmente, se realiza otra corrida de un segundo de duración con un estado de carga de una fuerza $F=300\text{ N}$, y un par nulo $M=0\text{ N}\cdot\text{m}$, y un vector τ también nulo $\tau=[0; 0; 0; 0; 0; 0]$. Las figuras 3.7, 3.8 y 3.9 expresan las aceleraciones, velocidades y posiciones conseguidas, respectivamente, se vuelve a comparar el modelo desarrollado según el algoritmo propuesto en esta tesis, con el modelo desarrollado en el programa comercial.

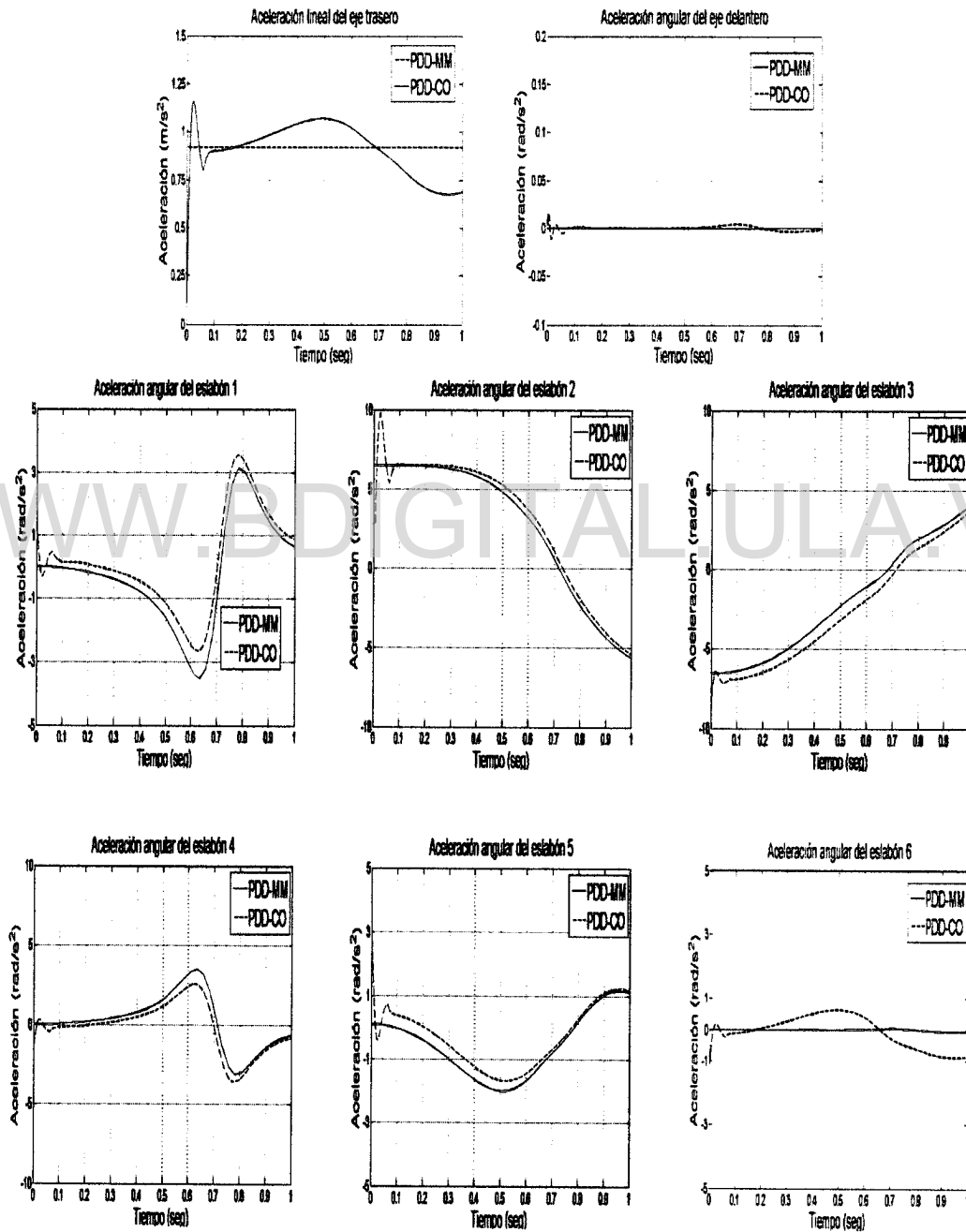


Figura 3.7. Aceleraciones lineales y angulares, según cada caso.

