

**REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESPECIALIZACIÓN Y MAESTRIA EN MATEMATICA
APLICADA A LA INGENIERIA**



**UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
MERIDA VENEZUELA**

**OBTENCIÓN DEL MODELO DINÁMICO DE ROBOTS
PARALELOS UTILIZANDO LAS ECUACIONES DE
GIBBS-APPELL**

Trabajo de grado presentado ante Universidad de los Andes como requisito para obtener el grado de Magíster Scientiae en Matemática Aplicada a la Ingeniería

Por:

Ing. Miguel Ángel Díaz Rodríguez

Asesor: Dr. Sebastian Enrique Provenzano Randazzo

**Mérida – Venezuela
Mérida, Junio 2005.**

Licencia Creative Commons:
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

AGRADECIMIENTOS

Mis mas sinceros agradecimientos al profesor Sebastian Provenzano por su apoyo y confianza durante el desarrollo del trabajo. Adicionalmente quiero expresar mi gratitud a los profesores del Postgrado de Matemática Aplicada; Jose Luis Bendito, Julio Florez López, Fráncico León y Mary Vergara. Finalmente quiero agradecer al Departamento de Tecnología y Diseño por colaboración y soporte durante el desarrollo de este trabajo.

RESUMEN

En este trabajo se utilizan las ecuaciones de la dinámica de Gibbs-Appell (G-A) para obtener el modelo dinámico de robots paralelos. Este tipo de robot está constituido por una plataforma móvil conectada a través de varias cadenas cinemáticas a una plataforma fija, donde cada cadena cinemática contiene juntas activas y juntas pasivas, que producen el movimiento de la plataforma móvil.

La resolución del problema dinámico directo se fundamenta en la obtención de un sistema equivalente constituido por cadenas abiertas. El sistema equivalente se determina luego de separar la plataforma móvil de la plataforma fija en las juntas que unen cada cadena con la plataforma. De esta forma se obtienen una serie de cadenas abiertas. La dinámica de cada cadena abierta es resuelta utilizando algoritmos eficientes basados en las ecuaciones de G-A. Posteriormente se incluyen las restricciones impuestas por la configuración del robot, para realizar esto se proponen dos metodologías. En la primera metodología las ecuaciones de restricción se incluyen utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange. La segunda metodología emplea las ecuaciones de G-A explícitas.

Se presentan 4 ejemplos numéricos. En los primeros tres ejemplos se analiza el desempeño dinámico de un robot paralelo de 1 grado de libertad (GDL). Se estudia el comportamiento del robot para los casos en que este es actuado a) por un torque y/o par constante, b) por el peso propio y c) para la condición de un torque aplicado variable en el tiempo. En el cuarto ejemplo se estudia el desempeño dinámico de un robot paralelo de 3 GDL cuando este es accionado por torques o pares constantes. Los resultados obtenidos empleando ambas metodologías, son muy semejantes. Adicionalmente, con el objeto de verificar las metodologías propuestas, los ejemplos planteados se implementan en el programa de simulación de mecanismos planos de propósito general Working Model 2D (WM). Se concluye que las metodologías propuestas permiten una implementación sistemática que sirve para estudiar el análisis dinámico de robots paralelos.

TABLA DE CONTENIDO

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN	1
1.1 Objetivos	4
1.3 Justificación	5
1.4 Organización del Trabajo	6

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO	7
2.1 Cinemática	8
2.1.1 Notación Denavit Hartembert	9
2.1.2 Problema Posición Robots Paralelos	12
2.1.3 Velocidad	13
2.1.4 Aceleración	16
2.2 Dinámica	16
2.2.1 Formulaciones basadas en las ecuaciones de Newton-Euler	19
2.2.2 Formulaciones basadas en las ecuaciones de Lagrange	20
2.2.3 Formulaciones basadas en el Principio de Trabajos Virtuales	22
2.2.4 Formulaciones basadas en los Multiplicadores de Lagrange	23

CAPITULO III

ECUACIONES DE GIBBS-APPELL	27
3.1 Antecedentes	28
3.2 Deducción de las Ecuaciones de Gibbs-Appell	29
3.3 Ecuaciones de Gibbs Appell para un Sistema Mecánico	31
3.4 Las Ecuaciones Explicitas de Gibbs-Appell	36

CAPITULO IV

OBTENCIÓN DEL MODELO DINÁMICO DE ROBOTS-PARALELOS	40
4.1 Metodología I	40
4.1.1 Separación del Robot Paralelo	41
4.1.2 Restricciones	44
4.1.2.1 Restricciones Cinemáticas	44
4.1.2.2 Restricciones debido a las Fuerzas Internas	45

4.1.2 Esquema de la Metodología Propuesta	46
4.2 Metodología II	46
4.2.1 Jacobiano de Restricciones	47
4.2.2 Matriz de Masas	49
4.2.3 Vector γ	44
4.3.3 Vector b	45
CAPITULO V	
EJEMPLOS NUMÉRICOS	55
5.1 Ejemplo Numérico I	55
5.1.1 Implementación de la Metodología I	57
5.1.2 Resultados Metodología I	58
5.1.3 Resultados Metodología II	62
5.2 Ejemplo Numérico II	64
5.2.1 Resultados Metodología I	64
5.2.2 Resultados Metodología II	65
5.3 Ejemplo Numérico III	67
5.3.1 Resultados	68
5.4 Ejemplo Numérico IV	69
5.4.1 Resultados	72
CONCLUSIONES	75
RECOMENDACIONES	77
REFERENCIAS	78
ANEXO 1	82
ANEXO 2	90
ANEXO 3	95

Capítulo 1

Introducción

Durante las dos últimas décadas, los robots paralelos han sido objeto de una gran atención por los diseñadores de sistemas mecánicos. Su estudio se debe, en mayor medida, a las capacidades que este tipo de sistema presenta, tales como; mayor rigidez, que le permite soportar elevadas cargas, mayor relación de trabajo/peso en comparación con los robots de cadenas abiertas, adicionalmente presentan la posibilidad de operar a gran velocidad, y al mismo tiempo con una alta exactitud.

Un robot paralelo consiste de una plataforma móvil y una plataforma fija al marco de referencia, conectadas a través de varias cadenas cinemáticas independientes (“pierna”). Cada cadena cinemática contiene juntas activas, que producen el movimiento en la plataforma móvil, y juntas pasivas. El primer robot paralelo documentado en la literatura es atribuido a Gough en 1955, quien construyó un prototipo con el objeto de medir, para diferentes condiciones, el desgaste y la fricción en neumáticos. Años más tarde Stewart en 1965 desarrolla un prototipo para la simulación del vuelo de aviones, similar al planteado por Gough. La figura 1.1 muestra la representación de un robot paralelo de 3 grados de libertad.

Inicialmente los estudios de Robots paralelos se han enfocado a la resolución del problema cinemático, es decir, al estudio de la relación existente entre las posiciones, velocidades y aceleraciones que adopta el mecanismo en el tiempo, sin importar las fuerzas

externas que producen el movimiento. Existen una cantidad de trabajos realizados el área de la cinemática, pero a diferencia del anterior, el estudio dinámico ha sido poco abordado.

Plataforma Móvil

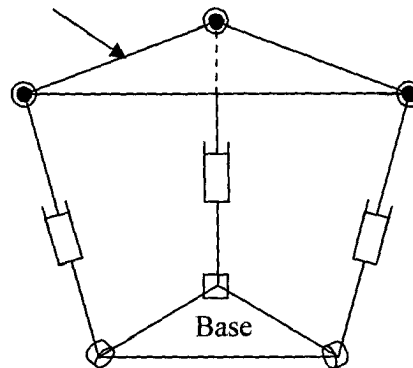


Figura. 1.1. Robots Paralelo 3 Grados de Libertad

El estudio dinámico involucra dos tipos de problemas. El primero consiste en el Análisis Dinámico Directo, que estudia la respuesta del robot (movimiento) correspondiente a la aplicación de cargas externas (fuerzas externas y torques o pares aplicados). Básicamente consiste en dadas las fuerzas y/o pares aplicados al robot, determinar el movimiento resultante obtenido en el tiempo. Un caso especial de este análisis es la determinación de la posición del equilibrio bajo la acción de fuerzas externas. El Segundo tipo de problema es el Análisis Dinámico Inverso: el cual consiste en determinar torques y pares necesarios para generar, en el robot, una determinada trayectoria predeterminada.

Entre los estudios realizados se observa que los investigadores principalmente se han orientado a la resolución del problema dinámico inverso. El problema dinámico directo a diferencia del anterior ha sido menos estudiado.

Los primeros algoritmos que resuelven el problema dinámico directo son obtenidos por medio de diferentes leyes y/o principios dinámicos. Por ejemplo el problema ha sido resuelto mediante las ecuaciones de Newton-Euler (Do y Wang, 1988; Tsai and Kohl,1990), la formulación Lagrangeana (Lebrel et al,1993; Millar y Clavel,1992) y el

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

principio de los trabajos virtuales (Wang y Gosselin,1997; Tsai,1998; Geike y Mcphee, 2000), entre otros. Los métodos basados en las ecuaciones de Newton-Euler (N-E) se fundamentan en obtener el modelo dinámico luego de aplicar las ecuaciones de N-E a cada eslabón que forma parte del Robot paralelo. Finalmente al conjunto de ecuaciones obtenidas se le adicionan las ecuaciones cinemáticas de restricción, formando de esta forma un sistema de ecuaciones que puede ser simplificado hasta obtener la ecuación que modela la dinámica del robot en estudio. La aplicación de las ecuaciones de N-E trae a cada eslabón trae como resultado que el modelo dinámico queda expresado en un sistema de ecuaciones muy extensas, por tanto presenta una pobre eficiencia computacional (Tsai, 1999).

Las formulaciones basadas en las ecuaciones de Lagrange, consisten en aplicar directamente al sistema, las mencionadas ecuaciones. Esta metodología permite la obtención de soluciones explícitas de una forma estructurada. Su deficiencia radica en la gran cantidad de operaciones simbólicas que deben realizarse para la obtención de las derivadas parciales involucradas en la ecuación. Adicionalmente el uso de este principio, presenta la dificultad de obtener algoritmos de tipo recursivos, como los empleados en el análisis de robots constituidos por cadenas abiertas.

Uno de las ecuaciones de la dinámica menos empleadas han sido las ecuaciones de Gibbs-Appell (G-A). Luego de su descubrimiento y desarrollo a finales del siglo XIX son pocos los investigadores que han desarrollado estudios dinámicos basados en las mencionadas ecuaciones. Aunado a lo anterior, pocos libros de texto de mecánica teórica incluyen discusiones sobre su aplicación.

A finales de los años 80, las ecuaciones de G-A comienzan a despertar el interés de unos pocos investigadores. Desloge (1986; 1988), es uno de los precursores en retomar el uso de las ecuaciones y en sus trabajos resalta la facilidad con la cual las ecuaciones de G-A manejan la dinámica de los sistemas mecánicos. Desloge crea una confrontación de comentarios en revistas científicas, con respecto a las más recientes ecuaciones de Kane, indicando en sus trabajos que éstas son equivalentes a las ecuaciones de G-A (Desloge; 1988). Esta discusión atrajo a otros investigadores. Sharf, D'Eleuterio y Hughes (1992) hacen un completo análisis, concluyendo que las ecuaciones de G-A y las de Kane tienen

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

mucho en común. En otros trabajos, Townsend (1992a; 1992b) llega a conclusiones similares.

Una revisión bibliográfica muestra que son pocos los trabajos en los cuales las ecuaciones de G-A se han aplicado a los sistemas mecánicos. Además, la mayoría de estas aplicaciones son ejemplos clásicos de la dinámica propuestos en libros de mecánica analítica. Recientemente, Provenzano (2001) retoma los estudios sobre la aplicación de las ecuaciones de G-A, y desarrolla algoritmos de tipo recursivo para la resolución del problema dinámico de cadenas abiertas y cadenas sujetas a restricciones en el elemento terminal. Díaz (2005) extiende el uso de las ecuaciones de G-A para la resolución del problema dinámico directo de robots compuestos por cadenas cerradas. Estudios sobre la aplicación de las ecuaciones de G-A para resolver el problema dinámico directo de manipuladores paralelos hasta ahora no han sido abordados. El presente trabajo documenta el desarrollo de dos metodologías, basadas en las ecuaciones de G-A, que permiten la resolución del problema dinámico directo de robots paralelos. La primera de ellas se fundamenta en utilizar las ecuaciones de G-A conjuntamente con la técnica de Multiplicadores de Lagrange. La segunda utiliza las ecuaciones explícitas de G-A (Udwadia y Kabala, 1996) en la cual la para la obtención de los términos que aparecen en la ecuación se propone una metodología sistemática.

1.1. Objetivos

El objetivo general del trabajo consiste en el desarrollo e implementación de metodologías que permiten resolver el problema dinámico directo de Robots paralelos. Se utilizan las ecuaciones de Gibbs-Appell para la formulación del modelo matemático que permitan la simulación del sistema. Entre los objetivos específicos que se cubren para el logro del trabajo se tiene:

Estudiar las ecuaciones dinámicas que rigen el comportamiento de los sistemas mecánicos.

Utilizar las ecuaciones explícitas Gibbs-Appell en la resolución del problema dinámico directo.

Proponer metodologías que permitan resolver el problema dinámico directo en robots paralelos.

Elaborar algoritmos que permitan resolver el problema dinámico directo.

Validar los algoritmos desarrollados realizando estudios comparativos por medio de programas comerciales.

1.2. Justificación

La formulación de metodologías para la solución del problema dinámico de manipuladores paralelos se justifica, entre varias razones, por que:

El modelo dinámico puede ser utilizado para la simulación, por medio del computador, del desempeño del robot. De esta forma en tareas de aplicación industrial, como por ejemplo el desplazamiento de grandes cargas, el movimiento del sistema puede ser evaluado y/o examinado sin la necesidad de contruir un modelo físico real.

El modelo permite tener un conocimiento de las fuerzas y pares aplicados a cada eslabón, sirviendo esto para el dimensionamiento o diseño de los eslabones, así como también para la selección de los componentes involucrados en el sistema, como por ejemplo, los rodamientos. Adicionalmente puede ser empleado para la selección de los actuadores necesarios para accionar el robot.

Permite desarrollar estrategias para la estimación de los parámetros del Robot paralelo

1.3. Limitaciones

El trabajo se limita al estudio de robots paralelos, estos consisten en una plataforma movable y una plataforma base fija, conectadas a través de varias piernas o cadenas cinemáticas similares.

Se estudiarán manipuladores paralelos no redundantes. Es decir, se estudiarán sistemas donde el grado de libertad es igual al número de juntas actuadas.

Las juntas cinemáticas o uniones entre los eslabones se consideran ideales y movidos por actuadores ideales donde no se presenta el fenómeno de fricción ni el desalineamiento.

Los eslabones que forman parte de la cadena se consideran rígidos. Esto implica que en la formulación de las ecuaciones, las dimensiones del eslabón no varían en el tiempo.

1.4. Organización de la Trabajo

El trabajo se desarrolla a través de 5 capítulos. En el siguiente capítulo se describe el planteamiento general del problema dinámico directo. Se incluyen los antecedentes y se establecen las definiciones utilizadas en el trabajo. Seguidamente en el capítulo 3 se describen las ecuaciones de G-A, documentado los algoritmos que resuelven el problema dinámico directo e inverso para cadenas abiertas. Se incluye en el capítulo la obtención de las ecuaciones explícitas de G-A. Los algoritmos documentados sirven de base para proponer, en el capítulo IV, dos metodologías para la resolución del problema dinámico directo de Robot paralelos. La primera de ellas basada en la utilización de los multiplicadores de Lagrange. La segunda se fundamenta en emplear las ecuaciones explícitas G-A. Con el objeto de implementar y validar las metodologías propuestas, en el capítulo V se presentan 4 ejemplos numéricos. Por último se incluyen las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Marco Teórico

El estudio dinámico de robots paralelos presenta básicamente dos áreas de principal aplicación. En la primera el modelo dinámico permite observar el comportamiento del robot, pudiendo analizarse su desempeño para diferentes condiciones de operación, sin la necesidad de construir el modelo real. Lo anterior hace posible predecir como va a ser el comportamiento del sistema una vez construido. Adicionalmente, la simulación permite obtener las condiciones de cargas actuantes en el sistema que pueden ser utilizadas para dimensionar los eslabones que conforman el robot. La otra área de principal de aplicación radica en la elaboración estrategias de control adecuadas y acordes con el funcionamiento del sistema.

Para abordar la resolución del problema dinámico de Robots paralelos es necesario estudiar el problema en dos etapas. La primera etapa consiste en estudiar las ecuaciones que rigen el movimiento del sistema, es decir, el estudio cinemático. La segunda etapa consiste en estudiar las ecuaciones que permiten obtener el modelo. Una vez estudiadas las ecuaciones generales, se procede a desarrollar metodologías que construyan de una forma sistemática o cuasi-automática las ecuaciones de la dinámica del robot paralelo. Por lo anterior, en la primera parte del capítulo se presentan una revisión de las ecuaciones cinemáticas de un sistema mecánico general y su aplicación a robots paralelos. En la

segunda parte del capítulo se presenta los antecedentes y conceptos del planteamiento general del problema dinámico.

2.1. Cinemática

Un sistema mecánico se define como una colección de eslabones que tienen movimiento relativo uno respecto del otro de acuerdo con las restricciones impuestas por los elementos a través de los cuales están conectados. Usualmente, en el desarrollo de las formulaciones, los eslabones se consideran rígidos. El conjunto de eslabones pueden formar una cadena cerrada (figura. 2.1), es decir, cada eslabón que forma parte de la cadena está unido por lo menos con otros dos. Por otra parte éstos pueden estar formados por cadenas abiertas (figura 2.2), donde el eslabón final de la cadena está unido sólo a su predecesor.

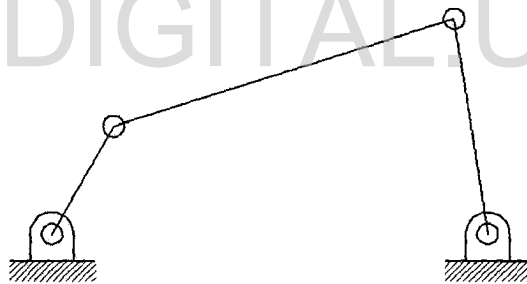


Figura. 2.1. Cadena Cerrada

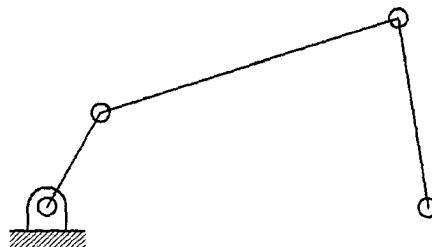


Figura. 2.2. Cadena Abierta

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

La cinemática estudia el movimiento del sistema mecánico, sin incluir las fuerzas a las que está sometido. El análisis involucra la determinación de las posiciones, velocidades y aceleraciones presentes en el sistema en estudio. Por tanto, el análisis se concentra en la relación existente entre la geometría del sistema y el movimiento. Con el objeto de establecer la relación cinemática es necesario entonces, definir un conjunto de coordenadas que describa inequívocamente la configuración (configuración se refiere en este trabajo a la posición, velocidad y aceleración del sistema mecánico) del sistema a través del tiempo. De los tipos de sistemas coordenados empleados, las coordenadas relativas presentan una gran aceptación por los analistas de sistemas robóticos. Su uso se debe en mayor medida por que éstas permiten obtener el modelo dinámico a través de un número mínimo de ecuaciones, en comparación con los otros sistemas coordenados. Este tipo de coordenadas establece la configuración de cada eslabón del sistema en relación con el eslabón que lo precede, utilizando para ello la coordenada correspondiente al grado de libertad que permite la junta entre los eslabones. Ya que el uso de coordenadas relativas conlleva a la obtención de un número mínimo de ecuaciones, este trabajo se desarrolla utilizando este tipo de coordenada. A continuación se presenta la metodología para describir la coordenada correspondiente al grado de libertad de la junta.

2.1.1 Notación Denavit-Hartenberg

Para describir la coordenada correspondiente al grado de libertad de la junta en Denavit y Hartenberg (1955), proponen un método matricial para establecer de forma sistemática un sistema de coordenadas ligado al cuerpo para cada elemento de una cadena articulada. La representación de D-H resulta en una matriz de transformación homogénea 4×4 que representa cada uno de los sistemas de coordenadas de los elementos en la articulación con respecto al sistema de coordenadas del elemento previo. Así, mediante transformaciones secuenciales, el elemento terminal expresado en su sistema coordenado local, se puede transformar y expresar en el sistema de coordenadas global que constituye el sistema inercial de este sistema dinámico.

La notación D-H original, tal y como fue propuesta por Denavit y Hartenberg, presenta algunas desventajas y puede llevar a ambigüedades en robots con más de dos barras. En la literatura del área (Link, 1991) la elección de la notación es un punto a tomar en cuenta cuando se desea mejorar la eficiencia computacional de los algoritmos que modelan el comportamiento dinámico de manipuladores. Debido a esto, en este trabajo se emplea una versión modificada de la notación D-H, específicamente se utiliza la notación propuesta en por Khalil y col (1991).

Siguiendo la notación D-H elegida, cada sistema de coordenadas local se determina y establece sobre la base de tres reglas:

1. El eje z_{i-1} yace a lo largo del eje de la articulación sobre la cual se mueve el cuerpo $i-1$.
2. El eje x_{i-1} es normal a los ejes z_{i-1} y z_i .
3. El eje y_{i-1} completa el sistema de coordenadas cartesianas.

Los parámetros que deben ser especificados para ubicar el sistema coordenado local a la barra i , son:

θ_i : Es el ángulo de la articulación medida a partir de x_{i-1} hasta x_i con respecto al eje z_i .

d_i : Es la distancia entre x_{i-1} y x_i medida a lo largo de z_i .

a_i : Es la distancia entre z_{i-1} y z_i medida a lo largo de x_{i-1} .

α_i : Es el ángulo de separación del eje z_{i-1} al eje z_i respecto al eje x_{i-1} .

Para una articulación giratoria θ_i , a_i , y d_i son los parámetros de articulación y permanecen constantes para un robot, mientras que θ_i es la variable articulación que cambia cuando el cuerpo i se mueve (gira) con respecto al cuerpo $i-1$. Para una articulación prismática, θ_i , a_i , y θ_i son los parámetros de la articulación y permanecen constantes durante el movimiento, mientras d_i es la variable de la articulación.

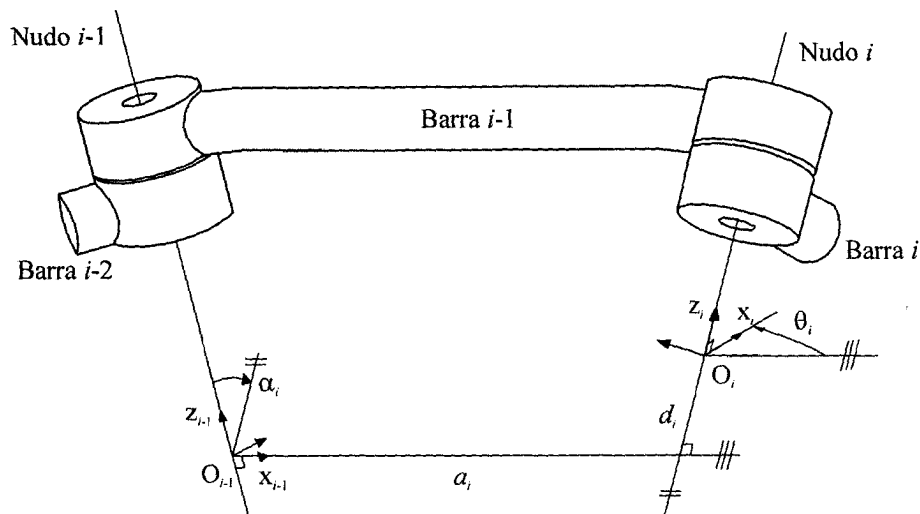


Figura 2.3.- Notación D-H empleada en este trabajo

Sobre la base de estos parámetros se puede obtener la matriz de rotación que relaciona los sistemas de coordenadas $i-1$ y i :

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\text{sen } \theta_i & 0 \\ \cos \alpha_i \text{ sen } \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\text{sen } \alpha_i \\ \text{sen } \alpha_i \text{ sen } \theta_i & \text{sen } \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Igualmente, el vector posición que relaciona las distancias entre los orígenes O_{i-1} y O_i es:

$${}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1},O_i} = \begin{bmatrix} a_i \\ d_i \text{ sen } \alpha_i \\ -d_i \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

En la figura 2.4 se muestra, a manera de ejemplo, este último vector y adicionalmente se representa el vector posición del centro de masas del cuerpo $i-1$.

Utilizando la notación de D-H se pueden obtener las ecuaciones de restricción que definen el comportamiento cinemático del sistema. En la siguiente sección se describe la obtención de la ecuación de restricción cinemática para robots paralelos.

