

GA402.3
V4

PROYECTO DE TESIS DE MAESTRÍA

Presentada ante la ilustre UNIVERSIDAD DE LOS ANDES como requisito parcial para optar al grado de *Magister Scientiae* en INGENIERÍA DE CONTROL Y AUTOMATIZACIÓN

Algoritmo de control auto-ajutable para una clase de sistemas no lineales según el criterio de varianza mínima generalizada.

www.bdigital.ula.ve

Por

Ing. Maria Isabel Velasco Colmenares

Tutor: Dr. Prof. Anna Patete

Junio 2014



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
MÉRIDA VENEZUELA

©2014 Universidad de Los Andes Mérida, Venezuela

Algoritmo de control auto-ajustable para una clase de sistemas no lineales según el criterio de varianza mínima generalizada.

Maria Isabel Velasco Colmenares

Proyecto de Tesis de Maestría — Maestría en Ingeniería de Control y Automatización, 191 páginas

Resumen: El control convencional está pensado y diseñado para controlar sistemas generalmente lineales, cuyos parámetros permanecen constantes. Como la mayoría de los sistemas reales presentan comportamientos no lineales y además los parámetros de éstos son desconocidos, y están sometidos a ruidos y/o perturbaciones, un controlador convencional no siempre podrá controlar de manera exitosa al sistema. Por lo tanto, en estos casos es necesario otro tipo de controlador, como puede ser un controlador adaptativo, el cual puede modificar su ley en respuesta a cambios en la dinámica del sistema y/o a las perturbaciones a las que se ve sometido dicho sistema.

Los controladores auto-ajustables STC (*Self-Tuning Controllers*, STC) intentan alcanzar un control óptimo a partir de un tipo de controlador prefijado y de la información obtenida del proceso y sus señales. Los algoritmos de control de mínima varianza y mínima varianza generalizada son formulaciones clásicas del control auto-ajustable, sin embargo no existen pruebas rigurosas de estabilidad global del sistema en lazo cerrado. Debido a esto, se realizan algunas modificaciones al criterio de mínima varianza generalizada en base a la estructura del control en modo deslizante (*Sliding Mode Control*, SMC) en tiempo discreto, pudiendo demostrar la estabilidad global del sistema en lazo cerrado usando controladores auto-ajustables implícitos para una clase de sistemas SISO (*Single Input Single Output*, SISO) de fase mínima y no-mínima, sistemas multivariables o MIMO (*Multiple Input Multiple Output*, MIMO) y sistemas bilineales, en tiempo discreto con parámetros desconocidos. El objetivo de este nuevo diseño de control es hacer que la variable de modo deslizante se desvanezca (o sea igual a cero), donde la identificación de los parámetros del controlador se hace en forma recursiva, donde la convergencia de dichos parámetros no es asegurada a los valores reales. La estabilidad global en lazo cerrado del sistema auto-ajustable en tiempo discreto se demostró por medio del uso de una función de Lyapunov.

En este trabajo se propone diseñar un controlador auto-ajustable fundamentado en el criterio de varianza mínima generalizada modificado con base al control en modo deslizante en tiempo discreto, teniendo como objetivo anular la variable de control en modo deslizante, para una clase de sistemas no lineales, los cuales presentan no linealidades con estructura polinomial. Así como también demostrar la estabilidad global del sistema en lazo cerrado por medio de una función de Lyapunov, y validar el desempeño del algoritmo, por medio de simulaciones, utilizando ejemplos académicos y algunos modelos de sistemas físicos.

Palabras Clave: Control auto-ajustable, control de mínima varianza generalizada, sistemas no lineales, péndulo simple, mecanismo manivela-biela-corredera.

www.bdigital.ula.ve

Dedicatoria

A Dios, mis padres, mis hermanos, mis abuelos y Aiko.

www.bdigital.ula.ve

Índice

Dedicatoria	v
Índice	vi
Índice de figuras	viii
Índice de tablas	x
Agradecimientos	xii
Capítulo 1	1
Introducción	1
1.1 Formulación del problema	4
1.2 Objetivos	6
1.2.1 Objetivo General	6
1.2.2 Objetivos Específicos	6
1.3 Justificación del trabajo	7
1.4 Investigación Documental	8
1.5 Metodología	13
1.6 Resultados	14
Capítulo 2	15
Bases teóricas de los algoritmos de control	15
2.1 Introducción	15
2.2 Control de mínima varianza	16
2.3 Control de mínima varianza generalizada	19
2.4 Control de mínima varianza basado en el concepto de control de modo deslizante para sistemas lineales	21
2.5 Control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada para sistemas lineales	23
2.6 Control de mínima varianza basado en el concepto de control de modo deslizante para una clase extendida de sistemas bilineales	33

2.7	Control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada para una clase extendida de sistemas bilineales	36
Capítulo 3.....		43
Algoritmo de control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada para una clase de sistemas no lineales		43
3.1	Introducción.....	43
3.2	Definición de la clase de sistemas no lineales	43
3.3	Control de mínima varianza generalizada para la clase de sistemas no lineales	46
3.4	Control auto-ajustable para la clase de sistemas no lineales definida	53
3.5	Control de mínima varianza generalizada para una clase de sistemas no lineales de primer, segundo y tercer orden	63
3.5.1	Control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de primer orden	64
3.5.2	Control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden	70
3.5.3	Control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden	81
3.6	Análisis	90
Capítulo 4.....		92
Casos de estudio		92
4.1	Introducción.....	92
4.2	Ejemplos académicos.....	93
4.2.1	Ejemplo 1. Sistema no lineal de primer orden	94
4.2.2	Ejemplo 2. Sistema no lineal de segundo orden	101
4.2.3	Ejemplo 3. Sistema no lineal de tercer orden	106
4.2.4	Análisis de los resultados	109
4.3	El péndulo simple	111
4.3.1	Modelado matemático del péndulo simple	111
4.3.2	Casos de estudio del péndulo simple	113
4.3.2.1	Extensión del término no lineal a los dos primeros términos de la serie de Taylor ..	113
4.3.3	Simulaciones para los casos de estudio del péndulo simple.....	119
4.3.4	Análisis de la aplicación de las leyes de control al modelo matemático sin expandir los términos no lineales.....	140
4.3.5	Análisis de los resultados	144

4.4	Mecanismo corredera-biela-manivela	145
4.4.1	Modelado matemático del mecanismo corredera-biela-manivela	146
4.4.2	Casos de estudio del mecanismo corredera-biela-manivela	153
4.4.3	Simulaciones para el mecanismo corredera-biela-manivela	162
4.4.4	Análisis de la aplicación de las leyes de control al sistema original	176
4.4.5	4.4.5 Análisis de los resultados.....	179
	Conclusiones y Recomendaciones	181
	Conclusiones	181
	Recomendaciones	188
	Bibliografía.....	189

www.bdigital.ula.ve

Índice de figuras

Figura 4.1. Análisis de la estabilidad robusta para el sistema (4.2): curva $T(e - jw)$ y círculo $o(1,0)$	97
Figura 4.2. Comparación de la salida del sistema no lineal controlado por medio de CMVG (verde) y el controlador auto-ajustable (azul).	98
Figura 4.3. Comparación de la dinámica del CMVG (verde) y el controlador auto-ajustable (azul).	98
Figura 4.4. Comportamiento de los parámetros del controlador auto-ajustable	99
Figura 4.5. Comparación de las superficies deslizantes al aplicar CMVG-STC (azul) y CMVG (verde).	100
Figura 4.6. Función de Lyapunov.	100
Figura 4.7. Análisis de la estabilidad robusta para el sistema (4.2): $T(e - jw)$ y $o(1,0)$	104
Figura 4.8. Comparación de la salida del sistema no lineal controlado por medio de CMVG (verde) y el controlador auto-ajustable (azul).	104
Figura 4.9. Comparación de la dinámica del CMVG (verde) y el controlador auto-ajustable (azul). ...	105
Figura 4.10. Comparación de la salida del sistema no lineal controlado por medio de CMVG (verde) y el controlador auto-ajustable (azul).	109

Figura 4.11. Péndulo simple.	112
Figura 4.12. Análisis de la estabilidad robusta para el sistema (4.61) con $q_0 = 0.001$: $T(e - jw)$ y $o(1,0)$	123
Figura 4.13. Análisis de la estabilidad robusta para el sistema (4.61) con $q_0 = 50$: $T(e - jw)$ y $o(1,0)$	124
Figura 4.14. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $15\pi/180$	126
Figura 4.15. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $60\pi/180$	127
Figura 4.16. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $79\pi/180$	128
Figura 4.17. Comportamiento de los parámetros del controlador auto-ajustable.	130
Figura 4.18. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $15\pi/180$	134
Figura 4.19. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $60\pi/180$	135
Figura 4.20. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $88\pi/180$	136
Figura 4.21. Mecanismo corredera-biela-manivela.	146
Figura 4.22. Esquema del mecanismo corredera-biela-manivela.	148
Figura 4.23. Comparación de la salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal (4.136) controlado por medio de CMVG (verde) y el CMVG-STC (azul) para $50\pi/180$	168
Figura 4.24. Comportamiento de los parámetros del controlador auto-ajustable.	170
Figura 4.25. Comparación de la salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal (4.130) controlado por medio de CMVG (verde) y el CMVG-STC (azul) para $50\pi/180$	175

Índice de tablas

Tabla 3.1. Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de primer orden.	65
Tabla 3.2. Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ es constante.	71
Tabla 3.3. Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ depende de la señal de salida.	76
Tabla 3.4. Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ son constantes.....	81
Tabla 3.5. Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ dependen de la señal de salida.	86
Tabla 4.1. Parámetros del péndulo simple.	120
Tabla 4.2. Comparación de las salidas controladas usando CMVG y el CMVG-STC.	125
Tabla 4.3. Comparación de las salidas controladas usando CMVG y CMVG-STC.	133
Tabla 4.4. Comparación de las salidas controladas usando CMVG y CMVG-STC.	139
Tabla 4.5. Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.52) y el CMVG-STC al aplicarse al modelo matemático (4.40).	141
Tabla 4.6. Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.56) y el CMVG-STC al aplicarse al modelo matemático (4.40).	142
Tabla 4.7. Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.60) y el CMVG-STC al aplicarse al modelo matemático (4.40).	142
Tabla 4.7. (Continuación). Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.60) y el CMVG-STC al aplicarse al modelo matemático (4.40).	143
Tabla 4.8. Parámetros del mecanismo corredera-biela-manivela.	147
Tabla 4.9. Valores de los parámetros del mecanismo corredera-biela-manivela.	163
Tabla 4.10. Comparación de las salidas controladas usando CMVG y CMVG-STC.....	166
Tabla 4.11. Comparación de las salidas controladas usando CMVG y CMVG-STC.....	174

Tabla 4.12. Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.114) y CMVG-STC en el modelo matemático (4.110). 177

Tabla 4.13. Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.117) y CMVG-STC en el modelo matemático (4.110). 178

www.bdigital.ula.ve

Agradecimientos

A Dios y la Virgen de la Consolación, por llenarme de fortaleza para cumplir cada una de mis metas, por su amor incondicional y su protección, por rodear mi vida de personas incondicionales como mi familia y mis amigos que con sus palabras me dieron fuerzas para lograr cumplir esta meta.

A mis padres José y Zulay, gracias por llenarme de tanto amor y de tantas bendiciones, por estar a mi lado en cada momento de felicidad y de tristeza, por sus consejos y por inculcarme que con amor y paciencia todo se logra en esta vida. Este triunfo es de ustedes. Los amo.

A mis hermanos Cati, Zulita y Alejandro, tantos momentos compartidos, gracias por brindarme su apoyo, su amistad y cariño. Los amo.

A mi pequeño Aiko, gracias por tu compañía incondicional, por ser un loquito con tus juegos llenas de alegría mi vida. Eres mi mejor compañero. TQM

A mis abuelos Alejandro, Isabel y Basilisa, gracias por estar presentes en cada una de las etapas de mi vida, por su amor, sus consejos y por cada abrazo lleno de fortaleza que me ofrecían cada vez que me tocaba regresar a Mérida. Los amo.

A mi tío Alejandro, gracias por todo el apoyo dado durante esta meta, eres un ejemplo a seguir, gracias por todo el cariño que me has brindado. Te quiero mucho.

A mis tíos: Hayde, Rosa, Jorge, Carlos, y a todos mis primos, por su apoyo durante todo este tiempo. Los quiero mucho.

A mi prima Yamileth, gracias por todas tus palabras de ánimos, por todos los consejos que me has brindado, eres mi hermanita mayor, te quiero demasiado.

A mi prima María Andreina, gracias por todo tu apoyo, te quiero mucho.

A mi tutora Profesora Anna Patete, por sus esfuerzos y dedicación durante el desarrollo de este proyecto. Gracias por guiarme con sus conocimientos, experiencia y paciencia para culminar este trabajo. Muchísimas gracias.

Al Profesor Jean Claude Dulhoste, por sus valiosísimas enseñanzas durante la escolaridad, por su compromiso con la educación y su ayuda incondicional.

A mi amiga Layimar, por su paciencia, su confianza y todo su apoyo durante este camino que recorrimos juntas. Gracias por esas eternas horas que pasamos juntas dedicadas a este

postgrado, por los chistes y las risas que nunca nos faltaron en los momentos difíciles, como decíamos vamos a reír para no llorar. Ami deseo que esta amistad siga por el resto de nuestras vidas. Tqm.

A la familia Cegarra Alvarado, gracias por todo su apoyo y por dejarme formar parte de su hermosa familia. Siempre les estaré agradecida. Los quiero mucho Sr. Layo, Sra. Marlene y Edymar.

A mis amis incondicionales Daniela, Liz y Fannia, gracias por todo su apoyo, por las risas, por las charlas, por sus buenas energías, siempre estarán presentes en mi corazón. Las quiero mucho.

A mis amigos Vladi y Orlando, gracias por todo su apoyo desde las distancia. Los quiero mucho.

A Yepeto, gracias por todo el apoyo, por tus buenas energías y por estar siempre presente. Hakuna Matata. TQM

Al CDCHTA por su apoyo en el Proyecto Tipo EM bajo el código 1-1372-13-02-EM, Universidad de Los Andes.

A todo el personal de la Escuela de Ingeniería de Sistemas, especialmente al personal del Postgrado de Control y Automatización, por contribuir en mi formación profesional.

A todos aquellos familiares, amigos y compañeros que de alguna forma intervinieron en la realización de este trabajo.

Capítulo 1

Introducción

Un controlador convencional está pensado para controlar sistemas generalmente lineales, cuyos parámetros son conocidos y permanecen constantes. Lo cual es una buena aproximación en la mayoría de los casos, cuando se pretende regular un sistema en un punto fijo de operación. Si existen perturbaciones, y éstas son pequeñas, dicha aproximación continúa siendo suficiente para obtener un buen desempeño del control. Sin embargo, la aproximación en torno a un punto de operación no suele seguir siendo buena, si el punto de operación cambia. Por lo tanto, como en la mayoría de los sistemas reales los parámetros son desconocidos y están sometidos a ruidos y/o perturbaciones, un controlador convencional no podrá controlar de manera exitosa al sistema, por ende es necesario aplicar otro tipo de controlador, como por ejemplo un controlador adaptativo, ya que este puede modificar su comportamiento en respuesta a cambios en la dinámica del sistema y/o a las perturbaciones a las que se ve sometido dicho sistema.

Los controladores adaptativos son de gran atracción para los diseñadores de sistemas en lazo cerrado, ya que son altamente adaptables a aceptar modificaciones provocadas por el ambiente, o también errores de diseño de ingeniería o incertidumbre y compensan las fallas de componentes menores, incrementando la confiabilidad de éstos, su marco teórico ha sido estudiado y desarrollado durante muchos años logrando establecerse las bases teóricas para el diseño de controladores adaptables.

Según Rodríguez y López (1996), los controladores adaptativos pueden ser divididos en dos grupos: Controladores adaptativos con modelado de referencia (*Model Reference Adaptive*

Control, MRAC) y controladores auto-ajustables (*Self-Tuning Controllers*, STC). Los MRAC intentan alcanzar un comportamiento deseado en lazo cerrado que viene especificado por un modelo de referencia. Por otra parte, los STC intentan alcanzar un control óptimo a partir de un tipo de controlador prefijado y de la información obtenida del proceso y sus señales. El adjetivo auto-ajustable resalta la propiedad que tienen estos controladores para sintonizar automáticamente sus propios parámetros, para de esta manera obtener las propiedades deseadas del sistema en lazo cerrado.

Otra posible clasificación de los sistemas de control adaptativos según Rodríguez y López (1996), es aquella que atiende a la forma de obtener los parámetros del controlador. En este esquema podemos encontrar:

1. Controladores adaptativos con diseño mediante criterio óptimo: en este caso el valor de los parámetros se obtiene buscando entre los posibles valores aquellos que hacen óptimo un cierto criterio de comportamiento del sistema. Algunos de estos controladores son:

- Controlador de mínima varianza (Åström y Wittenmark, 1973).
- Controlador de mínima varianza generalizado (Clarke y Gawthrop, 1975, 1979).
- Controladores predictivos generalizados (Clarke y Gawthrop, 1988).

2. Controladores adaptativos con diseño mediante criterio no óptimo: éstos buscan los parámetros del controlador no mediante la optimización de un criterio de funcionamiento sino entre aquellos que cumplen unas ciertas especificaciones, por ejemplo, la colocación de los ceros y los polos de lazo cerrado. Entre estos podemos nombrar:

- Asignación de polos y ceros (Wellstead y col., 1979).
- Asignación de polos y ceros (Astrom y Witternmark, 1980).
- Controlador en tiempo mínimo (Isermann, 1981).
- Regulador PID (Ortega, 1982).

El controlador de mínima varianza es un regulador óptimo que pretende reducir el efecto de las perturbaciones sobre la salida, minimizándose para ello un cierto índice de funcionamiento, sin embargo presenta problemas cuando el sistema es de fase no mínima ya que al tener ceros inestables éstos se cancelarán con los polos inestables. Existen variaciones del controlador de mínima varianza que tratan este problema y además incorporan seguimiento de referencias y ponderación del esfuerzo de control; es decir, que además de perseguir el objetivo de minimizar las variaciones de la salida con respecto a la referencia se intenta usar el menor esfuerzo de control posible, como lo es el control de mínima varianza generalizada.

Los algoritmos de control de mínima varianza y mínima varianza generalizada fueron unos de los primeros algoritmos de control diseñados específicamente para aplicaciones auto-ajustables, y ahora se consideran formulaciones clásicas, sin embargo no existen pruebas rigurosas de estabilidad global del sistema en lazo cerrado. Debido a esto, se realizaron algunas modificaciones al criterio de mínima varianza generalizada en base a la estructura del control en modo deslizante (*Sliding Mode Control*, SMC) en tiempo discreto.

El control en modo deslizante según San Martín (2005) tiene dos principales ventajas: i) el comportamiento dinámico del sistema puede ser adaptado escogiendo una superficie de conmutación particular y ii) la respuesta en lazo cerrado del sistema controlado es insensible respecto a las incertidumbres del sistema. Para cada opción de control conmutado, se escoge una ganancia tal que la derivada con respecto al tiempo de esta función sea definida negativa.

Después del diseño de la superficie, una ley de control de conmutación será diseñada de modo que los vectores tangentes de las trayectorias de estado apunten hacia la superficie tal que los estados son guiados y mantenidos en la superficie deslizante, donde el controlador resulta en un sistema en lazo cerrado discontinuo, esto en tiempo continuo. Sin embargo, en el diseño de tiempo discreto no es necesario diseñar una ley de control que conmute, solo basta con diseñar una ley de control que lleve las trayectorias a la superficie deslizante.

1.1 Formulación del problema

La estabilidad global en lazo cerrado del algoritmo de control auto-ajutable para sistemas lineales en tiempo discreto fue demostrada usando una función de Lyapunov (Patete y col., 2008.a). Luego este algoritmo fue ampliado a sistemas lineales en tiempo discreto sujeto a ruido blanco, es decir, a modelos ARX (Patete y col., 2008.b). Motivado a que existen una clase de sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) realizaron la extensión del algoritmo para esta clase de sistemas (Sugiki y col., 2008) a partir de los resultados obtenidos por Patete y col., (2007) y Patete y Furuta, (2011).

Se ha demostrado que una amplia clase de sistemas no lineales, bajo condiciones relativamente suaves, se pueden aproximar usando modelos bilineales con un número finito de coeficientes y se le pueden aplicar algunos conceptos asociados a los sistemas lineales. Por lo tanto, se desarrolló un algoritmo para el control auto-ajutable combinando estimación recursiva de los parámetros y el criterio de mínima varianza generalizada para esta clase de sistemas (Patete y col., 2008.c) y (Patete y col., 2011), y para una clase más relajada y extendida de sistemas bilineales (Patete y col., 2010) y (Patete y col., aceptado en la Revista Ciencia e Ingeniería de la Universidad de Los Andes).

Debido a que en el mundo real la mayoría de los sistemas son no lineales, es de interés extender el algoritmo de control auto-ajutable para una clase de sistemas no lineales que

pueden ser representados dentro de un tipo de estructura, la cual en este caso serán no linealidades con estructura polinómicas. Para comenzar a estudiar el caso no lineal, se propone lo siguiente:

Tenga en cuenta la estructura general de un sistema no lineal como en (1.1),

$$A(z, q)y_k = B(z, q)u_k, \quad (1.1)$$

donde, z denota el operador de desplazamiento de tiempo, es decir, $z^{-d}y_k = y_{k-d}$, y q se define como:

$$q = h(y_k, u_k), \quad (1.2)$$

siendo $h(y_k, u_k)$ una función cualquiera.

Consideremos ahora el caso general de primer orden (1.3),

$$y_{k+1} + a(q)y_k = b(q)u_k, \quad (1.3)$$

siendo q una función sólo de los datos de salida, es decir $q = h(y_k)$.

Para la estructura de primer orden (1.3), se analizan algunos casos particulares de la siguiente manera:

- a) Si $a(q)$ y $b(q)$ son valores constantes independientes de la señal de salida y_k , es decir, $a(q) = a_0$ y $b(q) = b_0$, entonces el caso es el mismo que para el sistema lineal de primer orden, considerados en Patete y col. (2008.a).
- b) Si $a(q) = a_0$ y $b(q) = b_0 + b_1y_k$, entonces el caso es el mismo que para un sistema bilineal, de primer orden, considerado en Patete y col. (2011), Patete y col. (2010) y Patete y col. (aceptado en la Revista Ciencia e Ingeniería).

De la explicación anterior, lo primero que se debe hacer es probar con diferentes estructuras de la función $q = h(y_k)$ (o $q = h(y_k, u_k)$ en el caso general), es decir, cómo elegir $a(q)$ y $b(q)$ para el caso de primer orden (1.3).

Por ejemplo, para el sistema de primer orden (1.3), si $a(q) = a_0 + a_1y_k$ y $b(q) = b_0$, entonces:

$$\begin{aligned}y_{k+1} + a_0y_k + a_1y_ky_k &= b_0u_k, \\y_{k+1} + a_0y_k + a_1y_k^2 &= b_0u_k.\end{aligned}\tag{1.4}$$

O en el caso de que $a(q) = a_0 + a_1y_k$ y $b(q) = b_0 + b_1y_k$, entonces:

$$y_{k+1} + a_0y_k + a_1y_k^2 = b_0u_k + b_1y_ku_k,\tag{1.5}$$

y para los casos, (1.4) y (1.5), no hay resultados en la literatura.

Ya conocida la estructura de la función $q = h(y_k)$, es de gran importancia poder demostrar la estabilidad global del sistema en lazo cerrado usando el algoritmo auto-ajutable a proponer para la clase de sistemas no lineales a tratar.

www.bdigital.ula.ve

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Desarrollar un algoritmo auto-ajutable basado en el concepto de mínima varianza generalizada para una clase de sistemas no lineales.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Revisión bibliográfica.
2. Definir la clase de sistemas no lineales a estudiar.
3. Definir un algoritmo auto-ajutable basado en el concepto de varianza mínima generalizada.
4. Realizar simulaciones para probar el desempeño del algoritmo diseñado.
5. Tomar un ejemplo físico real como caso de estudio.

1.3 Justificación del trabajo

El desarrollo de este proyecto está basado en una colaboración académica solicitada en Octubre de 2012 en Tokyo Denki University, entre Katsuhisa Furuta^{*}, Akihiko Suguki^{**}, Akira Ohata^{***}, y Anna Patete^{****} para el desarrollo conceptual de un algoritmo auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada (modificado bajo el concepto de control en modo deslizante en tiempo discreto) a una clase de sistemas no lineales, en conjunto con la Toyota Motor Corporation, el cual en un futuro puede ser implementado en los motores de ciertos modelos de vehículos marca Toyota.

La base conceptual está apoyada en desarrollos previos de algoritmos auto-ajustables para sistemas lineales SISO (*Single Input Single Output*) y sus demostraciones de estabilidad global (Patete, 2008). Estos aportes fueron expuestos a la Toyota Motor Corporation, quienes solicitaron la colaboración del desarrollo conceptual de algoritmos auto-ajustables para sistemas no lineales MIMO (*Multiple Inputs Multiple Outputs*), esto debido a que el modelo matemático del motor sobre el cual en un futuro se desea hacer la implementación es no lineal y MIMO. Posteriormente, Sugiki y col. (2008) generalizaron el algoritmo de control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada propuesto por Patete y col. (2007) para el caso multivariable (MIMO). Luego Ohata y col. (2011) implementaron con éxito el controlador auto-ajustable multivariable basado en la idea de control en modo deslizante en un motor de arranque modelo V6 provisto por la sociedad de ingenieros de instrumentos y control (*Society of Instrument and Control Engineers, SICE*) en 2006, cumpliendo el objetivo del diseño de control, el cual consistía en arrancar el motor y regular la velocidad del mismo a 650 ± 50 (rpm) dentro de 1.5 (s).

Ya validado el algoritmo para sistemas multivariables y su estabilidad global en lazo cerrado, el siguiente paso es desarrollar el marco conceptual para una clase de sistemas no lineales, usando control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada, el cual es el propósito de este proyecto de grado.

* Tokyo Denki University
2-2 Kanda Nishikicyo, Chiyodaku, Tokyo 101'8457, Japan
furuta@k.dendai.ac.jp

** Nikki Denso Co., Ltd.
1-4-2 Osaka, Sakura, Chiba 285-0802, Japan
suiki@nikkidenso.co.jp

*** Toyota Motor Corporation
Higashifuji Technical Center
1200 Mishuku, Sosono, Shizuoka, 411-1193, Japan
ohata@control.tcc.toyota.co.jp

**** Universidad de Los Andes
Department of Systems and Control, Venezuela
apatete@ula.ve

1.4 Investigación Documental

Un amplio desarrollo conceptual sobre controladores auto-ajustables (STC) se ha realizado desde décadas pasadas debido a la importancia de poder contar con una teoría que nos proporcione las técnicas de diseño y nos señale los pros y contras de dichos algoritmos. Entre los principales avances en esta área se encuentra el controlador auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza (*Minimum Variance Control*, MVC) diseñado por Åström y Wittenmark (1973) para el control de sistemas con parámetros constantes pero desconocidos. Este controlador está basado en mínimos cuadrados recursivos (*Recursive Least-Squares*, RLS) para la estimación de la ley de control de retroalimentación, donde los parámetros estimados convergen a los valores reales, sin embargo este algoritmo no era aplicable a sistemas de fase no mínima.

Luego Clarke y Gawthrop (1975), propusieron el control de mínima varianza generalizada (*Generalized Minimum Variance Control*, GMVC) para sistemas de fase no mínima con el uso de una función de costo que incorpora la señal de entrada del sistema y de consignas de variación, derivando una ley de control para sistemas con parámetros desconocidos. Los

parámetros de la ley de control se calculan utilizando el algoritmo RLS, aunque la estabilidad global de todo el sistema en lazo cerrado no fue completamente asegurada.

Furuta (1993) propuso un método para sistemas de estructura variable (*Variable Structure Systems*, VSS) en tiempo discreto para el caso en que los parámetros del sistema son desconocidos utilizando un estimador recursivo de los parámetros del controlador; el método VSS está basado en MVC o en el GMVC.

Patete (2008) diseñó y demostró la estabilidad global del sistema en lazo cerrado usando controladores auto-ajustables implícitos para una clase de sistemas SISO de fase mínima y no-mínima en tiempo discreto con parámetros desconocidos, entre las propuestas se encuentran: en primer lugar un algoritmo para un controlador auto-ajustable, el cual es la combinación del control de mínima varianza generalizada, basado en el concepto de control en modo deslizante en tiempo discreto, donde el objetivo es hacer que la variable de modo deslizante se desvanezca, y la identificación de los parámetros de la ley de control se hace en forma recursiva, donde la convergencia de dichos parámetros no es asegurada a los valores reales. La estabilidad global del sistema en lazo cerrado usando el controlador auto-ajustable se demostró de manera similar a la teoría de estabilidad usada en el control en modo deslizante en tiempo discreto. Un segundo algoritmo fue diseñado para sistemas con retraso en la entrada de control. Luego se extendió la idea del primer algoritmo a sistemas con ruido blanco de medición. También consideró una clase de sistemas variantes en el tiempo, donde los parámetros cambian continuamente pero lentamente o de manera brusca pero con poca frecuencia, demostrando la estabilidad global del sistema en lazo cerrado al introducir un factor de olvido. Por último diseñó un algoritmo para una clase de sistemas bilineales.

La estabilidad, el desempeño y la convergencia de los algoritmos recursivos que involucran los controladores auto-ajustable son problemas teóricos que éstos presentan debido a que no es trivial su análisis, varios estudios relacionados a estos inconvenientes se han desarrollado, entre estos se encuentran: Patete y col. (2008.a) demostraron la estabilidad global

del sistema en lazo cerrado al aplicar control auto-ajustable a sistemas de fase mínima y no mínima en tiempo discreto por medio del uso de una función de Lyapunov. El controlador auto-ajustable es la combinación de GMVC e identificación de los parámetros del control en forma recursiva, donde los valores de los parámetros no necesariamente deben converger a los valores reales.

Patete y col. (2007) y Patete y col. (2011) demostraron la estabilidad global del sistema en lazo cerrado y el desempeño de un algoritmo de control auto-ajustable, basado en el GMVC desde el punto de vista del control en modo deslizante y la estimación recursiva de los parámetros del controlador que incluye un factor de olvido, para una clase de sistemas variantes en el tiempo. Los resultados fueron ampliados al caso donde en el modelo del sistema se considera ruido blanco. Aportando con esto un algoritmo que asegura la estabilidad global del sistema en lazo cerrado si éste se implementa en un sistema real con parámetros variantes en el tiempo, incluso en presencia de ruido.

Luego Patete y col. (2008.b) demostraron la estabilidad global en lazo cerrado de un algoritmo auto-ajustable que combina un estimador recursivo de los parámetros del controlador y el criterio de mínima varianza generalizada para sistemas de fase mínima y no mínima representados por modelos auto-regresivos con parámetros constantes pero desconocidos. Se demostró la estabilidad global en lazo cerrado por medio del uso de una función de Lyapunov, donde bastó con utilizar funciones lineales de los datos para predecir la respuesta de salida del sistema. Los parámetros estimados no necesariamente deben converger a los valores reales.

Sugiki y col. (2008) propusieron un controlador auto-ajustable multivariable implícito mediante la generalización de los resultados expuestos por Patete y col. (2007), para sistemas MIMO.

Son pocas las propuestas sobre el diseño de controladores auto-ajustables para sistemas bilineales. Unos de los primeros trabajos fue el de Goodwin y col. (1984) donde propusieron

un controlador auto-ajustable para sistemas bilineales, sin embargo careció de una demostración de estabilidad rigurosa. Debido a que los sistemas bilineales son de gran interés, ya que muchos sistemas del mundo real pueden ser representados por estos, nuevos estudios se han realizado entre los que se encuentran: Sun y col. (1992) dieron una demostración de estabilidad para los controladores auto-ajustables explícitos de sistemas bilineales, aunque esta prueba se basó en la fuerte condición de convergencia de los parámetros en lazo cerrado. Patete y col. (2008.c) demostraron los teoremas que aseguran la estabilidad global en lazo cerrado y el desempeño de los controladores auto-ajustables implícitos en tiempo discreto con parámetros desconocidos, para algunos sistemas bilineales. El algoritmo diseñado es la combinación de estimación recursiva de los parámetros y el criterio de mínima varianza generalizada, donde no se asegura la convergencia de los parámetros hacia los valores reales, sin embargo el algoritmo funciona bajo la fuerte condición que la variable de control debe aparecer en el término lineal y en el término bilineal de la estructura del sistema bilineal, reduciendo su aplicación real a una pequeña clase de sistemas bilineales. Los resultados obtenidos fueron ampliados para el caso donde los ruidos de medición son considerados en el modelo del sistema. Estos algoritmos fueron validados por medio de resultados obtenidos a través de simulaciones.

Motivados a que en la mayoría de los sistemas bilineales tienen la variable de control solo en el término bilineal, Patete y col. (2010) propusieron un nuevo algoritmo para el control auto-ajustable combinando estimación recursiva de los parámetros y el criterio de mínima varianza generalizada para una clase más amplia de sistemas bilineales mediante la relajación de la fuerte condición en su estructura, donde la acción de control se presenta solo en el término bilineal. La convergencia de los parámetros a los valores reales no es necesaria. También se demostró la estabilidad global del sistema en lazo cerrado usando el controlador auto-ajustable a través de una función de Lyapunov. De los resultados expuestos por Patete y col. (2010), en Patete y col. (2011), se demostró la validez del algoritmo por medio de un ejemplo simulado aplicado a una planta térmica piloto. Y en Patete y col. (aceptado en la Revista Ciencia e Ingeniería) aplicaron el algoritmo propuesto al caso de estudio del modelo de fisión nuclear, probando la validez del algoritmo por medio de simulaciones.

El control de mínima varianza generalizado se ha convertido en un área de investigación activa desde su aparición, en la década pasada muchas técnicas se han combinado con el GMVC con el fin de hacer frente a los sistemas de fase no mínima y sistemas con retardo. Algunos de los resultados se pueden resumir de la siguiente manera. Yamamoto y col. (1999) combinan el GMVC con una estructura PID, donde los parámetros PID se calcularon en línea. Zayed y col. (2001) propusieron un GVMC auto-ajutable mediante una técnica de colocación de polos y ceros. Los enfoques propuestos en Yamamoto y col. (1999) y Zayed col. (2001) utilizaron un algoritmo recursivo de mínimos cuadrados para estimar los parámetros de la planta y el controlador fue diseñado en línea resolviendo una ecuación diofántica en cada instante de muestreo. Doi y Mori (2002.a y 2002.b) estudiaron GMVC para sistemas de tiempo variables. A pesar de los esfuerzos de muchos investigadores, no había demostraciones rigurosas de estabilidad que se hayan obtenido para sistemas de control en lazo cerrado usando auto-ajuste.

El control en modo deslizante en tiempo discreto (*Discrete Sliding Mode Control*, DSMC) ha sido propuesto para sistemas lineales SISO en Furuta (1990). Furuta (1993) presenta un método para sistemas de estructura variable en tiempo discreto (*Variable Structure System*, VSS) para el caso en el que los parámetros de los sistemas son desconocidos. El VSS está diseñado basado en el MVC o GMVC mediante la estimación de parámetros.

Tang y Misawa (1999) discutieron los problemas potenciales asociados con los sectores de conmutación del DSMC y desarrollaron el control de estructura variable discreto (*Discrete Variable Structure Control*, DVSC) para sistemas con incertidumbres paramétricas emparejados. Suzuki y Furuta (1996) estudiaron un DVSC para sistemas lineales SISO sin incertidumbres usando relación entrada-salida. Más tarde Tang y Misawa (2000) propusieron la realimentación de estado del DVSC y su extensión de realimentación de salida para el seguimiento robusto de sistemas lineales multivariantes con incertidumbres sin precedentes aditivos.

1.5 Metodología

La metodología que se va a seguir como solución del problema planteado, se describirá como un conjunto de actividades que se deben llevar a cabo para el desarrollo del presente proyecto, éstas son:

Fase 1.

- Estudio del contexto del problema y familiarización con los términos, conceptos y métodos involucrados en la solución del proyecto.
- Estudio y análisis de los algoritmos auto-ajustables existentes en la literatura.
- Compresión de los algoritmos auto-ajustables por medio de simulación, usando ejemplos usados en la literatura existente.

Fase 2.

- Análisis y estudio de las posibles clases de estructuras de sistemas no lineales a utilizar en el proyecto.
- Escogencia de la clase de sistemas no lineales.
- Diseño de un algoritmo de control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada para la clase de sistemas no lineales previamente escogida.

Fase 3.

- Evaluación, mediante simulaciones digitales, del desempeño del algoritmo.
- El paquete computacional a usar para realizar las pruebas será Mathematica®, ya que puede hacer tanto cálculo simbólico como numérico, soportando fórmulas algebraicas y numéricas. Además, Mathematica® posee mayor precisión que otros paquetes computacionales usados para el cálculo numérico. El uso de este

paquete se debe además, a que en proyectos anteriores sobre este tema, se han probado algoritmos previamente diseñados por medio de este paquete computacional.

1.6 Resultados

Lograr definir la clase de sistemas no lineales, en la cual se pueda representar la estructura del modelo de motor de la Toyota Motor Corporation. Posteriormente diseñar un algoritmo de control auto-ajutable usando control de mínima varianza generalizada para la clase de sistemas no lineales. Soportar teóricamente el algoritmo diseñado demostrando la estabilidad global del sistema en lazo cerrado usando dicho algoritmo. Por medio de simulaciones validar el desempeño del algoritmo propuesto utilizando algunos ejemplos académicos.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 2

Bases teóricas de los algoritmos de control

2.1 Introducción

A continuación se presenta una breve revisión conceptual de los algoritmos de control auto-ajustables basados en el criterio de mínima varianza generalizada en tiempo discreto para sistemas SISO. En la sección 2.2 se muestra el algoritmo de mínima varianza (Patete, 2008), en la sección 2.3 el algoritmo de mínima varianza generalizada, tomado de Patete, (2008) y posteriormente en la sección 2.4 el algoritmo de control de mínima varianza generalizada basada en el concepto de control en modo deslizante (Patete, 2008). En la sección 2.5, se describe el algoritmo de control auto-ajustable para el caso de sistemas lineales representados por la relación de entrada-salida, con parámetros desconocidos (Patete, 2008). Este algoritmo de control auto-ajustable es la combinación del control de mínima varianza generalizada (basado en el concepto de control en modo deslizante en tiempo discreto) y la identificación de los parámetros de control de forma recursiva, donde los parámetros ajustados no necesariamente deben converger a los valores reales, y en las secciones 2.6 y 2.7 se presenta el controlador de mínima varianza generalizada (basado en el concepto de control en modo deslizante en tiempo discreto) y el algoritmo auto-ajustable, respectivamente, para una clase extendida de sistemas bilineales, tomada de Patete y col. (2010). El algoritmo de control auto-ajustable es la combinación del control de mínima varianza generalizada y la identificación de los parámetros

de control de forma recursiva, donde los parámetros no están asegurados a converger a los valores reales.

2.2 Control de mínima varianza

El criterio de mínima varianza para modelos de control auto-regresivos con media móvil (CARMA) se presenta como una introducción para un mayor entendimiento.

Considere el siguiente modelo nominal de un sistema SISO invariante en el tiempo,

$$A^0(z^{-1})y_k = z^{-d}B^0(z^{-1})u_k + D^0(z^{-1})\xi_k, \quad (2.1)$$

donde z denota el operador de desplazamiento, es decir, $z^{-t}y_k = y_{k-t}$. En la transformada de Laplace $z = e^{sT_0}$, donde T_0 es el período de muestreo (por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, se supone $T_0 = 1$). ξ_k representa la señal del ruido (o perturbación). En este modelo, ξ_k es una secuencia aleatoria independiente. El modelo (2.1) es conocido como CARMA. Los polinomios de $A^0(z^{-1})$, $B^0(z^{-1})$ y $D^0(z^{-1})$ se suponen conocidos, y se representan de la siguiente manera:

$$A^0(z^{-1}) = 1 + a_1^0 z^{-1} + a_2^0 z^{-2} + \dots + a_n^0 z^{-n},$$

$$B^0(z^{-1}) = b_0^0 + b_1^0 z^{-1} + b_2^0 z^{-2} + \dots + b_m^0 z^{-m}, \quad b_0^0 \neq 0,$$

$$D^0(z^{-1}) = 1 + d_1^0 z^{-1} + d_2^0 z^{-2} + \dots + d_l^0 z^{-l}.$$

Condiciones 2.2.1:

1. No hay factores comunes en $(A^0(z^{-1}); D^0(z^{-1}))$, o en $(A^0(z^{-1}); B^0(z^{-1}))$.
2. El tiempo de retraso d es conocido.
3. ξ_k es una variable aleatoria independiente con varianza σ .
4. $D^0(z^{-1})$ es Schur.

El objetivo es encontrar el control u_k que minimice la función objetivo representada por:

$$J_0 = E_\xi\{(y_{k+d} - r_{k+d})^2|_k\}, \quad (2.2)$$

donde E_ξ es el operador esperanza matemática con respecto al ruido ξ_k , la expresión $(y_{k+d} - r_{k+d})^2|_k$ indica la predicción del valor de $y - r$ en el instante $k + d$ hecha en base a la información disponible en el instante k , y r_k es la referencia dada.

Teniendo en cuenta la ecuación Diofantina (2.3),

$$D^0(z^{-1}) = A^0(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}), \quad (2.3)$$

donde el grado de $E(z^{-1})$ es $\deg\{E(z^{-1})\} = d - 1$ y el coeficiente principal es 1.

El sistema (2.1) puede ser reescrito como sigue: multiplicamos (2.1) por $E(z^{-1})$,

$$A^0(z^{-1})E(z^{-1})y_k = z^{-d}B^0(z^{-1})E(z^{-1})u_k + D^0(z^{-1})E(z^{-1})\xi_k. \quad (2.4)$$

Adelantamos d pasos la ecuación (2.4),

$$A^0(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d} = B^0(z^{-1})E(z^{-1})u_k + D^0(z^{-1})E(z^{-1})\xi_{k+d}. \quad (2.5)$$

Usando (2.3) sustituimos $A^0(z^{-1})E(z^{-1})$ en (2.5), obteniendo

$$D^0(z^{-1})y_{k+d} - F(z^{-1})y_k = B^0(z^{-1})E(z^{-1})u_k + D^0(z^{-1})E(z^{-1})\xi_{k+d}, \quad (2.6)$$

$$D^0(z^{-1})y_{k+d} - D^0(z^{-1})E(z^{-1})\xi_{k+d} = B^0(z^{-1})E(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k. \quad (2.7)$$

Definiendo,

$$y_{k+d|k}^* = y_{k+d} - E(z^{-1})\xi_{k+d}, \quad (2.8)$$

el predictor d paso por delante de y_k es,

$$D^0(z^{-1})y_{k+d|k}^* = B^0(z^{-1})E(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, $y_{k+d|k}^*$ puede utilizarse en lugar de y_{k+d} en la función objetivo (2.2).