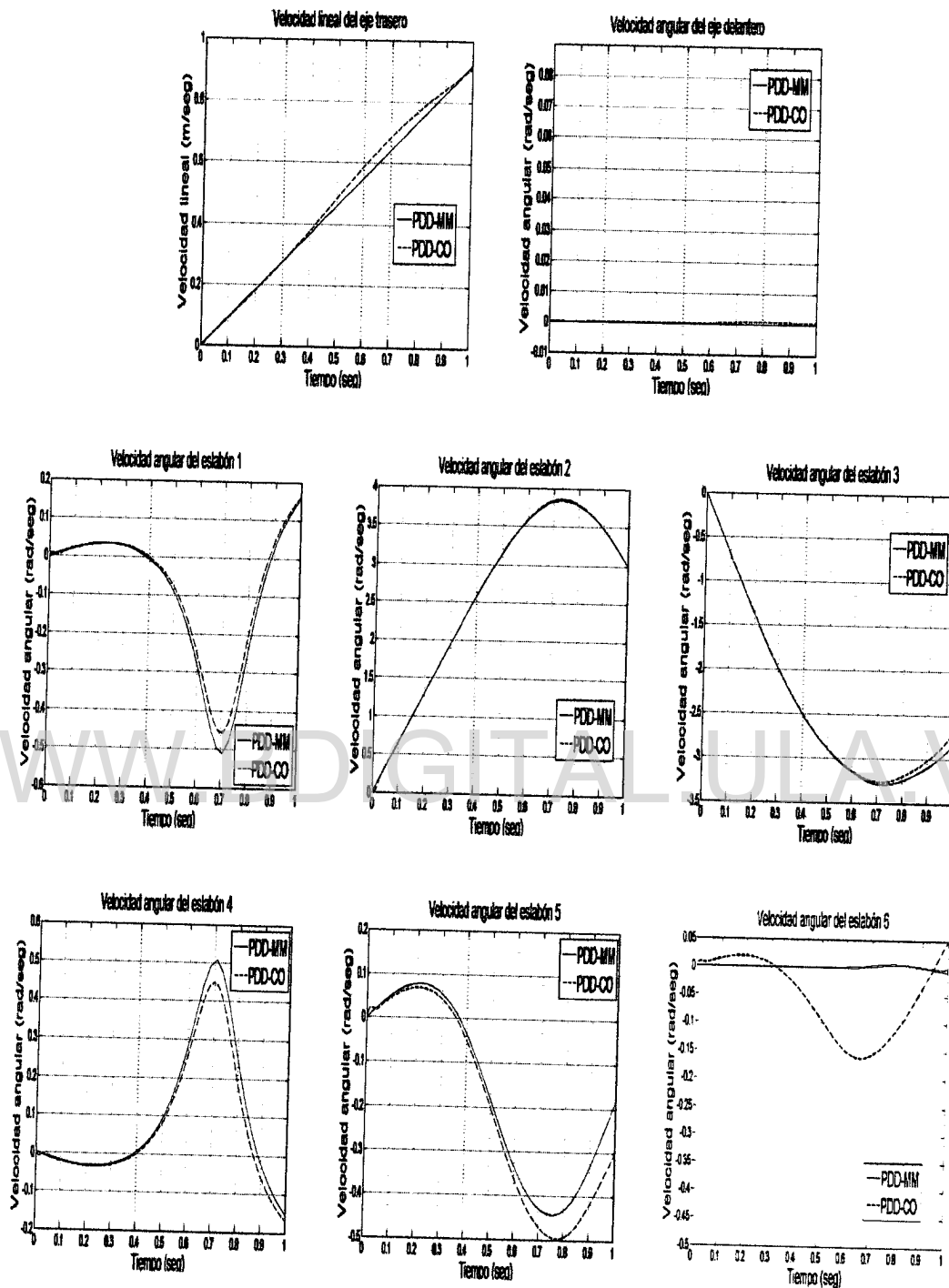


Figura 3.8. Velocidades lineales y angulares, según cada caso.

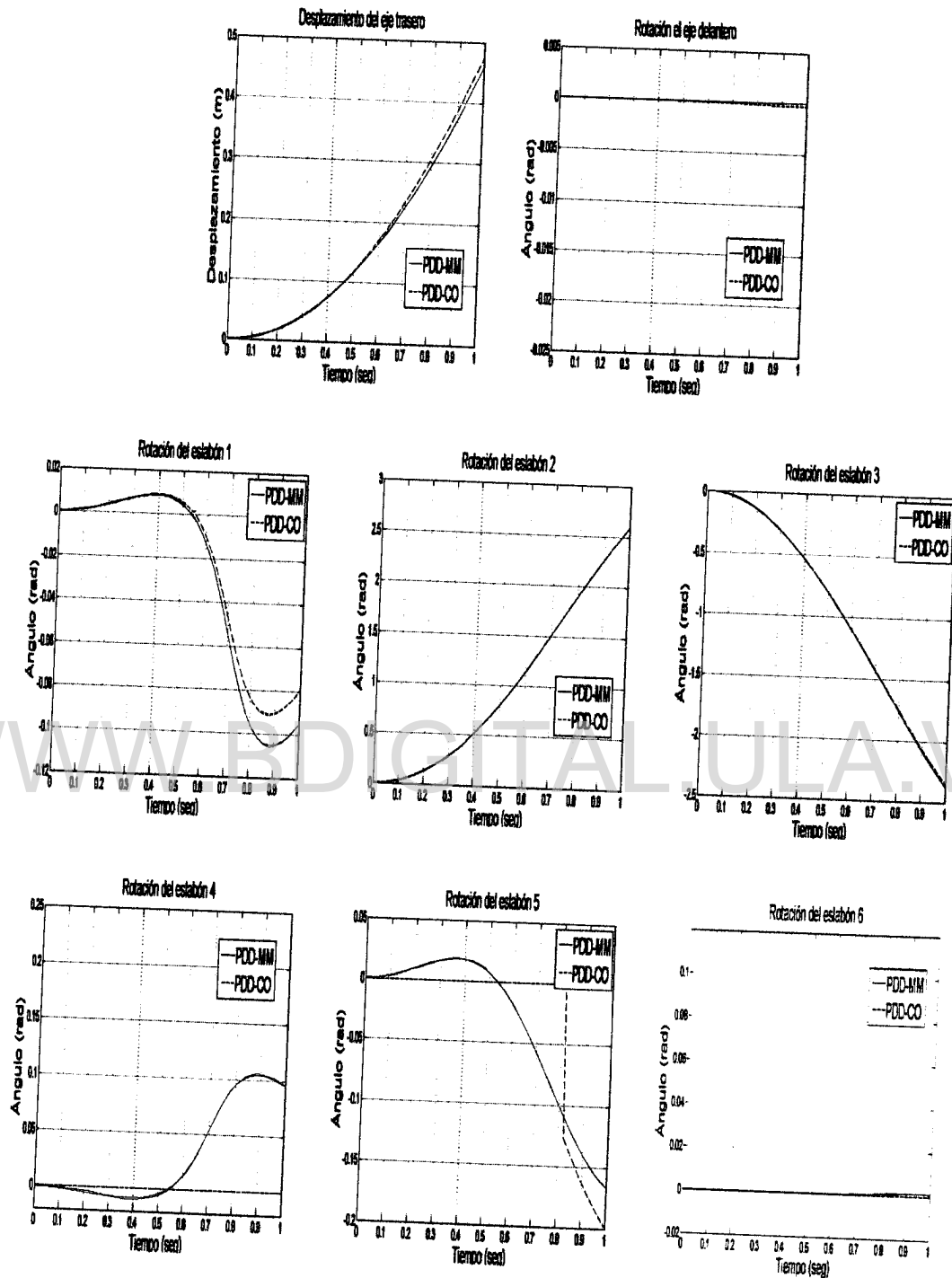


Figura 3.9. Desplazamientos y rotaciones, según cada caso.