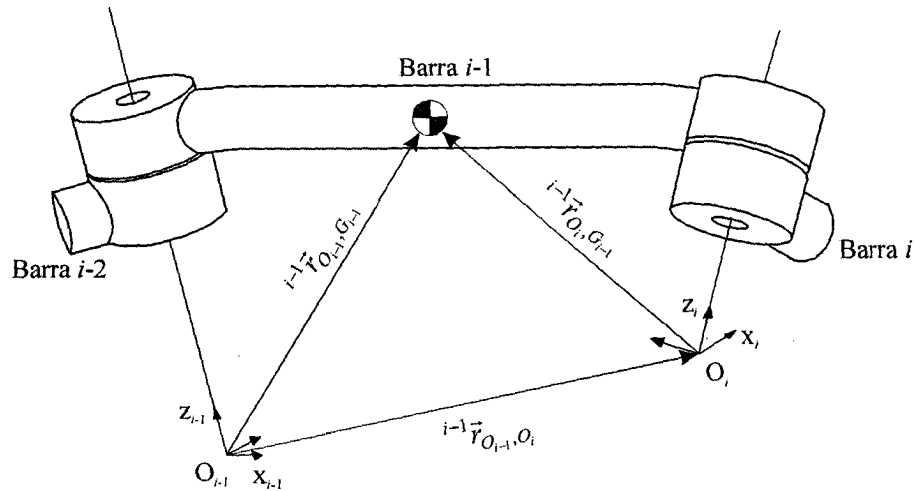


Figura 2.4.- Vectores de posición que relacionan los orígenes y el centro de masas de dos sistemas coordenados adyacentes.

2.1.2. Problema de posición en Robots Paralelos

La notación D-H puede ser aplicada de una manera sencilla en la obtención de las relaciones cinemáticas de robots constituidos por cadenas abiertas. Para ello, el sistema de coordenadas global se elige en cualquier punto de la base soporte que se considere conveniente, y puede coincidir con el sistema coordenado ligado a la primera barra. El último sistema coordenado (el n -ésimo), queda ubicado al inicio del último cuerpo. De esta forma la configuración del eslabón puede ser definida a través de un proceso de transformación de rotación y traslación, hasta referirlo al sistema coordenado global.

En el caso de robots paralelos las diferentes “piernas” o cadenas del robot forman uno o varios lazos cerrados. Por tanto la aplicación directa de la transformación D-H no puede ser realizada. Para resolver este inconveniente, se considera que en general, desde el punto de vista cinemático, el robot paralelo puede ser considerado como varios robots de cadena abierta sometidos a ciertas restricciones en su elemento terminal. Esto puede ser representado a través de ecuaciones de restricción que el robot debe cumplir. Las restricciones dependen únicamente de la posiciones de las juntas y no dependen del tiempo y son de la forma:

Licencia Creative Commons:

$$f_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

Siendo q las coordenadas generalizadas, n el número de juntas del sistema y m el número de ecuaciones de restricción independientes obtenidas para el robot paralelo a analizar. La ecuación 2.3 puede ser utilizada para determinar la relación entre las coordenadas dependientes e independientes. Una vez obtenidas las ecuaciones de restricción, la configuración general del sistema puede ser conocida. Es de resaltar que el conjunto de representadas por la ecuaciones 2.3 representa un sistema no lineal cuya resolución requiere el empleo de métodos de resolución de este tipo de sistemas, tal como el de Newton-Rhapson. A diferencia de las ecuaciones de posición, las ecuaciones que determinan la velocidad y aceleración de las coordenadas generalizadas consisten en un sistema de ecuaciones lineal. En las siguientes secciones se describe la determinación de las velocidades y aceleraciones para robots paralelos.

2.1.3. Velocidad

Las ecuaciones que restringen las velocidades del sistemas se obtienen derivando la ecuación de posición 2.3, respecto al tiempo. Lo anterior se resume en la siguiente expresión.

$$A(q) \cdot \dot{\vec{q}} = 0 \quad (2.4)$$

Siendo A de dimensiones $(m \times n)$ la matriz jacobiana de la función (f) con respecto a las coordenadas generalizadas \vec{q} . $\dot{\vec{q}}$, es el vector de velocidades generalizadas cuya dimensión es igual a la de las coordenadas generalizadas.

Para calcular la matriz A de la ecuación anterior en una forma sistemática, se considera la ecuación de cierre de lazo de la velocidad. Es decir, se analiza la velocidad de un punto perteneciente a la plataforma. Se determina la velocidad del punto tras estudiar la cinemática de una "pierna", de igual forma se determina la velocidad en el punto del análisis cinemático de otra "pierna" (ver figura 2.5). De la compatibilidad de

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

desplazamientos, las velocidades de un punto de la plataforma obtenida a través de una de las cadenas, debe ser igual a la obtenida a través de analizar la velocidad de la otra cadena.

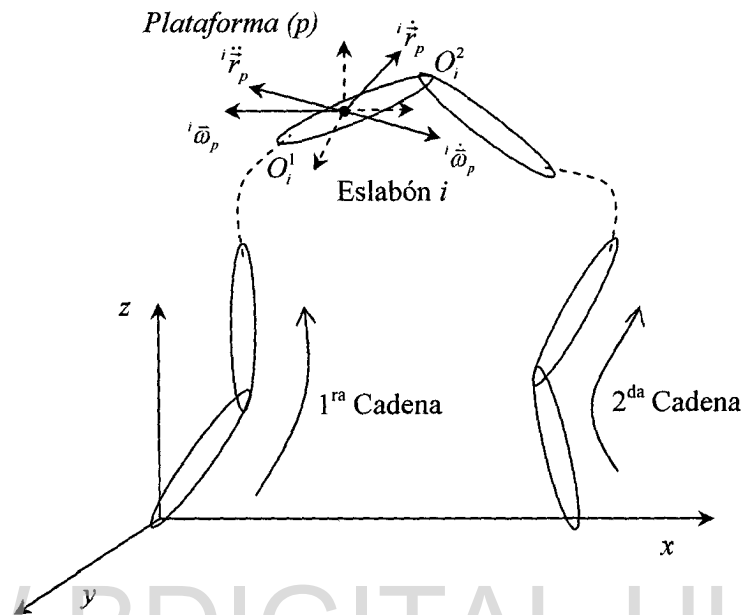


Figura 2.5 Representación de las restricciones de Velocidad y Aceleración

Considere el lazo cerrado representado en la figura 2.5. Si se asume que los eslabones están unidos solo por pares de revoluta y/o prismáticos y adicionalmente tomando como marco de referencia ubicado en el punto p de la plataforma, se tiene que las velocidades lineales y angulares de la plataforma, siguiendo una de las cadenas, pueden ser determinadas mediante la ecuación:

$$\begin{bmatrix} i\dot{r}_p \\ i\ddot{r}_p \\ i\dot{\omega}_p \\ i\ddot{\omega}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^p A_i^k & {}^p A_{i-1}^k & \dots & {}^p A_1^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_i^k \\ \dot{q}_{i-1}^k \\ \vdots \\ \dot{q}_1^k \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Donde k expresa el número que identifica la cadena que se está estudiando, y $i\dot{r}_p^k$ es la velocidad lineal absoluta del origen de coordenadas O_i^k expresado respecto al marco de referencia i , adicionalmente:

Licencia Creative Commons:

${}^i\bar{\omega}_i^k$: la velocidad absoluta del eslabón (i) expresando en el marco de referencia (i),

\dot{q}_i^k : la velocidad generalizada del eslabón (i),

k : el número de la rama considerada.

$${}^p A_i^k = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} {}^p \bar{z}_i^k \times {}^p \bar{r}_{O_i, O_p}^k \\ {}^p \bar{z}_i^k \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{revoluta} \\ \\ \text{prismatica} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c} {}^p \bar{z}_i^k \\ 0 \end{array} \right] & \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Siendo, ${}^{i-1}\bar{r}_{O_{i-1}, O_i}^k$: el vector definido desde el origen O_{i-1}^k al O_i^k referido al marco ($i-1$) y ${}^i\bar{z}_i^k$, el vector unitario en la dirección de rotación del cuerpo expresado respecto al marco de referencia (i), e igual a ${}^i\bar{z}_i^k = [0 \ 0 \ 1]^T$

Debido a que la velocidad lineal y angular de cualquier punto sobre de la plataforma obtenida siguiendo una de las cadenas debe ser igual a la determinada por otra cadena, se puede obtener la siguiente ecuación de restricción de velocidades:

$$\begin{bmatrix} {}^p A_i^1 & {}^p A_{i-1}^1 & \dots & {}^p A_1^1 & -{}^p A_i^2 & -{}^p A_{i-1}^2 & \dots & -{}^p A_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_i^1 \\ \dot{q}_{i-1}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}_1^1 \\ \dot{q}_i^2 \\ \dot{q}_{i-1}^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} = \bar{0}_{6 \times 1} \quad (2.7)$$

Para un sistema mecánico tridimensional se obtiene un total de 6 ecuaciones de restricción por cada rama. De la ecuación anterior se puede concluir que:

$$A = \begin{bmatrix} {}^p A_i^1 & {}^p A_{i-1}^1 & \dots & {}^p A_1^1 & -{}^p A_i^2 & -{}^p A_{i-1}^2 & \dots & -{}^p A_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

2.1.4. Aceleración

Si se deriva la ecuación de velocidad 2.5, se obtiene:

$$-\vec{b} + A(\vec{q}) \cdot \ddot{\vec{q}} = 0 \quad (2.9)$$

Donde, $\ddot{\vec{q}}$ el vector de aceleraciones generalizadas y \vec{b} es un vector de (6×1) para el caso tridimensional.

La aceleración angular y lineal del punto (p) situado en la plataforma se obtienen expresando, en el mismo sistema de coordenadas, la aceleración obtenida al estudiar ambas cadenas (“piernas”).

$$A(\vec{q}) \cdot \ddot{\vec{q}} = \vec{b}^2 - \vec{b}^1 \quad (2.10)$$

Donde, \vec{b}^1 y \vec{b}^2 son las componentes del vector b obtenidas para cada una de las “piernas”. Los vectores b se obtienen calculando de manera recursiva las aceleraciones, pero tomando el valor de las aceleraciones de las coordenadas generalizadas igual a cero (referencia). De esta forma;

$$\vec{b}^k = \left[\begin{array}{c} {}^i \ddot{\vec{r}}_i^{k*} + {}^i \ddot{\omega}_i^k \times ({}^i \vec{\omega}_i^k \times {}^i \vec{r}_{o_i^k, p}) + {}^i \dot{\omega}_i^{k*} \times {}^i \vec{r}_{o_i^k, p} \\ {}^i \dot{\omega}_i^{k*} \end{array} \right] \quad (2.11)$$

Luego de definir las ecuaciones cinemáticas del sistema, es necesario establecer la relación existente entre las fuerzas y el movimiento.. La obtención de esta relación para sistemas mecánicos se describe en la siguiente sección.

2.2. Dinámica

El estudio de la dinámica de robots paralelos, en contraste con el análisis de la dinámica de robots constituidos por cadenas abiertas, ha sido objeto de un menor número de investigaciones, por lo que se tienen igualmente menor número de publicaciones. El motivo principal se debe a la complejidad en la obtención del modelo dinámico de éste tipo

de sistemas. El principal inconveniente que presenta el analizar este tipo de robots es la presencia de la plataforma móvil que, al estar unida con la base a través de varias cadenas abiertas, forma un sistema de múltiples cadenas cerradas que restringen el movimiento del sistema mecánico en su conjunto.

La ecuación del movimiento, para un sistema mecánico (Haug,1989), puede ser escrita en forma compacta de la siguiente forma:

$$D(q,t) \ddot{q} = \bar{Q}(\dot{q},q,t) \quad (2.12)$$

Siendo D una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ y se denomina matriz de inercia del sistema; q es el vector de n coordenadas generalizadas; y Q el vector de espacio n que representa las fuerzas aplicadas, giroscópicas y gravitacionales; t es el tiempo y n es el número de grados de libertad.

La ecuación (2.12) puede ser utilizada de manera directa en la resolución del problema dinámico de sistemas mecánicos conformados por cadenas abiertas. Sin embargo su aplicación en robots paralelos es mucho más compleja. Principalmente debido a que la topología del robot esta conformada por una serie de cadenas abiertas unidas a la plataforma móvil, lo cual produce la conformación de varias cadenas cerradas que establecen restricciones en el movimiento del sistema. Por tal motivo, no todas las coordenadas generalizadas son independientes. En el caso de robots paralelos, al igual que el caso de sistemas mecánicos restringidos, existen coordenadas dependientes e independientes. Para obtener el modelo dinámico de robots paralelos las restricciones que relacionan las variables dependientes e independientes deben ser incluidas, y vienen dadas por la ecuación 2.3, transcrita nuevamente a continuación:

$$f_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.13)$$

La ecuación 2.12 se obtiene por procedimientos propuestos partir de diferentes principios dinámicos, como por ejemplo: las ecuaciones de Newton-Euler, los métodos Lagrangeanos, el principio de D'Alembert, la ecuaciones de Kane y el principio de los

trabajos virtuales. De los mencionados anteriormente el uso de las ecuaciones de Newton-Euler y la ecuación de Lagrange presentan una mayor difusión.

En los métodos basados en las ecuaciones de Newton-Euler, el modelo dinámico es obtenido tras aplicar por separado, en cada eslabón de la cadena cerrada y a la plataforma, las ecuaciones de Newton-Euler referidas a un sistema coordinado ligado a cada cuerpo. El sistema coordinado se ubica en el centro de masas del eslabón considerado, obteniéndose un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (ODE). Finalmente al conjunto de ecuaciones obtenidas se adicionan las ecuaciones cinemáticas de restricción, formando de esta forma un sistema de ecuaciones que puede ser simplificado hasta obtener la ecuación dinámica para la cadena cerrada en estudio. Dasgupta y Mruthyunjaya (1998) utiliza este procedimiento para formular modelo dinámico del robot Gough-Stewart obteniendo finalmente un sistema de 6 ecuaciones explícitas (solución cerrada).

Las ecuaciones de Lagrange aplicadas directamente al robot en estudio, permiten la obtención de soluciones explícitas de una forma estructurada. Su deficiencia radica en la gran cantidad de operaciones simbólicas que deben realizarse para la obtención de las derivadas parciales involucradas en la ecuación. Adicionalmente el modelo dinámico es obtenido en función de la configuración del mecanismo en particular. Otro defecto que presenta el uso de este principio, es la dificultad de obtener algoritmos de tipo recursivos, como los empleados en el análisis de cadenas abiertas. Un ejemplo de aplicación se encuentra en para la plataforma G. Lebet, y col (1993), donde la configuración espacial del mecanismo se parametriza a través de un mínimo número de coordenadas generalizadas independientes y luego se aplican las ecuaciones de Lagrange.

Otro principio utilizado en el área es el principio de los trabajos virtuales, su aplicación ha demostrado ser eficiente para la resolución del problema dinámico inverso (Tsai, 2004; McPhee, 2003).

Entre los trabajos más recientes en el área, se encuentran el realizado por Gallardo y col (2003) que utilizan el principio de los trabajos virtuales conjuntamente con la notación de la teoría de screw y proponen un método para la resolución del problema dinámico

directo. Seguidamente se documentan los procedimientos desarrollados para la resolución del problema dinámico en robots paralelos.

2.2.1 Formulaciones basadas en las Ecuaciones de Newton-Euler

Este enfoque consiste en separar cada uno de los eslabones del robot, incluyendo la plataforma, y aplicar las ecuaciones de Newton-Euler a cada uno de ellos. El sistema coordinado al cual están referidas las ecuaciones se ubica preferiblemente en el centro de masas de cada eslabón. Todas las fuerzas y torques aplicados a cada elemento se toman en cuenta. Las fuerzas y pares de acción y reacción impuestas por las juntas cinemáticas se consideran, de acuerdo con la tercera ley de Newton: de igual magnitud, de dirección opuesta y de igual línea de acción. Las ecuaciones de Newton-Euler referidas al sistema coordinado ubicado en el eslabón y aplicadas a cada uno de ellos vienen expresadas de forma matricial por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{v}}^i \\ \dot{\vec{\omega}}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\omega}^i \times m \vec{v}^i \\ \vec{\omega}^i \times I \vec{\omega}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}^i \\ \vec{\tau}^i \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Donde todas las variables presentes en la ecuación están referidas al centro de masas del eslabón. m es la masa del cuerpo. I representa el tensor de inercia. \vec{v}^i y $\vec{\omega}^i$ son las velocidades lineal del centro de masas y angular del cuerpo. \vec{F}^i y $\vec{\tau}^i$ constituyen la sumatoria de todas las fuerzas y torques que actúan en el eslabón en estudio y referidas al marco de referencia. El resultado de aplicar la ecuación (2.14) a cada cuerpo es equivalente al empleo de la expresión (2.12), es necesario entonces en el modelado del sistema, incluir las ecuaciones de restricción cinemáticas (ecuación (2.13)). Las ecuaciones cinemáticas deben ser escritas en función de la configuración del sistema, y a partir de ellas obtener las velocidades y aceleraciones. En principio, lo anterior puede ser resuelto o simplificado hasta obtener una forma adecuada para su implementación. Sin embargo, en la mayoría de los casos, es de elevada complejidad aún para cadenas cerradas sencillas. La ventaja del procedimiento radica en que su formulación es independiente del tipo de sistema coordinado utilizado. Adicionalmente su aplicación es intuitiva y permite una

Licencia Creative Commons:

interpretación física. En la literatura existen varios procedimientos desarrollados a partir de este método, se diferencian básicamente por el sistema de coordenadas escogido y en la manipulación simbólica de las ecuaciones del movimiento, por ejemplo, Dasgupta (1998a,1998b) imponen las restricciones cinemáticas en el sistema a través de las fuerzas de restricción en los pares cinemáticos de unión en el elemento terminal.

2.2.2 Formulaciones basadas en las Ecuaciones de Lagrange

Existen varios procedimientos que sustentan su desarrollo a partir de la ecuación de Lagrange. Un procedimiento simple en su empleo, pero no en la complejidad de la obtención del modelo, consiste en utilizar directamente la ecuación de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau \quad (2.15)$$

Donde $L = T - V$, es el lagrangiano, y T y V son la energía cinética y potencial respectivamente. q_i son las variables independientes que representan el movimiento de las juntas del sistema mecánico. El problema fundamental consiste en que el uso directo de la ecuación no es sencillo, la obtención de la relación entre las variables dependientes e independientes es compleja. Para una cadena cerrada, el problema dinámico directo es, en general, difícil de resolver.

Nakamura y Ghodoussi (1989) proponen una formulación a partir de la cual se han desarrollado importantes trabajos. En su trabajo utilizan el principio de los trabajos virtuales junto con la ecuación de Lagrange para concluir que la dinámica del robot paralelo puede ser obtenida a partir de la dinámica de varios robots constituidos por cadena abierta, a través de la relación presentada en la ecuación:

$$\bar{\tau}^c = A^T \bar{\tau}^A \quad (2.16)$$

Siendo A la matriz Jacobiana de todas las variables q respecto a las coordenadas independientes \bar{q}_i , el superíndice c se refiere a los pares de la cadena cerrada y el

superíndice A a los pares de la cadena abierta. La matriz A se obtiene analíticamente ó por procedimientos numéricos como los descritos en secciones anteriores. La ecuación (2.16) ha sido obtenida paralelamente (Murray y Novell, 1989), utilizando desplazamientos virtuales y la ecuación de D'Alembert. Bajo un concepto general se puede resumir que las variables dinámicas del robot paralelo son obtenidas a través de una transformación con su respectivo sistema equivalente. La importancia del procedimiento estriba en que el corazón del problema dinámico puede ser determinado empleando algoritmos eficientes desarrollados para cadenas abiertas. Esquemáticamente el procedimiento se puede resumir:

Dinámica Inversa:

- Determinar $\vec{q} = f(\vec{q}_i)$
- Calcular A .
- Calcular $\dot{\vec{q}} = A \dot{\vec{q}}_i$
- Calcular $\ddot{\vec{q}} = A \ddot{\vec{q}}_i + \dot{A} \dot{\vec{q}}_i$
- Resolución del problema dinámico inverso de las cadena abiertas correspondiente $\vec{\tau}^a = D^a(\vec{q}_i)\ddot{\vec{q}} + \vec{Q}(\vec{q}_i, \dot{\vec{q}}_i)$
- Calcular $\vec{\tau}^c = A^T \vec{\tau}^a$

Dinámica Directa:

- Determinar $\vec{r}(\vec{q}_i, \dot{\vec{q}}_i)$ a partir de la dinámica inversa del robot paralelo, tomando $\ddot{\vec{q}}_i = 0$

- Calcular $\bar{Q} = \bar{r} - \bar{\gamma}$
- Calcular $\dot{\bar{q}} = A \dot{\bar{q}}_i$
- Calcular $D^a(\bar{q}_i)$, siguiendo la formulación para cadenas abiertas
- Resolución de $D^c(\bar{q}_i) = A^T D^a(\bar{q}) A_i$
- Resolver $D^c(\bar{q}_i) \ddot{\bar{q}}_i = \bar{Q}$

2.2.3 Formulaciones basadas en el Principio de los Trabajos Virtuales

El Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) representa una herramienta poderosa para hallar las ecuaciones dinámicas de sistemas mecánicos. A diferencia de la mecánica Newtoniana, el PTV no requiere evaluar las fuerzas de restricción impuestas por los pares o juntas cinemáticas. El principio permite una obtención sistemática de la ecuación del movimiento mediante un mínimo número de ecuaciones. El análisis de sistemas mecánicos restringidos por medio del PTV, tal como el robot paralelo, se ha enfocado principalmente a la resolución del problema dinámico inverso. La literatura presenta metodologías que determinan las fuerzas y pares necesarios para producir el movimiento requerido en la plataforma. La tarea de mayor dificultad consiste en la obtención de la cinemática del robot. El problema inverso debe determinar, conocida la trayectoria del elemento terminal, las variables cinemáticas: velocidad y aceleración de los eslabones de la cadena. Una vez determinado el comportamiento cinemática del sistema, se emplea el PTV donde el modelo dinámico queda constituido por todas las fuerzas actuantes sobre los eslabones. Para un sistema conformado por n barras, donde cada barra está sometida a n_t torques (T) y n_f fuerzas aplicadas (F) el movimiento queda representado por la ecuación (2.17).

$$\partial W = \sum_{n_t} \bar{T}^T \partial \theta + \sum_{n_f} \bar{F}^T \partial r - \sum_n m a^T \partial r + (I \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times I \bar{\omega})^T \partial \theta = 0 \quad (2.17)$$

La diferencia en las formulaciones propuestas se fundamenta en la metodología empleada para el manejo de la cinemática inversa. Zhang y Song (1993) utilizan para la formulación cinemática el concepto de velocidades, lineales y angulares, parciales. Tsai

(2000) sigue el mismo procedimiento, pero sustituye las velocidades por el concepto de matrices Jacobianas asociadas al eslabón, con lo cual el modelo dinámico obtenido presenta una forma mas compacta. Gallardo y col. (2003) hacen uso de la teoría de screw para el manejo de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas, permitiendo obtener ecuaciones que determinan en forma directa las fuerzas y torques necesarios que satisfacen el movimiento del sistema.

La teoría gráfica presenta en esta metodología una aplicación importante ya que su implementación permite resolver de forma sistemática el problema cinemático inverso, lo cual es utilizado por Geike y McPhee (2003) para resolver la dinámica inversa de una cadena cerrada de 3 GDL. Los procedimientos que resuelven el problema dinámico inverso, basados en el PTV, se pueden esquematizar:

- Determinar la cinemática inversa $\dot{\bar{q}} = f(\bar{q}_i)$
- Calcular la resultante de todas las fuerzas aplicadas y las fuerzas de inercia

$$\sum_{n_i} \bar{T}^T + \sum_{n_i} \bar{F}^T + \sum_n m a^T \partial t + (I\dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times I\bar{\omega})^T$$

- Determinar las fuerzas y torques requeridos, a partir de la ecuación (2.17) ó en alguna de sus formulaciones adicionales

2.2.4 Formulaciones basadas en el uso de Multiplicadores de Lagrange

Hasta ahora, las formulaciones dinámicas presentadas se desarrollan a partir de principios de la dinámica clásica como; Ecuación de Newton-Euler, Ecuación de Lagrange, entre otros. De modo general se puede observar que la solución del sistema de ecuaciones (2.12) y (2.13) consiste en la determinación de: en la dinámica inversa, las fuerzas y pares requeridos por el sistema y, en la dinámica directa, el movimiento del sistema. Adicionalmente, independientemente del problema dinámico que se esté resolviendo (dinámica directa o inversa), es necesario, en ambos casos, determinar las fuerzas de

restricción impuestas en los pares cinemáticos. Se puede definir el problema general de la dinámica de sistemas mecánicos como:

$$\vec{F} + \vec{F}^C = 0 \quad (2.18)$$

Siendo F la resultante de todas las fuerzas aplicadas y externas del sistema, \vec{F}^C las fuerzas impuestas por las restricciones. \vec{F} se obtiene resolviendo el sistema sin considerar las fuerzas de restricción impuesta por la configuración de la cadena. \vec{F}^C se puede expresar como $-A_q^T \vec{\lambda}$ siendo $\vec{\lambda}$ el vector de multiplicadores de Lagrange y A_q la matriz Jacobiana obtenida de derivar las restricciones cinemáticas (2.13) respecto a las coordenadas del sistema. El basamento matemático que sustenta el uso de los multiplicadores, para adicionar las ecuaciones de restricción (Ecuación (2.13)) al sistema dinámico expresado en la ecuación (2.12), puede consultarse en el trabajo de Udwadia y. Kabala (1996). Las ecuaciones de movimiento quedan definidas por la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} D & A_q^T \\ A_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{q}} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{Q} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Donde \vec{Q} es el vector de fuerzas aplicadas al sistema y \vec{b} es definido de acuerdo con la ecuación 2.11. En este enfoque, \vec{q} incluye las variables dependientes \vec{q}_d e independientes \vec{q}_i . Es importante mencionar que los componentes de la matriz D en la ecuación (2.19) están sujetos a la posición del sistema coordinado utilizado.