Dado que sólo se necesita $y_{k+d|k}^*$, (2.9) se modifica:

$$y_{k+d|k}^* = B^0(z^{-1})E(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k + I'(z^{-1})y_{k+d-1|k-1}^*, \quad (2.10)$$

donde $I'(z^{-1})$ es un polinomio definido como:

$$I'(z^{-1}) = (1 - D^0(z^{-1}))z. \quad (2.11)$$

Sustituyendo $y_{k+d|k}^*$ por y_{k+d} en la función objetivo (2.2),

$$J_0 = E_\xi \left\{ (y_{k+d|k}^* - r_{k+d})^2 \Big|_k \right\}, \quad (2.12)$$

$$J_0 = E_\xi \left\{ (B^0(z^{-1})E(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k + I'(z^{-1})y_{k+d-1|k-1}^* - r_{k+d})^2 \Big|_k \right\}. \quad (2.13)$$

Minimizando (2.13) con respecto al valor actual de u_k

$$\frac{\partial J}{\partial u_k} = 2b_0^0 e_0 (B^0(z^{-1})E(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k + I'(z^{-1})y_{k+d-1|k-1}^* - r_{k+d}). \quad (2.14)$$

Así, la entrada de control para reducir al mínimo (2.14) está dada por

$$u_k = \frac{F(z^{-1})y_k + I'(z^{-1})y_{k+d-1|k-1}^* - r_{k+d}}{B^0(z^{-1})E(z^{-1})}. \quad (2.15)$$

Si el modelo del sistema es preciso, entonces la salida controlada seguirá la señal de referencia después del periodo del tiempo de retardo, el error será debido a la suma ponderada de ruido del sistema. El controlador proporciona una compensación de tiempo muerto y la respuesta es la mejor posible.

El controlador de mínima varianza logra su objetivo de funcionamiento mediante la cancelación de la dinámica del proceso. Por lo tanto, no se puede aplicar a sistemas de fase no mínima. Otra limitación es que se necesita un esfuerzo excesivo de la señal de control, que no se puede tolerar desde el punto de vista operativo. Estas deficiencias prácticas condujeron al desarrollo del controlador de mínima varianza generalizada.

2.3 Control de mínima varianza generalizada

Existen variaciones del control de mínima varianza que tratan el problema de inestabilidad en el sistema y además incorporan seguimiento de referencias y ponderación del esfuerzo de control (es decir, que además de perseguir el objetivo de minimizar las variaciones de la salida con respecto a la referencia se intenta hacer esto usando el menor esfuerzo de control posible).

El controlador de mínima varianza generalizada busca una señal de control u_k que minimice la función,

$$J_1 = E_{\xi} \{ (R(z^{-1})r_{k+d} - P(z^{-1})y_{k+d})^2 + (\bar{Q}(z^{-1})u_k)^2 \}_k. \quad (2.16)$$

Se debe observar que se ha colocado ponderación en la salida y en la señal de referencia, y también un término para penalizar el esfuerzo excesivo del control a través de la utilización de funciones de transferencia, respectivamente. $R(z^{-1})$, $P(z^{-1})$ y $\bar{Q}(z^{-1})$ son asumidos como funciones de transferencia con estructura generales, es decir,

$$P(z^{-1}) = \frac{P_n(z^{-1})}{P_d(z^{-1})}, \quad R(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}, \quad \bar{Q}(z^{-1}) = \frac{\bar{Q}_n(z^{-1})}{\bar{Q}_d(z^{-1})}.$$

Dado el mismo modelo que en (2.1), el problema es encontrar un predictor para sustituir el término desconocido

$$\varphi_{k+d} = P(z^{-1})y_{k+d}, \quad (2.17)$$

en la función objetivo (2.16).

Como los pesos de la función de transferencia están siendo utilizados, la correspondiente igualdad de separación está dada por:

$$P(z^{-1})D^0(z^{-1}) = A^0(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d} \frac{F(z^{-1})}{P_d(z^{-1})}, \quad (2.18)$$

donde $\deg\{E(z^{-1})\} = d - 1$ y el coeficiente principal de $E(z^{-1})$ es 1. Tenga en cuenta que, debido a la inclusión de $P(z^{-1})$ y $P_d(z^{-1})$, los polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$ en (2.18) son diferentes a los de (2.3).

Siguiendo el procedimiento utilizado para derivar el controlador de varianza mínima:

Multiplicando $E(z^{-1})$ en el modelo del sistema (2.1), (2.5) se obtiene, a continuación utilizando la igualdad (2.18),

$$P(z^{-1})D^0(z^{-1})y_{k+d} = \frac{F(z^{-1})}{P_d(z^{-1})}y_k + B^0(z^{-1})E(z^{-1})u_k + D^0(z^{-1})E(z^{-1})\xi_{k+d}. \quad (2.19)$$

Definiendo, $yf_k = \frac{y_k}{P_d(z^{-1})}$, $\bar{G}(z^{-1}) = B^0(z^{-1})E(z^{-1})$, y $I(z^{-1}) = (1 - D^0(z^{-1}))z$, entonces, usando (2.17) la ecuación (2.19) se puede reescribir como:

$$D^0(z^{-1})\psi_{k+d} = F(z^{-1})yf_k + \bar{G}(z^{-1})u_k + D^0(z^{-1})E(z^{-1})\xi_{k+d}, \quad (2.20)$$

añadiendo el término ψ_{k+d} en ambos lados,

$$D^0(z^{-1})\psi_{k+d} + \psi_{k+d} = F(z^{-1})yf_k + \bar{G}(z^{-1})u_k + \psi_{k+d} + D^0(z^{-1})E(z^{-1})\xi_{k+d}, \quad (2.21)$$

$$\psi_{k+d} = F(z^{-1})yf_k + \bar{G}(z^{-1})u_k + \psi_{k+d} - D^0(z^{-1})\psi_{k+d} + D^0(z^{-1})E(z^{-1})\xi_{k+d}, \quad (2.22)$$

$$\psi_{k+d} = F(z^{-1})yf_k + \bar{G}(z^{-1})u_k + (1 - D^0(z^{-1}))z\psi_{k+d-1|k-1} + D^0(z^{-1})E(z^{-1})\xi_{k+d}. \quad (2.23)$$

Definiendo el predictor como

$$\psi_{k+d|k}^* = \psi_{k+d} - E(z^{-1})\xi_{k+d}, \quad (2.24)$$

entonces,

$$\psi_{k+d|k}^* = F(z^{-1})yf_k + \bar{G}(z^{-1})u_k + I(z^{-1})\psi_{k+d-1|k-1}^*. \quad (2.25)$$

Usando el predictor (2.25) en (2.16) y minimizando con respecto a la corriente de entrada u_k , entonces

$$\frac{\partial J}{\partial u_k} = 2\bar{g}_0(R(z^{-1})r_{k+d} - F(z^{-1})yf_k - \bar{G}(z^{-1})u_k - I(z^{-1})\psi_{k+d-1|k-1}^*) + 2\bar{q}_0\bar{Q}(z^{-1})u_k = 0. \quad (2.26)$$

La ecuación (2.26) se reescribe como

$$\psi_{k+d|k}^* - R(z^{-1})r_{k+d} + \bar{Q}(z^{-1})u_k = 0, \quad (2.27)$$

donde (2.25) fue utilizada, y

$$\bar{Q}(z^{-1}) = \frac{\bar{q}_0 \bar{Q}(z^{-1})}{\bar{g}_0}.$$

Como los parámetros de la planta son conocidos, entonces la señal de control se calcula utilizando (2.25) y (2.27) de la siguiente forma:

$$u_k = \frac{R(z^{-1})r_{k+d} - \sum_{i=1}^{n_{\bar{G}}} \bar{g}_i u_{k-i} - F(z^{-1})y_{k-1}(z^{-1})\psi_{k+d-1|k-1}^*}{\bar{g}_0 + \bar{Q}(z^{-1})}. \quad (2.28)$$

Los algoritmos de control de mínima varianza y mínima varianza generalizada fueron uno de los primeros algoritmos de control diseñados específicamente para aplicaciones de control auto-ajustable, y ahora se consideran formulaciones clásicas.

2.4 Control de mínima varianza basado en el concepto de control de modo deslizante para sistemas lineales

El criterio de mínima varianza generalizada está modificado en la forma de control en modo deslizante (SMC) en tiempo discreto, donde s_k es la variable de modo deslizante a ser controlada. Al tener en cuenta este enfoque, la ley de control de mínima varianza generalizada se hace más sencilla y el análisis de estabilidad se puede hacer similar a la de los sistemas de control en modo deslizante de tiempo discreto. Para una mejor comprensión de la teoría de control en modo deslizante de tiempo discreto, el lector puede consultar la bibliografía de Furuta (1990), Furuta (1993.a), Furuta (1993.b), Misawa (1997) y Mitic y Vukovic (2004).

Considere el modelo nominal del sistema SISO invariante en el tiempo, con entrada u_k y salida y_k :

$$A^0(z^{-1})y_k = z^{-d}B^0(z^{-1})u_k, \quad (2.29)$$

donde se asume lo siguiente:

Condiciones 2.4.1:

1. Los polinomios $A^0(z^{-1})$ y $B^0(z^{-1})$ no tienen factores comunes.
2. El tiempo de retardo d se conoce.
3. T_0 es el período de muestreo (por simplicidad, y sin pérdida de generalidad se supone $T_0 = 1$).

Los polinomios $A^0(z^{-1})$ y $B^0(z^{-1})$ se asumen conocidos, y se representan como:

$$A^0(z^{-1}) = 1 + a_1^0 z^{-1} + a_2^0 z^{-2} + \dots + a_n^0 z^{-n},$$

$$B^0(z^{-1}) = b_0^0 + b_1^0 z^{-1} + b_2^0 z^{-2} + \dots + b_m^0 z^{-m}, \quad b_0^0 \neq 0.$$

El objetivo del control es reducir al mínimo la varianza de las variables controladas s_{k+d} , que se define en el caso determinista como:

$$s_{k+d} = C(z^{-1})(y_{k+d} - r_{k+d}) + Q(z^{-1})u_k. \quad (2.30)$$

Los polinomios

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}, \quad (2.31)$$

y

$$Q(z^{-1}) = q_0(1 - z^{-1}), \quad (2.32)$$

han de ser diseñados, r_k es la señal de referencia, y la señal de error e_k se define como:

$$e_k = y_k - r_k. \quad (2.33)$$

El polinomio $C(z^{-1})$ es Schur, por lo tanto, la señal de error se desvanecerá si (2.30) se mantiene en cero para una entrada constante. El polinomio $C(z^{-1})$ se puede determinar mediante la asignación de todas las raíces características dentro del círculo unitario del plano z . La idea proviene del control en modo deslizante en tiempo discreto expuesta por Furuta (1993.a)

La ecuación (2.30) se reescribe como:

$$s_{k+d} = G(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d}, \quad (2.34)$$

donde el polinomio $G(z^{-1})$ se define como:

$$G(z^{-1}) = E(z^{-1})B^0(z^{-1}) + Q(z^{-1}), \quad (2.35)$$

y polinomios $E(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$ satisfacen la igualdad,

$$C(z^{-1}) = A^0(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}). \quad (2.36)$$

A continuación, la entrada del control de mínima varianza generalizada necesaria para anular s_{k+d} en (2.30) está dado por:

$$u_k = -G(z^{-1})^{-1}[F(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d}], \quad (2.37)$$

donde los polinomios $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ se eligen para hacer que el sistema de control satisfaga el siguiente lema.

Lema 2.4.1: La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea estable en lazo cerrado bajo la entrada de control, haciendo $s_{k+d} = 0$, consiste en que todas las raíces del polinomio característico

$$T^0(z^{-1}) = A^0(z^{-1})Q(z^{-1}) + B^0(z^{-1})C(z^{-1}), \quad (2.38)$$

pertenezcan al círculo unitario abierto, y los polinomios $(Q(z^{-1}); C(z^{-1}))$, $(A^0(z^{-1}); C(z^{-1}))$, y $(B^0(z^{-1}); Q(z^{-1}))$ no tengan ceros comunes fuera del círculo unitario.

2.5 Control auto-ajutable basado en el criterio de mínima varianza generalizada para sistemas lineales

En la sección anterior se describió el control de mínima varianza generalizada basada en el concepto de control de modo deslizante para el caso en el que todos los parámetros de la planta son conocidos. Sin embargo, en general, los parámetros de la planta no se conocen con precisión y la identificación de los parámetros debe ser realizada.

Considere la planta con incertidumbres paramétricas representada de la siguiente manera:

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k, \quad (2.39)$$

con los polinomios $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$ definidos como:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n},$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}, \quad b_0 \neq 0,$$

donde $a_i \in [\underline{a}_i \ \bar{a}_i]$ y $b_j \in [\underline{b}_j \ \bar{b}_j]$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$, respectivamente.

Se asume que los parámetros del modelo son desconocidos, sin embargo los límites inferiores y superiores para cada parámetro de la planta se conocen y, la estructura del modelo (orden del modelo) también. Más específicamente, las siguientes condiciones se deben cumplir.

Condiciones 2.5.1:

1. n y m son conocidos.
2. El tiempo de retardo d es conocido.
3. Los límites inferior y superior $(\underline{a}_i \ \bar{a}_i \ \underline{b}_j \ \bar{b}_j, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \text{ y } j = 0, 1, \dots, m)$ de los parámetros de la planta (2.39) son conocidos.

Por lo tanto, los parámetros nominales de la planta (2.29) se obtienen a partir de (2.39) como sigue:

$$a_i^0 = \frac{a_i + \bar{a}_i}{2}, \quad (2.40)$$

$$b_j^0 = \frac{b_j + \bar{b}_j}{2}, \quad (2.41)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$.

Definiendo $q = z^{-1} = e^{-jw}$, que mapea la zona estable dentro del círculo unitario en el exterior del plano z , entonces $G_d(z^{-1})$ es definido como:

$$G_d(q) = G_d^0(q) + \gamma\rho G_d(q), \quad (2.42)$$

donde γ es una constante positiva que representa el margen de perturbación y $\rho G_d(q) \in \Omega$ da un conjunto de perturbaciones admisibles definidos como $\beta(w) = \text{set}\{\gamma\rho G_d(e^{-jw}) | 0 \leq w < 2\pi\}$.

Para el análisis de estabilidad robusta, se puede usar el método de Tsypkin y Furuta para la planta en tiempo discreto en lazo cerrado, que implica el uso del criterio del lugar de las raíces modificado, Gawthrop (1980).

Criterio 2.5.1 (Tsypkin y Furuta).

Para la estabilidad robusta de plantas paramétricas en lazo cerrado en tiempo discreto, es suficiente que

$$\bar{G}_d(e^{-jw}) = \frac{G_d^0(e^{-jw})}{|Q(e^{-jw})| \sum_{i=1}^n \alpha_i + |C(e^{-jw})| \sum_{j=1}^m \eta_j}, \quad (2.43)$$

no encierra y no se intercepta el círculo crítico σ de radio γ y centrado en el origen, es decir, $\sigma(\gamma, 0)$ cuando w se mueve desde 0 a 2π . α_i y η_j son el rango de perturbaciones paramétricas, que se define como

$$\alpha_i = \frac{\bar{a}_i - a_i}{2\gamma}, \quad (2.44)$$

$$\eta_j = \frac{\bar{b}_j - b_j}{2\gamma}. \quad (2.45)$$

Condiciones 2.5.2:

1. La señal de referencia r_k es acotada, es decir, $|r_k| < m_r$ para todo k , donde m_r es una constante positiva.
2. El polinomio $C(z^{-1})$ es Schur.
3. Se deben cumplir las condiciones 2.5.1.
4. Los polinomios $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ satisfacen la condición de estabilidad robusta dada en el Criterio 2.5.1, es decir, la clase de sistema considerada $G_d = A(z^{-1})Q(z^{-1}) + B(z^{-1})C(z^{-1})$ es Schur.

Cuando los parámetros de la planta no se conocen con precisión, los polinomios del controlador $G(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$ pueden ser estimados, lo que se conoce como algoritmo autoajustable implícito, es decir,

$$\begin{aligned}\hat{F}(z^{-1}) &= \hat{f}_0 + \hat{f}_1 z^{-1} + \dots + \hat{f}_{n-1} z^{-n+1}, \\ \hat{G}(z^{-1}) &= \hat{g}_0 + \hat{g}_1 z^{-1} + \dots + \hat{g}_{m+d-1} z^{-(m+d-1)}.\end{aligned}$$

Sea,

$$\phi_k^T = [y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n+1}, u_k, \dots, u_{k-m-d+1}], \quad (2.46)$$

el vector que contiene los datos de salida y de la señal de control,

$$\theta^T = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, g_0, g_1, \dots, g_{m+d-1}], \quad (2.47)$$

el vector que contiene los parámetros del controlador, y

$$\hat{\theta}_k^T = [\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}, \hat{g}_0, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{m+d-1}], \quad (2.48)$$

la estimación de θ .

Así, el controlador utiliza los parámetros identificados como sigue:

$$u_k = -\hat{G}(z^{-1})^{-1}[\hat{F}(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d}], \quad (2.49)$$

donde las estimaciones de los parámetros de control están dadas por,

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}}{1+\phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}} [s_k + C(z^{-1})r_k - \phi_{k-d}^T\hat{\theta}_{k-1}], \quad (2.50)$$

y, Γ_k es una matriz definida positiva actualizada por

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}}{1+\phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}}. \quad (2.51)$$

La estabilidad global del sistema en lazo cerrado se da al asegurar que para todo sistema la señal de entrada u_k , salida y_k y error e_k están acotados cuando la referencia r_k es acotada. Cuando la referencia es o se hace constante, la salida y_k sigue la referencia r_k y el error e_k tiende a cero.

Teorema 2.5.1.

Dada una matriz definida positiva Γ_0 y el vector de parámetros inicial $\hat{\theta}_0$, donde $\hat{\theta}_0$ puede ser inicializado por los parámetros del controlador nominal calculados con $G(z^{-1})$ y $F(z^{-1})$, la estimación $\hat{\theta}_k$ del controlador (2.49) satisface las ecuaciones recursivas (2.50) y (2.51) bajo las condiciones 2.5.1 y 2.5.2, por lo que el controlador auto-ajutable combinando (2.49) - (2.51) para la planta (2.39) proporciona la estabilidad global del sistema en lazo cerrado al asegurar que para todo k , las señales del sistema se muestran acotadas, es decir, $|u_k| < m_u$, $|y_k| < m_y$ y $|e_k| < m_e$ para una referencia acotada $|r_k| < m_r$, donde m_u , m_y , m_e y m_r son constantes positivas; para una referencia constante, es decir $r_k = r_0$, donde r_0 es una constante, el $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_k - r_k) = 0$ lo que implica que el $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$.

Demostración:

s_{k+d} se escribe como

$$s_{k+d} = \hat{G}(z^{-1})u_k + \hat{F}(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d} + \phi_k^T \tilde{\theta}_{k+d}, \quad (2.52)$$

donde $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$. Usando la ley de control (2.49), (2.52) se reescribe como:

$$s_{k+d} = \phi_k^T \tilde{\theta}_{k+d}. \quad (2.53)$$

Considere la función de Lyapunov candidata:

$$V_k = \frac{1}{2} s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k, \quad (2.54)$$

que es definida positiva sobre s_k y el parámetro $\tilde{\theta}_k$. La diferencia de tiempo de (2.54) es:

$$\Delta V_k = V_k - V_{k-1}, \quad (2.55)$$

$$\Delta V_k = \frac{1}{2} s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k - \frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}, \quad (2.56)$$

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + \frac{1}{2} s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} + \Gamma_{k-1}^{-1}) \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}, \quad (2.57)$$

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + s_k^2 - \frac{1}{2} s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} + \Gamma_{k-1}^{-1}) \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} - \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}. \quad (2.58)$$

De (2.53), s_k^2 es:

$$s_k^2 = \tilde{\theta}_k^T \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k, \quad (2.59)$$

sustituyendo (2.59) en (2.58), se obtiene la siguiente relación:

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k). \quad (2.60)$$

Por el lema de la matriz inversa de Åström y Wittenmark (1989), la ecuación recursiva dada (2.51) se reescribe como,

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} (\Gamma_{k-1}^{-1} + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d})^{-1}, \quad (2.61)$$

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} (I + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d})^{-1} \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1}, \quad (2.62)$$

$$\Gamma_k = (\Gamma_{k-1}^{-1} + \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T)^{-1}, \quad (2.63)$$

la inversa, de la relación anterior (2.63) produce:

$$\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T = 0, \quad (2.64)$$

lo que implica que el tercer término del lado derecho de (2.60) se anule.

A partir de (2.34), s_k se puede escribir como,

$$s_k = \phi_{k-d}^T \theta - C(z^{-1}) r_k, \quad (2.65)$$

a continuación, utilizando la ley adaptativa recursiva (2.49), la siguiente ecuación se obtiene,

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} (I + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d})^{-1} \phi_{k-d}^T (\theta - \hat{\theta}_{k-1}), \quad (2.66)$$

$$\tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} (I + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d})^{-1} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_{k-1}, \quad (2.67)$$

como la siguiente relación se cumple,

$$\Gamma_{k-1} \phi_{k-d} (I + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d})^{-1} = (I + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d})^{-1} \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}, \quad (2.68)$$

por lo tanto (2.68) se sustituye en (2.67), obtenemos

$$(I + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}) \tilde{\theta}_k = (I + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d})^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} - \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_{k-1}, \quad (2.69)$$

además (2.69) se puede escribir como:

$$\tilde{\theta}_k + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_{k-1} = \tilde{\theta}_{k-1}, \quad (2.70)$$

$$\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_{k-1} = 0, \quad (2.71)$$

lo que hace que el cuarto término de la derecha de (2.60) desaparece.

Por lo tanto, el uso de las ecuaciones recursivas (2.49) y (2.51) en (2.60) para V_0 positiva y acotada, ΔV_k se demuestra que es semidefinida negativa, es decir, $\Delta V_k \leq 0$ de la siguiente manera:

Usando las ecuaciones recursivas (2.49) y (2.51) en (2.60) para $k = 1$ se obtiene la siguiente relación:

$$V_1 - V_0 = -\frac{1}{2} s_0^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0)^T \Gamma_0^{-1} (\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0). \quad (2.72)$$

Inicialmente $\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0 \neq 0$, entonces $V_1 - V_0 < 0$ lo que implica que $V_1 < V_0$. Para $k = 2$:

$$V_2 + \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)^T \Gamma_1^{-1} (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) = V_1 < V_0. \quad (2.73)$$

Para $k = 3$:

$$V_3 + \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)^T \Gamma_2^{-1} (\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2) = V_2, \quad (2.74)$$

usando (2.72) y (2.73)

$$V_3 + \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)^T \Gamma_2^{-1} (\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2) + \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)^T \Gamma_1^{-1} (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) = V_1 < V_0. \quad (2.75)$$

Entonces para $k = N$, se deriva la siguiente relación,

$$V_N + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \left(s_{k-1}^2 + (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) \right) = V_1 < V_0 < \infty. \quad (2.76)$$

La ecuación (2.76) implica que s_N y $\tilde{\theta}_N - \tilde{\theta}_{N-1}$ desaparecen cuando N tiende a infinito, ΔV_k es semidefinida negativa para todo k y la varianza mínima generalizada se reduce al mínimo, lo que demuestra la estabilidad global de todo el sistema en lazo cerrado.

Dado que el polinomio $Q(z^{-1})$ está diseñado para satisfacer (2.43), para una referencia r_k acotada, la entrada u_k , la salida y_k y error e_k son acotados, esto es debido a la multiplicación de (2.30) por $A(z^{-1})$ y usando (2.39) se obtiene la siguiente ecuación para la señal de control:

$$u_k = \frac{A(z^{-1})}{A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})} s_{k+d} + \frac{A(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})} r_{k+d}. \quad (2.77)$$

Cuando k tiende a infinito, s_{k+d} se desvanece como se muestra en (2.76). Debido a que (2.43) está diseñado robustamente estable entonces para una referencia acotada r_k , u_k se prueba que es acotada para todo k . Esto es, $s_{k+d} \rightarrow 0$ cuando k se acerca al infinito, entonces (2.77) se convierte en

$$u_k = \frac{A(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})} r_{k+d}. \quad (2.78)$$

De (2.43) $A(z^{-1})Q(z^{-1}) + C(z^{-1})B(z^{-1})$ es robustamente estable, entonces como r_k es acotada, u_k está acotada para todo k . Como la superficie deslizante se anula, ésta se puede escribir como en (2.79) y despejando y_{k+d} se obtiene (2.80):

$$C(z^{-1})(y_{k+d} - r_{k+d}) + Q(z^{-1})u_k = 0, \quad (2.79)$$

$$y_{k+d} = \frac{1}{C(z^{-1})} r_{k+d} - \frac{Q(z^{-1})}{C(z^{-1})} u_k. \quad (2.80)$$

Como se demostró que u_k es acotada y r_k también es acotado, entonces de (2.80) y_k es acotada para todo k , además de (2.33) e_k es acotada para todo k . Y la estabilidad global del sistema en lazo cerrado está asegurada.

Especialmente cuando la señal de referencia es o se vuelve constante $r_k = r_0$, entonces s_k se aproxima a cero cuando k tiende a infinito, de (2.77) la señal de control u_k tiende a ser constante, es decir, $u_k = u_{k-1}$. Esto implica que:

$$Q(z^{-1})u_k = 0. \quad (2.81)$$

Entonces, a partir de (2.30), la señal de salida y_k se acerca a r_0 , además, la señal de error e_k se aproxima a cero. Esto es,

$$C(z^{-1})(y_{k+d} - r_{k+d}), \quad (2.82)$$

$$y_{k+d} = r_{k+d} = r_0. \quad (2.83)$$

Y la convergencia de la señal de salida y_k está asegurada a la señal de referencia constante r_0 .

□

Observaciones 2.5.1:

1. $\hat{\theta}_k$ no converge a θ , ya que $\Delta V_k \leq 0$ para todo k . Cada elemento de $\hat{\theta}_k$ tiende a valores constantes.

2. El rendimiento del sistema en lazo cerrado depende del diseño de los polinomios $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ lo que lleva a un compromiso entre ellos.

2.6 Control de mínima varianza basado en el concepto de control de modo deslizante para una clase extendida de sistemas bilineales

Los sistemas bilineales son una clase especial de sistemas no lineales que son lineales en la entrada y lineal en el estado, pero no lineal en forma conjunta tanto del estado como de la entrada. Específicamente, un sistema bilineal invariante en el tiempo de una sola entrada y una sola salida (SISO) en tiempo discreto es de la siguiente manera:

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + z^{-d}M(z^{-1})y_k u_k, \quad (2.84)$$

donde:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n},$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m},$$

$$M(z^{-1}) = m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots + m_\zeta z^{-\zeta}, \quad m_0 \neq 0.$$

Se asume que no hay factores comunes en $(A(z^{-1}), M(z^{-1}))$, o en $(A(z^{-1}), B(z^{-1}))$ y el tiempo de retardo d es conocido. z denota el operador de desplazamiento de tiempo $z^{-t}y_k = y_{k-t}$. La transformada de Laplace, $z = e^{T_0}$ donde T_0 es el periodo de muestreo (por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, se asume $T_0 = 1$ para la derivación de las ecuaciones matemáticas). Para obtener la ley de control nominal los polinomios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ y $M(z^{-1})$ se suponen conocidos.

Observación 2.6.1:

La clase extendida de sistemas bilineales considerada es la clase de sistemas en tiempo discreto que puede ser descrita por (2.84), con polinomio $A(z^{-1}) \neq 0$, $d > 0$, $M(z^{-1}) \neq 0$, y la bilinealidad se considera sólo entre la salida (estado medido) y la variable de entrada. El polinomio $B(z^{-1})$ podría ser igual a cero en esta estructura, lo que da una estructura más relajada que la presentada en Patete (2008.c) y Patete (2010).

Se propuso un algoritmo en Patete (2008.c) y Patete (2010) que asegura la estabilidad global del sistema en lazo cerrado y seguimiento de la referencia para el sistema nominal descrito en (2.84), si y sólo si el polinomio $B(z^{-1})$ es distinto de cero, es decir, $B(z^{-1}) \neq 0$. Esta es una condición fuerte en la estructura del sistema bilineal. Un nuevo algoritmo (donde $B(z^{-1})$ no necesariamente debe ser distinto de cero) se considera probado en Patete y col. (2010) y Patete y col. (en vías de publicación), y se presenta a continuación.

El objetivo de control es reducir al mínimo la varianza del controlador lineal de la variable en modo deslizante s_{k+d} , definida como:

$$s_{k+d} = C(z^{-1})(y_{k+d} - r_{k+d}) + Q(z^{-1})u_k, \quad (2.85)$$

Los polinomios:

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}, \quad (2.86)$$

$$Q(z^{-1}) = q_0(1 - z^{-1}), \quad (2.87)$$

han de ser diseñados. La señal de error e_k está definida como: $e_k = y_k - r_k$, donde r_k es la señal de referencia. La idea se basa en el control en modo deslizante en tiempo discreto. El polinomio $C(z^{-1})$ se elige de Schur, y está diseñado mediante la asignación de todas las raíces características dentro del círculo unitario del plano z .

Para deducir la ley de control nominal, (2.84) se multiplica por $E(z^{-1})$, entonces:

$$E(z^{-1})A(z^{-1})y_k = z^{-d}E(z^{-1})B(z^{-1})u_k + z^{-d}E(z^{-1})M(z^{-1})y_k u_k. \quad (2.88)$$

Usando la ecuación Diofantina

$$C(z^{-1}) = E(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}), \quad (2.89)$$

donde:

$$E(z^{-1}) = e_0 + e_1z^{-1} + e_2z^{-2} + \dots + e_{d-1}z^{-d+1},$$

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + \dots + f_{n-1}z^{-n+1}.$$

La ecuación (2.88) es reescrita como:

$$C(z^{-1})y_k - z^{-d}F(z^{-1})y_k = z^{-d}E(z^{-1})B(z^{-1})u_k + z^{-d}E(z^{-1})M(z^{-1})y_k u_k, \quad (2.90)$$

$$C(z^{-1})y_{k+d} = F(z^{-1})y_k + E(z^{-1})B(z^{-1})u_k + E(z^{-1})M(z^{-1})y_k u_k. \quad (2.91)$$

Combinando (2.91) y (2.85), la variable s_{k+d} es:

$$s_{k+d} = G(z^{-1})u_k + F(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d} + H(z^{-1})y_k u_k, \quad (2.92)$$

donde:

$$G(z^{-1}) = E(z^{-1})B(z^{-1}),$$

$$H(z^{-1}) = E(z^{-1})M(z^{-1}).$$

Entonces, la entrada del control de mínima varianza generalizada requerida para desvanecer s_{k+d} en (2.85) está dada por:

$$u_k = \frac{F(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d}}{G(z^{-1}) + H(z^{-1})y_k}. \quad (2.93)$$

Observación 2.6.2:

Tenga en cuenta que en este algoritmo, la superficie en modo deslizante propuesta es lineal y produce una ley de control no lineal, que es un algoritmo diferente al propuesto en Patete (2008.c) y Patete (2010), donde la ecuación de la superficie deslizante, s_{k+d} , es no lineal y la ley de control resultante, u_k , es lineal.

Observación 2.6.3:

El polinomio $Q(z^{-1})$ debe ser diseñado como en (2.87) para el seguimiento de la referencia, Patete (2008.a).

El hecho de que el polinomio $B(z^{-1})$ puede ser igual a cero amplía la clase de sistemas bilineales a considerar. Varios sistemas pueden ser modelados por una ecuación bilineal donde la variable de control sólo aparece en el término bilineal.

2.7 Control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada para una clase extendida de sistemas bilineales

En general, en la práctica, los parámetros del sistema no se conocen con precisión y la identificación de éstos se debe realizar. En esta sección, el sistema (2.84) se considera como un sistema con incertidumbres paramétricas, esto es $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$, para $i = 1, 2, \dots, n$, $b_j \in [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$, para $j = 1, 2, \dots, m$, y $m_l \in [\underline{m}_l, \bar{m}_l]$, para $l = 1, 2, \dots, \zeta$, donde \underline{a}_i es el límite inferior del parámetro a_i y \bar{a}_i su límite superior. Analogías ocurren con b_j y m_l . El controlador nominal es entonces diseñado para el sistema nominal bilineal, donde los parámetros se calculan como sigue:

$$a_i = \frac{a_i + \bar{a}_i}{2}, b_j = \frac{b_j + \bar{b}_j}{2}, m_l = \frac{m_l + \bar{m}_l}{2}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m, l = 1, 2, \dots, \zeta.$$

La estabilidad global en lazo cerrado del sistema usando el control auto-ajustable basado en el criterio de mínima varianza generalizada para sistemas lineales SISO se demostró en la sección 2.5, cuando los parámetros del sistema no se conocen con precisión por estimación

recursiva de los parámetros del controlador $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$, es decir, $\hat{F}(z^{-1})$ y $\hat{G}(z^{-1})$ son estimaciones de $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$.

Condiciones 2.7.1:

1. El orden del sistema (2.84) es conocido.
2. El tiempo de retardo d se conoce.
3. El polinomio $C(z^{-1})$ es Schur.
4. El sistema (2.84) considerado con incertidumbres paramétricas está en la clase de sistemas que pueden ser estabilizados por los polinomios $Q(z^{-1})$ y $C(z^{-1})$ diseñado para el modelo nominal del sistema.
5. La señal de referencia r_k está limitada, es decir, $|r_k| < \delta$ para todo k , donde δ es una constante positiva.

En esta sección, la estabilidad global del sistema en lazo cerrado usando el control autoajutable para la clase extendida de sistemas bilineales (2.84), basada en el criterio de mínima varianza generalizada, bajo las condiciones 2.7.1, está dada por las ecuaciones de estimación recursiva (2.94) y (2.95):

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}}{1+\phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}} [s_k + C(z^{-1})r_k - \phi_{k-d}^T\hat{\theta}_{k-1}], \quad (2.94)$$

y

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}}{1+\phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}}, \quad (2.95)$$

donde:

$$\phi_k^T = [y_k, \dots, y_{k-n+1}, u_k, \dots, u_{k-m-d+1}, y_k u_k, \dots, y_{k-\zeta(d-1)} u_{k-\zeta(d-1)}], \quad (2.96)$$

es el vector que contiene los datos de salida y de la señal de control,

$$\theta^T = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, g_0, g_1, \dots, g_{m+d-1}, h_0, h_1, \dots, h_{\zeta(d-1)}], \quad (2.97)$$

el vector que contiene los parámetros del controlador, y

$$\hat{\theta}_k^T = [\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}, \hat{g}_0, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{m+d-1}, \hat{h}_0, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_{\zeta(d-1)}], \quad (2.98)$$

la estimación de θ .

Así, el controlador utiliza los parámetros identificados como sigue:

$$u_k = \frac{\hat{F}(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d}}{\hat{G}(z^{-1}) + \hat{H}(z^{-1})y_k}, \quad (2.99)$$

donde $F(z^{-1})$, $G(z^{-1})$ y $H(z^{-1})$ son las estimaciones iniciales de $\hat{F}(z^{-1})$, $\hat{G}(z^{-1})$ y $\hat{H}(z^{-1})$, respectivamente.

Teorema 2.7.1: Dada una matriz definida positiva T_0 y el vector de parámetros iniciales $\hat{\theta}_0$, si la estimación $\hat{\theta}_k$ del controlador (2.99) satisface las ecuaciones recursivas (2.94) y (2.95), bajo el conjunto de condiciones 2.7.1, entonces la combinación de las ecuaciones (2.99), (2.94) y (2.95) del controlador auto-ajustable para el sistema bilineal (2.84) con incertidumbres paramétricas garantiza la estabilidad global del sistema en lazo cerrado.

Demostración: s_{k+d} se escribe como

$$s_{k+d} = \hat{G}(z^{-1})u_k + \hat{F}(z^{-1})y_k - C(z^{-1})r_{k+d} + \phi_k^T \tilde{\theta}_{k+d}, \quad (2.100)$$

donde $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$. Usando la ley de control (2.99), (2.100) se reescribe como:

$$s_{k+d} = \phi_k^T \tilde{\theta}_{k+d}. \quad (2.101)$$

Considere la función de Lyapunov candidata:

$$V_k = \frac{1}{2} s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k, \quad (2.102)$$

que es definida positiva sobre s_k y el parámetro $\tilde{\theta}_k$. La diferencia de tiempo de (2.102) es:

$$\Delta V_k = V_k - V_{k-1}, \quad (2.103)$$

$$\Delta V_k = \frac{1}{2} s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k - \frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}, \quad (2.104)$$

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} s_{k-1}^2 + \frac{1}{2} s_k^2 - \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} + \Gamma_{k-1}^{-1}) \tilde{\theta}_k, \quad (2.105)$$

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} s_k^2 - \frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1}) \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_k. \quad (2.106)$$

De (2.101), s_k^2 es:

$$s_k^2 = \tilde{\theta}_k^T \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k, \quad (2.107)$$

sustituyendo (2.107) en (2.106), se obtiene la siguiente relación:

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k). \quad (2.108)$$

El término $\frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_k$ en la ecuación (2.108) se puede hacer igual a cero de la siguiente manera:

$$\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T = 0, \quad (2.109)$$

$$\Gamma_k = (\Gamma_{k-1}^{-1} + \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T)^{-1}, \quad (2.110)$$

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} (\Gamma_{k-1} + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d})^{-1}, \quad (2.111)$$

y esto produce (2.95) por el lema de la matriz invertida, Åström y Wittenmark (1989).

El término $\tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k)$ en (2.108) también se puede hacer igual a cero como se muestra a continuación:

$$\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k = 0, \quad (2.112)$$

$$\tilde{\theta}_k + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}_{k-1}, \quad (2.113)$$

$$(I + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_k = (I + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_{k-1} - \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_{k-1}. \quad (2.114)$$

Como $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$, la ecuación (2.114) se reescribe de la siguiente manera:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T (\theta - \hat{\theta}_{k-1})}{(I + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T)}. \quad (2.115)$$

De (2.92)

$$s_k = \phi_{k-d}^T \theta - C(z^{-1}) r_k, \quad (2.116)$$

por lo tanto (2.94) se obtiene.

Usando las ecuaciones recursivas (2.94) y (2.95) en (2.108) para $k = 1$ se obtiene la siguiente relación:

$$V_1 - V_0 = -\frac{1}{2} s_0^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0)^T \Gamma_0^{-1} (\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0), \quad (2.117)$$

Inicialmente $\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0 \neq 0$, entonces $V_1 - V_0 < 0$ lo que implica que $V_1 < V_0$. Para $k = 2$ se tiene:

$$V_2 + \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)^T \Gamma_1^{-1} (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) = V_1 < V_0. \quad (2.118)$$

Para $k = 3$:

$$V_3 + \frac{1}{2}s_2^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)^T \Gamma_2^{-1}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2) = V_2, \quad (2.119)$$

usando (2.117) y (2.118) se obtiene:

$$\begin{aligned} V_3 + \frac{1}{2}s_2^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)^T \Gamma_2^{-1}(\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2) + \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)^T \Gamma_1^{-1}(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) \\ = V_1 < V_0. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Entonces para $k = N$, donde N es grande, se obtiene la siguiente relación,

$$V_N + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^N \left(s_{k-1}^2 + (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) \right) = V_1 < V_0 < \infty. \quad (2.121)$$

La ecuación (2.121) implica que s_N y $\tilde{\theta}_N - \tilde{\theta}_{N-1}$ desaparecen cuando N tiende a infinito, entonces ΔV_k es semidefinida negativa para todo k y el control de mínima varianza generalizada se reduce al mínimo, lo que demuestra la estabilidad global de todo el sistema en lazo cerrado.

Como resultado de la prueba anterior, ϕ_k^T es acotada. Esto significa que:

$$y_k < \infty, y_{k-1} < \infty, \dots, y_{k-n+1} < \infty,$$

$$u_k < \infty, u_{k-1} < \infty, \dots, u_{k-m+d+1} < \infty,$$

$$y_k u_k < \infty, y_{k-1} u_{k-1} < \infty, \dots, y_{k-\zeta(d-1)} u_{k-\zeta(d-1)} < \infty,$$

están acotadas para todo k . Además, cuando $k \rightarrow \infty$, $s_k \rightarrow 0$ y $(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) \rightarrow 0$, lo que significa que $\hat{\theta}_k$ tiende a un valor constante.

La señal y_k está acotada como se muestra a continuación:

Multiplicando (2.84) por $B(z^{-1})$:

$$B(z^{-1})s_{k+d} = B(z^{-1})C(z^{-1})y_{k+d} - B(z^{-1})C(z^{-1})r_{k+d} + B(z^{-1})Q(z^{-1})u_k, \quad (2.122)$$

$$B(z^{-1})s_k = B(z^{-1})C(z^{-1})y_k - B(z^{-1})C(z^{-1})r_k + z^{-d}B(z^{-1})Q(z^{-1})u_k, \quad (2.123)$$

y usando (2.84):

$$B(z^{-1})s_k = B(z^{-1})C(z^{-1})y_k - B(z^{-1})C(z^{-1})r_k + A(z^{-1})Q(z^{-1})y_k - z^{-d}Q(z^{-1})M(z^{-1})y_k u_k, \quad (2.124)$$

$$y_k = \frac{B(z^{-1})}{T(z^{-1})} s_k + \frac{B(z^{-1})C(z^{-1})}{T(z^{-1})} r_k + \frac{Q(z^{-1})M(z^{-1})}{T(z^{-1})} y_{k-d} u_{k-d}, \quad (2.125)$$

donde $T(z^{-1})$ se define como:

$$T(z^{-1}) = B(z^{-1})C(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1}). \quad (2.126)$$

La señal s_k se comprobó que tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$. La señal r_k se supone que es acotada para todo k y la señal $y_{k-d}u_{k-d}$ se comprobó que se limita a la acotación del vector ϕ_k^T . Desde el conjunto de condiciones 2.7.1, la condición 4 significa que el polinomio característico en lazo cerrado, teniendo en cuenta la planta descrita con incertidumbres paramétricas, en (2.84), $T(z^{-1})$ es Schur. Por lo tanto, y_k en lazo cerrado se prueba que es acotada. Por otra parte, el error $e_k = y_k - r_k$ es acotado.

□

Capítulo 3

Algoritmo de control auto-ajutable basado en el criterio de mínima varianza generalizada para una clase de sistemas no lineales

3.1 Introducción

Debido a que en el mundo real la mayoría de los sistemas son no lineales, es de interés poder extender el algoritmo de control auto-ajutable, basado en el criterio de mínima varianza generalizada modificado bajo el concepto de control en modo deslizante, para una clase de sistemas no lineales que puede ser representado dentro de un tipo de estructura. En este capítulo, en primer lugar se define la clase de sistemas no lineales en la sección 3.2, luego se propone el controlador de mínima varianza generalizada basado en el control en modo deslizante en la sección 3.3. En la sección 3.4 se presenta el controlador auto-ajutable para la clase sistemas no lineales con su respectiva demostración y análisis de estabilidad para el caso general de la clase de sistemas no lineales de orden n . La demostración se basa en el concepto de control de modo deslizante de tiempo discreto y el uso de una función de Lyapunov. En la sección 3.5 se mostrarán casos particulares para sistemas de primer, segundo y tercer orden.