En las gráficas se observan buenas aproximaciones entre los dos modelos comparados, sin embargo, cuando el valor del momento aplicado en el eje delantero del vehículo se incrementa, la diferencia entre los resultados obtenidos de ambos modelos se acentúa. Es sabido que el modelado de partes rodantes conduce a un mayor error, debido en parte a que el deslizamiento que se produce en la rueda con respecto al suelo, es mucho más complejo que el movimiento que se produce por medio de una junta de revolución, contribuyendo este factor a que las diferencias sean mayores.

Por otro lado, el modelo desarrollado a partir del algoritmo propuesto en esta investigación, presenta un comportamiento más estable que el realizado por el programa comercial. Especialmente, se observa que al principio del desplazamiento los resultados obtenidos por el modelo desarrollado con el programa comercial en ocasiones presentan alguna perturbación, lo que no se observa con el algoritmo desarrollado en este trabajo.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

WWW.BDIGITALUNIAVE

CAPÍTULO IV

Conclusiones

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Conclusiones.

En este trabajo se utilizaron las ecuaciones de Gibbs-Appell para modelar un robot manipulador móvil, que consta de una plataforma móvil definida con un sistema de locomoción de tipo triciclo, sobre la que se apoya un brazo manipulador robótico de seis grados de libertad y conformado por pares de tipo revolución. Todos los elementos fueron considerados rígidos, incluyendo las ruedas de la plataforma móvil y todos los pares fueron considerados ideales.

En el trabajo se desarrolló un algoritmo que ha permitido resolver el problema dinámico directo del manipulador robótico móvil, es decir, se resuelve el problema de simulación del mecanismo en estudio. La cinemática que se impuso en el modelo, generó restricciones de tipo no holónoma, que fueron consideradas en el análisis, e incorporadas a las ecuaciones dinámicas.

El algoritmo desarrollado emplea una notación de tipo vectorial, y para la aplicación de las matrices de transformación se utilizaron dos tipos de notaciones, la notación Sheth-Uicker para la plataforma móvil, mientras que para el brazo robótico se utilizó la notación Denavit-Hartenberg.

El algoritmo fue elaborado con la ayuda del programa MATLAB R2008a, y los resultados obtenidos se pudieron comparar con un modelo desarrollado bajo un programa comercial de simulación dinámica, para realizar la validación de los mismos.

Los resultados obtenidos, entre la simulación realizada por el algoritmo desarrollado en esta tesis y la realizada bajo el programa comercial, mostraron gran semejanza. Sin embargo, se observó que a medida que aumentaba el par ejercido en el eje delantero del vehículo, las diferencias comenzaron a aumentar, probablemente por la dificultad en modelar el deslizamiento ejercido en las ruedas del vehículo, cuando estas comienzan a rotar.

A pesar de que el algoritmo desarrollado presenta ciertas deficiencias, como por ejemplo, no se ha considerado la eficiencia numérica del algoritmo, tampoco se ha utilizado otro tipo de notación, como la notación tensorial, al menos se tiene un algoritmo basado en Gibbs-Appell que puede ser mejorado para su aplicación en este tipo de mecanismos.

Recomendaciones

Resolver el problema dinámico inverso para el manipulador móvil robótico por medio de las ecuaciones de Gibbs-Appell.

Ampliar el diseño para manipulador robóticos móviles en los que la base sea otro tipo de vehículo, como por ejemplo tipo omnidireccional, diferencial o sincrónica.

Incluir diferentes suposiciones iniciales en el diseño tal como superficies que no sean planas, eje de direccionamiento no perpendicular a la superficie, etc.

Emplear los algoritmos desarrollados para que sirvan de base para el estudio de sistemas de control para robots manipuladores móviles.

Analizar posibles algoritmos más eficientes haciendo uso de otro tipo de notación como por ejemplo de tipo tensorial.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

WWW.BDIGITAL.VE **ANEXOS**

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

ANEXO 1

Notación y terminología

Notación.

A continuación se describe la manera como se denotan los diferentes elementos que se utilizan a lo largo de la tesis:

Los vectores de posición, por ejemplo ${}^i\vec{r}_{O_{i-1},O_i}$, que son de magnitud (3×1) son denotados con una letra minúscula cursiva con una flecha por la parte superior, un superíndice en el lado izquierdo que se refiere al sistema de coordenadas al que está referido, y un subíndice en el lado derecho en el que se indican los puntos donde comienza y termina el vector. En este ejemplo el vector se llama \vec{r} , está referido a el sistema i , el punto de partida del vector es O_{i-1} , y el punto final es O_i . Otro ejemplo es el vector ${}^R\vec{p}_R$ en donde, la única diferencia con respecto al ejemplo anterior es el subíndice del lado derecho, R , el cual indica el cuerpo al cual pertenece este vector, en ocasiones hasta se prescinde de este subíndice cuando el vector pertenece al mismo cuerpo al que pertenece el sistema de referencia que describe al vector. Los vectores que se refieren a un conjunto de cantidades escalares como es el vector de fuerzas o pares ejercidos en los actuadores, $\vec{\tau}$, se representa también con una letra en cursiva con una flecha en la parte de arriba, y su magnitud es $(n \times 1)$. En los vectores normalmente, se omite el superíndice del lado izquierdo cuando este se refiere al sistema de coordenadas global.

Los tensores cartesianos de inercia (3×3) se denotan con letra en negrita, ${}^i\mathbf{I}_{G_i}$, el superíndice i se indica el sistema de referencia al cual se refiere el tensor, y el subíndice G_i indica el cuerpo al que pertenece y el punto al que se refiere. Otros tensores utilizados son los de rotación, ${}^i\mathbf{R}_j$, que relaciona la orientación del sistema j respecto del sistema i . También, tensores como el Jacobiano del manipulador, \mathbf{J} , no requiere de subíndices ni de superíndices.

Convención Denavit-Hartenberg.

En esta tesis se utiliza la notación Denavit-Hartenberg para describir las relaciones traslacional y rotacional existentes entre los elementos del manipulador robótico, en este anexo se procede a describir esta notación.