La ventaja de las metodologías basadas en los multiplicadores de Lagrange es que la matriz de inercia del sistema D puede ser obtenida sin considerar las restricciones cinemáticas, lo cual permite utilizar cualquiera de los algoritmos eficientes desarrollados para robots constituidos por cadenas abiertas. La técnica de los multiplicadores es frecuentemente utilizada en los paquetes computacionales de dinámica de sistemas mecánicos. La desventaja del método es que el sistema obtenido es muy extenso y adicionalmente está constituido de ecuaciones algebraicas y diferenciales, que requieren de

un trato especial para la resolución numérica del sistema. Por otra parte el método es ineficiente para la resolución de la dinámica inversa del mecanismo.

El problema dinámico inverso se reduce a la determinación de las fuerzas y pares requeridos para el funcionamiento de la cadena cerrada. Debido a que las fuerzas de restricción \vec{F}^C quedan determinadas por $-A_q^T \vec{\lambda}$, el problema inverso consiste en la determinación de los multiplicadores de Lagrange. El procedimiento para determinar la dinámica inversa mediante el método de los multiplicadores de Lagrange o también denominado método aumentado, se puede resumir:

Dinámica Inversa

- Determinar la cinemática $\vec{q} = f(\vec{q}_i)$
- Cálculo de las aceleraciones

$$\ddot{\vec{q}} = A_q^{-1} \vec{\gamma}$$

- Cálculo de los multiplicadores de Lagrange

$$\vec{\lambda} = A_q^{-1} [\vec{Q}^A - M\ddot{\vec{q}}]$$

- Determinación de las fuerzas requeridas por el sistema

$$\vec{\tau} = -A_q^T \vec{\lambda}$$

El procedimiento de empleo de los multiplicadores de Lagrange para la resolución del problema dinámico directo se resume:

Dinámica Directa

- Determinar la configuración inicial del mecanismo
- Determinar b a partir de la dinámica inversa de la cadena cerrada, tomando $\ddot{\vec{q}}_i = 0$
- Separar la cadena cerrada realizando cortes en las juntas hasta obtener sistemas de cadenas abiertas.

- Calcular la matriz de inercia D para el sistema de cadenas abiertas correspondiente a la cadena cerrada en estudio, en esta etapa puede ser utilizado cualquiera de los algoritmos eficientes
- Determinar el Jacobiano A_q del sistema inicial
- Ensamble del sistema
$$\begin{bmatrix} D & A_q^T \\ A_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{b} \end{bmatrix}$$
- Resolver $\ddot{\bar{q}}$ y $\bar{\lambda}$ de la forma
$$\begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & A_q^T \\ A_q & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{b} \end{bmatrix}$$
- Integrar el sistema de ecuaciones algebraico diferencial (DAEs) obtenido en el paso anterior, para obtener a partir de $\ddot{\bar{q}}$, los valores de $\dot{\bar{q}}$ y q

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Capítulo 3

Ecuaciones de Gibbs-Appell

La simulación dinámica de los sistemas mecánicos puede ser abordado por medio de una variedad de principios de la mecánica clásica. Como se describió en el capítulo anterior se han desarrollado modelos basados en las ecuaciones de Newton, Euler, Lagrange, D'Alembert, Principio de Trabajos Virtuales entre otros. Metodologías basadas en las ecuaciones de Gibbs-Appell son escasas para modelar el movimiento de los sistemas mecánicos.

Las ecuaciones de la dinámica de G-A fueron desarrolladas por Josiah Willard Gibbs en 1879, y posteriormente, fueron re-descubiertas y desarrolladas en forma independiente por Paul Emile Appell en 1899. De ellas se asegura que *constituyen probablemente la forma más simple y comprensiva de las ecuaciones de movimiento jamás descubierta* (Pars, 1972).

En este capítulo, en primer término, se hace una revisión bibliográfica de los trabajos que han utilizado las ecuaciones de G-A en el área de la dinámica de los sistemas mecánicos. Posteriormente, se deducen las ecuaciones de G-A y se describe la forma que toman cuando se aplican a la simulación los sistemas robóticos. Por último, se describen las ecuaciones de G-A explícitas (Udwadia y Kabala, 1996).

3.1. Antecedentes

Como se ha mencionado, las ecuaciones de G-A han sido poco empleadas luego de su descubrimiento y desarrollo a finales del siglo XIX. Pocos libros de texto de mecánica teórica incluyen discusiones sobre ellas, y en la mayoría de los casos las señalan cómo un método apropiado para la resolución de algunos problemas complicados que involucran restricciones no holónomas (Ginsberg, 1998).

A finales de la década de los ochenta, las ecuaciones de G-A comienzan a despertar el interés de algunos investigadores, principalmente lo anterior se debe quizás como respuesta a algunos artículos publicados por Desloge (1986, 1988) . En dichos artículos, Desloge resalta la facilidad con la cual las ecuaciones de G-A manejan la dinámica de los sistemas mecánicos. Adicionalmente Desloge asegura, y es esta la causa de una serie de comentarios en revistas científicas, que las mucho más recientes ecuaciones de Kane, son equivalentes a las ecuaciones de G-A (Levinston,1987) . Esta discusión atrajo a otros investigadores, los cuales publicaron algunos artículos donde se estudia la mencionada relación. Sharf, D'Eleuterio y Hughes (1992) hacen un completo análisis, llegando a la conclusión que las ecuaciones de G-A y las de Kane tienen mucho en común. En otros trabajos, Townsend (1992) llega a conclusiones similares.

Recientemente Udwadia y Kalaba (1996), desarrollan una forma extendida de las ecuaciones de G-A, la cual denominaron ecuaciones de G-A explícitas. Esta forma de las ecuaciones de G-A, son aplicables de una manera simple a sistemas mecánicos complejos sometidos a restricciones holónomas y no holónomas.

Como se ha mencionado, una revisión bibliográfica muestra que son pocos los trabajos que utilizan las ecuaciones de G-A para resolver el problema dinámico de sistemas mecánicos. Además, la mayoría de estas aplicaciones, son ejemplos clásicos de la dinámica, propuestos en libros de mecánica analítica (Ginsbert, 1998).

3.2 Deducción de las Ecuaciones de Gibbs-Appell

Las ecuaciones de G-A pueden ser deducidas utilizando diferentes enfoques. Originalmente tanto Gibbs como Appell emplearon el principio de los trabajos virtuales para desarrollarlas, y es también el método de deducción preferido por diversos autores de obras de mecánica analítica (Pars 1972). Recientemente, algunos autores las han deducido con menor esfuerzo a partir del principio de Gauss (Udwadia y Kabala, 1996). Estos autores destacan la simplicidad con la que se obtienen las ecuaciones de G-A a través de este enfoque. Otra técnica igualmente simple, ha sido utilizada por Desloge (1988), quien se apoya en las ecuaciones de Lagrange para deducirlas en un número reducido de pasos. Este método se describe a continuación en la notación empleada en este trabajo.

Considérese un sistema de n partículas sujetas a la acción de un conjunto de fuerzas, a m restricciones holónomas (ecuación 2.3) y a l restricciones no holónomas (ecuaciones 2.4 y 2.9). Si se representa la configuración del sistema en un espacio de configuración cartesiano de $3n$ dimensiones por medio del vector posición \vec{p} , y si en este espacio, se tienen los vectores de la fuerza activa resultante \vec{F} y el de fuerzas de restricción resultante \vec{F}_r , entonces las ecuaciones de Newton que modelan el movimiento del sistema, tienen la siguiente forma:

$$m_i \ddot{p}_i = F_i + F_{r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 3n. \quad (3.5)$$

Si se tiene un vector \vec{q} de $(3n-m) \times 1$ coordenadas, que junto con las restricciones holónomas determinan unívocamente la configuración del sistema, entonces el efecto de las restricciones holónomas sobre las posibles configuraciones que el sistema puede adoptar, se describe por medio de relaciones del siguiente tipo:

$$p_i = h_i(\vec{q}, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3n. \quad (3.6)$$

Si ahora se tiene un vector \vec{r} de dimensión $(3n-m-l) \times 1$, cuyas componentes guardan una relación lineal con el vector \vec{q} , las cuales conjuntamente con las restricciones no holónomas determinan unívocamente los valores del vector \vec{q} , entonces el efecto de las

restricciones no holónomas sobre los posibles movimientos que el sistema puede efectuar se describe por medio de la siguiente relación:

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{3n-m-l} c_{ij}(\vec{q}, t) \dot{r}_j + d_i(\vec{q}, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3n-m. \quad (3.7)$$

Las ecuaciones (3.6) y (3.7) definen las restricciones impuestas sobre la configuración y el movimiento del sistema. Adicionalmente a estas restricciones, se debe suponer un requerimiento añadido, que las componentes del vector que agrupa a las fuerzas de restricción \vec{F}_r , satisface la siguiente relación:

$$\sum_{i=1}^{3n} F_{r_i} S_{ij} = 0, \quad j=1, 2, \dots, 3n-m-l. \quad (3.8)$$

donde

$$S_{ij} \equiv \frac{\partial \dot{p}_i(\vec{q}, \dot{\vec{r}}, t)}{\partial \dot{r}_j} = \frac{\partial \ddot{p}_i(\vec{q}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, t)}{\partial \ddot{r}_j} \quad (3.9)$$

Desloge (1988), demuestra en su trabajo la validez de la ecuación (3.8), basándose en las ecuaciones de Lagrange.

Las expresiones (3.5)–(3.8) proveen un sistema de $12n-2m-l$ ecuaciones con $12n-2m-l$ incógnitas. Es posible reducir de manera importante el tamaño del sistema de ecuaciones haciendo una combinación apropiada de las expresiones antes mencionadas. En este sentido, si se multiplica la ecuación (3.5) por S_{ij} y se hace uso de la ecuación (3.8), se obtiene lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{p}_i S_{ij} = \sum_{i=1}^{3n} F_i S_{ij} \quad j=1, 2, \dots, 3n-m-l. \quad (3.10)$$

Ahora, si se define la función de Gibbs:

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{p}_i^2 \quad (3.11)$$

y seguidamente el vector de fuerzas generalizadas:

$$\tau_j = \sum_{i=1}^{3n} F_i S_{i,j} \quad (3.12)$$

entonces, la expresión (3.10) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial G(\vec{q}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, t)}{\partial \ddot{r}_j} = \tau_j \quad j=1, 2, \dots, 3n-m-l. \quad (3.13)$$

Las $3n-m-l$ ecuaciones que resultan de la expresión (3.13), son las ecuaciones de movimiento de G-A. Estas ecuaciones, junto con las $3n-m$ ecuaciones dadas por la expresión (3.7), proveen un sistema de $6n-2m-l$ ecuaciones, con $6n-2m-l$ incógnitas.

3.3 Ecuaciones de Gibbs-Appell para un sistema mecánico

En esta sección, se describe la obtención de la ecuación de movimiento de un sistema mecánico multicuerpo, utilizando las ecuaciones de G-A. En primer lugar, se define la función de Gibbs para un cuerpo arbitrario compuesto por p partículas elementales en un sistema de referencia inercial (Pars, 1972):

$$G = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p m_k \ddot{r}_k^2 \quad (3.14)$$

donde, m_k es la masa de la partícula y \ddot{r}_k su aceleración. La función de Gibbs (G), es una cantidad escalar que también es conocida como la energía de aceleración.

Una manera de desarrollar la expresión (3.14) para un cuerpo rígido que se mueve en el espacio, consiste en escribir la función de Gibbs como la suma de dos términos expresados en coordenadas cartesianas, uno que se relaciona con el movimiento del centro de gravedad del cuerpo (traslación), y otro que se relaciona con el movimiento de rotación con respecto al centro de gravedad:

$$G = G_i + G_r \quad (3.15)$$

La función de Gibbs debida al movimiento de traslación del centro de gravedad es:

$$G_i = \frac{1}{2} m (\ddot{\vec{r}}_G)^T \ddot{\vec{r}}_G \quad (3.16)$$

y la contribución debida al movimiento de rotación:

$$G_r = \frac{1}{2} \iiint (\ddot{\vec{r}})^T \ddot{\vec{r}} dm \quad (3.17)$$

donde, el vector $\ddot{\vec{r}}$ es la aceleración lineal de cualquier punto de masa dm perteneciente al cuerpo rígido. Dicha aceleración es debida al movimiento de rotación con respecto al centro de gravedad:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{O,i} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{O,i}) \quad (3.18)$$

Donde $\vec{\omega}$ y $\dot{\vec{\omega}}$ son los vectores velocidad y aceleración angular del cuerpo, y $\vec{r}_{O,i}$ el vector posición de una partícula i con respecto al centro de gravedad del mismo cuerpo.

Tomando la expresión (3.18) y desarrollando los productos vectoriales, se tiene para la componente x :

$$\ddot{r}_i^x = -r_{O,i}^x (\omega_y^2 + \omega_z^2) + r_{O,i}^y (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) + r_{O,i}^z (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) \quad (3.19)$$

La expresión anterior se introduce en la ecuación (3.17) y se identifican términos que coinciden con la definición del tensor de inercia del cuerpo rígido, por lo tanto:

$$\begin{aligned} G_r = & \frac{1}{2} I_{xx} \dot{\omega}_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \dot{\omega}_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \dot{\omega}_z^2 - \\ & - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \dot{\omega}_x - (I_{zz} - I_{xx}) \omega_x \omega_z \dot{\omega}_y - (I_{xx} - I_{yy}) \omega_x \omega_y \dot{\omega}_z + \\ & + I_{xy} (\omega_y^2 \dot{\omega}_z - \omega_x^2 \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_z \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z \dot{\omega}_y - \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y) + \\ & + I_{xz} (\omega_x^2 \dot{\omega}_y - \omega_z^2 \dot{\omega}_y + \omega_y \omega_z \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y \dot{\omega}_x - \dot{\omega}_x \dot{\omega}_z) + \\ & + I_{yz} (\omega_z^2 \dot{\omega}_x - \omega_y^2 \dot{\omega}_x + \omega_x \omega_y \dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z \dot{\omega}_z - \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z) + f(\vec{\omega}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Esta última expresión, escrita en forma vectorial-matricial, adquiere la siguiente forma:

$$G_r = \frac{1}{2} (\dot{\bar{\omega}})^T \mathbf{I}_G \dot{\bar{\omega}} + (\dot{\bar{\omega}})^T (\bar{\omega} \times \bar{\omega} \mathbf{I}_G) + f(\bar{\omega}) \quad (3.21)$$

En las dos expresiones anteriores, bajo la designación $f(\bar{\omega})$, se agrupan los términos que son función únicamente de la velocidad angular, y debido a que éstos son irrelevantes –como demuestra más adelante la expresión (3.32)–, serán omitidos en adelante. Por lo tanto, la función de Gibbs, para un cuerpo rígido que se mueve en el espacio, es el resultado de la suma de las expresiones (3.16) y (3.17):

$$G = \frac{1}{2} m (\ddot{\bar{r}}_G)^T \ddot{\bar{r}}_G + \frac{1}{2} (\dot{\bar{\omega}})^T \mathbf{I}_G \dot{\bar{\omega}} + (\dot{\bar{\omega}})^T (\bar{\omega} \times \bar{\omega} \mathbf{I}_G) \quad (3.22)$$

La función de Gibbs, en función de variables expresadas en coordenadas cartesianas, y para un sistema mecánico compuesto por n cuerpos rígidos, no es más que la suma de las funciones de Gibbs de cada uno de los cuerpos, por lo tanto:

$$G = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i (\ddot{\bar{r}}_{G_i})^T \ddot{\bar{r}}_{G_i} + \frac{1}{2} (\dot{\bar{\omega}}_i)^T \mathbf{I}_{G_i} \dot{\bar{\omega}}_i + (\dot{\bar{\omega}}_i)^T (\bar{\omega}_i \times \mathbf{I}_{G_i} \bar{\omega}_i) \right] \quad (3.23)$$

Para aplicar esta ecuación a la dinámica de brazos robots de una manera eficiente, es necesario que las cantidades vectoriales y matriciales se refieran al origen de coordenadas ligado al cuerpo. Para lograr este propósito de manera eficiente, las variables cinemáticas deben calcularse recursivamente.

A continuación, y siguiendo la notación D-H descrita en el capítulo anterior, se muestran las expresiones mediante las cuales se obtienen recursivamente dichas variables:

$${}^i \bar{\omega}_i = {}^i \mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1} \bar{\omega}_{i-1} + \rho_i {}^i \bar{z}_i \dot{q}_i \quad (3.24)$$

$${}^i \dot{\bar{\omega}}_i = {}^i \mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1} \dot{\bar{\omega}}_{i-1} + \rho_i {}^i \bar{z}_i \ddot{q}_i + (1 - \rho_i) [{}^i \mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1} \bar{\omega}_{i-1} \times ({}^i \bar{z}_i \dot{q}_i)] \quad (3.25)$$

$${}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left[{}^{i-1}\ddot{\mathbf{r}}_{O_{i-1}} + {}^{i-1}\bar{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times ({}^{i-1}\bar{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times {}^{i-1}\bar{\mathbf{r}}_{O_{i-1},O_i}) + {}^{i-1}\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_{i-1} \times {}^{i-1}\bar{\mathbf{r}}_{O_{i-1},O_i} \right] + (1 - \rho_i) \left[{}^i\bar{\mathbf{z}}_i \ddot{q}_i + 2({}^i\bar{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\bar{\mathbf{z}}_i \dot{q}_i) \right] \quad (3.26)$$

$${}^i\ddot{\mathbf{r}}_{G_i} = {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} + {}^i\bar{\boldsymbol{\omega}}_i \times ({}^i\bar{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\bar{\mathbf{r}}_{O_i,G_i}) + {}^i\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i \times {}^i\bar{\mathbf{r}}_{O_i,G_i} \quad (3.27)$$

donde ρ_i es igual a 0, cuando el par i es prismático y es igual a 1, cuando es de revolución.

Seguidamente, se emplea la matriz de rotación para expresar, en el sistema de coordenadas global, las variables que se utilizan en la función de Gibbs de un cuerpo i perteneciente a un sistema mecánico multicuerpo:

$$G_i = \frac{1}{2} m_i ({}^0\mathbf{R}_i {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{G_i})^T {}^0\mathbf{R}_i {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{G_i} + \frac{1}{2} ({}^0\mathbf{R}_i {}^i\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i)^T {}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{I}_{G_i} {}^0\mathbf{R}_i^T ({}^0\mathbf{R}_i {}^i\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i) + ({}^0\mathbf{R}_i {}^i\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i)^T \left[{}^0\mathbf{R}_i {}^i\bar{\boldsymbol{\omega}}_i \times ({}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{I}_{G_i} {}^0\mathbf{R}_i^T {}^0\mathbf{R}_i {}^i\bar{\boldsymbol{\omega}}_i) \right] \quad (3.28)$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

y en virtud de que el producto $({}^0\mathbf{R}_i)^T {}^0\mathbf{R}_i$ es igual a la matriz identidad de 3×3 , se tiene

$$G_i = \frac{1}{2} m_i ({}^i\ddot{\mathbf{r}}_{G_i})^T {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{G_i} + \frac{1}{2} ({}^i\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i)^T {}^i\mathbf{I}_{G_i} {}^i\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i + ({}^i\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i)^T ({}^i\bar{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{I}_{G_i} {}^i\bar{\boldsymbol{\omega}}_i) \quad (3.29)$$

Esta última expresión, representa a la función de Gibbs del cuerpo i perteneciente a un sistema mecánico, con las variables vectoriales y matriciales expresadas en el sistema de referencia ligado al cuerpo. La expresión que permite calcular la función de Gibbs de un sistema mecánico, en función de cantidades expresadas en sistemas de coordenadas cartesianas locales, es

$$G = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i ({}^i\ddot{\mathbf{r}}_{G_i})^T {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{G_i} + \frac{1}{2} ({}^i\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i)^T {}^i\mathbf{I}_{G_i} {}^i\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i + ({}^i\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i)^T ({}^i\bar{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{I}_{G_i} {}^i\bar{\boldsymbol{\omega}}_i) \right] \quad (3.30)$$

Las ecuaciones de la dinámica de G-A, se obtienen al derivar parcialmente la función de Gibbs con respecto a las aceleraciones de nudo:

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\tau_j = \sum_{i=j}^n \frac{\partial G_i}{\partial \ddot{q}_j} \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.31)$$

La expresión (3.31) proporciona el vector ($n \times 1$) de fuerzas/pares que deben suministrar los actuadores para que el sistema compuesto por n barras consiga la configuración dada por las variables de nudo \bar{q} , $\dot{\bar{q}}$ y $\ddot{\bar{q}}$.

Derivando la expresión (3.30) con respecto a las aceleraciones de nudo, se tiene que la fuerza generalizada en el nudo i es:

$$\begin{aligned} \tau_j = \sum_{i=j}^n \left[\frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial {}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T {}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i} + \frac{1}{2} m_i ({}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i})^T \frac{\partial {}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{1}{2} m_i ({}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i})^T \frac{\partial {}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T {}^i \mathbf{I}_{G_i} {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \frac{1}{2} ({}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i)^T {}^i \mathbf{I}_{G_i} \frac{\partial {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} + \left(\frac{\partial {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T \cdot ({}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i \mathbf{I}_{G_i} {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \right] \quad (3.33) \end{aligned}$$

Esta expresión, luego de agrupar términos semejantes, queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_j} \equiv \tau_j = \sum_{i=j}^n \left[m_i ({}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i})^T \frac{\partial {}^i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_j} + ({}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i)^T {}^i \mathbf{I}_{G_i} \frac{\partial {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} + \left(\frac{\partial {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T ({}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i \mathbf{I}_{G_i} {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \right] \quad (3.34)$$

El conjunto de n ecuaciones, de la forma dada por la expresión (3.34), constituyen las ecuaciones de movimiento del sistema. Esta expresión se encuentra en la forma ideal para ser empleada como base de las formulaciones para resolver el PDI de los manipuladores. Precisamente con este fin, fue utilizada por Provenzano (2001) en el desarrollo del algoritmo por ellos propuesto, el algoritmo se documenta en el anexo 1.

Por otra parte la función de Gibbs para un sistema mecánico multicuerpo (ecuación 3.23), puede ser expresada de otras maneras diferentes a la arriba descrita. Una manera de expresar la función de Gibbs en una forma que resulta provechosa para el análisis de sistemas mecánicos, consiste en plantearla en función de las coordenadas generalizadas y de sus derivadas temporales. Este es un procedimiento que ha sido realizado por

Vukobratovic y Potkonjak (1985). La función de Gibbs, en términos de las coordenadas generalizadas, es:

$$G = \frac{1}{2} \ddot{\bar{q}}^T D \ddot{\bar{q}} + \bar{\varphi}^T \ddot{\bar{q}} + f(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \quad (3.35)$$

donde D es la matriz de inercia del sistema ($n \times n$), $\bar{\varphi}$ es el vector ($n \times 1$) que agrupa fuerzas centrífugas, gravitatorias y de coriolis (vector bias) y, al igual que en la expresión (3.21), aparece un término que no es función de la aceleración por lo que es irrelevante, cómo demuestra la expresión (3.32).

Si se deriva parcialmente la expresión (3.31), con respecto a las aceleraciones de nudo, se obtiene otra forma de las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\bar{q}}} \equiv \bar{\tau} = D \ddot{\bar{q}} + \bar{\varphi} \quad (3.36)$$

Esta forma de la ecuación de movimiento, es semejante a la descrita en la expresión (2.12), la cual puede ser obtenida por medio de las ecuaciones de Lagrange o por las ecuaciones de N-E. La expresión (3.35) se utiliza en el presente trabajo en el capítulo 5 para la resolución del PDD, además es la base de un método para el cómputo de la matriz de inercia del sistema.

