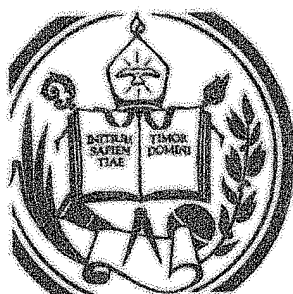


QA431
M3



Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Doctorado en Matemáticas

Estudios de las Ecuaciones de Volterra y
Hammerstein en tres Espacios de Funciones
con Normas de Variación Acotada

MSc. Jesús Matute

República Bolivariana de Venezuela
2013

**Estudios de las Ecuaciones de Volterra y
Hammerstein en tres Espacios de Funciones
con Normas de Variación Acotada**

Tesis Doctoral

Autor: MSc. Jesús Matute.

Tutor: Dr. Hugo Leiva.

www.bdigital.ula.ve

**República Bolivariana de Venezuela
Julio de 2013**

Dedicatoria

*A la memoria de Ángela Gómez,
José Alberto Matute y Trina Sofía Páez.*

www.bdigital.ula.ve

Agradecimientos

Agradecemos al Dr. *Hugo Leiva* y al Dr. *Nelson Merentes* por sus comentarios útiles y animarnos constantemente durante la elaboración de esta Tesis. De igual manera manifestamos nuestro reconocimiento al *Banco Central de Venezuela* por el financiamiento otorgado al presente Trabajo.

www.bdigital.ula.ve

Resumen

La presente monografía se refiere al estudio de la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Hammerstein y Volterra en tres espacios de funciones con un tipo de norma de variación acotada. La misma se compone de tres capítulos: en el primero se estudia la ecuación de Volterra con parámetro en el conjunto de las funciones absolutamente continuas con la norma de la variación acotada. También en este capítulo se considera el control de dicha ecuación. En el segundo capítulo nuevamente se estudia la ecuación de Volterra, pero esta vez en el espacio de las funciones de variación acotada. El tercer capítulo se dedica al estudio de la ecuación de Hammerstein en el espacio de las funciones de φ -variación acotada definidas sobre un rectángulo del plano.

Índice General

Prólogo	i
Introducción	iv
1. La ecuación de Volterra con parámetro en el espacio de las funciones absolutamente continuas	1.
1.1 Preliminares	2.
1.2 Existencia y unicidad de soluciones	6.
1.3 Una fórmula para las soluciones del problema lineal	9.
1.4 Control del problema lineal	16.
1.5 Control del problema no lineal	18.
2. La ecuación de Volterra en el espacio de las funciones de variación acotada	27.
2.1 Preliminares	27.
2.2 Existencia de Soluciones	29.
3. La ecuación de Hammerstein en el espacio de las funciones de φ-variación acotada	33.
3.1 Preliminares	34.
3.2 Existencia y unicidad de soluciones	37.
3.3 Existencia de soluciones locales	44.
3.4 Existencia de soluciones globales	46.
Referencias Bibliográficas	50.

Prólogo

Lo que caracteriza a una **ecuación integral** es que la incógnita x es una función que aparece dentro del signo integral. Los tres tipos de ecuaciones integrales que han sido estudiadas con más frecuencia son las de *Fredholm*, *Hammerstein* y *Volterra*, las cuales corresponden, respectivamente, a las siguientes expresiones:

$$x(t) = g(t) + \int_a^b K(t, s)f(x(s))ds,$$

$$x(t) = g(t) + \int_a^b K(t, s)f(s, x(s))ds \quad \text{y}$$

$$x(t) = g(t) + \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds,$$

donde g y K son funciones conocidas, cuyos dominios son $[a, b]$ y $[a, b] \times [a, b]$; denominándose a K el **núcleo** de la ecuación integral. En muchas ocasiones se estudian las llamadas **ecuaciones integrales** de *Fredholm*, *Hammerstein* y *Volterra con parámetro* $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)f(x(s))ds,$$

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)f(s, x(s))ds \quad \text{y}$$

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds.$$

Debido a razones técnicas, en esta Tesis consideramos los problemas con condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

en lugar de las ecuaciones

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds \quad y$$

$$x(t) = g(t) + \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds,$$

las cuales son equivalentes, respectivamente, a las dos sistemas o problemas con condiciones iniciales previamente escritos. En el caso en que la función f que se encuentra en la parte integral de las ecuaciones de *Fredholm* y *Volterra* sea la función identidad, entonces se dice que estas ecuaciones son lineales y cuando no es así, a tales ecuaciones se les denominan no lineales. Para conocer más detalles sobre las ecuaciones integrales de *Fredholm* y de *Volterra* se puede consultar [17], [18] y [27]. En [2] se discuten una variedad de métodos que son usados frecuentemente para demostrar la existencia de soluciones de las ecuaciones de *Hammerstein*. También el Capítulo 7 de [24] se dedica a las ecuaciones *Hammerstein*.

Es conveniente señalar que en la Introducción de esta Tesis se hace alusión a diversos espacios de funciones y distintos tipos de integrales cuyas definiciones no se dan en este Trabajo. El propósito de ésto ha sido explicitar que el estudio de las ecuaciones integrales se ha hecho en distintos espacios de funciones y con diferentes tipos de integrales; sin embargo, el lector interesado en saber acerca de estos espacios e integrales puede consultar las referencias bibliográficas indicadas a lo largo de la Introducción. Los conceptos, propiedades y teoremas previos, necesarios para la comprensión de los capítulos que componen el trabajo en consideración, se han dispuesto en las secciones de preliminares de los mismos a fin de que su lectura se pueda hacer sin interrupciones. Por otra parte, es necesario destacar que lo que hace que esta Tesis sea un sistema orgánico, no es sólo el hecho de que su tema sea el estudio de ciertas clases de ecuaciones integrales en espacios de funciones dotados con algún tipo de norma de variación acotada, sino también el uso sistemático del Teorema del Punto Fijo de *Banach* (p. 5) y la aplicación de una versión no lineal del Teorema del Punto Fijo de *Leray-Schauder* (p. 29). A pesar de ésto, el trabajo en consideración también contribuye de mane-

ra modesta al conocimiento de las funciones absolutamente continuas, de variación acotada y φ -Variación acotada, ya que en la sección de Preliminares del primer capítulo (Teorema 1.1) se da una prueba original del hecho de que el espacio de las funciones absolutamente continuas, dotado con la norma de la variación acotada, es un espacio de *Banach*: encontramos un enunciado del hecho recién mencionado solamente en [29] y [33], pero estos textos no traen una prueba de dicho enunciado; además, en los Preliminares del tercer capítulo (Lema 3.1) damos una demostración de que, bajo ciertas condiciones, toda función de φ -variación acotada es continua, hecho que no aparece en la bibliografía consultada. Aquellos lectores interesados en estudiar con detalle las funciones absolutamente continuas, de variación acotada y las de φ -variación acotada, pueden acudir a [1], [3], [5] [21], [23] y [29].

www.bdigital.ula.ve

Introducción

Aunque *du Boys-Reymond* introdujo el término “ecuación integral” en 1888, podemos remontar el inicio de la historia de este tipo de ecuaciones a 1782, cuando *Laplace* usó su transformada

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xs} \phi(s) ds \quad (1)$$

para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Posteriormente, en 1822, en su estudio referente al calor, *Fourier* encontró expresiones semejantes a la ecuación (1), las cuales contienen funciones trigonométricas en la parte integral. Un poco más tarde, en 1826, *Abel* resuelve la ecuación integral

$$f(x) = \int_a^x (x-s)^{-\alpha} \phi(s) ds,$$

donde f es una función continua dada tal que $f(a) = 0$, ϕ es una función incógnita y $0 < \alpha < 1$. La ecuación integral

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k'(x-s) \phi(s) ds, \quad (2)$$

donde la función f es dada, la variable independiente x es límite superior de la integral, λ es un número real y la función ϕ es la incógnita, fue estudiada por *Poisson* en 1826. Luego de setenta años, en 1896, *Volterra* hizo el primer estudio general de las ecuaciones integrales lineales que tienen como límite superior la variable mencionada y posteriormente *Fredholm*, en 1900, estudió el siguiente tipo de ecuación lineal que lleva su nombre:

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s) \phi(s) ds. \quad (3)$$

*Esta breve reseña histórica se basó en la introducción histórica de [30].

Una vez que el estudio de las ecuaciones integrales se hizo en el espacio de las funciones continuas o derivables, empleando la integral de *Riemann*, resulta natural considerar las mencionadas ecuaciones en otras clases de espacios de funciones y con otros tipos de integrales. Así, por ejemplo, tal como se hace en [27] o [28], la ecuación (3) se ha estudiado en el espacio de funciones $L^2(\mu)$, para una medida μ cualquiera, siendo la integral que aparece en la ecuación la generada por dicha medida. Otro ejemplo que podemos citar es el artículo [25], en el que se prueba la existencia y unicidad de la ecuación

$$y(t) - y(t_0) + \int_{t_0}^t d_\sigma K(t, \sigma) \cdot y(\sigma) = f(t) - f(t_0) \quad (4)$$

en el espacio de las funciones regladas en espacios de *Banach*, donde el símbolo de la integral en la igualdad precedente se refiere a un operador del tipo *Riemann-Stieltjes* definido sobre el mencionado espacio de funciones. Más reciente, en los artículos [11], [12], [13] y [14] se consideran las ecuaciones de *Fredholm* no lineales

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) f(x(s)) ds, \quad t \in I, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

sobre distintos espacios de variación acotada y en las que el símbolo de integral denota a la integral de *Lebesgue* sobre el intervalo I . En particular, en el trabajo [14] se prueba la existencia y unicidad de la solución, en un cierto intervalo cerrado de la recta, de la ecuación integral del tipo *Volterra*

$$x(t) = g(t) + \int_0^t K(t, s) f(x(s)) ds$$

en el espacio de las funciones reales continuas y con la norma de la variación acotada; tal que el núcleo de la ecuación integral K es de variación acotada en la primera variable. Esto nos sugiere el **primer objetivo** de nuestra tesis, el cual consiste en probar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación no lineal con condición inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

en el espacio de las funciones reales absolutamente continuas definidas sobre cualquier intervalo $[a, b]$ de la recta y con la norma de la variación acotada;

tal que el núcleo de la ecuación integral K es de *Lipschitz* con respecto a la primera variable.

En sus inicios, los problemas de existencia y unicidad de las soluciones de una de ecuación integral consistían en encontrar una fórmula de las soluciones que depende del tipo de ecuación que se consideraba; tal como se hace en el texto de estudio [32]. Posteriormente, la idea de lo qué es resolver una ecuación evolucionaria y así, por ejemplo, según lo afirmado en [30], *Poisson* expresa la solución de la ecuación (2) mediante una serie de potencias que dependen del parámetro λ . También, en el mismo texto [30], encontramos que después *Fredholm* obtiene las fórmulas de las soluciones de las ecuaciones algebraicas

$$\phi(x_r) = f(x_r) + \sum_{s=1}^n K(x_r, x_s) f(x_s) \delta_n \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

donde $\delta_n = \frac{b-a}{n}$ y $x_r = a + r\delta_n$; para luego verificar que el límite de dichas soluciones es la solución de la ecuación (3). Otra manera de representar la solución de una ecuación integral es tal como se hace en [26], en donde la solución y de la ecuación (4) se expresa como

$$y(t) = R(t, t_0)x + \int_{t_0}^t R(t, s)df(s), \quad (5)$$

donde el resolvente R es una función reglada con respecto a la primera variable. De aquí surge el **segundo objetivo** de la tesis en consideración: encontrar una representación análoga a la igualdad (5) de la solución de la ecuación lineal con condición inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

en el espacio de las funciones absolutamente continuas con la norma de la variación acotada.

Un tema importante en el estudio de las ecuaciones integrales se refiere a la controlabilidad de sus soluciones. En [18] y [34] se trata el problema del control óptimo. En el artículo [7] se dan algunos resultados sobre el control de las ecuaciones lineales del tipo *Fredholm-Stieltjes* como las señaladas en la ecuación (4). Más tarde en [8] y [9] se tratan distintas formas de controlabilidad para las ecuaciones del tipo de *Volterra-Stieltjes* en el espacio

de las funciones reguladas en espacios de *Banach*, donde la integral es un operador del tipo *Riemann-Stieltjes* definido sobre el mencionado espacio de funciones. En este mismo espacio de funciones, y con el operador integral recién señalado, se estudia en [6] la controlabilidad de una ecuación integral semilineal del tipo *Volterra*. En [16] se ha estudiado la controlabilidad de las ecuaciones integrales no lineales de tipo de *Hammerstein* para funciones con valores en un espacio de *Hilbert*. Los trabajos sobre control mencionados inspiran los **objetivos tercero y cuarto** de la presente tesis, los cuales son respectivamente: probar que la ecuación lineal del tipo de *Volterra* con condición inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

es exactamente controlable y, a partir de este resultado, demostrar que la ecuación no lineal del tipo de *Volterra* con condición inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

también es exactamente controlable, bajo la condición de que la función f que está en la parte integral de las dos ecuaciones integrales anteriores es globalmente *Lipschitz* y en donde la función g representa el control de ambas ecuaciones.

En [12] se menciona que la motivación para considerar el espacio de las funciones de variación acotada proviene del hecho de que las soluciones de muchas ecuaciones integrales que describen diversos fenómenos físicos son frecuentemente funciones de esta clase; lo que ha generado la aparición de varios artículos que se refieren a la existencia de soluciones de ecuaciones integrales no lineales básicas, las cuales son funciones continuas del tipo recién mencionado. Por otra parte, en [14] se señala que no basta con asumir que f' es *Riemann* o *Lebesgue* integrable sobre $[a, b]$, a fin de que el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

sea cierto, ya sea con la integral de *Riemann* o *Lebesgue*, respectivamente. Este par de comentarios sugieren que debe ser interesante investigar las solu-

ciones de las ecuaciones integrales en el espacio de las funciones absolutamente continuas, ya que este espacio es una clase importante de funciones continuas que son de variación acotada y para cuyos elementos es válido el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo con la integral de *Lebesgue*; el cual empleamos en la prueba del Lema 1.9 que se encuentra en el Capítulo 1. Este capítulo está dividido en cinco secciones. En la primera de ellas se reúnen aquellos conocimientos previos necesarios usados en dicho capítulo. En la segunda sección se prueba la existencia y unicidad de las soluciones del problema con valor inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

en el espacio de las funciones absolutamente continuas, con la norma de la variación acotada. En la tercera sección se halla una fórmula de variación de parámetros de las soluciones del problema lineal con valor inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) x(s) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

en el espacio de las funciones absolutamente continuas con la norma de la variación acotada. Esta fórmula se usa en la cuarta sección para demostrar que el sistema lineal

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) x(s) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

es exactamente controlable. Este primer capítulo culmina en su quinta sección, donde se emplean los resultados de sus secciones primera y cuarta para verificar que el sistema no lineal

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

es exactamente controlable.