Denavit-Hartenberg [12] propusieron un método sistemático para establecer un sistema de coordenadas ligado a cada cuerpo del mecanismo articulado. Este método es un sistema matricial en donde las matrices de transformación homogénea son de magnitud 4×4 , que relacionan el sistema de coordenada de un elemento con el sistema de coordenadas del elemento anterior, de tal forma que cualquier elemento, en especial el elemento terminal pueden ser expresados en términos del sistema de coordenadas global.

Aunque la notación de Denavit-Hartenberg resulta ser muy efectiva, si se emplea de la manera como fue planteada originalmente, puede llevar a ambigüedades en mecanismos que poseen más de dos barras. En este documento se utiliza una versión propuesta por Khalil y colegas [48] en el año 1986 que evita ese tipo de ambigüedades.

La siguiente figura muestra la manera como se representan los sistemas de coordenadas según la notación Denavit-Hartenberg y que se describe a continuación.

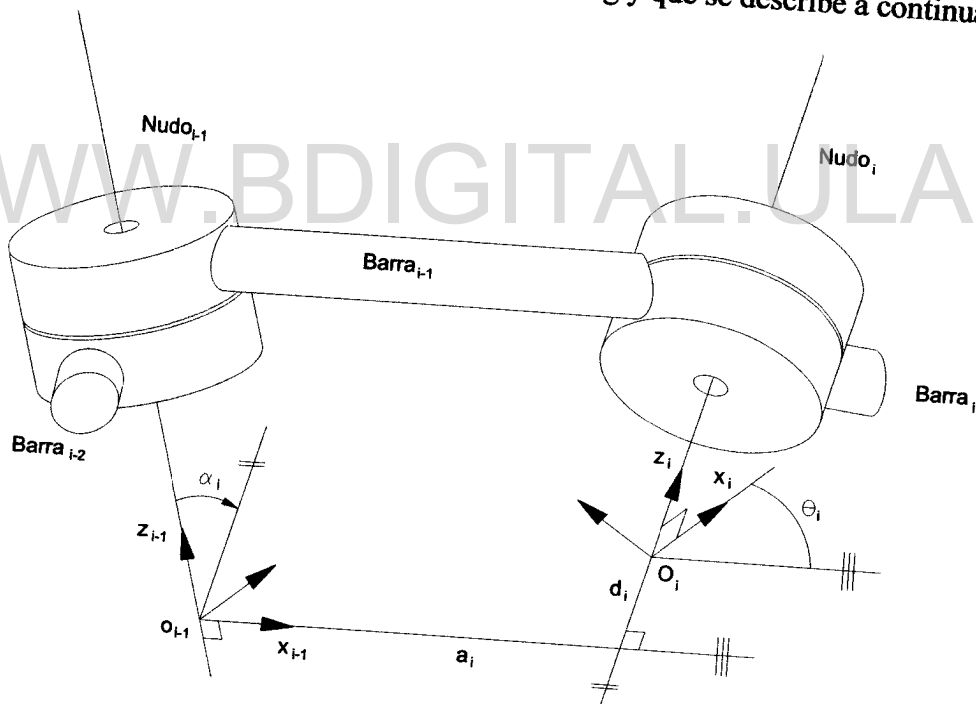


Figura A.1. Asignación de coordenadas según la notación Denavit-Hartenberg.

Se comienza la notación D-H determinando el sistema de coordenadas de cada uno de los eslabones, siguiendo las tres reglas que se describen seguidamente:

- El eje z_{i-1} se encuentra a lo largo del eje de la articulación sobre la que se mueve el cuerpo $i-1$.
- El eje x_{i-1} es normal a los ejes z_{i-1} y z_i .
- El eje y_{i-1} es normal a los ejes z_{i-1} y x_{i-1} .

En cuanto al sistema de coordenadas global, su origen se elige en cualquier parte de la base, pudiendo coincidir con el sistema de coordenadas ligado a la primera barra. El último sistema de coordenadas debe ubicarse al inicio del último cuerpo.

Se deben conocer los siguientes parámetros para definir cada sistema de coordenadas local son:

θ_i : Ángulo de la articulación medida a partir de x_{i-1} hasta x_i con respecto a z_i .

d_i : Distancia entre x_{i-1} y x_i medida a lo largo de z_i .

a_i : Distancia entre z_{i-1} y z_i medida a lo largo de x_{i-1} .

α_i : Ángulo de separación del eje z_{i-1} hasta z_i con respecto a x_{i-1} .

En el caso que se estudia en el actual trabajo, en donde las articulaciones son de tipo de revolución, el único parámetro que varía cuando el cuerpo i rota con respecto al $i-1$ es el ángulo θ_i mientras que los demás permanecen constantes:

De esta manera, se puede obtener la matriz de rotación que relacionan los sistemas de coordenadas correspondientes a dos cuerpos consecutivos $i-1$ e i :

$${}^{i-1}R_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\text{sen } \theta_i & 0 \\ \cos \alpha_i \text{ sen } \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\text{sen } \alpha_i \\ \text{sen } \alpha_i \text{ sen } \theta_i & \text{sen } \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

También se define el vector que relaciona las distancias entre los orígenes de dos sistemas de coordenadas consecutivos, O_{i-1} y O_i :

$${}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1},O_i} = \begin{bmatrix} a_i \\ d_i \text{ sen } \alpha_i \\ -d_i \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

En la siguiente figura se muestra de manera esquemática el vector indicado en la ecuación anterior, así como también el vector que relaciona el centro de gravedad del elemento.