Las expresiones (3.34) y (3.36) constituyen dos formas diferentes de la ecuación de movimiento de sistemas mecánicos.

3.4. Las ecuaciones explícitas de Gibbs-Appell

Según la opinión de algunos autores las ecuaciones de G-A destacan por su simplicidad y principalmente por la ventaja que supone aplicarlas a sistemas que poseen restricciones no holónomas. Esta ventaja se debe a la forma en que estas restricciones son introducidas en el modelo del sistema, no observándose diferencia alguna con respecto a la manera en que se introducen las restricciones holónomas, haciendo innecesaria dicha distinción. Sin

embargo, cómo ya se ha mencionado, hasta ahora la aplicación de estas ecuaciones al campo de la Robótica, se limita casi exclusivamente a la resolución del PDI.

Udwadia y Kalaba (1998), comentan que una de las razones que explican la poca utilización que han tenido las ecuaciones de G-A en la simulación de los sistemas mecánicos, consiste en que no han sido establecidas en forma explícita, o dicho de otra manera, que no se encuentran expresadas en términos de las cuatro cantidades que normalmente aparecen en los modelos de los sistemas mecánicos: matriz inercia del sistema (D), vector de fuerzas (\vec{F}), matriz jacobiana de restricciones (A) y el término independiente de las aceleraciones de nudo (\vec{b}). En búsqueda de una forma de las ecuaciones de G-A que incluyese estos términos, dichos autores se basaron en el principio de Gauss para desarrollar las ecuaciones de G-A explícitas. Utilizaron, además, una forma más general de las ecuaciones de restricción cinemáticas, producto de derivar con respecto al tiempo las ecuaciones de restricción de velocidad:

$$A(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \ddot{\vec{q}}(t) = \vec{b}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \quad (3.36)$$

donde A es de dimensión $m \times n$, $\ddot{\vec{q}}$ de $n \times 1$ y \vec{b} de $m \times 1$. Una consecuencia directa de la aplicación de la restricción en la forma de la ecuación (3.36), es la existencia de restricciones relacionadas, es decir, al derivar las ecuaciones de restricción originales estas condiciones se trasladan a las componentes de aceleración. Por lo tanto, al colocar una restricción de posición se obtienen a su vez restricciones de velocidad y aceleración.

En su trabajo, Udwadia y Kalaba proponen una formulación general, en donde las ecuaciones de restricción pueden ser dependientes entre sí. Debido a esto, la matriz A podría tener un rango menor que m . Esta condición no es necesaria en este trabajo, ya que si se escogen adecuadamente las restricciones de la plataforma del robots, estas serán necesariamente independientes entre sí. En este trabajo, este proceso de selección se realiza de manera sistemática mediante un procedimiento que se describe en el siguiente capítulo. Por lo tanto, en adelante se supone que la matriz jacobiana de restricciones (A) siempre será de rango m . A continuación, la ecuación (3.37) se expresa de la siguiente manera:

$$[A_e \quad A_i] \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}}_e \\ \ddot{\bar{q}}_i \end{bmatrix} = \bar{b} \quad (3.37)$$

siendo la dimensión de A_e es $m \times m$, la de A_i es $m \times (n-m)$, la de $\ddot{\bar{q}}_e$ es $m \times 1$ y la de $\ddot{\bar{q}}_i$ es $(n-m) \times 1$. El subíndice “e”, indica el subvector de variables dependientes que debe ser eliminado, y el subíndice “i”, indica el subvector en el cual sus componentes serán tomadas como independientes.

El fundamento de las ecuaciones de G-A explícitas, se haya en la transformación de un sistema restringido de $n+m$ ecuaciones diferenciales, en un sistema no restringido de n ecuaciones diferenciales, mediante una serie de manipulaciones algebraicas que relacionan las ecuaciones de restricción con las ecuaciones que modelan el movimiento del sistema no sometido a restricciones. Por lo tanto, el modelado matemático de manipuladores sometidos a restricciones, como el caso del robot paralelo, mediante las ecuaciones de G-A explícitas expresadas en coordenadas de nudo, posee elementos en común con las ecuaciones que modelan el mismo sistema mecánico no sometido a restricciones adicionales. Estos elementos en común no son más que la matriz de inercia del sistema D y el vector bias ($\bar{\gamma}$) del manipulador. Por lo tanto, y de manera similar al procedimiento que se emplea en el método de los multiplicadores de Lagrange (sección 2.2.4), deben hallarse en primer término, la matriz de inercia del sistema D ($n \times n$) y el vector bias $\bar{\gamma}$ ($n \times 1$) del las cadenas abierta del robots paralelo, sin someterlas a restricciones adicionales. Una vez calculado el vector bias, es conveniente que éste sea agrupado con el vector de fuerzas/pares que proporcionan los actuadores a cada uno de los nudos $\bar{\tau}$ ($n \times 1$):

$$\bar{\gamma} = \bar{\tau} - \bar{C}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + \bar{G}(\bar{q}) \quad (3.38)$$

Una vez calculados D y $\bar{\gamma}$, sus coeficientes deben ser separados en componentes dependientes e independientes. Se denotan entonces las m filas y m columnas de la matriz D que corresponden a las coordenadas tomadas como dependientes, como la submatriz D_{ee} ($m \times m$); las $n-m$ filas y $n-m$ columnas de la matriz D que son independientes, como la submatriz D_{ii} ($(n-m) \times (n-m)$), y el resto de la matriz se distribuye entre las submatrices D_{ei} ($m \times (n-m)$) y D_{ie} ($(n-m) \times m$) de la siguiente forma:

Licencia Creative Commons:

$$D = \begin{bmatrix} D_{ee} & D_{ei} \\ D_{ie} & D_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

De manera semejante se procede a separar el vector $\vec{\gamma}$ en los subvectores $\vec{\gamma}_e (m \times 1)$ y $\vec{\gamma}_i (n-m \times 1)$:

$$\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} \vec{\gamma}_e \\ \vec{\gamma}_i \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Finalmente, las ecuaciones de G-A explícitas, para sistemas expresados en coordenadas generalizadas y en la notación empleada en el presente trabajo, poseen la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_e & A_i \\ 0 & D_{ii} + X^T D_{ee} X - D_{ie} X - X^T D_{ie} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{q}}_e \\ \ddot{\vec{q}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b} \\ \vec{\gamma}_i - X^T \vec{\gamma}_e + (X^T D_{ee} - D_{ie}) A_e^{-1} \vec{b} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

donde $X = A_e^{-1} A_i$.

El sistema de n ecuaciones diferenciales (3.41), constituye el modelo dinámico del sistema sometido a m restricciones adicionales, en el cual las incógnitas son las n aceleraciones de nudo. Este modelo, luego de ser resuelto, puede ser integrado numéricamente por cualquiera de las rutinas creadas para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Capítulo 4

Resolución del Problema Dinámico Directo de Robots Paralelos utilizando las ecuaciones de G-A

En este capítulo se describen las dos metodologías propuestas, en este trabajo, para resolver el problema dinámico directo (PDD) de robots paralelos. Las metodologías desarrolladas utilizan las ecuaciones de Gibbs-Appell para resolver el PDD. Inicialmente se presenta la resolución utilizando el método aumentado o método de los multiplicadores de Lagrange. Seguidamente se describe una metodología basada en las ecuaciones explícitas de Gibbs-Appell expuestas en el capítulo anterior.

4.1. Metodología 1: Multiplicadores de Lagrange

Se describe a continuación la metodología 1 propuesta para determinar la dinámica directa de robots paralelos. Esta consiste en utilizar el método aumentado o de los multiplicadores de Lagrange. La selección del método aumentado se fundamenta debido a que la determinación de la matriz de rigidez (matriz D) del sistema puede ser obtenida utilizando algoritmos basados en las ecuaciones de Gibbs-Appell para cadenas abiertas. En las siguientes secciones se describe el procedimiento utilizado para resolver el PDD de robots paralelos siguiendo la metodología propuesta.

4.1.1 Separación del Robot Paralelo.

El primer paso en la obtención de la dinámica directa de un Robot paralelo consiste en separar el robot en las juntas que unen la plataforma móvil. De esta forma se obtiene un sistema conformado por varios robots de cadenas abiertas como se aprecia en la figura 4.1, es decir, cada una de las “piernas” del robot constituye un sistema de una cadena abierta.

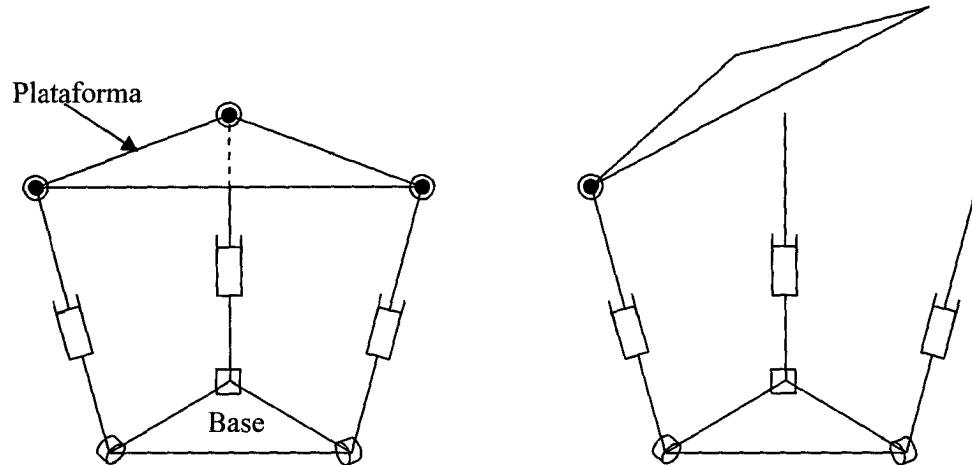


Figura 4.1. Separación de la Plataforma móvil

Considérese por ejemplo el Robot Paralelo de 3 grados de libertad (GDL) mostrado en la figura 4.2. El robot puede ser seccionado en las juntas que unen las “piernas” a la plataforma móvil, quedando el sistema constituido de la forma presentada en la figura 4.3. Haciendo lo anterior se obtiene para este caso en particular, 3 cadenas abiertas, en la cual, en una de las cadenas se considera la plataforma móvil como un eslabón adicional.

Considérese la cadena abierta 1 que incluye a la plataforma móvil y definida por los eslabones 1, 2 y 3 cuyas coordenadas generalizadas son q_1 , q_2 y q_3 la rama 1 ($k=1$). De la misma forma la rama $k=2$, se constituye de los eslabones 4, 5 con coordenadas generalizadas q_4 y q_5 . Igualmente la rama $k=3$ esta conformada por los eslabones 6 y 7 con coordenadas q_6 y q_7 .

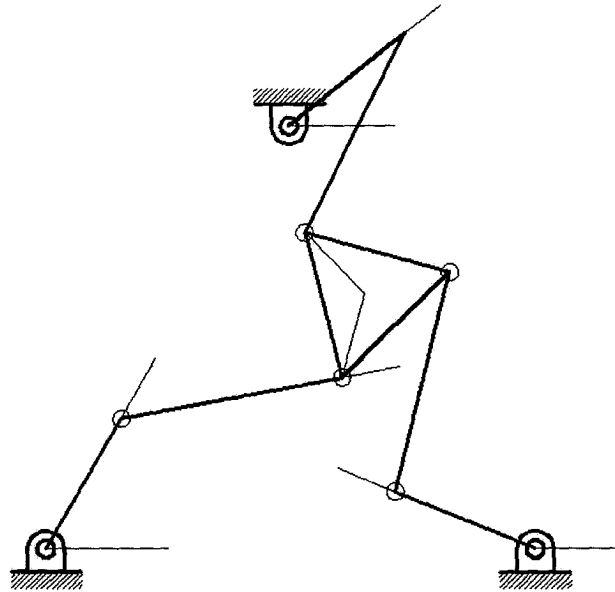


Figura 4.2. Robot Paralelo 3 GDL

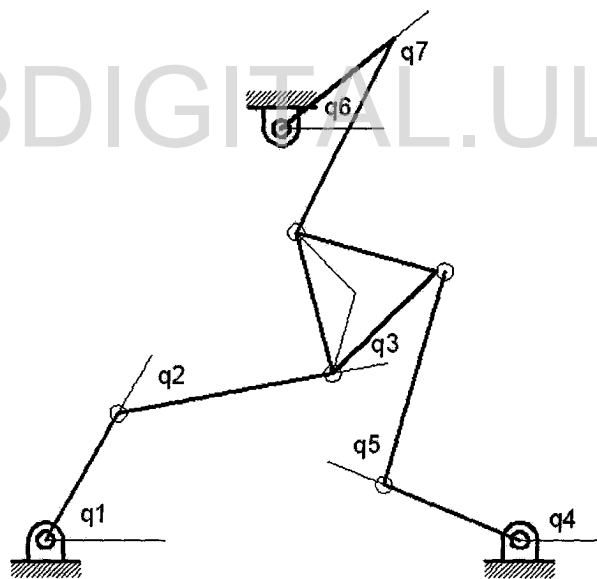


Figura 4.2. Separación del Robot Paralelo 3 GDL

La dinámica de cada cadena abierta se determina mediante la ecuación 2.12:

$$[D_k]_{n \times n} [\ddot{q}_k]_{n \times 1} = \vec{\gamma}_{k \ n \times 1} \quad (4.1)$$

Siendo D la matriz de masas de la cadena abierta. $\ddot{\vec{q}}$ el vector de aceleración de las coordenadas generalizadas. $\vec{\gamma}_{k \times 1}$ incluye los pares o fuerzas aplicadas en las barras de la cadena abierta y al vector que involucra las fuerzas gravitatorias y fuerzas centrífugas y Coriolis. El subíndice k se utiliza en este trabajo para identificar el número de cadenas abiertas obtenidas luego de separar el robot.

Si el mecanismo consta de k ramas (“piernas”), la dinámica directa de las ramas se obtiene por separado de la forma:

$$\begin{aligned} [D_1]_{n \times n} [\ddot{\vec{q}}_1]_{n \times 1} &= \vec{\gamma}_{1 \times 1} \\ [D_2]_{m \times m} [\ddot{\vec{q}}_2]_{m \times 1} &= \vec{\gamma}_{2 \times 1} \\ &\dots \\ [D_k]_{s \times s} [\ddot{\vec{q}}_k]_{s \times 1} &= \vec{\gamma}_{k \times 1} \end{aligned} \quad (5.2)$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Luego se ensamblan obteniendo de esta forma el sistema representado por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_k \end{bmatrix}_{(n+m+\dots+k) \times (n+m+\dots+k)} [\ddot{\vec{q}}]_{(n+m+\dots+k) \times 1} = \vec{\gamma}_{m+n+\dots+k \times 1} \quad (5.3)$$

Donde cada una de las matrices de masas D puede ser hallada utilizando algoritmos desarrollados para resolver el PDD basados en las ecuaciones de G-A tal como la desarrollada por Provenzano (2001)

El vector $\vec{\gamma}$ que involucra las fuerzas gravitatorias y las fuerzas centrífugas y de Coriolis, se determina de manera eficiente adecuando algoritmos eficientes que resuelven el PDI como el desarrollado por Provenzano (2001). Este método fue propuesto por Walker y

Orin (1982) y consiste en anular en el algoritmo los términos relacionados con las aceleraciones en los nudos. El vector que resuelve el problema dinámico directo por medio del nuevo algoritmo, es el vector buscado. Este es un método eficiente utilizado ampliamente en aplicaciones de simulación de sistemas mecánico, por lo que es el método empleado en este trabajo.

4.1.2 Restricciones.

Para completar el modelo dinámico, es necesario incluir en el modelo, las fuerzas de restricción que restringen el movimiento del sistema. Adicionalmente es necesario incluir las restricciones cinemáticas impuestas por el robot paralelo.

4.1.2.1 Restricciones Cinemáticas

Las restricciones cinemáticas se expresan, de acuerdo con lo planteado en el capítulo 2, por medio de la ecuación 5.4.

$$f_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.4)$$

La ecuación 5.4 consiste en ecuaciones algebraicas no lineales, y representa la trayectoria de las coordenadas generalizadas del robot paralelo, por conveniencia se deriva la ecuación 5.3 dos veces respecto al tiempo, con lo cual se obtiene:

$$A_q \dot{q} = -A_t \quad (5.5)$$

$$A_q \ddot{q} = b \quad (5.6)$$

Donde el subíndice t indica diferenciación respecto al tiempo. El vector \vec{b} incluye las primeras derivadas de las coordenadas y está definido como:

$$b = -A_{tt} - (A_q \dot{q})_q \dot{q} - 2A_{qt} \dot{q} \quad (5.7)$$

La ecuación 5.6 es una expresión matricial que incluye las restricciones cinemáticas del sistema a nivel de las aceleraciones, lo cual resultará muy útil para la obtención del modelo dinámico.

En la ecuación 5.6 A_q es el jacobiano de restricciones y se obtiene por los métodos planteados en el capítulo 2.

4.1.2.2 Restricciones debido a las Fuerzas Internas.

Para incluir en el modelo dinámico las ecuaciones de restricción impuestas por las fuerzas internas, se utiliza, la técnica de optimización basada en los multiplicadores de Lagrange.

Se puede definir el problema general de la dinámica de sistemas mecánicos como:

$$\vec{F} + \vec{F}^C = 0 \quad (5.7)$$

Siendo F la resultante de todas las fuerzas aplicadas y externas del sistema, F^C las fuerzas impuestas por las restricciones. F se obtiene resolviendo el sistema sin considerar las fuerzas de restricción impuestas por la configuración de lazo cerrado planteado en el robot, es decir, F se obtiene resolviendo el problema dinámico ($\vec{F} = D \ddot{\vec{q}}$) de las cadenas abiertas obtenidas al separar el robot paralelo en las juntas. \vec{F}^C se puede expresar como $-A_q^T \vec{\lambda}$ siendo $\vec{\lambda}$ el vector de multiplicadores de Lagrange y A_q la matriz Jacobiana obtenida de derivar las restricciones cinemáticas respecto a las coordenadas del sistema. El conjunto de ecuaciones que modela el desempeño dinámico de la cadena cerrada queda definido adicionando las fuerzas de restricción a las ecuaciones 5.2. El conjunto total de ecuaciones debe incluir las 5.6, por lo tanto el problema dinámico consiste en resolver la expresión matricial definida por la ecuación 5.7.

$$\begin{bmatrix} D_{n \times n} & A_q^T_{n \times m} \\ A_q_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{q}}_{n \times 1} \\ \vec{\lambda}_{m \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\gamma}_{n \times 1} \\ \vec{b}_{m \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Siendo n el número total de coordenadas generalizadas utilizadas para definir la posición del robot paralelo y m el número total de restricciones impuestas por la separación de la plataforma móvil y las “piernas”.

4.1.3 Esquema de la Metodología.

El esquema propuesto para la resolución de la dinámica directa de Robots Paralelos se muestra a continuación:

- Separar la cadena cerrada realizando cortes en las juntas hasta obtener sistemas de cadenas abiertas
- Determinar la configuración inicial del mecanismo \bar{q} y $\dot{\bar{q}}$
- Determinar $D_1, D_2 \dots D_n$
- Cálculo de γ
- Obtención de $\bar{b} = -\left(A_q \dot{\bar{q}}\right)_q \dot{\bar{q}}$
- Determinar el Jacobiano A_q del sistema inicial (Robot Paralelo)
- Ensamble del sistema

$$\begin{bmatrix} D_{n \times n} & A_q^T \quad n \times m \\ A_q \quad m \times n & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}}_{n \times 1} \\ \bar{\lambda}_{m \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{n \times 1} \\ \bar{b}_{m \times 1} \end{bmatrix}$$

- Resolver $\ddot{\bar{q}}$ y $\bar{\lambda}$ de la forma $\begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}}_{n \times 1} \\ \bar{\lambda}_{m \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{n \times n} & A_q^T \quad n \times m \\ A_q \quad m \times n & 0_{m \times m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{n \times 1} \\ \bar{b}_{m \times 1} \end{bmatrix}$
- Integrar el sistema de ecuaciones algebraico diferencial (DAEs) obtenido en el paso anterior, para obtener $\dot{\bar{q}}$ y \bar{q} con respecto al tiempo.

4.2. Metodología 2: Ecuaciones Explícitas de G-A

En esta sección se emplean las ecuaciones explícitas de G-A para proponer una metodología que permite la resolución del PDD de Robots Paralelos. El procedimiento inicial consiste, al igual que en la metodología 1, en separar la plataforma móvil. De esta forma se obtienen varias cadenas abiertas. Luego se utiliza la ecuación explícita de G-A para simular el comportamiento del robot. El desarrollo de la metodología consiste en la

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

determinación sistemática de los términos involucrados en la ecuación. La complejidad de la determinación de cada uno de los términos se describe seguidamente.

$$\begin{bmatrix} A_e & A_i \\ 0 & D_{ii} + X^T D_{ee} X - D_{ie} X - X^T D_{ie}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}}_e \\ \ddot{\bar{q}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{\gamma}_i - X^T \bar{\gamma}_e + (X^T D_{ee} - D_{ie}) A_e^{-1} \bar{b} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

La obtención de los términos A_e , A_i . Consiste en la separación del jacobiano de restricciones en coordenadas independientes y coordenadas dependientes.

La determinación D_{ii}, D_{ee}, D_{ie} pasa inicialmente por construir la matriz D , utilizando algoritmos basados en las ecuaciones de G-A (Provenzano, 2001). Una vez ensamblada la matriz es necesario separar los términos de modo de construir las matrices mencionadas.

El vector \bar{b} se obtiene de derivar las ecuaciones de restricción a nivel de posición, este vector no presenta inconveniente. Sin embargo, es necesario ordenar el vector de manera tal que coincida con la ordenación del vector de aceleraciones, es decir, ordenarlo en función de las coordenadas dependientes e independientes.

El vector $\bar{\gamma}$ puede ser obtenido, para cada cadena utilizando algoritmos documentados para la resolución del PDI de cadenas abiertas, luego es necesario separarlo en los términos dependientes e independientes.

La obtención de los términos de una manera sistemática para robots paralelos se describe en las siguientes secciones.

4.2.1 Jacobiano de Restricciones

A diferencia de la metodología 1, en la cual se utiliza la ecuación 2.7 para obtener el jacobiano de restricciones, en esta metodología se propone su obtención a través de derivar parcialmente las m ecuaciones de restricción representadas por la ecuación 2.2. Este procedimiento permite utilizar herramientas de manejo simbólico de ecuaciones algebraicas como el paquete computacional MAPLE. La selección de este procedimiento permite la

determinación del jacobiano de restricciones de una forma ordenada de fácil separación. El jacobiano de restricciones se obtiene luego de derivar parcialmente el conjunto de m ecuaciones de restricción (ecuación 2.2). El orden de derivación se realiza primero respecto a las coordenadas independientes y seguidamente se deriva con respecto a las coordenadas dependientes. Siguiendo el orden q_{d1}, q_{d2} y q_{dm} y q_{i1}, q_{in} . donde el subíndice d indica las coordenadas seleccionadas dependientes e i las coordenadas independientes, el jacobiano se puede expresar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{d1}} \dot{q}_{d1} + \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{d2}} \dot{q}_{d2} + \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{d3}} \dot{q}_{d3} + \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{dm}} \dot{q}_{dm} + \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{i1}} \dot{q}_{i1} + \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{in}} \dot{q}_{in} &= 0 \\ \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{d1}} \dot{q}_{d1} + \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{d2}} \dot{q}_{d2} + \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{d3}} \dot{q}_{d3} + \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{dm}} \dot{q}_{dm} + \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{i1}} \dot{q}_{i1} + \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{in}} \dot{q}_{in} &= 0 \\ \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{d1}} \dot{q}_{d1} + \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{d2}} \dot{q}_{d2} + \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{d3}} \dot{q}_{d3} + \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{dm}} \dot{q}_{dm} + \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{i1}} \dot{q}_{i1} + \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{in}} \dot{q}_{in} &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Expresado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{d1}} & \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{d2}} & \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{d3}} & \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{dm}} & \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{i1}} & \frac{\partial f_1(\bar{q})}{\partial q_{in}} \\ \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{d1}} & \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{d2}} & \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{d3}} & \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{dm}} & \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{i1}} & \frac{\partial f_2(\bar{q})}{\partial q_{in}} \\ \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{d1}} & \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{d2}} & \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{d3}} & \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{dm}} & \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{i1}} & \frac{\partial f_m(\bar{q})}{\partial q_{in}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} \\ \dot{q}_{d2} \\ \dot{q}_{d3} \\ \dot{q}_{dm} \\ \dot{q}_{i1} \\ \dot{q}_{in} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.10)$$

Donde el término que contiene las derivadas parciales, en la ecuación 5.10, es el jacobiano de restricción buscado. La separación del jacobiano puede realizarse de una manera sencilla, y ensamblada mediante el procedimiento que se describe a continuación:

$$A_{e_{mxm}} = A_{1..m, 1..m} \quad y$$

$$A_{i_{mxn}} = A_{1..m+1, 1..n}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Adicionalmente se puede observar que al separar la ecuación 5.10 en los términos que contienen las variables dependientes e independientes, se puede obtener la velocidad de las coordenadas dependientes en función de las velocidades de las coordenadas independientes, de acuerdo con el siguiente procedimiento (Shabana, 2001)

$$A_e \cdot \dot{\bar{q}}_d + A_i \cdot \dot{\bar{q}}_i = 0 \quad (5.11)$$

Luego:

$$\dot{\bar{q}}_d = -A_e \cdot A_i \cdot \dot{\bar{q}}_i \quad (5.12)$$

La ecuación 5.12 es utilizada en este trabajo con el objeto de determinar las velocidades dependientes en función de las velocidades independientes. Este procedimiento de separación de coordenadas para sistemas mecánicos restringidos fue propuesto por Wehage (Citado por Shabana, 2001).