En el artículo [14], ya mencionado, se prueba que dado un intervalo $I = [0, a]$, existe un intervalo $J = [0, d] \subseteq I$ tal que la ecuación de *Volterra*

$$x(t) = g(t) + \int_0^t K(t, s)f(x(s))ds$$

tiene una solución única en el intervalo cerrado $J = [0, d] \subseteq I$ en el espacio de las funciones de variación acotada; donde el núcleo de la ecuación integral K es de variación acotada en la primera variable. De aquí surge el **quinto objetivo** de esta Tesis, el cual consiste encontrar alguna condición acerca de la función f que está en la parte integral de la ecuación recién mencionada, la cual garantice al menos la existencia de una solución de dicha ecuación integral de *Volterra* que esté definida sobre todo el intervalo I , pero conservando la hipótesis sobre el núcleo K referida a que el mismo es de variación acotada en la primera variable. A fin de lograr el quinto objetivo, el Capítulo 2 se compone de dos secciones, en la que en la primera de ellas se encuentran los preliminares necesarios y en la segunda se prueba la existencia de una solución del problema con valor inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = A(g)(t) - A(g)(a) + \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (6)$$

en el espacio de las funciones de variación acotada $BV[a, b]$, donde $A : BV[a, b] \rightarrow BV[a, b]$. Observe que el problema (6) incluye a la ecuación integral de *Volterra* precedente al definir $A(g)(t) = g(t)$. Para demostrar la existencia de soluciones del problema con valor inicial (6) usamos una versión no lineal del Teorema del Punto Fijo de *Leray-Schauder* (ver p. 29), cuyo enunciado se extrajo del artículo [13].

Otra de las ecuaciones integrales no lineales investigadas con más frecuencia es la ecuación integral de *Hammerstein*. Por ejemplo, ella sirve como modelo matemático de muchos fenómenos físicos tal como el comportamiento de los fluidos electromagnéticos. Además, la solución de algunos problemas con valores en la frontera de las ecuaciones en derivadas parciales se suele expresar como la solución de una ecuación integral de *Hammerstein*. En particular, en la página 46 del texto [31] se hace la observación de que la generalización de la ecuación integral de *Hammerstein* en dos variables, la cual ha sido estudiada por varios investigadores, es

$$u(x) = v(x) + \int_{I_a^b} K(x, y)f(y, u(y))dy, \quad (7)$$

donde $x, y \in I_a^b := [a, b] \times [a, b]$, $K : I_a^b \times I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : I_a^b \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $u, v : I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$. Por otra parte, en [11] y [12], se menciona que las funciones provistas con algún tipo de variación acotada aparecen naturalmente en ciertos fenómenos físicos que son descritos por una ecuación de *Hammerstein*. Otra fuente de motivación para el estudio de esta ecuación *Hammerstein* han sido los artículos [4] y [35], en los que se estudian en dos variables la ecuación *Hammerstein* y de *Volterra*, respectivamente. En el caso de más de dos variables podemos citar el texto [33], en el que se hace un estudio de las ecuaciones integrales en un espacio de funciones con un tipo de norma de variación acotada. Los comentarios hechos en relación a la ecuación de *Hammerstein*, aunado a los trabajos [11], [12], [13] y [14], en los que se estudian la existencia y unicidad de las soluciones de otros tipos de ecuaciones integrales no lineales en diversos espacios de funciones provistos con algún tipo de norma de variación acotada, han motivado que en el Capítulo 3 estudiemos la ecuación de *Hammerstein* en dos variables en el espacio de las funciones de φ -variación acotada. De manera específica, en la primera sección del capítulo 3 hemos colocado las definiciones y propiedades de las funciones de φ -variación acotada que son necesarias conocer para entender este tercer capítulo. En la segunda sección del capítulo mencionado cumplimos con el **sexto objetivo** de esta Tesis, el cual consiste en probar la existencia y la unicidad de las soluciones de la ecuación de *Hammerstein* con parámetro

$$u(x) = v(x) + \lambda \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy$$

en el espacio de las funciones de φ -variación acotada definidas en un rectángulo del plano $I_a^b := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, donde $x, y \in I_a^b$, $K : I_a^b \times I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : I_a^b \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. En la tercera sección se efectúa al **séptimo objetivo**; es decir, demostramos la existencia y unicidad de las soluciones, definidas en rectángulos contenidos en I_a^b , de la ecuación de *Hammerstein*

$$u(x) = v(x) + \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy,$$

en el espacio de funciones mencionado y, por último, en la cuarta sección, damos cumplimiento al **octavo objetivo** del presente trabajo: probamos la existencia de las soluciones, definidas en todo el rectángulo I_a^b , de la ecuación integral anterior en el mismo espacio de funciones indicado. Para conseguir el octavo objetivo hemos usado nuevamente la versión no lineal del Teorema

de *Leray-Schauder* ya señalada, así como las técnicas de los artículos [12] (Theorem 9, p. 275) y [13] (Theorem 5, p. 303).

Concluimos la Introducción resaltando que a lo largo de este trabajo el signo de la integral se refiere a la integral de *Lebesgue*, por lo que cada vez que ha sido necesario hemos usado las propiedades básicas de esta integral.

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 1

La Ecuación de Volterra con Parámetro en el Espacio de las Funciones Absolutamente Continuas

En este capítulo estudiamos la ecuación de Volterra con parámetro con una condición inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

en el espacio de las funciones absolutamente continuas dotado con la norma de la variación acotada. De manera específica, en la segunda sección probamos la existencia y la unicidad del problema no lineal con condición inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

luego, en la tercera sección, encontramos una fórmula de variación de parámetros del problema lineal con condición inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) x(s) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

el cual es un caso particular del problema no lineal anterior cuando la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que se encuentra en la parte integral es la función identidad. Después en la cuarta sección probamos la controlabilidad exacta del problema lineal recién mencionado. El capítulo culmina en su quinta sección, en la que verificamos que el problema no lineal al inicio mencionado es exactamente controlable también. En la sección con la que se inicia el presente capítulo se fija la notación de una buena parte del trabajo en consideración. Así mismo, esta primera sección contiene los conocimientos previos necesarios para que la lectura del capítulo 1, y algunas de las secciones del resto de los capítulos, pueda ser hecha sin la necesidad de recurrir a diversas fuentes bibliográficas en búsqueda de dichos conocimientos.

1.1. Preliminares

Iniciamos esta sección recordando tres definiciones.

Definición 1.1. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **globalmente Lipschitz**, si existe una constante $L \geq 0$ tal que $|f(t) - f(\tau)| \leq L |t - \tau|$ para cada par de números reales t y τ .

Definición 1.2. Una función $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es **absolutamente continua** si dado un número real $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier familia finita de intervalos abiertos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$, disjuntos dos a dos, contenidos en el intervalo $[a, b]$ y los cuales cumplen con que $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^n |u(b_k) - u(a_k)| < \epsilon.$$

Definición 1.3. Una función $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de **variación acotada** sobre el intervalo $[a, b]$, si

$$V(u) := V(u; [a, b]) := \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^n |u(t_j) - u(t_{j-1})|$$

es finito, de tal forma que el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones $\Pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$.

Observación 1.1. Denotamos al conjunto de las funciones absolutamente continuas sobre el intervalo $[a, b]$ mediante el símbolo $AC[a, b]$ y al conjunto de las funciones de variación acotada sobre el mismo intervalo como $BV[a, b]$.

Definición 1.4. Dada la función $u \in BV[a, b]$, definimos la **norma de variación acotada** de u como

$$\| u \| := | u(a) | + V(u).$$

A continuación nos referimos a tres propiedades conocidas de los espacios $AC[a, b]$ y $BV[a, b]$.

Lema 1.1. [21] Si $u \in AC[a, b]$, entonces la función u es uniformemente continua y $u \in BV[a, b]$.

Lema 1.2. [22] Si $u \in BV[a, b]$, entonces $\sup_{t \in [a, b]} | u(t) | \leq \| u \|$.

Observación 1.2. El Lema 1.2 es útil, tanto en la demostración del Teorema 1.1, como en las pruebas de algunas proposiciones de la siguiente sección 1.2.

Lema 1.3. Si $x \in AC[a, b]$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es globalmente Lipschitz, entonces $f \circ x \in AC[a, b]$.

Prueba. Este lema es una consecuencia inmediata de las Definiciones 1.1 y 1.2. □

Teorema 1.1. [29] El espacio vectorial $AC[a, b]$ con la norma de la variación acotada $\| u \| := | u(a) | + V(u)$ es un espacio de Banach.

Prueba. De los Lemas 1.1 y 1.2 tenemos que $\sup_{t \in [a, b]} | u(t) | \leq \| u \|$ para toda función $u \in AC[a, b]$. Recordemos que el conjunto de las funciones reales, continuas, definidas en un intervalo $[a, b]$ y dotado con la norma $\| u \|_s := \sup_{t \in [a, b]} | u(t) |$ es un espacio de Banach. Note que si la sucesión de funciones $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ es de Cauchy según la norma $\| u \|$, entonces dicha sucesión es de Cauchy según la norma $\| u \|_s$. En vista de lo dicho hasta ahora, deducimos que existe una función continua u tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(t) = u(t)$ para cada $t \in [a, b]$.

Sean dos enteros positivos i, j y una familia finita de intervalos abiertos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$, disjuntos dos a dos y contenidos en el intervalo $[a, b]$. Gracias al Lema 1.1 tenemos que

$$\sum_{k=1}^n \left| u_j(b_k) - u_j(a_k) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^n \left| \left(u_j(b_k) - u_i(b_k) \right) - \left(u_j(a_k) - u_i(a_k) \right) \right| + \sum_{k=1}^n \left| u_i(b_k) - u_i(a_k) \right| \\
&\leq V(u_j - u_i) + \sum_{k=1}^n \left| u_i(b_k) - u_i(a_k) \right|.
\end{aligned}$$

Como hemos asumido que la sucesión de funciones $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ es de *Cauchy* según la norma $\|u\|$, entonces dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existe un entero positivo N tal que $V(u_j - u_i) < \frac{\epsilon}{2}$ para cada par de enteros positivos $i, j \geq N$. De aquí y la desigualdad anterior tenemos que para todo par de enteros positivos $i, j \geq N$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^n \left| u_j(b_k) - u_j(a_k) \right| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=1}^n \left| u_i(b_k) - u_i(a_k) \right|.$$

Al fijar en la igualdad anterior un entero $i \geq N$, al tomar $j \rightarrow \infty$ y por lo dicho al final del primer párrafo de esta prueba, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^n \left| u(b_k) - u(a_k) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=1}^n \left| u_i(b_k) - u_i(a_k) \right|.$$

Ya que $u_i \in AC[a, b]$, existe un número real $\delta > 0$ tal que si $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, entonces

$$\sum_{k=1}^n \left| u_i(b_k) - u_i(a_k) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De las dos desigualdades anteriores concluimos que si $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, entonces

$$\sum_{k=1}^n \left| u(b_k) - u(a_k) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Lema 1.4. [1] Si g es una función de variación acotada, entonces g es integrable según Riemann y, por lo tanto, g es integrable según Lebesgue.

Lema 1.5. [1] Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible y existe una función no negativa $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable según Lebesgue tal que

$|f(x)| \leq g(x)$ casi en todas partes de $[a, b]$, entonces f es integrable según Lebesgue.

Lema 1.6. [23] *Si g es una función de variación acotada, entonces g es derivable casi en todas partes.*

Teorema 1.2. [23] **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para la Integral de Lebesgue:** *Si g es una función absolutamente continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces g' es integrable según Lebesgue y se cumple la igualdad*

$$\int_a^t g'(s)ds = g(t) - g(a)$$

para cada $t \in [a, b]$.

Teorema 1.3. [23] *Supongamos que u es integrable según Lebesgue. Para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ que depende sólo de ϵ y u tal que para todo conjunto medible E que cumpla con que su medida $\mu(E) < \delta$, tenemos que*

$$\int_E |u(s)|ds < \epsilon.$$

Definición 1.5. Sea $(\mathbb{M}, d)$ un espacio métrico completo. La función $T : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ es **de contracción**, si existe un número real $0 \leq \kappa < 1$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq \kappa d(x, y)$$

para cada par de elementos x e y pertenecientes a $\mathbb{M}$.

Teorema 1.4. [10] **Teorema del Punto Fijo de Banach:** *Sea $(\mathbb{M}, d)$ un espacio métrico completo. Si la función $T : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ es de contracción, entonces T posee un único punto fijo; es decir, existe un elemento $x \in \mathbb{M}$, y sólo uno, tal que $T(x) = x$. Más aún, si elegimos de manera arbitraria un elemento $y \in \mathbb{M}$, la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida como*

$$x_0 = y \quad , \quad x_n = T(x_{n-1})$$

para todo entero $n \geq 1$, cumple con que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

1.2. Existencia y Unicidad de Soluciones

En esta sección probamos la existencia y la unicidad de las soluciones del problema no lineal con condición inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

en el espacio de las funciones absolutamente continuas con la norma de la variación acotada. Para este fin asumimos que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que se encuentra en la parte integral es globalmente *Lipschitz*, con constante de *Lipschitz* $L \geq 0$, i.e.,

$$|f(t) - f(\tau)| \leq L |t - \tau| \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}.$$

Además denotamos al espacio de las funciones absolutamente continuas junto con la norma de la variación acotada $\|u\| := |u(a)| + V(u)$ mediante el símbolo $AC[a, b]$, donde $V(u)$ es la variación acotada de la función u .

Definición 1.6. Una función $K : T \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente *Lipschitz* en la primera variable, si existe un número real $A \geq 0$ tal que

$$|K(t, s) - K(\tau, s)| \leq A |t - \tau|$$

para todos los pares (t, s) y (τ, s) pertenecientes al conjunto

$$T := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : a \leq s \leq t \leq b\}.$$

Supuesto 1.1 A lo largo de esta primera sección asumimos que

1. K es uniformemente *Lipschitz* en la primera variable,
2. $\sup_{s \in [a, b]} |K(s, s)| < \infty$ y
3. $K(t, \cdot) : [a, t] \rightarrow \mathbb{R}$ es *Lebesgue-integrable* para cada $t \in [a, b]$.

Observación 1.3. Una consecuencia inmediata de la Definición 1.6 y la segunda parte del Supuesto 1.1 es que la función K está acotada.

Ejemplo 1.1. Un ejemplo de la función mencionada en el Supuesto 1.1 es $K(t, s) := \varphi(t) \cdot \psi(s)$, asumiendo que $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz y $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función Lebesgue-integrable acotada.

Proposición 1.1. Sea t cualquier número real perteneciente al intervalo $[a, b]$. Si $x \in AC[a, b]$, entonces la función $[a, t] \ni s \mapsto K(t, s)f(x(s))$ es Lebesgue-integrable; lo que implica que la función

$$t \mapsto \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds$$

está bien definida.

Prueba. Esta proposición es consecuencia del Lema 1.5 y el hecho de que el producto de funciones medibles es medible.

□

Definición 1.7. Dado $x \in AC[a, b]$, definimos $F(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x)(t) := \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds.$$

Teorema 1.5. Si $x \in AC[a, b]$, entonces $F(x) \in AC[a, b]$.

Prueba. Sea $\{(c_k, d_k)\}_{k=1}^n$ una familia finita de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos, los cuales están contenidos en el intervalo $[a, b]$. Observe que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |F(x)(d_k) - F(x)(c_k)| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_a^{d_k} K(d_k, s)f(x(s))ds - \int_a^{c_k} K(c_k, s)f(x(s))ds \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_a^{c_k} K(d_k, s)f(x(s))ds - \int_a^{c_k} K(c_k, s)f(x(s))ds + \int_{c_k}^{d_k} K(d_k, s)f(x(s))ds \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_a^{c_k} |K(d_k, s) - K(c_k, s)| \cdot |f(x(s))| ds + \sum_{k=1}^n \int_{c_k}^{d_k} |K(d_k, s)| \cdot |f(x(s))| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{s \in [a, b]} |f(x(s))| \left\{ A \sum_{k=1}^n (d_k - c_k)(b - a) + \sup_{(t, s) \in T} |K(t, s)| \sum_{k=1}^n (d_k - c_k) \right\} \\
&= \max_{s \in [a, b]} |f(x(s))| \left\{ A(b - a) + \sup_{(t, s) \in T} |K(t, s)| \right\} \sum_{k=1}^n (d_k - c_k).
\end{aligned}$$

De aquí en adelante el resto de la prueba sigue sin dificultad.

□

Definición 1.8. Dados cualesquiera $x_0 \in \mathbb{R}$, $x, g \in AC[a, b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos la función $G_{g, \lambda}(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned}
G_{g, \lambda}(x)(t) &:= x_0 + g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds \\
&= (x_0 - g(a)) + g(t) + \lambda F(x)(t).
\end{aligned}$$

Proposición 1.2. Si $x \in AC[a, b]$, entonces $G_{g, \lambda}(x) \in AC[a, b]$.

Ahora tenemos los conocimientos necesarios para demostrar el resultado principal de esta sección del Capítulo 1.

Teorema 1.6. Sea x_0 cualquier número real. Fijada cualquier $g \in AC[a, b]$, existe un $\rho > 0$ tal que para todo número real λ que cumpla con que $|\lambda| \leq \rho$, el problema no lineal con valor inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admite una única solución x_g en $AC[a, b]$.

Prueba. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y fijemos cualquier función $g \in AC[a, b]$. Note que

$$\|G_{g, \lambda}(x) - G_{g, \lambda}(y)\| = |\lambda| \|F(x) - F(y)\| = |\lambda| V(F(x) - F(y)).$$

Ahora, dada cualquier partición $\Pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$, tenemos que

$$V(F(x) - F(y))$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^n | (F(x) - F(y))(t_i) - (F(x) - F(y))(t_{i-1}) | \\
&= \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^n \left| \int_a^{t_i} K(t_i, s)[f(x(s)) - f(y(s))]ds - \int_a^{t_{i-1}} K(t_{i-1}, s)[f(x(s)) - f(y(s))]ds \right| \\
&\leq \sup_{\Pi} \left[\sum_{i=1}^n \int_a^{t_{i-1}} |K(t_i, s) - K(t_{i-1}, s)| \cdot |f(x(s)) - f(y(s))| ds \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |K(t_i, s)| \cdot |f(x(s)) - f(y(s))| ds \right] \\
&\leq \sup_{\Pi} \left\{ L \|x - y\| \left[\sum_{i=1}^n \int_a^{t_{i-1}} A(t_i - t_{i-1})ds + \sup_{(t,s) \in T} |K(t, s)| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \right] \right\} \\
&\leq L \left[A(b - a)^2 + (b - a) \sup_{(t,s) \in T} |K(t, s)| \right] \|x - y\|.
\end{aligned}$$

De ésto y la igualdad dada al inicio de la prueba que se refiere a la expresión $\|G_{g,\lambda}(x) - G_{g,\lambda}(y)\|$, podemos asegurar la existencia de un número real $\rho > 0$ tal que la función $G_{g,\lambda} : AC[a, b] \rightarrow AC[a, b]$ es una contracción para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| \leq \rho$. El Teorema del Punto Fijo de *Banach* (Teorema 1.4) implica la existencia de una función $x_g \in AC[a, b]$ que es el único punto fijo de la función $G_{g,\lambda} : AC[a, b] \rightarrow AC[a, b]$. Pero esto significa que la función x_g es la única solución del problema con valor inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cuando $|\lambda| \leq \rho$.

□

Observación 1.4. Es importante notar que el número $\rho > 0$ de la conclusión del Teorema 1.6 no depende de la función $g \in AC[a, b]$, mencionada en el enunciado de dicho teorema.

1.3. Una Fórmula para las Soluciones del Problema Lineal

Comenzamos esta sección definiendo un espacio normado cuyos elementos son funciones reales que dependen de dos variables. Por medio de este espacio encontramos una función $R(t, s)$, llamada resolvente, el cual nos permite encontrar una fórmula de variación de parámetros para las soluciones del problema lineal

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)ds, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

en el espacio $AC[a, b]$.

Definición 1.9. Definimos el espacio vectorial $\mathbb{H}$ como

$$\mathbb{H} := \{U : T \rightarrow \mathbb{R} : U \text{ es continua, } \sup_{s \in [a, b], t \neq \tau} \frac{|U(t, s) - U(\tau, s)|}{|t - \tau|} < \infty\}.$$

Además, sobre este espacio definimos la norma

$$\|U\| := \|U\|_1 + \|U\|_2,$$

donde $U \in \mathbb{H}$,

$$\|U\|_1 := \max_{(t, s) \in T} |U(t, s)| \quad y \quad \|U\|_2 := \sup_{s \in [a, b], t \neq \tau} \frac{|U(t, s) - U(\tau, s)|}{|t - \tau|}.$$

Teorema 1.7. El par $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Prueba. Notemos que $\|U\|_1$ y $\|U\|_2$ son una norma y una seminorma, respectivamente. Al recordar que la suma de una norma con una seminorma es una norma, tenemos que $\|U\|$ es una norma.

Con la finalidad de comprobar que el espacio $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ es completo, consideremos una sucesión de Cauchy $\{U_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{H}$. Sabemos que cualquier espacio de funciones con la norma del supremo $\|U\|_1$ es completo. Esto implica que existe una función continua U a la cual la sucesión $\{U_k\}_{k=1}^\infty$

converge uniformemente, y por lo tanto puntualmente. Si fijamos cualquier número real $\epsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que

$$\sup_{s \in [a, b], t \neq \tau} \frac{|(U_m(t, s) - U_n(t, s)) - (U_m(\tau, s) - U_n(\tau, s))|}{|t - \tau|} < \epsilon$$

para cada par de enteros positivos $m, n \geq N$. Al tomar $m \rightarrow \infty$ en la desigualdad anterior, obtenemos que

$$\sup_{s \in [a, b], t \neq \tau} \frac{|(U(t, s) - U_n(t, s)) - (U(\tau, s) - U_n(\tau, s))|}{|t - \tau|} \leq \epsilon$$

para cada entero positivo $n \geq N$, de lo cual se deduce que $(U - U_N) \in \mathbb{H}$. Si tenemos presente que $\mathbb{H}$ es un espacio vectorial, entonces $U = (U - U_N) + U_N \in \mathbb{H}$.

□

Observación 1.5. Si $K \in \mathbb{H}$, entonces K posee cada una de las propiedades que se mencionan en el Supuesto 1.1 de la sección 1.2.

Definición 1.10. Fijada una función $K \in \mathbb{H}$, definimos el operador integral $\mathcal{F} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ mediante la fórmula

$$\mathcal{F}(U)(t, s) := \int_s^t K(t, \sigma)U(\sigma, s)d\sigma \quad \text{para cada } U \in \mathbb{H}.$$

Observación 1.6. Es conveniente resaltar que el operador $\mathcal{F}$ juega un rol importante en el desarrollo de la presente sección.

Teorema 1.8. *El operador $\mathcal{F}$ de la Definición 1.10. es un operador lineal acotado de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$ que está bien definido.*

Prueba. Daremos la prueba dividiéndola en cuatro partes:

Parte 1. Si $U \in \mathbb{H}$, entonces la función $\mathcal{F}(U)$ es continua.

Parte 2. Si $U \in \mathbb{H}$, entonces $\|\mathcal{F}(U)\|_2 < \infty$. En efecto, supongamos que $s \in [a, b]$ y, sin pérdida de generalidad, asumamos que $s \leq \tau < t$. Observemos que

$$\frac{|\mathcal{F}(U)(t, s) - \mathcal{F}(U)(\tau, s)|}{|t - \tau|}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left| \int_s^t K(t, \sigma) U(\sigma, s) d\sigma - \int_s^\tau K(\tau, \sigma) U(\sigma, s) d\sigma \right|}{|t - \tau|} \\
&\leq \max_{(t,s) \in T} |U(t, s)| \cdot \sup_{s \in [a,b]} \frac{|K(t, s) - K(\tau, s)|}{|t - \tau|} \int_s^\tau d\sigma \\
&\quad + \frac{1}{|t - \tau|} \max_{(t,s) \in T} |U(t, s)| \cdot \max_{(t,s) \in T} |K(t, s)| \int_\tau^t d\sigma \\
&\leq \|U\|_1 (\|K\|_1 + (b-a) \|K\|_2).
\end{aligned}$$

Parte 3. Si $U \in \mathbb{H}$, entonces la función $\mathcal{F}(U) \in \mathbb{H}$.

Parte 4. Existe una constante $C > 0$ tal que $\|\mathcal{F}(U)\| \leq C \|U\|$ para cada $U \in \mathbb{H}$. Más aun, notemos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}(U)(t, s)| &= \left| \int_s^t K(t, \sigma) U(\sigma, s) d\sigma \right| \\
&\leq \max_{(t,s) \in T} |U(t, s)| \cdot \max_{(t,s) \in T} |K(t, s)| \int_s^t d\sigma \\
&\leq (b-a) \max_{(t,s) \in T} |K(t, s)| \cdot \max_{(t,s) \in T} |U(t, s)| \\
&= (b-a) \|K\|_1 \|U\|_1.
\end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que

$$\|\mathcal{F}(U)\|_1 \leq (b-a) \|K\|_1 \|U\|_1.$$

La prueba de la Parte 2 implica que

$$\|\mathcal{F}(U)\|_2 \leq (\|K\|_1 + (b-a) \|K\|_2) \|U\|_1.$$

A partir de aquí podemos completar el resto de la prueba sin dificultad.

□

Ya estamos preparados para presentar y probar el siguiente teorema, el cual es uno de los resultados importantes de esta sección.

Teorema 1.9. *Fijemos cualquier función $K \in \mathbb{H}$. Existe un número $\rho > 0$ tal que si $|\lambda| < \rho$, entonces podemos encontrar una función única $R \in \mathbb{H}$, la cual cumple con la igualdad*

$$R(t, s) = 1 + \lambda \int_s^t K(t, \sigma) R(\sigma, s) d\sigma$$

para cada par de números reales t y s tales que $a \leq s \leq t \leq b$.

Prueba. Esta prueba sigue del hecho de que $\mathcal{F}$ es un operador lineal acotado y de aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach al operador $\mathcal{T}_\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, el cual se define como $\mathcal{T}_\lambda(U) := 1 + \lambda \mathcal{F}(U)$.

□

Observación 1.7. La función R del Teorema 1.9 depende del número real λ .

Observación 1.8. La función R del Teorema 1.9 satisface que $R(t, t) = 1$ para cada $t \in [a, b]$. Esta función R nos permitirá hallar una fórmula para la solución del problema lineal (1.1) mediante las dos funciones u y v que definimos más adelante.

Definición 1.11. Para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, definimos $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$u(t) := R(t, a)y_0.$$

Proposición 1.8. La función u de la Definición 1.11 pertenece al espacio $AC[a, b]$.

Prueba. Esta proposición se deduce fácilmente de la Definición 1.9, ya que toda función de Lipschitz es absolutamente continua.

□

Lema 1.7. *Fijemos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| < \rho$. Dado cualquier $y_0 \in \mathbb{R}$, tenemos que*

$$u(t) = y_0 + \lambda \int_a^t K(t, \sigma) u(\sigma) d\sigma$$

para cada $t \in [a, b]$.

Prueba. La prueba sigue del Teorema 1.9 al tomar $s = a$ y multiplicar ambos miembros de la igualdad que aparece en el enunciado de dicho teorema

por el número real y_0 .

□

Antes de definir la función v mencionada, enunciamos el lema técnico que sigue.

Lema 1.8. Si $K \in \mathbb{H}$ y $g \in AC[a, b]$, entonces

$$\int_a^t \left[\int_s^t K(t, \sigma) R(\sigma, s) d\sigma \right] g'(s) ds = \int_a^t \left[K(t, \sigma) \int_a^\sigma R(\sigma, s) g'(s) ds \right] d\sigma.$$

Prueba. Este lema se deduce al emplear el Teorema de Fubinni, luego de reemplazar R por la función $\tilde{R} : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$;

$$\tilde{R}(t, s) = \begin{cases} R(t, s) & \text{si } a \leq s \leq t, \\ 0 & \text{si } t < s \leq b; \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{aligned} & \int_a^t \left[\int_s^t K(t, \sigma) R(\sigma, s) d\sigma \right] g'(s) ds \\ &= \int_a^t \left[\int_a^t K(t, \sigma) \tilde{R}(\sigma, s) d\sigma \right] g'(s) ds \\ &= \int_a^t \int_a^t K(t, \sigma) \tilde{R}(\sigma, s) g'(s) d\sigma ds \\ &= \int_a^t \int_a^t K(t, \sigma) \tilde{R}(\sigma, s) g'(s) ds d\sigma \\ &= \int_a^t \left[K(t, \sigma) \int_a^t \tilde{R}(\sigma, s) g'(s) ds \right] d\sigma \\ &= \int_a^t \left[K(t, \sigma) \int_a^\sigma R(\sigma, s) g'(s) ds \right] d\sigma. \end{aligned}$$

□

Definición 1.12. Definimos $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$v(t) := \int_a^t R(t, s)g'(s)ds.$$

Proposición 1.9. La función v en la Definición 1.12 pertenece al espacio $AC[a, b]$.

Prueba. Sea $\{(c_k, d_k)\}_{k=1}^n$ una familia de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos, los cuales están contenidos en $[a, b]$. Observe que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |v(d_k) - v(c_k)| = \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_a^{d_k} R(d_k, s)g'(s)ds - \int_a^{c_k} R(c_k, s)g'(s)ds \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_a^{c_k} [R(d_k, s) - R(c_k, s)]g'(s)ds + \int_{c_k}^{d_k} R(d_k, s)g'(s)ds \right| \\ &\leq \|R\| \left[\int_a^b |g'(s)|ds \cdot \left(\sum_{k=1}^n (d_k - c_k) \right) + \sum_{k=1}^n \int_{c_k}^{d_k} |g'(s)|ds \right]. \end{aligned}$$

La prueba concluye luego de usar el Teorema 1.3 de la Sección 1.1.

□

Lema 1.9. Si $K \in \mathbb{H}$ y $g \in AC[a, b]$, entonces

$$v(t) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, \sigma)v(\sigma)d\sigma.$$

Prueba. A partir del Lema 1.8, del Teorema 1.9 y del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para la Integral de Lebesgue (Teorema 1.2), tenemos que

$$v(t) - \lambda \int_a^t K(t, \sigma)v(\sigma)d\sigma = \int_a^t R(t, s)g'(s)ds - \lambda \int_a^t K(t, \sigma) \left[\int_a^\sigma R(\sigma, s)g'(s)ds \right] d\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^t R(t, s)g'(s)ds - \lambda \int_a^t \left[\int_s^t K(t, \sigma)R(\sigma, s)d\sigma \right] g'(s)ds \\
&= \int_a^t R(t, s)g'(s)ds - \int_a^t [R(t, s) - 1]g'(s)ds = \int_a^t g'(s)ds = g(t) - g(a).
\end{aligned}$$

De aquí podemos concluir esta prueba sin dificultad.

□

Como una consecuencia de los Lemas 1.7 y 1.9, obtenemos el siguiente resultado importante de esta Tesis.

Teorema 1.10. *Supongamos que $|\lambda| < \rho$, $K \in \mathbb{H}$, $g \in AC[a, b]$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Una solución $y \in AC[a, b]$ del problema con condición inicial*

$$\begin{cases} y(t) - y(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)y(s)ds, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

se puede expresar como

$$y(t) = R(t, a)y_0 + \int_a^t R(t, s)g'(s)ds,$$

donde R es la función que indicamos en el Teorema 1.9.

Observación 1.9. Si el número real ρ indicado en el enunciado del Teorema 1.10 es pequeño, entonces la solución que mencionamos en dicho teorema es única.

1.4. Control del Problema Lineal

En esta sección comprobamos que el sistema lineal

$$\begin{cases} y(t) - y(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)y(s)ds, \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

es exactamente controlable. Para este fin usaremos la fórmula de la solución del problema con valor inicial (1.2)

$$y(t) = R(t, a)y_0 + \int_a^t R(t, s)g'(s)ds$$

que indicamos en el Teorema 1.10. A continuación damos la definición de la controlabilidad exacta del sistema lineal (1.2).

Definición 1.12. Decimos que el **sistema** (1.2) es **exactamente controlable en el intervalo** $[a, b]$, si para cada par de números reales y_0 e y_1 existen una función $g \in AC[a, b]$ y una solución $y \in AC[a, b]$ del sistema (1.2), la cual depende de g , tal que $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$.

Supuesto 1.2. En esta y la próxima sección 1.5 asumiremos que λ es tal como se indica en el enunciado del Teorema 1.10.

Definición 1.13. Definimos la **función controladora** $G : AC[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$G(g) = R(b, a)y_0 + \int_a^b R(b, s)g'(s)ds.$$

Lema 1.10. *El sistema (1.2) es exactamente controlable en $[a, b]$ si, y solo si, $\text{Rang}(G) = \mathbb{R}$.*

Teorema 1.11. *El sistema es exactamente controlable en el intervalo $[a, b]$. Más aun, un control $g \in AC[a, b]$ que dirige el sistema (1.2) del estado inicial y_0 al estado final y_1 en $[a, b]$ es la función*

$$g(t) := \frac{y_1 - R(b, a)y_0}{\int_a^b R(b, s)h(s)ds} \int_a^t h(\sigma)d\sigma,$$

donde $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función continua que cumpla con la condición

$$\int_a^b R(b, s)h(s)ds \neq 0.$$

Prueba. Del Lema 1.10 tenemos que basta con probar que $\text{Rang}(G) = \mathbb{R}$. Para demostrar ésto, recordamos que la función R mencionada en el Teorema 1.10 es continua. De aquí y la Observación 1.8 existe un intervalo $I := (b -$

$\delta, b] \subset [a, b]$ tal que $R(b, s) > 0$ para cada $s \in I$. Ahora notemos que podemos encontrar una función continua $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} h(x) > 0 & \text{si } x \in I, \\ h(x) = 0 & \text{si } x \in [a, b] \setminus I. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\int_a^b R(b, s)h(s)ds = \int_I R(b, s)h(s)ds > 0$. A continuación fijamos cualquier número real y_1 . Si consideramos la función

$$g(t) := \frac{y_1 - R(b, a)y_0}{\int_a^b R(b, s)h(s)ds} \int_a^t h(\sigma)d\sigma,$$

al usar la definición de la función controladora G obtenemos que $G(g) = y_1$.

□

Observación 1.10. La parte final de la prueba del Teorema 1.11 es válida para cada función continua h tal que $\int_a^b R(b, s)h(s)ds \neq 0$.

Observación 1.11. Supongamos que $\int_a^b R(b, s)h(s)ds \neq 0$, siendo h una función continua. El operador $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow AC[a, b]$ definido como

$$\Gamma(r)(t) := \frac{r - R(b, a)y_0}{\int_a^b R(b, s)h(s)ds} \int_a^t h(\sigma)d\sigma$$

es una inversa a la derecha del operador G , i.e., $G \circ \Gamma = I$.

1.5. Control del Problema No Lineal

Antes de comprobar la controlabilidad exacta del sistema no lineal

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.3)$$

demostramos que el sistema semilineal

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)ds + \lambda \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.4)$$

es exactamente controlable, donde la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es globalmente Lipschitz con constante de Lipschitz $L \geq 0$. A fin de lograr ésto, encontramos una ecuación integral particular bajo el supuesto que sigue, el cual asumimos a lo largo de esta sección 1.5.

Supuesto 1.3. La función K está definida sobre el rectángulo $[a, b] \times [a, b]$ en lugar del triángulo T ; más aún, suponemos que esta función cumple las dos condiciones:

1. $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua; además de
2. existir y ser continua la primera derivada parcial $\frac{\partial K}{\partial t}$ en el rectángulo $[a, b] \times [a, b]$.

Observación 1.12. La función K del Supuesto 1.3, restringida al triángulo T , pertenece al espacio de Banach $\mathbb{H}$ mencionado en la Definición 1.9.

Teorema 1.12. Existe un $\rho > 0$ tal que dados cualesquiera λ con $|\lambda| \leq \rho$ y $g \in AC[a, b]$, el problema (1.4) admite sólo una solución $x_g \in AC[a, b]$, la cual es simultáneamente una solución de la ecuación integral

$$x_g(t) = R(t, a)x_0 + \int_a^t R(t, s)g'(s)ds + \lambda \int_a^t R(t, s)K(s, s)f(x_g(s))ds + \lambda \int_a^t \int_a^s R(t, s)\frac{\partial K}{\partial t}(s, \sigma)f(x_g(\sigma))d\sigma ds.$$

Prueba. La existencia de x_g y de ρ , así como la unicidad de x_g , es consecuencia inmediata del Teorema 1.6. Ahora, con la finalidad de probar que x_g también es solución de la ecuación integral anterior, definimos la función $h_g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$h_g(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t, \sigma)f(x_g(\sigma))d\sigma = g(t) + \lambda(F \circ x_g)(t),$$

donde $|\lambda| < \rho$ y F es la función de la Definición 1.7 de la Sección 1.2. Note que $h_g \in AC[a, b]$ y observe que la función x_g también es solución del problema lineal con valor inicial

$$\begin{cases} y(t) - y(a) = h_g(t) - h_g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)y(s)ds, \\ y(a) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De ésto y usando el Teorema 1.10, tenemos que podemos representar x_g como

$$x_g(t) = R(t, a)x_0 + \int_a^t R(t, s)h'_g(s)ds,$$

i.e.,

$$\begin{aligned} x_g(t) &= R(t, a)x_0 + \int_a^t R(t, s)g'(s)ds \\ &+ \lambda \int_a^t R(t, s) \frac{d}{ds} \left[\int_a^s K(s, \sigma)f(x_g(\sigma))d\sigma \right] ds. \end{aligned}$$

Por otra parte, podemos probar que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} \left[\int_a^s K(s, \sigma)f(x_g(\sigma))d\sigma \right] \\ &= K(s, s)f(x_g(s)) + \int_a^s \frac{\partial K}{\partial t}(s, \sigma)f(x_g(\sigma))d\sigma. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x_g(t) &= R(t, a)x_0 + \int_a^t R(t, s)g'(s)ds \\ &+ \lambda \int_a^t R(t, s)K(s, s)f(x_g(s))ds \\ &+ \lambda \int_a^t \left[\int_a^s R(t, s) \frac{\partial K}{\partial t}(s, \sigma)f(x_g(\sigma))d\sigma \right] ds. \end{aligned}$$

□

Observación 1.13. Para leer una demostración de la igualdad

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} \left[\int_a^s K(s, \sigma)f(x_g(\sigma))d\sigma \right] \\ &= K(s, s)f(x_g(s)) + \int_a^s \frac{\partial K}{\partial t}(s, \sigma)f(x_g(\sigma))d\sigma, \end{aligned}$$

la cual aparece en la prueba del Teorema 1.12, podemos consultar [19].

Continuamos la presente sección con un par de definiciones y luego demostramos un conjunto de proposiciones técnicas, las cuales usamos para verificar que el problema semilineal (1.4) es exactamente controlable.

Definición 1.14. Definimos la función controladora $G_f : AC[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ para el sistema (1.4) como

$$\begin{aligned} G_f(g) &= R(b, a)x_0 + \int_a^b R(b, s)g'(s)ds \\ &+ \lambda \int_a^b R(b, s)K(s, s)f(x_g(s))ds + \lambda \int_a^b \left[\int_a^s R(b, s) \frac{\partial K}{\partial t}(s, \sigma)f(x_g(\sigma))d\sigma \right] ds \\ &= G(g) + H(g), \end{aligned}$$

donde $H : AC[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$H(g) = \lambda \int_a^b R(b, s)K(s, s)f(x_g(s))ds + \lambda \int_a^b \left[\int_a^s R(b, s) \frac{\partial K}{\partial t}(s, \sigma)f(x_g(\sigma))d\sigma \right] ds$$

y G es la función controladora dada en la Definición 1.13, colocando x_0 en lugar de y_0 en el segundo miembro de la definición de esta función G .

A continuación damos la definición de controlabilidad exacta para el sistema semilineal (1.4).

Definición 1.15. Decimos que el sistema (1.4) es **exactamente controlable en el intervalo** $[a, b]$, si para cada par de números reales x_0 y x_1 existen una función $g \in AC[a, b]$ y una solución $x_g \in AC[a, b]$ del sistema (1.4), que depende de g , tal que $x_g(a) = x_0$ y $x_g(b) = x_1$.

Lema 1.11. El sistema (1.4) es exactamente controlable en $[a, b]$ si, y sólo si, $\text{Rang}(G_f) = \mathbb{R}$.

Lema 1.12. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$|H(u) - H(v)| \leq |\lambda| C \|x_u - x_v\|$$

para todos los pares de funciones u y v pertenecientes a $AC[a, b]$.

Prueba. Observe que

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b R(b, s)K(s, s)[f(x_u(s)) - f(x_v(s))] ds \right| \\ &\leq \max_{s \in [a, b]} \left\{ |R(b, s)| \cdot |K(s, s)| \right\} \cdot \int_a^b |f(x_u(s)) - f(x_v(s))| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{s \in [a, b]} \left\{ |R(b, s)| \cdot |K(s, s)| \right\} \cdot L \cdot \int_a^b |x_u(s) - x_v(s)| ds \\
&\leq L \cdot (b - a) \cdot \max_{s \in [a, b]} \left\{ |R(b, s)| \cdot |K(s, s)| \right\} \cdot \max_{s \in [a, b]} |x_u(s) - x_v(s)| \\
&\leq L \cdot (b - a) \cdot \max_{s \in [a, b]} \left\{ |R(b, s)| \cdot |K(s, s)| \right\} \cdot \|x_u - x_v\|.
\end{aligned}$$

De la misma manera como hicimos un poco antes, podemos verificar que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b \left[\int_a^s R(b, s) \frac{\partial K}{\partial t}(s, \sigma) \left[f(x_u(\sigma)) - f(x_v(\sigma)) \right] d\sigma \right] ds \right| \\
&\leq L \cdot (b - a)^2 \cdot \max_{s \in [a, b]} |R(b, s)| \cdot \max_{(s, \sigma) \in \mathbf{R}} \left| \frac{\partial K}{\partial t}(s, \sigma) \right| \cdot \|x_u - x_v\|.
\end{aligned}$$

De las dos desigualdades anteriores tenemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|H(u) - H(v)| \leq |\lambda| \cdot C \cdot \|x_u - x_v\|.$$

□

Lema 1.13. *Fijemos dos funciones cualesquiera $u, v \in AC[a, b]$. Si definimos la función*

$$t \mapsto \int_a^t K(t, s) [f(x_u(s)) - f(x_v(s))] ds,$$

entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \int_a^t K(t, s) [f(x_u(s)) - f(x_v(s))] ds \right\| \leq C \|x_u - x_v\|.$$

Prueba. Observe que dada cualquier partición $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \left| \int_a^{t_i} K(t_i, s) [f(x_u(s)) - f(x_v(s))] ds - \int_a^{t_{i-1}} K(t_{i-1}, s) [f(x_u(s)) - f(x_v(s))] ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_a^{t_{i-1}} [K(t_i, s) - K(t_{i-1}, s)] [f(x_u(s)) - f(x_v(s))] ds \right| \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t_i, s) [f(x_u(s)) - f(x_v(s))] ds \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_a^{t_{i-1}} |K(t_i, s) - K(t_{i-1}, s)| \cdot |f(x_u(s)) - f(x_v(s))| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |K(t_i, s)| \cdot |f(x_u(s)) - f(x_v(s))| ds \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_a^{t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) \tilde{L} |x_u(s) - x_v(s)| ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n L \max_{(t,s) \in T} |K(t, s)| \cdot \max_{s \in [a,b]} |x_u(s) - x_v(s)| \int_{t_{i-1}}^{t_i} ds \\
&\leq \tilde{L} \max_{s \in [a,b]} |x_u(s) - x_v(s)| \sum_{i=1}^n \int_a^b (t_i - t_{i-1}) ds \\
&\quad + L \max_{(t,s) \in T} |K(t, s)| \cdot \max_{s \in [a,b]} |x_u(s) - x_v(s)| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} ds \\
&= \tilde{L} \max_{s \in [a,b]} |x_u(s) - x_v(s)| (b-a) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\
&\quad + L \max_{(t,s) \in T} |K(t, s)| \cdot \max_{s \in [a,b]} |x_u(s) - x_v(s)| (b-a) \\
&\leq \hat{L} \left[(b-a)^2 + (b-a) \max_{(t,s) \in T} |K(t, s)| \right] \|x_u - x_v\|.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.14. Existe una constante $C > 0$ tal que, si $|\lambda| < \frac{1}{C}$, entonces

$$\|x_u - x_v\| \leq \frac{2}{1 - |\lambda|C} \|u - v\|$$

para cada par de funciones $u, v \in AC[a, b]$.