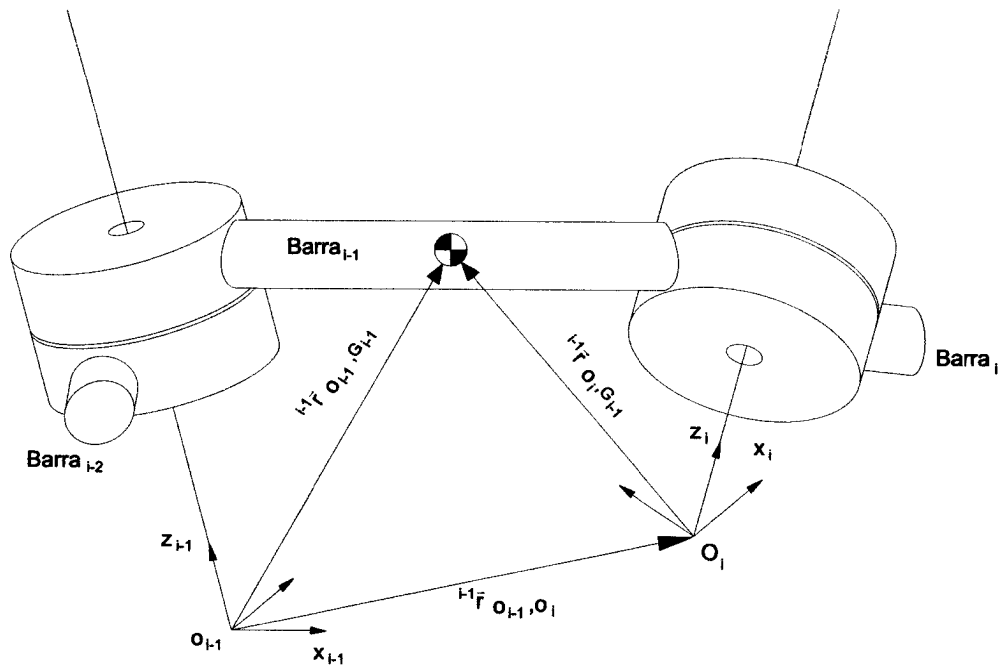


Figura A.2. Vector de posición que relaciona dos orígenes de sistemas de coordenadas consecutivos.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

El primer axioma, identidad, es claro, puesto que no es necesaria ninguna transformación, ni de rotación ni de traslación para convertir de un sistema de coordenadas al mismo o a su sistema de coordenadas de punto coincidente.

El axioma de la cascada especifica el orden en que deben ser multiplicadas las matrices de transformación; la transformación de un sistema de coordenadas a otro debe, en primer lugar, transformar del sistema de coordenadas inicial al sistema de coordenadas intermedio y luego del sistema de coordenadas intermedio al sistema de coordenadas final.

El axioma de la inversa afirma que la matriz de transformación de un sistema de coordenadas inicial a uno final es igual a la inversa de la matriz de transformación del sistema final al sistema inicial.

El axioma de la velocidad cero sugiere, que si se deriva una matriz de transformación con respecto al tiempo, y en consecuencia obtenemos la matriz de transformación que define las velocidades relativas entre ambos sistemas, cuando se trata de un sistema de coordenadas y otro que se encuentra en el mismo eslabón, la velocidad relativa es cero. Y si se trata de la transformación entre un sistema y el mismo la velocidad relativa también es cero.

De manera semejante, se puede entender el axioma de la aceleración cero, y así al diferenciar una matriz de transformación dos veces respecto del tiempo, se obtiene la matriz que relaciona las aceleraciones relativas entre los dos sistemas de coordenadas, si se trata de dos sistemas que se encuentran en el mismo eslabón la aceleración relativa es cero, y si la transformación se efectúa de un sistema al mismo también la aceleración relativa es cero.

Es de aclarar, que se debe tener especial cuidado al realizar una derivación de las matrices de transformación, no se puede diferenciar de ambos lados de la igualdad, por ejemplo la matriz de transformación entre un sistema de coordenadas y el de su punto coincidente resulta de la siguiente manera, ${}^A\Pi_{\bar{A}} = I$, si se deriva de ambos lados el resultado es el siguiente, ${}^A\dot{\Pi}_{\bar{A}} = 0$, y no es cierto que la velocidad relativa entre ambos puntos sea cero, pues en la mayoría de los casos la velocidad relativa entre un sistema de coordenadas y el de su punto coincidente resulta ser distinto de cero.

En cuanto a los dos axiomas restantes, el de la velocidad indica la manera como se puede expresar la derivada de la matriz de transformación en función de aplicar axiomas de cascadas con las matrices de transformación y sus primeras derivadas.

El axioma de la aceleración expresa, que la segunda derivada de una matriz de transformación, se establece en términos de hacer el axioma de cascadas con las matrices de transformación y sus primeras y segundas derivadas.

Estos axiomas definidos en la tabla A.1 conducen a los corolarios de las matrices de transformación que se resumen en la tabla A.2:

Tabla A.2 Corolarios del algebra de las matrices de transformación.

Coincidencia instantánea	$\bar{A}\Pi_B = {}^A\Pi_B = \bar{A}\Pi_{\bar{B}} = {}^A\Pi_B$
Cascada para la posición	${}^A\Pi_Z = {}^A\Pi_B {}^B\Pi_C {}^C\Pi_D \dots {}^Y\Pi_Z$
Cascada para la velocidad	${}^A\dot{\Pi}_Z = {}^A\dot{\Pi}_B {}^B\Pi_Z + {}^A\Pi_B {}^B\dot{\Pi}_C {}^C\Pi_Z + \dots + {}^A\Pi_Y {}^Y\dot{\Pi}_Z$
Cascada para la aceleración	${}^A\ddot{\Pi}_Z = {}^A\ddot{\Pi}_B {}^B\Pi_Z + {}^A\Pi_B {}^B\ddot{\Pi}_C {}^C\Pi_Z + \dots + {}^A\Pi_Y {}^Y\ddot{\Pi}_Z$ $+ 2{}^A\dot{\Pi}_B ({}^B\dot{\Pi}_C {}^C\Pi_Z + {}^B\Pi_C {}^C\dot{\Pi}_D {}^D\Pi_Z + \dots + {}^B\Pi_Y {}^Y\dot{\Pi}_Z)$ $+ 2{}^A\Pi_B {}^B\dot{\Pi}_C ({}^C\dot{\Pi}_D {}^D\Pi_Z + \dots + {}^C\Pi_Y {}^Y\dot{\Pi}_Z)$ $+ \dots + 2{}^A\Pi_x {}^x\dot{\Pi}_y {}^y\dot{\Pi}_Z$

El corolario del coincidente instantáneo, se puede desarrollar aplicando los axiomas de identidad y de cascada. Este corolario simplifica la expresión de la matriz de transformación, eliminando el sistema de coordenada del punto instantáneo coincidente.