El procedimiento descrito anteriormente puede ser implementado en el programa MAPLE, mediante las siguientes operaciones.

- Se define $f_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$
- Luego se definen las coordenadas independientes, en el caso de robots paralelos su selección es simple ya que en la mayoría de casos la variable independiente se encuentra ubicada al inicio de cada “pierna”, en la plataforma base.
- Determinar el jacobiano de restricciones utilizando la opción $\text{jacobian}(f(\bar{q}), q_{d1}, q_{d2}, q_{dm}, q_{i1}, q_{in})$

4.2.2 Matriz de Masas D

Al igual que la metodología 1 la matriz D puede obtenerse tras aplicar la ecuación 2.12 a cada cadena abierta obtenida de la separación del robot paralelo.

$$[D_k]_{n \times n} [\ddot{q}_k]_{n \times 1} = \vec{y}_{k \ n \times 1} \quad (5.13)$$

El subíndice k indica la rama (“pierna”) analizada. Con el objeto de incluir las propiedades de masa de la plataforma móvil, se considera que esta forma parte de una de las ramas. De esta forma se obtiene una pierna cuyo eslabón final es la plataforma móvil.

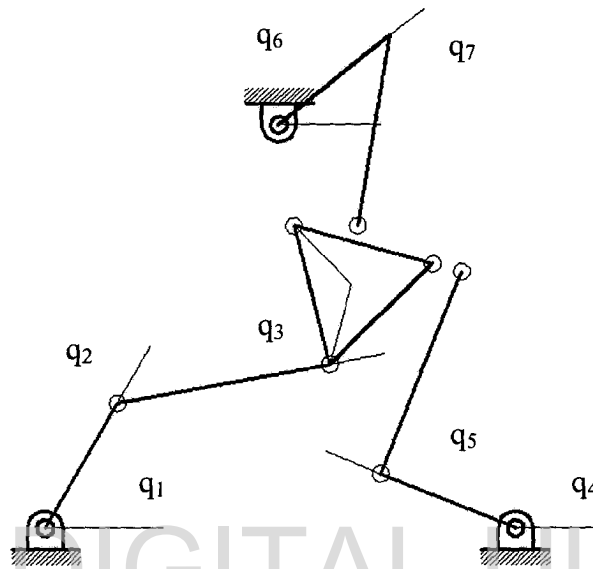


Figura 4.3. Separación del Robots

La matriz D de cada rama k se obtienen utilizando los algoritmos basados en las ecuaciones de G-A. Una vez determinada la matriz D de cada cadena es necesario separarlas en sus términos dependientes e independientes. Antes de presentar la metodología que permite de una forma sistemática la determinación de los términos dependientes e independientes de la matriz D , es importante exponer las siguientes consideraciones que se presentan en el caso de Robots Paralelos.

- La separación del Robot paralelo conlleva a un sistema de k ramas, donde una de ellas incluye las propiedades de masa de la plataforma (figura 4.3).
- Cada cadena quedará conformada por p número de eslabones.
- Se tiene una coordenada independiente por cada rama, que en la mayoría de casos se encuentra ubicada en la base.

- Si cada rama presenta una sola coordenada independiente, las restantes p-1 coordenadas se consideran dependientes.

A partir de las consideraciones anteriores la separación de la matriz D para cada cadena se realiza mediante el siguiente esquema.

1.- Se obtiene la matriz D para cadena abierta, si la cadena está conformada por p eslabones se tiene:

$$D_{k=} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{1p} \\ D_{21} & D_{22} & D_{2p} \\ D_{p1} & D_{p2} & D_{pp} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

2.- Si la coordenada independiente se ubica en la base (Robot Paralelo), se separa la matriz de la siguiente forma:

$$D_{iik} = D_{11}$$

$$D_{EEK} = D_{2..p,2..p} \quad (5.15)$$

$$D_{iek} = D_{1..p,1..p}$$

3.- Finalmente, una vez determinados los términos dependientes e independientes para cada cadena se procede a ensamblar las matrices de acuerdo con el siguiente orden.

$$D_{ii} = \begin{bmatrix} D_{ii1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{ii2} & 0 \\ 0 & 0 & D_{iik} \end{bmatrix}$$

$$D_{ee} = \begin{bmatrix} D_{ee1} & 0_{1p-1,p-1} & 0_{2p-1,p-1} \\ 0_{1p-1,p-1} & D_{ee2} & 0_{kp-1,p-1} \\ 0_{2p-1,p-1} & 0_{kp-1,p-1} & D_{EEK} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$D_{ie} = \begin{bmatrix} D_{ee1} & 0_{1\ p-1, p-1} & 0_{2\ p-1, p-1} \\ 0_{1\ p-1, p-1} & D_{ee2} & 0_{k\ p-1, p-1} \\ 0_{2\ p-1, p-1} & 0_{k\ p-1, p-1} & D_{EEK} \end{bmatrix}$$

Donde el término $0_{1\ p-1, p-1}$ incluye en la matriz valores de cero para $p-1, p-1$ filas y columnas de acuerdo al número de eslabones p de la cadena k .

El procedimiento anterior permite determinar las matrices de masa (D), con lo cual el principal problema de utilizar las ecuaciones explícitas de Gibbs-Appell queda resuelto, para el caso de robots paralelos.

4.2.3 Vector $\vec{\gamma}$

Este vector involucra; las fuerzas externas aplicadas al robot, las fuerzas debido al peso y las fuerzas centrífugas. Se debe determinar el vector para cada cadena por separado. Su determinación se realiza utilizando algoritmos basados en las ecuaciones de G-A. Luego de determinar el vector para cada cadena, es necesario separar sus componentes en sus términos dependientes e independientes. El procedimiento propuesto en este trabajo se puede resumir:

1.- Determinar $\vec{\gamma}$ para cada cadena, utilizando para ello algoritmos basados en las ecuaciones de G-A.

$$\vec{\gamma}_{k=1} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \cdot \\ \gamma_{1p} \end{bmatrix}, \vec{\gamma}_{k=2} = \begin{bmatrix} \gamma_{21} \\ \cdot \\ \gamma_{2p} \end{bmatrix}, \vec{\gamma}_{k=k} = \begin{bmatrix} \gamma_{k1} \\ \cdot \\ \gamma_{kp} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

2.- Debido a que la coordenada independiente, en el caso de robots paralelos, se encuentra ubicado en el eslabón inicial de la cadena (eslabón unido a la base) la separación del vector en cada cadena puede realizarse de la siguiente forma:

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\vec{\gamma}_i = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{k1} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\vec{\gamma}_i = \begin{bmatrix} \gamma_{1,2..p-1} \\ \gamma_{2,2..p-1} \\ \gamma_{k,2..p-1} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

4.2.3 Vector b

El vector \vec{b} incluye, en las restricciones cinemáticas y se determina mediante la ecuación 5.20 (Haug).

$$\vec{b} = -\left(A \cdot \dot{\vec{q}}\right)_q \dot{\vec{q}} \quad (5.20)$$

Donde el subíndice q indica la derivada del término entre paréntesis respecto a las coordenadas generalizadas.

En el caso en estudio, la aplicación de la ecuación 5.20 no puede ser realizada directamente. Al igual que el procedimiento utilizado para determinar el jacobiano de restricciones, el vector b debe ser obtenido de una forma que facilite su separación en las coordenadas dependientes e independientes. Para realizar lo anterior se propone el siguiente procedimiento:

- Se define $f_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$
- Luego se definen las coordenadas independientes
- Se determina el jacobiano de restricciones utilizando la opción en el programa MAPLE jacobina. $A = \text{jacobian}(f(\vec{q}), q_{d1}, q_{d2}, q_{dm}, q_{i1}, q_{in})$

- Se multiplica la matriz A por el vector de velocidades. Es de resaltar que el vector velocidades debe ser ordenado de forma similar al utilizado para determinar el jacobiano de restricción

$$A\dot{q} = A \cdot \dot{\vec{q}} = \text{jacobian}(f(\vec{q}), q_{d1}, q_{d2}, q_{dm}, q_{i1}, q_{in}) \cdot \begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \\ q_{dm} \\ q_{i1} \\ q_{in} \end{bmatrix}$$

- Se calcula nuevamente el jacobiano del vector obtenido en el paso anterior: $(A \cdot \dot{\vec{q}})_q = \text{jacobian}(A\dot{q}, q_{d1}, q_{d2}, q_{dm}, q_{i1}, q_{in})$.
- Finalmente el vector buscado se obtiene multiplicando la matriz obtenida en el paso anterior por el vector velocidades.

$$\vec{b} = (A \cdot \dot{\vec{q}})_q \begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \\ q_{dm} \\ q_{i1} \\ q_{in} \end{bmatrix}$$

Siguiendo la metodología propuesta en esta sección, la ecuación 5.8 puede ser construida. La resolución de la ecuación permite obtener las aceleraciones de las coordenadas generalizadas. La integración de las aceleraciones respecto al tiempo permite determinar las velocidades y las posiciones que adquiere el robot paralelo durante el tiempo de simulación.

Con el objeto de emplear y validar las metodologías propuestas, en el siguiente capítulo se presentan 4 ejemplos numéricos. Cada uno de los ejemplos se simula mediante las metodologías presentadas en este capítulo, adicionalmente a fines de verificar los resultados obtenidos, se resuelven con el paquete computacional Working Model 2D,

Capítulo 5

Ejemplos Numéricos

En el presente capítulo son mostrados cuatro ejemplos numéricos desarrollados en el módulo de programación orientada a bloques Simulink de Matlab. La obtención del modelo dinámico se realiza utilizando las metodologías propuestas en el capítulo anterior. El manejo de las operaciones algebraicas que permiten obtener el modelo dinámico de los ejemplos planteados se realiza empleando el programa de computación de manejo simbólico de ecuaciones algebraicas MAPLE.

5.1. Ejemplo Numérico I

El ejemplo numérico 1 consiste en simular el comportamiento dinámico de un robot paralelo de 1 grado de libertad. El robot, conocido en la literatura de mecanismo como el mecanismo de cuatro barras, consiste de una plataforma móvil unida mediante dos cadenas a la plataforma base (figura 5.1). Cada “pierna” está constituida por una cadena abierta de 1 eslabón. La configuración geométrica del sistema puede ser definida mediante un conjunto de 3 coordenadas generalizadas, tal como se aprecia en la figura 1.

En este ejemplo, se simula el comportamiento del robot cuando éste es accionado por un torque constante aplicado a la coordenada generalizada q_1 (figura 5.1).

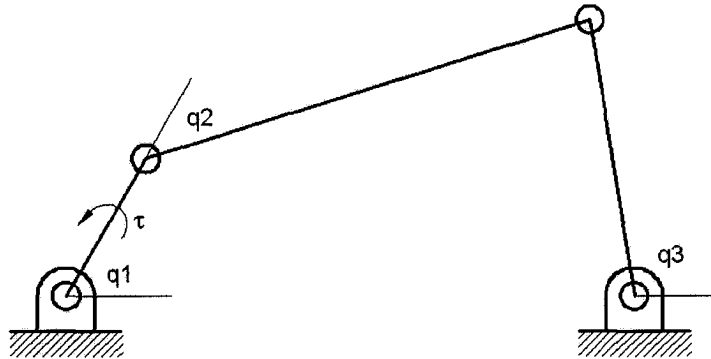


Figura 5.1 Ejemplo Numérico 1

La tabla 5.1 presenta los parámetros D-H que definen la configuración del robot.

Tabla 5.1: Parámetros D-H de Robot Paralelo de 1 GDL

I	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	0	l_1	0	q_2
3	0	l_2	0	q_3
4	0	l_3	0	q_3

Las propiedades de masa del robot se incluyen en la tabla 5.2 y las condiciones iniciales del robot se documentan en la tabla 5.3. las condiciones iniciales están referidas al sistema coordinado global y expresadas en radianes.

Tabla 5.2: Dimensiones y Propiedades de Inercia

Barra i	L_i [m]	m_i [kg]	I_i [kg m ²]
1	1	1	1
2	3	2	2
3	7/4	0	0
4	3	-	-

Se describe a continuación la codificación de la metodología 1 en el paquete Simulink de Matlab.

Tabla 5.3: Configuración inicial del Robot Paralelo de 1 DOF.

$\theta_1 = 0.785$	$\theta_2 = -0.323$	$\theta_3 = -1.892$
--------------------	---------------------	---------------------

5.1.1 Implementación de la Metodología 1

La resolución numérica del modelo dinámico obtenido utilizando la metodología 1 se realizó en el paquete computacional Simulink de Matlab. La figura 5.2 resume el flujograma utilizado para la programación de la resolución numérica del modelo. El nombre de las funciones que aparecen en la figura se codificaron utilizando el lenguaje de programación de Matlab. Por lo anterior se codificaron, en formato de archivo de extensión .m, los algoritmos: bias.m, jacobiano.m, masas.m b.m, time.m y error.m. Seguidamente se describe el objetivo de cada archivo desarrollado

El archivo bias.m. es utilizado durante la simulación para obtener el valor numérico del vector bias. Este vector, involucra las fuerzas gravitatorias y las fuerzas centrífugas y de Coriolis y, se determina mediante un algoritmo que utiliza las ecuaciones de G-A para resolver del PDI.

El archivo jacobiano.m permite el computo de la matriz jacobiana de restricciones (A). La expresión matemática utilizada para determinar A se desarrolla utilizando el paquete de manejo simbólico de ecuaciones algebraicas Maple. El anexo 3 presenta la codificación en Maple del procedimiento para la obtención del las matrices jacobianas de los ejemplos numéricos presentados en este trabajo.

La matriz de masas del sistema (archivo gibbs.m) se obtiene utilizando el algoritmo desarrollado por Provenzano (2001). El algoritmo resuelve el PDD empleando las ecuaciones de G-A. Una vez determinado la matriz de masas, el jacobiano de restricciones y el vector bias. El archivo ensamble.m realiza el ensamble del modelo del sistema cuya resolución permite la obtención de las aceleraciones de las coordenadas generalizadas.

Se incluye en la simulación, los archivos time.m y error.m. El primer archivo permite determinar el tiempo de cómputo empleado por el programa para realizar la simulación.

Este se codifica con el objeto de comparar el tiempo de cómputo de las metodologías propuestas. El archivo error.m determina el error obtenido durante la simulación por el no cumplimiento de las restricciones expresadas en la ecuación 2.3.

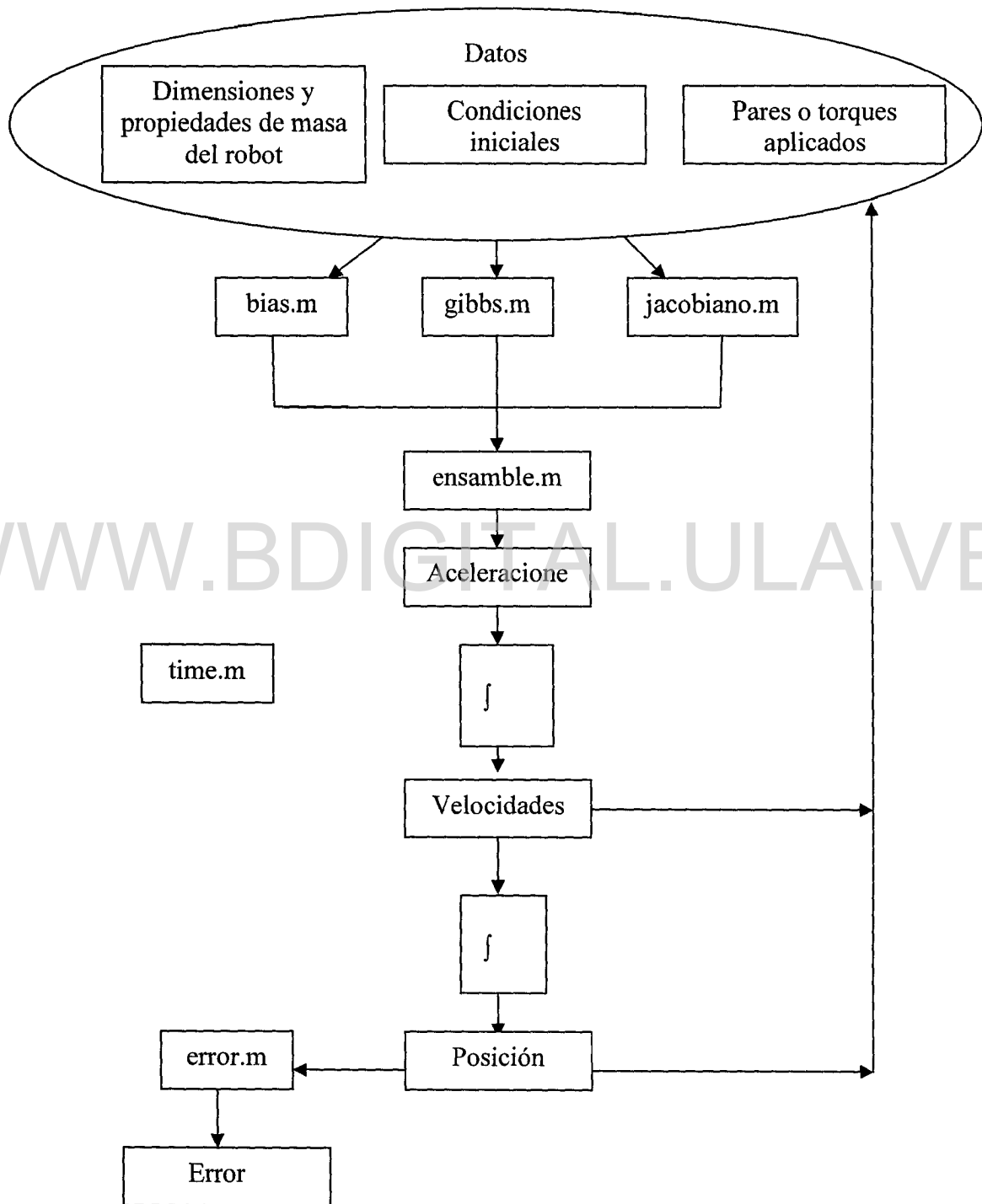


Figura 5.2 Flujoograma de Programación

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
 (CC BY-NC-SA 3.0 VE)

El error es determinado para cada una de las m ecuaciones de restricción expresadas de forma compacta en la ecuación 2.3. El resultado de evaluar cada ecuación, utilizando los valores obtenidos durante la simulación, debe ser igual a cero. Debido al error inherente en el proceso de integración las m ecuaciones de restricción no resultan igual a cero. Por tanto, el error de cada ecuación se define:

$$e_i = f_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6.1)$$

Evaluada las m ecuaciones de restricción se establece el vector error como:

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_m \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Finalmente el error en la simulación se define como la norma del vector \vec{e}

$$Error = norma(\vec{e}) \quad (6.3)$$

Seguidamente se presentan los resultados obtenidos al simular el ejemplo 1 en el módulo Simulink de Matlab.

5.1.2 Resultados Metodología 1

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de simular durante 4 segundos, el desempeño dinámico del Robot paralelo de 1 GDL, sometido a un torque constante de 0.5 N m. Se omite en este ejemplo el peso de las barras. A partir de los datos iniciales y de las masas e inercia de las barras, la función PDD Gibbs-Appell (`ensamble.m`) es utilizada por el entorno Simulink para determinar las aceleraciones de las coordenadas generalizadas de Robot. Adicionalmente el código determina el valor de los multiplicadores de Lagrange asociados con las fuerzas de restricción que debe incluir la simulación para satisfacer las

Licencia Creative Commons:

restricciones cinemáticas. Una vez obtenidas las aceleraciones, éstas se integran para obtener las velocidades y nuevamente son integradas para obtener la posición angular. Las velocidades y posiciones determinadas por la integración se convierten en las nuevas condiciones de entrada del algoritmo. El código repite el procedimiento hasta finalizar el tiempo estipulado para la simulación (figura 5.2). Para integrar las aceleraciones y velocidades se utiliza el algoritmo ode15s, incluido en el programa Matlab, que permite resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial. El ode15s es un algoritmo basado en formulas de diferenciación numérica (NDFs) y es de tipo multipaso, recomendado para problemas de ecuaciones diferenciales rígidas y sistemas algebraico diferencial (DAEs). El paso de integración del algoritmo ode15s es de tipo variable. La simulación se realizó utilizando una tolerancia de $1e^{-3}$. La tolerancia fue seleccionada luego de realizar diferentes corridas del código, verificando los resultados obtenidos para distintas tolerancias. Siguiendo el procedimiento mencionado se llegó a la conclusión de que a partir de una tolerancia de $1e^{-3}$ los resultados aportados por el integrador son similares, es decir, no se presentan diferencias significativas.

La figura 5.3 muestra los valores resultantes de estudiar las variables cinemáticas para el eslabón motor 1 y el eslabón 2. Como era de esperarse el sentido del movimiento de la barra 1 (a falta de incluir el peso de las barras) debe corresponder al sentido del torque aplicado. Se aprecia en la figura que el sentido de rotación es positivo al igual que la dirección del torque aplicado.

La figura 5.4 presenta el comportamiento de las variables cinemáticas del eslabón 3 respectivamente.