Prueba. Ya que x_u y x_v son soluciones del sistema (1.4) para u y v respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} x_u(t) - x_v(t) &= (u(t) - v(t)) + (v(a) - u(a)) \\ &\quad + \lambda \int_a^t K(t, s) [x_u(s) - x_v(s)] ds \\ &\quad + \lambda \int_a^t K(t, s) [f(x_u(s)) - f(x_v(s))] ds. \end{aligned}$$

Si usamos el Lema 1.13 dos veces, entonces

$$\begin{aligned} \|x_u - x_v\| &\leq \|u - v\| + \|u(a) - v(a)\| \\ &\quad + |\lambda| \left[\left\| \int_a^t K(t, s) [x_u(s) - x_v(s)] ds \right\| + \left\| \int_a^t K(t, s) [f(x_u(s)) - f(x_v(s))] ds \right\| \right] \\ &\leq 2\|u - v\| + |\lambda|(C + \tilde{C})\|x_u - x_v\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(1 - |\lambda|(C + \tilde{C}))\|x_u - x_v\| \leq 2\|u - v\|.$$

□

Lema 1.15. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$|H(u) - H(v)| \leq |\lambda| C \|u - v\|$$

para cada par de funciones $u, v \in AC[a, b]$.

Prueba. Esta proposición es consecuencia de los Lemas 1.12 y 1.14.

□

Consideremos un resultado más antes de probar la controlabilidad exacta del sistema (1.4).

Lema 1.16. [15] Si $\mathcal{S} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz con una constante de Lipschitz $\kappa < 1$, entonces la función $\mathcal{G}(r) := r + \mathcal{S}(r)$ es un

homeomorfismo cuya inversa es una función de Lipschitz con una constante de Lipschitz $(1 - \kappa)^{-1}$.

Ya tenemos todos los elementos necesarios para probar la controlabilidad exacta del sistema (1.4).

Teorema 1.13. Existe un número real $\rho > 0$ tal que si $|\lambda| \leq \rho$, entonces el sistema (1.4) es exactamente controlable en $[a, b]$.

Prueba. Del Lema 1.11 basta con probar que $\text{Rang}(G_f) = \mathbb{R}$. Para ésto consideremos el operador $\mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, el cual definimos como $\mathcal{G} := G_f \circ \Gamma$, donde a su vez definimos Γ como

$$\Gamma(r)(t) := \frac{r - R(a, b)x_0}{\int_a^b R(b, s)h(s)ds} \int_a^t h(s)ds.$$

A partir de la Observación 1.11 obtenemos que $G \circ \Gamma = I(r) = r$. Luego $\mathcal{G}(r) = r + \mathcal{S}(r)$, donde $\mathcal{S} := H \circ \Gamma$. Además, debido a la Lema 1.15 y a la definición de la función Γ podemos asegurar que

$$|\mathcal{S}(r) - \mathcal{S}(\tilde{r})| \leq |\lambda| \cdot C \cdot \Lambda \cdot |r - \tilde{r}|,$$

donde $\Lambda := \frac{1}{\int_a^b R(b, s)h(s)ds} \left\| \int_a^t h(s)ds \right\|$.

Si el número real λ es pequeño, entonces $\mathcal{S}$ es una función de Lipschitz con una constante de Lipschitz $\kappa < 1$. Entonces, debido al Lema 1.16, la función $\mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo. De ésto obtenemos que la función $\mathcal{G}$ es sobreyectiva, lo que implica que $\text{Rang}(G_f) = \mathbb{R}$. Por lo tanto el sistema (1.4) es exactamente controlable en el intervalo $[a, b]$.

□

De la prueba del Teorema 1.13 obtenemos el siguiente lema.

Lema 1.17 Sea $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función identidad $I(r) := r$. El operador $\hat{\Gamma} : \mathbb{R} \rightarrow AC[a, b]$ definido como $\hat{\Gamma}(r) = \left(\Gamma \circ (I + \mathcal{S})^{-1} \right)(r)$ es una inversa a la derecha del operador no lineal G_f , i.e., $G_f \circ \hat{\Gamma} = I$. Además, un control $g \in AC[a, b]$ que dirige el sistema (1.4) desde el estado inicial x_0 al estado final x_1 en $[a, b]$ es

$$g(t) = \hat{\Gamma}(x_1)(t) = \left(\Gamma \circ (I + \mathcal{S})^{-1} \right)(x_1)(t).$$

Antes de probar la controlabilidad del sistema (1.3), consideremos una definición más.

Definición 1.16. Decimos que el **sistema** (1.3) es **exactamente controlable en el intervalo** $[a, b]$, si para cada par de números reales x_0 y x_1 existen una función $g \in AC[a, b]$ y una solución $x \in AC[a, b]$ del sistema (1.3), que depende de g , tal que $x(a) = x_0$ y $x(b) = x_1$.

A continuación probamos la controlabilidad exacta del sistema no lineal (1.3).

Teorema 1.14 *Existe un número real $\rho > 0$ tal que si $|\lambda| \leq \rho$, entonces el sistema (1.3) es exactamente controlable en el intervalo $[a, b]$.*

Prueba. Al escribir $f(x) = x + (f(x) - x) = x + \hat{f}(x)$ obtenemos que $\hat{f}(x) := f(x) - x$ posee las mismas propiedades que f . Por lo tanto podemos reescribir el sistema (1.3) como

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = g(t) - g(a) + \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)ds + \lambda \int_a^t K(t, s)\hat{f}(x(s))ds, \\ x(a) = x_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Luego, al emplear el Teorema 1.13 con el anterior sistema (1.5), obtenemos el resultado que buscábamos.

□

Capítulo 2

La Ecuación de Volterra en el Espacio de las Funciones de Variación Acotada

En este capítulo el símbolo $BV[a, b]$ denota al espacio de *Banach* de las funciones de variación acotada provisto con la norma de la Definición 1.4 del capítulo precedente. Al igual que en el capítulo anterior, éste se inicia con una sección de preliminares en la que se listan los supuestos y herramientas que se usan para probar en la siguiente sección la existencia de las soluciones del problema con valor inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = A(g)(t) - A(g)(a) + \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

en el espacio $BV[a, b]$, donde $A : BV[a, b] \longrightarrow BV[a, b]$.

2.1. Preliminares

Iniciamos esta sección con dos supuestos.

Supuesto 2.1. Asumimos que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que se encuentra en la parte integral del sistema (2.1) es globalmente *Lipschitz* con constante de *Lipschitz* $L \geq 0$ (ver Definición 1.1).

Supuesto 2.2. En relación al núcleo $K : T \longrightarrow \mathbb{R}$ de la ecuación integral

del sistema (2.1), donde

$$T := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : a \leq s \leq t \leq b\},$$

supondremos que

1. $K(t, \cdot) : [a, t] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable según Lebesgue para cada $t \in [a, b]$ y además,
2. asumimos que existe una función $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable según Lebesgue, tal que

$$\bigvee_s^b K(\cdot, s) := \sup_{\Pi_s} \sum_{i=1}^n |K(t_i, s) - K(t_{i-1}, s)| \leq h(s)$$

casi en todas partes, donde $\Pi_s : s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ denota a cualquier partición del intervalo $[s, b]$ para cada número real fijo $s \in [a, b]$.

Observación 2.1. Fijemos cualquier número real $t \in [a, b]$. Si $x \in BV[a, b]$, entonces la función $s \mapsto K(t, s)f(x(s))$ es integrable según Lebesgue; lo que implica que la función

$$t \mapsto \int_a^t K(t, s)f(x(s))ds$$

está bien definida.

Ejemplo 2.1. [14] Un ejemplo de la función K mencionada en el Supuesto 2.2 es $K(t, s) := f(t)h(s)$, donde $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de variación acotada y $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es función acotada e integrable según Lebesgue.

Lema 2.1. [23] Si la función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable según Lebesgue, entonces la función $W : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$; $W(t) := \int_a^t g(s)ds$ es de variación acotada.

A continuación damos un ejemplo de una función A como la que está presente en el segundo miembro de la ecuación integral del sistema (2.1).

Ejemplo 2.2. Gracias al Lema 1.4 del primer capítulo y al Lema 2.1, podemos dar como ejemplo de una función $A : BV[a, b] \longrightarrow BV[a, b]$ a la que definimos como $A(g)(t) := \int_a^t g(s)ds$.

Definición 2.1. Una función $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz, si para cada número real $r > 0$ existe una constante $L_r \geq 0$ tal que $|\phi(t) - \phi(\tau)| \leq L_r |t - \tau|$ para cada par de números reales $t, \tau \in [-r, r]$.

Proposición 3.1. Si una función es globalmente *Lipschitz*, entonces ella es localmente *Lipschitz*.

Lema 2.2. [29] Dada una función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la composición de funciones $A(g)$ como $A(g) := \phi \circ g$ para cada $g \in BV[a, b]$. La composición de funciones $A(g) \in BV[a, b]$ para cada $g \in BV[a, b]$ si, y sólo si, la función ϕ es localmente *Lipschitz*.

Ejemplo 2.3. Si una función ϕ es localmente *Lipschitz*, entonces el Lema 2.2 nos suministra otro ejemplo de una función $A : BV[a, b] \rightarrow BV[a, b]$ tal como la que aparece en la ecuación integral del sistema (2.1).

El teorema que sigue nos es útil tanto en la próxima Sección 2.2, como en la Sección 3.4 del capítulo 3.

Teorema 2.1. [13] [Alternativa de Leray-Schauder] Sea U un subconjunto abierto de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ tal que $0 \in U$. Supongamos que $H : \bar{U} \rightarrow X$ y asumamos que existe una función continua creciente tal que $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, la cual satisface que $\phi(z) < z$ para cada $z > 0$ y además, para cada par de elementos $x, y \in \bar{U}$ tenemos que $\|H(x) - H(y)\| \leq \phi(\|x - y\|)$; donde $\bar{U}$ denota la clausura de U en X . Adicionalmente asumimos que $H(\bar{U})$ está acotado y que $x \neq \lambda H(x)$ para cada $x \in \partial U$ y todo $\lambda \in (0, 1]$; donde ∂U denota la frontera de U en X . Si cada uno de los supuestos anteriores son ciertos, entonces H tiene un punto fijo en U .

2.2. Existencia de Soluciones

Definición 2.2. Dada $x \in BV[a, b]$, definimos $F(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x)(t) := \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds.$$

Recordemos la siguiente definición.

Definición 2.3. Definimos $\|x\| := |x(a)| + V(x)$, donde $V(x)$ denota la variación total variation de $x \in BV[a, b]$ (ver Definición 1.3).

Lema 2.3. Si $x \in BV[a, b]$, entonces $F(x) \in BV[a, b]$. Má aún,

$$\|F(x)\| \leq \max_{s \in [-r, r]} |f(s)| \cdot \int_a^b h(s) ds$$

para cada $x \in B_r := \{x \in BV[a, b] : \|x\| \leq r\}$ y todo $r > 0$.

Prueba. Observe que $\|F(x)\| = V(F(x))$ para cada $x \in BV[a, b]$. Ahora definimos $\widehat{K} : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\widehat{K}(t, s) = \begin{cases} K(t, s) & \text{if } a \leq s \leq t, \\ 0 & \text{if } t < s \leq b. \end{cases}$$

Sea $\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. Dada cualquier función $x \in B_r$, tenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left| F(x)(t_i) - F(x)(t_{i-1}) \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \int_a^{t_i} \widehat{K}(t_i, s) f(x(s)) ds - \int_a^{t_{i-1}} \widehat{K}(t_{i-1}, s) f(x(s)) ds \right| \\ &\leq \max_{s \in [-r, r]} |f(s)| \cdot \int_a^b \sum_{i=1}^n |\widehat{K}(t_i, s) - \widehat{K}(t_{i-1}, s)| ds \\ &\leq \max_{s \in [-r, r]} |f(s)| \cdot \int_a^b \bigvee_a^b \widehat{K}(\cdot, s) ds \\ &\leq \max_{s \in [-r, r]} |f(s)| \cdot \int_a^b h(s) ds. \end{aligned}$$

□

A continuación definimos otra función G_g .

Definition 2.4. Sea x_0 un número real cualquiera fijo. Dado $g \in BV[a, b]$, definimos

$$\begin{aligned} G_g : BV[a, b] &\longrightarrow BV[a, b] \quad \text{como} \\ G_g(x)(t) &:= x_0 + A(g)(t) - A(g)(a) + \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds \\ &= (x_0 - A(g)(a)) + A(g)(t) + F(x)(t). \end{aligned}$$

Lema 2.4. Si $x \in BV[a, b]$, entonces $G_g(x) \in BV[a, b]$.

Teorema 2.2. Sea x_0 cualquier número real y asumamos que existe un número real fijo $\alpha \geq 0$ tal que $\max_{s \in [-r, r]} |f(s)| \leq r + \alpha$ para cada $r \geq 0$. Si la función h del Supuesto 2.2 cumple con que $\int_a^b h(s) ds < 1$ y $L \int_a^b h(s) ds < 1$, entonces existe una solución $x_g \in BV[a, b]$ del problema con valor inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = A(g)(t) - A(g)(a) + \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

para cada función dada $g \in BV[a, b]$.

Prueba. Sea g cualquier elemento $BV[a, b]$. Definamos $\hat{K} : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\hat{K}(t, s) = \begin{cases} K(t, s) & \text{si } a \leq s \leq t, \\ 0 & \text{si } t < s \leq b. \end{cases}$$

Elijamos un número real $r > 0$ tal que

$$\left\| (x_0 - A(g)(a)) + A(g) \right\| + \alpha \int_a^b h(s) ds < r \left(1 - \int_a^b h(s) ds \right).$$

Ahora definimos $H : \overline{B_r} \rightarrow BV[a, b]$ como $H(x) := G_g(x)$.

Sea $\Pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partición de $[a, b]$. Dada cualquier par de funciones $x, y \in \overline{B_r}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|H(x) - H(y)\| &\leq \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^n \left| (F(x) - F(y))(t_i) - (F(x) - F(y))(t_{i-1}) \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \int_a^{t_i} \hat{K}(t_i, s) (f(x(s)) - f(y(s))) ds - \int_a^{t_{i-1}} \hat{K}(t_{i-1}, s) (f(x(s)) - f(y(s))) ds \right| \\ &\leq L \sup_{s \in [a, b]} |x(s) - y(s)| \int_a^b \sum_{i=1}^n |\hat{K}(t_i, s) - \hat{K}(t_{i-1}, s)| ds \\ &\leq L \int_a^b \bigvee_a^b \hat{K}(\cdot, s) ds \|x - y\| \\ &\leq L \int_a^b h(s) ds \|x - y\|. \end{aligned}$$

A continuación asumimos que existe un elemento $x \in \overline{B_r}$, tal que $x = \lambda H(x)$ para algún $\lambda \in (0, 1]$. Debido al Lema 2.3 y a la forma como se escogió el número real $r > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|x\| = \|\lambda H(x)\| &\leq \|H(x)\| \leq \|(x_0 - A(g)(a)) + A(g)\| + \max_{s \in [-r, r]} |f(s)| \cdot \int_a^b h(s) ds \\ &\leq \|(x_0 - A(g)(a)) + A(g)\| + (r + \alpha) \int_a^b h(s) ds < r. \end{aligned}$$

Esta desigualdad implica que si $x \in \overline{B_r}$ cumple con que $x = \lambda H(x)$ para algún $\lambda \in (0, 1]$, entonces x no pertenece a ∂B_r .

Si definimos $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ como $\phi(z) := \left(L \int_a^b h(s) ds \right) z$, entonces la alternativa de Leray-Schauder (Teorema 2.1) implica que existe una solución perteneciente a $B_r \subseteq BV[a, b]$ del problema con valor inicial

$$\begin{cases} x(t) - x(a) = A(g)(t) - A(g)(a) + \int_a^t K(t, s) f(x(s)) ds, \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

para cada función dada $g \in BV[a, b]$.

□

Ejemplo 2.4. Un ejemplo del tipo de función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la mencionada en el enunciado del Teorema 2.2 es $f(s) := s + \beta \cdot \text{sen } s$, donde β es cualquier número real fijo.

Capítulo 3

La Ecuación de Hammerstein en el Espacio de las Funciones de φ -Variación Acotada

El presente capítulo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 3.1 presentamos las definiciones y resultados preliminares necesarios que se refieren a las funciones de φ -variación acotada, los cuales se tomaron de [3] y [5]. Luego, en la Sección 3.2, aplicando el Teorema del Punto Fijo de Banach, estudiamos la existencia y la unicidad de las soluciones de la ecuación de *Hammerstein* con parámetro

$$u(x) = v(x) + \lambda \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy$$

en el espacio de las funciones de φ -variación acotada definidas en cualquier rectángulo del plano $I_a^b := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, donde $x, y \in I_a^b$, $K : I_a^b \times I_a^b \rightarrow \mathbb{R}$, $f : I_a^b \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Después, en la Sección 3.3, investigamos la existencia local y la unicidad de las soluciones de la ecuación de *Hammerstein*

$$u(x) = v(x) + \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy,$$

en el espacio de funciones mencionado y por último, en la Sección 3.4, usando una versión no lineal del Teorema de *Leray-Schauder* (Teorema 2.1), probamos la existencia global de las soluciones de la ecuación integral anterior en el mismo espacio de funciones.

3.1. Preliminares

Esta sección contiene cada una de las definiciones y propiedades que son necesarias para comprender en si mismo el contenido del Capítulo 3.

Definición 3.1. Fijemos cualesquiera números reales a_1, a_2, b_1 y b_2 tales que $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$. Sean $\{t_i\}_1^m = \{a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b_1\}$ y $\{s_j\}_1^n = \{a_2 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b_2\}$ particiones de los intervalos $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$, respectivamente. Dada una función $u : I_a^b := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos las siguientes cantidades:

$$\Delta_{10}u(t_i, a_2) := u(t_i, a_2) - u(t_{i-1}, a_2),$$

$$\Delta_{01}u(a_1, s_j) := u(a_1, s_j) - u(a_1, s_{j-1}),$$

$$\Delta_{11}u(t_i, s_j) := u(t_{i-1}, s_{j-1}) + u(t_i, s_j) - u(t_{i-1}, s_j) - u(t_i, s_{j-1}).$$

La definición que sigue, aunque es similar a la Definición 3.1, no se encuentra en ninguna de las referencias bibliográficas [3] y [5].

Definición 3.2. Fijemos cualesquiera cuatro números reales a_1, b_1, a_2 y b_2 tales que $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$. Sean $\{t_i\}_1^m = \{a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b_1\}$ y $\{s_j\}_1^n = \{a_2 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b_2\}$ particiones de los intervalos $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$, respectivamente. Dada una función $K : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos las siguientes cantidades:

$$\Delta_{10}K(t_i, a_2, y) := K(t_i, a_2, y) - K(t_{i-1}, a_2, y),$$

$$\Delta_{01}K(a_1, s_j, y) := K(a_1, s_j, y) - K(a_1, s_{j-1}, y),$$

$$\Delta_{11}K(t_i, s_j, y) := K(t_{i-1}, s_{j-1}, y) + K(t_i, s_j, y) - K(t_{i-1}, s_j, y) - K(t_i, s_{j-1}, y).$$

Definición 3.3. Una función $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ es una φ -función, si son ciertas cada una de las siguientes condiciones:

1. φ es continua,
2. $\varphi(t) = 0$ sólo si $t = 0$,
3. $\varphi(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y
4. la función φ es no decreciente.

Definición 3.4. Dada una función $u : I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la φ -variación en el sentido de Riesz de la función u en $[a_1, b_1] \times \{a_2\}$ como

$$V_{\varphi, [a_1, b_1]}^R(u) := \sup_{\Pi_1} \sum_{i=1}^m \varphi \left[\frac{|\Delta_{10}u(t_i, a_2)|}{|t_i - t_{i-1}|} \right] \cdot |t_i - t_{i-1}|,$$

donde el supremo se toma sobre el conjunto de las sumatorias indicadas, correspondientes al conjunto de las particiones Π_1 del intervalo $[a_1, b_1]$.

Definición 3.5. Dada una función $u : I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la φ -variación en el sentido de Riesz de la función u en $\{a_1\} \times [a_2, b_2]$ como

$$V_{\varphi, [a_2, b_2]}^R(u) := \sup_{\Pi_2} \sum_{j=1}^n \varphi \left[\frac{|\Delta_{01} u(a_1, s_j)|}{|s_j - s_{j-1}|} \right] \cdot |s_i - s_{i-1}|,$$

donde el supremo se toma en el conjunto de las sumatorias que corresponden al conjunto de las particiones Π_2 del intervalo $[a_2, b_2]$.

Definición 3.6. Dada la función $u : I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la φ -variación bidimensional en el sentido de Riesz de la función u en I_a^b mediante la expresión

$$V_{\varphi}^R(u) := \sup_{\Pi_1, \Pi_2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi \left[\frac{|\Delta_{11} u(t_i, s_j)|}{|\Delta t_i| |\Delta s_j|} \right] \cdot |\Delta t_i| \cdot |\Delta s_j|,$$

donde el supremo se toma en el conjunto de las dobles sumatorias que corresponden a cada par de particiones (Π_1, Π_2) de los intervalos $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$, respectivamente.

Definición 3.7. Dada la función $u : I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la φ -variación total acotada de Riesz de u , la cual denotamos mediante el símbolo $TV_{\varphi}^R(u)$, como

$$TV_{\varphi}^R(u) := V_{\varphi, [a_1, b_1]}^R(u) + V_{\varphi, [a_2, b_2]}^R(u) + V_{\varphi}^R(u).$$

Definición 3.8. Al conjunto de las funciones $u : I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$ que son φ -variation total acotada en el sentido de Riesz finita, lo denotamos como $V_{\varphi}^R(I_a^b)$; es decir,

$$V_{\varphi}^R(I_a^b) := \left\{ u : I_a^b \longrightarrow \mathbb{R} : TV_{\varphi}^R(u) < \infty \right\}.$$

Nota 3.1. Denotamos como $BV_{\varphi}^R(I_a^b) := \langle V_{\varphi}^R(I_a^b) \rangle$ al espacio lineal generado por el conjunto $V_{\varphi}^R(I_a^b)$.

Teorema 3.1. [3] (p. 67) Sea $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una φ -función. Si φ es convexa y $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$, entonces el par $\left(BV_{\varphi}^R(I_a^b), \|\cdot\|_{\varphi}^R \right)$ es un

espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{\varphi}^R := |u(a_1, a_2)| + \inf \left\{ \varepsilon > 0 : TV_{\varphi}^R \left(\frac{u}{\varepsilon} \right) \leq 1 \right\}.$$

Nota 3.2. [3] (p. 82) Si φ es una φ -función convexa tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$, entonces

$$\|u\|_{\infty} := \sup \left\{ |u(x)| : x \in I_a^b \right\} \leq \|u\|_{\varphi}^R.$$

Definición 3.9. Denotamos mediante el símbolo $\mathfrak{G}(I_a^b)$ al conjunto constituido por los rectángulos $P := [t_1, t_2] \times [x_1, x_2]$ que están contenidos en el rectángulo I_a^b . Además, $|P| := (t_2 - t_1) \cdot (x_2 - x_1)$.

Definición 3.10. Una función $F : \mathfrak{G}(I_a^b) \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua si para cualquier número real $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si para cualquier conjunto finito de rectángulos $P_1, \dots, P_k \in \mathfrak{G}(I_a^b)$ cuyos interiores son disjuntos dos a dos y los cuales cumplen con que

$$\sum_{j=1}^k |P_j| \leq \delta,$$

entonces

$$\sum_{j=1}^k |F(P_j)| < \epsilon.$$

Definición 3.11. Dada una función $u : I_a^b \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la función de rectángulos correspondiente $F_u : \mathfrak{G}(I_a^b) \rightarrow \mathbb{R}$ como $F_u([t_1, t_2] \times [x_1, x_2]) = \Delta_{11}u(t_2, x_2)$.

Definición 3.12. Una función $u : I_a^b \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua I_a^b en el sentido de Carathéodory, si la función de rectángulos correspondiente F_u es absolutamente continua y las funciones $u(a_1, \cdot) : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ y $u(\cdot, a_2) : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ son absolutamente continuas según la Definición 1.2 del primer capítulo.

Teorema 3.2. [3] (p. 23) Sea $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una φ -función que es convexa tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$ y consideremos otra función $u : I_a^b \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $TV_{\varphi}^R(u) < \infty$ si, y sólo si, u es absolutamente continua en I_a^b en el sentido de Carathéodory.

Teorema 3.3. [3] (p. 22) *La función $u : I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua en I_a^b en el sentido de Carathéodory si, y sólo si, u admite una representación integral*

$$u(t, x) = e + \int_{a_1}^t f(s) ds + \int_{a_2}^x g(\eta) d\eta + \int \int_{Q(t, x)} h(s, \eta) ds d\eta,$$

para $(t, x) \in I$, donde $e \in \mathbb{R}$, f y g son Lebesgue-integrables respectivamente en los intervalos $[a_1, b_1]$ y $[a_1, b_1]$, y $Q(t, x) = [a_1, t] \times [a_2, x]$.

Lema 3.1. *Si φ es una φ -función convexa tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$ y $u \in BV_{\varphi}^R(I_a^b)$, entonces la función u es continua.*

Prueba. Este lema es una consecuencia de la Nota 3.1, los Teoremas 3.2 y 3.3 anteriores y el Teorema 1.3 del Capítulo 1.

□

3.2. Existencia y Unicidad de Soluciones

En esta sección estudiamos la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación de *Hammerstein* con parámetro

$$u(x) = v(x) + \lambda \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (3.1)$$

en el espacio de *Banach* $BV_{\varphi}^R(I_a^b)$ con la norma $\|u\|_{\varphi}^R$. De ahora en adelante asumimos las siguientes hipótesis:

Supuesto 3.1. Suponemos que $K : I_a^b \times I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y que $f : I_a^b \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Además, asumimos que $K(x, \cdot) : I_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible para cada elemento fijo $x \in I_a^b$ y que la función f es localmente *Lipschitz* en la segunda variable; es decir, dado un número real $r > 0$, existe una constante $L_r > 0$ que depende de r , tal que

$$|f(y, t) - f(y, \tau)| \leq L_r |t - \tau|$$

para todo elemento $y \in I_a^b$ y para cada par de números reales $t, \tau \in [-r, r]$.

Supuesto 3.2. También asumimos que la función $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ es una φ -función convexa tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$.

Supuesto 3.3. Suponemos que existe una función $w \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ tal que para cada par de números reales $(t_i, s_j) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ y cada elemento $y \in I_a^b$, se cumple que

1. $|\Delta_{10}K(t_i, a_2, y)| \leq |\Delta_{10}w(t_i, a_2)|$,
2. $|\Delta_{01}K(a_1, s_j, y)| \leq |\Delta_{01}w(a_1, s_j)|$,
3. $|\Delta_{11}K(t_i, s_j, y)| \leq |\Delta_{11}w(t_i, s_j)|$,
4. $\sup\{|K(a_1, a_2, y)| : y \in I\} \leq |w(a_1, a_2)|$.

A continuación damos un ejemplo de una función K que cumple con cada uno de los tres supuestos anteriores.

Ejemplo 3.1. Sean $p : I_a^b \rightarrow \mathbb{R}$ y $q : I_a^b \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas tales que $0 \leq p(a_1, a_2)$, $p \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ y q medible. Definimos K como

$$K : I_a^b \times I_a^b \rightarrow \mathbb{R}; \quad K(x, y) := p(x)q(y).$$

Observe que la función K posee las propiedades mencionadas en los tres supuestos mencionados, siendo

$$w(x) := \sup\{|K(a_1, a_2, y)| : y \in I_a^b\} + \sup\{|q(y)| : y \in I_a^b\} \cdot p(x).$$

Ahora definimos la función $F(u)$ del rectángulo I_a^b en $\mathbb{R}$ para cada elemento fijo $u \in BV_\varphi^R(I_a^b)$.

Definición 3.13. Dado un elemento $u \in BV_\varphi^R(I_a^b)$, definimos $F(u) : I_a^b \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(u)(t, s) := \int_{I_a^b} K(t, s, y)f(y, u(y))dy.$$

Observación 3.1. Ya que hemos asumido que $K : I_a^b \times I_a^b \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, $f : I_a^b \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $K(x, \cdot) : I_a^b \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible para cada elemento fijo $x \in I_a^b$, entonces la función $F(u)(x) := \int_{I_a^b} K(x, y)f(y, u(y))dy$ de la Definición 3.13 está bien definida.

Consideremos algunos lemas y teoremas útiles relativos a la función F .

Lema 3.2. Para cada $u \in BV_\varphi^R(I_a^b)$, tenemos que

$$\Delta_{11}\left(\frac{F(u)}{\varepsilon}\right)(t_i, s_j) = \int_{I_a^b} \Delta_{11}\left(\frac{K}{\varepsilon}\right)(t_i, s_j, y)f(y, u(y))dy.$$

Prueba. La prueba consiste en la siguiente sucesión de igualdades:

$$\begin{aligned}
& \Delta_{11} \left(\frac{F(u)}{\varepsilon} \right) (t_i, s_j) \\
&= \frac{F(u)}{\varepsilon} (t_{i-1}, s_{j-1}) + \frac{F(u)}{\varepsilon} (t_i, s_j) - \frac{F(u)}{\varepsilon} (t_{i-1}, s_j) - \frac{F(u)}{\varepsilon} (t_i, s_{j-1}) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{I_a^b} K(t_{i-1}, s_{j-1}, y) f(y, u(y)) dy + \int_{I_a^b} K(t_i, s_j, y) f(y, u(y)) dy \right. \\
&\quad \left. - \int_{I_a^b} K(t_{i-1}, s_j, y) f(y, u(y)) dy - \int_{I_a^b} K(t_i, s_{j-1}, y) f(y, u(y)) dy \right] \\
&= \int_{I_a^b} \frac{K}{\varepsilon} (t_{i-1}, s_{j-1}, y) f(y, u(y)) dy + \int_{I_a^b} \frac{K}{\varepsilon} (t_i, s_j, y) f(y, u(y)) dy \\
&\quad - \int_{I_a^b} \frac{K}{\varepsilon} (t_{i-1}, s_j, y) f(y, u(y)) dy - \int_{I_a^b} \frac{K}{\varepsilon} (t_i, s_{j-1}, y) f(y, u(y)) dy \\
&= \int_{I_a^b} \Delta_{11} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) (t_i, s_j, y) f(y, u(y)) dy.
\end{aligned}$$

□

Definición 3.14. Para cada elemento $u \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ definimos $C_u := \max_{y \in I} |f(y, u(y))|$. También definimos $|I_a^b| := (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$.

Observación 3.2. El número real C_u de la Definición 3.14 existe debido a que $y \mapsto f(y, u(y))$ es una función continua.

Lema 3.3. Si $u \in BV_\varphi^R(I_a^b)$, entonces

$$V_\varphi^R \left(\frac{F(u)}{\varepsilon} \right) \leq V_\varphi^R \left(\frac{|I_a^b| C_u w}{\varepsilon} \right).$$

Prueba. En vista de que la función φ es creciente, tenemos que

$$\varphi \left(\frac{|\Delta_{11} \left(\frac{F(u)}{\varepsilon} \right) (t_i, s_j)|}{|\Delta t_i| \cdot |\Delta s_j|} \right) \leq \varphi \left(\frac{|\Delta_{11} \left(\frac{|I_a^b| C_u w}{\varepsilon} \right) (t_i, s_j)|}{|\Delta t_i| \cdot |\Delta s_j|} \right).$$

Luego de usar la Definición 3.6, concluimos que $V_{\varphi}^R\left(\frac{F(u)}{\varepsilon}\right) \leq V_{\varphi}^R\left(\frac{|I_a^b|C_u w}{\varepsilon}\right)$.

□

De la misma forma como probamos el Lema 3.3, podemos deducir los dos lemas que siguen.

Lema 3.4. Si $u \in BV_{\varphi}^R(I_a^b)$, entonces

$$V_{\varphi,[a_1,b_1]}^R\left(\frac{F(u)}{\varepsilon}\right) \leq V_{\varphi,[a_1,b_1]}^R\left(\frac{|I_a^b|C_u w}{\varepsilon}\right).$$

Lema 3.5. Si $u \in BV_{\varphi}^R(I_a^b)$, entonces

$$V_{\varphi,[a_2,b_2]}^R\left(\frac{F(u)}{\varepsilon}\right) \leq V_{\varphi,[a_2,b_2]}^R\left(\frac{|I_a^b|C_u w}{\varepsilon}\right).$$

El teorema que sigue es consecuencia inmediata de los tres lemas anteriores.

Teorema 3.4. Si $u \in BV_{\varphi}^R(I_a^b)$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$TV_{\varphi}^R\left(\frac{F(u)}{\varepsilon}\right) \leq TV_{\varphi}^R\left(\frac{|I_a^b|C_u w}{\varepsilon}\right).$$

Lema 3.6. Si $u \in BV_{\varphi}^R(I_a^b)$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\inf\left\{\varepsilon > 0 : TV_{\varphi}^R\left(\frac{F(u)}{\varepsilon}\right) \leq 1\right\} \leq \inf\left\{\varepsilon > 0 : TV_{\varphi}^R\left(\frac{|I_a^b|C_u w}{\varepsilon}\right) \leq 1\right\}.$$

El Lema 3.6 nos permite probar el siguiente teorema, el cual juega un rol importante en este capítulo.

Teorema 3.5. Si $u \in BV_\varphi^R(I_a^b)$, entonces $F(u) \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ y

$$\|F(u)\|_\varphi^R \leq |I_a^b| \cdot \max_{y \in I} |f(y, u(y))| \cdot \|u\|_\varphi^R.$$

Teorema 3.6. Si $u, \tilde{u} \in BV_\varphi^R(I_a^b)$, entonces

$$\|F(u) - F(\tilde{u})\|_\varphi^R \leq |I_a^b| \cdot \max_{y \in I} |f(y, u(y)) - f(y, \tilde{u}(y))| \cdot \|u\|_\varphi^R.$$

Prueba. Este teorema se puede deducir de la misma manera que el Teorema 3.5, si tomamos $C_{u, \tilde{u}} := \max_{y \in I} |f(y, u(y)) - f(y, \tilde{u}(y))|$ en lugar de $C_u := \max_{y \in I} |f(y, u(y))|$.

□

El siguiente lema nos es de utilidad para probar la existencia de las soluciones de la ecuación integral (3.1).

Lema 3.7. Dado un número real $r > 0$, existe $C = C(r) > 0$ tal que $\|F(u)\|_\varphi^R \leq C$ para cada $u \in \overline{B}_r := \{u \in BV_\varphi^R(I_a^b) : \|u\|_\varphi^R \leq r\}$.

Definición 3.15. Fijemos $v \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado $u \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ definimos

$$\begin{aligned} G_\lambda(u) : I_a^b &\longrightarrow \mathbb{R}; \\ G_\lambda(u)(t, s) &:= v(t, s) + \lambda \int_{I_a^b} K(t, s, y) f(y, u(y)) dy \\ &= v(t, s) + \lambda F(u)(t, s). \end{aligned}$$

Lema 3.8. Si $u \in BV_\varphi^R(I_a^b)$, entonces $G_\lambda(u) \in BV_\varphi^R(I_a^b)$.

Lema 3.9. Sean $v \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ y $r > 0$. Si $\|v\|_\varphi^R < r$, entonces existe un número real $D = D(r) > 0$ tal que $G_\lambda(u) \in \overline{B}_r$ para cada $u \in \overline{B}_r$ y todo λ con $|\lambda| < D$.

Lema 3.10. Sea $v \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ y fijemos un número real $r > 0$ tal que $\|v\|_\varphi^R < r$. Existe un número real $E = E(r) > 0$ tal que si $|\lambda| < E$, entonces $G_\lambda(u) : \overline{B}_r \longrightarrow \overline{B}_r$ es una contracción.

Prueba. Sea D tal como en el Lema 3.9 y supongamos que los elementos $u, \tilde{u} \in \overline{B}_r$. Observe que

$$\|G_\lambda(u) - G_\lambda(\tilde{u})\|_\varphi^R = |\lambda| \|F(u) - F(\tilde{u})\|_\varphi^R.$$

Debido al Teorema 3.6 y ya que $f : I_a^b \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz con respecto a la segunda variable, existe una constante $L_r > 0$ tal que

$$\|F(u) - F(\tilde{u})\|_\varphi^R \leq |I_a^b| L_r \|w\|_\varphi^R \cdot \|u - \tilde{u}\|_\infty$$

para cada par de elementos $u, \tilde{u} \in \overline{B}_r$. Por lo tanto

$$\|G_\lambda(u) - G_\lambda(\tilde{u})\|_\varphi^R \leq |I_a^b| |\lambda| L_r \|w\|_\varphi^R \cdot \|u - \tilde{u}\|_\varphi^R$$

para todo par de elementos $u, \tilde{u} \in \overline{B}_r$. Notemos que existe un número real $E := E(r) > 0$ tal que si $|\lambda| < E$, entonces $|I_a^b| |\lambda| L_r \|w\|_\varphi^R < 1$. De aquí concluimos que si $|\lambda| < \min\{E, D\}$, entonces $G_\lambda(u) : \overline{B}_r \rightarrow \overline{B}_r$ es una contracción. □

En vista de que $G_\lambda(u) : \overline{B}_r \rightarrow \overline{B}_r$ es una función de contracción, entonces usaremos el Teorema del Punto Fijo de Banach para probar la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación integral (3.1).

Teorema 3.7. *Supongamos que $v \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ y que $\|v\|_\varphi^R < r$ para un número real dado $r > 0$. Existe un número real $E = E(r) > 0$ tal que si $|\lambda| < E$, entonces existe una solución de la ecuación integral*

$$u(x) = v(x) + \lambda \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy,$$

la cual pertenece a $BV_\varphi^R(I_a^b)$.

Prueba. Al usar el Teorema del Punto Fijo Banach con la función $G_\lambda : \overline{B}_r \rightarrow \overline{B}_r$, se obtiene una solución única de la ecuación integral anterior perteneciente a $\overline{B}_r \subset BV_\varphi^R(I_a^b)$. □

Observación 3.3. La prueba del Teorema 3.7 sólo garantiza la existencia de una solución de la ecuación integral (3.1) en el espacio $BV_\varphi^R(I_a^b)$.

Definición 3.16. Se dice que la función $f : I_a^b \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es globalmente Lipschitz en la segunda variable, si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(y, t) - f(y, \tau)| \leq L|t - \tau|$$

para todo elemento $y \in I_a^b$ y para cada par de números reales t, τ .

Teorema 3.8. Supongamos que $v \in BV_\varphi^R(I_a^b)$. Si $f : I_a^b \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es globalmente Lipschitz en la segunda variable con constante de Lipschitz $L > 0$, entonces existe un número real $D > 0$ tal que para cada número real λ con $|\lambda| < D$, existe una solución única de la ecuación integral

$$u(x) = v(x) + \lambda \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy$$

perteneciente al espacio $BV_\varphi^R(I_a^b)$.

Prueba. Escojamos un número real $r > 0$ tal que $\|v\|_\varphi^R < r$. Debido al Teorema 3.7 existe un número real $E = E(r) > 0$ tal que si $|\lambda| < E$, entonces existe una solución de la ecuación integral

$$u(x) = v(x) + \lambda \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy,$$

la cual pertenece al espacio $BV_\varphi^R(I_a^b)$. Si suponemos que hay otra solución $\tilde{u} \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ de la ecuación integral anterior, debido al Teorema 3.6 tenemos el siguiente estimado

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_\varphi^R &\leq |\lambda| \|F(u) - F(\tilde{u})\|_\varphi^R \\ &\leq |\lambda| \cdot |I_a^b| \cdot \max_{y \in I_a^b} |f(y, u(y)) - f(y, \tilde{u}(y))| \cdot \|w\|_\varphi^R \\ &\leq |\lambda| \cdot |I_a^b| \cdot L \cdot \|u - \tilde{u}\|_\infty \cdot \|w\|_\varphi^R \\ &\leq |\lambda| \cdot |I_a^b| \cdot L \cdot \|w\|_\varphi^R \cdot \|u - \tilde{u}\|_\varphi^R. \end{aligned}$$

Si elegimos un número real λ tal que

$$|\lambda| < D := D(r) := \min \left\{ E(r), \frac{1}{|I| \cdot L \cdot \|w\|_\varphi^R} \right\},$$

entonces $u(y) = \tilde{u}(y)$ para cada elemento $y \in I_a^b$.

□

3.3. Existencia de Soluciones Locales

En esta sección probamos la existencia de soluciones locales de la ecuación integral

$$u(x) = v(x) + \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy. \quad (3.2)$$

A continuación se enuncia un supuesto referido a la función $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ que aparece en el segundo miembro de la ecuación integral (3.2). Asumimos este supuesto sólo en la presente sección.

Supuesto 3.4. La función $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

1. $V_{\varphi, [a_1, b_2]}^R(v)(s) := \sup_{\Pi_1} \sum_{i=1}^m \varphi \left[\frac{|\Delta_{10} v(t_i, s)|}{|t_i - t_{i-1}|} \right] \cdot |t_i - t_{i-1}| < \infty$ para todo $s \in [a_2, b_2]$ donde $\Delta_{10} v(t_i, s) := v(t_i, s) - v(t_{i-1}, s)$,
2. $V_{\varphi, [a_2, b_2]}^R(v)(t) := \sup_{\Pi_2} \sum_{j=1}^n \varphi \left[\frac{|\Delta_{01} v(t, s_j)|}{|s_j - s_{j-1}|} \right] \cdot |s_j - s_{j-1}| < \infty$ para todo $t \in [a_1, b_1]$ donde $\Delta_{01} v(t, s_j) := v(t, s_j) - v(t, s_{j-1})$ y
3. $V_{\varphi}^R(v) := \sup_{\Pi_1, \Pi_2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi \left[\frac{|\Delta_{11} v(t_i, s_j)|}{|\Delta t_i| |\Delta s_j|} \right] \cdot |\Delta t_i| \cdot |\Delta s_j| < \infty$, donde $\Delta_{11} v(t_i, s_j) := v(t_{i-1}, s_{j-1}) + v(t_i, s_j) - v(t_{i-1}, s_j) - v(t_i, s_{j-1})$ tal que los supremos se toma sobre el conjunto de las particiones Π_1 y Π_2 de los intervalos $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$, respectivamente.

Observación 3.4. Si v satisface el Supuesto 3.4, entonces $v \in V_{\varphi}^R(J) \subseteq BV_{\varphi}^R(J)$ para cada rectángulo J contenido en el rectángulo I . En particular, si $J = I_a^b$, entonces $v \in V_{\varphi}^R(I_a^b) \subseteq BV_{\varphi}^R(I_a^b)$.

Teorema 3.9. Hay un número real $\delta > 0$ tal que si $J := [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ es un rectángulo que está contenido en I_a^b y $|J| := (d_1 - c_1) \cdot (d_2 - c_2) < \delta$, entonces existe una solución de la ecuación integral

$$u(x) = v_J(x) + \int_J K(x, y) f(y, u(y)) dy$$

la cual pertenece al espacio $BV_{\varphi}^R(J)$, donde v_J en dicha ecuación denota a la función v restringida al rectángulo J . Además, si f es globalmente Lipschitz en la segunda variable, entonces tal solución es única.

Prueba. Sea u un elemento del espacio $BV_\varphi^R(J)$. Definimos $F_J(u) : J \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$F_J(u)(t, s) := \int_J K(t, s, y) f(y, u(y)) dy \quad y$$

$G_J(u) : J \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} G_J(u)(t, s) &:= v_J(t, s) + \int_J K(t, s, y) f(y, u(y)) dy \\ &= v_J(t, s) + F_J(u)(t, s). \end{aligned}$$

Denotemos mediante el símbolo $\|v\|_\varphi^R$ a la norma de la función v en el espacio $BV_\varphi^R(I_a^b)$. Fijemos un número real $r > 0$ tal que $\|v\|_\varphi^R < r$. Definimos $\overline{B}_r(J)$ como

$$\overline{B}_r(J) := \{u \in BV_\varphi^R(J) : \|u\|_\varphi^R \leq r\}.$$

Debido al Teorema 3.5, tenemos que $F_J(u) \in BV_\varphi^R(J)$ para todo elemento $u \in BV_\varphi^R(J)$ y además, existe un número real $R(r)$ que no depende del rectángulo J , tal que

$$\|F_J(u)\|_\varphi^R \leq |J| \cdot R(r) \cdot \|u\|_\varphi^R.$$

Notemos que existe un número real $\delta_1 := \delta_1(r) > 0$ tal que si $|J| < \delta_1$, entonces

$$\|G_J(u)\|_\varphi^R \leq \|v_J\|_\varphi^R + \|F_J(u)\|_\varphi^R \leq \|v\|_\varphi^R + \|F_J(u)\|_\varphi^R < r.$$

Debido al Teorema 3.6 y en vista de haber asumido que $f : I_a^b \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente *Lipschitz* en la segunda variable, existe una constante $L(r) > 0$, que no depende del rectángulo J , tal que

$$\|G_J(u) - G_J(\tilde{u})\|_\varphi^R = \|F_J(u) - F_J(\tilde{u})\|_\varphi^R \leq |J| \cdot L(r) \cdot \|u - \tilde{u}\|_\infty$$

para todo par de elementos $u, \tilde{u} \in \overline{B}_r(J)$. De aquí tenemos que

$$\|G_J(u) - G_J(\tilde{u})\|_\varphi^R \leq |J| \cdot L(r) \cdot \|u - \tilde{u}\|_\varphi^R \quad \text{para todo par } u, \tilde{u} \in \overline{B}_r(J).$$

Observe que existe un número real $\delta_2 := \delta_2(r) > 0$ tal que si $|J| < \delta_2$, entonces $|J| \cdot L(r) \cdot \|u - \tilde{u}\|_\varphi^R < 1$. De esta manera, si $|J| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

entonces $G_J(u) : \overline{B}_r(J) \longrightarrow \overline{B}_r(J)$ es una contracción. Debido al Teorema del Punto Fijo de *Banach*, la ecuación integral

$$u(x) = v_J(x) + \int_J K(x, y) f(y, u(y)) dy$$

posee una solución única $u \in \overline{B}_r(J) \subseteq BV_\varphi^R(J)$. Si la función f es globalmente *Lipschitz* en la segunda variable, al seguir las ideas usadas en la prueba del Teorema 3.8 tal solución es única en el espacio $BV_\varphi^R(J)$.

□

3.4. Existencia de Soluciones Globales

Nuevamente consideramos la ecuación integral (3.2)

$$u(x) = v(x) + \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy,$$

pero en esta ocasión probamos la existencia de soluciones en el espacio *Banach* $BV_\varphi^R(I)$. A continuación damos las pruebas de los dos resultados que constituyen la presente sección.

Teorema 3.10. *Supongamos que $f : I_a^b \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y globalmente Lipschitz con respecto a la segunda variable con constante de Lipschitz $L > 0$. Si $v \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ y $\kappa := \kappa(I_a^b, L, w) := |I_a^b| \cdot L \cdot \|w\|_\varphi^R < 1$, entonces existe una solución de la ecuación integral*

$$u(x) = v(x) + \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy$$

perteneciente al espacio $BV_\varphi^R(I_a^b)$.

Prueba. Sea r un número real positivo y fijo tal que $\frac{\|v+F(0)\|_\varphi^R}{1-\kappa} < r$, donde F es la función dada la Definición 3.13. A continuación definimos el conjunto

$$U := U(r) := \left\{ u \in BV_\varphi^R(I_a^b) : \|u\|_\varphi^R < r \right\}$$

y a la función función $H : \overline{U} \longrightarrow BV_\varphi^R(I_a^b)$ mediante la fórmula

$$H(u)(t, s) := v(t, s) + F(u)(t, s) = v(t, s) + \int_{I_a^b} K(t, s, y) f(y, u(y)) dy.$$

Debido al Teorema 3.6, tenemos que

$$\| H(u) - H(\tilde{u}) \|_{\varphi}^R \leq |I_a^b| \cdot L \cdot \|w\|_{\varphi}^R \cdot \|u - \tilde{u}\|_{\varphi}^R$$

para cada par de elementos $u, \tilde{u} \in \overline{U}$. Observe que esta desigualdad implica que $H(\overline{U})$ está acotada. Ahora definimos la función $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ como $\phi(z) := \kappa z$, donde κ es la constante mencionada en la hipótesis del teorema.

Si suponemos que existe un elemento $u \in \overline{U}$ tal que $u = \lambda H(u)$ para algún número real $\lambda \in (0, 1]$, al usar la desigualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{\varphi}^R &= \|\lambda H(u)\|_{\varphi}^R = \lambda \|H(u)\|_{\varphi}^R \leq \|H(u)\|_{\varphi}^R \\ &\leq \|H(u) - H(0)\|_{\varphi}^R + \|H(0)\|_{\varphi}^R \\ &\leq \kappa \|u\|_{\varphi}^R + \|H(0)\|_{\varphi}^R. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$\|u\|_{\varphi}^R \leq \frac{\|H(0)\|_{\varphi}^R}{1 - \kappa} < r.$$

De esta desigualdad y el hecho que $u \in \partial U$ implica que $\|u\|_{\varphi}^R = r$, deducimos que $u \neq \lambda H(u)$ para cada $u \in \partial U$ y todo $\lambda \in (0, 1]$. Luego de usar la Alternativa de Leray-Schauder que se encuentra en los Preliminares del Capítulo 2, concluimos que existe una solución de la ecuación integral

$$u(x) = v(x) + \int_I K(x, y) f(y, u(y)) dy,$$

la cual pertenece al espacio $BV_{\varphi}^R(I_a^b)$.

□

Teorema 3.11. *Si*

1. *existe una función continua y creciente $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ la cual satisface que $|I_a^b| \cdot \|w\|_{\varphi}^R \cdot \psi(z) < z$ para cada $z > 0$ y además*
- 2.

$$|f(y, t) - f(y, \tilde{t})| < \psi(|t - \tilde{t}|)$$

para todo par $(y, t), (y, \tilde{t})$ perteneciente a $I_a^b \times \mathbb{R}$ y también

3. existe una función continua creciente $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Psi(t) > 0$ para cada $t > 0$, con la que se cumple que $|f(y, t)| \leq \Psi(|t|)$ para todo $(y, t) \in I_a^b \times \mathbb{R}$ y
4. existe un número real $r > 0$ tal que

$$\frac{r}{\|v\|_\varphi^R + |I_a^b| \cdot \|w\|_\varphi^R \cdot \Psi(r)} > 1,$$

entonces la ecuación integral (3.2) tiene una solución que pertenece al espacio $BV_\varphi^R(I_a^b)$ para cada función dada $v \in BV_\varphi^R(I_a^b)$.

Prueba. Sea r un número real tal como el que se postula en el cuarto numeral de la hipótesis. Definimos el conjunto U como

$$U := \left\{ u \in BV_\varphi^R(I_a^b) : \|u\|_\varphi^R < r \right\}$$

y a la función $H : \overline{U} \longrightarrow BV_\varphi^R(I_a^b)$ como

$$H(u)(t, s) := v(t, s) + F(u)(t, s) = v(t, s) + \int_{I_a^b} K(t, s, y) f(y, u(y)) dy.$$

Debido al Teorema 3.6, tenemos que

$$\begin{aligned} \|H(u) - H(\tilde{u})\|_\varphi^R &\leq |I_a^b| \cdot \max_{y \in I_a^b} |f(y, u(y)) - f(y, \tilde{u}(y))| \cdot \|w\|_\varphi^R \\ &\leq |I_a^b| \cdot \|w\|_\varphi^R \cdot \psi\left(\max_{y \in I_a^b} |u(y) - \tilde{u}(y)|\right) \leq |I_a^b| \cdot \|w\|_\varphi^R \cdot \psi(\|u - \tilde{u}\|_\varphi^R) \end{aligned}$$

para todo par $u, \tilde{u} \in \overline{U}$.

Si definimos $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\phi(z) := |I| \cdot \|w\|_\varphi^R \cdot \psi(z)$, tenemos que

$$\|H(u) - H(\tilde{u})\|_\varphi^R \leq \phi(\|u - \tilde{u}\|_\varphi^R)$$

para cada par de elementos $u, \tilde{u} \in \overline{U}$. De esta desigualdad podemos deducir que el conjunto $H(\overline{U})$ está acotado.

Ahora supongamos que existe un elemento $u \in BV_\varphi^R(I_a^b)$ tal que $\|u\|_\varphi^R = r$ y $u = \lambda H(u)$ para algún número real $\lambda \in (0, 1]$. Observe que podemos expresar este elemento u como

$$u(x) = \lambda \left(v(x) + \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy \right).$$

Debido al Teorema 3.5, obtenemos que

$$\begin{aligned} r = \|u\|_{\varphi}^R &\leq \|v\|_{\varphi}^R + \|F(u)\|_{\varphi}^R \leq \|v\|_{\varphi}^R + |I_a^b| \cdot \|w\|_{\varphi}^R \cdot \max_{y \in I_a^b} |f(y, u(y))| \\ &\leq \|v\|_{\varphi}^R + |I_a^b| \cdot \|w\|_{\varphi}^R \cdot \Psi\left(\|u\|_{\varphi}^R\right) = \|v\|_{\varphi}^R + |I_a^b| \cdot \|w\|_{\varphi}^R \cdot \Psi(r). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{r}{\|v\|_{\varphi}^R + |I_a^b| \cdot \|w\|_{\varphi}^R \cdot \Psi(r)} \leq 1,$$

lo cual contradice la cuarta parte de la hipótesis.

La Alternativa de *Leray-Schauder* que se encuentra en los Preliminares del Capítulo 2, implica que existe una solución de la ecuación integral

$$u(x) = v(x) + \int_{I_a^b} K(x, y) f(y, u(y)) dy$$

en el espacio $BV_{\varphi}^R(I_a^b)$.

www.bdigital.ula.ve □

Referencias Bibliográficas

- [1] T. M. Apostol; *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, S.A., segunda edición, 1979.
- [2] J. Appell, C. Chen; *How to solve Hammerstein equations*, Journal of Integral Equations and Applications, Volume 18, Number 3, Fall 2006.
- [3] W. A. Aziz; *Algunas Extensiones a $\mathbb{R}^2$ de la Noción de Funciones con φ -Variación Acotada en el Sentido de Riesz y Controlabilidad de las RNC*, Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias, Postgrado de Matemática, Tesis Doctoral, Caracas, 16 de septiembre 2009.
- [4] W. Aziz, H. Leiva, N. Merentes; *Solutions of Hammerstein equations in the Space $BV(I_a^b)$* , Preprint.*
- [5] W. Azis, H. Leiva, N. Merentes and J. L. Sánchez; *Functions of two variables with bounded φ -variation in the sense of Riesz*, Journal of Mathematics and Applications, No 32, pp 5-23 (2010).
- [6] L.A. Azocar, H. Leiva, J. Matkowski and N. Merentes; *Controllability of semilinear Volterra-Stieltjes integral equation in the space of regulated functions*, J. Control Theory Appl. 2012, 10(1) 123-127.
- [7] L. Barbanti; *Introdução a teoria do controle para equações integrais de Fredholm-Stieltjes lineares*, MAT-INE-USP, 1981.
- [8] L. Barbanti; *Densidade de conjuntos de atingibilidade em equações integrais de Volterra-Stieltjes controladas*, IME/USP, 1984.

*Este artículo aparecerá publicado en Quaestiones Mathematicae 37 (2014), 1-12.

- [9] L. Barbanti; *Controllability and approximate controllability for linear integral Volterra-Stieltjes equations*, Mathematical and Statiscal Institute, University of São Paulo, São Paulo, Brazil, 1989.
- [10] R. M. Brooks, K. Schmitt; *The Contraction Mapping Principle and Some Applications*, Electronic Journal of Differential Equations, Monograph 09, 2009, (90 pages).
- [11] D. Bugajewska; *On the superposition operator in the space of functions of bounded variation, revisited*, Mathematical and Computer Modelling 52 (2010) 791-796.
- [12] D. Bugajeswska, D. Bugajewski, and H. Hudzik; *BV_φ -solutions of nonlinear integral equations*, J. Math. Anal. Appl. 287 (2003) 265-278.
- [13] D. Bugajewska and D. O'Regan; *On nonlinear integral equations and Λ -bounded variation*, Acta Math. Hung., **107** (4) (2005), 295-306.
- [14] D. Bugajewski; *On BV -solutions of some nonlinear integral equations*, Integr. equa. oper. theory **46** (2003), 387-398.
- [15] T. A. Burton; *A fixed-point theorem of Krasnselskii*, Appl. Math. Lett. Vol. 11, No. 1, pp. 85-88 (1998).
- [16] D. N. Chalishajar, R. K. George; *Exact controllability of generalized Hammerstein type integral equations and applications*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006(2006), No. 142, pp.1-15.
- [17] J. A. Cochran; *The Analysis of Linear Integral Equations*, McGraw-Hill Series in Modern Applies Mathematics, ©1972 by Bell Telephone Laboratories, Incorporated.
- [18] C. Corduneanu; *Integral Equations and Applications*, Cambridge University Press, ©1991.
- [19] R. Courant, F. John; *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Editorial Limusa, Vol. 2, Mexico, 1979.
- [20] M. Federson and R. Bianconi; *Linear Volterra-Stieltjes integral equations in the sense of the Kurzweil-Henstock integral*, Archivum Mathematicum (BRNO), Tomus 37 (2001), 307-328.

- [21] N. Grady; *Functions of Bounded Variation*, [http: www.whitman.edu /mathematics /SeniorProjectArchive /2009 /grady.pdf](http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2009/grady.pdf) .
- [22] H. G. Heuser; *Functional Analysis*, Wiley-Interscience Publications, ©1982.
- [23] E. Hewitt, K. Stromberg; *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, ©1965.
- [24] H. Hochstadt; *Integral Equations*, John Wiley and Sons, Inc, ©1973.
- [25] C. S. Hönl; *Volterra-Stieltjes integral equations with linear constraints and discontinuous solutions*, Bulletin of the American mathematical Society. Volume **81**, Number 3, May 1975.
- [26] C. S. Hönl; *Volterra-Stieltjes Integral Equations*, North-Holland Mathematics Studies 16, North-Holland Publishing Company-1975, printed in The Netherlands.
- [27] R. P. Kanwal; *Linear Integral Equations. Theory and Technique*, Academic Press, 1971.
- [28] A. N. Kolmogorov and S.V. Fomin; *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Volume 2*, Greylock Press, Albany N.Y., 1961.
- [29] N. Merentes y S. Rivas; *El Operador de Composición en Espacios de Funciones con Algún Tipo de Variación Acotada*, Novena Escuela Venezolana de Matemáticas, Mérida 11 al 21 de septiembre de 1995.
- [30] B. L. Moiseiwitsch; *Integral Equations*, Longman Mathematical Texts, 1977.
- [31] B. G. Pachpatte; *Multidimensional Integral Equations and Inequalities*, Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science, Atlantis Press, 2011.
- [32] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov; *Handbook of Integral Equations*, Second Edition, Chapman Hall/CRC, ©2008.
- [33] Š. Schwabik, M. Tvrdý, O. Vejvoda; *Differential and Integral Equations. Boundary Value Problems and Adjoints*, D. Reidel Publishing Co., DordrechtBoston, Mass.London, 1979.

- [34] M. H. N. Skandari, H. R. Erfanian, A. V. Kamyad; *A new approach for a class of optimal control problems of Volterra integral equations*, Intelligent Control and Automation, 2011, 2, 121-125.
- [35] P.T. Vaz and S.G. Deo; *On a Volterra-Stieltjes Integral Equation*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Volume 3, Number 3, 1990, p.p. 177-191.

www.bdigital.ula.ve