El corolario de la cascada para la posición calcula la matriz de transformación de un sistema de coordenada inicial a un sistema de coordenadas final, por medio de un conjunto de cascadas entre sistemas de coordenadas intermedios. Este corolario se deriva de aplicar repetidamente el axioma de la cascada.

El corolario de la cascada para la velocidad, también se deriva de aplicar repetidamente los axiomas de velocidad y de la cascada.

Finalmente, el corolario de la cascada para la aceleración, se deriva de aplicar repetidamente los axiomas de velocidad y de aceleración.

ANEXO 3

Parámetros del manipulador móvil

El ejemplo utilizado en los capítulos 3 y 4, se basa en un robot compuesto por una base móvil sobre la que se acopla un brazo manipulador robótico.

Debido a la dificultad de encontrar parámetros geométricos y mecánicos de manipuladores semejantes, optamos por seleccionar una combinación ficticia, pero que de igual manera sirve de punto de comparación para verificar la validez de los algoritmos desarrollados.

Esta configuración consiste en un robot móvil basado en el modelo Seekur Jr., diseñado por Adept Thecnology Inc., con un cambio significativo, como lo es su sistema de locomoción, considerando el mismo como un sistema triciclo, en donde la rueda delantera es la que permite el direccionamiento del robot, a diferencia del sistema original que se trata de un sistema diferencial de cuatro ruedas. Luego sobre esta base móvil se encuentra un brazo robótico modelo PUMA 560, diseñado por Unimation & Co., que aunque el conjunto resultaría un modelo algo inestable, por sus dimensiones, resulta bastante práctico desde el punto de vista del conocimiento global de la geometría de las partes, así como de los demás parámetros necesarios para modelar el sistema.

En las siguientes secciones se indican los parámetros geométricos y mecánicos de ambos sistemas robóticos, utilizados para resolver los ejemplos propuestos en los capítulos anteriores.

Parámetros del robot Seekur Jr.

Seekur es un robot fabricado por Adept Thecnology Inc., y desarrollado para su uso en seguridad, inspección e investigación. Es un robot que tiene un sistema de locomoción omnidireccional, por lo tanto su movimiento es realmente holónimo. Sin embargo, los parámetros que se utilizan en la presente investigación, están relacionados a las dimensiones y pesos del robot.

Las especificaciones técnicas del robot son las siguientes:

Sus dimensiones son: 1.40 m de longitud, 1.30 m de ancho y 1.10 m de alto.

El peso total del vehículo es: 350 kg.

El diámetro de las ruedas es: 0.40 m.

La distancia entre los ejes es: 0.90 m.

Longitud de los ejes entre los centros de las ruedas: 0.628 m.

Estas magnitudes son las que se necesitan conocer para modelar el vehículo. En cuanto a los centros de gravedad de los distintos elementos que conforman al vehículo, como por ejemplo, los ejes, las ruedas y el cuerpo del robot, se consideran ubicados en los centros geométricos de cada elemento.

Parámetros del robot PUMA.

Los parámetros que se utilizan en este trabajo, están referidos a la investigación realizada por Angeles y Ma [49] en el año 1988, y como es sabido, éste ha sido un modelo ampliamente utilizado en las investigaciones realizadas en el área.

En las tablas A.4, A.5, A.6 y A.7 se encuentra la información del robot PUMA 560 según Angeles y Ma [49], luego la figura A.3 esquematiza el robot PUMA de Unimation & Co., y allí se especifican los centros y las direcciones de los sistemas de coordenadas locales. Todo esto se ha realizado considerando la notación Denavit-Hartenberg, que ha sido utilizada en esta tesis.

Tabla A.4. Parámetros Denavit-Hartenberg del robot PUMA 560.

Barra	d_i (mm)	a_i (mm)	α_i (rad)	θ_i (rad)
1	0.0	0.0	0.0	q_1
2	0.0	0.0	$-\pi/2$	q_2
3	-0.14909	0.4318	0.0	q_3
4	-0.4318	-0.02032	$\pi/2$	q_4
5	0.0	0.0	$-\pi/2$	q_5
6	0.0	0.0	$\pi/2$	q_6

Tabla A.5. Masa de las barras.

Barra	masa (Kg)
1	10.521
2	15.781
3	8.767
4	1.052
5	1.052
6	0.351

Tabla A.6. Elementos del tensor de inercia de barras respecto de centros de masa.

Barra	I_{xx} (kg/m ²)	I_{yy} (kg/m ²)	I_{zz} (kg/m ²)	I_{xy} (kg/m ²)	I_{yz} (kg/m ²)	I_{xz} (kg/m ²)
1	1.6120	0.5091	1.6120	0.0	0.0	0.0
2	0.4898	8.0783	8.2672	0.0	0.0	0.0
3	3.3768	0.3009	3.3768	0.0	0.0	0.0
4	0.1810	0.1810	0.1273	0.0	0.0	0.0
5	0.0735	0.0735	0.1273	0.0	0.0	0.0
6	0.0071	0.0071	0.0141	0.0	0.0	0.0

Tabla A.7. Posiciones de los centros de masas de las barras.