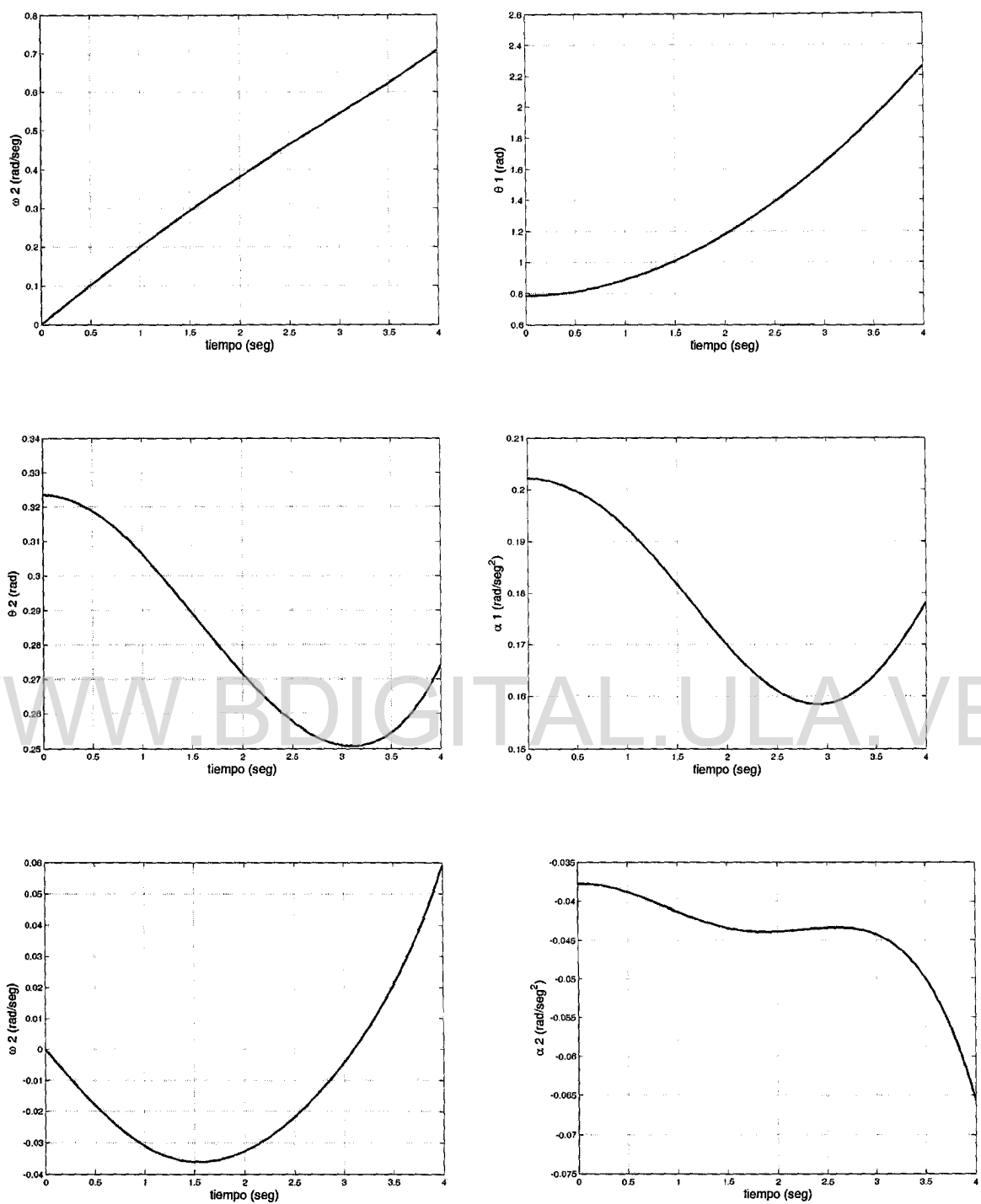


Figura 5.3 Resultados variables Cinemáticas del eslabón 1 y eslabón 2

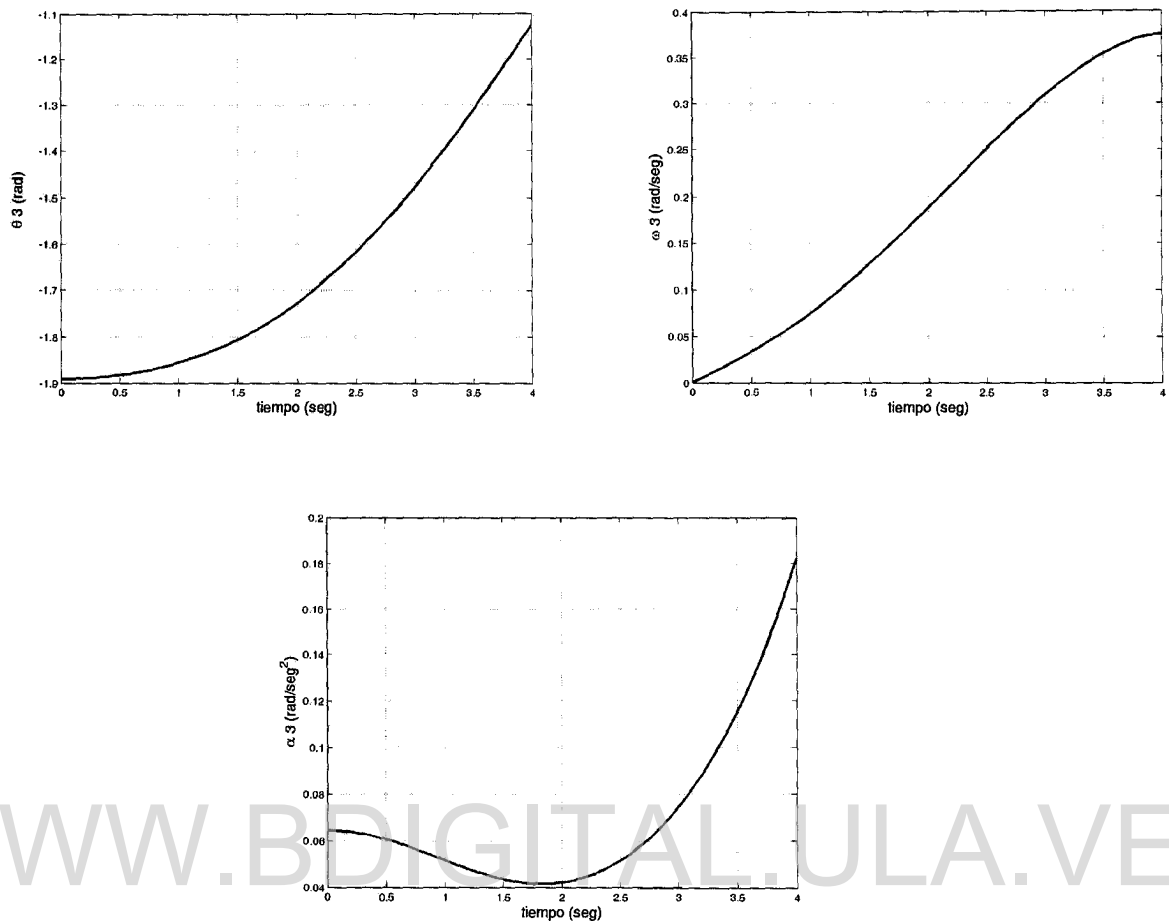


Figura 5.4 Resultados cinemáticas del eslabón 3

Con el objeto de evaluar los resultados obtenidos, el ejemplo 1 es implementado en el programa de simulación de mecanismos planos de propósito general Working Model 2D (WM) (2000). El software permite obtener el comportamiento de las variables cinemáticas en la simulación, durante el intervalo de tiempo especificado. La figura 5.5 muestra el comportamiento obtenido utilizando la Metodología 1 y el programa WM.

En la figura se observa que durante los primeros dos segundos de simulación los resultados obtenidos son similares. Ocurre un pequeño incremento de la diferencia a partir de $t=2$ segundos. Esto se debe principalmente a que el software WM emplea rutinas de predictor-corrector del error obtenido en el proceso de integración.

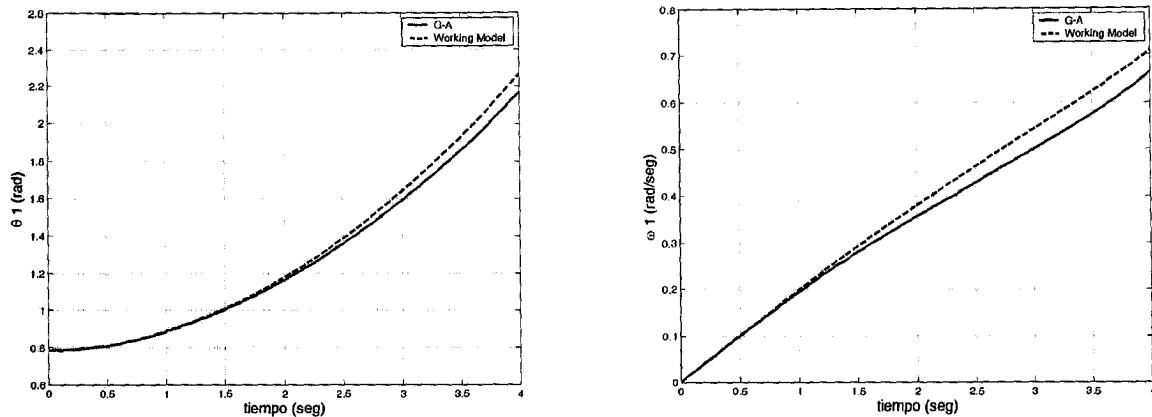


Figura 5.5 Resultados WM vs Metodología 1

Por último, se incluye en la figura 5.6 los resultados obtenidos de evaluar el error en norma del vector de restricciones cinemáticas.

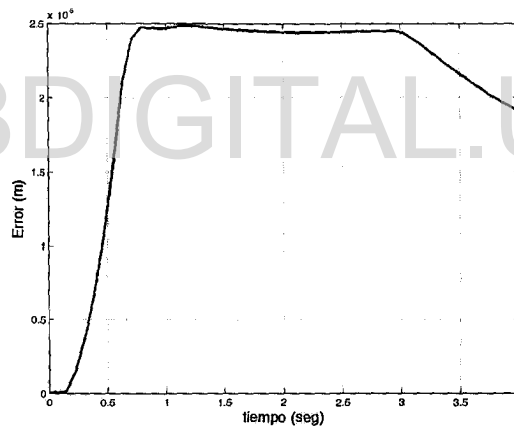


Figura 5.6 Error norma de restricciones cinemáticas

La magnitud del error obtenido es satisfactoria ya que es del orden de 10^{-9} metros.

5.1.3 Resultados Metodología 2

Al igual que la metodología 1, la metodología 2 fue implementada en el entorno Simulink de Matlab. El anexo 2 contiene el flujograma del archivo desarrollado. La estructura utilizada es similar a la utilizada en la sección anterior. La diferencia se

Licencia Creative Commons:

fundamenta en el ensamble del modelo dinámico. Se desarrollaron archivos para la separación de la matriz de masa y del vector bias. Una vez separadas, el archivo D.m evalúa la ecuación explícita de G-A, permitiendo de esta forma obtener las aceleraciones generalizadas. Luego se emplea el algoritmo ode15s para la integración de las aceleraciones y velocidades. El objeto de seleccionar el mismo integrador para ambas metodologías se realiza para establecer comparaciones entre ellas.

Los resultados obtenidos de estudiar el ejemplo 1 son idénticos a los obtenidos en la sección anterior. Por tal motivo en este apartado no se incluyen los resultados de evaluar las variables cinemáticas obtenidas. Sin embargo, con el objeto de establecer comparaciones entre ambos procedimientos. Se procede a evaluar:

1.- Número de lazos utilizado por la simulación durante el intervalo de tiempo indicado (4 segundos).

2.- Tiempo de cómputo de cada metodología.

Los resultados obtenidos evaluando lo anteriormente expuesto se presentan en la tabla 5.4. Estos se obtuvieron utilizando un procesador Intel Pentium 4 de 1.4 GHz.

Tabla 5.4: n° de evaluaciones y tiempo de cómputo Ejemplo 1

	n° de evaluaciones	Tiempo cómputo (seg)
G-A aumentado	53	1.2720
G-A explícitas	51	1.3820

El tiempo de cómputo requerido por el procedimiento basado en G-A aumentado es aproximadamente un 10 % menor que el empleado por el algoritmo basado en las G-A explícitas. Sin embargo, el número de evaluaciones es mayor en el método aumentado que el utilizado por el método G-A explícitas.

Debido a que el tiempo para el cual se realizó la simulación (4 segundos), no permite establecer con claridad cual metodología es eficiente (en función del tiempo de cómputo). A continuación se desarrolla el ejemplo número 2, el cual consiste en una simulación de 30 segundos de ejecución.

5.2. Ejemplo Numérico II

El ejemplo numérico dos consiste en evaluar el comportamiento dinámico del robot paralelo de 1 GDL descrito en la sección anterior. En este ejemplo el robot va a ser accionado por el peso propio, es decir, no hay pares o fuerzas externas actuantes en el robots. Las propiedades de masa utilizadas en el ejemplo dos se muestran en la tabla 5.5. La duración de la simulación es de 30 segundos.

Tabla 5.5: Dimensiones y Propiedades de Inercia

Barra i	L_i [m]	m_i [kg]	I_i [kg m ²]
1	1	1	1
2	3	2	2
3	7/4	1.5	1.5
4	3	-	-

5.2.1 Resultados Metodología I

Debido a que el objetivo del ejemplo numérico II es observar el desempeño de la simulación para un intervalo de tiempo prolongado, se presenta en esta sección los resultados del comportamiento cinemático del eslabón 1. La figura 5.7 muestra el comportamiento de posición angular, velocidad angular y aceleración angular del eslabón.

De la figura se observa que en los primeros 15 segundos, la simulación arroja resultados satisfactorios. A partir de los 20 segundos el error inherente en la integración aumenta ligeramente hasta llegar a los 30 segundos de simulación.

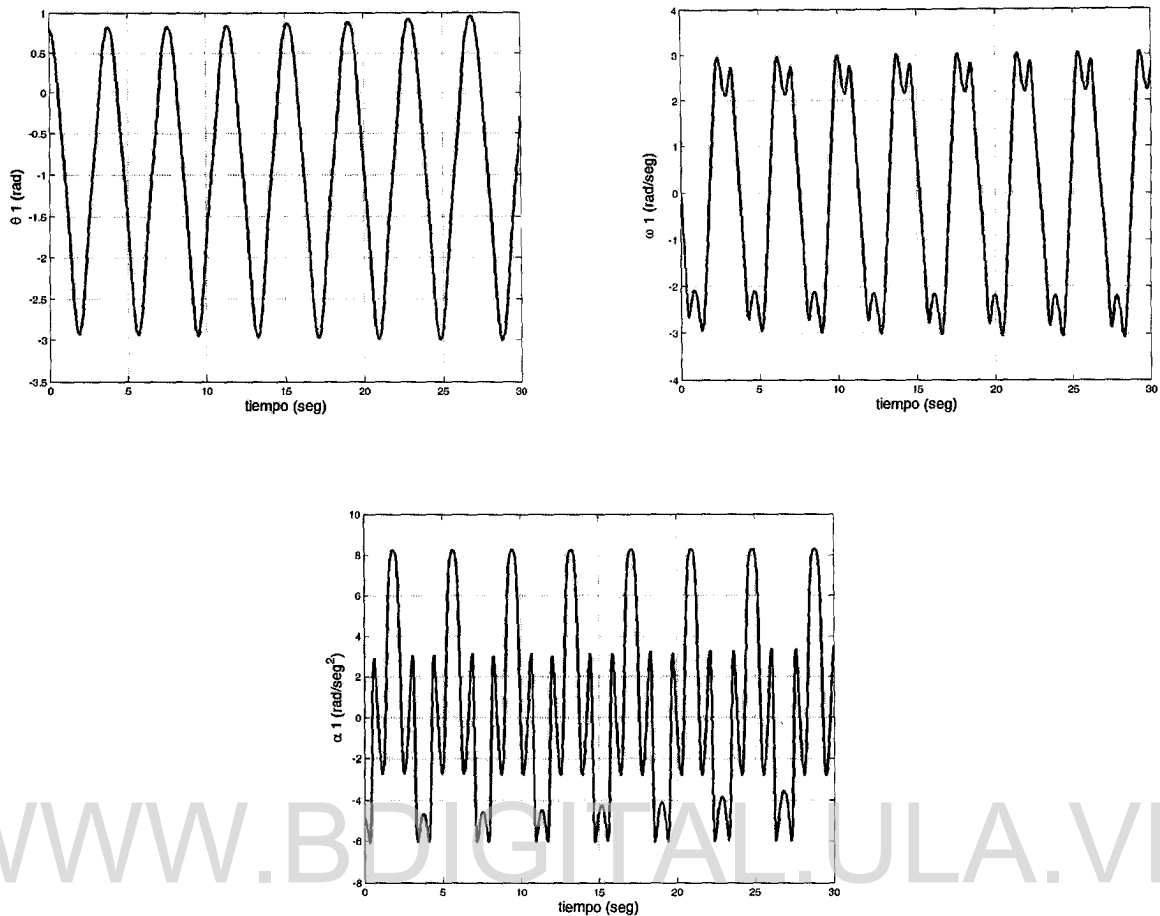


Figura 5.7 Resultados de la cinemática eslabón 1 metodología 1

5.2.2 Resultados Metodología II

Los resultados obtenidos para el eslabón 1 mediante la metodología 2 se presentan en la figura 5.8

Se aprecia que al igual que en la sección anterior, inicialmente durante los primeros 24 segundos el algoritmo presenta buenos resultados. Se observa claramente que a partir de este punto el proceso de integración el algoritmo va incrementando los errores.

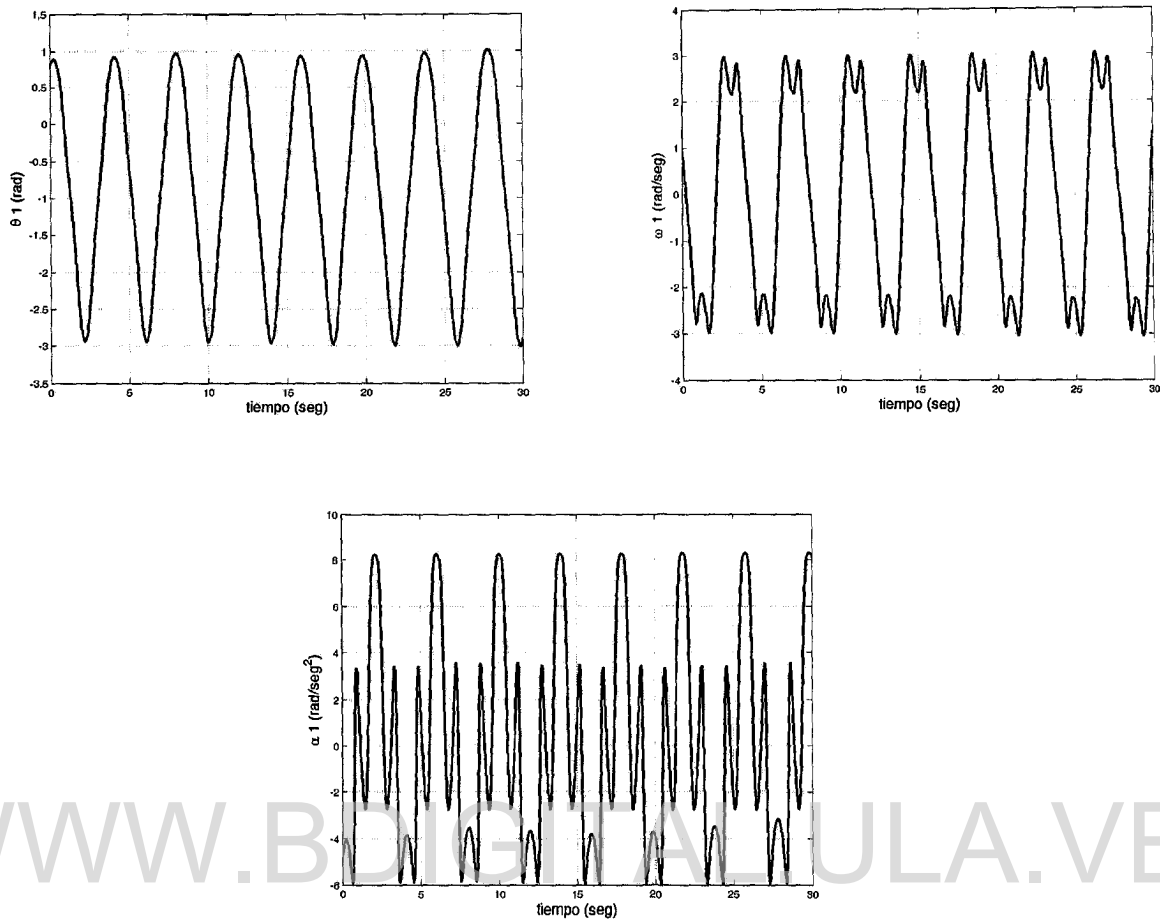


Figura 5.8 Resultados de la cinemática eslabón 1 metodología 2

De la observación de los resultados se concluye que la metodología basada en las ecuaciones explícitas de G-A arroja resultados acordes con la simulación para un intervalo de tiempo mayor, en comparación con la metodología basada en el método aumentado.

A fin de evaluar el tiempo de cómputo, la tabla 5.5 muestra los resultados obtenidos por ambas simulaciones. Es de resaltar que ambas simulaciones fueron realizadas para un intervalo de 30 segundos

El tiempo de cómputo requerido por la metodología dos es de un 30 % mayor que el requerido por la metodología 1, esto puede apreciarse en la tabla 5.5. Se concluye que el tiempo de cómputo al igual que el número de evaluaciones requeridas por la metodología 2 es mayor que el de la metodología 1.

Tabla 5.6: n° de evaluaciones y tiempo de computo Ejemplo 2

	n° de evaluaciones	Tiempo computo (seg)
G-A aumentado	665	23.1230
G-A explicitas	656	26.8080

En el siguiente ejemplo se estudiará la sensibilidad de las metodologías cuando se simula el comportamiento dinámico del robot paralelo de 1 GDL para un torque variable.

5.3. Ejemplo Numérico III

En este ejemplo se analiza el desempeño de las metodologías propuestas cuando el robot paralelo de 1 GDL es sometido a un torque variable. Los datos que definen la función de torque variable a través del tiempo, se determinan empleando el software Working Model 2D. Se elabora en WM una simulación del robot cuando este es accionado cinemáticamente por una velocidad angular constante. El tiempo de simulación es de 3 segundos. Mediante el software se obtienen los resultados del torque requerido en el tiempo para satisfacer las condiciones cinemáticas impuestas (velocidad angular del eslabón 1 constante). La figura 5.9 muestra la función de torque obtenida mediante WM 2D.

El torque obtenido en WM 2D se descompone en dos vectores. El primero contiene los valores del torque y el segundo los valores del tiempo. Los dos vectores son empleados en la simulación para determinar el valor del torque (τ) cuando el tiempo de la simulación es t . Debido a que durante la simulación el valor del tiempo no es similar al valor del vector tiempo introducido, se utilizó un algoritmo que realiza la interpolación lineal entre los dos valores de tiempo mas cercanos. Velocidad inicial 1 m/s propiedades de masa igual que el ejemplo 1 y condiciones iniciales.

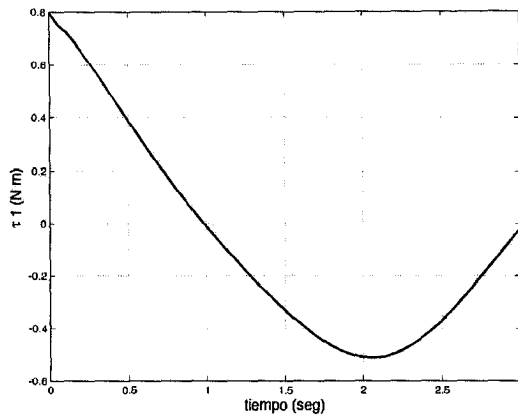


Figura 5.9 Torque obtenido en WM 2D

5.3.1 Resultados

Ya que en este ejemplo se busca evaluar el desempeño de las metodologías para un torque variable, se analizan los resultados obtenidos de graficar el desplazamiento angular del eslabón 1. La figura 5.10 muestra el comportamiento obtenido. En ella se incluye los resultados dados por la metodología 1 y 2. Se aprecia que el desplazamiento angular de la barra 1 aumenta linealmente, este resultado era de esperarse ya que los valores de torque introducidos en la simulación se obtienen para una velocidad angular constante definida positiva (1rad/s). Por lo anterior el comportamiento esperado del desplazamiento angular del eslabón estudiado debe aumentar linealmente. La figura 5.10 incluye adicionalmente la comparación de los resultados obtenidos de la simulación, con el valor teórico que debe presentar el desplazamiento angular.

De la figura se concluye que los resultados son idénticos al valor teórico durante los primeros 0.5 segundos de simulación, a partir de este punto los resultados presentan pequeñas variaciones, pero el comportamiento en ambos casos es similar (lineal).

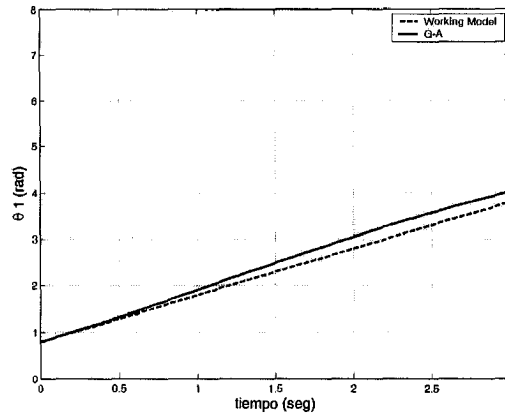


Figura 5.10 Resultados Ejemplo numérico 3

El número de evaluaciones para simulaciones resulta similar (85, ver tabla 5), pero al igual que en los ejemplos anteriores el tiempo de computo del procedimiento basado en G-A explícitas es mayor (10%) que la metodología basada en G-A aumentado.

Tabla 5.7.: nº de evaluaciones y tiempo de computo Ejemplo 3

	Nº de evaluaciones	Tiempo computo (seg)
G-A aumentado	85	2.6440
G-A explícitas	85	2.9240

5.4. Ejemplo Numérico IV

En los ejemplos anteriores se evaluó el desempeño dinámico de un robot paralelo de 1 GDL. En este ejemplo se estudia el comportamiento dinámico de un robot paralelo plano de 3 GDL. El robot, propuesto por Ángeles (citado por McPhee, 2000) está constituido por una plataforma móvil unida por medio de tres cadenas abiertas (piernas) a la plataforma base. Cada “pierna” contiene 2 eslabones. Los actuadores del robot se encuentran ubicados en el primer eslabón de cada “pierna”. La figura 5.11 muestra la representación del robot paralelo de 3 GDL. La orientación del vector gravedad es perpendicular al plano de movimiento del robot.