3.2 Definición de la clase de sistemas no lineales

En primer lugar tengamos en cuenta la estructura general de un sistema no lineal como en (3.1),

$$A(z, q)y_k = B(z, q)u_k, \quad (3.1)$$

donde, z denota el operador de desplazamiento de tiempo, es decir, $z^{-d}y_k = y_{k-d}$, y q se define como:

$$q = h(y_k, u_k), \quad (3.2)$$

siendo $h(y_k, u_k)$ es una función cualquiera.

Para el desarrollo del algoritmo de control auto-ajustable, es necesario definir la estructura de la función $h(y_k, u_k)$, la cual en este caso solo dependerá de los datos de salida, es decir, $h(y_k)$. Esta función tendrá una estructura polinómica, de la forma:

$$q = h(y_k) = h_{11} + h_{12}y_{k+n-1} + h_{13}y_{k+n-1}^2 + \dots + h_{1n}y_{k+n-1}^{n-1}, \quad (3.3)$$

la cual al ser sustituida en el modelo del sistema no lineal (3.1) genera un sistema no lineal con estructura polinomial.

Para una mejor comprensión, considere el siguiente modelo nominal de un sistema de primer orden SISO invariante en el tiempo,

$$y_{k+1} + a(q)y_k = b(q)u_k, \quad (3.4)$$

donde las funciones $a(q)$ y $b(q)$ tienen estructura polinómica y dependen solo de los datos de salida como se muestra en las ecuaciones (3.5) y (3.6):

$$a(q) = a_{11} + a_{12}y_k + a_{13}y_k^2, \quad (3.5)$$

$$b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2. \quad (3.6)$$

Al sustituir las funciones (3.5) y (3.6) en (3.4) y realizando operaciones matemáticas se obtiene el sistema no lineal representado en la ecuación (3.7),

$$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 = z^{-d}(B(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k), \quad (3.7)$$

donde:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1},$$

$$\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1},$$

$$\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{13}z^{-1},$$

$$B(z^{-1}) = b_0,$$

$$Y_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1,$$

$$Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2,$$

$$d = 1.$$

en el cual las no linealidades obtenidas son polinomiales de las formas: y_k^2 , y_k^3 y las bilinealidades $y_k u_k$ y $y_k^2 u_k$.

Definida la estructura de la clase de sistemas no lineales, se desarrolla el algoritmo de control auto-ajustable basado en el control de mínima varianza generalizada modificado bajo el concepto de control en modo deslizante, para un sistema general de orden n . Es importante destacar, que para llegar a este algoritmo primero se realizó el desarrollo para sistemas particulares de primer, segundo y tercer orden, variando las funciones polinómicas $h(y_k)$ y se logró obtener el algoritmo general que se presenta a continuación.

El desarrollo del controlador auto-ajustable y la demostración que se presentan en las secciones siguientes, engloba y es aplicable para los sistemas de primer, segundo y tercer orden pertenecientes a la clase previamente definida. Por lo tanto, se explica el desarrollo completo

para el sistema de orden n , siendo el mismo aplicable a los casos particulares de las estructuras que se presentan en la sección 3.5.

3.3 Control de mínima varianza generalizada para la clase de sistemas no lineales

En esta sección se presenta el controlador de mínima varianza generalizada, basado en el control en modo deslizante, para un sistema de orden n perteneciente a la clase de definida en 3.2. La estructura de las funciones polinómicas $a_1(q)$, $a_2(q)$, ..., $a_{n-2}(q)$, $a_{n-1}(q)$ y $a_n(q)$ son función que dependen sólo de los datos de salida.

Considere el siguiente modelo nominal de un sistema SISO de orden n , invariante en el tiempo,

$$y_{k+n} + a_1(q)y_{k+n-1} + a_2(q)y_{k+n-2} + \dots + a_{n-2}(q)y_{k+2} + a_{n-1}(q)y_{k+1} + a_n(q)y_k = b(q)u_k, \quad (3.8)$$

si:

$$a_1(q) = a_{11} + a_{12}y_{k+n-1} + a_{13}y_{k+n-1}^2 + \dots + a_{1n}y_{k+n-1}^{n-1}, \quad (3.9)$$

$$a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_{k+n-2} + a_{23}y_{k+n-2}^2 + \dots + a_{2n}y_{k+n-2}^{n-1}, \quad (3.10)$$

⋮

$$a_{n-2}(q) = a_{(n-2)1} + a_{(n-2)2}y_{k+2} + a_{(n-2)3}y_{k+2}^2 + \dots + a_{(n-2)n}y_{k+2}^{n-1}, \quad (3.11)$$

$$a_{n-1}(q) = a_{(n-1)1} + a_{(n-1)2}y_{k+1} + a_{(n-1)3}y_{k+1}^2 + \dots + a_{(n-1)n}y_{k+1}^{n-1}, \quad (3.12)$$

$$a_n(q) = a_{n1} + a_{n2}y_k + a_{n3}y_k^2 + \dots + a_{nn}y_k^{n-1}, \quad (3.13)$$

$$b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2 + \dots + b_ny_k^n, \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.9) – (3.14) en (3.8)

$$\begin{aligned}
 & y_{k+n} + a_{11}y_{k+n-1} + a_{12}y_{k+n-1}^2 + a_{13}y_{k+n-1}^3 + \dots + a_{1n}y_{k+n-1}^n + a_{21}y_{k+n-2} + \\
 & a_{22}y_{k+n-2}^2 + a_{23}y_{k+n-2}^3 + \dots + a_{2n}y_{k+n-2}^n + \dots + a_{(n-2)1}y_{k+2} + a_{(n-2)2}y_{k+2}^2 + \\
 & a_{(n-2)3}y_{k+2}^3 + \dots + a_{(n-2)n}y_{k+2}^n + a_{(n-1)1}y_{k+1} + a_{(n-1)2}y_{k+1}^2 + a_{(n-1)3}y_{k+1}^3 + \dots + \\
 & a_{(n-1)n}y_{k+1}^n + a_{n1}y_k + a_{n2}y_k^2 + a_{n3}y_k^3 + \dots + a_{nn}y_k^n = b_0u_k + b_1y_ku_k + b_2y_k^2u_k + \dots + \\
 & b_ny_k^nu_k.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Desplazando en (3.15) y_{k+n} a y_k , tenemos:

$$\begin{aligned}
 & y_k + a_{11}y_{k-1} + a_{12}y_{k-1}^2 + a_{13}y_{k-1}^3 + \dots + a_{1n}y_{k-1}^n + a_{21}y_{k-2} + a_{22}y_{k-2}^2 + a_{23}y_{k-2}^3 + \\
 & \dots + a_{2n}y_{k-2}^n + \dots + a_{(n-2)1}y_{k-n+2} + a_{(n-2)2}y_{k-n+2}^2 + a_{(n-2)3}y_{k-n+2}^3 + \dots + \\
 & a_{(n-2)n}y_{k-n+2}^n + a_{(n-1)1}y_{k-n+1} + a_{(n-1)2}y_{k-n+1}^2 + a_{(n-1)3}y_{k-n+1}^3 + \dots + a_{(n-1)n}y_{k-n+1}^n + \\
 & a_{n1}y_{k-n} + a_{n2}y_{k-n}^2 + a_{n3}y_{k-n}^3 + \dots + a_{nn}y_{k-n}^n = b_0u_{k-n} + b_1y_{k-n}u_{k-n} + b_2y_{k-n}^2u_{k-n} + \\
 & \dots + b_ny_{k-n}^nu_{k-n},
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 & y_k + a_{11}z^{-1}y_k + a_{12}z^{-1}y_k^2 + a_{13}z^{-1}y_k^3 + \dots + a_{1n}z^{-1}y_k^n + a_{21}z^{-2}y_k + a_{22}z^{-2}y_k^2 + \\
 & a_{23}z^{-2}y_k^3 + \dots + a_{2n}z^{-2}y_k^n + \dots + a_{(n-2)1}z^{2-n}y_k + a_{(n-2)2}z^{2-n}y_k^2 + a_{(n-2)3}z^{2-n}y_k^3 + \\
 & \dots + a_{(n-2)n}z^{2-n}y_k^n + a_{(n-1)1}z^{1-n}y_k + a_{(n-1)2}z^{1-n}y_k^2 + a_{(n-1)3}z^{1-n}y_k^3 + \dots + \\
 & a_{(n-1)n}z^{1-n}y_k^n + a_{n1}z^{-n}y_k + a_{n2}z^{-n}y_k^2 + a_{n3}z^{-n}y_k^3 + \dots + a_{nn}z^{-n}y_k^n = b_0z^{-n}u_k + \\
 & b_1z^{-n}y_ku_k + b_2z^{-n}y_k^2u_k + \dots + b_nz^{-n}y_k^nu_k.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned}
 & (1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} + \dots + a_{(n-2)1}z^{2-n} + a_{(n-1)1}z^{1-n} + a_{n1}z^{-n})y_k + (a_{12}z^{-1} + \\
 & a_{22}z^{-2} + \dots + a_{(n-2)2}z^{2-n} + a_{(n-1)2}z^{1-n} + a_{n2}z^{-n})y_k^2 + (a_{13}z^{-1} + a_{23}z^{-2} + \dots + \\
 & a_{(n-2)3}z^{2-n} + a_{(n-1)3}z^{1-n} + a_{n3}z^{-n})y_k^3 + \dots + (a_{1n}z^{-1} + a_{2n}z^{-2} + \dots + a_{(n-2)n}z^{2-n} + \\
 & a_{(n-1)n}z^{1-n} + a_{nn}z^{-n})y_k^n = z^{-n}(b_0u_k + b_1y_ku_k + b_2y_k^2u_k + \dots + b_ny_k^nu_k),
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 + \dots + \Lambda_{y_k^n}(z^{-1})y_k^n = z^{-d} \left(B(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots + Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k \right), \quad (3.19)$$

donde:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} + \dots + a_{(n-2)1}z^{2-n} + a_{(n-1)1}z^{1-n} + a_{n1}z^{-n},$$

$$\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2} + \dots + a_{(n-2)2}z^{2-n} + a_{(n-1)2}z^{1-n} + a_{n2}z^{-n},$$

$$\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{13}z^{-1} + a_{23}z^{-2} + \dots + a_{(n-2)3}z^{2-n} + a_{(n-1)3}z^{1-n} + a_{n3}z^{-n},$$

⋮

$$\Lambda_{y_k^n}(z^{-1}) = a_{1n}z^{-1} + a_{2n}z^{-2} + \dots + a_{(n-2)n}z^{2-n} + a_{(n-1)n}z^{1-n} + a_{nn}z^{-n},$$

$$B(z^{-1}) = b_0,$$

$$Y_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1,$$

$$Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2,$$

⋮

$$Y_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = b_n,$$

$$d = n.$$

Condiciones 3.3.1:

1. Se asume que no hay factores comunes en $(A(z^{-1}), B(z^{-1}))$, $(A(z^{-1}), \Lambda_{y_k^2}(z^{-1}))$, \dots , $(A(z^{-1}), \Lambda_{y_k^n}(z^{-1}))$, $(A(z^{-1}), Y_{y_k u_k}(z^{-1}))$, $(A(z^{-1}), Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}))$, \dots , $(A(z^{-1}), Y_{y_k^n u_k}(z^{-1}))$.

2. El tiempo de retardo d es conocido.
3. Se asume $T_0 = 1$ para la derivación de las ecuaciones matemáticas.
4. Para obtener la ley de control nominal los polinomios $A(z^{-1})$, $A_{y_k^2}(z^{-1})$, $A_{y_k^n}(z^{-1}), \dots$, $A_{y_k^n}(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $Y_{y_k u_k}(z^{-1})$, $Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}), \dots$, $Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})$ se suponen conocidos.

El objetivo del control es reducir al mínimo la varianza de la variable controlada s_{k+d} , que se define en el caso determinístico como:

$$s_{k+d} = C(z^{-1})(y_{k+d} - r_{k+d}) + Q(z^{-1})u_k, \quad (3.20)$$

Los polinomios:

$$\begin{aligned} C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}, \\ Q(z^{-1}) &= q_0(1 - z^{-1}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

deben ser diseñados, r_k es la señal de referencia, y e_k es la señal de error y se define como:

$$e_k = y_k - r_k. \quad (3.22)$$

El polinomio $C(z^{-1})$ es Schur, por lo tanto, la señal de error se desvanecerá si (3.20) se mantiene en cero para una entrada constante. El polinomio $C(z^{-1})$ se puede diseñar mediante la asignación de todas las raíces características dentro del círculo unitario del plano z . La idea proviene del control en modo deslizante en tiempo discreto.

Para deducir la ley de control nominal, (3.19) se multiplica por $E(z^{-1})$, entonces:

$$\begin{aligned} & A(z^{-1})E(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^3 + \dots + \Lambda_{y_k^n}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^n = \\ & z^{-d} \left(B(z^{-1})E(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots + \right. \\ & \left. Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^n u_k \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ahora en el tiempo y_{k+d} :

$$\begin{aligned} & A(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d} + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d}^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d}^3 + \dots + \\ & \Lambda_{y_k^n}(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d}^n = \\ & B(z^{-1})E(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots + \\ & Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^n u_k. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Usando la ecuación Diofantina:

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}), \quad (3.25)$$

donde:

$$E(z^{-1}) = e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{d-1} z^{-d+1},$$

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n-1} z^{-n+1}.$$

Reescribiendo la ecuación (3.24):

$$\begin{aligned} & \left(C(z^{-1}) - z^{-d}F(z^{-1}) \right) y_{k+d} + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d}^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d}^3 + \dots + \\ & \Lambda_{y_k^n}(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d}^n = \\ & B(z^{-1})E(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots + \\ & Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^n u_k. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Despejando el término $C(z^{-1})y_{k+d}$

$$\begin{aligned} C(z^{-1})y_{k+d} &= z^{-d}F(z^{-1})y_{k+d} - \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d}^2 - \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d}^3 - \dots - \\ &\Lambda_{y_k^n}(z^{-1})E(z^{-1})y_{k+d}^n + B(z^{-1})E(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k u_k + \\ &Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots + Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})E(z^{-1})y_k^n u_k, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} C(z^{-1})y_{k+d} &= F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 + P_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + \\ &P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n + B(z^{-1})E(z^{-1})u_k + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + \\ &P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 u_k + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k, \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde:

$$P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

$$P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

$$P_{y_k^4}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^4}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

⋮

$$P_{y_k^n}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^n}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

$$P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

$$P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

$$P_{y_k^3 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^3 u_k}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

⋮

$$P_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})E(z^{-1}).$$

Combinando (3.28) y (3.20), la variable s_{k+d} es:

$$\begin{aligned}
 s_{k+d} = & F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 + P_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n + \\
 & B(z^{-1})E(z^{-1})u_k + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 u_k + \dots + \\
 & P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k - C(z^{-1})r_{k+d} + Q(z^{-1})u_k.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Agrupando los términos de la señal de control u_k :

$$\begin{aligned}
 s_{k+d} = & F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 + P_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n + \\
 & (B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}))u_k + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 u_k + \\
 & \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k - C(z^{-1})r_{k+d},
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
 s_{k+d} = & F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 + P_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n + \\
 & G(z^{-1})u_k + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 u_k + \dots + \\
 & P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k - C(z^{-1})r_{k+d},
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde:

$$G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$$

Entonces, la entrada del control de mínima varianza generalizada requerida para anular a la variable s_{k+d} en (3.20) está dado por:

$$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 + P_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n}. \tag{3.32}$$

3.4 Control auto-ajutable para la clase de sistemas no lineales definida

Como en la práctica no se conocen con precisión los valores de los parámetros del sistema, en muchos casos es necesario realizar una identificación de dichos parámetros. En esta sección, el sistema (3.20) se considera como un sistema con incertidumbres paramétricas, esto es: $a_{i1} \in [a_{i1}, \bar{a}_{i1}]$, $a_{i2} \in [a_{i2}, \bar{a}_{i2}]$, ..., $a_{1i} \in [a_{1i}, \bar{a}_{1i}]$ y $b_i \in [b_i, \bar{b}_i]$ para $i = 1, 2, \dots, n$, donde a_{i1} es el límite inferior y \bar{a}_{i1} el límite superior del parámetro a_{i1} . Análogamente ocurren con los demás parámetros que forman el sistema.

El controlador nominal es entonces diseñado para el sistema no lineal, donde el cálculo de los parámetros se realiza como se muestra a continuación:

$$a_{i1} = \frac{a_{i1} + \bar{a}_{i1}}{2}, a_{i2} = \frac{a_{i2} + \bar{a}_{i2}}{2}, \dots, a_{1i} = \frac{a_{1i} + \bar{a}_{1i}}{2}, b_i = \frac{b_i + \bar{b}_i}{2}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Condiciones 3.4.1:

1. El orden del sistema (3.20) es conocido.
2. El tiempo de retardo d se conoce.
3. El polinomio $C(z^{-1})$ es Schur.
4. El sistema (3.20) considerado con incertidumbres paramétricas está en la clase de sistemas que pueden ser estabilizados por los polinomios $Q(z^{-1})$ y $C(z^{-1})$ diseñado para el modelo nominal del sistema.
5. La señal de referencia r_k está limitada, es decir, $|r_k| < \delta$ para todo k , donde δ es una constante positiva.

La estabilidad en lazo cerrado del control auto ajustable para la clase de sistemas no lineales en estudio, basada en el criterio de mínima varianza generalizada, está dada por las siguientes ecuaciones de estimación recursiva:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}}{1+\phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}} [s_k + C(z^{-1})r_k - \phi_{k-d}^T\hat{\theta}_{k-1}], \quad (3.33)$$

y

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}}{1+\phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}}, \quad (3.34)$$

donde:

$$\phi_k^T = \begin{bmatrix} y_k, \dots, y_{k-n+1}, y_k^2, \dots, y_{k-n-d+1}^2, \dots, y_k^n, \dots, y_{k-n-d+1}^n, u_k, \dots, u_{k-d+1} \\ y_k u_k, \dots, y_{k-d+1} u_{k-d+1}, y_k^2 u_k, \dots, y_{k-d+1}^2 u_{k-d+1}, \dots, y_k^n u_k, \dots, y_{k-d+1}^n u_{k-d+1} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

es el vector que contiene los datos de salida y de la señal de control,

$$\theta^T = \begin{bmatrix} f_0, \dots, f_{n-1}, P y_{k_0}^2, \dots, P y_{k_{n+d-1}}^2, \dots, P y_{k_0}^n, \dots, P y_{k_{n+d-1}}^n, g_0, \dots, g_{d-1} \\ P(y_k u_k)_0, \dots, P(y_k u_k)_{d-1}, P(y_k^2 u_k)_0, \dots, P(y_k^2 u_k)_{d-1}, \dots, P(y_k^n u_k)_0, \dots, P(y_k^n u_k)_{d-1} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

el vector que contiene los parámetros del controlador, y

$$\hat{\theta}_k^T = \begin{bmatrix} \hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{n-1}, \widehat{P y_{k_0}^2}, \dots, \widehat{P y_{k_{n+d-1}}^2}, \dots, \widehat{P y_{k_0}^n}, \dots, \widehat{P y_{k_{n+d-1}}^n}, \hat{g}_0, \dots, \hat{g}_{d-1} \\ P(\widehat{y_k u_k})_0, \dots, P(\widehat{y_k u_k})_{d-1}, P(\widehat{y_k^2 u_k})_0, \dots, P(\widehat{y_k^2 u_k})_{d-1}, \dots, P(\widehat{y_k^n u_k})_0, \dots, P(\widehat{y_k^n u_k})_{d-1} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

la estimación de θ .

Por lo tanto, el controlador (3.32) utiliza los parámetros identificados como se muestra en la ecuación (3.38):

$$u_k = - \frac{[\hat{F}(z^{-1})y_k + \hat{P}_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + \hat{P}_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 + \hat{P}_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + \hat{P}_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n - C(z^{-1})r_{k+d}]}{\hat{G}(z^{-1}) + \hat{P}_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + \hat{P}_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + \dots + \hat{P}_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n}, \quad (3.38)$$

donde $F(z^{-1})$, $P_{y_k^2}(z^{-1})$, $P_{y_k^3}(z^{-1})$, $P_{y_k^4}(z^{-1}), \dots, P_{y_k^n}(z^{-1})$, $G(z^{-1})$, $P_{y_k u_k}(z^{-1})$, $P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}), \dots, P_{y_k^n u_k}(z^{-1})$, se pueden asumir como las estimaciones iniciales de $\hat{F}(z^{-1})$,

$\hat{P}_{y_k^2}(z^{-1})$, $\hat{P}_{y_k^3}(z^{-1})$, $\hat{P}_{y_k^4}(z^{-1}), \dots$, $\hat{P}_{y_k^n}(z^{-1})$, $\hat{G}(z^{-1})$, $\hat{P}_{y_k u_k}(z^{-1})$, $\hat{P}_{y_k^2 u_k}(z^{-1}), \dots$, $\hat{P}_{y_k^n u_k}(z^{-1})$, respectivamente.

Teorema 3.4.1: Dada una matriz definida positiva Γ_0 y el vector de parámetros iniciales $\hat{\theta}_0$, el cual puede ser inicializado con los parámetros obtenidos para el sistema nominal, si la estimación $\hat{\theta}_k$ del controlador (3.38) satisface las ecuaciones recursivas (3.33) y (3.34), bajo el conjunto de condiciones 3.4.1, entonces el controlador auto-ajustable (3.33), (3.34) y (3.38) combinando con el sistema no lineal (3.19) con incertidumbres paramétricas en lazo cerrado es globalmente estable.

Demostración: la variable s_{k+d} de la ecuación (3.31) se puede reescribir usando $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$ como:

$$\begin{aligned}
 s_{k+d} = & F(z^{-1})y_k + \hat{F}(z^{-1})y_k - \hat{F}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + \hat{P}_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 - \\
 & \hat{P}_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 + \hat{P}_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 - \hat{P}_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 + \dots + P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n + \\
 & \hat{P}_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n - \hat{P}_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n + G(z^{-1})u_k + \hat{G}(z^{-1})u_k - \hat{G}(z^{-1})u_k + \\
 & P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + \hat{P}_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k - \hat{P}_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + \\
 & \hat{P}_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k - \hat{P}_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 u_k + \hat{P}_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 u_k - \\
 & \hat{P}_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 u_k + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k + \hat{P}_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k - \hat{P}_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k - \\
 & C(z^{-1})r_{k+d},
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
 s_{k+d} = & \phi_k^T \tilde{\theta}_{k+d} + \hat{F}(z^{-1})y_k + \hat{P}_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + \hat{P}_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 + \dots + \hat{P}_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n + \\
 & \hat{G}(z^{-1})u_k + \hat{P}_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + \hat{P}_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + \hat{P}_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 u_k + \dots + \\
 & \hat{P}_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k - C(z^{-1})r_{k+d}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Usando la ley de control (3.38) y sustituyendo en (3.40) obtenemos:

$$s_{k+d} = \phi_k^T \tilde{\theta}_{k+d}. \quad (3.41)$$

Considere la función de Lyapunov candidata:

$$V_k = \frac{1}{2} s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k, \quad (3.42)$$

que es definida positiva sobre s_k y el parámetro $\tilde{\theta}_k$. La diferencia de tiempo de (3.42) es:

$$\Delta V_k = V_k - V_{k-1}, \quad (3.43)$$

$$\Delta V_k = \frac{1}{2} s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\theta}_k - \frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1}, \quad (3.44)$$

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} s_{k-1}^2 + \frac{1}{2} s_k^2 - \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} + \Gamma_{k-1}^{-1}) \tilde{\theta}_k. \quad (3.45)$$

A la ecuación (3.45) se le suma y restan los términos $\tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_k$ y s_k^2 :

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} s_k^2 - \frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + s_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1}) \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_k^T \Gamma_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_k. \quad (3.46)$$

De (3.41), s_k^2 es:

$$s_k^2 = \tilde{\theta}_k^T \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k, \quad (3.47)$$

sustituyendo (3.47) en (3.46), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} s_{k-1}^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \tilde{\theta}_k + \tilde{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k). \quad (3.48)$$

El término $\frac{1}{2}\tilde{\theta}_k^T(\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d}\phi_{k-d}^T)\tilde{\theta}_k$ en la ecuación (3.48) se puede hacer cero como se muestra a continuación:

$$\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d}\phi_{k-d}^T = 0, \quad (3.49)$$

$$\Gamma_k^{-1} = \Gamma_{k-1}^{-1} + \phi_{k-d}\phi_{k-d}^T, \quad (3.50)$$

$$\Gamma_k = (\Gamma_{k-1}^{-1} + \phi_{k-d}^T\phi_{k-d})^{-1}. \quad (3.51)$$

Por el lema de la matriz inversa, según Åström y Wittenmark (1989), la ecuación (3.51) se reescribe como:

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}(I + \phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}\phi_{k-d})^{-1}\phi_{k-d}^T\Gamma_{k-1}, \quad (3.52)$$

lo cual genera la ecuación recursiva (3.34).

El término $\tilde{\theta}_{k-1}^T\Gamma_{k-1}^{-1}(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_k)$ en (3.48) también se puede hacer igual a cero tal como se describe a continuación:

$$\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_k = 0, \quad (3.53)$$

$$\tilde{\theta}_k + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}_{k-1}. \quad (3.54)$$

Sumando y restando el término $\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_{k-1}$:

$$(I + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T)\tilde{\theta}_k = (I + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T)\tilde{\theta}_{k-1} - \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_{k-1}, \quad (3.55)$$

y al despejar $\tilde{\theta}_k$ obtenemos:

$$\tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}_{k-1} - \frac{\Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T\tilde{\theta}_{k-1}}{(I + \Gamma_{k-1}\phi_{k-d}\phi_{k-d}^T)}. \quad (3.56)$$

Como $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$, entonces la ecuación (3.56) se reescribe de la siguiente manera:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T (\theta - \hat{\theta}_{k-1})}{(I + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T)}. \quad (3.57)$$

De (3.41):

$$s_k = \phi_{k-d}^T \theta - C(z^{-1}) r_k, \quad (3.58)$$

y sustituyendo $\phi_{k-d}^T \theta$ de (3.58) en (3.57) entonces (3.33) se obtiene.

Usando las ecuaciones recursivas (3.33) y (3.34) en (3.48) para V_0 positivo y acotado, ΔV_k se demuestra que es semidefinida negativa, es decir $\Delta V_k \leq 0$ de la siguiente manera: para $k = 1$ se obtiene la siguiente relación:

$$V_1 - V_0 = -\frac{1}{2} s_0^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0)^T \Gamma_0^{-1} (\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0), \quad (3.59)$$

Inicialmente $\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0 \neq 0$, entonces $V_1 - V_0 < 0$ lo que implica que $V_1 < V_0$. Para $k = 2$:

$$V_2 + \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)^T \Gamma_1^{-1} (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) = V_1 < V_0. \quad (3.60)$$

Para $k = 3$:

$$V_3 + \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)^T \Gamma_2^{-1} (\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2) = V_2, \quad (3.61)$$

usando (3.59) y (3.60) en (3.61):

$$\begin{aligned} V_3 + \frac{1}{2} s_2^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2)^T \Gamma_2^{-1} (\tilde{\theta}_3 - \tilde{\theta}_2) + \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)^T \Gamma_1^{-1} (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) \\ = V_1 < V_0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

Entonces para $k = N$, donde N es un valor numérico grande, se obtiene la siguiente relación:

$$V_N + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \left(s_{k-1}^2 + (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) \right) = V_1 < V_0 < \infty, \quad (3.63)$$

La ecuación (3.63) implica que s_N y $(\tilde{\theta}_N - \tilde{\theta}_{N-1})$ converge a cero cuando N tiende a infinito, entonces ΔV_k es semidefinida negativa para todo k y el control de mínima varianza generalizada se reduce al mínimo, lo que demuestra la estabilidad global del sistema en lazo cerrado.

Por lo tanto, la salida y_k se acerca a la referencia r_k cuando $k \rightarrow \infty$ debido a que $C(z^{-1})$ es Schur. Como resultado de la prueba anterior, ϕ_k^T es acotada. Esto significa que:

$$\begin{aligned} y_k &< \infty, y_{k-1} < \infty, \dots, y_{k-n+1} < \infty, \\ y_k^2 &< \infty, y_{k-1}^2 < \infty, \dots, y_{k-n+1}^2 < \infty, \\ &\vdots \\ y_k^n &< \infty, y_{k-1}^n < \infty, \dots, y_{k-n+1}^n < \infty, \\ u_k &< \infty, u_{k-1} < \infty, \dots, u_{k-m+d+1} < \infty, \\ y_k u_k &< \infty, y_{k-1} u_{k-1} < \infty, \dots, y_{k-\zeta(d-1)} u_{k-\zeta(d-1)} < \infty, \\ y_k^2 u_k &< \infty, y_{k-1}^2 u_k < \infty, \dots, y_{k-n+1}^2 u_k < \infty, \\ &\vdots \\ y_k^n u_k &< \infty, y_{k-1}^n u_k < \infty, \dots, y_{k-n+1}^n u_k < \infty, \end{aligned}$$

están acotadas para todo k . Además, cuando $k \rightarrow \infty$, $s_k \rightarrow 0$ y $(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) \rightarrow 0$, lo que significa que $\hat{\theta}_k$ tiende a un valor constante.

La señal y_k está acotada como se muestra a continuación:

Multiplicando (3.20) por $B(z^{-1})$:

$$B(z^{-1})s_{k+d} = B(z^{-1})C(z^{-1})y_{k+d} - B(z^{-1})C(z^{-1})r_{k+d} + B(z^{-1})Q(z^{-1})u_k, \quad (3.64)$$

$$B(z^{-1})s_k = B(z^{-1})C(z^{-1})y_k - B(z^{-1})C(z^{-1})r_k + z^{-d}B(z^{-1})Q(z^{-1})u_k, \quad (3.65)$$

y usando (3.19) y sustituyendo en (3.65):

$$\begin{aligned} B(z^{-1})s_k = & B(z^{-1})C(z^{-1})y_k - B(z^{-1})C(z^{-1})r_k + A(z^{-1})Q(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k^2 + \\ & \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k^3 + \dots + \Lambda_{y_k^n}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k^n - z^{-d}\Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k u_k - \\ & z^{-d}\Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k^2 u_k - \dots - z^{-d}\Upsilon_{y_k^n u_k}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k^n u_k. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Agrupando los términos de y_k :

$$\begin{aligned} (B(z^{-1})C(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1}))y_k = & B(z^{-1})s_k + B(z^{-1})C(z^{-1})r_k - \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k^2 - \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k^3 - \dots - \\ & \Lambda_{y_k^n}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k^n + z^{-d}\Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k u_k + z^{-d}\Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots + \\ & z^{-d}\Upsilon_{y_k^n u_k}(z^{-1})Q(z^{-1})y_k^n u_k, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$y_k =$

$$\begin{aligned} \frac{B(z^{-1})}{T(z^{-1})}s_k + \frac{B(z^{-1})C(z^{-1})}{T(z^{-1})}r_k - \frac{\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})Q(z^{-1})}{T(z^{-1})}y_k^2 - \frac{\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})Q(z^{-1})}{T(z^{-1})}y_k^3 - \dots - \frac{\Lambda_{y_k^n}(z^{-1})Q(z^{-1})}{T(z^{-1})}y_k^n + \\ \frac{\Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})Q(z^{-1})}{T(z^{-1})}y_{k-d}u_{k-d} + \frac{\Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1})Q(z^{-1})}{T(z^{-1})}y_{k-d}^2 u_{k-d} + \dots + \frac{\Upsilon_{y_k^n u_k}(z^{-1})Q(z^{-1})}{T(z^{-1})}y_{k-d}^n u_{k-d}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde $T(z^{-1})$ se define como:

$$T(z^{-1}) = B(z^{-1})C(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1}). \quad (3.69)$$

La señal s_k se comprobó que tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$. La señal r_k se supone que es acotada para todo k y las señales $y_k^2, y_k^3, \dots, y_k^n, y_{k-d}u_{k-d}, y_{k-d}^2u_{k-d}, \dots, y_{k-d}^n u_{k-d}$ se comprobaron acotadas debido a estar contenidas en vector acotado ϕ_k^T . En el conjunto de condiciones 3.4.1, la número 4, representa que el polinomio característico $T(z^{-1})$ en lazo cerrado, teniendo en cuenta la planta (3.19) ahora considerada con incertidumbres paramétricas, es Schur. Por lo tanto, y_k en lazo cerrado se demuestra que es acotada. Así, el error $e_k = y_k - r_k$ es también acotado.

□

Para complementar la demostración anterior, se adaptan a nuestro caso no lineal los siguientes cálculos matemáticos presentados en Ohata y col. (en vías de publicación) para sistemas lineales, los cuales fortalecen la demostración de estabilidad global en lazo cerrado del sistema controlado.

En el instante k tenemos:

$$s_{k+d} = \phi_k^T \tilde{\theta}_k + \hat{F}(z^{-1})y_k + \hat{P}_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + \hat{P}_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 + \dots + \hat{P}_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n + \hat{G}(z^{-1})u_k + \hat{P}_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + \hat{P}_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + \hat{P}_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 u_k + \dots + \hat{P}_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k - C(z^{-1})r_{k+d}. \quad (3.70)$$

La ecuación (3.70) se reescribe como (3.71), donde $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$,

$$s_{k+d} = \phi_k^T \theta - C(z^{-1})r_{k+d}. \quad (3.71)$$

Se define una nueva variable \bar{s}_k como:

$$\bar{s}_k = s_k + C(z^{-1})r_k - \phi_{k-d}^T \hat{\theta}_k = \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k. \quad (3.72)$$

Una función de Lyapunov candidata está dada por:

$$V_k = \frac{1}{2} \bar{s}_k^2 + \frac{1}{2} \bar{\theta}_k^T \Gamma_k^{-1} \bar{\theta}_k. \quad (3.73)$$

La diferencia de tiempo es descrita como:

$$\Delta V_k = V_k - V_{k-1}, \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_k = & -\frac{1}{2} \bar{s}_{k-1}^2 - \frac{1}{2} (\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{k-1}) + \frac{1}{2} \bar{\theta}_k^T (\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T) \bar{\theta}_k + \\ & \bar{\theta}_{k-1}^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \bar{\theta}_k). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Si

$$\Gamma_k^{-1} - \Gamma_{k-1}^{-1} - \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T = 0, \quad (3.76)$$

y

$$\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \bar{\theta}_k = 0, \quad (3.77)$$

se cumplen. Entonces,

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} \bar{s}_{k-1}^2 - \frac{1}{2} (\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{k-1})^T \Gamma_{k-1}^{-1} (\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{k-1}) \leq 0. \quad (3.78)$$

Esto significa que \bar{s}_k converge a cero y $(\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{k-1})$ converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$, lo que implica que $\|\theta_k\|$ y $\|\bar{s}_k\|$ son acotados. A continuación s_k se aproxima a cero a causa de la siguiente relación:

$$|\bar{s}_k - s_k| = |\phi_{k-d}^T \bar{\theta}_k - \phi_{k-d}^T \bar{\theta}_{k-d} - \phi_{k-d}^T \hat{\theta}_k + C(z^{-1})r_k|, \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} |\bar{s}_k - s_k| = & \left| \phi_{k-d}^T (\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_{k-d}) - \hat{F}(z^{-1})y_k - \hat{P}_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 - \hat{P}_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 - \dots - \right. \\ & \hat{P}_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n - \hat{G}(z^{-1})u_k - \hat{P}_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k - \hat{P}_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k - \hat{P}_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 u_k - \\ & \left. \dots - \hat{P}_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k + C(z^{-1})r_k \right|. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Usando la ley de control (3.38) en (3.80), obtenemos:

$$|\bar{s}_k - s_k| = |\phi_{k-d}^T(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-d})|, \quad (3.81)$$

$$|\bar{s}_k - s_k| \leq |\phi_{k-d}^T(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1})| + |\phi_{k-d}^T(\tilde{\theta}_{k-1} - \tilde{\theta}_{k-2})| + \dots + |\phi_{k-d}^T(\tilde{\theta}_{k-(d-1)} - \tilde{\theta}_{k-d})|, \quad (3.82)$$

$$|\bar{s}_k - s_k| \leq \|\phi_{k-d}^T\| \sum_{j=0}^{d-1} \|\tilde{\theta}_{k-j} - \tilde{\theta}_{k-j-1}\|. \quad (3.83)$$

Por lo tanto, la salida y_k se acerca a la referencia r_k cuando $k \rightarrow \infty$ debido a que $C(z^{-1})$ es Schur. Demostrando así la estabilidad global del sistema en lazo cerrado.

A partir de (3.76), y usando el lema de la matriz inversa, se obtiene (3.34). Multiplicando (3.77) por ϕ_{k-d}^T se obtiene (3.84).

$$\phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k = \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_{k-1} - \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d} \phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k. \quad (3.84)$$

Así,

$$\phi_{k-d}^T \tilde{\theta}_k = \frac{(\phi_{k-d}^T \theta - \phi_{k-d}^T \hat{\theta}_{k-1})}{1 + \phi_{k-d}^T \Gamma_{k-1} \phi_{k-d}}. \quad (3.85)$$

La ecuación (3.77) con (3.85) y (3.71) genera la ecuación (3.33).

3.5 Control de mínima varianza generalizada para una clase de sistemas no lineales de primer, segundo y tercer orden

En esta sección se presenta el controlador de mínima varianza generalizada para sistema de primer, segundo y tercer orden. La estructura de los polinomios $a_1(q)$, $a_2(q)$, $a_3(q)$ y $b(q)$

son función polinómicas que dependen sólo de los datos de salida. Se demuestra que dependiendo de las variaciones que se les realice a dichos polinomios la ley de control varía a medida que las no linealidades aumentan.

Los cálculos para obtener la ley de control para los casos que se presentan a continuación son similares a los realizados en la sección 3.1, al igual que el diseño de los polinomios $Q(z^{-1})$, $C(z^{-1})$, $E(z^{-1})$, y $F(z^{-1})$.

Observación 3.5.1: para cada una de las leyes de control que se muestran a continuación se aplica el algoritmo de control auto-ajustable definido en la sección 3.4, tomando las señales y los polinomios correspondientes a cada caso, es decir, los vectores ϕ_k^T, θ^T y $\tilde{\theta}_k^T$ se definen dependiendo de las señales que se encuentran presentes en el sistema. La demostración presentada en la sección 3.4 se puede particularizar para cada uno de los casos mostrados en esta sección.

3.5.1 Control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de primer orden

Considere el siguiente modelo nominal de un sistema SISO de primer orden invariante en el tiempo,

$$y_{k+1} + a(q)y_k = b(q)u_k. \quad (3.86)$$

En la tabla 3.1 se muestran varios casos de la ley de control de mínima varianza generalizada. Para cada caso se presenta la estructura de las funciones $a(q)$ y $b(q)$, la representación del modelo no lineal y su respectiva ley de control. Es importante destacar que

en todos los casos las leyes de control dependen de salidas futuras, sin embargo esto no es un inconveniente, ya que este adelanto de tiempo es anulado por el tiempo de retardo d .

Tabla 3.1. Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de primer orden.

Caso 1	
$a(q)$ y $b(q)$	$a(q) = a_{11} + a_{12}y_k.$ $b(q) = b_0.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 = z^{-d}B(z^{-1})u_k,$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $d = 1.$
Ley de Control	$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1})},$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.2. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de primer orden.

Caso 2	
$a(q)$ y $b(q)$	$a(q) = a_{11} + a_{12}y_k + a_{13}y_k^2.$ $b(q) = b_0.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 = z^{-d}B(z^{-1})u_k,$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1};$ $\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{13}z^{-1};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $d = 1.$
Ley de Control	$u_k = - \frac{\left[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 - C(z^{-1})r_{k+d} \right]}{G(z^{-1})},$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.3. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de primer orden.

Caso 3	
$a(q)$ y $b(q)$	$a(q) = a_{11} + a_{12}y_k + a_{13}y_k^2$ $b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2$.
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 = z^{-d} \left(B(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k \right),$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1}; \quad \Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1};$ $\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{13}z^{-1}; \quad B(z^{-1}) = b_0;$ $Y_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1; \quad Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2;$ $d = 1.$
Ley de Control	$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2},$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.4. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de primer orden.

Caso General	
$a(q)$ y $b(q)$	$a(q) = a_{11} + a_{12}y_k + a_{13}y_k^2 + a_{14}y_k^3 + \dots + a_{1n}y_k^{n-1}.$ $b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2 + b_3y_k^3 + \dots + b_ny_k^n.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 + \dots + \Lambda_{y_k^n}(z^{-1})y_k^n =$ $z^{-d} \left(B(z^{-1})u_k + \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + \Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots + \right.$ $\left. \Upsilon_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k \right),$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1};$ $\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{13}z^{-1};$ \vdots $\Lambda_{y_k^n}(z^{-1}) = a_{1n}z^{-1};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $\Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $\Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2;$ \vdots $\Upsilon_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = b_n;$ $d = 1.$

Tabla 3.5. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de primer orden.

<p>Ley de Control</p>	$u_k = - \frac{\left[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 \right]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n} - \frac{\left[P_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n - C(z^{-1})r_{k+d} \right]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n}$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^4}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^4}(z^{-1})E(z^{-1});$ \vdots $P_{y_k^n}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^n}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^3 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ \vdots $P_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$
-----------------------	---

3.5.2 Control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden

Considere el siguiente modelo nominal de un sistema SISO de segundo orden invariante en el tiempo,

$$y_{k+2} + a_1(q)y_{k+1} + a_2(q)y_k = b(q)u_k, \quad (3.87)$$

Para los sistemas de segundo se presentan dos casos: en primer lugar en la tabla 3.2 se muestran las leyes de control para el caso en que la función $a_1(q)$ es contante, $a_2(q)$ es siempre una función de la señal de salida y la función $b(q)$ puede depender de la señal de salida.

Luego en la tabla 3.3, se estudia el caso donde la función $a_1(q)$ depende de la salida, sin embargo debe ser función de la salida en el instante $k + 1$, esto debido a que al multiplicarse la función $a_1(q)$ por y_{k+1} se obtengan las no linealidades en el mismo instante de tiempo. Se puede observar que para ambos casos y dependiendo del grado de las funciones $a_1(q)$, $a_2(q)$ y $b(q)$ la ley de control se obtiene de manera análoga a la presentada en la sección 3.2.

Tabla 3.6. Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ es constante.

Caso 1	
$a_1(q), a_2(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11}.$ $a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_k.$ $b(q) = b_0.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 = z^{-d}B(z^{-1})u_k$ donde: $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{22}z^{-2};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $d = 2.$
Ley de Control	$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1})},$ donde: $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.7. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ es constante.

Caso 2	
$a_1(q), a_2(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11}.$ $a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_k.$ $b(q) = b_0 + b_1y_k.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 = z^{-d}(B(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k),$ donde: $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{22}z^{-2};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $Y_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $d = 2.$
Ley de Control	$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k},$ donde: $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.8. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ es constante.

Caso 3	
$a_1(q), a_2(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11}. \quad a_2(q) = a_{21} + a_{21}y_k + a_{23}y_k^2.$ $b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 = z^{-d} \left(B(z^{-1})u_k + \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + \Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k \right),$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{22}z^{-2}; \quad \Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{23}z^{-2};$ $B(z^{-1}) = b_0; \quad \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $\Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2; \quad d = 2.$
Ley de Control	$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2},$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = \Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.9. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ es constante.

Caso General	
$a_1(q), a_2(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11}.$ $a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_k + a_{23}y_k^2 + a_{24}y_k^3 + \dots + a_{2n}y_k^{n-1}.$ $b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2 + b_3y_k^3 + \dots + b_ny_k^n.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3(z^{-1})y_k^n = z^{-d}(B(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots + Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k),$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{22}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{23}z^{-2};$ \vdots $\Lambda_{y_k^n}(z^{-1}) = a_{2n}z^{-2};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $Y_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2;$ \vdots $Y_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = b_n;$ $d = 2.$

Tabla 3.10. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ es constante.

Ley de Control	$u_k = - \frac{\left[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 \right]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n}$ $\frac{\left[P_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n - C(z^{-1})r_{k+d} \right]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n}$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^4}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^4}(z^{-1})E(z^{-1});$ \vdots $P_{y_k^n}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^n}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^3 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ \vdots $P_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$
----------------	---

Tabla 3.11. Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ depende de la señal de salida.

Caso 1	
$a_1(q), a_2(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11} + a_{12}y_{k+1}.$ $a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_k.$ $b(q) = b_0.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 = z^{-d}B(z^{-1})u_k,$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $d = 2.$
Ley de Control	$u_k = -\frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1})},$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.12. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ depende de la señal de salida.

Caso 2	
$a_1(q), a_2(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11} + a_{12}y_{k+1}.$ $a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_k.$ $b(q) = b_0 + b_1y_k.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 = z^{-d}(B(z^{-1})u_k + \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k),$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $\Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $d = 2.$
Ley de Control	$u_k = -\frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 - G(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k},$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.13. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ depende de la señal de salida.

Caso 3	
$a_1(q), a_2(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11} + a_{12}y_{k+1} + a_{13}y_{k+1}^2.$ $a_2(q) = a_{21} + a_{21}y_k + a_{23}y_k^2.$ $b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 = z^{-d} \left(B(z^{-1})u_k + \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + \Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k \right),$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{13}z^{-1} + a_{23}z^{-2};$ $B(z^{-1}) = b_0; \quad \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $\Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2; \quad d = 2.$
Ley de Control	$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2},$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1}); \quad P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1}); \quad P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = \Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.14. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $a_1(q)$ depende de la señal de salida.

Caso General	
$a_1(q), a_2(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11} + a_{12}y_{k+1} + a_{13}y_{k+1}^2 + a_{14}y_{k+1}^3 + \dots + a_{1n}y_{k+1}^{n-1}.$ $a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_k + a_{23}y_k^2 + a_{24}y_k^3 + \dots + a_{2n}y_k^{n-1}.$ $b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2 + b_3y_k^3 + \dots + b_ny_k^n.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 + \dots + \Lambda_{y_k^n}(z^{-1})y_k^n =$ $z^{-d}(B(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots +$ $Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k),$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2};$ $\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{13}z^{-1} + a_{23}z^{-2};$ \vdots $\Lambda_{y_k^n}(z^{-1}) = a_{1n}z^{-1} + a_{2n}z^{-2};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $Y_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2;$ \vdots $Y_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = b_n;$ $d = 2.$

Tabla 3.15. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de segundo orden donde la función $\alpha_1(q)$ depende de la señal de salida.

Ley de Control	$u_k = - \frac{\left[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 \right]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n}$ $\frac{\left[P_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n - C(z^{-1})r_{k+d} \right]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n}$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^4}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^4}(z^{-1})E(z^{-1});$ \vdots $P_{y_k^n}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^n}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = \Upsilon_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3 u_k}(z^{-1}) = \Upsilon_{y_k^3 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ \vdots $P_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = \Upsilon_{y_k^n u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$
----------------	---

3.5.3 Control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden

Considere el siguiente modelo nominal de un sistema SISO de tercer orden invariante en el tiempo,

$$y_{k+3} + a_1(q)y_{k+2} + a_2(q)y_{k+1} + a_3(q)y_k = b(q)u_k, \quad (3.88)$$

En la tabla 3.4 se exponen las leyes de control para el caso en que las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ son constantes, y las funciones $a_3(q)$ y $b(q)$ dependen de la señal de salida. Respecto a la tabla 3.5, las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ dependen de la salida en el instante $k + 2$ y $k + 1$, respectivamente. Al igual que para los casos del sistema de segundo orden, estos polinomios poseen esta estructura con el fin de obtener las no linealidades en el mismo instante de tiempo.

Tabla 3.16. Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ son constantes.

Caso 1	
$a_1(q), a_2(q),$ $a_3(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11}. \quad a_2(q) = a_{21}.$ $a_3(q) = a_{31} + a_{32}y_k. \quad b(q) = b_0.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 = z^{-d}B(z^{-1})u_k,$ donde: $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} + a_{31}z^{-3};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{32}z^{-3}; \quad B(z^{-1}) = b_0;$ $d = 3.$

Tabla 3.17. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ son constantes.

Ley de Control	$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1})},$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$
Caso 2	
$a_1(q), a_2(q),$ $a_3(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11}, \quad a_2(q) = a_{21}.$ $a_3(q) = a_{31} + a_{32}y_k, \quad b(q) = b_0 + b_1y_k.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + N(z^{-1})y_k^2 = z^{-d}(B(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k),$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} + a_{31}z^{-3};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{32}z^{-3}; \quad B(z^{-1}) = b_0;$ $Y_{y_k u_k} = b_1; \quad d = 3.$
Ley de Control	$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k},$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1}); \quad P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.18. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ son constantes.

Caso 3	
$a_1(q), a_2(q),$ $a_3(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11}. \qquad a_2(q) = a_{21}.$ $a_3(q) = a_{31} + a_{32}y_k + a_{33}y_k^2. \qquad b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 = z^{-d} \left(B(z^{-1})u_k + \right.$ $\left. Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k \right),$ donde: $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} + a_{31}z^{-3};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{32}z^{-3}; \qquad \Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{33}z^{-3};$ $B(z^{-1}) = b_0; \qquad Y_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2; \qquad d = 3.$
Ley de Control	$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2},$ donde: $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.19. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ son constantes.

Caso General	
$a_1(q), a_2(q),$ $a_3(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11}. \qquad a_2(q) = a_{21}.$ $a_3(q) = a_{31} + a_{32}y_k + a_{33}y_k^2 + \dots + a_{3n}y_k^{n-1}.$ $b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2 + \dots + b_ny_k^n.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 + \dots + \Lambda_{y_k^n}(z^{-1})y_k^n =$ $z^{-d}(B(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots +$ $Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k),$ donde: $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} + a_{31}z^{-3};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{32}z^{-3};$ $\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{33}z^{-3};$ \vdots $\Lambda_{y_k^n}(z^{-1}) = a_{2n}z^{-3};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $Y_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2;$ \vdots $Y_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = b_n; \qquad d = 3.$

Tabla 3.20. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $\mathbf{a}_1(\mathbf{q})$ y $\mathbf{a}_2(\mathbf{q})$ son constantes.

Ley de Control	$u_k = - \frac{\left[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 \right]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n} - \frac{\left[P_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n - C(z^{-1})r_{k+d} \right]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n}$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^4}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^4}(z^{-1})E(z^{-1});$ \vdots $P_{y_k^n}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^n}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^3 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ \vdots $P_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$
----------------	---

Tabla 3.21. Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ dependen de la señal de salida.

Caso 1	
$a_1(q), a_2(q), a_3(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11} + a_{12}y_{k+2}.$ $a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_{k+1}.$ $a_3(q) = a_{31} + a_{32}y_k.$ $b(q) = b_0.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 = z^{-d}B(z^{-1})u_k,$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} + a_{31}z^{-3};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2} + a_{32}z^{-3};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $d = 3.$
Ley de Control	$u_k = -\frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1})},$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.22. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ dependen de la señal de salida.

Caso 2	
$a_1(q), a_2(q),$ $a_3(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11} + a_{12}y_{k+2} + a_{13}y_{k+2}^2.$ $a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_{k+1} + a_{23}y_{k+1}^2.$ $a_3(q) = a_{31} + a_{32}y_k + a_{33}y_k^2.$ $b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 = z^{-d} \left(B(z^{-1})u_k + \right.$ $\left. Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k \right),$ donde: $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} + a_{31}z^{-3};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2} + a_{32}z^{-3};$ $\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{13}z^{-1} + a_{23}z^{-2} + a_{33}z^{-3};$ $B(z^{-1}) = b_0; \quad Y_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2; \quad d = 3.$
Ley de Control	$u_k = - \frac{[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2},$ donde: $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1}); \quad P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1}); \quad P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$

Tabla 3.23. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ dependen de la señal de salida.

Caso General	
$a_1(q), a_2(q),$ $a_3(q)$ y $b(q)$	$a_1(q) = a_{11} + a_{12}y_{k+2} + a_{13}y_{k+2}^2 + \dots + a_{1n}y_{k+2}^{n-1}.$ $a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_{k+1} + a_{23}y_{k+1}^2 + \dots + a_{2n}y_{k+1}^{n-1}.$ $a_3(q) = a_{31} + a_{32}y_k + a_{33}y_k^2 + \dots + a_{3n}y_k^{n-1}.$ $b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2 + \dots + b_ny_k^n.$
Sistema no lineal	$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 + \Lambda_{y_k^3}(z^{-1})y_k^3 + \dots + \Lambda_{y_k^n}(z^{-1})y_k^n =$ $z^{-d}(B(z^{-1})u_k + Y_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k + Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 u_k + \dots +$ $Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n u_k),$ <p>donde:</p> $A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} + a_{31}z^{-3};$ $\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2} + a_{32}z^{-3};$ $\Lambda_{y_k^3}(z^{-1}) = a_{13}z^{-1} + a_{23}z^{-2} + a_{33}z^{-3};$ \vdots $\Lambda_{y_k^n}(z^{-1}) = a_{1n}z^{-1} + a_{2n}z^{-2} + a_{3n}z^{-3};$ $B(z^{-1}) = b_0;$ $Y_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1;$ $Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = b_2;$ \vdots $Y_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = b_n; \quad d = 3.$

Tabla 3.24. (Continuación). Ley de control de mínima varianza generalizada para sistemas no lineales de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ dependen de la señal de salida.

<p>Ley de Control</p>	$u_k = - \frac{\left[F(z^{-1})y_k + P_{y_k^2}(z^{-1})y_{k+d}^2 + P_{y_k^3}(z^{-1})y_{k+d}^3 \right]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n}$ $\frac{\left[P_{y_k^4}(z^{-1})y_{k+d}^4 + \dots + P_{y_k^n}(z^{-1})y_{k+d}^n - C(z^{-1})r_{k+d} \right]}{G(z^{-1}) + P_{y_k u_k}(z^{-1})y_k + P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})y_k^2 + P_{y_k^3 u_k}(z^{-1})y_k^3 + \dots + P_{y_k^n u_k}(z^{-1})y_k^n}$ <p>donde:</p> $P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^4}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^4}(z^{-1})E(z^{-1});$ <p style="text-align: center;">⋮</p> $P_{y_k^n}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^n}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^2 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $P_{y_k^3 u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^3 u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ <p style="text-align: center;">⋮</p> $P_{y_k^n u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k^n u_k}(z^{-1})E(z^{-1});$ $G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$
-----------------------	---

3.6 Análisis

En este capítulo se propuso la estructura general de la función $h(y_k, u_k)$ la cual posee una estructura polinómica y depende solo de la señal de salida, definiéndose así la clase de sistemas no lineales a tratar. Posteriormente se presentó el desarrollo de la ley de control de mínima varianza generalizada basada en el concepto de control en modo deslizante en tiempo discreto para la clase de sistemas no lineales de orden n y el algoritmo de control auto-ajustable representado por las ecuaciones (3.33), (3.34) y (3.38) propuesto para dicha clase de sistemas no lineales de orden n , junto con la demostración de la estabilidad global del sistema en lazo cerrado al aplicar el controlador auto-ajustable cuando el sistema presenta incertidumbres paramétricas en su modelo matemático. Finalmente se mostraron algunos casos de la ley de control de mínima varianza generalizada para casos particulares de sistemas de primer, segundo y tercer orden hasta obtener el caso general para cada uno de estos órdenes, especificando en cada caso la estructura de las funciones $a_i(q)$ donde $i = 1, 2, 3$, y $b(q)$, el modelo matemático del sistema no lineal y su ley de control.

Es de gran importancia resaltar que no es necesario realizar de forma repetitiva el cálculo de la ley de control de mínima varianza generalizada, es decir, al conocer la estructura del modelo no lineal perteneciente a la clase definida solo basta con identificar las señales lineales, bilineales y no lineales presentes en dicha estructura y calcular únicamente los polinomios relacionados con esas señales en la ecuación (3.32) de la sección 3.3. Con respecto al control auto-ajustable se definen los vectores (3.35) a (3.37) solamente con las señales presentes en dicho modelo. De forma que al momento de aplicar dicho controlador no es necesario realizar todos los cálculos mostrados en este capítulo.

Observación 3.6.1. Sí en el sistema no lineal existe la presencia de ruido blanco, entonces el algoritmo de control auto-ajutable presentado en la sección 3.4 es expandible a este caso. La demostración se logra combinando la mostrada en la sección 3.4 con la prueba presentada en Patete y col. (2008.b). Aunque en este documento no se expone el análisis y la demostración matemática para este caso o se trabaje con modelos auto-regresivos, la aplicación del algoritmo auto-ajutable es directa al combinar estos dos trabajos.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 4

Casos de estudio

4.1 Introducción

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos por medio de simulaciones, realizadas en el paquete computacional Mathematica®. En primer lugar, se aplica el algoritmo de control auto-ajustable (CMVG-STC) a una serie de ejemplos académicos con el fin de verificar su funcionamiento, y se compara el comportamiento de la salida de éste con la salida que se obtiene al aplicar el controlador de mínima varianza generalizada (CMVG). Posteriormente, se aplica el algoritmo de control auto-ajustable a dos sistemas físicos; estos sistemas son: el péndulo simple y el mecanismo manivela-biela-corredera. Se selecciona el péndulo simple ya que es un sistema no lineal muy conocido en el área de control. Por otro lado, debido a la colaboración académica solicitada por el Profesor Katsuhisa Furuta y a que el modelo matemático del motor de la Toyota Motor Corporation es información confidencial y, por lo tanto, no es posible conocer dicho modelo matemático para probar el algoritmo propuesto, Katsuhisa Furuta sugiere utilizar el mecanismo manivela-biela-corredera como modelo de prueba con el fin de aplicar el algoritmo auto-ajustable sobre éste, ya que el modelo matemático posee no linealidades las cuales pueden ser sustituidas por su respectiva serie de Taylor. En ambos casos, se presenta el modelo matemático continuo que representa a cada uno de los sistemas físicos respectivamente. Antes de aplicar el algoritmo auto-ajustable diseñado se discretiza el sistema por medio de la aproximación de Euler y, posteriormente, se expanden las funciones no lineales que posee cada uno de los sistemas por su respectiva serie de Taylor.

En el caso del péndulo simple se expande el término no lineal tomando los dos, tres y cuatro primeros términos de la serie de Taylor, es decir, se aplicará el algoritmo de control auto-ajutable a tres casos de estudio. Para el caso del mecanismo manivela-biela-corredera las funciones no lineales serán sustituidas por los dos y tres primeros términos de la serie de Taylor.

En algunos casos solo se hace un análisis sobre el comportamiento de los parámetros del controlador, la variable de modo deslizante, la función de Lyapunov y la dinámica del control, sin mostrar los resultados gráficos obtenidos, con el fin de no redundar ya que dichos comportamientos son análogos en todos los casos estudiados.

4.2 Ejemplos académicos

En esta sección, se presentan varios ejemplos académicos para mostrar el funcionamiento del algoritmo auto-ajutable propuesto. Se presenta un ejemplo de un sistema no lineal de primer, segundo y tercer orden.

En el ejemplo del sistema no lineal de primer orden se presentan todos los resultados y análisis gráficos, es decir, se compara la respuesta de la salida del sistema controlado, el control y la variable de modo deslizante, al aplicar al sistema el CMVG (control de mínima varianza generalizada) y el CMVG-STC (control de mínima varianza generalizada auto-ajutable). También se muestra el comportamiento de la función de Lyapunov y de los parámetros que conforman la ley de control. Estos resultados y análisis gráficos son análogos a los demás casos presentados en esta sección, por lo tanto, algunos de ellos serán omitidos para evitar redundancia.

4.2.1 Ejemplo 1. Sistema no lineal de primer orden

Considere el siguiente modelo del sistema no lineal de primer orden,

$$A(z^{-1})y_k + \Lambda_{y_k^2}(z^{-1})y_k^2 = z^{-d}(B(z^{-1})u_k + \Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1})y_k u_k), \quad (4.1)$$

donde:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_{11}z^{-1},$$

$$\Lambda_{y_k^2}(z^{-1}) = a_{12}z^{-1},$$

$$B(z^{-1}) = b_0,$$

$$\Upsilon_{y_k u_k}(z^{-1}) = b_1,$$

$$d = 1,$$

y el intervalo de los parámetros están dados por:

$$a_{11} \in [-0.8; -0.2]; a_{12} \in [0.1; 0.5]; b_0 \in [0.1; 0.5]; b_1 \in [0.1; 0.9].$$

El cálculo del modelo nominal del sistema no lineal se obtiene como se explicó en la sección 3.4 del capítulo anterior, es decir,

$$a_{11} = \frac{-0.8 - 0.2}{2} = -0.5; a_{12} = \frac{0.1 + 0.5}{2} = 0.3; b_0 = \frac{-0.8 - 0.2}{2} = -0.5;$$

$$b_1 = \frac{0.1 + 0.9}{2} = 0.5;$$

obteniendo como modelo nominal:

$$(1 - 0.5z^{-1})y_k + 0.3z^{-1}y_k^2 = z^{-d}(0.3u_k + 0.5y_k u_k). \quad (4.2)$$

El rango de intervalo de perturbaciones se calcula por medio de las ecuaciones (2.44) y (2.45) presentadas en el capítulo 2, sección 2.5, para $\gamma = 1$, y son: $\alpha_1 = 0.3$; $\nu_1 = 0.2$.

El modelo real del sistema se asume como se muestra a continuación,

$$(1 - 0.3z^{-1})y_k + 0.2z^{-1}y_k^2 = z^{-d}(0.4u_k + 0.7y_k u_k). \quad (4.3)$$

El controlador nominal es:

$$u_k = \frac{[F(z^{-1})y_k + P y_k^2 (z^{-1})y_{k+d} - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P y_k u_k (z^{-1})y_k}, \quad (4.4)$$

el cual se deduce del caso general mostrado en la tabla 3.1, tomando sólo los polinomios de las señales que se encuentran presentes en el modelo (4.1).

Para aplicar el controlador auto-ajutable propuesto en la sección 3.4, los polinomios de $F(z^{-1})$ y $G(z^{-1})$ obtenidos por medio de la solución de la ecuación Diofantina (3.25) dan las estimaciones iniciales de los parámetros del controlador, para los polinomios $\hat{F}(z^{-1})$ y $\hat{G}(z^{-1})$ respectivamente.

Los polinomios de diseño $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ utilizados son los siguientes:

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} = 1 + 0.75z^{-1}, \quad (4.5)$$

$$Q(z^{-1}) = q_0(1 - z^{-1}) = 20(1 - z^{-1}), \quad (4.6)$$

obteniendo de (3.25) que:

$$F(z^{-1}) = 1.25, \quad (4.7)$$

$$G(z^{-1}) = E(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1}) = 20.3 - 20z^{-1}. \quad (4.8)$$

Posteriormente se calculan los polinomios:

$$P_{y_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{y_k^2}(z^{-1})E(z^{-1}) = -0.3z^{-1}, \quad (4.9)$$

$$P_{y_k u_k}(z^{-1}) = Y_{y_k u_k}(z^{-1})E(z^{-1}) = 0.5, \quad (4.10)$$

los cuales se pueden asumir como las estimaciones iniciales de los parámetros de los polinomios $\hat{P}_{y_k^2}(z^{-1})$ y $\hat{P}_{y_k u_k}(z^{-1})$, respectivamente, y que serán usados para la estimación recursiva de la ley de control.

El análisis de estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado usando el criterio de Tsytkin y Furuta presentado en la sección 2.5, en presencia de incertidumbre paramétrica, se muestra en la figura 4.1, donde se observa que, $\tilde{T}(e^{-j\omega})$ (curva roja) no se cruza con el círculo unitario $o(1,0)$ (curva azul), lo que implica que la condición suficiente para la estabilidad robusta se cumple. Es importante destacar que este criterio nos da la estabilidad robusta de la parte lineal del sistema, ya que no toma en cuenta los términos no lineales ni los bilineales; sin embargo, se puede utilizar para obtener una aproximación del análisis de robustez del sistema no lineal controlado.

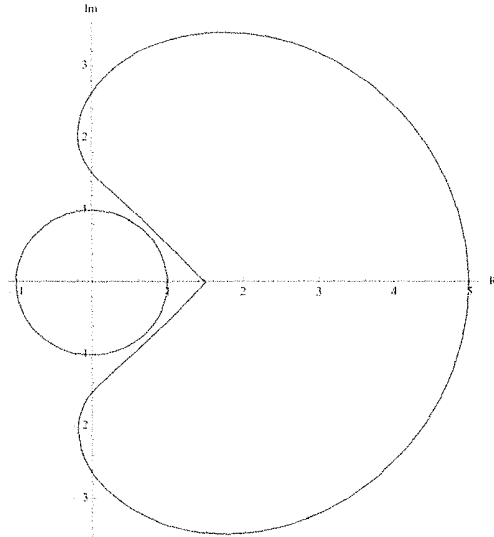


Figura 4.1. Análisis de la estabilidad robusta para el sistema (4.2): curva $\tilde{T}(e^{-j\omega})$ y círculo $\mathcal{O}(1, 0)$.

Los resultados de las simulaciones para el comportamiento de la salida utilizando el CMVG y el CMVG-STC, y la dinámica del control, se muestran en la figura 4.2 y 4.3 respectivamente. La condición inicial para Γ es la matriz de identidad, es decir, $\Gamma_0 = I$. La señal de referencia es un escalón unitario con una longitud de 50 muestras. Se puede observar que la dinámica del control exhibe un buen rendimiento para ambos controladores; sin embargo, la salida del sistema al ser controlado por el CMVG aunque se estabiliza no sigue la referencia lo cual es solucionado al aplicar la propuesta del algoritmo auto-ajustable (3.33), (3.34) y (3.38).

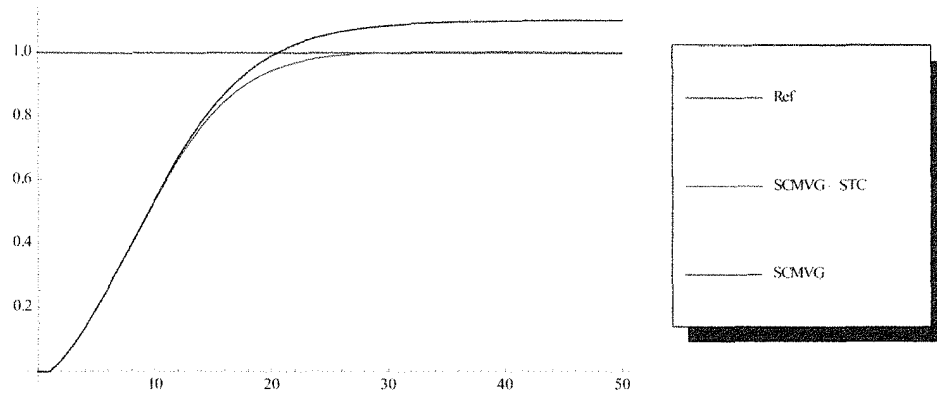


Figura 4.2. Comparación de la salida del sistema no lineal controlado por medio de CMVG (verde) y el controlador auto-ajustable (azul).

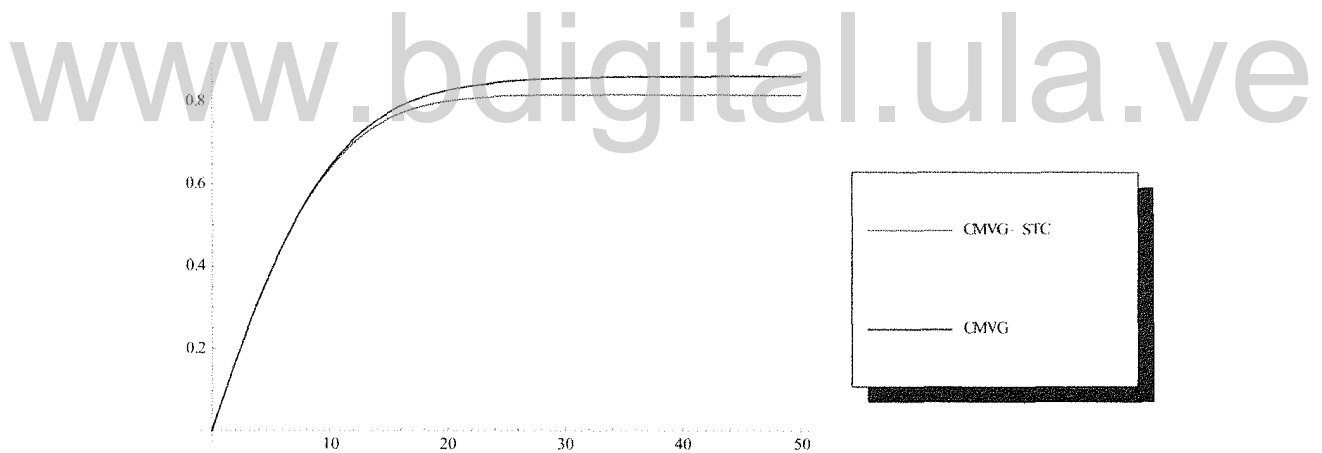


Figura 4.3. Comparación de la dinámica del CMVG (verde) y el controlador auto-ajustable (azul).

En la figura 4.4 se muestra el comportamiento de los parámetros del controlador los cuales no necesariamente convergen a su valor real, sin embargo convergen a un valor constante. Las líneas rojas representan el comportamiento de los parámetros del controlador auto-ajustable a medida que éstos se van ajustando hasta llegar a un valor constante y las líneas verdes representan el valor real de cada uno de los parámetros.

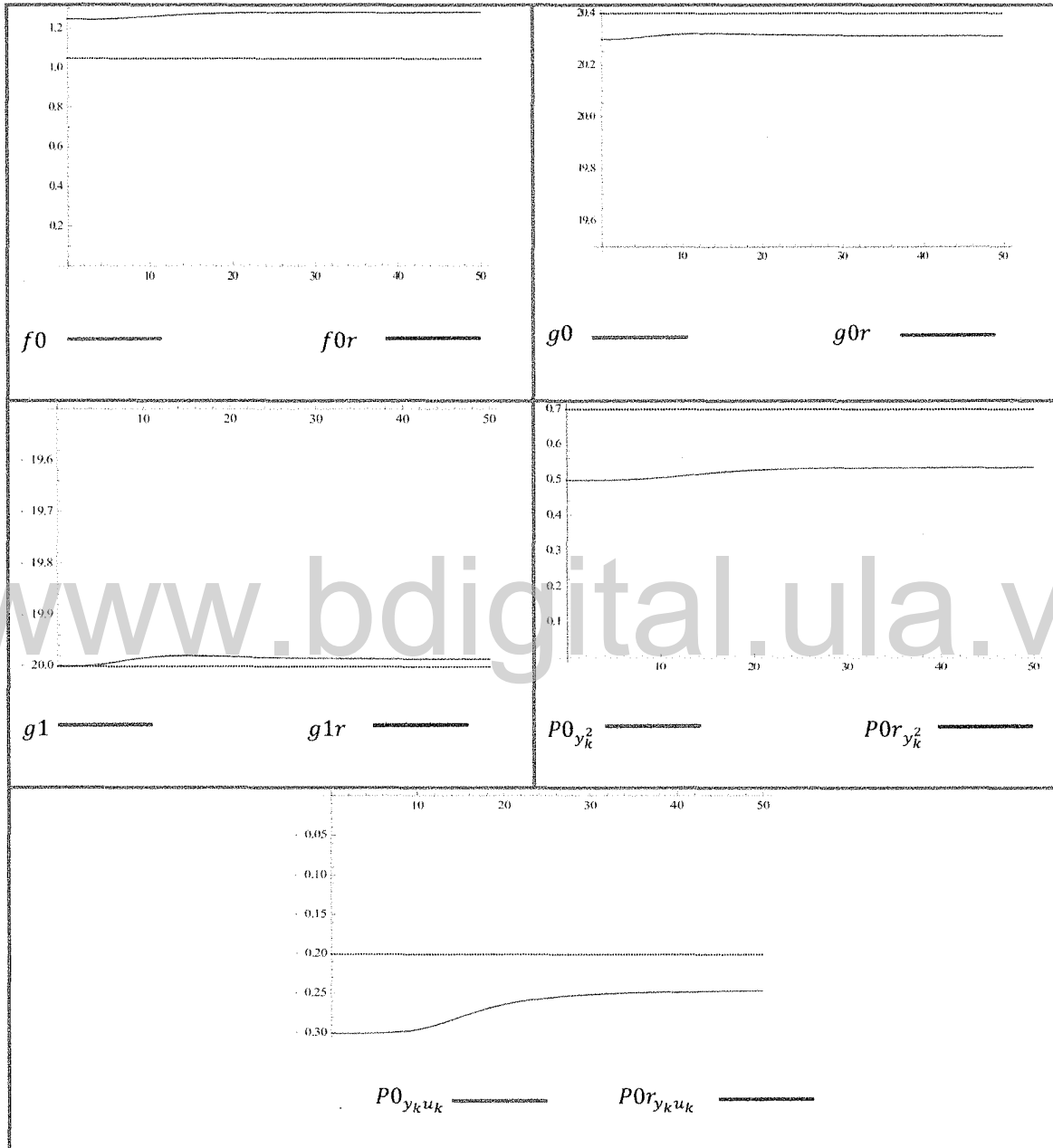


Figura 4.4. Comportamiento de los parámetros del controlador auto-ajutable

En la figura 4.5 se observa como la superficie en modo deslizante se anula al aplicar la propuesta del algoritmo auto-ajutable y para el caso del control de mínima varianza

generalizada no se hace cero, debido a las incertidumbres paramétricas presentes en el modelo. En la figura 4.6 se verifica que la función de Lyapunov es semidefinida negativa, con lo cual se comprueba la estabilidad del sistema controlado.

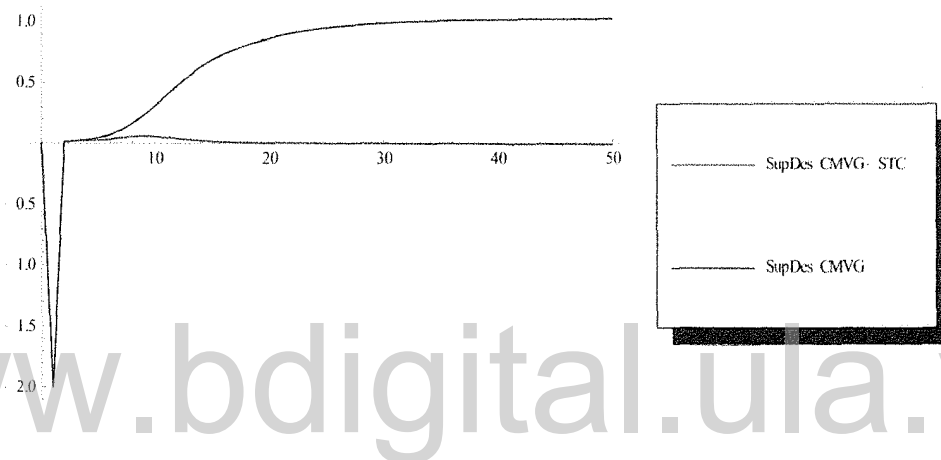


Figura 4.5. Comparación de las superficies deslizantes al aplicar CMVG-STC (azul) y CMVG (verde).

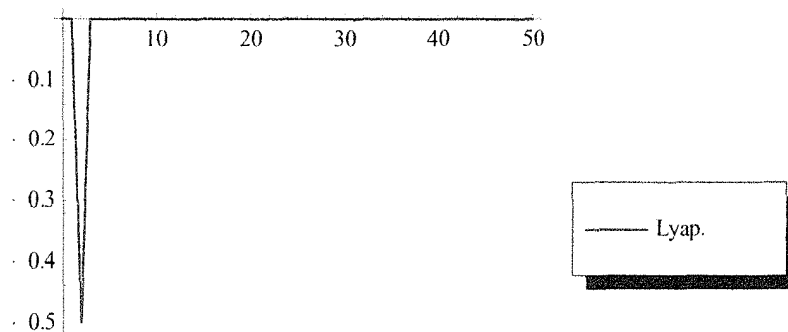


Figura 4.6. Función de Lyapunov.

4.2.2 Ejemplo 2. Sistema no lineal de segundo orden

Para el caso del sistema no lineal de segundo orden (caso donde la función $a_1(q)$ es constante, es decir, pertenece al caso 2 mostrados en la tabla 3.2), se presentan los resultados al aplicar tanto el CMVG como el controlador-autoajustable propuesto y se hace un análisis de estos resultados. Es importante destacar que estos controladores se probaron en varios casos de la tabla 3.2 y en los casos donde la función $a_1(q)$ depende de la señal de salida (los cuales pertenecen a los casos mostrados en la tabla 3.3), obteniendo como resultados que el controlador auto-ajustable (3.33), (3.34) y (3.38) propuesto logra cumplir con el objetivo de seguimiento de la referencia, es decir, en presencia de incertidumbre paramétrica se cumple con el objetivo de anular la variable de modo deslizante. Mientras que, para el caso del CMVG no se cumple dicho objetivo en ninguno de los casos probados.

www.bdigital.ula.ve

4.2.2.1 Sistema de segundo orden donde la función $a_1(q)$ es constante

Considere el siguiente modelo del sistema,

$$y_{k+2} + a_1(q)y_{k+1} + a_2(q)y_k = b(q)u_k, \quad (4.11)$$

donde:

$$a_1(q) = a_{11}, \quad (4.12)$$

$$a_2(q) = a_{21} + a_{21}y_k, \quad (4.13)$$

$$b(q) = b_0 + b_1y_k. \quad (4.14)$$

Al sustituir los polinomios (4.12) – (4.14) en la ecuación (4.11), obtenemos el siguiente modelo no lineal,

$$(1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2})y_k + a_{22}z^{-2}y_k^2 = z^{-d}(b_0u_k + b_1y_ku_k), \quad (4.15)$$

donde $d = 2$ y el intervalo de incertidumbre de los parámetros son:

$$a_{11} \in [-0.8 \ -0.2]; a_{21} \in [-0.4 \ -0.2]; a_{22} \in [0.1 \ 0.7]; b_0 \in [0.1 \ 0.5]; b_1 \in [0.1 \ 0.9].$$

El modelo nominal del sistema no lineal se obtiene de manera similar al ejemplo anterior y está representado por,

$$(1 - 0.5z^{-1} - 0.3z^{-2})y_k + 0.4z^{-2}y_k^2 = z^{-d}(0.3u_k + 0.5y_ku_k). \quad (4.16)$$

Utilizando las ecuaciones (2.44) y (2.45), se consigue el rango de intervalo de perturbaciones para $\gamma = 1$; estos son: $\alpha_1 = 0.3$; $\alpha_2 = 0.1$; $v_1 = 0.2$.

La ecuación (4.17) muestra el modelo real asumido,

$$(1 - 0.3z^{-1} - 0.25z^{-2})y_k + 0.4z^{-2}y_k^2 = z^{-d}(0.4u_k + 0.7y_ku_k). \quad (4.17)$$

Los polinomios $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ diseñados para el sistema representado por (4.16) son:

$$C(z^{-1}) = 1 + 1.3z^{-1} + 0.47z^{-2} + 0.035z^{-3}, \quad (4.18)$$

$$Q(z^{-1}) = q_0(1 - z^{-1}) = 10(1 - z^{-1}), \quad (4.19)$$

que conducen a los siguientes polinomios para la ley de control,

$$F(z^{-1}) = 1.67 + 0.575z^{-1}, \quad (4.20)$$

$$G(z^{-1}) = 10.3 - 9.465z^{-1}, \quad (4.21)$$

$$P_{y_k^2}(z^{-1}) = -0.4z^{-2} - 0.72z^{-3}, \quad (4.22)$$

$$P_{y_k u_k}(z^{-1}) = 0.5 + 0.9z^{-1}, \quad (4.23)$$

donde $F(z^{-1})$, $G(z^{-1})$, $P_{y_k^2}(z^{-1})$ y $P_{y_k u_k}(z^{-1})$ se pueden asumir como las estimaciones iniciales de los parámetros del controlador $\hat{F}(z^{-1})$, $\hat{G}(z^{-1})$, $\hat{P}_{y_k^2}(z^{-1})$, y $\hat{P}_{y_k u_k}(z^{-1})$, respectivamente.

En la figura 4.7, se muestra el análisis de estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado utilizando el criterio de Tsytkin y Furuta (descrito en la sección 2.5), en presencia de incertidumbres paramétricas. En esta figura se observa que $\tilde{T}(e^{-j\omega})$, representado por la curva roja, se cruza con el círculo unitario $\mathcal{O}(1, 0)$ representado por la curva azul; por lo tanto, la condición suficiente para la estabilidad robusta no se cumple en este caso. Sin embargo, aunque no se cumple el criterio de Tsytkin y Furuta, esto no implica que el sistema necesariamente sea inestable; esto se debe a que dicho criterio nos dice que si la curva cerrada $\tilde{T}(e^{-j\omega})$ no se cruza con el círculo unitario $\mathcal{O}(1, 0)$ el sistema es robustamente estable, más no afirma que en caso de cruzarse ambas curvas el sistema en lazo cerrado sea inestable. Es decir, aunque el criterio de Tsytkin y Furuta no se cumple para los polinomios de diseño (4.18) y (4.19), se puede observar en la figura 4.8 como el sistema controlado por el algoritmo auto-ajustable (3.33), (3.34) y (3.38) propuesto sigue la referencia mientras que con el CMVG aunque se estabiliza no se cumple con el seguimiento de la referencia. En la figura 4.9 se muestra la dinámica de los controladores, donde se observa que el controlador auto-ajustable genera muy mayor esfuerzo respecto al CMVG, sin embargo, esto no es un inconveniente ya que con el controlador auto-ajustable se logra el objetivo de seguimiento de referencia.

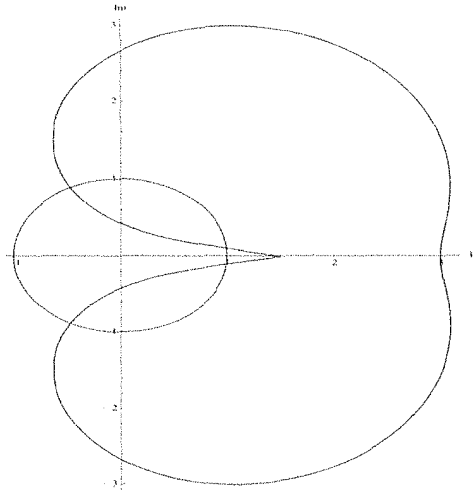


Figura 4.7. Análisis de la estabilidad robusta para el sistema (4.2): $\tilde{T}(e^{-j\omega})$ y $o(1, 0)$.

www.bdigital.ula.ve

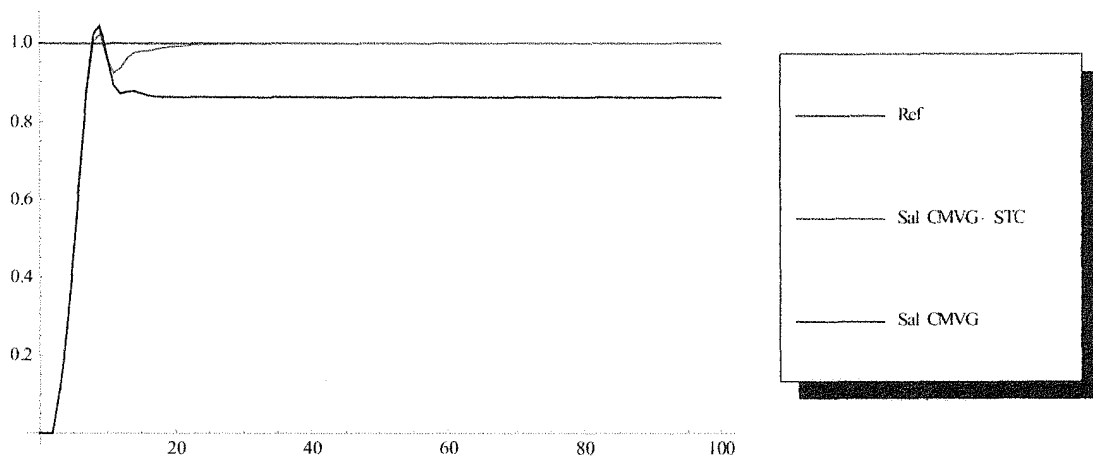


Figura 4.8. Comparación de la salida del sistema no lineal controlado por medio de CMVG (verde) y el controlador auto-ajutable (azul).

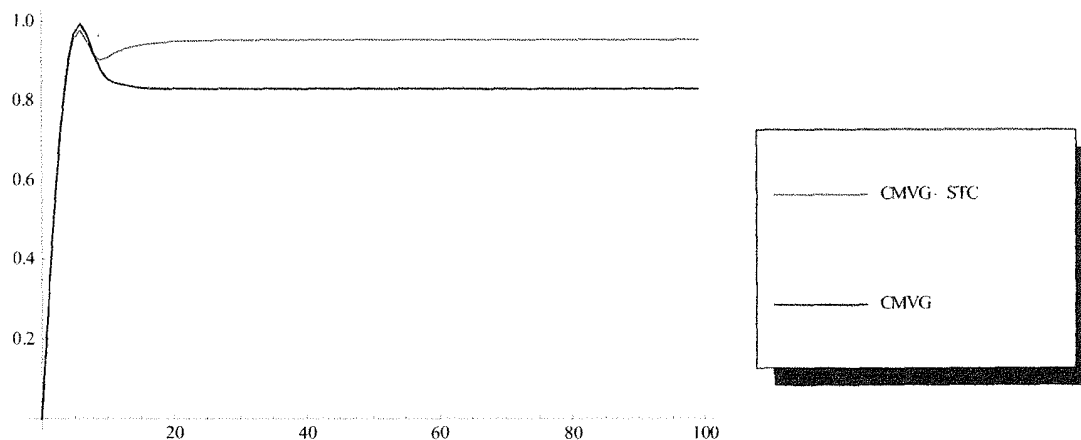


Figura 4.9. Comparación de la dinámica del CMVG (verde) y el controlador auto-ajustable (azul).

El análisis de los resultados obtenidos por medio de la simulación para los parámetros del controlador, la superficie deslizante y la función de Lyapunov es análogo al presentado en el ejemplo anterior, es decir, los parámetros del controlador convergen a un valor constante, el cual no es necesariamente su valor real. La superficie en modo deslizante se anula al aplicar el controlador auto-ajustable propuesto mientras que en el caso del CMVG no se logra anular debido a la presencia de incertidumbre paramétrica en el modelo. La estabilidad del sistema controlado se verifica debido a que la función de Lyapunov es semidefinida negativa.

Posteriormente, se aplicó el controlador auto-ajustable y el CMVG a los casos donde la función $a_1(q)$ depende de la señal de salida y se obtuvo un comportamiento equivalente al presentado en este ejemplo, donde con el controlador auto-ajustable propuesto cumple el seguimiento de la referencia, mientras que en el caso del CMVG no se cumple dicho seguimiento, debido a la presencia de incertidumbre en los parámetros del modelo, lo cual genera que la variable en modo deslizante no se anule.

4.2.3 Ejemplo 3. Sistema no lineal de tercer orden

En el caso del sistema no lineal de tercer orden se prueba el algoritmo auto-ajustable propuesto (3.33), (3.34) y (3.38) y el CMVG, y se comparan los resultados, obteniendo que el controlador auto-ajustable permite cumplir con el objetivo de seguimiento de la referencia en presencia de incertidumbre paramétrica. Mientras que para el caso del CMVG no se cumple dicho objetivo en ninguno de los casos probados. Este procedimiento se aplicó tanto para los casos donde $a_1(q)$ y $a_2(q)$ son constantes (casos mostrados en la tabla 3.4), como cuando dependen de la señal de salida y, para ambos, casos el análisis de los resultados es análogo. En esta sección se presenta un ejemplo perteneciente a los casos donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ dependen de la señal de salida (caso 2 mostrado en la tabla 3.5 del capítulo 3).

4.2.3.1 Sistema de tercer orden donde las funciones $a_1(q)$ y $a_2(q)$ dependen de la señal de salida

Considere el siguiente modelo del sistema,

$$y_{k+3} + a_1(q)y_{k+2} + a_2(q)y_{k+1} + a_3(q)y_k = b(q)u_k, \quad (4.24)$$

donde:

$$a_1(q) = a_{11} + a_{12}y_{k+2} + a_{13}y_{k+2}^2, \quad (4.25)$$

$$a_2(q) = a_{21} + a_{22}y_{k+1} + a_{23}y_{k+1}^2, \quad (4.26)$$

$$a_3(q) = a_{31} + a_{32}y_k + a_{33}y_k^2, \quad (4.27)$$

$$b(q) = b_0 + b_1y_k + b_2y_k^2. \quad (4.28)$$

Sustituyendo los polinomios (4.25) – (4.28) en (4.24), se obtiene el siguiente modelo no lineal:

$$(1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} + a_{31}z^{-3})y_k + (a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2} + a_{32}z^{-3})y_k^2 + (a_{13}z^{-1} + a_{23}z^{-2} + a_{33}z^{-3})y_k^3 = z^{-d}(b_0u_k + b_1y_ku_k + b_2y_k^2u_k), \quad (4.29)$$

donde $d = 3$ y los intervalos de incertidumbre en los parámetros son:

$$\begin{aligned} a_{11} &\in [-0.8 \quad -0.2]; a_{12} \in [0.1 \quad 0.5]; a_{13} \in [0.2 \quad 0.6]; a_{21} \in [-0.4 \quad -0.2]; \\ a_{22} &\in [0.1 \quad 0.7]; a_{23} \in [0.1 \quad 0.3]; a_{31} \in [-0.9 \quad -0.1]; a_{32} \in [0.2 \quad 1]; \\ a_{33} &\in [0.1 \quad 0.5]; b_0 \in [0.1 \quad 0.5]; b_1 \in [0.1 \quad 0.9]; b_2 \in [0.1 \quad 0.3]. \end{aligned}$$

El modelo nominal del sistema no lineal está representado por:

$$(1 - 0.5z^{-1} - 0.3z^{-2} - 0.5z^{-3})y_k + (0.3z^{-1} + 0.4z^{-2} + 0.6z^{-3})y_k^2 + (0.4z^{-1} + 0.2z^{-2} + 0.3z^{-3})y_k^3 = z^{-d}(0.3u_k + 0.5y_ku_k + 0.2y_k^2u_k), \quad (4.30)$$

cuyo rango de intervalo de perturbaciones para $\gamma = 1$ son: $\alpha_1 = 0.3$; $\alpha_2 = 0.1$; $\alpha_3 = 0.4$; $v_1 = 0.2$.

El modelo real se asume como,

$$(1 - 0.3z^{-1} - 0.25z^{-2} - 0.3z^{-3})y_k + (0.2z^{-1} + 0.6z^{-2} + 0.9z^{-3})y_k^2 + (0.5z^{-1} + 0.15z^{-2} + 0.4z^{-3})y_k^3 = z^{-d}(0.4u_k + 0.7y_ku_k + 0.15y_k^2u_k), \quad (4.31)$$

Los polinomios de diseño $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ para el controlador del sistema (4.30) son:

$$C(z^{-1}) = 1 + 1.7z^{-1} + 1.07z^{-2} + 0.307z^{-3} + 0.0396z^{-4} + 0.0018z^{-5}, \quad (4.32)$$

$$Q(z^{-1}) = q_0(1 - z^{-1}) = 50(1 - z^{-1}), \quad (4.33)$$

con los cuales se obtienen los siguientes polinomios para la ley de control,

$$F(z^{-1}) = 2.702 + 1.8806z^{-1} + 1.2368z^{-2}, \quad (4.34)$$

$$G(z^{-1}) = 50.3 - 49.34z^{-1} + 0.741z^{-2}, \quad (4.35)$$

$$P_{y_k^2}(z^{-1}) = -0.3z - 1.06z^{-2} - 2.221z^{-3} - 2.308z^{-4} - 1.482z^{-5}, \quad (4.36)$$

$$P_{y_k^3}(z^{-1}) = -0.4z - 1.08z^{-2} - 1.728z^{-3} - 1.154z^{-4} - 0.741z^{-5}, \quad (4.37)$$

$$P_{y_k u_k}(z^{-1}) = 0.5 + 1.1z^{-1} + 1.235z^{-2}, \quad (4.38)$$

$$P_{y_k^2 u_k}(z^{-1}) = 0.2 + 0.44z^{-1} + 0.494z^{-2}, \quad (4.39)$$

donde $F(z^{-1})$, $G(z^{-1})$, $P_{y_k^2}(z^{-1})$, $P_{y_k^3}(z^{-1})$, $P_{y_k u_k}(z^{-1})$ y $P_{y_k^2 u_k}(z^{-1})$ se pueden asumir como las estimaciones iniciales de los parámetros del controlador $\hat{F}(z^{-1})$, $\hat{G}(z^{-1})$, $\hat{P}_{y_k^2}(z^{-1})$, $\hat{P}_{y_k^3}(z^{-1})$, $\hat{P}_{y_k u_k}(z^{-1})$ y $\hat{P}_{y_k^2 u_k}(z^{-1})$, respectivamente.

Los resultados de las simulaciones para el comportamiento de la salida utilizando el CMVG y el CMVG-STC se muestran en la figura 4.10, donde se observa que al aplicar el controlador auto-ajutable al sistema no lineal se cumple con el seguimiento de la referencia en presencia de incertidumbre paramétrica mientras que al aplicar el CMVG aunque se estabiliza al sistema no hace seguimiento de la referencia. Los resultados obtenidos para la dinámica de la ley de control, la superficie en modo deslizante, la función de Lyapunov y el comportamiento de los parámetros del controlador son análogos a los presentados en el caso anterior.

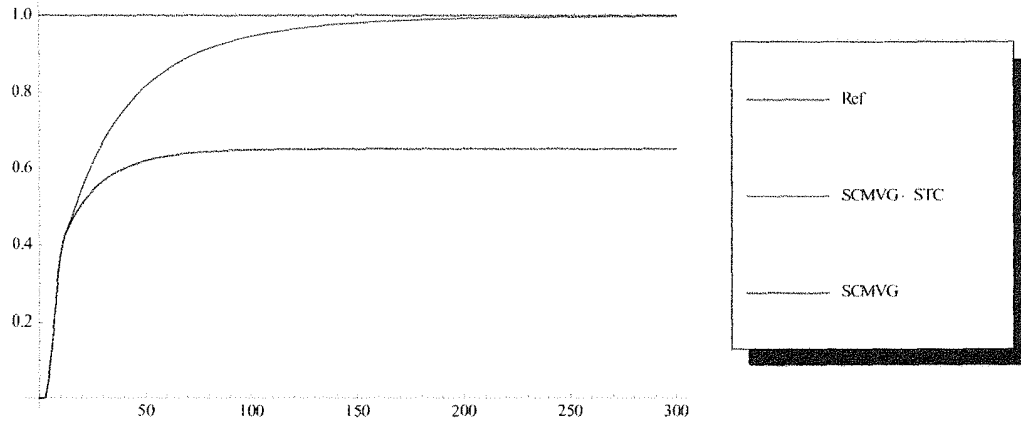


Figura 4.10. Comparación de la salida del sistema no lineal controlado por medio de CMVG (verde) y el controlador auto-ajustable (azul).

4.2.4 Análisis de los resultados

En general, al aplicar el controlador auto-ajustable (3.33), (3.34) y (3.38) propuesto al sistema no lineal de primer, segundo o tercer orden con incertidumbre paramétrica se obtuvo como resultado de las simulaciones realizadas que el comportamiento de la salida del sistema controlado sigue la referencia, lo que implica que se anula la variable en modo deslizante. Mientras que al aplicar el controlador de mínima varianza generalizada aunque se estabiliza el sistema no hace seguimiento de la referencia lo que conlleva a que la variable en modo deslizante no está siendo anulada debido a la presencia de incertidumbre paramétrica presente en los modelos matemáticos no lineales escogidos. Se pudo observar que la dinámica del control exhibe un buen rendimiento para ambos controladores, es decir, en todos los casos se observó que la curva de la dinámica del controlador auto-ajustable es una curva suave, sin embargo en los resultados para el sistema no lineal de primer orden este requirió un menor esfuerzo que el CMVG. Mientras que para los casos de los sistemas no lineales de segundo y tercer orden el esfuerzo del controlador auto-ajustable fue mayor que el del CMVG, sin embargo, esto no es un

inconveniente ya que con el controlador auto-ajustable se logra el objetivo de seguimiento de referencia.

El comportamiento de los parámetros del controlador en todos los casos probados no necesariamente converge a su valor real, sin embargo convergen a un valor constante. Al aplicar el controlador auto-ajustable propuesto se observó que el comportamiento de la función de Lyapunov es una curva ubicada en el plano negativo como la mostrada en la figura 4.6, es decir, se cumple con que es semidefinida negativa, con lo cual se verifica la estabilidad del sistema controlado.

El análisis de estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado usando el criterio de Tsytkin y Furuta (sección 2.5), en presencia de incertidumbres paramétricas se cumplió para el sistema no lineal de primer orden. En los casos del sistema no lineal de segundo y tercer orden no se cumplió, sin embargo, esto no fue impedimento para poder controlar al sistema. Esto se debe a que dicho criterio nos dice que si la curva cerrada $\tilde{T}(e^{-j\omega})$ no se cruza con el círculo unitario $o(1,0)$ el sistema es robustamente estable, más no se afirma que en caso de cruzarse ambas curvas el sistema en lazo cerrado es inestable para los polinomios de diseño $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ usados en cada caso. Además es importante acotar que este criterio solamente considera para el análisis de robustez los términos lineales presentes en el modelo matemático no lineal del sistema y en estos casos se usó para tener una idea previa de la estabilidad del sistema controlado.

4.3 El péndulo simple

Debido a que el péndulo simple es un sistema físico típico en el estudio y análisis de sistemas no lineales de control, y desde el punto de su modelado matemático posee no linealidades representadas por funciones trigonométricas, las cuales se pueden reemplazar por su respectiva serie de Taylor y con esto transformar las no linealidades trigonométricas a no linealidades polinómicas (las cuales son de interés en esta investigación), en esta sección se hace el estudio y análisis de dicho sistema. En la sección 4.3.1 se presenta el modelado matemático del sistema físico, en la sección 4.3.2 se expande el término no lineal del modelo matemático por su Serie de Taylor, tomando para el primer caso los dos primeros términos, luego los tres primeros términos y por último los cuatros primeros términos de dicha serie. Posteriormente, en la sección 4.3.3 se muestran los resultados obtenidos por medio de las simulaciones y se hace un análisis de dichos resultados para cada caso de estudio. Finalmente, en la sección 4.3.4 se realiza un análisis de los resultados de forma general.

4.3.1 Modelado matemático del péndulo simple

El péndulo es un dispositivo formado por un objeto suspendido de un punto fijo y que oscila de un lado a otro bajo la influencia de la gravedad. Se denomina péndulo simple a todo cuerpo de masa m (de pequeñas dimensiones) suspendido por medio de un hilo inextensible, donde el extremo superior de la cuerda está fijo, como se muestra en la figura 4.11, capaz de oscilar libremente en el vacío. Al separar la masa de su posición de equilibrio, oscila a ambos lados de dicha posición, realizando un movimiento armónico simple.

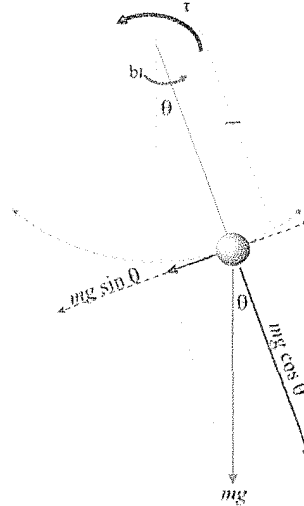


Figura 4.11. Péndulo simple.

En la figura 4.11, θ representa el ángulo respecto al eje vertical, τ es el par ejercido, m la masa, g la aceleración de la gravedad, l la longitud de la cuerda sin masa supuestamente inextensible y $b1$ es considerada la constante de fricción del péndulo en el eje de rotación.

Realizando el modelado del péndulo físico (usando la segunda ley de Newton) se obtiene la ecuación diferencial (4.40):

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b1 \frac{d\theta(t)}{dt} + mlg \sin \theta(t) = \tau(t), \quad (4.40)$$

donde J es el momento de inercia respecto al eje de rotación, el cual corresponde a $J = ml^2$ aproximando el péndulo a una masa concentrada.

4.3.2 Casos de estudio del péndulo simple

En esta sección se presentan tres casos desarrollados para el péndulo simple. En cada caso se toma una cantidad determinada de términos de la serie de Taylor de la función $\sin \theta(t)$, debido a que este término es el que genera la no linealidad, y su serie de Taylor es:

$$\sin \theta(t) = \theta(t) - \frac{\theta(t)^3}{3!} + \frac{\theta(t)^5}{5!} - \frac{\theta(t)^7}{7!} + \frac{\theta(t)^9}{9!} - \frac{\theta(t)^{11}}{11!} + \dots + \frac{(-1)^n \theta(t)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.41)$$

En el primer caso que se presenta se hace el desarrollo matemático hasta llegar al modelo no lineal y se muestra la ley de control de mínima varianza generalizada que se usa. En los siguientes dos casos se obvian algunos de estos cálculos para evitar la repetitividad, ya que los cálculos matemáticos son similares para obtener el modelo no lineal.

4.3.2.1 Extensión del término no lineal a los dos primeros términos de la serie de Taylor

Tomando los dos primeros términos de la serie de Taylor (4.41) y sustituyendo en la ecuación diferencial (4.40) obtenemos:

$$J\ddot{\theta}(t) + b_1\dot{\theta}(t) + mlg\left(\theta(t) - \frac{\theta(t)^3}{3!}\right) = \tau(t). \quad (4.42)$$

Ahora transformamos la ecuación diferencial (4.42) en una ecuación en diferencia, por medio de la aproximación de Euler:

$$\theta(t) = \theta(kT_0), \quad (4.43)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\theta((k+1)T_0) - \theta(kT_0)}{T_0}, \quad (4.44)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{\theta((k+2)T_0) - 2\theta((k+1)T_0) + \theta(kT_0)}{T_0^2}. \quad (4.45)$$

Sustituyendo (4.43)- (4.45) en (4.42) se obtiene,

$$J \left(\frac{\theta((k+2)T_0) - 2\theta((k+1)T_0) + \theta(kT_0)}{T_0^2} \right) + b_1 \left(\frac{\theta((k+1)T_0) - \theta(kT_0)}{T_0} \right) + mlg \left(\theta(kT_0) - \frac{\theta(kT_0)^3}{3!} \right) = \tau(kT_0), \quad (4.46)$$

$$\frac{J}{T_0^2} \theta((k+2)T_0) + \left(\frac{b_1}{T_0} - \frac{2J}{T_0^2} \right) \theta((k+1)T_0) + \left(\frac{J}{T_0^2} - \frac{b_1}{T_0} + mlg \right) \theta(kT_0) - \frac{mlg}{3!} \theta(kT_0)^3 = \tau(kT_0). \quad (4.47)$$

Desplazando $\theta((k+2)T_0)$ a $\theta(kT_0)$

$$\frac{J}{T_0^2} \theta(kT_0) + \left(\frac{b_1}{T_0} - \frac{2J}{T_0^2} \right) \theta((k-1)T_0) + \left(\frac{J}{T_0^2} - \frac{b_1}{T_0} + mlg \right) \theta((k-2)T_0) - \frac{mlg}{3!} \theta((k-2)T_0)^3 = \tau((k-2)T_0), \quad (4.48)$$

$$\frac{J}{T_0^2} \theta(kT_0) + \left(\frac{b_1}{T_0} - \frac{2J}{T_0^2} \right) z^{-1} \theta(kT_0) + \left(\frac{J}{T_0^2} - \frac{b_1}{T_0} + mlg \right) z^{-2} \theta(kT_0) - \frac{mlg}{3!} z^{-2} \theta(kT_0)^3 = z^{-2} \tau(kT_0), \quad (4.49)$$

$$\left(\frac{J}{T_0^2} + \left(\frac{b_1}{T_0} - \frac{2J}{T_0^2}\right)z^{-1} + \left(\frac{J}{T_0^2} - \frac{b_1}{T_0} + mlg\right)z^{-2}\right)\theta(kT_0) - \frac{mlg}{3!}z^{-2}\theta(kT_0)^3 = z^{-2}\tau(kT_0), \quad (4.50)$$

$$A(z^{-1})\theta(kT_0) + \Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})\theta(kT_0)^3 = z^{-d}B(z^{-1})\tau(kT_0), \quad (4.51)$$

donde:

$$A(z^{-1}) = \frac{J}{T_0^2} + \left(\frac{b_1}{T_0} - \frac{2J}{T_0^2}\right)z^{-1} + \left(\frac{J}{T_0^2} - \frac{b_1}{T_0} + mlg\right)z^{-2},$$

$$\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1}) = -\frac{mlg}{3!}z^{-2},$$

$$B(z^{-1}) = 1,$$

$$d = 2.$$

www.bdigital.ula.ve

La ley de control de mínima varianza generalizada requerida para anular la variable de la superficie deslizante \mathbf{s}_{k+d} está dado por:

$$\tau(kT_0) = -\frac{[F(z^{-1})\theta(kT_0) + P_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})\theta((k+d)T_0)^3 - C(z^{-1})\tau_{k+d}]}{G(z^{-1})}, \quad (4.52)$$

donde:

$$P_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

$$G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$$

Observación 4.3.2.1.1. El procedimiento para el cálculo de la ley de control (4.52) es similar al mostrado en la sección 3.3. Estos cálculos no son necesarios realizarlos para conocer

la ley de control que se debe aplicar a cada caso. Lo primero que se debe observar son las señales lineales, no lineales y bilineales que forman parte del modelo matemático del sistema. Luego en la ley de control (3.32) de la sección 3.3, se eliminan los polinomios de las señales que no están presentes en el modelo matemático y solo se calculan los polinomios de las señales que están incluidas en dicho modelo. De forma similar sucede con los casos que se presentan a continuación.

4.3.2.2 Extensión del término no lineal a los tres primeros términos de la serie de Taylor

Tomando los tres primeros términos de la serie de Taylor (4.41) y sustituyendo en la ecuación diferencial (4.40) obtenemos:

$$\ddot{\theta}(t) + b_1 \dot{\theta}(t) + mlg \left(\theta(t) - \frac{\theta(t)^3}{3!} + \frac{\theta(t)^5}{5!} \right) = \tau(t), \quad (4.53)$$

Ahora transformamos la ecuación diferencial (4.53) en una ecuación en diferencia, por medio de las ecuaciones (4.43) - (4.45):

$$J \left(\frac{\theta((k+2)T_0) - 2\theta((k+1)T_0) + \theta(kT_0)}{T_0^2} \right) + b_1 \left(\frac{\theta((k+1)T_0) - \theta(kT_0)}{T_0} \right) + mlg \left(\theta(kT_0) - \frac{\theta(kT_0)^3}{3!} + \frac{\theta(kT_0)^5}{5!} \right) = \tau(kT_0), \quad (4.54)$$

Y realizando operaciones similares a los de la sección 4.3.3.1, se obtiene el modelo no lineal mostrado en (4.55),

$$A(z^{-1})\theta(kT_0) + \Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})\theta(kT_0)^3 + \Lambda_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})\theta(kT_0)^5 = z^{-d}B(z^{-1})\tau(kT_0), \quad (4.55)$$

donde:

$$A(z^{-1}) = \frac{J}{T_0^2} + \left(\frac{b_1}{T_0} - \frac{2J}{T_0^2}\right)z^{-1} + \left(\frac{J}{T_0^2} - \frac{b_1}{T_0} + mlg\right)z^{-2},$$

$$\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1}) = -\frac{mlg}{3!}z^{-2},$$

$$\Lambda_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1}) = \frac{mlg}{5!}z^{-2},$$

$$B(z^{-1}) = 1,$$

$$d = 2.$$

www.bdigital.ula.ve

La ley de control de mínima varianza generalizada requerida para anular la variable de la superficie deslizante s_{k+d} está dado por:

$$\tau(kT_0) = -\frac{[F(z^{-1})\theta(kT_0) + P_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})\theta((k+d)T_0)^3 + P_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})\theta((k+d)T_0)^5 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1})}, \quad (4.56)$$

donde:

$$P_{\theta(kT_0)^3} = -\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta(kT_0)^5} = -\Lambda_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$$

4.3.2.3 Extensión del término no lineal a los cuatro primeros términos de la serie de Taylor

Al sustituir los cuatro primeros términos de la serie de Taylor (4.41) en la ecuación diferencial (4.40) obtenemos:

$$\ddot{\theta}(t) + b_1 \dot{\theta}(t) + mlg \left(\theta(t) - \frac{\theta(t)^3}{3!} + \frac{\theta(t)^5}{5!} - \frac{\theta(t)^7}{7!} \right) = \tau(t). \quad (4.57)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.43) - (4.45) en la ecuación diferencial (4.57) se obtiene la ecuación en diferencia (4.58):

$$J \left(\frac{\theta((k+2)T_0) - 2\theta((k+1)T_0) + \theta(kT_0)}{T_0^2} \right) + b_1 \left(\frac{\theta((k+1)T_0) - \theta(kT_0)}{T_0} \right) + mlg \left(\theta(kT_0) - \frac{\theta(kT_0)^3}{3!} + \frac{\theta(kT_0)^5}{5!} - \frac{\theta(kT_0)^7}{7!} \right) = \tau(kT_0) \quad (4.58)$$

Y realizando operaciones matemáticas similares a las presentadas en el caso 4.3.3.1, se obtiene el siguiente modelo no lineal:

$$A(z^{-1})\theta(kT_0) + \Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})\theta(kT_0)^3 + \Lambda_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})\theta(kT_0)^5 + \Lambda_{\theta(kT_0)^7}(z^{-1})\theta(kT_0)^7 = z^{-d}B(z^{-1})\tau(kT_0), \quad (4.59)$$

donde:

$$A(z^{-1}) = \frac{J}{T_0^2} + \left(\frac{b_1}{T_0} - \frac{2J}{T_0^2} \right) z^{-1} + \left(\frac{J}{T_0^2} - \frac{b_1}{T_0} + mlg \right) z^{-2},$$

$$\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1}) = -\frac{mlg}{3!} z^{-2},$$

$$\Lambda_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1}) = \frac{mlg}{5!} z^{-2},$$

$$\Lambda_{\theta(kT_0)^7}(z^{-1}) = -\frac{mlg}{7!} z^{-2},$$

$$B(z^{-1}) = 1,$$

$$d = 2.$$

La ley de control de mínima varianza generalizada requerida para anular la variable de la superficie deslizante s_{k+d} está dado por:

$$\tau(kT_0) = \frac{\left[F(z^{-1})\theta(kT_0) + P_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})\theta((k+d)T_0)^3 + P_{\theta(kT_0)^7}(z^{-1})\theta((k+d)T_0)^7 \right]}{G(z^{-1})}, \quad (4.60)$$

$$\frac{\left[P_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})\theta((k+d)T_0)^5 - C(z^{-1})r_{k+d} \right]}{G(z^{-1})},$$

donde:

$$P_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

$$P_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

$$P_{\theta(kT_0)^7}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta(kT_0)^7}(z^{-1})E(z^{-1}),$$

$$G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$$

4.3.3 Simulaciones para los casos de estudio del péndulo simple

A continuación se muestran los resultados obtenidos por medio de simulaciones al aplicar CMVG (sección 3.3) y el controlador auto-ajutable (CMVG-STC) propuesto (sección 3.4 del capítulo 3) a cada uno de los casos presentados en la sección 4.3.2. Se compara la respuesta de

la salida del sistema controlado por el CMVG con la del controlador auto-ajustable, la dinámica del control y el comportamiento de la superficie deslizante para ambos controladores.

Se asume que la masa y la fricción del péndulo simple poseen incertidumbre paramétrica, los demás parámetros del modelo matemático son conocidos. Los valores de los parámetros se muestran en la tabla 4.1.

Tabla 4.1. Parámetros del péndulo simple.

Parámetro físico	Valor
Masa $m[kg]$	[0.1; 0.7]
Longitud de la cuerda $l[m]$	1
Gravedad $g[m/s^2]$	9.8
Fricción	[0.1; 0.9]

Para las simulaciones se toma como condición inicial de la posición del péndulo simple el valor cero (rad), es decir, $\theta(kT_0) = 0(rad)$.

4.3.3.1 Simulaciones para el caso presentado en la sección 4.3.2.1

Para el modelo nominal del sistema no lineal, los términos de los polinomios $A(z^{-1})$ y $A_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})$ se calculan sustituyendo los valores máximos y mínimos de la masa y la fricción en el modelo matemático, obteniendo como valores máximos y mínimos para cada uno de los términos de los polinomios los siguientes valores:

$$a_{11} = [-1.97768; -0.59375]; a_{21} = [-0.28375; 1.10018];$$

$$a_{22} = [-0.02042; -0.02042]; b_0 = [0.02232; 0.15625].$$

Conocidos los valores máximos y mínimos de los términos de los polinomios, se calcula el modelo nominal por medio del promedio de éstos, obteniendo el sistema no lineal mostrado en la ecuación (4.61):

$$(1 - 1.29z^{-1} + 0.41z^{-2})\theta(kT_0) - 0.02z^{-2}\theta(kT_0)^3 = z^{-2}0.089\tau(kT_0). \quad (4.61)$$

El modelo real se asume como,

$$(1 - 1.84z^{-1} + 0.97z^{-2})\theta(kT_0) - 0.02z^{-2}\theta(kT_0)^3 = z^{-2}0.031\tau(kT_0). \quad (4.62)$$

Los polinomios de diseño usados para el cálculo de la ley de control son:

$$C(z^{-1}) = 1 + 0.25z^{-1} + 0.35z^{-2} + 0.45z^{-3}, \quad (4.63)$$

$$Q(z^{-1}) = 50(1 - z^{-1}), \quad (4.64)$$

que conducen a los siguientes polinomios para la ley nominal de control,

$$F(z^{-1}) = 2.0163 - 0.2769z^{-1}, \quad (4.65)$$

$$G(z^{-1}) = 50.089 - 49.863z^{-1}, \quad (4.66)$$

$$P_{\theta_k^3}(z^{-1}) = 0.020z^{-2} + 0.031z^{-3}, \quad (4.67)$$

donde $F(z^{-1})$, $G(z^{-1})$ y $P_{\theta_k^3}(z^{-1})$ se pueden asumir como las estimaciones iniciales de los parámetros del controlador $\hat{F}(z^{-1})$, $\hat{G}(z^{-1})$ y $\hat{P}_{\theta_k^3}(z^{-1})$, respectivamente y que serán usados para la estimación recursiva de la ley de control auto-ajutable.

El rango de intervalo de perturbaciones se calcula por medio de (2.44) y (2.45) para $\gamma = 1$ y son: $\alpha_1 = 0.69197$; $\alpha_2 = 0.69197$; $\nu_1 = 0.0669$.

El análisis de estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado usando el criterio de Tsytkin y Furuta (sección 2.5 del capítulo 2), en presencia de intervalos de incertidumbres paramétricos se muestra en la figura. 4.12 y 4.13. Donde se compara el análisis de robustez para el sistema en lazo cerrado usando un valor de $q_0 = 0.001$ y $q_0 = 50$. En el primer caso $\tilde{T}(e^{-jw})$ no se cruza con el círculo unitario $o(1,0)$, lo que implica que la condición suficiente para la estabilidad robusta se cumple, sin embargo al usar este valor de q_0 el algoritmo de control auto-ajutable genera errores de cálculo (es decir, en el algoritmo auto-ajutable la matriz Γ tiende a cero rápidamente, lo que ocasiona divisiones indeterminadas en el algoritmo), con lo cual no se puede controlar el péndulo simple.

Para el segundo caso $\tilde{T}(e^{-jw})$ se cruza con el círculo unitario $o(1,0)$, lo que implica que la condición suficiente para la estabilidad robusta no se cumple, sin embargo al usar $q_0 = 50$ el algoritmo de control no genera errores de cálculo matemáticos, logrando controlar el péndulo simple para diferentes ángulos. Verificando con esto que es necesario ampliar el criterio de Tsytkin y Furuta para estudiar la estabilidad robusta donde se incluyan las no linealidades del modelo matemático del sistema. Ya que, aunque en este caso no se cumple el

criterio esto no hace que el sistema en lazo cerrado no se pueda controlar, ya que el criterio afirma que si la curva cerrada $\tilde{T}(e^{-j\omega})$ no se cruza con el círculo unitario $o(1, 0)$ el sistema es robustamente estable, más no indica que en caso de cruzarse ambas curvas esto hará inestable al sistema en lazo cerrado, que es lo que se observa en este caso y por lo tanto es posible controlar el péndulo simple estabilizándolo en diferentes posiciones.

Este análisis de estabilidad robusta es aplicable a los demás casos estudiados del péndulo simple, ya que este análisis está basado en los polinomios $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$, los cuales se mantienen iguales en los siguientes casos de estudio. Por lo tanto, no se incluirá posteriormente.

www.bdigital.ula.ve

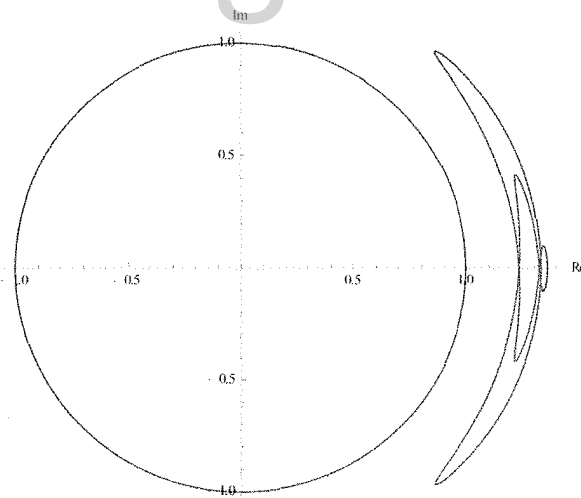


Figura 4.12. Análisis de la estabilidad robusta para el sistema (4.61) con $q_0 = 0.001$: $\tilde{T}(e^{-j\omega})$ y $o(1, 0)$.

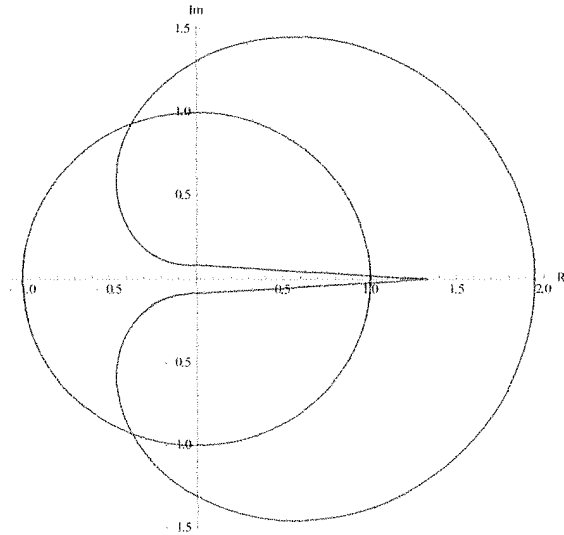


Figura 4.13. Análisis de la estabilidad robusta para el sistema (4.61) con $q_0 = 50: \tilde{T}(e^{-j\omega})$ y $\sigma(1, 0)$.

En este caso se empieza probando ambos controladores llevando al péndulo desde su posición inicial hasta una posición deseada, la cual se va aumentando gradualmente a partir de los $\frac{5\pi}{180}$ (o 5°) hasta llegar a $\frac{79\pi}{180}$, donde se observó que el controlador auto-ajustable ya no sigue la referencia.

En la tabla 4.2 se muestran los resultados obtenidos para diferentes posiciones deseadas del péndulo, indicando el comportamiento de la salida tanto para el CMVG como para el controlador auto-ajustable (CMVG-STC) propuesto.

Tabla 4.2. Comparación de las salidas controladas usando CMVG y el CMVG-STC.

Posición (rad)	Salida CMVG	Salida CMVG-STC
$\frac{5\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{30\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{45\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{60\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{75\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{78\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{79\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	No posee estabilidad asintótica a la referencia

En la figura 4.14 se presentan las respuestas de la salida del sistema (4.62), utilizando el controlador CVMG y el controlador auto-ajustable, el comportamiento de la variable de modo deslizante y la dinámica del control para $\frac{15\pi}{180}$. En la figura 4.15 para $\frac{60\pi}{180}$ y en la figura 4.16 para $\frac{79\pi}{180}$. La condición inicial para Γ es $\Gamma_0 = I$. La señal de referencia se elige como un escalón unitario con una longitud de 200 muestras.

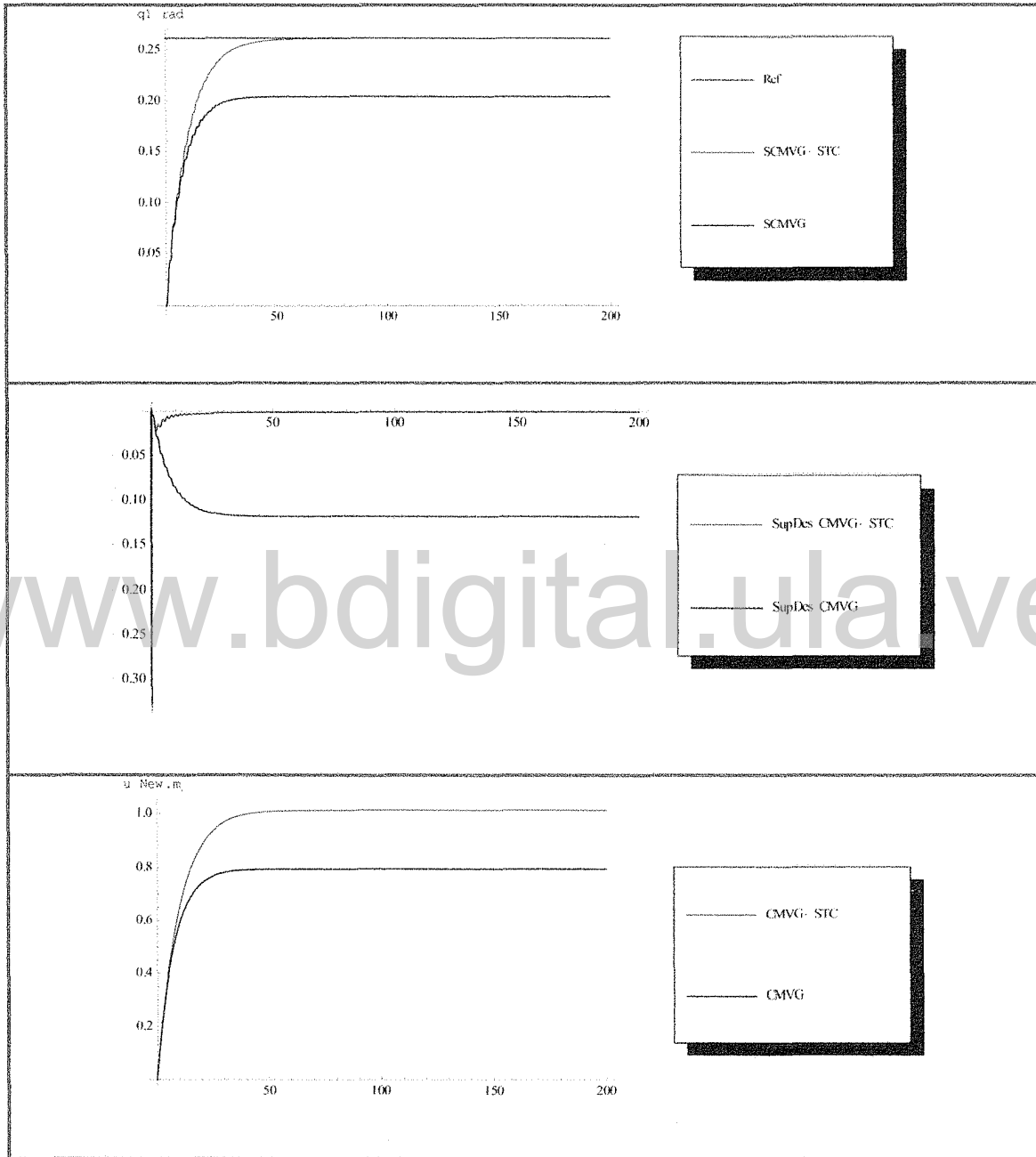


Figura 4.14. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $15\pi/180$.

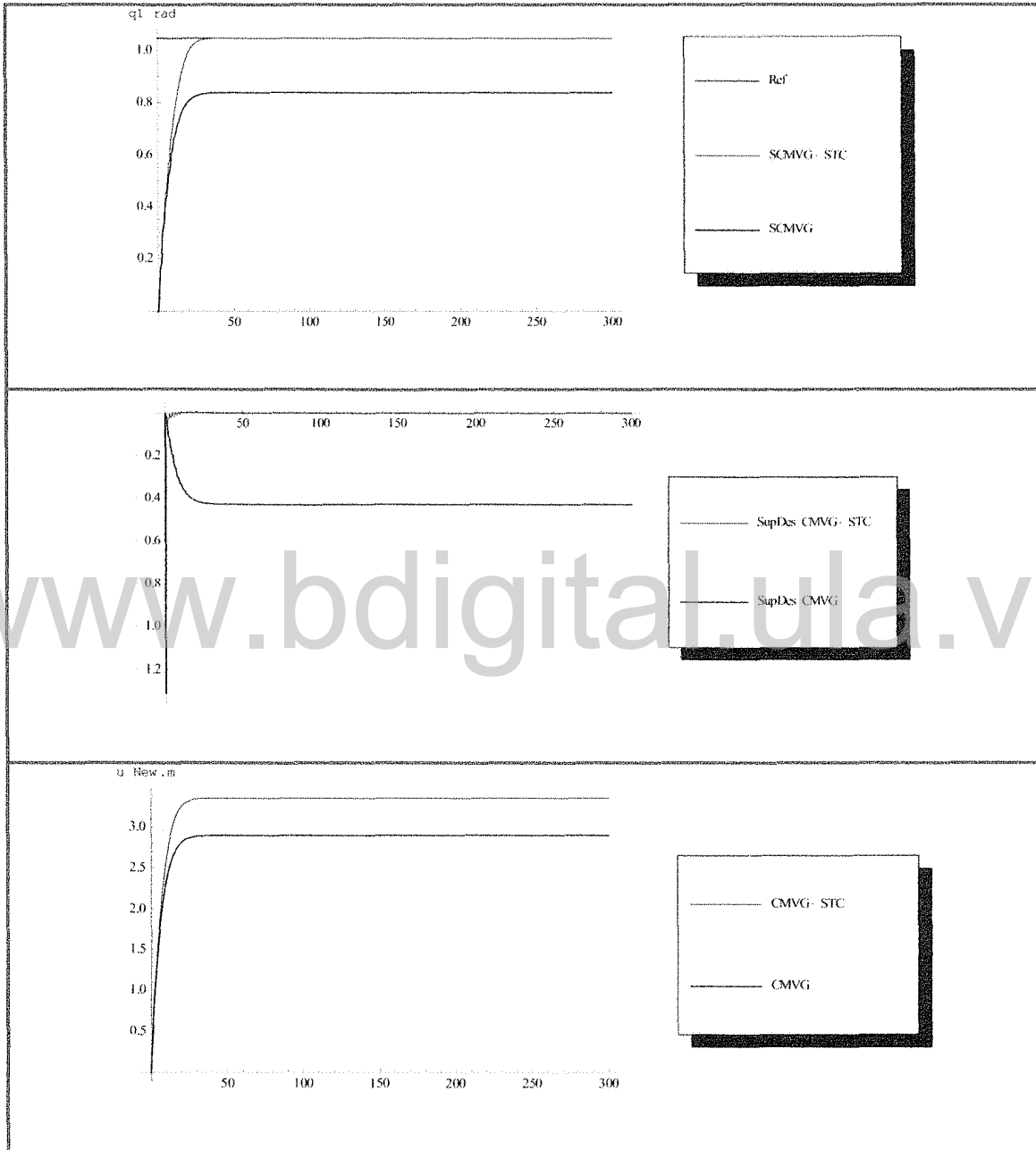


Figura 4.15. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $60\pi/180$.

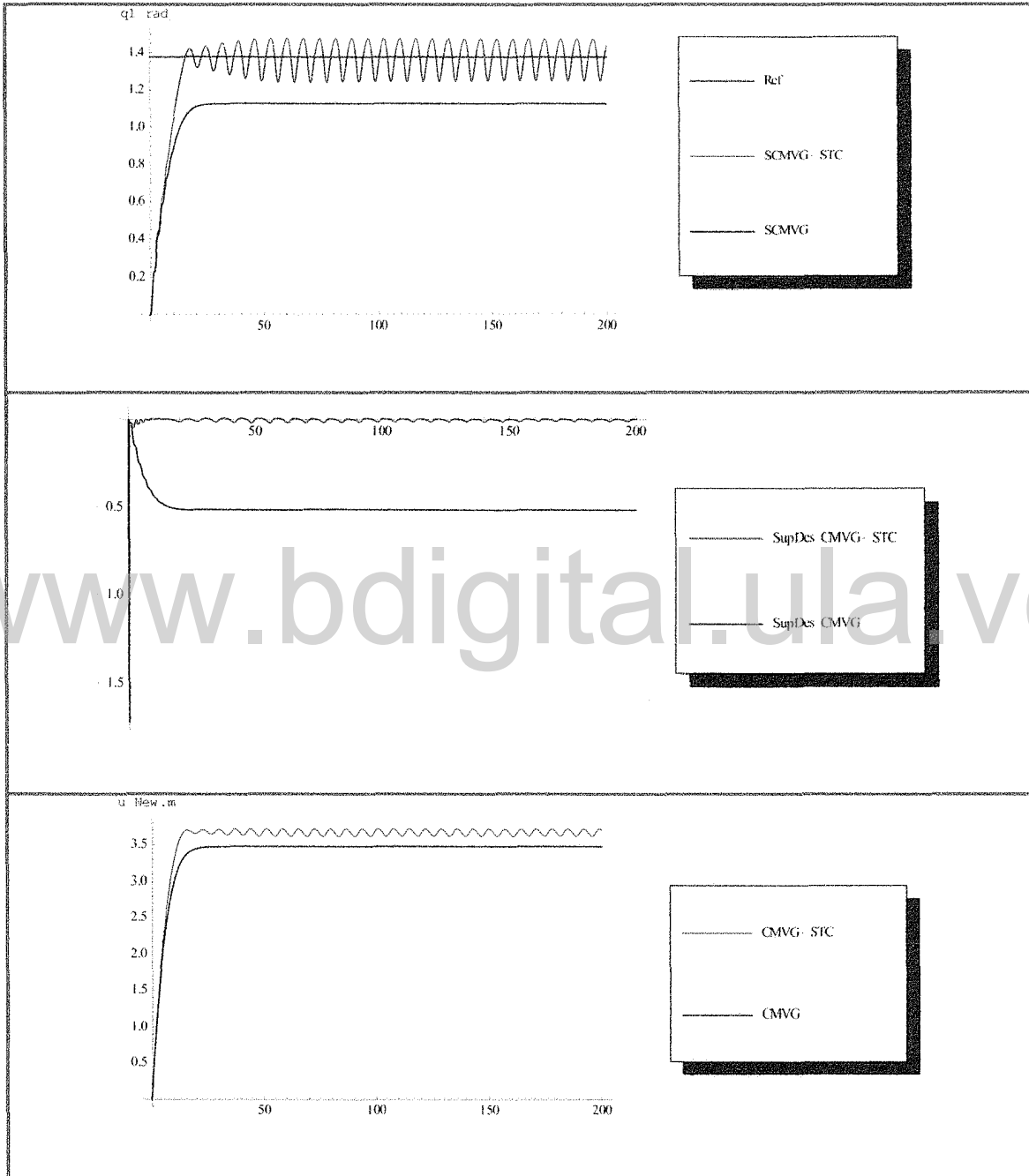


Figura 4.16. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $79\pi/180$.

En las figuras 4.14 y 4.15, se observa que la salida del sistema controlado por el controlador de mínima varianza generalizada (CMVG) se estabiliza, sin embargo no sigue la referencia. Mientras que al aplicar el controlador auto-ajutable (CMVG-STC) propuesto se logra estabilizar el péndulo simple en la posición deseada. Esto se verifica al ver que la variable de modo deslizante es anulada al usar el controlador auto-ajutable (en presencia de incertidumbre paramétrica), lo que no sucede al aplicar solo el controlador de mínima varianza generalizada.

En el caso del comportamiento de la dinámica de los controladores se observa que el controlador auto-ajutable realiza un mayor esfuerzo respecto al CMVG, sin embargo este esfuerzo se ve compensado ya que se logra cumplir con objetivo de seguimiento de referencia. En la figura 4.16 se muestra que ya no es posible estabilizar asintóticamente el péndulo en la posición deseada con el controlador auto-ajutable y tampoco se logra en seguimiento de la referencia con el CMVG.

La figura 4.17 muestra el comportamiento de los parámetros del controlador, los cuales no necesariamente convergen a su valor real pero si lo hacen a un valor constante. Estos parámetros se mantienen para las diferentes posiciones del péndulo simple que se probaron. En estas figuras las líneas rojas representan el comportamiento de los parámetros del controlador, los cuales se van ajustando hasta llegar a un valor constante, y las líneas verdes el valor real de los parámetros del controlador.

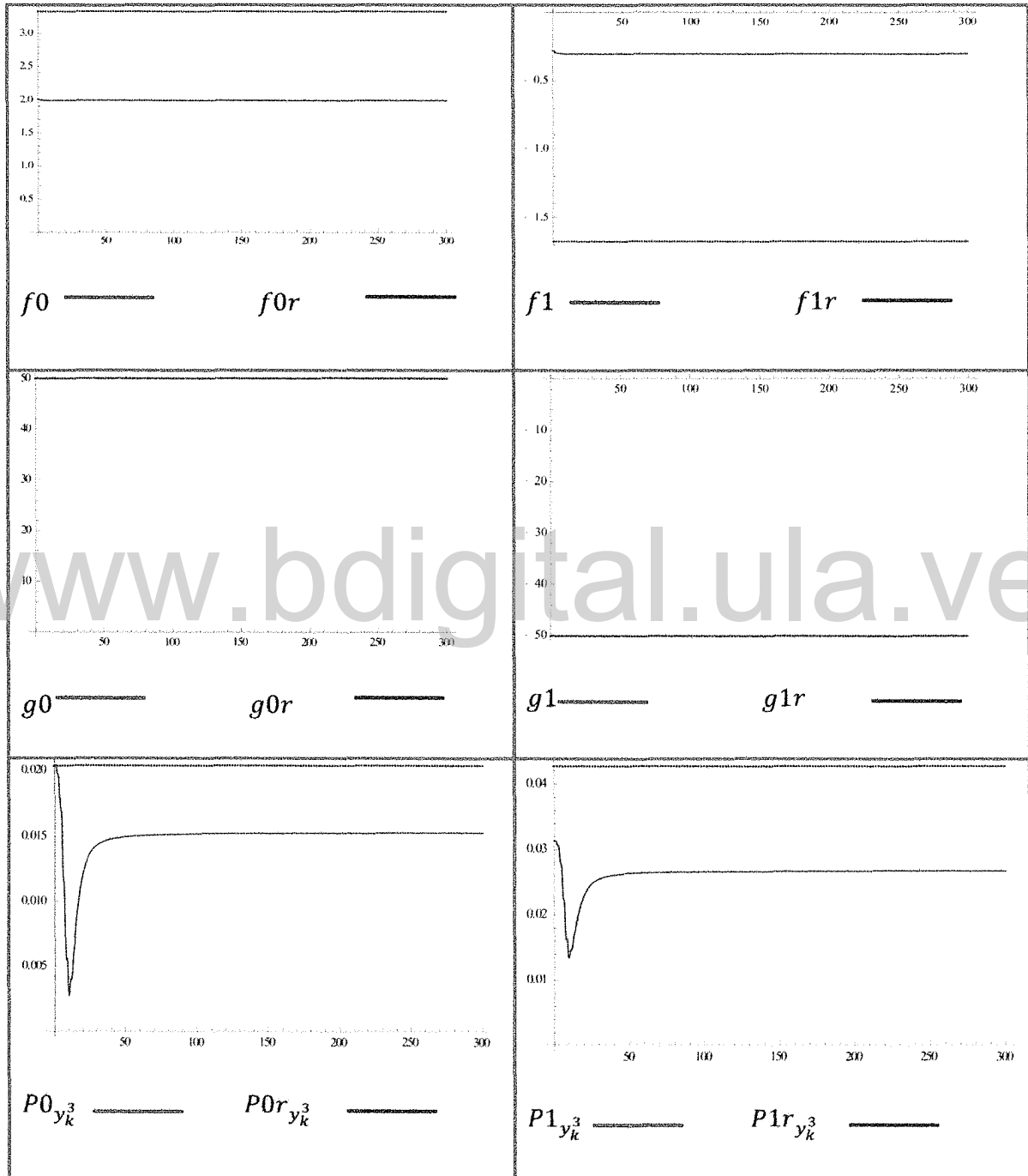


Figura 4.17. Comportamiento de los parámetros del controlador auto-ajustable.

4.3.3.2 Simulaciones para el caso presentado en la sección 4.3.2.2

El cálculo de los términos de los polinomios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})$ y $\Lambda_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})$ para el modelo nominal del sistema no lineal se realiza forma similar a la presentada en el caso anterior, obteniendo como valores máximos y mínimos para cada uno de los términos de los polinomios los siguientes valores:

$$a_{11} = [-1.97768; -0.59375]; a_{21} = [-0.28375; 1.10018];$$

$$a_{22} = [-0.02042; -0.02042]; a_{23} = [0.00102; 0.00102];$$

$$b_0 = [0.02232; 0.15625].$$

El modelo nominal del sistema no lineal está representado por:

$$(1 - 1.29z^{-1} + 0.41z^{-2})\theta(kT_0) - 0.02z^{-2}\theta(kT_0)^3 + 0.001z^{-2}\theta(kT_0)^5 = z^{-2}0.089\tau(kT_0). \quad (4.68)$$

Se asume como modelo real el siguiente:

$$(1 - 1.84z^{-1} + 0.97z^{-2})\theta(kT_0) - 0.02z^{-2}\theta(kT_0)^3 + 0.001z^{-2}\theta(kT_0)^5 = z^{-2}0.031\tau(kT_0). \quad (4.69)$$

Los polinomios $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ usados para el cálculo de la ley de control son los representados en las ecuaciones (4.63) y (4.64) y se obtienen los siguientes polinomios para la ley de control nominal:

$$F(z^{-1}) = 2.0163 - 0.2769z^{-1}, \quad (4.70)$$

$$G(z^{-1}) = 50.089 - 49.863z^{-1}, \quad (4.71)$$

$$P_{\theta_k^3}(z^{-1}) = 0.020z^{-2} + 0.031z^{-3}, \quad (4.72)$$

$$P_{\theta_k^5}(z^{-1}) = -0.001z^{-2} - 0.0016z^{-3}, \quad (4.73)$$

donde $F(z^{-1})$, $G(z^{-1})$, $P_{\theta_k^3}(z^{-1})$ y $P_{\theta_k^5}(z^{-1})$ se pueden asumir como las estimaciones iniciales de los parámetros del controlador $\hat{F}(z^{-1})$, $\hat{G}(z^{-1})$, $\hat{P}_{\theta_k^3}(z^{-1})$, y $\hat{P}_{\theta_k^5}(z^{-1})$, respectivamente y que serán usados para la estimación recursiva de la ley de control auto-ajustable.

Al igual que en el caso anterior se comienza probando ambos controladores a partir de los $\frac{5\pi}{180}$ y se va aumentando gradualmente la posición deseada hasta llegar a los $\frac{88\pi}{180}$ donde el controlador auto-ajustable ya no sigue la referencia.

En la tabla 4.3 se presentan los resultados obtenidos para diferentes posiciones del péndulo, indicando el comportamiento de la salida tanto para el CMVG como para el CMVG-STC propuesto.

Tabla 4.3. Comparación de las salidas controladas usando CMVG y CMVG-STC.

Posición (rad)	Salida CMVG	Salida CMVG-STC
$\frac{5\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{30\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{45\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{60\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{75\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{85\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{88\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	No posee estabilidad asintótica a la referencia

En la figura 4.18 y 4.19 se muestran las dinámicas de la salida del sistema (4.69) controlado por medio del controlador CVMG y CMVG-STC, el comportamiento de la variable de modo deslizante y la dinámica del control para $\frac{15\pi}{180}$ y $\frac{60\pi}{180}$, respectivamente. Donde se observa que la salida del sistema controlado por medio del CMVG se estabiliza, sin embargo no sigue la referencia; mientras que al aplicar el controlador auto-ajutable se logra estabilizar el péndulo simple en la posición deseada. Esto implica que la variable en modo deslizante es anulada al usar el controlador auto-ajutable, lo que no sucede con el CMVG. Ambos controladores exhiben un buen rendimiento. En la figura 4.20 se muestran dichas dinámicas para $\frac{88\pi}{180}$ donde ya no es posible estabilizar asintóticamente el péndulo en la posición deseada con ninguno de los dos controladores. La señal de referencia es un escalón unitario con una longitud de 300 muestras.

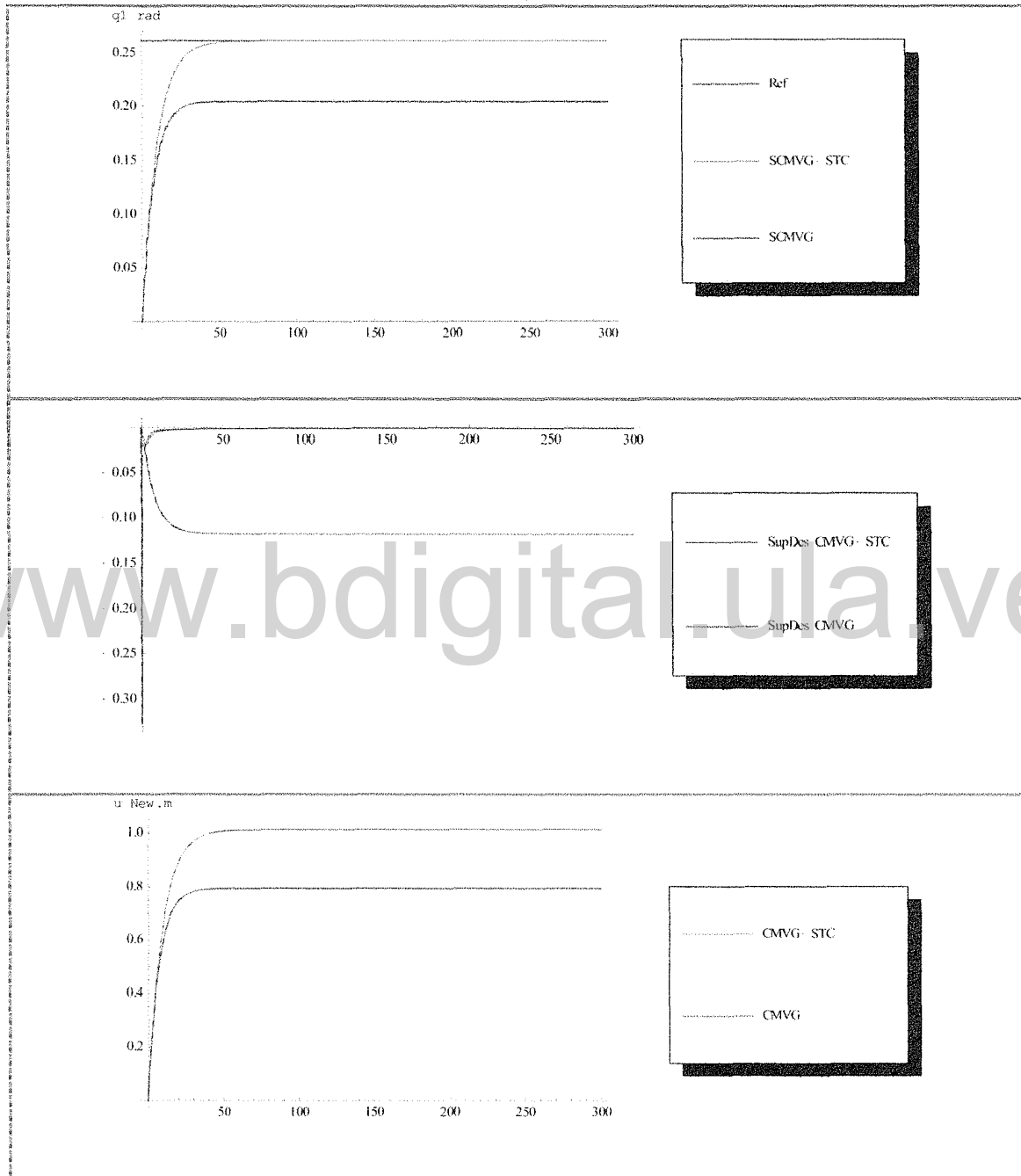


Figura 4.18. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $15\pi/180$.

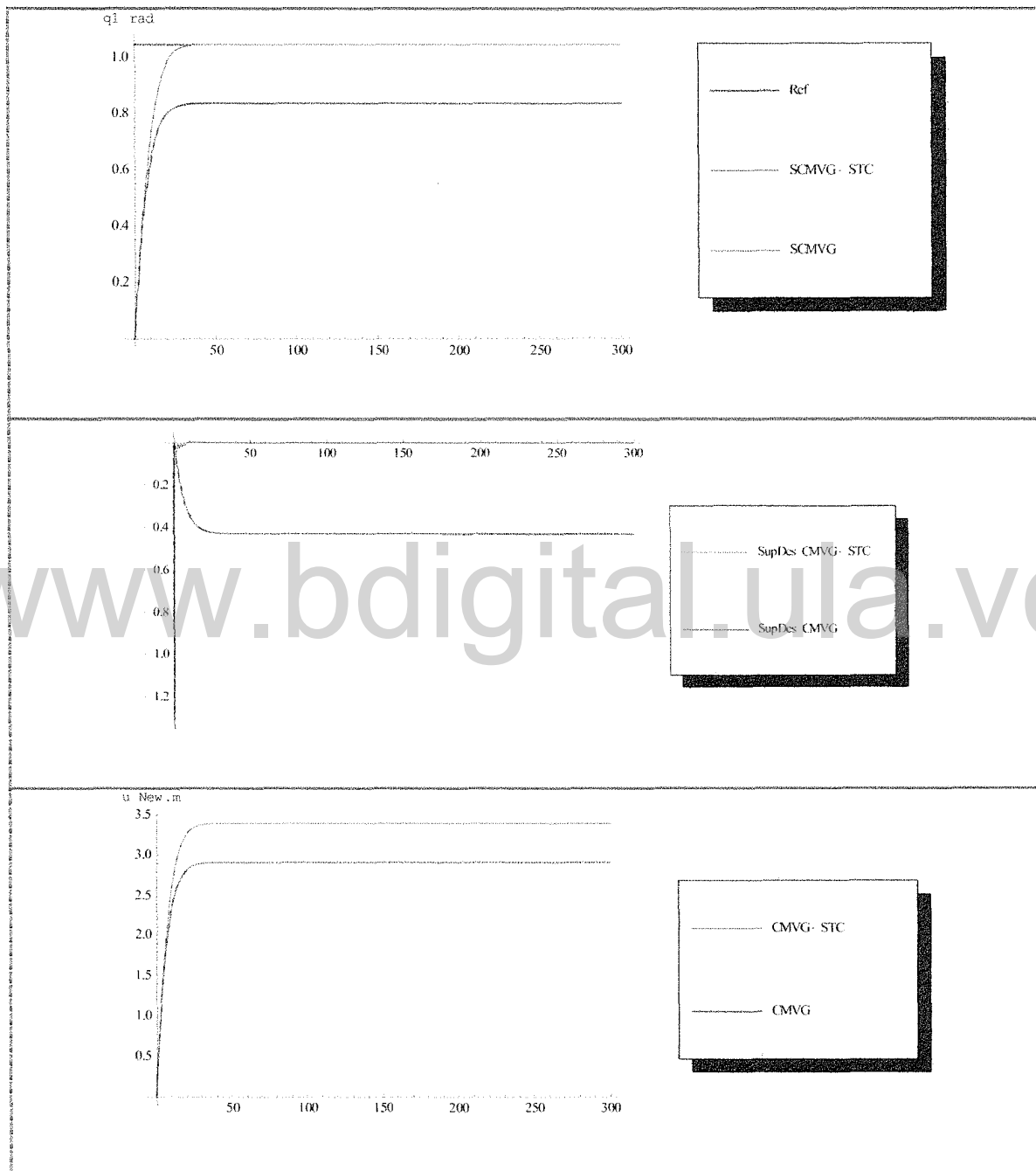


Figura 4.19. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $60\pi/180$.

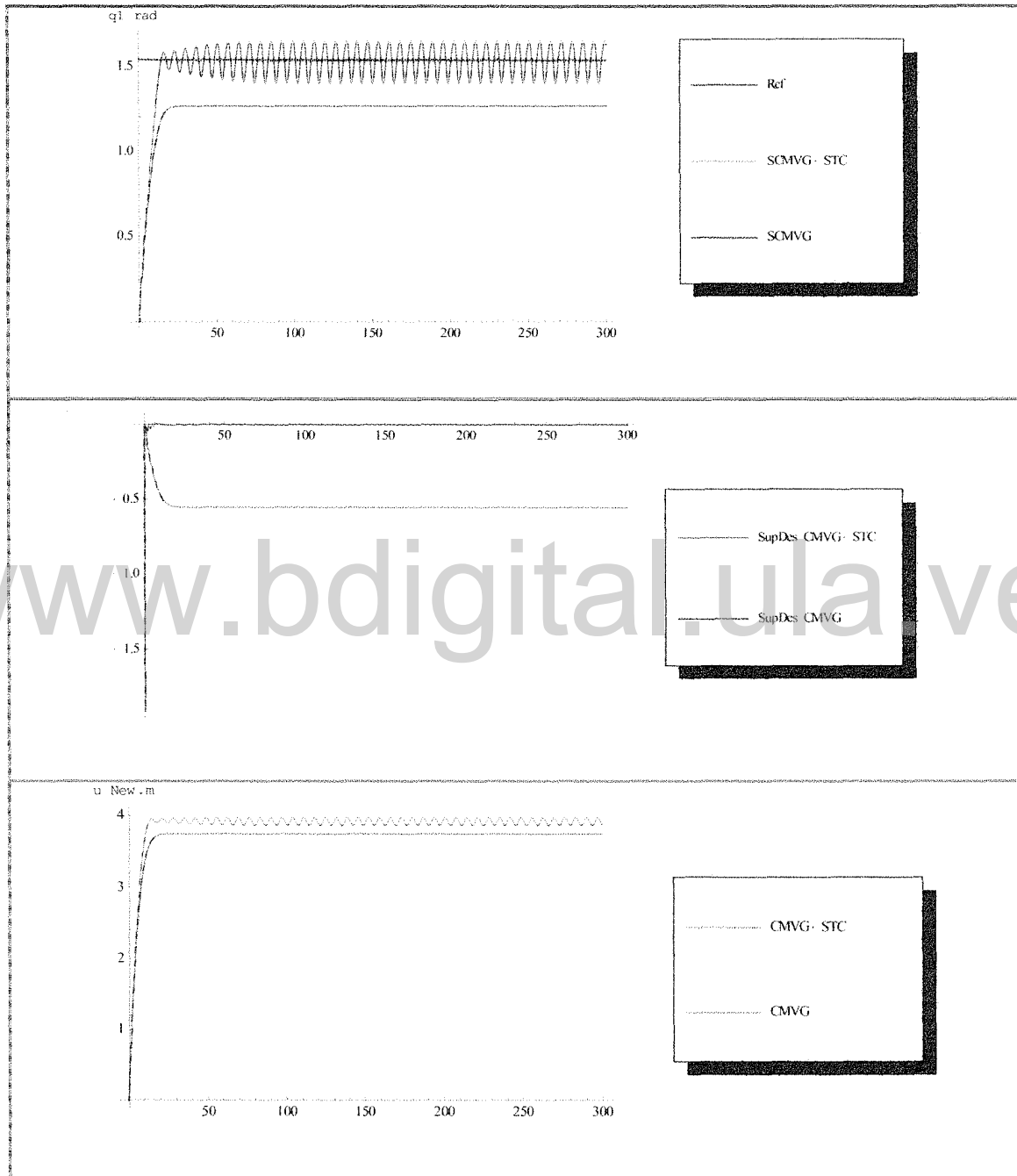


Figura 4.20. Comparación de las dinámicas de: salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal; usando el controlado por medio de CMVG (verde) y usando el CMVG-STC (azul) para $88\pi/180$.

El comportamiento de los parámetros del controlador es similar al mostrado en el caso anterior, los cuales no convergen necesariamente a su valor real, sin embargo convergen a un valor constante.

En comparación con los resultados mostrados en el caso anterior, se observa que al expandir el término no lineal del modelo matemático del péndulo simple a los cuatro primeros términos de la serie de Taylor, se logra estabilizar el péndulo en un rango mayor de posiciones descendidas.

4.3.3.3 Simulaciones para el caso presentado en la sección 4.3.2.3

En esta caso los valores máximos y mínimos para cada uno de los términos de los polinomios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})$ y $\Lambda_{\theta(kT_0)^7}(z^{-1})$, son los siguientes:

$$a_{11} = [-1.97768; -0.59375]; a_{21} = [-0.28375; 1.10018];$$

$$a_{22} = [-0.02042; -0.02042]; a_{23} = [0.00102; 0.00102],$$

$$a_{23} = [-0.00002; -0.00002], b_0 = [0.02232; 0.15625].$$

El modelo nominal del sistema no lineal en este caso es:

$$(1 - 1.29z^{-1} + 0.41z^{-2})\theta(kT_0) - 0.02z^{-2}\theta(kT_0)^3 + 0.001z^{-2}\theta(kT_0)^5 - 0.00002z^{-2}\theta(kT_0)^7 = z^{-2}0.089\tau(kT_0). \quad (4.74)$$

Se asume como modelo real:

$$(1 - 1.84z^{-1} + 0.97z^{-2})\theta(kT_0) - 0.02z^{-2}\theta(kT_0)^3 + 0.001z^{-2}\theta(kT_0)^5 - 0.00002z^{-2}\theta(kT_0)^7 = z^{-2}0.031\tau(kT_0). \quad (4.75)$$

Los polinomios de diseño $C(z^{-1})$ y $Q(z^{-1})$ son las ecuaciones (4.63) y (4.64) respectivamente, los cuales conducen a los siguientes polinomios para la ley de control,

$$F(z^{-1}) = 2.0163 - 0.2769z^{-1}, \quad (4.76)$$

$$G(z^{-1}) = 50.089 - 49.863z^{-1}, \quad (4.77)$$

$$P_{\theta_k^3}(z^{-1}) = 0.020z^{-2} + 0.031z^{-3}, \quad (4.78)$$

$$P_{\theta_k^5}(z^{-1}) = -0.001z^{-2} - 0.0016z^{-3}, \quad (4.79)$$

$$P_{\theta_k^7}(z^{-1}) = 0.00002z^{-2} + 0.00004z^{-3}, \quad (4.80)$$

donde $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $P_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})$, $P_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})$ y $P_{\theta(kT_0)^7}(z^{-1})$ se pueden asumir como las estimaciones iniciales de los parámetros del controlador $\hat{A}(z^{-1})$, $\hat{B}(z^{-1})$, $\hat{P}_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})$, $\hat{P}_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})$ y $\hat{P}_{\theta(kT_0)^7}(z^{-1})$, respectivamente y que serán usados para la estimación recursiva de la ley de control.

De manera similar a los casos anteriores, se inicia probando ambos controladores a partir de los $\frac{5\pi}{180}$ y aumentando gradualmente hasta la posición deseada hasta llegar a $\frac{88\pi}{180}$ donde el controlador auto-ajutable no estabiliza al péndulo simple en la posición deseada. En la tabla 4.4 se puede observar los resultados obtenidos para diferentes posiciones del péndulo,

indicando el comportamiento de la salida tanto para el CMVG como para el controlador autoajutable.

Tabla 4.4. Comparación de las salidas controladas usando CMVG y CMVG-STC.

Posición (rad)	Salida CMVG	Salida CMVG-STC
$\frac{5\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{30\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{45\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{60\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{75\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{85\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{88\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	No estabiliza asintóticamente a la referencia

Los resultados obtenidos para este caso por medio de las simulaciones son similares a los presentados en el caso anterior, por lo tanto, el análisis realizado sobre éstos se puede trasladar a este caso fácilmente. Al comparar los resultados mostrados en la tabla 4.3 con los de la tabla 4.4, se observa que al expandir el término no lineal del modelo matemático (4.40) por los tres primeros o cuatro primeros términos de su respectiva serie de Taylor los resultados obtenidos del sistema controlado son equivalentes, lo que implica que no es necesario seguir expandiendo el término no lineal, ya que a medida que se va expandiendo dicho término las nuevas señales

no lineales que se van agregando vienen representadas por un polinomio con valores muy pequeños (esto debido a que los factoriales de la serie de Taylor van aumentando y hacen más pequeño los coeficientes de los polinomios), por lo tanto, éstos no van a tener mayor efecto al momento de controlar el sistema.

4.3.4 Análisis de la aplicación de las leyes de control al modelo matemático sin expandir los términos no lineales

En esta sección se muestran los resultados obtenidos por medio de simulaciones al aplicar el CMVG y el controlador auto-ajutable (CMVG-STC) propuesto al modelo matemático (4.40), es decir, se prueba el algoritmo auto-ajutable propuesto sobre el modelo original para tener una idea del su comportamiento en caso de ser implementado físicamente. Cada una de las leyes de control de mínima varianza generalizada (sección 4.3.2) y su respectivo controlador auto-ajutable se aplica al sistema original y se comparan estos resultados con los obtenidos en la sección 4.3.3.

En primer lugar se aplica la ley de control (4.52) y en controlador auto-ajutable al modelo matemático del péndulo simple representado en la ecuación (4.40) y se va aumentando el ángulo de la posición deseada, obteniendo como resultados los mostrados en la tabla 4.5.

Tabla 4.5. Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.52) y el CMVG-STC al aplicarse al modelo matemático (4.40).

Posición (rad)	Salida CMVG	Salida CMVG-STC
$\frac{5\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{30\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{45\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{60\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{75\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{85\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{86\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	No estabiliza asintóticamente a la referencia

Luego se aplica la ley de control (4.56) y (4.60) y el respectivo controlador autoajustable al modelo matemático del péndulo simple representado en la ecuación (4.40), los resultados se muestran en la tabla 4.6 y 4.7 respectivamente.

Tabla 4.6. Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.56) y el CMVG-STC al aplicarse al modelo matemático (4.40).

Posición (rad)	Salida CMVG	Salida CMVG-STC
$\frac{5\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{30\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{45\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{60\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{75\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{85\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{88\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	No posee estabilidad asintótica a la referencia

Tabla 4.7. Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.60) y el CMVG-STC al aplicarse al modelo matemático (4.40).

Posición (rad)	Salida CMVG	Salida CMVG-STC
$\frac{5\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{30\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{45\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{60\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario

Tabla 4.8. (Continuación). Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.60) y el CMVG-STC al aplicarse al modelo matemático (4.40).

$\frac{75\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{85\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{88\pi}{180}$	Estabiliza y posee error en estado estacionario	No posee estabilidad asintótica a la referencia

Al aplicar tanto el CMVG como el controlador auto-ajutable propuesto se observa que al momento de trabajar con el modelo original se lograron obtener resultados satisfactorios, ya que se puede estabilizar el péndulo simple en diferentes ángulos. Al comparar estos resultados con los resultados de la sección 4.3.3 se observa que al aplicar el controlador auto-ajutable con la ley de control (4.52) al modelo original el rango de posiciones deseadas se amplía de $\frac{79\pi}{180}$ a $\frac{86\pi}{180}$. Mientras que en el caso de aplicar el controlador auto-ajutable con la ley de control (4.56) y (4.60) al sistema original los resultados se mantuvieron.

Con respecto al comportamiento de la superficie en modo deslizante se observa que con el CMVG no era posible anularse debido a la presencia de incertidumbre paramétrica en el modelo mientras que con el controlador auto-ajutable si se logra anular. El comportamiento de los parámetros del controlador aunque no convergen a su valor real si lo hacen a un valor constante.

4.3.5 Análisis de los resultados

Al aplicar las leyes de control al modelo matemático, tanto en los tres casos estudiados (donde se expandió el término no lineal a cierta cantidad de términos de la serie de Taylor) como en los casos donde se aplicó al modelo matemático original (4.40), se observó que el controlador auto-ajutable diseñado cumplió con el objetivo de seguimiento de referencia, donde no genera error en estado estacionario, en un rango amplio de posiciones. En el caso del controlador de mínima varianza generalizada no se logra cumplir con el objetivo de seguimiento de referencia para ninguna de las posiciones deseadas, debido a las incertidumbres en los parámetros del modelo que generaba un error considerable en estado estacionario.

En la dinámica de los controladores se observó que el control auto-ajutable necesita un mayor esfuerzo que el CMVG, sin embargo logra cumplir el objetivo de seguimiento de la referencia, también se observa que dichos comportamientos se asemeja a una curva suave en ambos casos. La superficie en modo deslizante se anula al aplicar el controlador auto-ajutable (3.33), (3.34) y (3.38) propuesto mientras que al aplicar solo el CMVG no fue posible anular la variable en modo deslizante en presencia de incertidumbre paramétricas. Con respecto a los parámetros de la ley de control en todos los casos se observó que aunque no necesariamente tienden a su valor real si lo hacen a un valor constante.

Al comparar los resultados mostrados en la tabla 4.3 (donde el término no lineal se sustituyó por los tres primeros términos de la serie de Taylor) con los de la tabla 4.4 (donde el término no lineal se sustituyó por los cuatro primeros términos de la serie de Taylor), se observa que al expandir el término no lineal del modelo matemático (4.40) por un término más de su respectiva serie de Taylor los resultados obtenidos del sistema controlado son

equivalentes; esto se debe a que a medida que se va expandiendo dicho término las nuevas señales no lineales que se van agregando vienen representadas por un polinomio con valores muy pequeños, debido a que los factoriales de la serie de Taylor van aumentando y hacen más pequeño los coeficientes de los polinomios, por lo tanto, éstos no van a tener mayor efecto al momento de controlar el sistema y no es necesario seguir expandiendo el término no lineal por una mayor cantidad de términos de dicha serie de Taylor.

Por lo tanto, al aplicar el controlador auto-ajustable al modelo del péndulo simple, expandiendo su término no lineal en serie de Taylor y al modelo matemático (4.40), se cumplió con éxito el objetivo de estabilizarlo en diferentes posiciones deseadas. Tomando para todos los casos como condición inicial $\theta(0) = 0(\text{rad})$ y logrando estabilizar al péndulo en $\frac{75\pi}{180}$ en la mayoría de los casos, lo que en esta investigación es un resultado satisfactorio para ser las primeras pruebas realizadas sobre un sistema no lineal aplicando el controlador auto-ajustable (3.33), (3.34) y (3.38) propuesto.

4.4 Mecanismo corredera-biela-manivela

El estudio y análisis de este mecanismo en particular se debe a la colaboración académica solicitada en Octubre de 2012 en Tokyo Denki University por Katsuhisa Furuta. Esto debido a que este puede ser usado como punto de referencia para posteriormente aplicar el algoritmo auto-ajustable propuesto en la sección 3.4 en modelos matemáticos no lineales que representen a los motores usados por la empresa Toyota.

Es importante destacar que se usó el modelo del mecanismo corredera-biela-manivela ya que los modelos matemáticos de los motores de la Toyota es información restringida a la cual no se tiene acceso. Sin embargo, este sistema posee no linealidades sobre las cuales se puede aplicar el algoritmo propuesto y de esta manera comprobar su desempeño en modelos más complejos con respecto a los presentados anteriormente.

4.4.1 Modelado matemático del mecanismo corredera-biela-manivela

El mecanismo corredera-biela-manivela se utiliza en muchos sistemas reales, como motores de automóviles. La figura 4.21 muestra un modelo esquemático del mecanismo corredera-biela-manivela, Saitoh y Furuta (2007).

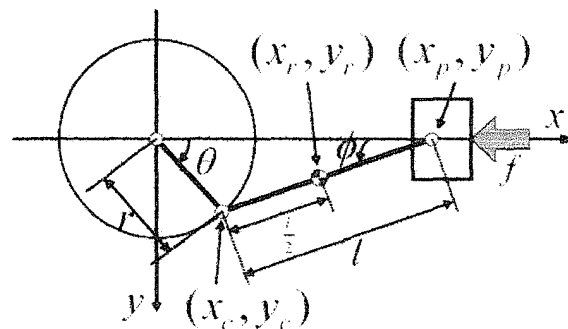


Figura 4.21. Mecanismo corredera-biela-manivela.

La corredera está restringida por su dirección de movimiento en el eje x y la coordenada de la rueda del eje de rotación se fija en el origen. Cuando se aplica la fuerza a la corredera, la biela acciona la rueda y este mecanismo hace girar la rueda. Por lo tanto, este

mecanismo puede convertir las fuerzas lineales en el par de rotación. En la tabla 4.8 se muestran los parámetros de este mecanismo.

Tabla 4.9. Parámetros del mecanismo corredera-biela-manivela.

Parámetro físico	Significado
ϕ [rad]	Angulo de la biela
m_p [kg]	Masa de la corredera
d_p [Ns/m]	Coficiente viscoso de la corredera
F [N]	Fuerza de entrada de la corredera
l [m]	Longitud de la biela
θ [rad]	Angulo de la rueda
m_c [kg]	Masa de la rueda
d_c [Ns/rad]	Coficiente viscoso de la rueda
r [m]	Radio de la rueda

El modelo matemático del mecanismo corredera-biela-manivela se realiza usando la segunda ley de Newton para el sistema rotacional y el sistema traslacional. Este modelado matemático se hace de esta manera con el objetivo de obtener un modelo no lineal, el cual posteriormente se puede acoplar a los presentados en la sección 3.5 del capítulo 3. Es importante destacar que el modelado que se presenta a continuación es diferente al propuesto por Saitoh y Furuta (2007) ya que este se obtiene por medio del uso del método de proyección.

Se asume que la masa m_p se desliza junto con el eslabón unido a ella, es decir, el peso de la masa y el peso del eslabón se concentra todo en el centro de masa de m_p . Así, la fuerza F que se le aplica a la masa m_p es igual a la fuerza F aplicada al final del eslabón. También se asume que la masa de la rueda m_c se desliza junto con el eslabón unido a ella, es decir, el peso de la masa y el peso del eslabón se concentra todo en el centro de masa de m_c .

Primero modelamos el movimiento traslacional:

$$\sum F = ma, \quad (4.81)$$

$$F - d_p \dot{x}_p = m_p \ddot{x}_p. \quad (4.82)$$

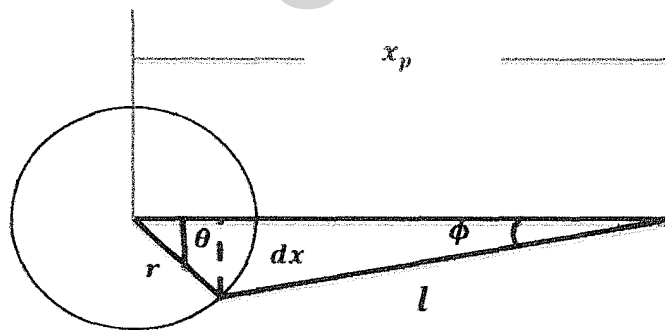


Figura 4.22. Esquema del mecanismo corredera-biela-manivela.

En la figura 4.22 observamos un esquema del mecanismo, por medio del cual se calculan las siguientes relaciones:

$$x_p = r \cos \theta + l \cos \phi. \quad (4.83)$$

Derivando la ecuación (4.83), obtenemos:

$$\dot{x}_p = -r \sin \theta \dot{\theta} - l \sin \phi \dot{\phi}. \quad (4.84)$$

Y derivando la ecuación (4.84), obtenemos:

$$\ddot{x}_p = -r(\cos \theta \dot{\theta} + \sin \theta \ddot{\theta}) - l(\cos \phi \dot{\phi} + \sin \phi \ddot{\phi}). \quad (4.85)$$

Sustituyendo (4.84) y (4.85) en (4.82)

$$F - d_p(-r \sin \theta \dot{\theta} - l \sin \phi \dot{\phi}) = m_p(-r(\cos \theta \dot{\theta} + \sin \theta \ddot{\theta}) - l(\cos \phi \dot{\phi} + \sin \phi \ddot{\phi})). \quad (4.86)$$

La variable a controlar es θ (ángulo de la rueda), por lo tanto, la ecuación (4.86) debe depender solo de dicha variable. Para esto deducimos las ecuaciones del $\sin \phi$ y $\cos \phi$ por medio del esquema de la figura (4.22) usando las relaciones de triángulo:

$$dx = l \sin \phi = r \sin \theta, \quad (4.87)$$

$$\sin \phi = \frac{r}{l} \sin \theta. \quad (4.88)$$

Para el cálculo del $\cos \phi$ usamos la ley de los cosenos:

$$dx^2 = l^2 + l^2 \cos^2 \phi - 2l(l \cos \phi) \cos \phi. \quad (4.89)$$

De la ecuación (4.87):

$$dx^2 = r^2 \sin^2 \theta. \quad (4.90)$$

Sustituyendo (4.90) en (4.89):

$$r^2 \sin^2 \theta = l^2 + l^2 \cos^2 \phi - 2l^2 \cos^2 \phi, \quad (4.91)$$

$$r^2 \sin^2 \theta = l^2 - l^2 \cos^2 \phi, \quad (4.92)$$

$$l^2 \cos^2 \phi = l^2 - r^2 \sin^2 \theta, \quad (4.93)$$

$$\cos^2 \phi = 1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta, \quad (4.94)$$

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta}. \quad (4.95)$$

Usando la fórmula del binomio de Newton:

$$(a - b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots, \quad (4.96)$$

podemos reescribir la parte derecha de la ecuación (4.95) como se muestra a continuación,

$$\left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} 1^{1-\frac{1}{2}} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} 1^{\frac{1}{2}-2} b^2 \frac{r^4}{l^4} \sin^4 \theta + \dots, \quad (4.97)$$

Los términos superiores al segundo término de la serie (4.97) son insignificantes numéricamente, por lo tanto la ecuación (4.97) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta. \quad (4.98)$$

Entonces,

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta} = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta. \quad (4.99)$$

Para calcular $\dot{\phi}$, derivamos la ecuación (4.88), obteniendo:

$$\dot{\phi} = \frac{r \cos \theta}{l \cos \phi} \dot{\theta}, \quad (4.100)$$

y al sustituir $\cos \phi$ en (4.116), $\dot{\phi}$ es:

$$\dot{\phi} = \frac{2lr \cos \theta}{2l^2 - r^2 \sin^2 \theta} \dot{\theta}. \quad (4.101)$$

Derivamos (4.100) para obtener a $\ddot{\phi}$:

$$\ddot{\phi} = \frac{\frac{r}{l}(-\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2) + \sin \phi \dot{\phi}}{\cos \phi}, \quad (4.102)$$

Y sustituyendo $\cos \phi$, $\sin \phi$ y $\dot{\phi}$ en (4.102), obtenemos:

$$\ddot{\phi} = \frac{\left(2lr(-2l^2\ddot{\theta} + 2l^2\dot{\theta}^2 \cot \theta + r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 - r \cos \theta(-2l\dot{\theta} + r \sin \theta \ddot{\theta}))\right)}{4l^4 \csc \theta - 4l^2 r^2 \sin \theta + r^4 \sin^3 \theta}. \quad (4.103)$$

Ahora para obtener la ecuación diferencial que representa el movimiento traslacional del mecanismo corredera-biela-manivela, sustituimos (4.88), (4.99), (4.101) y (4.103) en la ecuación (4.86),

$$F - d_p r \sin \theta \dot{\theta} \left(1 + \frac{2lr \cos \theta}{2l^2 - r^2 \sin^2 \theta} \right) = m_p \left(-2r \cos \theta \dot{\theta} \left(-1 - \frac{8l^2 r^2 \sin^2 \theta}{4l^2 - r^2 + r^2 \cos^2 2\theta} \right) + r \sin \theta \left(-\ddot{\theta} + \frac{4lr(\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta} \sin \theta)}{4l^2 - r^2 + r^2 \cos 2\theta} \right) \right) \quad (4.104)$$

Despejando $\ddot{\theta}$ de la ecuación (4.104)

$$\ddot{\theta} = - \frac{\left(F + 2l m_p \dot{\theta} + d_p r \sin \theta \dot{\theta} + 2m_p r \cos \theta \dot{\theta} \left(1 + \frac{8l^2 r^2 \sin^2 \theta}{(4l^2 - r^2 + r^2 \cos^2 2\theta)^2} \right) + \frac{2l\dot{\theta}(-4l^2 m_p + d_p r^2 \sin 2\theta)}{4l^2 - r^2 + r^2 \cos 2\theta} \right)}{m_p r \left(\sin \theta + \frac{2lr \sin 2\theta}{4l^2 - r^2 + r^2 \cos 2\theta} \right)}, \quad (4.105)$$

Ahora se modela el movimiento rotacional:

$$\Sigma \tau = J\ddot{\theta}, \quad (4.106)$$

$$\tau_{fa} - \tau_{dc} = J\ddot{\theta}, \quad (4.107)$$

$$F \sin \theta r - d_c \dot{\theta} = \frac{2}{5} m_c r^2 \ddot{\theta}. \quad (4.108)$$

Despejando $\ddot{\theta}$ de la ecuación (4.108),

$$\ddot{\theta} = - \frac{5(d_c \dot{\theta} - Fr \sin \theta)}{2m_c r^2}. \quad (4.109)$$

Igualamos las ecuaciones (4.105) con (4.109) y despejamos $\dot{\theta}$, así obtenemos la ecuación (4.110), la cual representa el modelo matemático no lineal de primer orden que representa al mecanismo corredera-biela-manivela;

$$\dot{\theta} = \frac{-128Fl^4m_c r + 64Fl^2m_c r^3 - 8Fm_c r^5 - 64Fl^2m_c r^3 \cos 2\theta + 16Fm_c r^5 \cos 2\theta - 8Fm_c r^5 \cos^2 2\theta - 320Fl^4m_p r \sin^2 \theta + 80Fl^2m_p r^3 \sin^2 \theta - 80Fl^2m_p r^3 \cos 2\theta \sin^2 \theta + 160Fl^2m_p r^3 \sin^4 \theta - 40Fm_p r^5 \sin^4 \theta + 40Fm_p r^5 \cos 2\theta \sin^4 \theta - 160Fl^3m_p r^2 \sin \theta \sin 2\theta + 40Flm_p r^4 \sin \theta \sin 2\theta - 40Flm_p r^4 \cos 2\theta \sin \theta \sin 2\theta}{-64l^3m_c m_p r^3 + 24lm_c m_p r^5 + 256l^4m_c m_p r^2 \cos \theta - 32l^2m_c m_p r^4 \cos \theta + 8m_c m_p r^6 \cos \theta + 64l^3m_c m_p r^3 \cos 2\theta - 32lm_p m_c r^5 \cos 2\theta + 32l^2m_c m_p r^4 \cos 3\theta - 12m_p m_c r^6 \cos 3\theta + 8lm_c m_p r^5 \cos 4\theta + 4m_c m_p r^6 \cos 5\theta - 320l^4d_c m_p \sin \theta + 128d_p l^4m_c r^2 \sin \theta + 240d_c l^2m_p r^2 \sin \theta - 96d_p l^2m_c r^4 \sin \theta - 50d_c m_p r^4 \sin \theta + 20d_p m_c r^6 \sin \theta - 160d_c m_p l^3 r \sin 2\theta + 64d_p m_c r^3 l^3 \sin 2\theta + 40d_c m_p r^3 l \sin 2\theta - 16d_p m_c r^5 l \sin 2\theta - 80d_c m_p l^2 r^2 \sin 3\theta + 32d_p m_c r^4 l^2 \sin 3\theta + 25d_c m_p r^4 \sin 3\theta - 10d_p m_c r^6 \sin 3\theta - 20d_c m_p l r^3 \sin 4\theta + 8d_p m_c r^5 l \sin 4\theta - 5d_c m_p r^4 \sin 5\theta + 2d_p m_c r^6 \sin 5\theta}, \quad (4.110)$$

4.4.2 Casos de estudio del mecanismo corredera-biela-manivela

En esta sección se muestran los dos casos de estudio del mecanismo corredera-biela-manivela sobre los cuales se aplica el algoritmo auto-ajustable presentado en el capítulo 3. Para cada caso se toma una cantidad determinada de términos de la serie de Taylor de las funciones no lineales presentes en la ecuación (4.110) del modelo matemático.

En ambos casos se sustituyen los términos no lineales presentes en la ecuación (4.110) por su respectiva expansión de serie de Taylor (tomando los dos primeros y luego los tres primeros términos) y posteriormente discretizar el sistema por medio de la aproximación de Euler, para de esta manera obtener el modelo no lineal en tiempo discreto sobre el cual se aplica el algoritmo de control auto-ajustable presentado en la sección 3.4 del capítulo 3. También se muestra la ley de control de mínima varianza generalizada para ambos casos. Se asumen los valores de los coeficientes de los polinomios del controlador diseñado para el

sistema nominal como las estimaciones iniciales de los parámetros del controlador autoajutable.

4.4.2.1 Extensión de los términos no lineales por los dos primeros términos de la serie de Taylor

En este caso se sustituyen los términos no lineales presentes en la ecuación (4.110) por los dos primeros términos de su respectiva serie de Taylor, las cuales se muestran a continuación:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}; \quad \sin 2\theta = 2\theta - \frac{4\theta^3}{3}; \quad \sin 3\theta = 3\theta - \frac{9\theta^3}{2}; \quad \sin 4\theta = 4\theta - \frac{32\theta^3}{3};$$

$$\sin 5\theta = 5\theta - \frac{125\theta^3}{6}; \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}; \quad \cos 2\theta = 1 - 2\theta^2; \quad \cos 3\theta = 1 - \frac{9\theta^2}{2};$$

$$\cos 4\theta = 1 - 8\theta^2; \quad \cos 5\theta = 1 - \frac{25\theta^2}{2}.$$

Al sustituir estos términos en la ecuación (4.110), con el fin de transformar los términos no lineales de las formas senos y cosenos a términos no lineales con estructura polinómica, y agrupando términos semejantes se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) = & \frac{10368F(t)l^4m_c r + (25920l^4m_p r + 25920l^3m_p r^2 - 10368l^2m_c r^3)F(t)\theta^2(t)}{-20736l^4m_c m_p r^2 + (25920d_c l^2m_p + 25920d_c m_p l^3 r - 10368d_p l^4 m_c r^2)\theta(t)} \\ & + (-8640l^4m_p r - 21600l^3m_p r^2 - 25920l^2m_p r^3 - 12960lm_p r^4 + 2592m_c r^5)F(t)\theta^4(t) \\ & + (720m_p r + 2880l^3m_p r^2 + 12960l^2m_p r^3 + 10800lm_p r^4 + 6480m_p r^5)F(t)\theta^6(t) \\ & (-2520l^2m_p r^3 - 1440lm_p r^4 - 4320m_p r^5)F(t)\theta^8(t) + (240l^2m_p r^3 + 1080m_p r^5)F(t)\theta^{10}(t) \\ & + (-10l^3m_p r^2 - 120m_p r^5)F(t)\theta^{12}(t) + 5m_p r^5F(t)\theta^{14}(t) \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} & -10368d_p l^3 m_c r^3 \theta(t) + (10368l^4 m_c m_p r^2 + 10368l^3 m_c m_p r^3 + 10368l^2 m_c m_p r^4)\theta^2(t) \\ & + (-4320d_c m_p l^4 - 17280d_c m_p l^3 r + 1728d_p l^4 m_c r^2 - 25920d_c m_p l^2 r^2)\theta^3(t) \\ & + (6912d_p m_c l^3 r^3 - 12960d_c l m_p r^3 + 10368d_p l^2 m_c r^4 + 5184d_p m_c l r^5)\theta^3(t) \end{aligned}$$

Transformamos la ecuación diferencial (4.111) en una ecuación en diferencia haciendo $\theta(t) = \theta(kT_0)$ y usando la aproximación de Euler:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\theta((k+1)T_0) - \theta(kT_0)}{T_0}. \quad (4.112)$$

Al sustituir (4.112) en (4.111) y realizar una serie de operaciones matemáticas y agrupaciones, se obtiene el modelo no lineal que se presenta en la ecuación (4.113),

$$\begin{aligned} A(z^{-1})\theta(kT_0) + \Lambda_{\theta(kT_0)^2}(z^{-1})\theta(kT_0)^2 + \Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})\theta(kT_0)^3 + \Lambda_{\theta(kT_0)^4}(z^{-1})\theta(kT_0)^4 = \\ z^{-d} \left(B(z^{-1})F(kT_0) + Y_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})\theta^2(kT_0)F(kT_0) + Y_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1})\theta^4(kT_0)F(kT_0) + \right. \\ \left. Y_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1})\theta^6(kT_0)F(kT_0) + Y_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1})\theta^8(kT_0)F(kT_0) + Y_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1})\theta^{10}(kT_0)F(kT_0) + \right. \\ \left. Y_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1})\theta^{12}(kT_0)F(kT_0) + Y_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1})\theta^{14}(kT_0)F(kT_0) \right), \quad (4.113) \end{aligned}$$

donde:

$$A(z^{-1}) = 1 - 1z^{-1};$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\theta(kT_0)^2}(z^{-1}) = \frac{25920d_c l^2 m_p + 25920d_c m_p l^3 r - 10368d_p l^4 m_c r^2 - 10368d_p l^3 m_c r^3}{-20736l^4 m_c m_p r^2} z^{-1} - \\ \frac{25920d_c l^2 m_p + 25920d_c m_p l^3 r - 10368d_p l^4 m_c r^2 - 10368d_p l^3 m_c r^3}{-20736l^4 m_c m_p r^2} z^{-2}; \end{aligned}$$

$$\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1}) =$$

$$\begin{aligned} \frac{10368l^4 m_c m_p r^2 + 10368l^3 m_c m_p r^3 + 10368l^2 m_c m_p r^4}{-20736l^4 m_c m_p r^2} z^{-1} - \\ \frac{10368l^4 m_c m_p r^2 + 10368l^3 m_c m_p r^3 + 10368l^2 m_c m_p r^4}{-20736l^4 m_c m_p r^2} z^{-2}; \end{aligned}$$

$$\Lambda_{\theta(kT_0)^4}(Z^{-1}) = \frac{-4320d_c m_p l^4 - 17280d_c m_p l^3 r + 1728d_p l^4 m_c r^2 - 25920d_c m_p l^2 r^2}{-20736l^4 m_c m_p r^2} Z^{-1} +$$

$$\frac{6912d_p m_c l^3 r^3 - 12960d_c l m_p r^3 + 10368d_p l^2 m_c r^4 + 5184d_p m_c l r^5}{-20736l^4 m_c m_p r^2} Z^{-1} -$$

$$\frac{-4320d_c m_p l^4 - 17280d_c m_p l^3 r + 1728d_p l^4 m_c r^2 - 25920d_c m_p l^2 r^2}{-20736l^4 m_c m_p r^2} Z^{-2} -$$

$$\frac{6912d_p m_c l^3 r^3 - 12960d_c l m_p r^3 + 10368d_p l^2 m_c r^4 + 5184d_p m_c l r^5}{-20736l^4 m_c m_p r^2} Z^{-2};$$

$$B(Z^{-1}) = \frac{10368l^4 m_c r T_0}{-20736l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^2 F_k}(Z^{-1}) = \frac{(25920l^4 m_p r + 25920l^3 m_p r^2 - 10368l^2 m_c r^3) T_0}{-20736l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^4 F_k}(Z^{-1}) = \frac{(-8640l^4 m_p r - 21600l^3 m_p r^2 - 25920l^2 m_p r^3 - 12960l m_p r^4 + 2592m_c r^5) T_0}{-20736l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^6 F_k}(Z^{-1}) = \frac{(720m_p r + 2880l^3 m_p r^2 + 12960l^2 m_p r^3 + 10800l m_p r^4 + 6480m_p r^5) T_0}{-20736l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^8 F_k}(Z^{-1}) = \frac{(-2520l^2 m_p r^3 - 1440l m_p r^4 - 4320m_p r^5) T_0}{-20736l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^{10} F_k}(Z^{-1}) = \frac{(240l^2 m_p r^3 + 1080m_p r^5) T_0}{-20736l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^{12} F_k}(Z^{-1}) = \frac{(-10l^3 m_p r^2 - 120m_p r^5) T_0}{-20736l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^{14} F_k}(Z^{-1}) = \frac{5m_p r^5 T_0}{-20736l^4 m_c m_p r^2};$$

$$d = 1.$$

Este modelo matemático está incluido en el caso general mostrado en la tabla 3.1 de la sección 3.5 del capítulo 3. Por lo tanto, la ley de control de mínima varianza generalizada

requerida para anular la variable de la superficie deslizante s_{k+d} se puede deducir de la ley de control mostrada en el caso general de dicha tabla 3.1, al tomar solo en cuenta las señales presentes en el modelo matemático (4.114) y la ley de control es:

$$u(kT_0) = -\frac{\left[F(z^{-1})\theta_k + P_{\theta_k^2}(z^{-1})\theta_{k+d}^2 + P_{\theta_k^3}(z^{-1})\theta_{k+d}^3 + P_{\theta_k^4}(z^{-1})\theta_{k+d}^4 - C(z^{-1})r_{k+d}\right]}{G(z^{-1}) + P_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})\theta_k^2 + P_{\theta_k^3 F_k}(z^{-1})\theta_k^3 + \dots + P_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1})\theta_k^{14}}, \quad (4.114)$$

donde:

$$P_{\theta_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta_k^2}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^4}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta_k^4}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$$

4.4.2.2 Extensión de los términos no lineales por los tres primeros términos de la serie de Taylor

En este caso de estudio se sustituirán las funciones no lineales presentes en la ecuación (4.110) por los tres primeros términos de su respectiva serie de Taylor, como se muestra a continuación:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120}; \quad \sin 2\theta = 2\theta - \frac{4\theta^3}{3} + \frac{4\theta^5}{15}; \quad \sin 3\theta = 3\theta - \frac{9\theta^3}{2} + \frac{81\theta^5}{40};$$

$$\sin 4\theta = 4\theta - \frac{32\theta^3}{3} + \frac{128\theta^5}{15}; \quad \sin 5\theta = 5\theta - \frac{125\theta^3}{6} + \frac{625\theta^5}{24};$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}; \quad \cos 2\theta = 1 - 2\theta^2 + \frac{2\theta^4}{3}; \quad \cos 3\theta = 1 - \frac{9\theta^2}{2} + \frac{27\theta^4}{8};$$

$$\cos 4\theta = 1 - 8\theta^2 + \frac{32\theta^4}{3}; \quad \cos 5\theta = 1 - \frac{25\theta^2}{2} + \frac{625\theta^4}{24}.$$

Al sustituir estos términos en la ecuación (4.110) y agrupar términos semejantes, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} & -995328000F(t)l^4m_c r + (-2488320000l^4m_p r + 995328000l^2m_c r^3)F(t)\theta^2(t) \\ & -2488320000l^3m_p r^2F(t)\theta^2(t) + (829440000l^4m_p r + 2073600000l^3m_p r^2)F(t)\theta^4(t) \\ & + (-331776000l^2m_c r^3 + 1244160000l^4m_p r^4 - 248832000m_c r^5)F(t)\theta^4(t) \\ & + 2488320000l^2m_p r^3F(t)\theta^4(t) - (110592000l^4m_p r + 628992000l^3m_p r^2)F(t)\theta^6(t) \\ & + (-1658880000l^2m_p r^3 + 165888000m_c r^5 - 1451520000l^4m_p r^4 - 622080000m_p r^5)F(t)\theta^6(t) \\ & + (6912000l^4m_p r + 69120000l^3m_p r^2 + 442368000l^2m_p r^3 + 660096000lm_p r^4)F(t)\theta^8(t) \\ & + (-27648000m_c r^5 + 622080000m_p r^5)F(t)\theta^8(t) - 172800l^4m_p rF(t)\theta^{10}(t) \\ & - (2764800l^3m_p r^2 + 65664000l^2m_p r^3 + 139392000lm_p r^4 - 65664000m_p r^5)F(t)\theta^{10}(t) \\ & + (6172800l^2m_p r^3 + 12902400lm_p r^4 + 63360000m_p r^5)F(t)\theta^{12}(t) - 3936005l^2m_p r^3F(t)\theta^{14}(t) \\ & - (460800lm_p r^4 + 9763200m_p r^5)F(t)\theta^{14}(t) + (17280l^2m_p r^3 + 1004800m_p r^5)F(t)\theta^{16}(t) \\ & + (-480l^2m_p r^3 - 69440m_p r^5)F(t)\theta^{18}(t) + (6l^2m_p r^3 + 3120m_p r^5)F(t)\theta^{20}(t) \\ & - 83m_p r^5F(t)\theta^{22}(t) + m_p r^5F(t)\theta^{24}(t) \\ \dot{\theta}(t) = & \frac{-995328000l^4m_c m_p r^2 + (-2488320000d_c l^4m_p - 2488320000d_c m_p l^3 r)\theta(t) + (995328000d_p l^4m_c r^2 + 995328000d_p l^3m_c r^3)\theta(t)}{1990656000l^4m_c m_p r^2 + (-2488320000d_c l^4m_p - 2488320000d_c m_p l^3 r)\theta(t)} \quad (4.115) \\ & + (-995328000l^4m_c m_p r^2 - 995328000l^3m_c m_p r^3 - 995328000l^2m_c m_p r^4)\theta^2(t) \\ & + (414720000d_c m_p l^4 + 1658880000d_c m_p l^3 r - 165888000d_p l^4m_c r^2)\theta^3(t) \\ & + (2488320000d_c m_p l^2 r^2 - 663552000d_p m_c l^3 r^3 + 1244160000d_c l m_p r^3)\theta^3(t) \\ & + (-995328000d_p m_c l^2 r^4 - 497664000d_p l m_c r^5)\theta^3(t) + 82944000l^4m_c m_p r^2\theta^4(t) \\ & + (331776000l^3m_c m_p r^3 + 829440000l^2m_c m_p r^4 + 497664000m_p l m_c r^5)\theta^4(t) \\ & + 497664000m_c m_p r^6\theta^4(t) + (-20736000d_c m_p l^4 - 331776000d_c m_p l^3 r)\theta^5(t) \\ & (8294400d_p l^4m_c r^2 - 1244160000d_c m_p l^2 r^2 + 132710400d_p l^3m_c r^3)\theta^5(t) \\ & (-1244160000d_c l m_p r^3 + 497664000d_p m_c l^2 r^4 - 622080000d_c m_p r^4)\theta^5(t) \\ & (497664000d_p m_c l r^5 + 248832000d_p m_c r^6)\theta^5(t) \end{aligned}$$

De forma análoga al caso anterior, ahora se convierte la ecuación diferencial (4.115) en una ecuación en diferencia por medio de la aproximación de Euler (4.112) y $\theta(t) = \theta(kT_0)$. Luego al realizar una serie de operaciones matemáticas y agrupaciones, se obtiene el siguiente modelo no lineal:

$$\begin{aligned}
 & A(z^{-1})\theta(kT_0) + \Lambda_{\theta(kT_0)^2}(z^{-1})\theta(kT_0)^2 + \Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})\theta(kT_0)^3 + \Lambda_{\theta(kT_0)^4}(z^{-1})\theta(kT_0)^4 + \\
 & \Lambda_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})\theta(kT_0)^5 + \Lambda_{\theta(kT_0)^6}(z^{-1})\theta(kT_0)^6 = \\
 & z^{-d} \left(B(z^{-1})F(kT_0) + Y_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})\theta^2(kT_0)F(kT_0) + Y_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1})\theta^4(kT_0)F(kT_0) + \right. \\
 & Y_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1})\theta^6(kT_0)F(kT_0) + Y_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1})\theta^8(kT_0)F(kT_0) + Y_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1})\theta^{10}(kT_0)F(kT_0) + \\
 & Y_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1})\theta^{12}(kT_0)F(kT_0) + Y_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1})\theta^{14}(kT_0)F(kT_0) + \\
 & Y_{\theta_k^{16} F_k}(z^{-1})\theta^{16}(kT_0)F(kT_0) + Y_{\theta_k^{18} F_k}(z^{-1})\theta^{18}(kT_0)F(kT_0) + \\
 & Y_{\theta_k^{20} F_k}(z^{-1})\theta^{20}(kT_0)F(kT_0) + Y_{\theta_k^{22} F_k}(z^{-1})\theta^{22}(kT_0)F(kT_0) + \\
 & \left. Y_{\theta_k^{24} F_k}(z^{-1})\theta^{24}(kT_0)F(kT_0) \right), \tag{4.116}
 \end{aligned}$$

donde:

$$A(z^{-1}) = 1 - 1z^{-1};$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\theta(kT_0)^2}(z^{-1}) = & \frac{-2488320000d_c l^4 m_p - 2488320000d_c m_p l^3 r + 995328000d_p l^4 m_c r^2 + 995328000d_p l^3 m_c r^3}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} z^{-1} - \\
 & \frac{-2488320000d_c l^4 m_p - 2488320000d_c m_p l^3 r + 995328000d_p l^4 m_c r^2 + 995328000d_p l^3 m_c r^3}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} z^{-2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1}) = & \frac{-995328000l^4 m_c m_p r^2 - 995328000l^3 m_c m_p r^3 - 995328000l^2 m_c m_p r^4}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} z^{-1} - \\
 & \frac{-995328000l^4 m_c m_p r^2 - 995328000l^3 m_c m_p r^3 - 995328000l^2 m_c m_p r^4}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} z^{-2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\theta(kT_0)^4}(z^{-1}) = & \frac{414720000d_c m_p l^4 + 1658880000d_c m_p l^3 r - 165888000d_p l^4 m_c r^2 + 2488320000d_c m_p l^2 r^2}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} z^{-1} + \\
 & \frac{-663552000d_p m_c l^3 r^3 + 1244160000d_c l m_p r^3 - 995328000d_p m_c l^2 r^4 - 497664000d_p l m_c r^5}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} z^{-1} -
 \end{aligned}$$

$$\frac{414720000d_c m_p l^4 + 1658880000d_c m_p l^3 r - 165888000d_p l^4 m_c r^2 + 2488320000d_c m_p l^2 r^2}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-2} -$$

$$\frac{-663552000d_p m_c l^3 r^3 + 1244160000d_c l m_p r^3 - 995328000d_p m_c l^2 r^4 - 497664000d_p l m_c r^5}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-2};$$

$$\Lambda_{\theta(kT_0)^5}(Z^{-1}) = \frac{82944000l^4 m_c m_p r^2 + 331776000l^3 m_c m_p r^3 + 829440000l^2 m_c m_p r^4 + 497664000m_p l m_c r^5}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-1} +$$

$$\frac{497664000m_c m_p r^6}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-1} - \frac{82944000l^4 m_c m_p r^2 + 331776000l^3 m_c m_p r^3}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-2} -$$

$$\frac{829440000l^2 m_c m_p r^4 + 497664000m_p l m_c r^5}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-2};$$

$$\Lambda_{\theta(kT_0)^6}(Z^{-1}) = \frac{-20736000d_c m_p l^4 - 331776000d_c m_p l^3 r + 8294400d_p l^4 m_c r^2 - 1244160000d_c m_p l^2 r^2}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-1} +$$

$$\frac{132710400d_p l^3 m_c r^3 - 1244160000d_c l m_p r^3 + 497664000d_p m_c l^2 r^4 - 622080000d_c m_p r^4}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-1} +$$

$$\frac{497664000d_p m_c l r^5 + 248832000d_p m_c r^6}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-1} -$$

$$\frac{-20736000d_c m_p l^4 - 331776000d_c m_p l^3 r + 8294400d_p l^4 m_c r^2 - 1244160000d_c m_p l^2 r^2}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-2} -$$

$$\frac{132710400d_p l^3 m_c r^3 - 1244160000d_c l m_p r^3 + 497664000d_p m_c l^2 r^4 - 622080000d_c m_p r^4}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-2} -$$

$$\frac{497664000d_p m_c l r^5 + 248832000d_p m_c r^6}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} Z^{-2};$$

$$B(Z^{-1}) = \frac{-995328000l^4 m_c r T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^2 F_k}(Z^{-1}) = \frac{(-2488320000l^4 m_p r + 995328000l^2 m_c r^3 - 2488320000l^3 m_p r^2) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^4 F_k}(Z^{-1}) = \frac{(829440000l^4 m_p r + 2073600000l^3 m_p r^2 - 331776000l^2 m_c r^3 + 1244160000l m_p r^4) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} +$$

$$\frac{(-248832000m_c r^5 + 2488320000l^2 m_p r^3) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^6 F_k}(Z^{-1}) = \frac{(-110592000l^4 m_p r - 628992000l^3 m_p r^2 - 1658880000l^2 m_p r^3 + 165888000m_c r^5) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2} +$$

$$\frac{(-1451520000l m_p r^4 - 622080000m_p r^5) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2};$$

$$Y_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1}) = \frac{(6912000l^4 m_p r + 69120000l^3 m_p r^2 + 442368000l^2 m_p r^3 + 660096000l m_p r^4 - 27648000 m_c r^5 - 622080000 m_p r^5) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2},$$

$$Y_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1}) = \frac{(-172800l^4 m_p r - 2764800l^3 m_p r^2 - 65664000l^2 m_p r^3 - 139392000l m_p r^4 - 65664000 m_p r^5) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2},$$

$$Y_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1}) = \frac{(6172800l^2 m_p r^3 + 12902400l m_p r^4 + 63360000 m_p r^5) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2},$$

$$Y_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1}) = \frac{(-3936005l^2 m_p r^3 - 460800l m_p r^4 - 9763200 m_p r^5) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2},$$

$$Y_{\theta_k^{16} F_k}(z^{-1}) = \frac{(17280l^2 m_p r^3 + 1004800 m_p r^5) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2},$$

$$Y_{\theta_k^{18} F_k}(z^{-1}) = \frac{(-480l^2 m_p r^3 - 69440 m_p r^5) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2},$$

$$Y_{\theta_k^{20} F_k}(z^{-1}) = \frac{(6l^2 m_p r^3 + 3120 m_p r^5) T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2},$$

$$Y_{\theta_k^{22} F_k}(z^{-1}) = \frac{-83 m_p r^5 T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2},$$

$$Y_{\theta_k^{24} F_k}(z^{-1}) = \frac{m_p r^5 T_0}{1990656000l^4 m_c m_p r^2},$$

$$d = 1.$$

La ley de control de mínima varianza generalizada requerida para anular la variable de la superficie deslizante s_{k+d} está dado por:

$$u(kT_0) = \frac{[F(z^{-1})\theta_k + P_{\theta_k^2}(z^{-1})\theta_{k+d}^2 + P_{\theta_k^3}(z^{-1})\theta_{k+d}^3 + P_{\theta_k^4}(z^{-1})\theta_{k+d}^4 + P_{\theta_k^5}(z^{-1})\theta_{k+d}^5 + P_{\theta_k^6}(z^{-1})\theta_{k+d}^6 - C(z^{-1})r_{k+d}]}{G(z^{-1}) + P_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})\theta_k^2 + P_{\theta_k^3 F_k}(z^{-1})\theta_k^3 + \dots + P_{\theta_k^{24} F_k}(z^{-1})\theta_k^{24}},$$

(4.117)

donde:

$$P_{\theta_k^2}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta_k^2}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^3}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta_k^3}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^4}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta_k^4}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^5}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta_k^5}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^6}(z^{-1}) = -\Lambda_{\theta_k^6}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^{16} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{16} F_k}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^{18} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{18} F_k}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^{20} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{20} F_k}(z^{-1})E(z^{-1}); P_{\theta_k^{22} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{22} F_k}(z^{-1})E(z^{-1});$$

$$P_{\theta_k^{24} F_k}(z^{-1}) = Y_{\theta_k^{24} F_k}(z^{-1})E(z^{-1}); G(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1}).$$

la cual se puede deducir de la ley de control mostrada para el caso general de la tabla 3.1 de la sección 3.5 del capítulo 3 al tomar en cuenta solo las señales presentes en el modelo no lineal de la ecuación (4.116).

4.4.3 Simulaciones para el mecanismo corredera-biela-manivela

A continuación se presentan los resultados obtenidos por medio de las simulaciones al aplicar CMVG y el controlador auto-ajutable en cada uno de los casos presentados en la sección anterior. Se compara la salida del sistema controlado, así como también el comportamiento de la variable de modo deslizante y el control para ambos casos.

Se asume que el coeficiente viscoso de la corredera y el coeficiente viscoso de la rueda son desconocidos (se asume que se conoce el límite inferior y superior de cada parámetro como se muestra en la tabla 4.9), los demás parámetros del modelo matemático se asumen conocidos. Para las simulaciones se tomó como condición inicial de la posición $\theta(0) = \frac{20\pi}{180}$, debido a una restricción propia del mecanismo. Los valores de los parámetros se muestran en la tabla 4.9.

Tabla 4.10. Valores de los parámetros del mecanismo corredera-bicla-manivela.

Parámetro físico	Valor
Masa de la corredera m_p [kg]	0.3
Coficiente viscoso de la corredera d_p [N.s/m]	[0.005; 0.07]
Longitud de la bicla l [m]	0.35
Masa de la rueda m_c [kg]	2.852
Coficiente viscoso de la rueda d_c [N.s/m]	[0.001; 0.05]
Radio de la rueda r [m]	0.11

4.4.3.1 Simulaciones para el caso presentado en la sección 4.4.2.1

Los valores máximos y mínimos para cada uno de los términos de los polinomios $A(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^2}(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1})$ y $Y_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1})$, se calculan sustituyendo los valores máximos y mínimos del coeficiente viscoso de la corredera, el coeficiente viscoso de la rueda, se asume un periodo de muestreo $T_0 = 0.0001$ s. Así se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= [1 \quad 1]; a_{12} = [1 \quad 1]; a_{21} = [-2.3694 \quad 0.1057]; \\
a_{22} &= [-2.3694 \quad 0.1057]; a_{31} = [-0.7065 \quad -0.7065]; \\
a_{32} &= [-0.7065 \quad -0.7065]; a_{41} = [-0.0395 \quad 0.8842]; \\
a_{42} &= [-0.0395 \quad 0.8842]; b_{11} = [-0.0015 \quad -0.0015]; \\
b_{21} &= [-0.0004 \quad -0.0004]; b_{31} = [0.0003 \quad 0.0003].
\end{aligned}$$

Conocidos los valores máximos y mínimos de los términos de los polinomios, se calcula el valor nominal por medio del promedio de éstos, obteniendo el modelo nominal del sistema no lineal mostrado en la ecuación (4.118):

$$\begin{aligned}
&(1 - z^{-1})\theta(kT_0) + (-1.1319z^{-1} + 1.1319z^{-2})\theta(kT_0)^2 + \\
&(-0.7065z^{-1} + 0.7065z^{-2})\theta(kT_0)^3 + (0.4224z^{-1} - 0.4224z^{-2})\theta(kT_0)^4 = \\
&z^{-1}(-0.0015F(kT_0) - 0.004F(kT_0)\theta(kT_0)^2 + 0.0003F(kT_0)\theta(kT_0)^4). \quad (4.118)
\end{aligned}$$

Los términos de los polinomios $Y_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^9 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1})$ y $Y_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1})$ son aproximadamente cero, por lo tanto, estas señales no aparecen en la ecuación (4.118).

Se asume como modelo real en este caso al presentado en la ecuación (4.119),

$$\begin{aligned}
&(1 - z^{-1})\theta(kT_0) + (-0.4542z^{-1} + 0.4542z^{-2})\theta(kT_0)^2 + \\
&(-0.7065z^{-1} + 0.7065z^{-2})\theta(kT_0)^3 + (0.1692z^{-1} - 0.1692z^{-2})\theta(kT_0)^4 = \\
&z^{-1}(-0.0015F(kT_0) - 0.004F(kT_0)\theta(kT_0)^2 + 0.0003F(kT_0)\theta(kT_0)^4), \quad (4.119)
\end{aligned}$$

Para el cálculo de la ley de control los polinomios de diseño usados son:

$$C(z^{-1}) = 1 + 0.5263z^{-1}, \quad (4.120)$$

$$Q(z^{-1}) = 0.1(1 - z^{-1}), \quad (4.121)$$

que conducen a los siguientes polinomios para la ley de control,

$$F(z^{-1}) = -957, \quad (4.122)$$

$$G(z^{-1}) = 1.0405 - 0.1z^{-1}, \quad (4.123)$$

$$P_{\theta_k^2}(z^{-1}) = -709.670z^{-1} + 709.670z^{-2}, \quad (4.124)$$

$$P_{\theta_k^3}(z^{-1}) = -442.976z^{-1} + 442.976z^{-2}, \quad (4.125)$$

$$P_{\theta_k^4}(z^{-1}) = 264.845z^{-1} - 264.845z^{-2}, \quad (4.126)$$

$$P_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1}) = -0.2508, \quad (4.127)$$

$$P_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1}) = 0.1881, \quad (4.128)$$

donde $F(z^{-1})$, $G(z^{-1})$, $P_{\theta_k^2}(z^{-1})$, $P_{\theta_k^3}(z^{-1})$, $P_{\theta_k^4}(z^{-1})$, $P_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})$ y $P_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1})$ se asumen como las estimaciones iniciales de los parámetros del controlador auto-ajutable $\hat{F}(z^{-1})$, $\hat{G}(z^{-1})$, $\hat{P}_{\theta_k^2}(z^{-1})$, $\hat{P}_{\theta_k^3}(z^{-1})$, $\hat{P}_{\theta_k^4}(z^{-1})$, $\hat{P}_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})$ y $\hat{P}_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1})$, respectivamente.

El análisis de estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado usando el criterio de Tsytkin y Furuta (criterio 2.5.2 del capítulo 2), en presencia de intervalos de incertidumbres paramétricos no se estudia en este caso ya que los términos de los polinomios $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$

poseen el mismo valor numérico tanto para el máximo como para el mínimo (no existe incertidumbre en estos coeficientes), por lo tanto el criterio no es aplicable.

Debido a que la condición inicial de la posición de la rueda es $\frac{20\pi}{180}$, se comienza a variar la posición deseada a partir de este valor hasta llegar a $\frac{60\pi}{180}$, posición en la cual ya no es posible estabilizar el mecanismo. En la tabla 4.10 se muestran los resultados obtenidos para diferentes posiciones del mecanismo corredera-biela-manivela, indicando el comportamiento de la salida tanto para el CMVG como para el controlador auto-ajutable (CMVG-STC).

Tabla 4.11. Comparación de las salidas controladas usando CMVG y CMVG-STC.

Posición (rad)	Salida CMVG	Salida CMVG-STC
$\frac{21\pi}{180}$	El controlador no estabiliza el sistema, posee oscilaciones	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{30\pi}{180}$	El controlador no estabiliza el sistema, posee oscilaciones	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{40\pi}{180}$	El controlador no estabiliza el sistema, posee oscilaciones	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{50\pi}{180}$	El controlador no estabiliza el sistema, posee oscilaciones	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{55\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{58\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{60\pi}{180}$	No controla	No controla

En la figura 4.23 se presentan las respuestas de la salida del sistema (4.119), utilizando el controlador CVMG y el controlador auto-ajustable (CMVG-STC), el comportamiento de la variable de modo deslizante y la dinámica del control para una posición deseada de $\frac{50\pi}{180}$. La condición inicial para Γ es $\Gamma_0 = I$. La señal de referencia se eligió como un escalón unitario.

En esta figura 4.23 se observa que la salida del sistema controlado por medio del CVMG es oscilatoria, por lo tanto, no se puede posicionar la rueda en la posición deseada generando inestabilidad al mecanismo. Mientras que al aplicar el CMVG-STC se logra estabilizar la rueda en la posición deseada. En el caso de la dinámica de los controladores, se necesita un menor esfuerzo con el controlador auto-ajustable.

www.bdigital.ula.ve

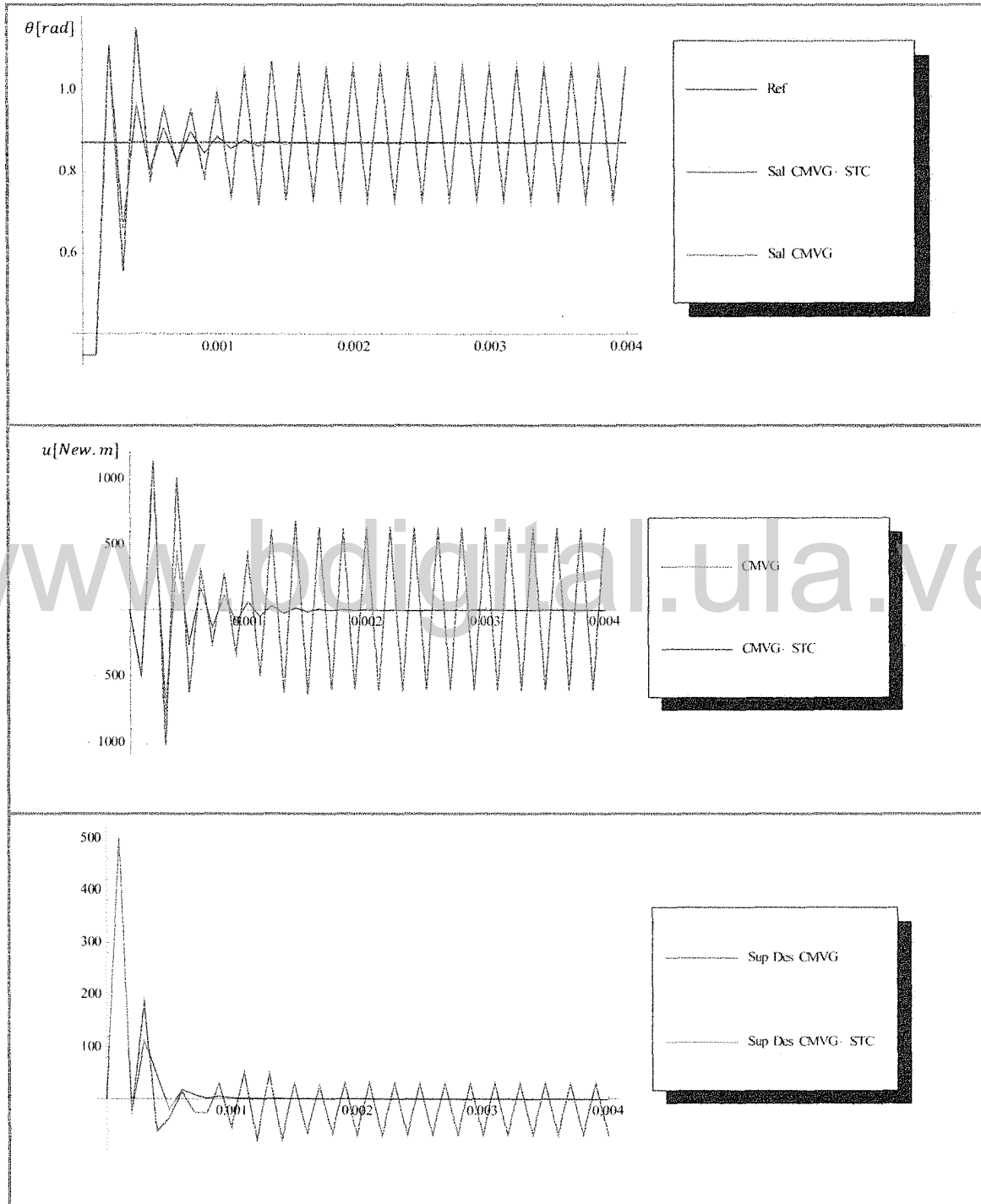
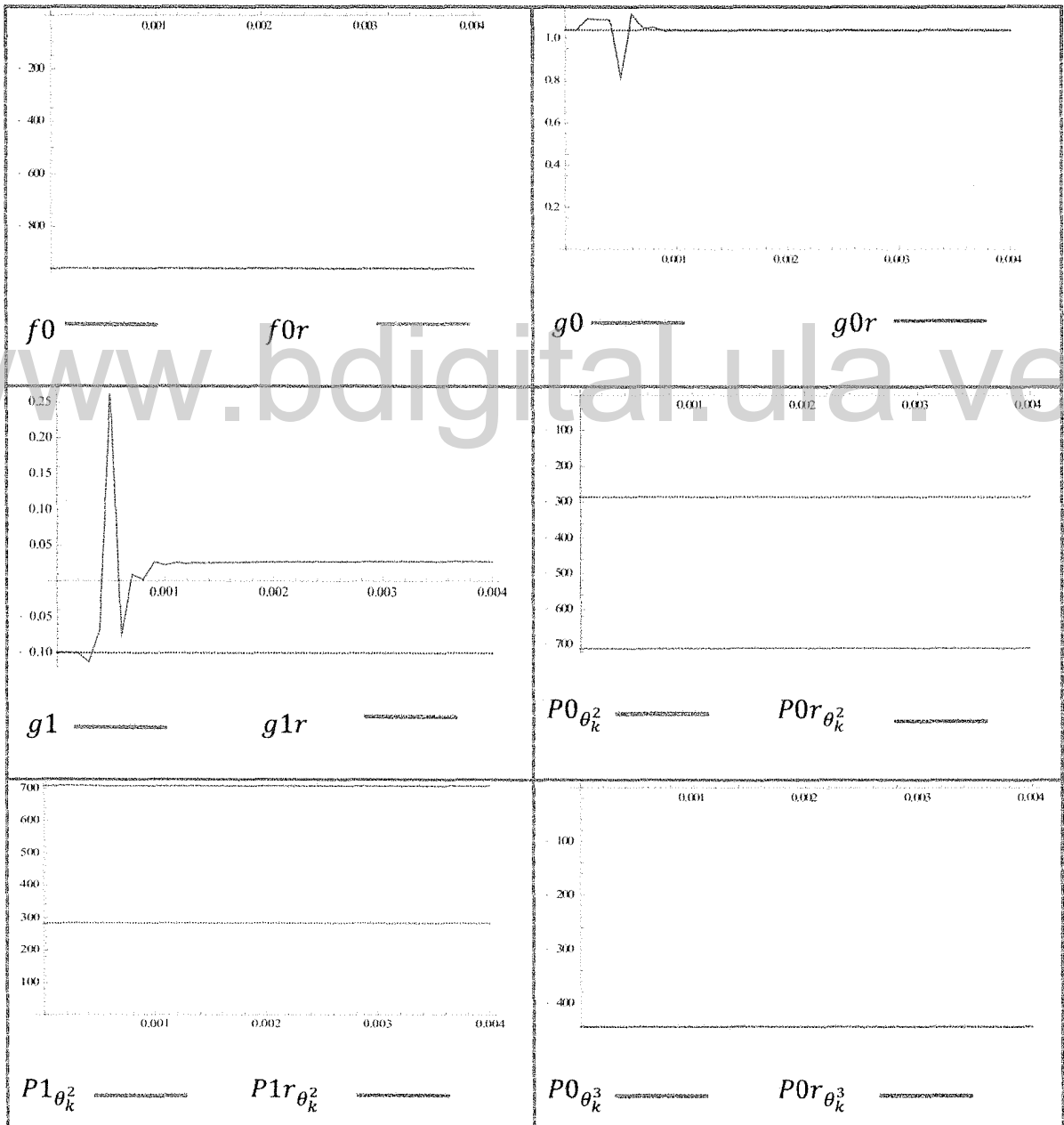


Figura 4.23. Comparación de la salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal (4.136) controlado por medio de CMVG (verde) y el CMVG-STC (azul) para $50\pi/180$.

En la figura 4.24 se muestra el comportamiento de los parámetros del controlador, los cuales no necesariamente convergen a su valor real, sin embargo lo hacen a un valor constante. Este comportamiento de los parámetros se mantienen para todos las diferentes posiciones de la rueda.



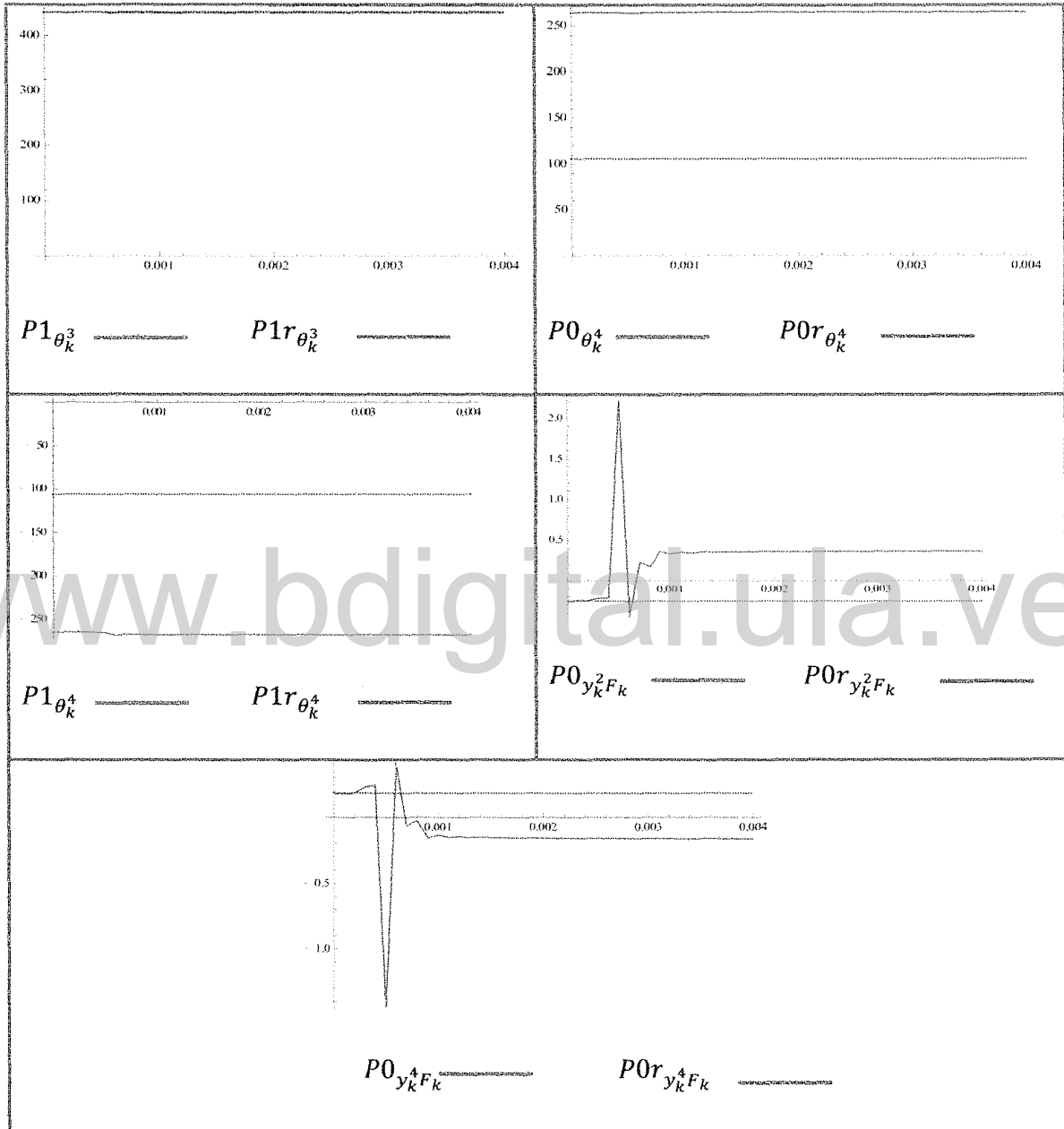


Figura 4.24. Comportamiento de los parámetros del controlador auto-ajutable.

4.4.3.2 Simulaciones para el caso presentado en la sección 4.4.2.2

Para el modelo nominal del sistema no lineal de este caso, los intervalos de los términos de los polinomios $A(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^2}(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^3}(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^4}(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^5}(z^{-1})$, $\Lambda_{\theta(kT_0)^6}(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{16} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{18} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{20} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{22} F_k}(z^{-1})$ y $Y_{\theta_k^{24} F_k}(z^{-1})$, son los siguientes valores:

$$a_{11} = [1 \quad 1]; a_{12} = [1 \quad 1]; a_{21} = [-2.3694 \quad 0.1057]; a_{22} = [-2.3694 \quad 0.1057];$$

$$a_{31} = [-0.7065 \quad -0.7065]; a_{32} = [-0.7065 \quad -0.7065]; a_{41} = [-0.0395 \quad 0.8842];$$

$$a_{42} = [-0.0395 \quad 0.8842]; a_{51} = [0.1542 \quad 0.1542]; a_{52} = [0.1542 \quad 0.1542];$$

$$a_{61} = [-0.2120 \quad 0.0095]; a_{62} = [-0.2120 \quad 0.0095]; b_{11} = [-0.0015 \quad -0.0015];$$

$$b_{21} = [-0.0004 \quad -0.0004]; b_{31} = [0.0002 \quad 0.0002].$$

De forma análoga al caso anterior se calcula el modelo nominal del sistema no lineal mostrado en la ecuación (4.129):

$$\begin{aligned} & (1 - z^{-1})\theta(kT_0) + (-1.1319z^{-1} + 1.1319z^{-2})\theta(kT_0)^2 + \\ & (-0.7065z^{-1} + 0.7065z^{-2})\theta(kT_0)^3 + (0.4224z^{-1} - 0.4224z^{-2})\theta(kT_0)^4 + \\ & (0.1542z^{-1} - 0.1542z^{-2})\theta(kT_0)^5 + (-0.1013z^{-1} + 0.1013z^{-2})\theta(kT_0)^6 = \\ & z^{-1}(-0.0015F(kT_0) - 0.004F(kT_0)\theta(kT_0)^2 + 0.0002F(kT_0)\theta(kT_0)^4). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Los términos de los polinomios $Y_{\theta_k^6 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^8 F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{10} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{12} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{14} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{16} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{18} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{20} F_k}(z^{-1})$, $Y_{\theta_k^{22} F_k}(z^{-1})$ y

$Y_{\theta_k^{24} F_k}(z^{-1})$ son cero, por lo tanto, estas señales no son tomadas en cuenta en la ecuación (4.129).

El modelo real se asume como,

$$\begin{aligned} &(1 - z^{-1})\theta(kT_0) + (-0.4542z^{-1} + 0.4542z^{-2})\theta(kT_0)^2 + \\ &(-0.7065z^{-1} + 0.7065z^{-2})\theta(kT_0)^3 + (0.1692z^{-1} - 0.1692z^{-2})\theta(kT_0)^4 + \\ &(0.1542z^{-1} - 0.1542z^{-2})\theta(kT_0)^5 + (-0.0406z^{-1} + 0.0406z^{-2})\theta(kT_0)^6 = \\ &z^{-1}(-0.0015F(kT_0) - 0.004F(kT_0)\theta(kT_0)^2 + 0.0002F(kT_0)\theta(kT_0)^4). \end{aligned} \quad (4.130)$$

Los polinomios de diseño usados para el cálculo de la ley de control son los presentados en las ecuaciones (4.120) y (4.121), con los cuales se obtienen los siguientes polinomios para la ley de control,

$$F(z^{-1}) = -957, \quad (4.131)$$

$$G(z^{-1}) = 1.0405 - 0.1z^{-1}, \quad (4.132)$$

$$P_{\theta_k^2}(z^{-1}) = -709.639z^{-1} + 709.639z^{-2}, \quad (4.133)$$

$$P_{\theta_k^3}(z^{-1}) = -442.976z^{-1} + 442.976z^{-2}, \quad (4.134)$$

$$P_{\theta_k^4}(z^{-1}) = 264.845z^{-1} - 264.845z^{-2}, \quad (4.135)$$

$$P_{\theta_k^5}(z^{-1}) = 96.683z^{-1} - 96.683z^{-2}, \quad (4.136)$$

$$P_{\theta_k^6}(z^{-1}) = -63.515z^{-1} + 63.515z^{-2}, \quad (4.137)$$

$$P_{\theta_k^{24} F_k}(z^{-1}) = -0.2508, \quad (4.138)$$

$$P_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1}) = 0.1254, \quad (4.139)$$

donde $F(z^{-1}), G(z^{-1}), P_{\theta_k^2}(z^{-1}), P_{\theta_k^3}(z^{-1}), P_{\theta_k^4}(z^{-1}), P_{\theta_k^5}(z^{-1}), P_{\theta_k^6}(z^{-1}), P_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})$ y $P_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1})$ se asumen como las estimaciones iniciales de los parámetros del controlador auto-ajutable $\hat{F}(z^{-1}), \hat{G}(z^{-1}), \hat{P}_{\theta_k^2}(z^{-1}), \hat{P}_{\theta_k^3}(z^{-1}), \hat{P}_{\theta_k^4}(z^{-1}), \hat{P}_{\theta_k^5}(z^{-1}), \hat{P}_{\theta_k^6}(z^{-1}), \hat{P}_{\theta_k^2 F_k}(z^{-1})$ y $\hat{P}_{\theta_k^4 F_k}(z^{-1})$, respectivamente y que serán usados para la estimación recursiva de la ley de control.

De forma similar al caso anterior se varía la posición deseada desde los $\frac{20\pi}{180}$ hasta que en los $\frac{70\pi}{180}$ no es posible estabilizar el mecanismo en la posición deseada. En la tabla 4.11 se muestran los resultados obtenidos para diferentes posiciones del mecanismo manivela-biela-corredera, indicando el comportamiento de la salida tanto para el CMVG como para el controlador auto-ajutable.

Tabla 4.12. Comparación de las salidas controladas usando CMVG y CMVG-STC.

Posición (rad)	Salida CMVG	Salida CMVG-STC
$\frac{21\pi}{180}$	El controlador no estabiliza el sistema, posee oscilaciones	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{30\pi}{180}$	El controlador no estabiliza el sistema, posee oscilaciones	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{40\pi}{180}$	El controlador no estabiliza el sistema, posee oscilaciones	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{50\pi}{180}$	El controlador no estabiliza el sistema, posee oscilaciones	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{60\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{65\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{70\pi}{180}$	No controla	No controla

En comparación a los resultados mostrados en el caso anterior, se observa que al expandir el término no lineal del modelo matemático con los tres primeros términos de la serie de Taylor, se logra estabilizar la rueda del mecanismo manivela-biela-corredera en una mayor cantidad de posiciones deseadas.

En la figura 4.25 se presentan las respuestas de la salida del sistema (4.130), utilizando el controlador CVMG y el controlador auto-ajutable CVMG-STC, el comportamiento de la variable de modo deslizante y el control para $\frac{50\pi}{180}$. La condición inicial para Γ es $\Gamma_0 = I$. La señal de referencia se eligió como un escalón unitario.

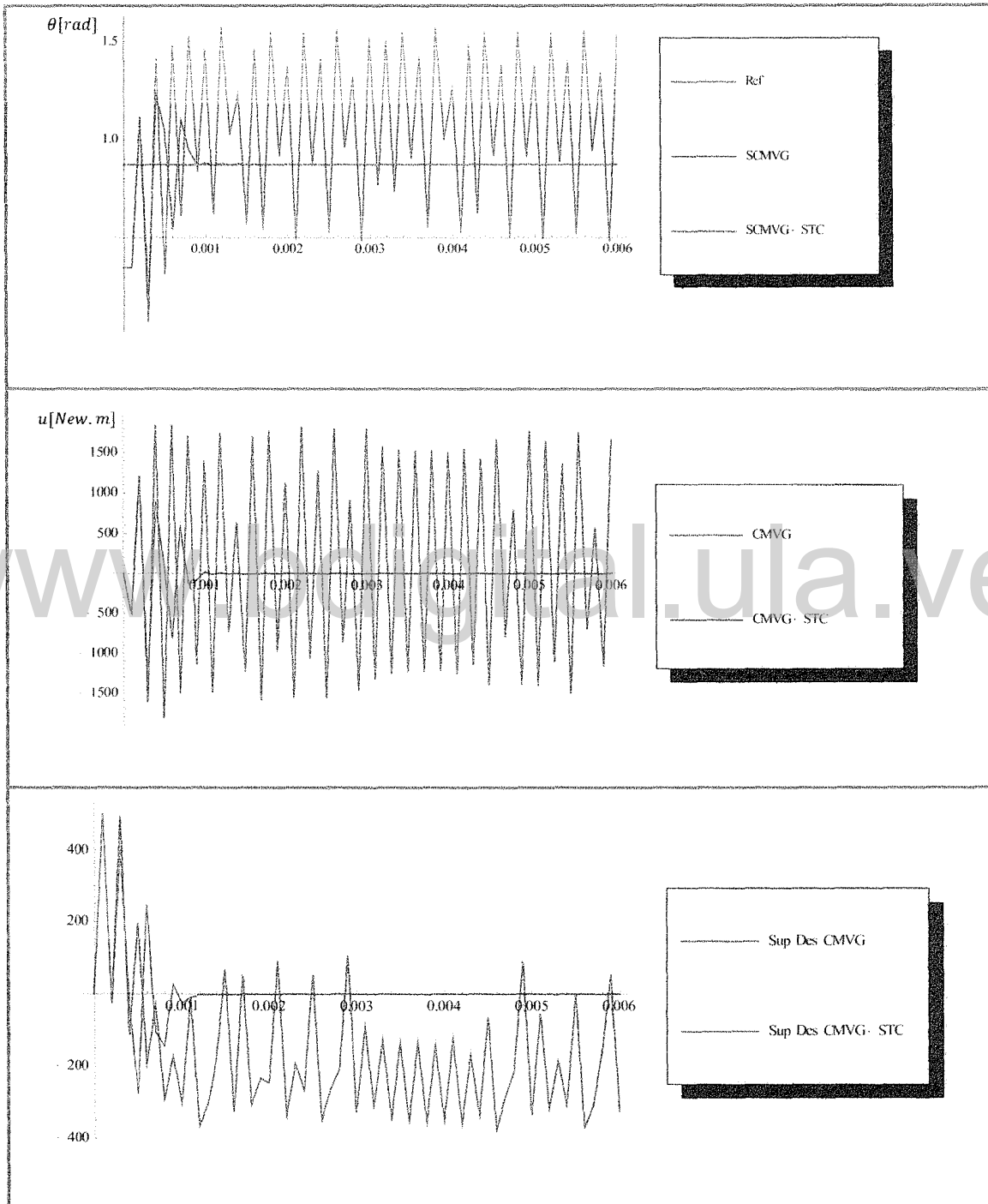


Figura 4.25. Comparación de la salida, la variable de modo deslizante y el control del sistema no lineal (4.130) controlado por medio de CMVG (verde) y el CMVG-STC (azul) para $50\pi/180$.

En la figura 4.25, se observa que sistema es estabilizado en la posición deseada al ser controlador con el controlador auto-ajustable propuesto mientras que al usar el CMVG no es posible estabilizarlo generando inestabilidad en el mecanismo. En el caso del comportamiento de la dinámica de los controladores, se necesita un menor esfuerzo con el controlador auto-ajustable que con el controlador de mínima varianza generalizada.

4.4.4 Análisis de la aplicación de las leyes de control al sistema original

A continuación se muestran los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de control auto-ajustable propuesto y el controlador de mínima varianza generalizada al modelo matemático (4.110), esto con el fin de tener una previa idea sobre el comportamiento del sistema controlado en caso de ser implementado.

En la tabla 4.12 se muestran los resultados de aplicar la ley de control de mínima varianza generalizada (4.114) y el controlador auto-ajustable al modelo matemático representado en la ecuación (4.110). Se comienza variando la posición de la rueda desde los $\frac{20\pi}{180}$ (restricción propia del mecanismo corredera-manivela-biela) y se va aumentando el ángulo gradualmente hasta los $\frac{29\pi}{180}$ donde el controlador auto-ajustable no logra estabilizar al sistema.

Tabla 4.13. Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.114) y CMVG-STC en el modelo matemático (4.110).

Posición (rad)	Salida CMVG	Salida CMVG-STC
$\frac{21\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{23\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{25\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{29\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{30\pi}{180}$	No controla	No controla

Luego, se prueba tanto el controlador auto-ajustable como la ley de control de mínima varianza generalizada (4.117) sobre el modelo matemático representado en la ecuación (4.110). De igual manera, se comienza variando la posición de la rueda desde los $\frac{20\pi}{180}$ y se va aumentando el ángulo progresivamente hasta que a los $\frac{33\pi}{180}$ donde el controlador auto-ajustable no controla el sistema. Estos resultados se muestran en la tabla 4.13.

Tabla 4.14. Comparación de las salidas controladas usando CMVG (4.117) y CMVG-STC en el modelo matemático (4.110).

Posición (rad)	Salida CMVG	Salida CMVG-STC
$\frac{21\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{25\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{30\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{32\pi}{180}$	No controla	Estabiliza y no posee error en estado estacionario
$\frac{33\pi}{180}$	No controla	No controla

En comparación a los resultados obtenidos en las secciones 4.4.3.1 y 4.4.3.2 donde los términos no lineales se sustituyeron por su respectiva serie en Taylor (tomando los dos y tres primeros términos respectivamente), se puede observar que al aplicar el controlador autoajutable al modelo matemático (4.110) se estabiliza el mecanismo en una cantidad menor de posiciones deseadas para ambos casos con respecto a los resultados anteriores. Esto se debe a que el modelo matemático (4.110) posee una gran cantidad de no linealidades y a que las leyes de control aplicadas fueron las diseñadas para los modelos matemáticos (4.113) y (4.116) de los casos de estudio presentados en las secciones 4.4.2.1 y 4.4.2.2, por lo tanto, no logra estabilizar en una cantidad mayor de posiciones deseadas al modelo (4.110). Sin embargo, los resultados de las tablas 4.12 y 4.13 se pueden tomar como exitosos ya que es la primera prueba que se realiza sobre un modelo matemático altamente no lineal.

4.4.5 Análisis de los resultados

En los resultados obtenidos en la sección 4.4.3, se pudo observar que el algoritmo de controlador auto-ajustable (3.33), (3.34) y (3.38) propuesto cumplió con el objetivo de seguimiento de referencia hasta cierta posición donde ya no fue posible estabilizar al mecanismo manivela-biela-corredera. Mientras que al usar el controlador de mínima varianza generalizada no fue posible estabilizar este mecanismo en ninguna de las posiciones deseadas, debido a la incertidumbre paramétrica presente en el modelo matemático. Esto se verifica al observar el comportamiento de la superficie en modo deslizante, la cual es anulada al aplicar el controlador auto-ajustable propuesto mientras que al aplicar el CMVG no fue posible anular dicha variable en presencia de incertidumbre paramétrica y por eso no se logró cumplir con el seguimiento de la referencia. Por lo tanto, al emplear el controlador auto-ajustable en el mecanismo manivela-biela-corredera (expandiendo sus términos no lineales por su respectiva serie de Taylor), se cumplió con éxito el objetivo de seguimiento de la referencia para diferentes posiciones deseadas, tomando para todos los casos como condición inicial $\theta(0) = 20rad$.

En los dos casos presentados para el mecanismo corredera-biela-manivela, se observó que los parámetros de la ley de control aunque no necesariamente tienden a su valor real si lo hacen a un valor constante. La dinámica del control auto-ajustable aunque presenta ciertos de picos de frecuencia al inicio de su dinámica se observa que luego se hace constante mientras que en el caso del CMVG presenta muchas oscilaciones lo cual no es deseable al momento de hacer control ya que puede perjudicar los elementos físicos presentes en el mecanismo.

Al aplicar el algoritmo de controlador auto-ajustable (3.33), (3.34) y (3.38) propuesto al modelo matemático (4.110) y haciendo uso de las leyes de control 4.114 y luego la 4.117, se

logró estabilizar el mecanismo en varias posiciones deseada aunque en estos casos fue en una cantidad menor de posiciones, esto se debe a que las leyes de control (4.114) y (4.117) fueron diseñadas para los modelos matemáticos (4.113) y (4.116), respectivamente y el modelo matemático original es altamente no lineal. Sin embargo, se puede tomar estos resultados obtenidos como éxitos ya que aunque las leyes de control no fueron diseñadas directamente para el modelo matemático (4.110), éstas al aplicarse junto con el algoritmo de control auto-ajutable estabilizaron el mecanismo corredera-biela-manivela.

Por lo tanto, al ser las primeras pruebas realizadas sobre este modelo matemático en particular (el cual es un nuevo aporte sobre el modelado matemático de dicho mecanismo, ya que el presentado por Saitoh y Furuta (2007) conlleva directamente a un modelo lineal de primer orden), se pueden tomar como resultados satisfactorios al realizar control por medio del algoritmo auto-ajutable (3.33), (3.34) y (3.38) propuesto. Mientras que para este caso, el CMVG no logró estabilizar este mecanismo en ninguna posición ya que siempre se obtuvo un comportamiento muy oscilatorio debido a la presencia de incertidumbre en los parámetros del sistema.

Conclusiones y Recomendaciones

En este capítulo, se presentan las conclusiones del trabajo realizado. De igual manera se presentan algunas recomendaciones para trabajos futuros.

Conclusiones

En estudios anteriores, la estabilidad del algoritmo de control auto-ajutable basado en el criterio de mínima varianza generalizada (modificado bajo el concepto de control en modo deslizante) para sistemas lineales SISO, lineales MIMO y para sistemas bilineales SISO se demostró por medio del uso de una función de Lyapunov, y el presente trabajo se basó en dichos estudios y resultados obtenidos.

Para realizar el diseño y análisis del algoritmo de control auto-ajutable para una clase de sistemas no lineales, primero se definió dicha clase de sistemas no lineales sobre la cual se trabajó. Para esto se especificó la estructura de la función $h(y_k, u_k)$, la cual fue definida como una función con estructura polinomial que depende de los datos de la salida, es decir, $h(y_k)$. Estas funciones generan sistemas no lineales con estructura polinómicas, es decir, las no linealidades presentes en el modelo matemático son de la forma $y_k^2, y_k^3, \dots, y_k^n, u_k y_k^2, u_k y_k^3, \dots, u_k y_k^n$. Como muchos modelos matemáticos de sistemas no lineales tienen las no lineales representadas por funciones trigonométricas o exponenciales, es importante destacar que estos tipos de no linealidades pueden ser sustituidas por su respectiva serie de Taylor y de esta forma convertir dichos modelos matemáticos no lineales a modelos matemáticos no lineales de

estructura polinómica, los cuales son la clase de sistemas no lineales tratados en esta investigación.

Ya definida la clase de sistemas no lineales, se desarrolló la ley de control de mínima varianza generalizada (basada en el concepto de control de modo deslizante) para un sistema SISO no lineal de orden n perteneciente a la clase, donde el objetivo del control es anular la variable de modo deslizante. Análogamente a los algoritmos de control propuestos en Patete (2008) para sistemas lineales SISO.

Posteriormente, se demostró la estabilidad global del sistema con incertidumbre paramétrica en lazo cerrado por medio del uso de una función de Lyapunov para el controlador auto-ajutable en tiempo discreto, el cual es una combinación del controlador de mínima varianza generalizada (basada en el concepto de control de modo deslizante) e identificación recursiva de los parámetros del control, donde los parámetros no necesariamente deben converger a los valores reales, sino que convergen a un valor constante.

Para obtener tanto la ley de control de mínima varianza generalizada como el algoritmo auto-ajutable para el sistema no lineal de orden n perteneciente a la clase definida, se comenzó haciendo el desarrollo para un sistema no lineal de primer orden, donde se fueron variando las funciones $a(q)$ y $b(q)$ (ambas funciones dependen de la señal de salida como se especificó en la definición de la clase de sistema no lineal a trabajar) hasta llegar al caso general para un sistema de primer orden como se indicó en la tabla 3.1, luego se realizó un procedimiento similar para los casos de sistemas no lineales de segundo y tercer orden, donde se fueron variando las funciones $a_1(q)$, $a_2(q)$ y $b(q)$ (sistemas de segundo orden, tabla 3.2) y $a_1(q)$, $a_2(q)$, $a_3(q)$ y $b(q)$ (sistemas de tercer orden, tabla 3.3) hasta llegar al caso general tanto para los sistemas de

segundo como para los de tercer orden. Ya realizado este procedimiento se amplió para el caso de un sistema no lineal de orden n , el cual se presentó en la sección 3.2 y 3.3 del capítulo 3.

Ya diseñado el controlador auto-ajustable y demostrada la estabilidad global del sistema en lazo cerrado matemáticamente, se realizaron una serie de pruebas por medio de simulaciones usando en el paquete computacional Mathematica®. Estas pruebas se efectuaron primero sobre una serie de ejemplos académicos basados en los casos de sistemas no lineales de primer, segundo y tercer orden mostrados en las tablas 3.1, 3.2 y 3.3, respectivamente. Estos casos fueron probados uno por uno, obteniendo como resultados que, al aplicar el algoritmo auto-ajustable a estos modelos matemáticos con incertidumbre paramétrica, éste cumplía con el objetivo de seguimiento de referencia mientras que el controlador de mínima varianza generalizada aunque estabilizaba la salida en todos los casos siempre presentó un error considerable en estado estacionario.

Luego se realizaron pruebas sobre dos sistemas físicos, en primer lugar sobre el modelo matemático del péndulo simple y luego sobre el mecanismo corredera-bicla-manivela. Se escogieron estos dos sistemas debido a que: i) el péndulo simple es un ejemplo clásico de sistemas de control, que posee no linealidades trigonométricas y ii) el mecanismo corredera-bicla-manivela también posee no linealidades y además fue el modelo que propuso el profesor Furuta para representar el comportamiento del motor de la Toyota. En ambos casos antes de aplicar el algoritmo de control auto-ajustable propuesto en la sección 3.4, primero se obtuvo su modelo matemático. Estos modelos matemáticos poseen no linealidades trigonométricas, las cuales fueron sustituidas por su respectiva serie de Taylor, restringiendo a cada caso cierta cantidad de términos de dicha serie. Es decir, en el caso del péndulo simple se realizó la prueba sobre tres casos: en el primer caso el término no lineal se reemplazó por los dos primeros términos de su respectiva serie de Taylor, en el segundo caso por los tres primeros términos y

en el tercer caso por los primeros cuatros términos. Y para el caso del mecanismo corredera-biela-manivela se hicieron pruebas sobre dos casos: en el primero se sustituyeron los términos no lineales por los dos primeros términos de la serie de Taylor y en el segundo caso por los tres primeros términos. Luego estos modelos matemáticos fueron discretizados, en este caso usando la aproximación de Euler para, de esta forma, poder aplicar tanto la ley de control de mínima varianza generalizada como el algoritmo de control auto-ajustable propuesto y así hacer comparaciones.

En el péndulo simple, al aplicar el controlador auto-ajustable tanto en los casos donde se expandió el término no lineal a cierta cantidad de términos de la serie de Taylor como en los casos donde se aplicó al modelo matemático obtenido sin aproximar las funciones trigonométricas (simulando de esta forma el caso de la implementación), se obtuvo como resultado que dicho controlador cumplió con el objetivo de seguimiento de la referencia en un rango amplio y satisfactorio. Mientras que al aplicar la ley de control de mínima varianza generalizada siempre se obtuvo error considerable en estado estacionario. Estas pruebas se realizaron sobre estos tres casos debido a que al sustituir la no linealidad del modelo matemático por los cuatros primeros términos de la serie de Taylor de la función seno, se obtuvieron los mismos resultados que para el caso en que la no linealidad se sustituyó por los tres primeros términos de dicha serie. Por lo tanto, no fue necesario seguir sustituyendo la no linealidad por una cantidad mayor de términos de la serie de Taylor, ya que al expandirla a mayores grados no aporta más información relevante al modelo no lineal y el desempeño del controlador será el mismo.

Con respecto al mecanismo corredera-biela-manivela, primeramente se realizó su modelado matemático, el cual es un nuevo aporte sobre el modelado matemático de dicho mecanismo, ya que el modelo usado por Saitoh y Furuta (2007) es un modelo lineal de primer

orden, simplificado de la representación no lineal obtenida a través de método de proyección; mientras que en este trabajo el modelo matemático es un modelo no lineal obtenido usando las leyes físicas de Newton y relaciones trigonométricas. Los resultados alcanzados al aplicar el controlador auto-ajustable, tanto en los casos donde se realizó la expansión de los términos no lineales por su respectiva serie de Taylor como al aplicarlo al modelo matemático sin aproximaciones de la serie de Taylor, éste cumplió con el objetivo de seguimiento de referencia hasta cierta posición donde ya no fue posible estabilizar al mecanismo manivela-biela-corredera. Mientras que al aplicar la ley de control de mínima varianza generalizada no fue posible en ningún caso estabilizar el mecanismo, ya que siempre la salida del sistema controlado en todos los casos era muy oscilatoria. Es importante destacar que debido a la alta no linealidad del modelo matemático del mecanismo corredera-biela-manivela cuando se aplicó el controlador auto-ajustable al modelo matemático sin aproximaciones el rango de posiciones controladas fue menor que cuando se aplicó el controlador al modelo con aproximaciones de los términos no lineales por su respectiva serie de Taylor. A pesar de que se redujo el rango, los resultados son aceptables ya que es la primera prueba que se realiza sobre un modelo matemático altamente no lineal.

El comportamiento de la superficie en modo deslizante, ésta se anulaba al aplicar el controlador auto-ajustable propuesto mientras que al aplicar el CMVG no fue posible anular dicha variable en presencia de incertidumbre paramétrica y, por ende, no se logró cumplir con el seguimiento de la referencia. Con respecto a los parámetros de la ley de control auto-ajustable en todos los casos se observó que, aunque no necesariamente tienden a su valor real, si convergen a un valor constante. Estos resultados fueron similares tanto para el péndulo simple como para el mecanismo corredera-biela-manivela.

En cuanto a la dinámica de la dinámica de los controladores se observó que el control auto-ajustable necesita un mayor esfuerzo que el CMVG, sin embargo logra cumplir el objetivo de seguimiento de la referencia, también se observa que dichos comportamientos se asemeja a una curva suave en ambos casos, lo que es deseado al momento de realizar una posible implementación. Para el mecanismo corredera-biela-manivela la dinámica del controlador auto-ajustable presenta un buen rendimiento mientras que con el CMVG presenta muchas oscilaciones lo cual no es deseable al momento de hacer control ya que puede perjudicar los elementos físicos presentes en el mecanismo.

Por lo tanto, al generalizar los resultados se puede concluir que todas las pruebas realizadas con el controlador auto-ajustable (3.33), (3.34) y (3.38) propuesta fueron exitosas, tanto en los ejemplos académicos como en los ejemplos realizados sobre modelos matemáticos obtenidos representando las dinámicas de sistemas físicos. Cumpliendo así con esto el objetivo general de este proyecto de investigación.

Es importante destacar que el algoritmo de control auto-ajustable (3.33), (3.34) y (3.38) propuesto en la sección 3.4, engloba los casos del algoritmo auto-ajustable para sistemas lineales y para sistemas bilineales, ya que: i) si al algoritmo de la sección 3.4 se le eliminan todas las señales bilineales y no lineales presentes se obtiene el algoritmo auto-ajustable para sistemas lineales propuesto por Patete (2008), ii) si al algoritmo propuesto en la sección 3.4 se le eliminan todas las señales no lineales, dejando las bilineales, entonces se obtiene el algoritmo de control auto-ajustable propuesto por Patete y col. (2008.c), Patete y col. (2010) y Patete y col. (aceptado en la Revista Ciencia e Ingeniería). Por lo tanto, el algoritmo propuesto se puede mostrar como una generalización, debido a que puede ser aplicado a sistemas lineales, a una

clase extendida de sistemas bilineales y a la clase de sistemas no lineales definida en este proyecto.

El análisis de estabilidad robusta realizado en los ejemplos académicos (sección 4.2) del sistema en lazo cerrado utilizando el criterio de Tsypkin y Furuta (criterio 2.5.2 del capítulo 2), en presencia de incertidumbres paramétricas no se cumplió para el ejemplo de segundo y tercer orden. Sin embargo, aunque no se cumple este criterio, esto no implica la inestabilidad en el sistema; logrando controlar al sistema al aplicar el controlador auto-ajustable propuesto. Posteriormente, al realizar este análisis sobre el modelo matemático del péndulo simple se mostraron dos casos de análisis: i) cuando $q_0 = 0.001$, $\tilde{T}(e^{-j\omega})$ no se cruza con el círculo unitario $\varrho(1, 0)$, lo que implica que la condición suficiente para la estabilidad robusta se cumple, sin embargo con este valor de q_0 no se pudo controlar el péndulo simple, ii) para $q_0 = 50$, $\tilde{T}(e^{-j\omega})$ se cruza con el círculo unitario $\varrho(1, 0)$, lo que implica que la condición suficiente para la estabilidad robusta no se cumple, sin embargo se logró controlar el péndulo simple para diferentes ángulos. Para el caso del mecanismo corredera-biela-manivela el análisis de estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado usando el criterio de Tsypkin y Furuta, en presencia de intervalos de incertidumbres paramétricos no se estudió debido a que los términos de los polinomios $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$ poseen el mismo valor numérico tanto para el máximo como para el mínimo, por lo tanto, no fue posible aplicar este criterio. Verificando con esto que es necesario ampliar el criterio de Tsypkin y Furuta para estudiar la estabilidad robusta donde se incluyan las no linealidades del modelo matemático del sistema.

En vista de las conclusiones descritas anteriormente, se proponen algunas recomendaciones.

Recomendaciones

- Ampliar el criterio de Tsytkin y Furuta, sobre estabilidad robusta, para el caso de sistemas bilineales y no lineales.
- Estudiar la posibilidad de realizar la demostración matemática sobre la estabilidad global del sistema en lazo cerrado redefiniendo la función de Lyapunov a una función más general, no solo del tipo cuadrática.
- Estudiar casos donde la estructura de las función $a_i(q)$, con $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$, no dependen solo de salidas futuras, es decir, que dicha estructura se pueda definir en el instante de tiempo presente, por ejemplo: $a_i(q) = a_{i1} + a_{i2}y_k + a_{i3}y_k^2 + \dots + a_{in}y_k^{n-1}$.
- Proponer un algoritmo de control auto-ajutable para una nueva clase de sistemas no lineales donde las no linealidades no se puedan aproximar a través de serie de Taylor.
- Ampliar el algoritmo de control auto-ajutable propuesto para la clase de sistemas no lineales MIMO con estructura polinómica.

Bibliografía

- Åström, K. J. y Wittenmark, B. (1973). *On self-tuning regulators*. Automatica, Vol 9, pages 185-199.
- Åström, K. J. y Wittenmark, B. (1989). *Adaptive control*. Addison-Wesley.
- Clarke, D. W., Phil, D. y Gawthrop, P. J. (1975). *Self-tuning controller*. IEE Proc., Vol 122, No. 9, pages 929-934.
- Doi, M. y Mori, Y. (2002.a). *A study on robust asymptotic tracking property for generalized minimum variance control*. Proceedings of the American Control Conference, pages 1472-1477.
- Doi, M. y Mori, Y. (2002.b). *Generalized minimum variance control for time varying systems without diophantine equation*. Proceedings of the American Control Conference, pages 3230-3235.
- Furuta, K. (1990). *Sliding mode control of a discrete system*, Systems & Control Letters. Vol. 14, pages 145-152.
- Furuta, K. (1993.a). *VSS type self-tuning control*, IEEE, Trans. Ind. Electron. Vol 40, No. 4, pages 37-44.
- Furuta K. (1993.b). *VSS-type self-tuning control- β equivalent control approach*. Proceedings of the 1993 American control conference (ACC), San Francisco, California, USA. Vol. 1, pp. 980-984.
- Furuta, K., Ohata, A., Sugiki, A. y (2011). *Self-tuning control based on discrete-time sliding mode with applications*. 18th IFAC World Congress. pages 774-779, Italy.
- Goodwin, G. y Sin, K. (1984). *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice-Hall.
- Gawthrop P. J. (1980). *On the stability and convergence of a self-tuning controller*. International Journal of Control, Vol. 31, No. 5, pp. 973-998.
- Misawa E. A. (1997). *Discrete-time sliding mode control: the linear case*. ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 119, No. 4, pp. 819-821.

- Mitic D. y Vukovic P. D. (2004). *Sliding mode based minimum variance control and generalized minimum variance controls with $O(T^2)$ and $O(T^3)$ accuracy*. Electrical Engineering, pp. 229-239.
- Ohata, A., Sugiki, A. y Furuta, K. *Self-tuning control based on discrete-time sliding mode with applications*. Preprint submitted to *Automatica*. En vías de publicación.
- Patete, A., Furuta, K. y Tomizuka, M. (2007). *Self-Tuning Control of Time-Varying Systems based on Generalized Minimum Variance Criterion*. IEEE, In proceedings of the SICE Annual International Conference on Instrumentation, Control and Information Technology, pages 2563-2568, Japan.
- Patete, A. (2008). *On stability of Generalized minimum variance Self-tuning controllers*. Dr. en Ingeniería de Control. Tokyo Denki University, Tokyo.
- Patete, A., Furuta, K. y Tomizuka, M. (2008.a). *Stability of self-tuning control based on Lyapunov function*. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, Vol. 22, No. 8, pages 795-810.
- Patete, A., Furuta, K. y Tomizuka, M. (2008.b). *Self-tuning control based on Generalized Minimum Variance Criterion for Auto Regressive Models*. *Automatica*, Vol. 44, No. 8, pages 1970-1975.
- Patete, A., Furuta, K. y Rios, M. (2008.c). *Self-tuning Control of Bilinear Systems based on Generalized Minimum Variance Criterion*. XIII Congreso Latinoamericano de Control Automático y VI Congreso Venezolano de Automatización y Control, pages 557-562.
- Patete, A., Rios, M., Gomez, C. y Furuta, K. (2010). *Stability of a Self-Tuning Control for an Extended Class of Bilinear Systems*. XIV Congreso Latinoamericano de Control Automático 2010 y XIX Congreso de la Asociación Chilena de Control Automático 2010, Chile.
- Patete, A. y Furuta, K. (2011). *Stability of Implicit Self-Tuning Controllers for a Class of Time-Varying Systems Based on Lyapunov Function*. Revista Técnica de Ingeniería, Vol. 34, No. 2. August.
- Patete, A., Rios, M., Gomez, C. y Furuta, K. (2011). *Self-Tuning Control for a Class of Bilinear Systems*. Revista de Ingeniería. Bogotá D.C., Colombia. Vol. 33, pages 7-13, August. ISSN. 0121-4993.

- Patete, A., Ríos, M., Gomez, C. y Furuta, K. *Self-Tuning Control for an Extended Class of Bilinear Systems, Case of Study: Nuclear Fission Model*. Aceptado en la Revista Ciencia e Ingeniería, Universidad de Los Andes.
- Rodríguez, F., y López, M. (1996). *Control adaptativo y Robusto*. Universidad de Sevilla.
- Saitoh, M. y Furuta, K. (2007). *Generalized minimum variance control of slider-crank mechanism*. SICE Annual Conference, pages 2205 – 2209, Japan.
- San Martín, P. (2005). *Diseño e implementación de un sistema de control por modo deslizante usando DSP aplicado a un prototipo de grúa puente*. Universidad Nacional de Ingeniería. Perú.
- Sugiki, A., Ohata, A., Patete, A. y Furuta, K. (2008). *Design of a Multivariable Implicit Self-Tuning Controller*. 47th IEEE Conference on Decision and Control, pages 1340-1345, Mexico.
- Sun, X., Jin, Y. y Fang, C.Z. (1992). *One-step-ahead adaptive control of bilinear systems and its application*. Proc. of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics, pages 131-135.
- Suzuki, T. y Furuta, K. (1996). *Discrete-time VSS represented by input-output relation*. Proceedings of the International Workshop on Variable Structure Systems, Tokyo, Japan, pages 122-126.
- Tang, C. y Misawa E. (1999). *On discrete variable structure control with switching sector*. In Variable structure systems, slide mode and nonlinear control, Young, K. D. and Ozguner, U. (eds.). Springer-Verlag, pages 27-41, London.
- Tang, C. y Misawa, E. (2000). *Discrete variable structure control for linear multivariable systems*. ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 122, pages 783-792.
- Yamamoto, T., Inoue, A. y Shah, S. (1999). *Generalized minimum variance self-tuning pole-assignment controller with a PID structure*. Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications, pages 125-130.
- Zayed, A., Hussain, A. y Smith, S. (2001). *A modified generalized minimum-variance stochastic self-tuning with pole-zero placement*. Proceedings of the IEEE International Multi Topic Conference, pages 252-256.