Barra	${}^i r_{x_{O_i}G_i}$ (m)	${}^i r_{y_{O_i}G_i}$ (m)	${}^i r_{z_{O_i}G_i}$ (m)
1	0.0	-0.054	0.0
2	0.1398	0.0	0.14909
3	-0.00032	-0.197	0.0
4	0.0	0.0	-0.057
5	0.0	-0.007	0.0
6	0.0	0.0	0.03725

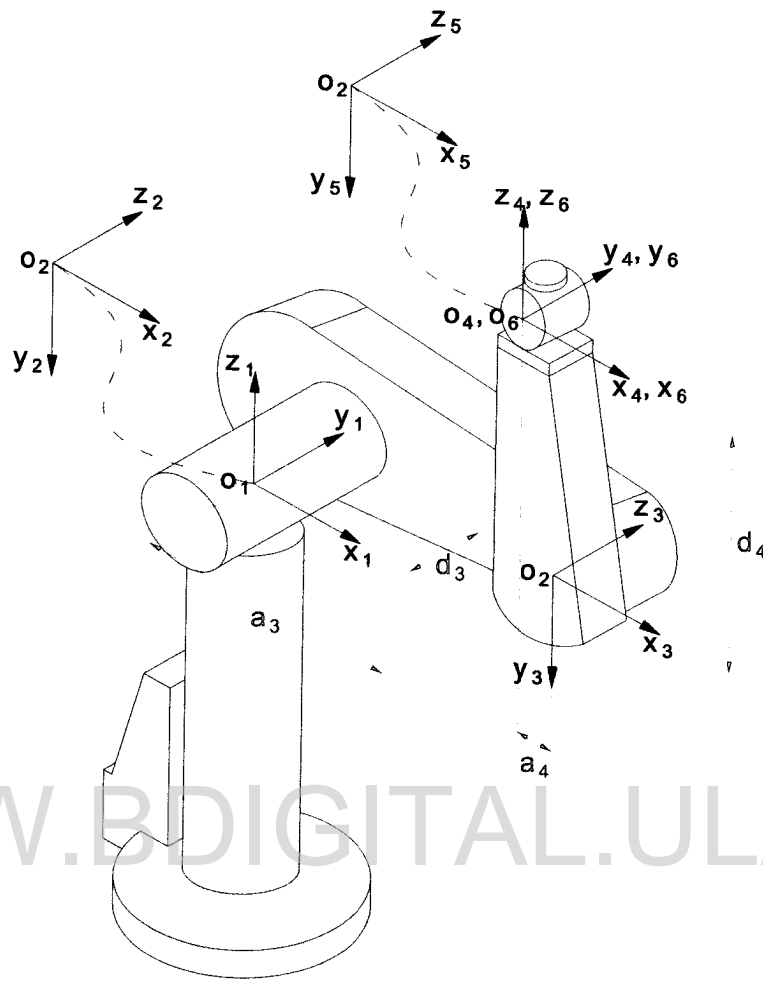


Figura A.3. Sistemas de coordenadas locales del robot PUMA.

Bibliografía.

- [1] PROVENZANO, Sebastián. “*Aplicación de las ecuaciones de Gibbs-Appell a la dinámica de robots*”. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. España. 2001.
- [2] TANNER, Herbert; KYRIAKOPOULOS, Kostas; KRIKELIS, N.J. “*Modeling of multiple mobile manipulator handling a common deformable object*”. National Technical University of Athens, NTUA. Atenas. Grecia. 2000
- [3] MARTINENKO, Yu G. “*The theory of the generalized Magnus effect for non-holonomic mechanical systems*”. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Volumen 68. Número 6. 2004
- [4] CHEN M. W.; ZALZALA, A. M.S. “*Dynamics modeling and genetic-based motion planning of mobile manipulator systems with nonholonomic constraints*” Research Report 600, Robotics Research Group, Dept. of Automatic Control and Systems Engineering. Universidad de Sheffield. Reino Unido. Septiembre 1995.
- [5] KHATIB, Oussama. “*A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation*” IEEE Journal of Robotics and Automation. 1987.
- [6] YAMAMOTO, Yoshio. YUN, Xiaoping. “*Control and coordination of locomotion and manipulation of a wheeled mobile manipulator*”. Universidad de Pensilvania. Filadelfia, Estados Unidos de America. 1994.
- [7] MATA, Vicente; PROVENZANO, Sebastián; VALERO, F.; CUADRADO, J.L. “*Serial-robot dynamics algorithms for moderately large numbers of joints*”. Mechanism and Machine Theory. Volumen 37. 2002.
- [8] ASCHER, U.M.; PAI, D.K.; CLOUTIER, B.P. “*Forward dynamics elimination methods, and formulation stiffness in robot simulation*”, Int. Journal of Robotic Research. Vol 16. No 6. 1997.
- [9] <http://www.arqhys.com/articulos/manipulador-movil.html>
- [10] BLANCO ROJAS, Dolores. “*Planificación local basada en sensores para un manipulador móvil en tareas de colaboración con humanos*”. Directores: Moreno Lorente, Luis Enrique. Balaguer Bernaldo de Quirós, Carlos. Editor: Universidad

- Carlos III de Madrid. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Madrid. España. 2002.
- [11] OLLERO, Aníbal. *“Robótica: manipuladores y robots móviles”*. Marcombo boixareu editors. Barcelona. España. 2001.
- [12] DENAVIT, J.; HARTENBERG, R. S. *“A kinematic notation for lower pair mechanisms bases on matrices”*. Journal of Applied Mechanics. Volumen 22. 1955.
- [13] MUIR, Muir; NEUMAN, Charles. *“Kinematics modeling of wheeled mobile robots”*. The Robotics Institute. Carnegie-Mellon University. Pittsburgh, Pennsylvania. Estados Unidos de América. 1986.
- [14] SHETH, P. N.; UICKER, J. J.. *“A computer-aided design analysis system for mechanisms and linkage”*. Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry (1972) Key: citeulike:6460860
- [15] TING-YUNG WEN, John. *“Control of Nonholonomic Systems”*. Department of Electrical, Computer, and Systems Engineering Rensselaer Polytechnic Institute. 1998.
- [16] DE LA VEGA, José Luis. *“Las ecuaciones de Gibbs-Appel. Una reivindicación de Gibbs”*. Revistas de Obras Públicas. España. 1983.
- [17] SHABANA, Ahmed. *“Computational Dynamics”*. Segunda edición. John Wiley and Sons, Inc. Nueva York. Estados Unidos de America. 2001.
- [18] GINSBERG, Jerry. *“Advanced engineering dynamics”*. Segunda edición. Cambridge University Press. 1998.
- [19] UDWADIA, F. *“Equations of motion for mechanical systems: A unified approach”*. Int. Journal Non-Linear Mechanics. Volumen 31. Número 6. 1996.
- [20] YAMAMOTO, Yoshio. YUN, Xiaoping. *“Coordinating Locomotion and Manipulation of a Mobile Manipulator”*. Universidad de Pennsylvania. Philadelphia, Estados Unidos de America. 1992.
- [21] DESAI, J.P.; KUMAR, V. *“Nonholonomic motion planning for multiple mobile manipulators”*. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1997. Volume 4. Estados Unidos de America. 1997.