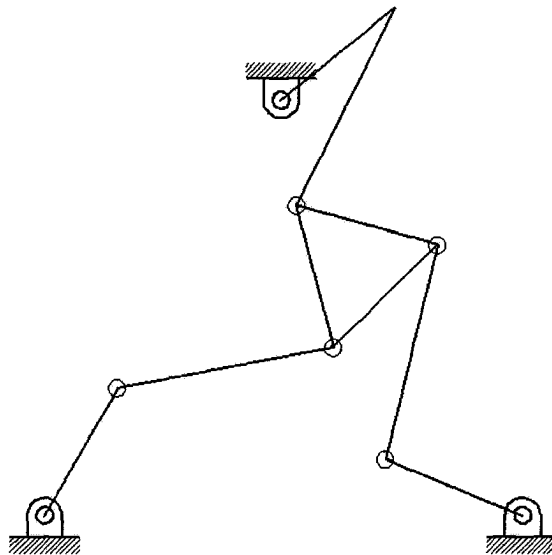


Figura 5.11 Robot Paralelo de 3 GDL.

La separación del robot paralelo en varias cadenas abiertas se muestra en la figura 5.12. Se obtienen un total de 3 cadenas, de las cuales una de las cadenas esta formada, adicional a los dos eslabones de la “pierna”, por la plataforma móvil. La configuración cinemática puede ser representada, utilizando la notación D-H, por un conjunto de 7 coordenadas generalizadas.

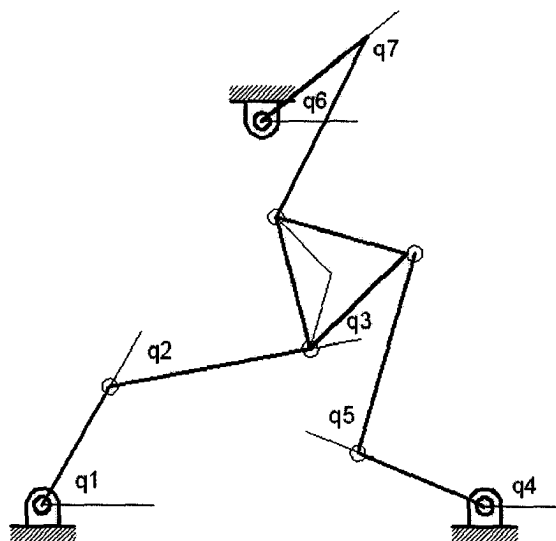


Figura 5.12 Robot Paralelo de 3 GDL y coordenadas generalizadas.

Los parámetros D-H para cada “pierna” se presentan en la tabla 5.7.- 5.9 Adicionalmente en la tabla 5.10.se describen las propiedades de masa del Robot.

Tabla 5.7: Parámetros D-H de Primera Cadena

I	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	0	l_1	0	q_2
3	0	l_2	0	q_3

Tabla 5.8: Parámetros D-H de Segunda Cadena

I	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
4	0	0	0	q_4
5	0	l_1	0	q_5

Tabla 5.9: Parámetros D-H de Tercera Cadena

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
6	0	0	0	q_6
7	0	l_1	0	q_7

Tabla 5.10: Dimensiones y Propiedades de Inercia

Barra i	L_i [m]	m_i [kg]	I_i [kg m ²]
1,4,6	0.4	3.0	0.04
2,5,7	0.6	4.0	0.12
3	0.4	8	0.0817

En este ejemplo se evalúa el comportamiento dinámico de del robots, cuando este es actuado por torques constantes. La configuración inicial del robot se documenta en la tabla 5.11 y los valores de los torques aplicados sobre los eslabones 1, 4 y 6 son respectivamente: $\tau_1=0.1$ N m, $\tau_4=0.1$ N m y $\tau_6= - 0.1$ N m.

Tabla 5.11: Configuración inicial del Robot Paralelo de 3 DOF. Unidades en radianes.

$\theta_1 = 1.047$	$\theta_4 = 2.751$	$\theta_7 = -2.718$
$\theta_2 = -0.865$	$\theta_5 = -1.424$	
$\theta_3 = 1.116$	$\theta_6 = 0.679$	

5.4.1 Resultados

Se obtuvieron resultados idénticos mediante las dos metodologías. Se simuló el desempeño del Robot durante un intervalo de 6 segundos. Para integrar las aceleraciones y velocidades se utiliza el algoritmo ode15s, descrito en las secciones anteriores. La figura 5.13 muestra el comportamiento del desplazamiento angular de las coordenadas generalizadas independientes (ubicadas en la base).

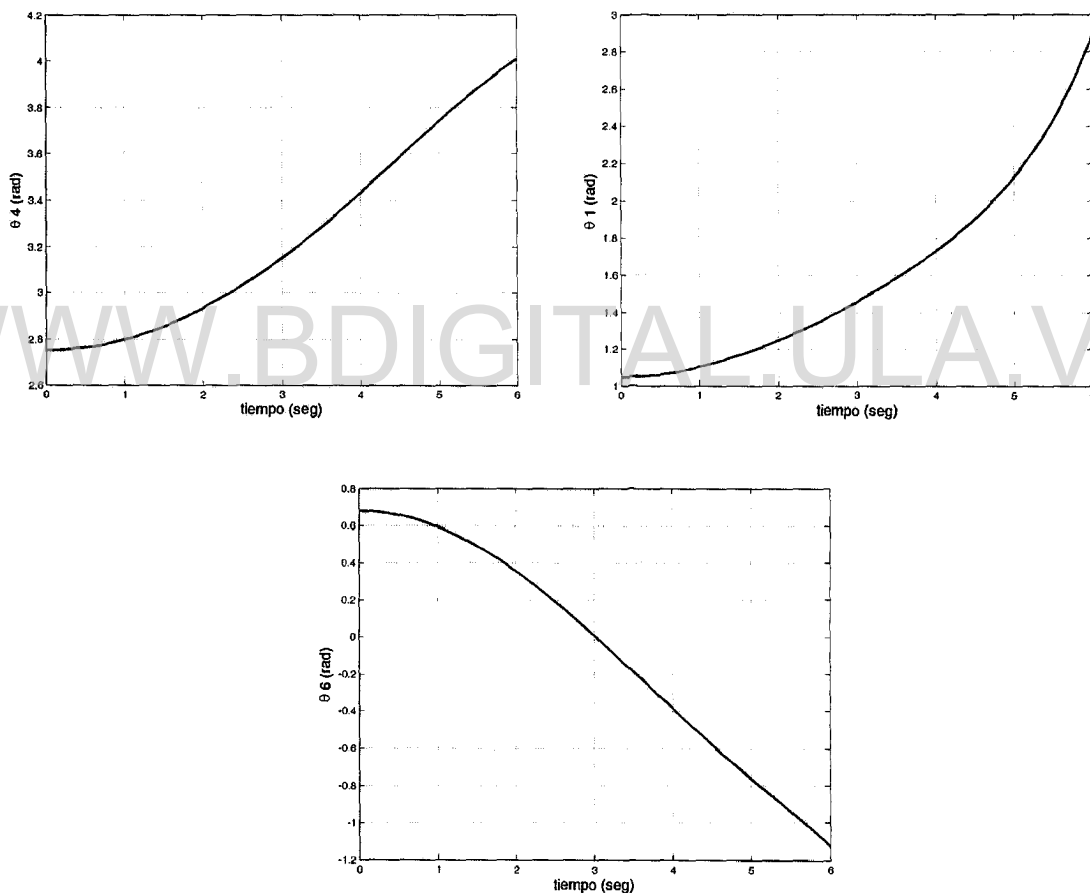


Figura 5.13 Desplazamiento Angular de Coordenadas Generalizadas Independientes.

De la figura se aprecia que el desplazamiento angular de las coordenadas q_1 y q_4 (ver figura 5.11) es positivo. Esto se debe a que el torque aplicado es también positivo. El torque aplicado en el eslabón definido por la coordenada generalizada q_6 fue negativo por tal

motivo el comportamiento del desplazamiento angular del eslabón 6, debe ser decreciente, es decir debe girar en el sentido negativo (sentido de las agujas del reloj). La figura 5.13 describe el comportamiento esperado del eslabón 6.

A diferencia de los ejemplos anteriores donde el tiempo de cómputo requerido por el procedimiento basado en G-A aumentado fue menor que el basado en las G-A explícitas, en ambas simulaciones el tiempo de cómputo resulta casi igual (una diferencia del 3%). Es de esperarse que a medida de que aumente el número de eslabones del robot la metodología basada en G-A explícitas requiera de un menor tiempo de cómputo que la metodología 1. Lo anterior se debe principalmente por que el modelo dinámico obtenido mediante el método aumentado es mayor en dimensiones (matriz de masa con mayores términos) mientras mayor número de eslabones presente el robot.

Tabla 5.7.: n° de evaluaciones y tiempo de cómputo Ejemplo 4

	n° de evaluaciones	Tiempo cómputo (seg)
G-A aumentado	53	4.1260
G-A explícitas	53	4.0060

Se incluyen las comparaciones entre los resultados obtenidos en este trabajo y los aportados por el programa Working Model 2D. Se observa en la figura 5.14 que los resultados arrojados en este trabajo y los de WM son idénticos durante los primeros 5 segundos de simulación. A partir de ese instante las diferencias que presenta la comparación, son muy pequeñas.

El error medido como la norma del vector de ecuaciones cinemáticas de restricción obtenido para esta simulación es del orden de 10^{-3} metros.

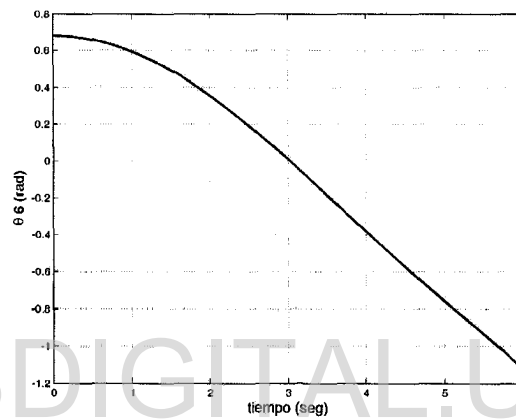
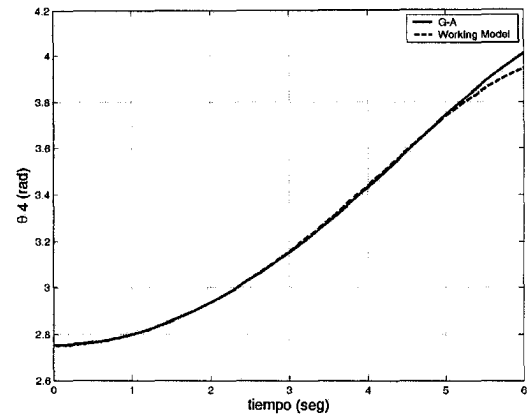
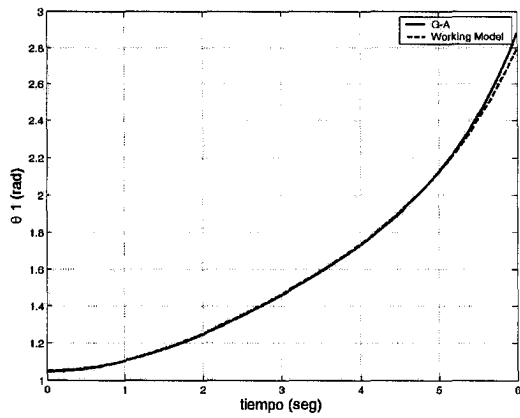


Figura 5.14 Resultados G-A, WM.

Conclusiones

En el trabajo se utilizaron las ecuaciones de Gibbs-Appell (G-A) para resolver el problema dinámico directo o de simulación de robot paralelos. En este sentido se desarrollaron dos metodologías que puede ser implementada de forma sistemática y permite la obtención del comportamiento dinámico de robot paralelos.

La obtención del modelo dinámico se realizó separando la plataforma móvil de la plataforma fija, en las juntas que unen las cadenas abiertas (“piernas”). La dinámica directa del conjunto de cadenas abiertas obtenidas se determinó utilizando algoritmos encontrados en la literatura del área que emplean las ecuaciones de G-A para resolver la dinámica directa e inversa de sistemas mecánicos compuestos por cadenas abiertas. Para incluir las restricciones cinemáticas debidas a la unión entre las “piernas” y la plataforma móvil se propusieron dos metodologías. En la primera se utilizó la técnica de los multiplicadores de Lagrange, la cual consiste en sustituir las fuerzas de restricción impuestas por las juntas por medio de los multiplicadores de Lagrange. En la segunda metodología se emplearon las ecuaciones explícitas de G-A

La implementación de las metodologías propuestas se realizó de manera sistemática utilizando herramientas computacionales. Se emplearon los programas Maple, en su versión 9, en el manejo simbólico de las ecuaciones que permiten obtener el modelo y, en la resolución del sistema obtenido, se empleó el entorno de programación orientado por bloques de Simulink de Matlab (version 6.5).

Las metodologías propuestas fueron utilizadas para analizar la dinámica directa de dos robots paralelos, a saber: Robot paralelo de 1 grado de libertad (DOF) y en un robot

paralelo de 3 GDL, esto permitió la realización de validaciones y comparaciones. Se estudió el comportamiento del robot de 1 DOF para los casos en que este es accionado, por un torque y/o par constante, por el peso propio y para la condición de un torque aplicado variable en el tiempo. El robot de 3 DOF fue analizado cuando éste es accionado por torques o pares constantes. Los ejemplos propuestos se verificaron al comparar los resultados obtenidos con los aportados utilizando el paquete de simulación de sistemas mecánicos planos Working Model 2D.

Los resultados obtenidos de evaluar los ejemplos propuestos a través de ambas metodologías mostraron ser muy similares. En el estudio del robot de 1 GDL la metodología basada en la técnica de los multiplicadores de Lagrange resultó mas eficiente, lo que se demuestra al evaluar el tiempo de cómputo utilizado para realizar la simulación del robot de 1 GDL, 10% menor para una simulación de 5 segundos y de 30% menor para la simulación de 20 segundos. El análisis del tiempo de cómputo empleado por ambas metodologías en el estudio del robot paralelo de 3 GDL resultó similar con una pequeña diferencia del 3%. Lo que demuestra que la metodología basada en las ecuaciones explícitas de G-A es mas eficiente en tiempo de cómputo, cuando se estudien robots paralelos con un número mucho mayor de eslabones. Lo anterior se debe principalmente a que el tamaño de la matriz obtenida del modelo dinámico por medio de los multiplicadores de Lagrange ($(n+m) \times (n+m)$, siendo m el número de ecuaciones de restricción y n el número de eslabones) es mayor que el tamaño de la matriz obtenida por medio de las ecuaciones explícitas de G-A ($n \times n$).

Finalmente, se concluye que los objetivos inicialmente planteados fueron cubiertos satisfactoriamente, con lo cual ha continuado una serie de trabajos orientados al desarrollo de una línea de investigación del estudio dinámico de sistemas mecánicos.

Recomendaciones

Entre las recomendaciones para la elaboración de futuros trabajos que complementen el desarrollo de metodologías sistemáticas para el análisis dinámico de Robots Paralelos se tiene:

Resolución del problema dinámico inverso de robots paralelos utilizando las ecuaciones de G-A.

Incluir en el modelo dinámico el estudio del fenómeno de fricción que se presentan en las juntas de los eslabones.

Complementar la metodología para el caso de robots paralelos con eslabones flexibles.

Emplear el modelo dinámico para la resolución del problema de estimación de parámetros del robot paralelo.

Referencias

J. H. Ginsberg, *Advanced Engineering Dynamics*, Cambridge University Press, USA, 1998

L. W. Tsai, *Robot Analysis*, Wiley Interscience, Canada, 1999.

E. Haug, *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical System*, Allyn and Bacon, USA, 1989.

A. A. Shabana, *Computational Dynamics*, Wiley-Interscience, Canada, 2001.

P. Appell, "Developpement sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique." *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. **6** :5-40, 1900.

J. W. Gibbs, "On the fundamental formulae of dynamics," *American Journal of Mathematics*, **2**: 49-64, 1879.

S. Provenzano, "Resolución del problema dinámico directo de cadenas abiertas utilizando las ecuaciones de Gibbs-Appell," *Ciencia e Ingeniería*, **23(1)**:33-39, 2002.

W. Q. Do y D. C. Yang, "Inverse Dynamic Analysis and Simulation of a Platform Type of Robot," *Journal Robotic Systems*," **53(5)**: 209-227, 1988.

M. A. Díaz, "Resolución del Problema Dinámico Directo de Cadenas Cerradas Utilizando las Ecuaciones de Gibbs-Appell", Trabajo de Ascenso no Publicado, Universidad de Los Andes, Mérida, 2005.

K. Y. Tsai y D. Kohli, "Modified Newton-Euler Computational Scheme for Dynamic Analysis and Simulation of Parallel Manipulator with Applications to Configuration Based on R-L Actuators," Proceedings of the 1990 ASME Design Engineering Technical Conference. **24**: 111-117, 1990.

G. Lebet, K. Liu y F. L. Lewis, "Dynamic Analysis and Control of a Stewart Platform Manipulator," Journal Robotics Systems, **10(5)**: 629-655, 1993.

K. Miller y R. Clavel, "The Lagrange-Based of Delta4 Robot Dynamic," Roboter systeme. Springer-Verlag. **8**: 49-54, 1992.

J. Y. Luh, M. W. Walker y R. P. Paul, "On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulator," ASME Trans. Journal Systems. Meas., Contr., **102**: 134-142, 1981.

J. J. Murray y G. H. Lovell, "Dynamic Modeling of Closed-Chain Robotic Manipulators and Implications for Trajectory Control," IEEE Trans. Robotics and Automation, **5(4)**: 522-528, 1989.

Y. Nakamura y M. Ghodoussi, "Dynamics Computation of Closed-Link Robot Mechanisms with Nonredundant and Redundant Actuators," IEEE Trans. Robotics and Automation, **5(3)**: 294-302.

J. Wang y C. M. Gosselin, "Dynamic Analysis of Spatial Four-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator," Proceedings the 1997 ASME Design Engineering Technical Conference, Sacramento trabajo número DETC97/DAC3759, 1997.

C. D. Zang y S. M. Song, "An Efficient Method for Inverse Dynamics of Manipulators Based on the Virtual Work Principle," Journal Robotic Systems, **10(5)**: 605-627, 1993.

L. W. Tsai, "Solving the Inverse Dynamics of a Stewart-Gough Manipulator by the Principle of Virtual Work," ASME Journal of Mechanical Design, **122**: 3-9, 2000.

J. Gallardo y colaboradores, "Dynamics of Parallel Manipulators by means of screw theory," Mechanisms and Machine Theory, **38**:1113-1131, 2003.

T. Geike y J. McPhee, "Inverse Dynamics Analysis of Parallel Manipulators with Full Mobility," *Mechanisms and Machine Theory*, **38**: 549-562, 2003.

M. Vukobratovic y V. Potkonjak, *Applied Dynamic and Cad of Manipulation Robots*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

L. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, Ox Bow Press, Connecticut, 1972.

S. Provenzano, *Aplicaciones de las Ecuaciones de Gibbs-Appell a la dinámica de Robots*, Tesis Doctoral, Universidad Politecnica de Valencia, España, 2001.

B. Dasgupta y T. S. Mruthyunjaya, "A Newton-Euler Formulation fo the invese Dynamic of the Stewart Platform Manipulator," *Mechanisms and Machine Theory*, 33(8):1135-1152, 1998.

B. Dasgupta y T. S. Mruthyunjaya, "Closed Form Dynamic equations of the General e Stewart Platform through the Newton-Euler Approach," *Mechanisms and Machine Theory*, 33(8):993-1012, 1998.

F. Udwadia y . Kabala, *Analytical Dynamic, A New Approach*. Cambridge University Press, 1996.

E. Deslogue, "A comparison of Kane's equations of motion and the Gibbs-Appell equations of motions". *American Journals of Physics*, **54(5)**, 1986.

E. Desloge, "The Gibbs-Appell equations of motions". *American Journals of Physics* **56(9)**: 841-846, 1988.

I. Sharf, G. M. D'eleuterio y P. Huhhes. "On the dynamics of Gibbs, Appell, and Kane", *European Journal of Mechanics A/Solids*, **11(2)**:145-155, 1992.

M. Townsend, "Kane's equations, Lagrange's equations, and Virtual Work". *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **15(1)**:277-280, 1992.

M. Townsend, "Equivalence of Kane's, Gibbs-Appell's and Lagrange's equations". *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **15(5)**:1289-1292, 1992.

S. Provenzano. *Aplicación de las Ecuaciones de Gibbs-Appell a la Dinámica de Robots*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2001.

M. Vukobratovic y V. Potkonjak. *Applied dynamics and CAD of manipulation robots*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

J. Y. Luh, M. W. Walker y R. P. Paul, "On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulator," *ASME Trans. Journal Systems. Meas., Contr.*, **102**: 134-142, 1981.

W. Walker y D. E. Orin, "Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms". *Journal of Dynamic Systems. Meas., Contr.*, **104**: 205-211, 1982.

J. Denavit, y R. S. Hartenberg, "A kinematic notation for lower pair mechanisms bases on matrices," *Journal of Applied Mechanics*, **22**: 215-221, 1955.

S. K. Lin, S. K., "A new composite body method for manipulator dynamics," *Journal of Robotics Systems*, **8(2)**:197-219, 1991.

W. Khalil, J. F. Kleinfinger y M. Gautier, "Reducing the computational burden of the dynamic models of robots," *Proc. 1986 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, San Francisco, CA, 525-531 , 1986.

Anexo 1

Algoritmos Para la Resolución del Problema Dinámico Inverso y Directo. (Provenzano 2001).

A.1.1 Algoritmo para la Resolución del Problema Dinámico Inverso.

Paso 1. - Cómputo recursivo ascendente de las variables cinemáticas

Inicializar

$${}^0\ddot{\mathbf{r}}_{O_0} = [0 \quad 0 \quad -g]^T$$

$${}^0\ddot{\mathbf{r}}_{G_0} = {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_0}$$

Calcular

$${}^1\vec{\omega}_1 = {}^1\vec{z}_1 \dot{q}_1$$

$${}^1\dot{\vec{\omega}}_1 = {}^1\vec{z}_1 \ddot{q}_1$$

$${}^1\ddot{\mathbf{r}}_{O_1} = {}^1\mathbf{R}_0 {}^0\ddot{\mathbf{r}}_{O_0}$$

$${}^1\ddot{\mathbf{r}}_{G_1} = {}^1\ddot{\mathbf{r}}_{O_1} + {}^1\vec{\omega}_1 \wedge ({}^1\vec{\omega}_1 \wedge {}^1\vec{r}_{O_1,G_1}) + {}^1\dot{\vec{\omega}}_1 \wedge {}^1\vec{r}_{O_1,G_1}$$

$${}^2\vec{u}_2 = {}^2\mathbf{R}_1 {}^1\vec{\omega}_1$$

$${}^2\vec{\omega}_2 = {}^2\vec{u}_2 + {}^2\vec{z}_2 \dot{q}_2$$

$${}^2\dot{\vec{\omega}}_2 = {}^2\mathbf{R}_1 {}^1\dot{\vec{\omega}}_1 + {}^2\vec{z}_2 \ddot{q}_2 + {}^2\vec{u}_2 \wedge ({}^2\vec{z}_2 \dot{q}_2)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$${}^2\ddot{\vec{r}}_{O_2} = {}^2\mathbf{R}_1 \left[{}^1\ddot{\vec{r}}_{O_1} + {}^1\vec{\omega}_1 \wedge ({}^1\vec{\omega}_1 \wedge {}^1\vec{r}_{O_1, O_2}) + {}^1\dot{\vec{\omega}}_1 \wedge {}^1\vec{r}_{O_1, O_2} \right]$$

Calcular para $i = 3, 4, \dots, n$

$${}^i\vec{u}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}$$

$${}^i\vec{\omega}_i = {}^i\vec{u}_i + {}^i\vec{z}_i \dot{q}_i$$

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} + {}^i\vec{z}_i \ddot{q}_i + {}^i\vec{u}_i \wedge ({}^i\vec{z}_i \dot{q}_i)$$

$${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left[{}^{i-1}\ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \wedge ({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}, O_i}) + {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}, O_i} \right]$$

Calcular para $i = 2, 3, \dots, n$

$${}^i\ddot{\vec{r}}_{G_i} = {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\vec{\omega}_i \wedge ({}^i\vec{\omega}_i \wedge {}^i\vec{r}_{O_i, G_i}) + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \wedge {}^i\vec{r}_{O_i, G_i}$$

Paso 2. - Desarrollo de los términos $\frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \dot{q}_j}$

Asignar para $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \dot{q}_i} = {}^i\vec{z}_i$$

Asignar para $i = 2, 3, \dots, n$

$$\frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \dot{q}_{i-1}} = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \frac{\partial {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}}{\partial \dot{q}_{i-1}}$$

Calcular para $j = 1, 2, \dots, n-1$

Calcular para $i = j + 2, \dots, n$

$$\frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \dot{q}_j} = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \frac{\partial {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}}{\partial \dot{q}_j}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$${}^1\vec{\xi}_1 = {}^1\mathbf{I}_{G_1} \cdot {}^1\dot{\vec{\omega}}_1$$

$${}^1\vec{g}_1 = {}^1\dot{\vec{\omega}}_1 \wedge ({}^1\mathbf{I}_{G_1} \cdot {}^1\dot{\vec{\omega}}_1)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \left[({}^1\ddot{\vec{r}}_{G_1})^T \frac{\partial {}^1\ddot{\vec{r}}_{G_1}}{\partial \dot{q}_1} \right] + \left(\frac{\partial {}^1\dot{\vec{\omega}}_1}{\partial \dot{q}_1} \right)^T {}^1\vec{\xi}_1 + \left(\frac{\partial {}^1\dot{\vec{\omega}}_1}{\partial \dot{q}_1} \right)^T {}^1\vec{g}_1$$

Calcular para $i = 2, 3, \dots, n$

$${}^i\vec{\xi}_i = {}^i\mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i\dot{\vec{\omega}}_i$$

$${}^i\vec{g}_i = {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \wedge ({}^i\mathbf{I}_{G_i} \cdot {}^i\dot{\vec{\omega}}_i)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial \dot{q}_i} = m_i \left[({}^i\ddot{\vec{r}}_{G_i})^T \frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \dot{q}_i} \right] + \left(\frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \dot{q}_i} \right)^T {}^i\vec{\xi}_i + \left(\frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \dot{q}_i} \right)^T {}^i\vec{g}_i$$

Calcular para $j = 1, 2, \dots, n-1$

Calcular para $i = j+1, \dots, n$

$$\frac{\partial G_i}{\partial \dot{q}_j} = m_i \left[({}^i\ddot{\vec{r}}_{G_i})^T \frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \dot{q}_j} \right] + \left(\frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)^T {}^i\vec{\xi}_i + \left(\frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)^T {}^i\vec{g}_i$$

Paso 6.- Cómputo de los pares

Calcular para $j = 1, 2, \dots, n-1$

Calcular para $i = j, j+1, \dots, n$

$$\tau_j = \tau_j + \frac{\partial G_i}{\partial \dot{q}_j}$$

A.1.2 Algoritmo para la Resolución del Problema Dinámico Directo

Paso 1.- Cómputo de las derivadas parciales de las aceleraciones

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Asignar para $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial {}^i \dot{\omega}_i}{\partial \dot{q}_i} = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\frac{\partial {}^i \dot{\omega}_i}{\partial \dot{q}_{i-1}} = {}^i \mathbf{R}_{i-1} \frac{\partial {}^{i-1} \dot{\omega}_{i-1}}{\partial \dot{q}_{i-1}}$$

Calcular para $j = 1, 2, \dots, n - 1$

para $i = j + 2, j + 3, \dots, n$

$$\frac{\partial {}^i \dot{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} = {}^i \mathbf{R}_{i-1} \frac{\partial {}^{i-1} \dot{\omega}_{i-1}}{\partial \dot{q}_j}$$

Calcular para $i = 1, 2, \dots, n - 1$

para $j = i + 1, i + 2, \dots, n$

$${}^j \vec{r}_{O_{j-1}, O_i} = {}^j \mathbf{R}_{j-1} {}^{j-1} \vec{r}_{O_{j-1}, O_i}$$

Calcular para $i = n, n - 1, \dots, 2$

para $j = i - 1, i - 2, \dots, 1$

$${}^i \vec{r}_{O_j, G_i} = {}^i \vec{r}_{O_j, O_i} + {}^i \vec{r}_{O_{j+1}, G_i}$$

Asignar para $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial {}^i \ddot{r}_{G_i}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial {}^i \dot{\omega}_i}{\partial \dot{q}_i} \wedge {}^i \vec{r}_{O_i, G_i}$$

Calcular para $i = 2, 3, \dots, n$

para $j = 1, 2, \dots, i - 1$

$$\frac{\partial {}^i \ddot{r}_{G_i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial {}^i \dot{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \wedge {}^j \vec{r}_{O_i, G_i}$$

Paso 2. - Obtención del término A

Asignar para $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial^i \bar{\alpha}_i}{\partial \ddot{q}_i} = {}^i \mathbf{I}_{G_i} \frac{\partial^i \dot{\bar{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_i}$$

Calcular para $i = 2, 3, \dots, n$

para $j = 1, 2, \dots, i-1$

$$\frac{\partial^i \bar{\alpha}_i}{\partial \ddot{q}_j} = {}^i \mathbf{I}_{G_i} \frac{\partial^i \dot{\bar{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_j}$$

Asignar para $i = 1, 2, \dots, n$

$$A_{n,i} = \left(\frac{\partial^n \dot{\bar{\omega}}_n}{\partial \ddot{q}_n} \right)^T \frac{\partial^n \bar{\alpha}_n}{\partial \ddot{q}_i}$$

Asignar para $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$A_{i,i} = \left(\frac{\partial^i \dot{\bar{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_i} \right)^T \frac{\partial^i \bar{\alpha}_i}{\partial \ddot{q}_i}$$

Calcular para $i = 1, 2, \dots, n-1$

para $j = i+1, i+2, \dots, n$

$$A_{i,j} = A_{i,i} + \left(\frac{\partial^j \dot{\bar{\omega}}_j}{\partial \ddot{q}_i} \right)^T \frac{\partial^j \bar{\alpha}_j}{\partial \ddot{q}_i}$$

$$A_{j,i} = \left(\frac{\partial^j \dot{\bar{\omega}}_j}{\partial \ddot{q}_j} \right)^T \frac{\partial^j \bar{\alpha}_j}{\partial \ddot{q}_i}$$

Calcular para $j = 2, 3, \dots, n-1$

para $i = 1, 2, \dots, j-1$

para $k = j+1, j+2, \dots, n$

$$A_{j,i} = A_{j,i} + \left(\frac{\partial^k \dot{\bar{\omega}}_k}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{\partial^k \bar{\alpha}_k}{\partial \dot{q}_i}$$

Paso 3.- Obtención del término B

Calcular para $i = 1, 2, \dots, n$ (fuera de línea)

$$\frac{\partial^i \bar{\beta}_i}{\partial \dot{q}_i} = m_i \frac{\partial^i \ddot{\bar{r}}_{G_i}}{\partial \dot{q}_i}$$

Calcular para $i = 1, 2, \dots, n$ (fuera de línea)

$$B_{i,i} = \left(\frac{\partial^i \bar{\beta}_i}{\partial \dot{q}_i} \right)^T \frac{\partial^i \ddot{\bar{r}}_{G_i}}{\partial \dot{q}_i}$$

Calcular para $i = 1, 2, \dots, n - 1$

para $j = i + 1, i + 2, \dots, n$

$$\frac{\partial^j \bar{\beta}_j}{\partial \dot{q}_i} = m_j \frac{\partial^j \dot{\bar{\omega}}_j}{\partial \dot{q}_i}$$

$$B_{i,i} = B_{i,i} + \left(\frac{\partial^j \bar{\beta}_j}{\partial \dot{q}_i} \right)^T \frac{\partial^j \ddot{\bar{r}}_{G_j}}{\partial \dot{q}_i}$$

$$B_{j,i} = \left(\frac{\partial^j \bar{\beta}_j}{\partial \dot{q}_i} \right)^T \frac{\partial^j \ddot{\bar{r}}_{G_j}}{\partial \dot{q}_i}$$

Calcular para $j = 2, 3, \dots, n - 1$

para $i = 1, 2, \dots, j - 1$

para $k = j + 1, j + 2, \dots, n$

$$B_{j,i} = B_{j,i} + \left(\frac{\partial^k \bar{\beta}_k}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{\partial^k \ddot{\bar{r}}_{G_k}}{\partial \dot{q}_i}$$

Paso 4.- Cómputo de la matriz de inercia del sistema

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Calcular para $i = 1, 2, \dots, n$

para $j = i, i + 1, \dots, n$

$$D_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i}$$

Asignar para $i = 1, 2, \dots, n - 1$

para $j = i + 1, i + 2, \dots, n$

$$D_{i,j} = D_{j,i}$$

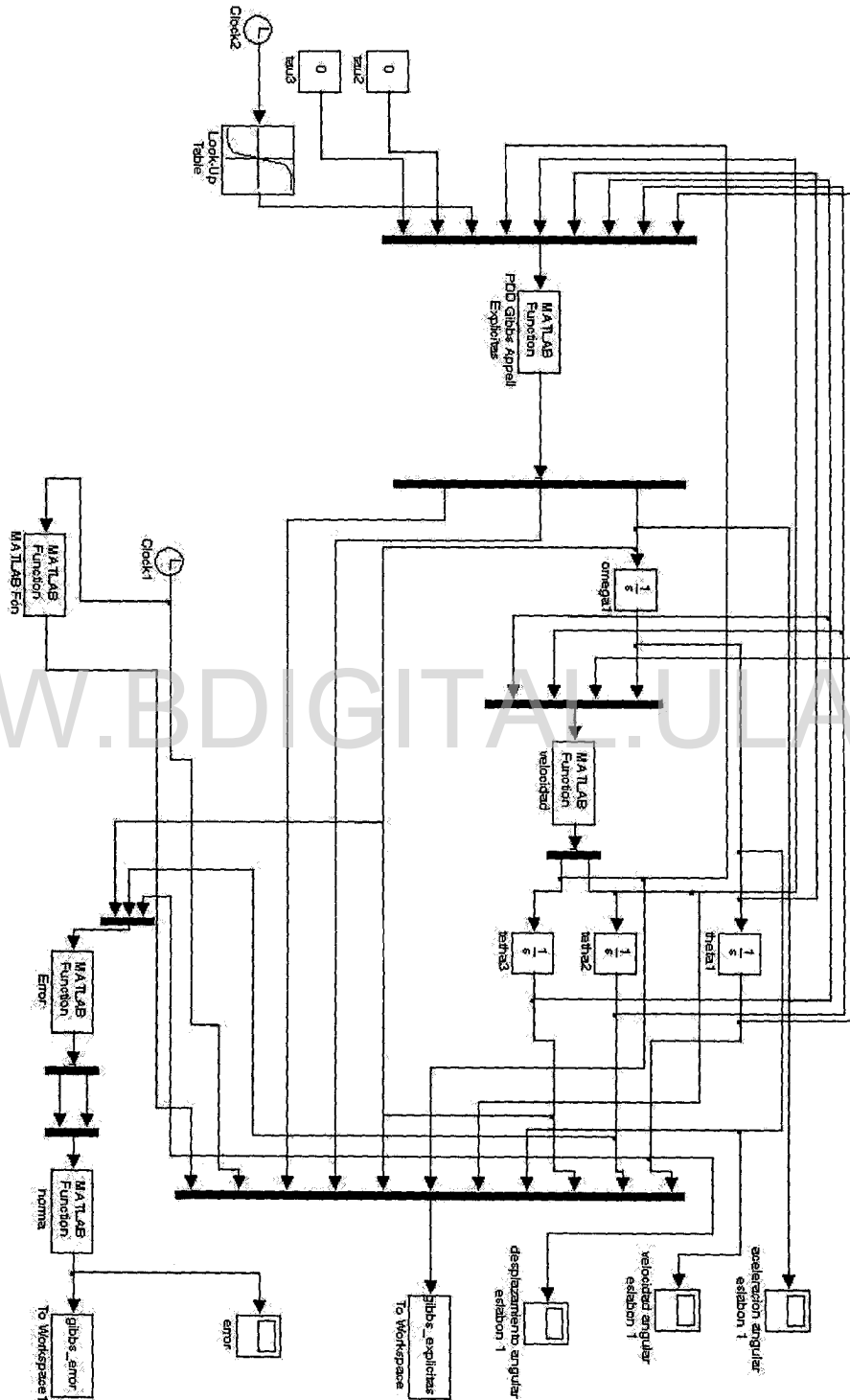
WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Anexo 2

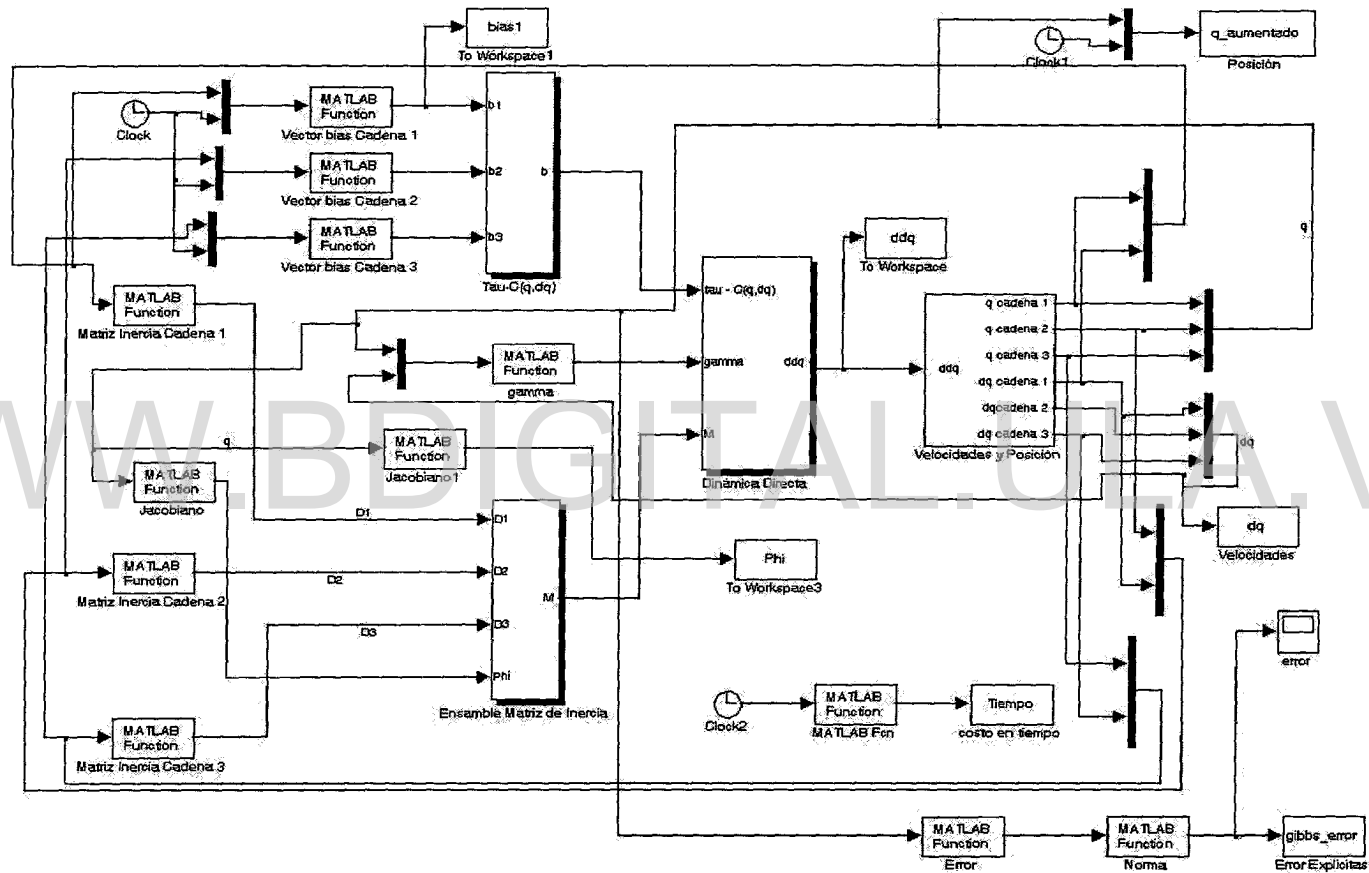
Flujograma Simulink de Matlab

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

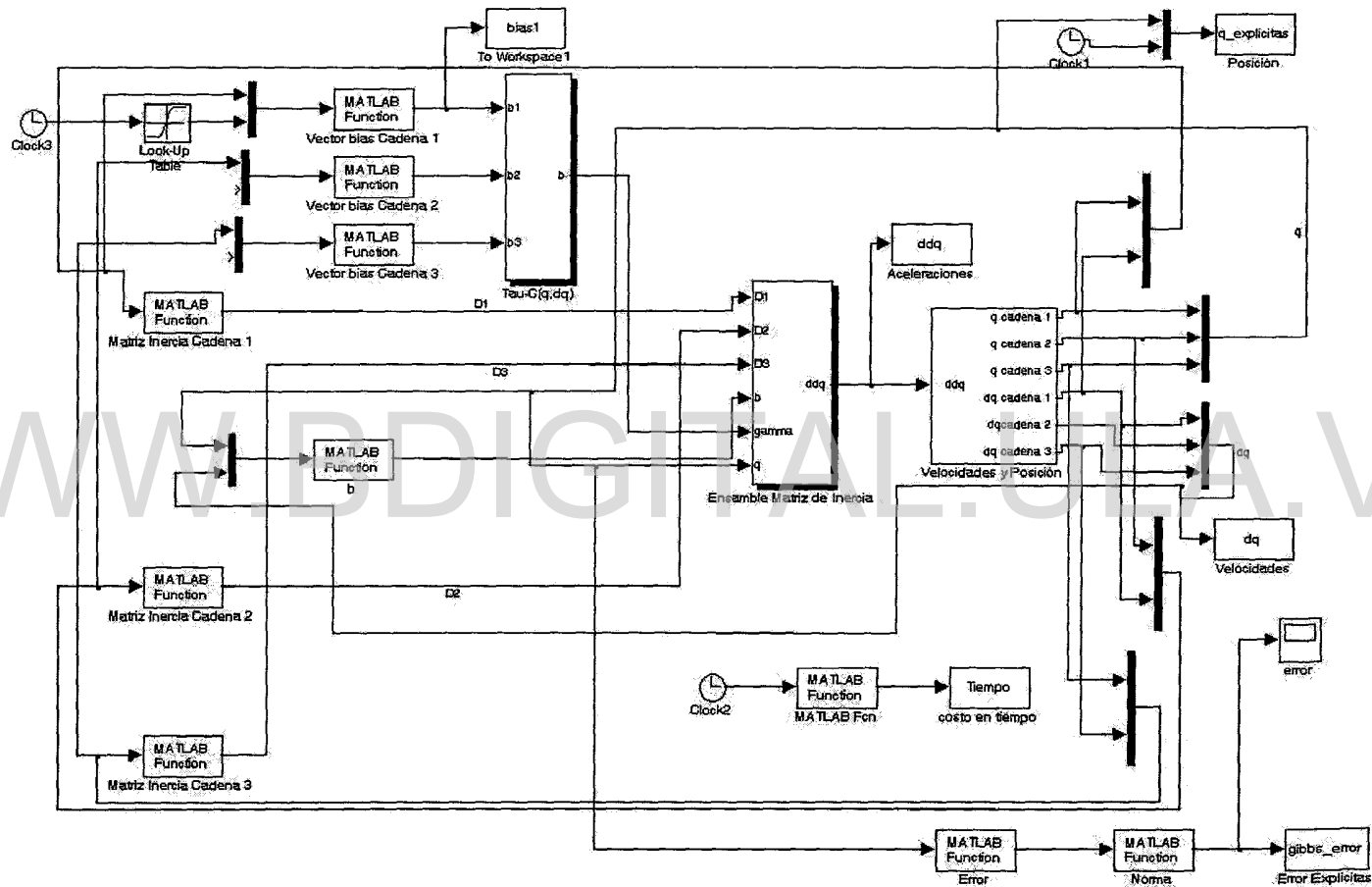
A.2.2 Ejemplo 1-3 Metodología II



A.2.3 Ejemplo 4 Metodología I



A.2.4 Ejemplo 4 Metodología II



Anexo 3

Codificación Archivos Maple

A.3.1 Jacobiano de Restricciones Robot de 1 GDL

```
> restart; with(LinearAlgebra):
```

Se definen los parámetros D-H

```
> n:=4:  
> alpha[0]:=0: alpha[1]:=0: alpha[2]:=0: alpha[3]:=0:  
> d[1]:=0: d[2]:=0: d[3]:=0: d[4]:=0:  
> a[0]:=0: a[1]:=1[1]: a[2]:=1[2]: a[3]:=1[3]:  
> theta[1]:=q[1]: theta[2]:=q[2]: theta[3]:=q[3]: q[4]:=0:
```

Construcción de las matrices de Rotación. Y vectores de posición

```
> for i to n do i_1Ri[i] := evalf(`<,>`(`<|>`(cos(q[i]), -  
sin(q[i]), 0), `<|>`(cos(alpha[i-1])*sin(q[i]), cos(alpha[i-  
1])*cos(q[i]), -sin(alpha[i-1])), `<|>`(sin(alpha[i-  
1])*sin(q[i]), sin(alpha[i-1])*cos(q[i]), cos(alpha[i-1]))));  
ro[i] := `<,>`(a[i-1], d[i]*sin(alpha[i-1]), -  
d[i]*cos(alpha[i-1])) end do:  
> oR[1]:=i_1Ri[1]:  
>  
> oR[2]:=combine(Multiply(i_1Ri[1], i_1Ri[2]), trig):  
>  
iR[3]:=combine(Multiply(i_1Ri[1], Multiply(i_1Ri[2], i_1Ri[3]))  
, trig):
```

Procedimiento para obtener la matriz Jacobiana.

```
> A:=1:  
>
```

```

> for i to n do oR[i]:=combine(Multiply(A,i_1Ri[i]),tig);
A:=oR[i]: end do:
>
> for i to n do z[i]:=Multiply(oR[i],<0,0,1>); end do:
>
> r[5]:=<0, 0, 0>:
> for i from n to 1 by -1 do
r[i]:=Multiply(oR[i],ro[i])+r[i+1]; end do:
> z[1]:
> for i from 1 to n do JA[i]:=CrossProduct(z[i],r[i]); end
do:
>
> for i from 1 to n do JL[i]:=z[i]; end do:
> J:=<<JA[1]| JA[2] | JA[3]| JA[4]>,<JL[1]| JL[2] | JL[3]|
JL[4]>>:
>
> Rank(J):

> J:=DeleteRow(J,[3,6]):
> J:=DeleteColumn(J,1):

```

A.3.2 Jacobiano de Restricciones Robot de 3 GDL

```

> restart; with(linalg):

> eq[1]:=l[10]+cos(q[4])*l[4]+cos(q[4]+q[5])*l[5]:
> eq[2]:=sin(q[4])*l[4]+sin(q[4]+q[5])*l[5]:
>
eq[3]:=cos(q[1])*l[1]+cos(q[1]+q[2])*l[2]+cos(q[1]+q[2]+q[3]-
.5236000000)*l[3]:
>
eq[4]:=sin(q[1])*l[1]+sin(q[1]+q[2])*l[2]+sin(q[1]+q[2]+q[3]-
.5236000000)*l[3]:
>
eq[5]:=cos(q[1])*l[1]+cos(q[1]+q[2])*l[2]+cos(q[1]+q[2]+q[3]+
.5236)*l[3]:
>
eq[6]:=sin(q[1])*l[1]+sin(q[1]+q[2])*l[2]+sin(q[1]+q[2]+q[3]+
.5236)*l[3]:
>
eq[7]:=(l[9]+cos(Pi/2)*l[8]+cos(2*Pi+q[6])*l[6]+cos(2*Pi+q[6]
+q[7])*l[7]):

```

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

```

>
eq[8]:=sin(0.5*Pi)*l[8]+sin(2*Pi+q[6])*l[6]+sin(2*Pi+q[6]+q[7
])*l[7]:
>
> eq1:=eq[1]-eq[3]=0:
> eq2:=eq[2]-eq[4]=0:
> eq3:=eq[5]-eq[7]=0:
> eq4:=eq[6]-eq[8]=0:
> f:=vector([eq[1]-eq[3],eq[2]-eq[4],eq[5]-eq[7],eq[6]-
eq[8]]):
>
> J:=jacobian(f,[q[1],q[2],q[3],q[4],q[5],q[6],q[7]]):
> fq:=<<J[1,1]
|J[1,2]|J[1,3]|J[1,4]|J[1,5]|J[1,6]|J[1,7]>,<J[2,1]
|J[2,2]|J[2,3]|J[2,4]|J[2,5]|J[2,6]|J[2,7]>,<J[3,1]
|J[3,2]|J[3,3]|J[3,4]|J[3,5]|J[3,6]|J[3,7]>,<J[4,1]
|J[4,2]|J[4,3]|J[4,4]|J[4,5]|J[4,6]|J[4,7]>>:
> Aee:=<<J[1,1] |J[1,2]|J[1,3]|J[1,4]>,<J[2,1]
|J[2,2]|J[2,3]|J[2,4]>,<J[3,1] |J[3,2]|J[3,3]|J[3,4]>,<J[4,1]
|J[4,2]|J[4,3]|J[4,4]>>:
>
Aii:=<<J[1,5]|J[1,6]|J[1,7]>,<J[2,5]|J[2,6]|J[2,7]>,<J[3,5]|J
[3,6]|J[3,7]>,<J[4,5]|J[4,6]|J[4,7]>>:

```

WWW.BDIGITAL.ULA.VE