- [22] BAYLE, B.; FOURQUET J.Y.; RENAUD, M. "*Manipulability of wheeled mobile manipulators: Application to motion generation*". The international Journal of Robotics Research. Volumen 22, numero 7-8. Julio 2003.
- [23] YU, Qing; CHEN, I-Ming. "*A general approach to the dynamics of nonholonomic mobile manipulator systems*". Transactions of the ASME. Volumen 124. Diciembre 2004.
- [24] YANG, Yuwei; ZHANG, Minglu; ZHAO, Xinhua. "*Study and simulations of dynamics of a 7-DOF flexible wheeled mobile manipulator*". China Mechanical Engineering. Volumen 20, número 6. Marzo 2009.
- [25] MOOSAVIAN, S.A.A.; POURREZA, A.; ALIPOUR, K. "*Kinematics and dynamics of a hybrid serial-parallel mobile robot*". IEEE International Conference on Robotics and Automation 2009. Julio 2009.
- [26] DESLOGE, E. "*Reply by author to David A. Levinson and Arun K. Banerjee*". Journal of Guidance, Control and Dynamics. Volumen 13. Número 2. 1990.
- [27] SHARF, I.; D'ELEUTERIO, G. M. T.; HUGES, P.C. "*On the dynamics of Gibbs, Appell, and Kane*". European Journal of Mechanics. A/Solids, Volumen 11. Numero 2. 1992.
- [28] TOWNSEND, M. "*Kane's equations. Lagrange's equations, and virtual work*". Journal of Guidance, Control and Dynamics. Volumen 15. Número 1. 1992.
- [29] TOWNSEND, M. "*Equivalence of Kane's, Gibbs-Appell's and Lagrange's equations*". Journal of Guidance, Control and Dynamics. Volumen 15. Número 5. 1992.
- [30] PAPASTAVRIDIS. "*On the nonlinear Appell's equations and the determination of generalized reaction forces*". International Journal of Engineering Science. Volume 26, Numero 6, 1988.
- [31] "UDWADIA, F.; KABALA, R. E. "*The explicit Gibbs-Appell equations and generalized inverse forms*". Quarterly of Applied Mathematics. Volumen LVI, Número 2. 1998.
- [32] MATA, V.; PROVENZANO, S.; CUADRADO, J.L.; VALERO, F. "*Inverse dynamic problem in robots using Gibbs-Appell equations*". Robótica. Cambridge University Press. Volumen 20. 2002.

- [33] DÍAZ RODRIGUEZ, Miguel. “*Dinámica directa para robots paralelos utilizando las ecuaciones de Gibbs-Appell*”. Información Tecnológica. Volumen 18. Número 4. Mérida – Venezuela. 2007.
- [34] KULESHOV, A. “*Mathematical model of a skateboard with one degree of freedom*”. Doklady Physics, Springer. Volumen 52, número 5. Moscú, Rusia. 2007.
- [35] BENIMELI, Francisco. “*Estimación de parámetros dinámicos en robots manipuladores*”. Universidad Politécnica de Valencia. Tesis Doctoral. Valencia, España. 2008.
- [36] FREIRE, R. E. “*Modelo matemático de un robot móvil*”. Facultad de Ingenierías, Universidad Politécnica Salesiana. Quito - Ecuador. 2006.
- [37] CAMPION, G.; BASTIN, G.; DANDREA-NOVEL, B.; “*Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots*”. IEEE Transaction on Robotics and Automation. Volumen 12. Número 1. 1996.
- [38] RÍOS G., Luís Hernando; BUENO L., Maximiliano “*Modelo matemático para un robot móvil*”. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia. 2008
- [39] GÓMEZ-BRAVO, F.; CUESTA F.; OLLERO, A. “*Planificación de trayectorias en robots móviles basada en técnicas de control de sistemas no holónomos*”. Actas de las XXIV Jornadas de automática. León – España. 2003.
- [40] HONGLIANG, Yuan. “*Control of Nonholonomic Systems*”. University of Central Florida. Florida. Estados Unidos de America. 2009.
- [41] GRACIA, Luis; TORNERO, Josep. “*Application of kinematic modeling methods to wheeled mobile robots*”. 5th WSES International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers (CSCC 2001). Rethymno, Grecia. 2001.
- [42] MUÑOZ MARTINEZ, V. F.; GIL-GOMEZ, G.; GARCIA CEREZO, A. “*Modelado cinemático y dinámico de un robot móvil omni-direccional*”. Jornadas de Automática, Universidad de León. León, España. 2003.
- [43] MATA, Vicente; VALERO, Francisco; CUADRADO, Juan Ignacio. “*Introducción a la Robótica*”. Servicio de Publicaciones Camino de Vera. Valencia – España. 1995.
- [44] VUKOBRATOVIC, M.; POTKONJAK, V. “*Applied dynamics and CAD of manipulation robots*”. Springer-Verlag, Berlin. 1985.

[45] DESOYER, K.; LUGNER, P. "*Recursive formulation for the analytical or numerical application of the Gibbs-Appell method to the dynamics of robots*". Robotica. Volumen 7. 1989.

[46] WALKER, M. W.; ORIN, D. E. "*Efficient dynamics computer simulation of robotic mechanisms*". Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Volumen 104. 1982.

[47] LUH, J. Y. S.; WALKER, M. W. y PAUL, R. P. "*On-line computational scheme for mechanical manipulators*". Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Volumen 102. 1980.

[48] KHALIL, W.; KLEINFINGER, J.F.; GAUTIER, M. "*Reducing the computational burden of the dynamic models of robots*". Proc 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation. San Francisco. Estados Unidos. 1986.

[49] ANGELES, J.; MA, O. "*Dynamics simulation of n-axis serial robot manipulators using a natural orthogonal complement*". Int. Journal Robotic Research, Volumen 7. Número 5. 1988.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE