



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

**CONTROLABILIDAD PARA ECUACIONES DE EVOLUCIÓN
ESTOCÁSTICAS Y APLICACIONES. ¹**

Doctorando
MSc. Miguel Angel Narváez Martínez
ULA - Venezuela
mnarvaez@ula.ve

Dirigida por el Dr. Hugo Leiva

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes
Mérida-Venezuela
hleiva@ula.ve

¹Esta tesis fue financiada bajo el proyecto CDCHTA-ULA C-1796-12-05-AA.

A Eleazar y Maria

www.bdigital.ula.ve

Agradecimiento

Agradecido de Dios por haberme guiado, siendo mi amparo y fortaleza en los momentos difíciles, dándome la oportunidad durante este episodio de mi carrera profesional, de hoy poder culminar lleno de experiencias y vivencias maravillosas.

También agradezco a mis padres Eleazar quien se adelanto en el viaje a la eternidad y a Maria mi madre, los que me regalaron la vida; a mis hermanos Pedro, Isabel, Elio, Milagros y Rosario; mis hijos Matilde y Miguel Alejandro y a Luisa mi esposa, quienes estuvieron día a día a mi lado con paciencia y consideración, a Luisa mi suegra la de la palabra oportuna e incondicional apoyo. Así mismo agradezco a mi tutor, maestro y amigo Hugo Leiva que desde el comienzo creyó en mí, a las Dras. Jahnett Uzcátegui y Stella Brassesco a quienes el Creador las dotó de una inmensa paciencia poniéndola de manifiesto en la revisión y correcciones de esta tesis, a todos aquellos amigos, vecinos y colegas Addison Ríos, Felix Aguirre, Leonel Mendoza, Glauco López, Luz Benítez y Lenis la secretaria del postgrado que me acompañaron a lo largo de todo este tiempo.

A la Dra. Yoselin Díaz médico y amiga, con una calidad humana y un profesionalismo extraordinario, agradecido eternamente por haberme ayudado a recuperar mi salud y poder llegar hasta el final.

Índice general

	Página
Resumen	1
Capítulo 1. Procesos Aleatorios	7
1. Modelo Probabilístico	7
2. Variables aleatorias	12
3. Funciones de Distribución	14
4. Procesos Estocásticos.	19
5. Esperanza de una variable aleatoria.	24
6. Integral de Bochner.	30
7. Esperanza Condicional.	34
Capítulo 2. Integración Estocástica. Integral de Wiener	42
1. Introducción	42
2. Variables aleatorias Gaussianas con valores en un espacio de Banach	50
3. Movimiento Browniano en Espacios de Hilbert	55
4. La Integral Estocástica	61
5. Integral Estocástica Para Procesos De Wiener Cilíndricos	66
6. Propiedades de la Integral Estocástica	69
Capítulo 3. Ecuación Diferencial Estocástica	70
1. Introducción	70
2. Ecuación Lineal con Ruido Aditivo	71
3. Ecuación Lineal con Ruido Multiplicativo	79
Capítulo 4. Tópicos de Semigrupos y Teoría de Control	82
1. Semigrupos	82
2. Teoría de Control	98
Capítulo 5. Perturbación no acotada	109
1. Introducción	109
2. Notación y preliminares	110
3. Principio de Perturbación	112
4. Controlabilidad del Sistema Lineal Perturbado	133
5. Aplicación	135

Capítulo 6. Controlabilidad Exacta de Sistemas de Evolución Semilineal Estocástica	140
1. Preliminaries	140
2. Controlabilidad del Sistema Lineal Estocástico	143
3. Controlabilidad del Sistema Estocástico no Lineal	146
4. Aplicación a la Ecuación de Ondas Estocástica Amortiguada	151
Capítulo 7. Ecuaciones en Diferencias	155
1. Controlabilidad Exacta del Sistema Lineal	158
2. Controlabilidad del Sistema Estocástico no lineal	164
3. Aplicación	170
Conclusiones	178
Apéndice A. Resultados necesarios del análisis funcional y real	180
1. Aplicación Uniformemente Continua	180
2. Principio de Extensión por Continuidad	180
3. Principio de Acotamiento Uniforme	180
4. Teorema de Convergencia Dominada	181
5. Tonelli	181
6. Fubini	182
7. Teorema de Hille-Philips	182
8. Operadores Nucleares y Operadores de Hilbert-Schmidt	182
9. Funciones Homeomorfas	183
10. Teorema de Hahn-Banach	184
Apéndice B. Desigualdades	186
11. Desigualdades de Gronwall Discreta y Continua	186
Bibliografía	187

Resumen

La teoría del control es hoy en día una de las áreas de investigación que surgió de la revolución industrial y aplicaciones tecnológicas. Es una disciplina donde la unión de ideas y métodos matemáticos originó un nuevo campo de las matemáticas.

La teoría de control es hoy en día un punto de encuentro entre ingenieros y otros científicos con matemáticos.

La palabra control tiene doble significado. Primero, controlar un sistema significa probar o chequear que su comportamiento sea satisfactorio. La palabra controlar también significa actuar, poner cosas a fin de garantizar que el sistema se comporte de la forma deseada.

Como en otros campos de actividades humanas, la disciplina del control existió mucho antes que la palabra control fuese dada. En efecto, en el mundo de las especies vivientes, los organismos están dotados con mecanismos sofisticados que regulan las diversas tareas que ellos desarrollan. Esto garantiza el crecimiento, desarrollo y reproducción de las especies.

Las tres ideas claves en la teoría de control son: la noción de feedback, la necesidad de fluctuación y optimización.

Por supuesto otros conceptos importantes han surgidos, uno de ellos es la cibernética, propuesta por el físico francés Ampere en el siglo 19 para designar la ciencia no existente de procesos de control. Fue rápidamente olvidada hasta 1948, cuando N. Wiener escogió la palabra "Cybernetic" para titular su libro.

Wiener definió Cybernetic como "la ciencia del control y comunicación en animales y máquinas".

De ésta forma se estableció la conexión entre teoría de control y fisiología y anticipó que, en un futuro cercano, máquinas obedecerán e imitarán a seres humanos.

Ejemplos del rol de la teoría de control jugado en la historia la encontramos en el sistema de regulación de válvulas usadas por los romanos a fin de mantener los niveles de agua constante. En la antigua mesopotamia el control del sistema de irrigación fue muy conocido.

Ejemplos modernos en teoría control podemos citar el trabajo de Ch. Huygens y R. Hooke en el siglo 17 sobre la oscilación del péndulo.

J. Watt adaptó este principio cuando inventó la máquina de vapor que constituye un paso importante en la revolución industrial.

El astrónomo británico G. Airy fue el primer científico que analizó matemáticamente el sistema de regulación inventado por Watt. Pero la primera forma de descripción matemática fue dada en el trabajo de J.C. Maxwell en 1868, donde el comportamiento errático encontrado en la máquina de vapor fue descrito y algunos mecanismos de control fueron propuestos.

Aplicaciones simples de teoría de control aparecen en los tanques de nuestros baños, sistemas de calefacción-ventilación, y aire acondicionados en grandes edificios. La lista de aplicaciones en la industria es infinita.

Las ideas centrales de la teoría de control ganó importancia y la ingeniería de control surgió como disciplina distinguible.

En los años treinta importantes progresos fueron hechos en control automático. El número de aplicaciones aumentó cubriendo amplificadores en sistemas de teléfonos, sistemas distribuidos en plantas eléctricas, estabilización de aeroplanos, mecanismos eléctricos en la producción de papel, química, petróleo, industria del acero, etc.

Al final de la década de los treinta dos métodos diferentes emergen: un primer método se basa en el uso de ecuaciones diferenciales y el segundo de origen frecuencial, basado en el análisis de amplitudes y fases de “entrada” y “salida”.

En ese tiempo, muchas instituciones tomaron conciencia de la importancia del control automático. Esto sucedió con la Sociedad Americana de Ingeniería Mecánica (ASME) y el Instituto de Ingeniería Eléctrica (IEE). Durante la segunda guerra mundial y en los siguientes años, científicos e ingenieros aportaron experiencias en el mecanismo de control de aviones, proyectiles y diseños de baterías antiaéreas.

Después de 1960 los métodos e ideas expuesta anteriormente pasaron a ser consideradas como parte de la teoría de control. La guerra mostró que los modelos considerados anteriormente hasta ese momento no describían la complejidad del mundo real. En efecto, en ese tiempo era claro que los sistemas verdaderos son con mas frecuencia no lineales y no determinísticos, ya que son afectados por “ruidos”. Esto genero nuevos efectos en el campo.

Las contribuciones de los científicos norteamericanos R. Bellman en el marco de programación dinámica, R. Kalman en técnicas de filtración y aproximación algebraica a sistemas lineales y el ruso L. Pontryagin con el principio máximo para problemas de control optimal no lineal, establecieron los fundamentos de la teoría moderna del control.

R. Kalman uno de los grandes protagonistas de la teoría moderna de control nació en Budapest, Hungría, en 1930. Es ingeniero eléctrico y matemático educado en los estados unidos. Realizó el grado de bachiller en 1953 y su grado de maestría en 1954 ambos en el Instituto de Tecnología de Massachusetts y completó su doctorado en 1957 en la Universidad de Columbia Nueva York. Actualmente está retirado. En 1974 dijo que, en el futuro los principales avances en control y optimización de sistemas surgirán mas de progresos matemáticos que del desarrollo tecnológico.

Esta es una pequeña historia sobre la teoría de control. Una bibliografía excelente que explica detalladamente la teoría de control puede consultarse en [18].

Este trabajo tiene como objetivo principal el estudio de la controlabilidad exacta de tres ecuaciones de evolución estocásticas en espacios de Hilbert separables. Dicho estudio se realizó de forma que sea autocontenido para aquellos investigadores que no tengan un conocimiento básico en teoría de probabilidades y procesos aleatorios como también en integración estocástica.

El trabajo está organizado de la siguiente forma: la introducción es el capítulo 1. El Capítulo 1 tratamos sobre el concepto de variable aleatoria y su función de distribución en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Definimos la esperanza matemática $\mathbb{E}$ y el concepto de esperanza condicional $E[x|\mathcal{F}]$. Luego el concepto importante de procesos estocástico en el que nuestro sistema de evolución será modelado.

En el Capítulo 2 debido a que los sistemas de evolución son modelados a través de ecuaciones diferenciales y a la ausencia de una teoría de diferenciación por el carácter aleatorio de nuestro sistema, es necesario introducir el concepto de integración estocástica y lo que es un movimiento Browniano hasta llegar a sus propiedades más importantes que debemos usar.

En el Capítulo 3 presentamos la definición de una ecuación diferencial estocástica lineal con ruido aditivo y multiplicativo, es decir, ya sea que $\text{tr}(Q)$ donde Q es el operador de covarianza definida de Z en Z , sea finita o infinita. Aquí damos un ejemplo de como podemos resolver una ecuación diferencial mediante la formula de Itô.

En el Capítulo 4 damos el concepto de semigrupo y generador infinitesimal, ejemplos y sus propiedades pasando por el teorema de Hille Yosida sobre la manera de caracterizar el semigrupo si un generador infinitesimal es dado. Otro punto importante señalado aquí es el concepto de controlabilidad exacta de un sistema y las propiedades que determinan cuando un sistema es exactamente controlable.

En el Capítulo 5, basándonos en un trabajo de Hugo Leiva [31], en el cual se prueba que bajo la condición de controlabilidad exacta de un sistema lineal con una perturbación dada o conocida, la controlabilidad exacta del sistema se mantiene si una nueva perturbación no muy lejos de la perturbación inicial es impuesta al sistema. De igual forma nosotros haremos una generalización del problema al caso en el que la variable estado pertenece en el conjunto de procesos aleatorios. Específicamente queremos estudiar la controlabilidad exacta del sistema de evolución

$$dz = \{(A + P)z + Bu(t, \omega)\}dt + \Sigma(t)dw(t), \quad t > 0. \quad (0.1)$$

donde Z, U son espacios de Banach, $t \rightarrow B(t) : \mathbb{R} \rightarrow L(U, Z)$ es continua en la topología fuerte de operadores de $L(U, Z)$, A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{T(t; A)\}_{t \geq 0}$ en Z , el control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$, el conjunto de todos los controles que son procesos aleatorios sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, el operador Σ definido en $L_2^0 = L_2(Q^{1/2}E, Z)$ donde Q es el operador de covarianza definido de Z en Z . Denotaremos por $\mathcal{D}(S)$ el dominio de un operador S en un espacio de Banach X , $L(X)$ el espacio de

operadores lineales acotados definidos sobre X . Con esta notación en mente, consideraremos la siguiente clase de operadores no acotados: Si A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{T(t; A)\}_{t \geq 0}$, denotamos por $\mathcal{P}(A)$ la clase operadores lineales cerrados P que satisface las condiciones

- I) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(P)$,
- II) para cada $t > 0$, existe $h(t) \geq 0$ tal que

$$\|PT(t, A)z\| \leq h(t)\|z\|, \text{ para todo } z \in \mathcal{D}(A),$$

- III) la integral $\int_0^1 h(t)dt$ existe.

Si suponemos que

$$dz = \{(A + P_0)z + Bu(t, \omega)\}dt + \Sigma(t)dw(t), \quad t > 0,$$

es exactamente controlable para $P_0 \in \mathcal{P}(A)$ dado, es exactamente controlable entonces la ecuación (0.1) también es exactamente controlable.

En el Capítulo 6, basándonos en el trabajo [29] y [33], en el cual se prueba que si un sistema de evolución lineal es exactamente controlable, entonces el sistema de evolución no lineal sigue siendo exactamente controlable siempre y cuando el término no lineal mantenga condiciones Lipschitz. Nuevamente aquí generalizamos al caso que la variable estado y el control pertenezcan al conjunto de procesos aleatorios $L_2^{\mathcal{F}}([0, T], Z)$ y $L_2^{\mathcal{F}}([0, T], U)$ respectivamente. En efecto, estudiaremos la controlabilidad exacta de la ecuación de evolución estocástica semilineal

$$\begin{aligned} dz(t) = & \{Az(t) + Bu(t) + f(t, z(t), u(t))\}dt \\ & + \{\Sigma(t) + \sigma(t, z(t), u(t))\}dw(t), \end{aligned} \quad (0.2)$$

donde A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, el operador $B \in L(U, Z)$, u es el control, $W = \{w(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso de Wiener con valores E , $\Sigma \in L_2^0$, f y σ satisfacen una condición tipo Lipschitz tales que

- $f : [0, T] \times Z \times U \rightarrow Z$, $(t, z, u) \rightarrow f(t, z, u)$ es continua en t, z y U ,
- $\sigma : [0, T] \times Z \times U \rightarrow L_2^0$, $(t, z, u) \rightarrow \sigma(t, z, u)$ es continua en t, z y U .
- existe una constante $k > 0$ tal que para todo $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} & \|f(t, z, u_1) - f(t, y, u_2)\|_Z^2 + \|\sigma(t, z, u_1) - \sigma(t, y, u_2)\|_{L_2^0}^2 \\ & \leq k\{\|z(t) - y(t)\|_X^2 + \|u_1(t) - u_2(t)\|_U^2\} \\ & \text{para todo } t \in [0, T], \quad z, y \in Z, \quad u \in U, \end{aligned}$$

-

$$\|f(t, x, u)\|_X^2 + \|\sigma(t, x, u)\|_{L_2^0}^2 \leq k,$$

para todo $t \in [0, T]$, $x, y \in Z$, $u \in U$.

Bajo estas condiciones, y suponiendo que la parte lineal

$$dz(t) = Az(t) + Bu(t)dt + \Sigma(t)dw(t),$$

es exactamente controlable, entonces la ecuación (7.15) también es exactamente controlable.

Más aun una fórmula para el control que conduce el estado inicial z_0 a un estado final z_1 en un tiempo dado T es hallada.

Debemos indicar que la forma de “aleatorizar” al sistema es mediante el movimiento Browniano. Es la técnica más usual ya que proviene de necesidades de la vida real. Nosotros dedicamos un aparte al movimiento Browniano.

Cabe destacar que usaremos parte de los resultados y la notación de los trabajos de Subalakshmi, Balachandran y Park en [47] donde estudian la controlabilidad de sistemas funcionales integrodiferenciales semilineales estocásticos, y del trabajo de Mahmudov. N en [40] donde estudia la controlabilidad aproximada de ecuaciones de evolución semilineales determinística y estocástica en espacios abstractos.

Para sistemas lineales finito dimensionales, el concepto de controlabilidad fue introducida por R.E. Kalman [23]. Lee-Markus [36] estudia e investiga la teoría de control con énfasis en sistemas diferenciales no lineales. Más tarde la noción fue extendida a sistemas infinito dimensionales, véase por ejemplo Russell [45] que trata con la teoría de control de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, sin embargo, la teoría no está completa pues existen muchos problemas por resolver y formular, una referencia es R.F.Curtain y H.J.Zwart [8]. Para ecuaciones de evolución estocásticos la teoría de controlabilidad es aún más reciente y la formulación es más cuestionable; al menos tres conceptos de controlabilidad se mencionan: controlabilidad exacta, controlabilidad aproximada y S -controlabilidad. El concepto de S -controlabilidad fue estudiada por Bashirov y Mahmudov [1]. En referencia a espacios de Hilbert infinito dimensionales estos tres tipos de controlabilidad se generalizan, ver por ejemplo Nazin I. Mahmudov [39] en el que se estudia la controlabilidad exacta de sistemas de evolución lineales mediante la relación existente entre el operador de controlabilidad determinístico y el operador de controlabilidad estocástico.

En el Capítulo 7, veremos la controlabilidad exacta de una ecuación de evolución no lineal en diferencias basada en un trabajo de Jahnett Uzcategui y Hugo Leiva en [30]. En ese trabajo la hipótesis fundamental es la controlabilidad del sistema de evolución lineal, y que bajo ciertas condiciones Lipschitz sobre el término no lineal, el sistema de evolución no lineal se mantenga exactamente controlable. Aquí nosotros generalizamos lo realizado en [30] a sistemas de evolución que se representan mediante procesos aleatorios manteniendo el mismo esquema acerca de la hipótesis del problema, pero ahora la variables estado y el control pertenecen al conjunto de procesos aleatorios tomando valores en un espacio de Hilbert Z y U , respectivamente. En efecto, consideraremos la siguiente ecuación de evolución definida en $[0, n_0]$, donde n_0 es número natural fijo

$$\begin{aligned} z(n+1, \omega) = & A(n)z(n, \omega) + B(n)u(n, \omega) + f(z(n, \omega), u(n, \omega)) \\ & + \{\Sigma(n, \omega) + \sigma(z(n, \omega), u(n, \omega))\}(w(n) - w(n-1)) \end{aligned} \quad (0.3)$$

donde Z y U espacios de Hilbert separables, $A(n)$ es un operador lineal acotado definido sobre Z con valores en Z y $B(n)$ un operador lineal acotado definido sobre U con valores

en Z , para todo $n \in \mathbb{N}$. $W = \{w(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ el movimiento Browniano o proceso de Wiener con valores en un espacio de Hilbert separable. El proceso de control $u = \{u(n, \omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un proceso aleatorio $\mathcal{F}_n$ -adaptados U -valuado para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathcal{F}_n$ es la sigma álgebra generada por $\{w(s) : 0 \leq s \leq n\}$ para n dado. Sea E un espacio de Hilbert separable. Para $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma(n, \omega)$ es un proceso elemental $L(E, Z)$ -valuado, el término no lineal

$$f : \mathbb{N} \times Z \times U \rightarrow Z,$$

es una función continua en Z y U . La función

$$\sigma : \mathbb{N} \times Z \times U \rightarrow L(E, Z)$$

es un proceso elemental $L(E, Z)$ -valuada que satisface

$$\mathbf{E} \int_0^n \|\sigma(s)\|_{L_2^0}^2 ds < +\infty,$$

donde $n \in [0, n_0]$ $L_2^0 = L_2(Q^{1/2}E, Z)$ es el espacio de los operadores de Hilbert-Schmidt.

Existe $L > 0$ tal que ambos términos satisfacen:

$$\begin{aligned} & \|f(n, z_1, u_1) - f(n, z_2, u_2)\|_Z^2 + \|\sigma(n, z_1, u_1) - \sigma(n, z_2, u_2)\|_{L_2^0}^2 \\ & \leq L \{ \|z_1 - z_2\|_Z^2 + \|u_1 - u_2\|_U^2 \}, \end{aligned} \quad (0.4)$$

para todo $z_1, z_2 \in Z$, $u_1, u_2 \in U$, $\omega \in \Omega$.

Si nuestra hipótesis es que el sistema de evolución lineal

$$z(n+1, \omega) = A(n)z(n, \omega) + B(n)u(n, \omega) + \Sigma(n, \omega)(w(n) - w(n-1)),$$

es exactamente controlable, entonces la ecuación (0.3) también es controlable, más aún una fórmula explícita para el control que conduce un estado inicial z_0 a un estado final z_1 en un tiempo dado n_0 es encontrada.

Finalmente los Apéndices A y B contienen las definiciones y resultados necesarios para respaldar Capítulos previos.

Capítulo 1

Procesos Aleatorios

En este capítulo presentamos conceptos y teoremas básicos de teoría de probabilidad que necesitamos como respaldo para la comprensión de los capítulos siguientes. Es un material dirigido básicamente a aquellos interesados que no tienen conocimiento básico en teoría de probabilidad y no se requiera de la consulta de otro texto. Las referencias usadas para la redacción del Capítulo 1 son principalmente los libros [13], [24] y [46].

1. Modelo Probabilístico

El ejemplo del lanzamiento de una moneda es el clásico experimento que con frecuencia se utiliza para demostrar la presencia del carácter aleatorio que podemos notar en la naturaleza o en las múltiples actividades que el hombre realiza cotidianamente como el juego de azar.

Lancemos una moneda n veces y registremos el resultado como un conjunto ordenado $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, con $a_i = 1$ para cara y $a_i = 0$ para sello. El espacio muestral consiste de todos los resultados posibles al lanzar la moneda n veces. Denotemos este conjunto por Ω , es decir

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i = 0, 1, n = 1, 2, \dots\}.$$

Si tomamos en cuenta que el número de unos que son alcanzados lo denotamos por $\sum a_i$, entonces cada ω dado de esta forma tiene probabilidad

$$P(\omega) = p^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i}, \quad p + q = 1, \quad 0 \leq p, q \leq 1.$$

Observemos que

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

El espacio muestral Ω y la colección de todos los subconjuntos de Ω denotada por $\mathcal{A}$ junto con la definición de $P(\omega)$ define un modelo probabilístico y lo denotamos por $(\Omega, \mathcal{A})$.

El modelo equivalente al precedente es el paseo aleatorio de una partícula que comienza en el origen y al cabo de una unidad de tiempo se encuentra un paso hacia arriba o un

paso hacia abajo. Luego de n pasos, la partícula se ha movido a lo sumo n unidades hacia arriba o hacia abajo. Cada trayectoria tiene la forma $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, donde $a_i = +1$ o $a_i = -1$.

Regresando al modelo probabilístico inicial, consideremos el problema de construir un modelo que consiste de un número infinito de lanzamientos independientes con probabilidad p de caer cara y q si es sello, $p + q = 1$ y $0 \leq p, q \leq 1$. Es natural tomar

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i = 0, 1, n = 1, 2, \dots\}.$$

Este conjunto Ω , es el conjunto de todos los posibles resultados y lo llamamos “Espacio Muestral”

Es bien conocido que si $a \in [0, 1)$ entonces

$$a = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots$$

tiene un desarrollo binario único que contiene un número infinito de ceros. Entonces existe una correspondencia uno-uno entre los puntos ω de Ω y los puntos $a \in [0, 1)$ por lo que Ω tiene cardinal el continuo. En consecuencia, si queremos construir un modelo probabilístico para describir experimentos como el de infinitos lanzamientos de una moneda, debemos considerar espacios Ω más complicados. Si $\Omega = [0, 1)$, el problema consiste en escoger un punto de forma aleatoria en este conjunto. Todos los resultados son igualmente probables por razones de simetría. Como $[0, 1)$ es no-numerable, y si suponemos que $P([0, 1)) = 1$, entonces $P(\omega) = 0$. Esta asignación no sirve. El hecho es que no estamos interesados en la probabilidad de un ω , sino en la probabilidad de un subconjunto $A \in \mathcal{A}$ llamado evento.

En probabilidad elemental, usamos $P(\omega)$ para conocer $P(A)$,

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

En el presente caso, con $P(\omega) = 0$, $\omega \in [0, 1)$ no podemos definir, por ejemplo, la probabilidad que un punto escogido en forma aleatoria en $[0, 1)$ se encuentre en el conjunto $[0, 1/2)$. De hecho esta probabilidad es $1/2$. Esto sugiere que para construir un modelo probabilístico para espacios no numerables debemos asignar probabilidades no a resultados individuales sino a subconjuntos de Ω . Es por ello que procederemos a definir un modelo probabilístico en sentido general.

Definición 1.1. Sea Ω un conjunto. Sea $\mathcal{A}$ la colección de subconjuntos de Ω . $\mathcal{A}$ se llama álgebra si

- (a) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (b) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$ y $A \cap B \in \mathcal{A}$.
- (c) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

Definición 1.2. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de subconjuntos de Ω . Una función de conjuntos $P = P(A)$, $A \in \mathcal{A}$ con valores en $[0, +\infty]$ se llama medida finitamente aditiva sobre $\mathcal{A}$ si

$$P(A + B) = P(A) + P(B),$$

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

para todo A, B conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$.

Una medida finitamente aditiva P con $P(\Omega) < +\infty$ se dice finita ó medida finita. Cuando $P(\Omega) = 1$ se llama medida de probabilidad finitamente aditiva ó probabilidad finitamente aditiva.

Definición 1.3. Una medida finitamente aditiva P definida sobre un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω , es aditiva numerable (σ -aditiva) si para todo $A_1, A_2, \dots$, conjuntos disjuntos dos a dos elementos de $\mathcal{A}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \quad (1.1)$$

Recordemos que una medida finitamente aditiva se dice σ -finita si se cumple

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \quad \Omega_n \in \mathcal{A}, \text{ y } P(\Omega_n) < +\infty. \quad (1.2)$$

Si una medida σ -finita P sobre $\mathcal{A}$ satisface $P(\Omega) = 1$, se llama medida de probabilidad y satisface

- (a) $P(\emptyset) = 0$.
- (b) Si A y $B \in \mathcal{A}$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (c) Sean $A, B \in \mathcal{A}$ y $B \subset A$ entonces $P(B) \leq P(A)$.
- (d) Si $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Definición 1.4. Un sistema $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω es una σ -álgebra (sigma álgebra) si es un álgebra y satisface la siguiente condición adicional, si $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \text{ y } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Ejemplo 1. Dado un conjunto Ω arbitrario, el conjunto $\mathcal{F}^*$ formado por todos los subconjuntos de Ω denotado por $\{A : A \subset \Omega\}$ es una σ -álgebra. El conjunto $\mathcal{F}_*$ formado por el conjunto vacío ϕ y el conjunto Ω forma también una σ -álgebra. Ambos conjuntos, $\mathcal{F}^*$ y $\mathcal{F}_*$ por supuesto son álgebras, $\mathcal{F}^*$ es una σ -álgebra muy grande, mientras $\mathcal{F}_*$ es muy pequeña.

El siguiente Lema es importante ya que establece el principio de existencia de la menor álgebra y la menor σ -álgebra que contiene una colección de conjuntos.

Lema 1.5. Ver Shirayev [46].

Sea $\mathcal{E}$ una colección de subconjuntos de Ω . Entonces existe la menor álgebra $\alpha(\mathcal{E})$ y la menor σ -álgebra $\sigma(\mathcal{E})$ que contiene todos los conjuntos que están en $\mathcal{E}$.

DEMOSTRACIÓN. La clase $\mathcal{F}^*$ de todos los subconjuntos de Ω es una σ -álgebra. Por lo tanto existe al menos una σ -álgebra que contiene a $\mathcal{E}$. Definamos $\sigma(\mathcal{E})$ como todos los subconjuntos que pertenecen a una σ -álgebra y contienen a $\mathcal{E}$. Este conjunto así definido es σ -álgebra y en efecto es la más pequeña. $\square$

$\alpha(\mathcal{E})$ (o $\sigma(\mathcal{E})$) frecuentemente se refieren como la menor álgebra (σ -álgebra) generada por $\mathcal{E}$.

Ejemplo 2. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$, que son uniones finitas de intervalos disjuntos de la forma $(a, b]$:

$$A \in \mathcal{A} \text{ si } A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i], \quad n < +\infty.$$

La colección $\mathcal{A}$ junto con el conjunto vacío es un álgebra, pero no es σ -álgebra, ya que, $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n}] \in \mathcal{A}$ pero $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1) \notin \mathcal{A}$. Denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la menor σ -álgebra que contiene a $\mathcal{A}$ y la llamaremos σ -álgebra de Borel.

Ahora podemos formular el sistema axiomático de Kolmogorov que forma la base del concepto de espacio de probabilidad.

Definición 1.6. Una terna ordenada $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde

- (a) Ω , es un conjunto de posibles resultados, llamado espacio muestral,
- (b) $\mathcal{F}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω ,
- (c) P es una probabilidad sobre $\mathcal{F}$,

se llama modelo probabilístico o espacio de probabilidad. Ω es el espacio muestral o espacio de eventos elementales, un conjunto $A \in \mathcal{F}$ se llama evento, y $P(A)$ es la probabilidad de un evento A .

Estos eventos se llaman conjuntos $\mathcal{F}$ -medibles y usaremos la siguiente interpretación

$$P(A) = \text{"la probabilidad que el evento } A \text{ ocurre"}.$$

En particular, si $P(A) = 1$ se dice que " A ocurre con probabilidad 1, ó casi seguramente (a.s.)".

Sea $\tilde{\mathcal{F}}^P$ la colección de todos los subconjuntos A de Ω para el que existen conjuntos B_1 y B_2 de $\mathcal{F}$ tal que $B_1 \subseteq A \subseteq B_2$ y $P(B_2 \setminus B_1) = 0$. La medida de probabilidad puede ser definida para conjuntos $A \in \tilde{\mathcal{F}}^P$ de forma natural por $P(A) = P(B_1)$. El espacio de probabilidad resultante es la completación $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, P)$ con respecto a P .

Definición 1.7. Una medida de probabilidad tal que $\tilde{\mathcal{F}}^P = \mathcal{F}$ se llama completa, y el correspondiente espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad completa.

Ejemplos de espacios de medibles $(\Omega, \mathcal{F})$ importantes en teoría de probabilidad son los siguientes:

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

Ejemplo 3. (El espacio medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$).

Sea $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ y

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

para todo a y b , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Sea $\mathcal{A}$ la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ del Ejemplo (2). $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la menor σ -álgebra $\sigma(\mathcal{A})$ que contiene a $\mathcal{A}$ junto a $\mathbb{R}$ se llama espacio medida. Esta σ -álgebra juega un rol importante en análisis, se llama la σ -álgebra de Borel y los elementos $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se llaman conjuntos de Borel.

Ejemplo 4. (El espacio medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$).

Sea $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R}$ el producto cartesiano de $\mathbb{R}$, es decir, el conjunto ordenado de n -uplas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde $-\infty < x_k < +\infty$, $k = 1, \dots, n$. El conjunto

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n, \quad (1.3)$$

donde $I_k = (a_k, b_k]$, es decir, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : x_k \in I_k, k = 1, \dots, n\}$, se llama rectángulo, e I_k se llama lado del rectángulo. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los rectángulos I . La σ -álgebra mas pequeña, $\sigma(\mathcal{P})$, generada por $\mathcal{P}$ es la σ -álgebra de Borel de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y es denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Es posible llegar a esta σ -álgebra de otra forma. En lugar de rectángulos de la forma (1.3), consideremos rectángulos $B = B_1 \times \cdots \times B_n$ donde cada B_k es un subconjunto de Borel de $\mathbb{R}$ el cual aparece en el k -ésimo lugar en el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R}$. La σ -álgebra que contiene todos los rectángulos con lados de Borel es denotado por

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

y es llamado producto directo de las σ -álgebras $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y en efecto

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

En otras palabras la σ -álgebra generada por los rectángulos $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ y la clase de rectángulos $B = B_1 \times \cdots \times B_n$ con lados de Borel es la misma. El conjunto $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ junto a $\mathbb{R}^n$ es un espacio de medida.

Ejemplo 5. (El espacio medida $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$).

Sea T un conjunto arbitrario. El espacio $\mathbb{R}^T$ es la colección de funciones reales $X = \{x(t)\}_{t \in T}$ definido para $t \in T$. En general estamos interesados en el caso cuando T es un subconjunto no-numerable de la recta $\mathbb{R}$. Por simplicidad y definición supondremos que $T = [0, +\infty)$, pero puede ser un intervalo de la forma $[a, b]$.

Podemos considerar tres tipos de conjuntos, llamados conjuntos cilíndricos, para este espacio de medida

$$\mathcal{P}_{t_1, \dots, t_n}(I_1 \times \cdots \times I_n) = \{X : x(t_1) \in I_1, \dots, x(t_n) \in I_n\}, \quad (1.4)$$

$$\mathcal{P}_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \{X : x(t_1) \in B_1, \dots, x(t_n) \in B_n\}, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{P}_{t_1, \dots, t_n}(B^n) = \{X : (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in B^n\}, \quad (1.6)$$

donde I_k es un conjunto de la forma $(a_k, b_k]$, B_k es un conjunto de Borel sobre la recta, y B^n es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}^n$.

El conjunto $\mathcal{P}_{t_1, \dots, t_n}(I_1 \times \dots \times I_n)$ es precisamente el conjunto de funciones que, en los tiempos $t_1, t_2, \dots, t_n$ "pasa a través de las ventanas" $I_1, I_2, \dots, I_n$ y en otros tiempos tienen valores arbitrarios.

Sean $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, $\mathcal{B}_1(\mathbb{R}^T)$ y $\mathcal{B}_2(\mathbb{R}^T)$ las mas pequeñas σ -álgebras correspondientes a los conjuntos cilíndricos (1.4), (1.5) y (1.6), entonces

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \subseteq \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^T) \subseteq \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^T). \quad (1.7)$$

Como en efecto ocurre, por el Teorema 3 página 146 del libro [46], $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^T) = \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^T)$.

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y el espacio de medida $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$. En la sección (4) presentamos funciones que dependen tanto de $t \in T$ como de $\omega \in \Omega$ con valores en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Estas funciones que representaremos de la forma $X = \{x(\omega, t)\}_{t \in T}$ se llaman procesos aleatorios, muy importantes en teoría de probabilidad, por lo que el espacio de medida $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ juega un rol esencial como un clásico espacio de medida en el desarrollo posterior de esta tesis.

2. Variables aleatorias

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la recta con el sistema de conjuntos de Borel.

Definición 1.8. Una función real $\xi = \xi(\omega)$ definida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es una función $\mathcal{F}$ -medible, o variable aleatoria, si

$$\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad (1.8)$$

para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; en forma equivalente, si la imagen inversa

$$\xi^{-1}(B) \equiv \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$$

es un conjunto medible en Ω .

Ejemplo 6. El ejemplo mas simple de variable aleatoria es la función indicadora $I_A(\omega)$ donde A es un conjunto arbitrario $\mathcal{F}$ -medible.

Ejemplo 7. Una variable aleatoria que tiene la representación

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega),$$

donde $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega$, $A_i \in \mathcal{F}$, $x_i \in \mathbb{R}$ se llama discreta. Si la union es finita, la variable aleatoria se llama simple.

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

Una variable aleatoria es una propiedad numérica de un experimento, con un valor que depende del “chance”. El criterio de medibilidad (1.8) es fundamental, por la siguiente razón, si una medida de probabilidad P esta definida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, tiene sentido hablar de la probabilidad del evento $\{\xi(\omega) \in B\}$ de que el valor de la variable aleatoria pertenezca al conjunto de Borel B .

Ya que $P(\cdot)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}$, la probabilidad del conjunto (1.8) es definida y se escribe como:

$$P\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \text{ ó } P\{\xi \in B\},$$

para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Teorema 1.9. Ver Kai Lai Chung, [12].

Sea ξ una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La variable aleatoria ξ induce un espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ por medio de la siguiente correspondencia:

$$\mu(B) = P\{\omega : \xi(\omega) \in B\} = P\{\xi \in B\},$$

para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2.1. Elementos aleatorios. Además de las variables aleatorias, la teoría de probabilidades involucra una clase mas general de objetos aleatorios. Por ejemplo, puntos aleatorios, vectores, funciones, procesos, cuerpos, conjuntos, medidas, etc. Es deseable entonces tener un concepto de objeto aleatorio de una clase mas general.

Definición 1.10. Sean $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(E, \mathcal{E})$ espacios medibles. Una función medible $X = X(\omega)$, definida sobre Ω que tome valores en E , es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ -medible o es una variable aleatoria si

$$\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \quad (1.9)$$

para todo $B \in \mathcal{E}$.

Un elemento aleatorio con valores en $\mathcal{E}$ algunas veces se llama variable aleatoria $\mathcal{E}$ -valuada.

Ejemplo 8. Si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, un elemento aleatorio $X(\omega)$ es un punto aleatorio en $\mathbb{R}^n$. Si denotamos por π_k la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre la k -ésimo coordenada, $X(\omega)$ puede representarse de la forma

$$X(\omega) = (x_1(\omega), \dots, x_n(\omega)),$$

donde $x_k = \pi_k \circ X$.

Ejemplo 9. Si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$, donde T es un subconjunto de la recta, todo elemento aleatorio $X = X(\omega)$ se puede representar como

$$X = \{x_t\}_{t \in T}$$

donde $x_t = \pi_t \circ X$. Este ejemplo lo desarrollaremos con mas detalles mas adelante.

En el contexto de la sección 2.1 de este capítulo podemos estudiar la noción de variable aleatoria Gaussiana en espacios mas generales, sin embargo dejaremos esto para la sección 2 del Capítulo 2. Allí definiremos variable aleatoria gaussiana en espacios de Banach. Es importante para nosotros esto, ya que los espacios en los que principalmente este trabajo se realizó son los espacios de Banach, por lo que se requiere una definición mas general.

3. Funciones de Distribución

En esta sección, estudiaremos la manera de definir medidas de probabilidad por medio de las llamadas funciones de distribución. veremos el caso de $\mathbb{R}$ y luego generalizamos a espacios mas generales.

Definición 1.11. Una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$P_{\xi}(B) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

se llama medida de distribución de probabilidad de la variable aleatoria ξ sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Definición 1.12. Si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ es de la forma $B = (-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, entonces La función

$$F(x) = P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x) = P\{\xi \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

se llama función de distribución de ξ .

Para variables aleatorias discretas la medida P_{ξ} esta concentrada a lo sumo en un conjunto numerable y se representa en la forma

$$P_{\xi}(B) = \sum_{\{k: x_k \in B\}} p(x_k),$$

donde $p(x_k) = P\{\xi = x_k\}$.

Una variable aleatoria ξ es continua si su función de distribución F es continua para todo x .

Una variable aleatoria es absolutamente continua si existe una función no-negativa $f = f(x)$, llamada densidad, tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La función de distribución F tiene las siguientes propiedades:

- a) $F(x)$ es no decreciente,
- b) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, donde

$$F(-\infty) = \lim_{x \downarrow -\infty} F(x) \text{ y } F(+\infty) = \lim_{x \uparrow +\infty} F(x),$$

- c) $F(x)$ es continua por la derecha y tiene limite por la izquierda en cada punto $x \in \mathbb{R}$.

Así, podemos afirmar que a toda medida de probabilidad P_{ξ} sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ le corresponde una función de distribución F . El recíproco también es cierto.

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

Teorema 1.13. Ver Shirayev [46].

Sea $F = F(x)$ una función de distribución de una variable aleatoria ξ . Existe una única medida de probabilidad P_ξ sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que

$$P_\xi(a, b] = F(b) - F(a), \quad (1.10)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $-\infty \leq a \leq b < +\infty$.

DEMOSTRACIÓN. Para la prueba ver el libro de A. N Shirayev [46] Teorema 1 página 150. $\square$

Definición 1.14. La medida P_ξ construida a partir de la función F se llama medida de probabilidad de Lebesgue-Stieltjes correspondiente a la función de distribución F .

Ejemplo 10. El caso particularmente importante es

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

La correspondiente medida de probabilidad, denotada por λ se llama medida de Lebesgue sobre $[0, 1]$. Se puede ver que $\lambda(a, b] = b - a$, es decir, la medida de Lebesgue de $(a, b]$ o de cualquier otro intervalo es la longitud $b - a$.

La correspondencia entre medidas de probabilidad P_ξ y funciones de distribución F establecida por la ecuación $P_\xi(a, b] = F(b) - F(a)$ hace posible la construcción de varias medidas de probabilidad por medio de la función de distribución, entre las que podemos mencionar tenemos:

Ejemplo 11. (Medidas discretas).

Son medidas P_ξ para el cual la correspondiente función de distribución $F = F(x)$ son constantes a trozos, cambiando sus valores en los puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$. En este caso la medida esta concentrada en los puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$ y además

$$P_\xi(x_i) = \Delta F(x_i) = F(x_i) - F(x_i-) > 0, \quad \sum_i^n p(x_i) = 1,$$

donde $F(x_i-)$ es el valor de x_i por la izquierda. Si denotamos los valores $p_i = P_\xi(x_i)$, el conjunto de valores $(p_1, p_2, \dots)$ se llama la distribución de probabilidad discreta y la correspondiente función de distribución se llama discreta. Podemos mencionar algunas de ellas:

- i) Distribución uniforme $p_k = 1/n$, $k = 1, 2, \dots, N$,
- ii) Bernoulli $p_1 = p$, $p_0 = q$,
- iii) Binomial $p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

entre otros.

Ejemplo 12. (Medidas absolutamente continuas)

Existen medidas para las cuales la correspondiente función de distribución son tales que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt,$$

donde $f = f(l)$ son funciones no negativas y la integral es tomada en principio en el sentido de Riemann pero más adelante será tomada en el sentido de Lebesgue.

La función $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es la densidad de la función de distribución F y F se llama absolutamente continua. Ejemplos de funciones de densidad son las siguientes:

- i) Uniforme $f(x) = 1/(b-a)$, $a \leq x \leq b$,
- ii) Gaussiana $f(x) = (2\pi\sigma)^{-1}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

entre otras.

3.1. Función de distribución en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Supongamos, como en $\mathbb{R}$, que P_ξ es una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Una función de distribución de la variable aleatoria ξ en $\mathbb{R}^n$ se define así:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P_\xi((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]).$$

o, en forma mas compacta

$$F(x) = P_\xi(-\infty, x],$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, y $(-\infty, x] = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$.

El siguiente operador diferencia $\Delta_{a_i, b_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se define por la formula

$$\begin{aligned} \Delta_{a_i, b_i} F(x_1, \dots, x_n) &= F(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - F(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

donde $a_i \leq b_i$. Observemos que

$$\Delta_{a_1, b_1} \dots \Delta_{a_n, b_n} F(x_1, \dots, x_n) = P_\xi(a, b],$$

donde $(a, b] = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$.

Veamos el caso mas sencillo, $n = 2$

$$\begin{aligned} \Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} F(x_1, x_2) &= \Delta_{a_1, b_1} [F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)] \\ &= \Delta_{a_1, b_1} F(x_1, b_2) - \Delta_{a_1, b_1} F(x_1, a_2) \\ &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \\ &= P_\xi((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = P_\xi(a, b]. \end{aligned}$$

Ya que $P_\xi(a, b] \geq 0$ se sigue que

$$\Delta_{a_1, b_1} \dots \Delta_{a_n, b_n} F(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \tag{1.11}$$

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

para $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, \dots, b_n)$ arbitrarios. Por la propiedad de continuidad de la medida de probabilidad P_ξ , se tiene que $F(x_1, \dots, x_n)$ es continua por la derecha es decir, si $x^{(k)} \downarrow x$, donde $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, entonces

$$F(x^{(k)}) \downarrow F(x) \text{ si } k \rightarrow +\infty, \quad (1.12)$$

es claro también que

$$F(+\infty, \dots, +\infty) = 1, \quad (1.13)$$

y

$$\lim_{x \downarrow y} F(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (1.14)$$

si al menos una de las coordenadas de y es $-\infty$.

Definición 1.15. Una función de distribución n -dimensional sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $F = F(x_1, \dots, x_n)$ que cumple con las propiedades (1.11), (1.12), (1.13) y (1.14).

Muchas funciones de distribución n -dimensionales aparecen en la forma

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1 \cdots t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

donde $f_n(t_1 \cdots t_n)$ es una función no-negativa tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1 \cdots t_n) dt_1 \cdots dt_n = 1$$

y las integrales son de Riemann o más generales, integral Lebesgue. La función no-negativa $f = f(t_1 \cdots t_n)$ se llama densidad de la función de distribución n -dimensional o simplemente densidad n -dimensional.

Ejemplo 13. Ejemplo de función de densidad en $\mathbb{R}$, es la función

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

con $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$. Se llama la densidad de la distribución normal o Gaussiana (no-degenerada). La función de distribución en consecuencia viene dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2} dt. \quad (1.16)$$

Definición 1.16. Ver Shirayev [46].

Una variable aleatoria Gaussiana X con valores en $\mathbb{R}$, es una variable aleatoria con función de densidad dada por (1.15). Se dice en este caso que X tiene distribución $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Cuando $m = 0$ y $\sigma = 1$ entonces se dice que X tiene distribución $\mathcal{N}(0, 1)$.

Ejemplo 14. En $\mathbb{R}^n$, el análogo de (1.15) es el siguiente: sea $Q = (r_{ij})$ una matriz $n \times n$ definida positiva y simétrica, es decir,

$$\sum_{i,j=1}^n r_{ij} \mu_i \mu_j \geq 0, \quad \mu_i, \mu_j \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad r_{ij} = r_{ji}.$$

Cuando Q es una matriz definida positiva, $|Q| = \det Q > 0$ y en consecuencia existe una matriz inversa $A = (a_{ij})$. La función

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum a_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j) \right\},$$

donde $m_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, y que tenga la propiedad que su integral de Riemann sobre todo el espacio es 1 y por lo tanto también es positiva, es una densidad.

Esta función es la densidad de la distribución n -dimensional normal o Gaussiana con vector de medias $m = (m_1, \dots, m_n)$ y matriz de covarianza $Q = A^{-1}$.

Esta función de densidad también se puede escribir en la siguiente forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = ((2\pi)^n |Q|)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \langle Q^{-1}(x - m), (x - m) \rangle \right). \quad (1.17)$$

Denotamos esta densidad por $\mathcal{N}(m, Q)$.

La función de distribución viene dada en consecuencia por

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1 \cdots t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

donde $f(t_1 \cdots t_n)$ tiene la forma dada por (1.17).

La función característica de la función de distribución $F = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es definida de la forma siguiente:

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \lambda, x \rangle} dF(x) = e^{i\langle \lambda, m \rangle} e^{-\frac{1}{2} \langle Q\lambda, \lambda \rangle}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad (1.18)$$

donde $\langle, \rangle$ denota producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.17. Ver Shirayayev [46].

Un vector aleatorio $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $\mathbb{R}^n$ es Gaussiano, o normalmente distribuido, si su función característica tiene la forma

$$\varphi(\lambda) = e^{i\langle \lambda, m \rangle} e^{-\frac{1}{2} \langle Q\lambda, \lambda \rangle}. \quad (1.19)$$

Teorema 1.18. Ver Shirayayev [46].

Un vector aleatorio $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $\mathbb{R}^n$ es Gaussiano si y solo si, para todo vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, la variable aleatoria $\langle X, \lambda \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ tiene distribución Gaussiana.

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

3.2. Medida de probabilidad en el espacio de medida $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$. Sea T un conjunto de índices $t \in T$ y $\mathbb{R}_t$ la recta real correspondiente al índice t . Consideremos un conjunto finito no ordenado $\tau = [t_1, \dots, t_n]$ de distintos índices t_i con $t_i \in T$ y $n \geq 1$.

Sea P_τ la medida de probabilidad definida sobre $(\mathbb{R}^\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau))$, donde $\mathbb{R}^\tau = \mathbb{R}_{t_1} \times \dots \times \mathbb{R}_{t_n}$.

Decimos que la familia $\{P_\tau\}$ de medidas de probabilidad, donde τ recorre todos los conjuntos finitos no ordenados, es consistente si, para todos los conjunto $\tau = [t_1, \dots, t_n]$ y $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$, tal que $\sigma \subset \tau$, se tiene

$$P_\tau(\mathcal{P}_\sigma(B)) = P_\sigma(\mathcal{P}_\sigma(B))$$

para todo $B \in \mathbb{R}^\sigma$.

Teorema 1.19. Ver Shirayev [46].

Si $\{P_\tau\}$ es una familia consistente de medidas de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$, entonces existe una única medida de probabilidad P sobre $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ tal que

$$P(\mathcal{P}_\tau(B)) = P_\tau(B),$$

donde el conjunto $\mathcal{P}_\tau(B)$ se define por $\mathcal{P}_\tau(B) = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in B\}$ para todo conjunto no ordenado $\tau = [t_1, \dots, t_n]$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau)$

Este teorema se conoce como el Teorema de extension de medidas en $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ de Kolmogorov. Una prueba puede encontrarse en el Libro de A.N Shirayev [46]. T puede ser cualquier conjunto de indices. Este teorema sigue siendo válido si reemplazamos $\mathbb{R}$ por cualquier espacio métrico separable con σ -álgebras generadas por conjuntos abiertos.

4. Procesos Estocásticos.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{E}$ un espacio de Banach separable, $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ la σ -álgebra de los subconjuntos de Borel y T un intervalo de $\mathbb{R}$.

Definición 1.20. Un conjunto arbitrario de variables aleatorias $X = \{x(t, \omega)\}_{t \in T}$ definidas sobre Ω con $x(t, \omega)$ tomando valores en $\mathcal{E}$, para cada $t \in T$ y $\omega \in \Omega$, se llama proceso estocástico con dominio temporal T . Se dice que X es un proceso estocástico sobre T .

Denotamos por $x(t, \omega) = x(t)(\omega)$ para cada $t \in T$ y $\omega \in \Omega$. Las funciones $x(\cdot, \omega)$ se llaman trayectorias o realizaciones del proceso X y describen el modelo matemático de un experimento aleatorio cuyos resultados son continuamente observados en el tiempo. Por ejemplo, la trayectoria de una molécula sujeta a una perturbación aleatoria cerca de ella.

Si $T = \{1, 2, \dots\}$, llamaremos a $X = \{x(n)(\omega)\}_{n \geq 1}$ un proceso estocástico con tiempo discreto o sucesión aleatoria.

Si T es igual a uno de los intervalos $[0, 1]$, $[0, \tau]$, $(-\infty, +\infty)$ ó $[0, +\infty)$ llamaremos a $X = \{x(t)(\omega)\}_{t \in T}$ un proceso estocástico con tiempo continuo. Además tenemos que si $\tau = [t_1, t_2, \dots, t_n]$ es un conjunto finito arbitrario no ordenado de indices tal que $t_i \in T$, $1 \leq i \leq n$, con $n \geq 1$, un elemento $\mathcal{P}_\tau(B^n) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^T)$ tiene la forma

$$\mathcal{P}_\tau(B^n) = \{X : (x(t_1)(\omega), x(t_2)(\omega), \dots, x(t_n)(\omega)) \in B^n\} \quad (1.20)$$

donde $B^n \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^n)$, $n \geq 1$. Denotemos un elemento $\mathcal{P}_\tau(B^n) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^T)$ por B .

Definición 1.21. Sea $X = \{x(t, \omega)\}_{t \in T}$ un proceso aleatorio definido sobre Ω con valores en $\mathcal{E}$. La medida de probabilidad P_X sobre $(\mathcal{E}^T, \mathcal{B}(\mathcal{E}^T))$ definida por

$$P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^T),$$

se llama medida de distribución de probabilidad del proceso X .

Definición 1.22. Si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^T)$ y $\tau = [t_1, t_2, \dots, t_n]$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$, entonces las probabilidades

$$P_\tau(B) \equiv P\{\omega : (x(t_1, \omega), x(t_2, \omega), \dots, x(t_n, \omega)) \in B\}, \quad (1.21)$$

se llaman probabilidades finito dimensionales del proceso $X = \{x(t, \omega)\}_{t \in T}$.

Definición 1.23. Las funciones

$$F_\tau(x_1, \dots, x_n) \equiv P\{\omega : x(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, x(t_n, \omega) \leq x_n\}, \quad (1.22)$$

se llaman funciones de distribución finito dimensionales del proceso $X = \{x(t, \omega)\}_{t \in T}$.

La familia de funciones de distribución finito dimensionales es la característica fundamental de un proceso estocástico. Es natural preguntarse ¿bajo que condiciones la familia de funciones de distribución finito dimensionales es la familia de funciones de distribución finito dimensional de un proceso estocástico?. Presentamos ahora una versión nueva de consistencia:

Definición 1.24. La familia $\{F_\tau(x_1, \dots, x_n)\}$ de funciones de distribución finito dimensional es consistente si

$$F_\tau(x_1, \dots, x_n) = F_\sigma(x_1, \dots, x_n), \quad (1.23)$$

donde $\tau = [t_1, t_2, \dots, t_n]$ y $\sigma = [s_1, s_2, \dots, s_n]$ es una permutación de τ .

El siguiente teorema aparece en [46]:

Teorema 1.25. (Teorema de Extensión de Kolmogorov) Ver Shirayev [46].

Sea $\{F_\tau(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ donde $\tau = [t_1, \dots, t_n]$, $t_i \in T \subset \mathbb{R}$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n \geq 1$, una familia de funciones distribución finito dimensionales que satisfacen la condición de consistencia (1.23). Entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y un proceso estocástico $X = \{x(t, \omega)\}_{t \in T}$ tal que

$$P\{\omega : x(t, \omega) \leq x_1, \dots, x(t_n, \omega) \leq x_n\} = F_\tau(x_1, \dots, x_n). \quad (1.24)$$

El siguiente ejemplo muestra la existencia del movimiento Browniano gracias al Teorema 1.25.

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

Ejemplo 15. Si $T = [0, +\infty)$, el ejemplo fundamental de medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}))$ es la medida de Wiener construida como sigue:

Consideremos la familia $\{\phi_t(y|x)\}_{t \geq 0}$ de densidades Gaussiana como función de y con $x \in \mathbb{R}$ fijo:

$$\phi_t(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/2t}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

y para cada $\tau = [l_1, \dots, l_n]$, $l_1 < l_2 < \dots < l_n$ y cada conjunto

$$B = I_1 \times \dots \times I_n, \quad I_k = (a_k, b_k),$$

se construye la familia $\{P_\tau\}$ por la fórmula

$$\begin{aligned} P_\tau(I_1 \times \dots \times I_n) \\ = \int_{I_1} \dots \int_{I_n} \phi_{t_1}(a_1|0) \phi_{t_2-t_1}(a_2|a_1) \dots \phi_{t_n-t_{n-1}}(a_n|a_{n-1}) da_1 \dots da_n, \end{aligned} \quad (1.25)$$

donde la integración es en el sentido de Riemann. Esta familia $\{P_\tau\}$ es consistente y por el Teorema (1.25) puede ser extendida sobre $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}))$. Además por el mismo Teorema (1.25), existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y un proceso estocástico $\{w(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$ definido sobre Ω tal que la distribución finito dimensional viene dada por la ecuación (1.25).

El Ejemplo 15 motiva la siguiente definición:

Definición 1.26. El proceso estocástico $\{w(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$ dado en el Ejemplo (15) que satisface la ecuación (1.25) tal que $P\{\omega : w(0)(\omega) = 0\} = 1$, se llama movimiento Browniano.

Mas adelante veremos cuando un proceso estocástico tiene una modificación continua. Para ello hacen falta mas resultados y definiciones.

Dos procesos estocásticos X e Y considerados como funciones de t y ω son iguales si $x(t)(\omega) = y(t)(\omega)$ para todo $t \in T$ y $\omega \in \Omega$. Sin embargo en presencia de la probabilidad P , podemos debilitar aún mas este requerimiento de igualdad de procesos estocásticos por lo menos en tres formas distintas.

Definición 1.27. Ver Karatzas [24]. Y es una modificación de X si, para todo $t \geq 0$ se tiene

$$P\{\omega : x(t)(\omega) = y(t)(\omega)\} = 1.$$

Definición 1.28. Ver Karatzas [24]. Dos procesos estocásticos X e Y tienen la misma distribución finito dimensional si, para todo $\tau = [t_1, \dots, t_n]$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $t_i \in T \subset \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{B}(E^T)$ se tiene

$$P\{(x(t_1)(\omega), \dots, x(t_n)(\omega)) \in A\} = P\{(y(t_1)(\omega), \dots, y(t_n)(\omega)) \in A\} \quad (1.26)$$

Definición 1.29. Ver Karatzas [24]. X e Y se dicen indistinguibles si casi todas sus trayectorias coinciden, es decir,

$$P\left\{\omega : x(t)(\omega) = y(t)(\omega); \text{ para todo } 0 \leq t < \infty\right\} = 1.$$

La Definición 1.29 es mas fuerte que la Definición 1.27 y esta implica 1.28. Por otra parte, dos procesos pueden ser modificaciones uno del otro y sin embargo tener trayectorias completamente diferentes.

Ejemplo 16. Ver Karatzas [24]. Considere una variable aleatoria T con distribución continua, definamos $x(t)(\omega) \equiv 0$ y

$$y(t)(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq T \\ 1 & \text{si } t = T \end{cases}$$

Y es una modificación de X , ya que para todo $t \geq 0$ se tiene

$$P\{\omega : y(t)(\omega) = x(t)(\omega)\} = P\{t \neq T\} = 1,$$

pero por otra parte

$$P\{\omega : x(t)(\omega) = y(t)(\omega), \text{ para todo } t \geq 0\} = 0.$$

Por razones técnicas en la teoría de integración de Lebesgue, las medidas de probabilidad están definidas sobre σ -álgebras y las variables aleatorias se asumen medibles con respecto a estas σ -álgebras. Así, implícitamente en la expresión que un proceso estocástico

$$X = \{x(t)(\omega) : 0 \leq t \leq \tau\},$$

es una colección de variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ con valores en $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E}))$, es la suposición que cada $x(t)(\omega)$ es $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathcal{E})$ -medible. No obstante, X es realmente una función de (t, ω) entonces, por razones técnicas, es conveniente tener una propiedad de medibilidad conjunta.

Definición 1.30. Ver Karatzas [24]. El proceso estocástico X es medible si, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, el conjunto $\{(t, \omega) : x(t)(\omega) \in A\}$ pertenece a la σ -álgebra producto $\mathcal{B}([0, \tau]) \otimes \mathcal{F}$, es decir, la aplicación

$$\begin{aligned} ([0, \tau] \times \Omega, \mathcal{B}([0, \tau]) \times \mathcal{F}) &\rightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E})) \\ (t, \omega) &\rightarrow x(t)(\omega) \end{aligned}$$

es medible.

Definición 1.31. Ver Karatzas [24]. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E}))$ un espacio medible. Una variable aleatoria $x : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$, se dice fuertemente $\mathcal{F}$ -medible si existe una sucesión de variables aleatorias simples $\mathcal{F}$ -medibles $x_n : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\omega) = x(\omega) \text{ en } \mathcal{E} \text{ (c.s.)}.$$

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

Existe una importante razón no técnica para incluir σ -álgebras en el estudio de procesos estocásticos, y es mantener un registro de la información. La característica temporal de un proceso sugiere un flujo en el tiempo, en el cual, a todo instante $t \geq 0$, podemos hablar acerca del pasado, presente y futuro y preguntarse cuanto un observador conoce del proceso al respecto en el presente, cuanto conoció en un instante del pasado y cuanto conocerá en un instante del futuro.

Las siguientes definiciones de medibilidad fueron tomadas de [24].

Definición 1.32. Ver Karatzas [24]. *Dotaremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de una filtración, es decir, una familia no-decreciente $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ de sub σ -álgebras de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para $0 \leq s < t \leq \tau$.*

Denotaremos $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$.

Dado un proceso estocástico, la elección mas simple de una filtración es la generada por el proceso en si mismo, es decir,

$$\mathcal{F}_t =: \sigma\{x(s)(\omega) : 0 \leq s \leq t\}, \quad (1.27)$$

es la más pequeña con respecto al cual $x(s)(\omega)$ es medible para $s \in [0, t]$.

Sea $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ una filtración. Definimos $\mathcal{F}_{t+} =: (\bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s)$ la σ -álgebra de los eventos anteriores a $t > 0$.

$\mathcal{F}_{t-} =: \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$, la σ -álgebra de los eventos inmediatamente después de $t \geq 0$. Denotaremos por $\mathcal{F}_{0-} =: \mathcal{F}_0$, y decimos que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ es continua a la derecha si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ y decimos que $\{\mathcal{F}_t\}$ es continua a la izquierda si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$ para todo $t \geq 0$.

El concepto de medibilidad dado en la Definición 1.30 es mas débil. La introducción de una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ abre la posibilidad de conceptos mas interesantes y útiles.

Definición 1.33. Ver Karatzas [24]. *El proceso estocástico $X = \{x(t)(\omega)\}_{t \in [0, \tau]}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ si, para cada $t \in [0, \tau]$, la variable aleatoria $x(t)(\omega)$ es fuertemente $\mathcal{F}_t$ -medible.*

Obviamente, todo proceso X es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ dada por (1.27). Mas aún, si X es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$ y Y es una modificación de X , entonces Y también es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$ con la condición de que $\mathcal{F}_0$ contenga todos los conjuntos de P -medida nula en $\mathcal{F}$.

Definición 1.34. Ver Karatzas [24]. *Un proceso estocástico $X = \{x(t)(\omega)\}_{t \in [0, \tau]}$ se dice progresivamente medible con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ si, para cada $t \in [0, \tau]$ y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, el conjunto dado por $\{(s, \omega); 0 \leq s \leq t, \omega \in \Omega, x(s)(\omega) \in A\}$ pertenece a la σ -álgebra producto $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$, es decir, la variable aleatoria*

$$\begin{aligned} ([0, \tau] \times \Omega, \mathcal{B}([0, \tau]) \otimes \mathcal{F}_t) &\rightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E})) \\ (s, \omega) &\rightarrow x(s)(\omega) \in A \in \mathcal{B}(\mathcal{E}), \end{aligned}$$

es medible, para todo $t \geq 0$.

Proposición 1.35. Ver Karatzas [24].

Todo proceso progresivamente medible es medible y adaptado. Si el proceso X es continuo a la derecha o a la izquierda y adaptada a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, entonces también es progresivamente medible respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el caso de un proceso continuo a la derecha, es decir, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$. Con $t \geq 0$, $n \geq 1$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, y $0 \leq s \leq t$ definamos:

$$x^{(n)}(s)(\omega) = x\left(\frac{(k+1)t}{2^n}\right)(\omega) \text{ para } \frac{kt}{2^n} < s \leq \frac{(k+1)t}{2^n},$$

también definimos $x^{(n)}(0)(\omega) = x(0)(\omega)$. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} x^{(n)}(s) : [0, t] \times \Omega &\rightarrow E \\ (s, \omega) &\rightarrow x^{(n)}(s)(\omega), \end{aligned}$$

es $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -medible por ser X adaptado. Además por la continuidad a la derecha, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}(s)(\omega) = x(s)(\omega)$, para todo $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$. Por lo tanto la aplicación límite es $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -medible. $\square$

5. Esperanza de una variable aleatoria.

Este tema es tomado del libro Shiryaev [46].

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. $X = X(\omega)$ una variable aleatoria simple si

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}(\omega). \quad (1.28)$$

Definición 1.36. La esperanza de una variable aleatoria simple X , $\mathbf{E}(X)$, se define por

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k).$$

Esta definición es consistente en el sentido que $\mathbf{E}(X)$ es independiente de la representación particular de X en la forma (1.28). En análisis $\mathbf{E}(X)$ es simplemente la integral de Lebesgue de una función $X = X(\omega)$ $\mathcal{F}$ -medible con respecto P . Para $\mathbf{E}(X)$ nosotros usaremos la notación

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP \text{ ó } \int_{\Omega} X dP.$$

Sea $X = X(\omega)$ una variable aleatoria no-negativa. Existe una sucesión de variables aleatorias simples no-negativas $\{X_n\}_{n \geq 1}$ tal que $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ cuando $n \rightarrow +\infty$ para cada $\omega \in \Omega$. Ya que $\mathbf{E}(X_n) \leq \mathbf{E}(X_{n+1})$ el límite $\lim \mathbf{E}(X_n)$ existe, con el valor posible $+\infty$. En consecuencia la integral de Lebesgue existe para variables aleatorias no-negativas y

$$\mathbf{E}(X) = \lim_n \mathbf{E}(X_n).$$

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

Si $X = X(\omega)$ es una variable aleatoria tal que $X^+ = \max(X, 0)$ y $X^- = -\min(X, 0)$, decimos que la esperanza $\mathbf{E}(X)$ existe ó está definida, si al menos $\mathbf{E}(X^+)$ ó $\mathbf{E}(X^-)$ es finito. En este caso definimos

$$\mathbf{E}(X) \equiv \mathbf{E}(X^+) - \mathbf{E}(X^-).$$

La esperanza de X es finita si $\mathbf{E}(X^+) \leq +\infty$ y $\mathbf{E}(X^-) \leq +\infty$.

Ya que $|X| = X^+ + X^-$, la finitud de $\mathbf{E}(X)$ ó $|\mathbf{E}(X^+)| < +\infty$ es equivalente a que $\mathbf{E}(|X|) < +\infty$ y decimos en este caso que la integral de Lebesgue es absolutamente convergente.

En esta definición suponemos que P es una medida de probabilidad y las variables aleatorias son $\mathcal{F}$ -medibles con valores en $\mathbb{R}$.

Existe una relación entre la integral abstracta de Lebesgue con respecto a P sobre conjuntos en $\mathcal{F}$ por una parte, y la integral de Lebesgue-Stieltjes con respecto a μ sobre conjuntos en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ inducida por cada variable aleatoria por otra.

Teorema 1.37. Ver Chung, K.L [12].

Sea x una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ según el Teorema (1.9) y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel medible, es decir, $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Entonces tenemos

$$\int_{\Omega} f(x(\omega)) dP = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu.$$

5.1. Propiedades de la Esperanza.

(a). Sea c una constante y $\mathbf{E}(X)$ existe. Entonces $\mathbf{E}(cX)$ existe y

$$\mathbf{E}(cX) = c\mathbf{E}(X).$$

(b). Sea $X \leq Y$; entonces

$$\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y).$$

(c). Si $\mathbf{E}(X)$ existe, entonces

$$|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|).$$

(d). Si $\mathbf{E}(X)$ existe, entonces $\mathbf{E}(XI_A)$ existe para cada $A \in \mathcal{F}$; si $\mathbf{E}(X)$ es finito, $\mathbf{E}(XI_A)$ es finito, donde I_A es la función indicadora.

(e). Si X y Y son variables aleatorias no-negativas, tal que $\mathbf{E}(X) < +\infty$ y $\mathbf{E}(Y) < +\infty$, entonces

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

(f). Si $X = 0$ casi siempre (c.s) entonces $\mathbf{E}(X) = 0$.

(g). Si $X = Y$ (c.s) y $\mathbf{E}(|X|) < +\infty$, entonces

$$\mathbf{E}(|Y|) < +\infty \text{ y } \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$$

(h). Sea $X \geq 0$ y $\mathbf{E}(X) = 0$ entonces $X = 0$ (c.s).

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \{\omega : X(\omega) > 0\}$, $A_n = \{\omega : X(\omega) \geq 1/n\}$. Claramente $A_n \uparrow A$ y $0 \leq X \cdot I_{A_n} \leq X \cdot I_A$. Por la propiedad (b).

$$0 \leq \mathbf{E}(X \cdot I_{A_n}) \leq \mathbf{E}(X) = 0,$$

en consecuencia

$$0 = \mathbf{E}(X \cdot I_{A_n}) \geq \frac{1}{n} P(A_n),$$

por lo tanto $P(A) = 0$ para todo $n \geq 1$. Pero ya que $P(A) = \lim P(A_n)$, tenemos que $P(A) = 0$. $\square$

- (i). Sean X y Y tales que $\mathbf{E}(|X|) < +\infty$, $\mathbf{E}(|Y|) < +\infty$ y $\mathbf{E}(X \cdot I_A) \leq \mathbf{E}(Y \cdot I_A)$, para todo $A \in \mathcal{F}$. Entonces, $X \leq Y$ (c.s.).

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea $B = \{\omega : X(\omega) \geq Y(\omega)\}$. Entonces se tiene que $\mathbf{E}(Y \cdot I_B) \leq \mathbf{E}(X \cdot I_B) \leq \mathbf{E}(Y \cdot I_B)$, por lo tanto $\mathbf{E}(X \cdot I_B) = \mathbf{E}(Y \cdot I_B)$. Por la propiedad (e), se tiene que $\mathbf{E}((X - Y) \cdot I_B) = 0$ y por la propiedad (h) tenemos que $(X - Y) \cdot I_B = 0$ (c.s.) de aquí que $P(B) = 0$. $\square$

- (j). Sea X una variable aleatoria y $\mathbf{E}(|X|) < +\infty$, entonces $|X| < +\infty$ (c.s.).

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \{\omega : |X(\omega)| = +\infty\}$ y $P(A) > 0$, entonces se obtiene que $\mathbf{E}(|X|) \geq \mathbf{E}(|X| \cdot I_A) = +\infty$, lo que contradice la hipótesis que $\mathbf{E}(|X|) < +\infty$. $\square$

5.2. Teoremas de Convergencia. Presentaremos ahora los teoremas fundamentales tomando límite bajo el signo de la esperanza, mas detalles se encuentran en [46].

Teorema 1.38. (Convergencia Monótona).

Sean $X, Y, Y_1, Y_2, \dots$ variables aleatorias.

- (a) Si $Y_n \geq X$ para todo $n \geq 1$, $\mathbf{E}(X) > -\infty$, y $Y_n \uparrow Y$, entonces

$$\mathbf{E}(Y_n) \uparrow \mathbf{E}(Y),$$

- (b) Si $Y_n \leq X$ para todo $n \geq 1$, $\mathbf{E}(X) < \infty$, y $Y_n \downarrow Y$, entonces

$$\mathbf{E}(Y_n) \downarrow \mathbf{E}(Y).$$

Corolario 1.39. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias no-negativas. Entonces

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}(X_n).$$

Teorema 1.40. (Lema de Fatou). Sean $\eta, x_1, x_2, \dots$, variables aleatorias.

- (a) Si $x_n \geq \eta$ para todo $n \geq 1$ y $\mathbf{E}(\eta) > -\infty$, entonces

$$\mathbf{E}(\liminf x_n) \leq \liminf \mathbf{E}x_n,$$

- (b) Si $x_n \leq \eta$ para todo $n \geq 1$ y $\mathbf{E}(\eta) < +\infty$, entonces

$$\limsup \mathbf{E}(x_n) \leq \mathbf{E}(\limsup x_n).$$

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

(c) Si $|x_n| \leq \eta$ para todo $n \geq 1$ y $\mathbf{E}(\eta) < +\infty$, entonces

$$\mathbf{E}(\liminf x_n) \leq \liminf \mathbf{E}(x_n) \leq \limsup \mathbf{E}(x_n) \leq \mathbf{E}(\limsup x_n).$$

Teorema 1.41. (Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue)

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\eta, x, x_1, x_2, \dots$ variables aleatorias tales que $\mathbf{E}(\eta) < +\infty$, $|x_n| \leq \eta$ y $x_n \rightarrow x$ (c.s) sobre Ω , entonces $\mathbf{E}(|x|) < +\infty$,

$$\mathbf{E}(x_n) \rightarrow \mathbf{E}(x),$$

y

$$\mathbf{E}(|x_n - x|) \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow +\infty$.

5.3. Desigualdades fundamentales. Las desigualdades descritas a continuación son comunes tanto en teoría de probabilidades y análisis:

Desigualdad 1. (Chebyshev)

Sea x una variable aleatoria no-negativa definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces para todo $\epsilon > 0$

$$P(x \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{E}(x)}{\epsilon}. \quad (1.29)$$

y como consecuencia se obtiene

$$P(x \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{E}(x^2)}{\epsilon^2}, \quad (1.30)$$

y

$$P(|x - \mathbf{E}(x)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{Var} x}{\epsilon^2}, \quad (1.31)$$

donde $Vx = \mathbf{E}(x - \mathbf{E}(x))^2$ es la varianza.

Desigualdad 2. (Cauchy-Bunyakovskii). Sean x, y variables aleatorias que satisfacen $\mathbf{E}(x^2) < +\infty$, $\mathbf{E}(y^2) < +\infty$. Entonces $\mathbf{E}(xy) < +\infty$ y

$$(\mathbf{E}|xy|)^2 \leq \mathbf{E}(x^2)\mathbf{E}(y^2). \quad (1.32)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathbf{E}(x^2) > 0$, $\mathbf{E}(y^2) > 0$. Entonces, con $\tilde{x} = x/\sqrt{\mathbf{E}x^2}$, $\tilde{y} = y/\sqrt{\mathbf{E}y^2}$, ya que $2|\tilde{x}\tilde{y}| \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, se tiene

$$2\mathbf{E}(|\tilde{x}\tilde{y}|) \leq \mathbf{E}(\tilde{x}^2) + \mathbf{E}(\tilde{y}^2) = 2,$$

es decir que $\mathbf{E}(|xy|) \leq 1$ con lo que alcanzamos la desigualdad. $\square$

Desigualdad 3. Lyapunov. Si $0 < s < t$,

$$(\mathbf{E}|x|^s)^{1/s} \leq (\mathbf{E}|y|^t)^{1/t}. \quad (1.33)$$

La siguiente cadena de desigualdades es consecuencia de la desigualdad de Lyapunov:

$$\mathbf{E}(|x|) \leq (\mathbf{E}(|x|^2))^{1/2} \leq \dots \leq (\mathbf{E}(|x|^n))^{1/n}.$$

Desigualdad de Hölder. Sea $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $\mathbf{E}(|x|^p) < +\infty$ y $\mathbf{E}(|y|^q) < +\infty$, entonces $\mathbf{E}(|xy|) < +\infty$ y

$$\mathbf{E}(|xy|) \leq (\mathbf{E}(|x|^p))^{1/p} (\mathbf{E}(|y|^q))^{1/q}. \quad (1.34)$$

Desigualdad de Minkowski. Si $\mathbf{E}(|x|^p) < +\infty$, $\mathbf{E}(|y|^p) < +\infty$ $1 \leq p < +\infty$, entonces tenemos que $\mathbf{E}(|x+y|^p) < +\infty$ y

$$(\mathbf{E}(|x+y|^p))^{1/p} \leq (\mathbf{E}(|x|^p))^{1/p} + (\mathbf{E}(|y|^p))^{1/p}. \quad (1.35)$$

DEMOSTRACIÓN. Deduiremos primero la siguiente desigualdad: si $a, b > 0$ y $p \geq 1$, entonces

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

En efecto, considere la función $F(x) = (a+x)^p - 2^{p-1}(a^p + b^p)$. Entonces

$$F'(x) = p(a+x)^{p-1} - 2^{p-1}(a^p + x^p).$$

ya que $p \geq 1$, tenemos $F'(a) = 0$ y $F'(x) > 0$ para $x < a$ y $F'(x) < 0$ para $x > a$. Por lo tanto

$$F(b) \leq \max F(x) = F(a) = 0,$$

por lo que se obtiene

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

De acuerdo a esta desigualdad

$$|x+y| \leq (|x|+|y|)^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p),$$

si $\mathbf{E}(|x|^p) < +\infty$ y $\mathbf{E}(|y|^p) < +\infty$, se sigue que $\mathbf{E}(|x+y|^p) < +\infty$.

Si $p = 1$ la desigualdad (1.35) sigue.

Si $p > 1$, tomemos $q > 1$ tal que $(1/p) + (1/q) = 1$. Entonces

$$|x+y|^p = |x+y| \cdot |x+y|^{p-1} \leq |x| \cdot |x+y|^{p-1} + |y| \cdot |x+y|^{p-1} \quad (1.36)$$

observemos que $(p-1)q = p$. En consecuencia,

$$\mathbf{E}(|x+y|^{p-1})^q = \mathbf{E}(|x+y|^p) < +\infty,$$

y, por lo tanto, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|x||x+y|^{p-1}) &\leq (\mathbf{E}(|x|^p))^{1/p} (\mathbf{E}(|x+y|^{(p-1)q}))^{1/q} \\ &= (\mathbf{E}(|x|^p))^{1/p} (\mathbf{E}(|x+y|^p))^{1/q} < +\infty. \end{aligned}$$

de igual forma

$$\mathbf{E}(|y||x+y|^{p-1}) \leq (\mathbf{E}(|y|^p))^{1/p} (\mathbf{E}(|x+y|^p))^{1/q}.$$

Por (1.36),

$$\mathbf{E}(|x+y|^p) \leq (\mathbf{E}(|x+y|^p))^{1/q} (\mathbf{E}(|x|^p))^{1/p} + (\mathbf{E}(|y|^p))^{1/p}. \quad (1.37)$$

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

Si $|x + y|^p = 0$, la desigualdad (1.35) es evidente. Ahora, sea

$$\mathbf{E}(|x + y|^p) > 0,$$

entonces

$$(\mathbf{E}(|x + y|^p))^{1-(1/q)} \leq (\mathbf{E}(|x|^p))^{1/p} + (\mathbf{E}(|y|^p))^{1/p}.$$

De (1.37), (1.35) sigue ya que $1 - (1/q) = 1/p$.

□

Teorema 1.42. Ver A.N Shiriyayev [46].

Sean ξ y η variables aleatorias independientes tal que $\mathbf{E}(|\xi|) < +\infty$ y $\mathbf{E}(|\eta|) < +\infty$. Entonces $\mathbf{E}(|\xi\eta|) < +\infty$ y

$$\mathbf{E}(\xi\eta) = \mathbf{E}(\xi) \cdot \mathbf{E}(\eta). \quad (1.38)$$

Recordemos que en el Ejemplo 15 hallamos un proceso estocástico llamado movimiento Browniano que satisface (1.25). Ahora veremos que tal proceso tiene una version continua. Antes daremos algunos resultados previos.

Definición 1.43. Ver Da Prato [13].

El proceso X es α -Hölder continuo con probabilidad uno si sus trayectorias $x(\cdot, \omega)$ son α -Hölder continuas casi seguramente, es decir, existe una constante K tal que para todo $t, s \in T$

$$\|x(t, \omega) - x(s, \omega)\| \leq K|t - s|.$$

Teorema 1.44. (Teorema de Continuidad de Kolmogorov. Ver Da prato [13])

Sea $X = \{x(t)(\omega)\}_{t \in T}$ un proceso estocástico con $x(t)(\omega)$ tomando valores en $\mathcal{E}$ un espacio de Banach tal que, para alguna constante positiva $C > 0$, $\epsilon > 0$, $\delta > 1$ y todo $t, s \in T$,

$$\mathbf{E}\|x(t)(\omega) - x(s)(\omega)\|^\delta \leq C|t - s|^{1+\epsilon}. \quad (1.39)$$

Entonces existe una versión de X con casi P todas las trayectorias, funciones Hölder continuas con un exponente arbitrario mas pequeño que $\frac{\epsilon}{\delta}$. El proceso $X = \{x(t)(\omega)\}_{t \in T}$ en particular tiene una versión continua.

De la Definición 1.26 encontramos que el movimiento Browniano $\{w(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$ tomando valores en $\mathbb{R}$ también satisface la siguiente propiedad:

$\{w(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$ es un proceso tal que la variable aleatoria $\{w(t)(\omega) - w(s)(\omega)\}$ tiene distribución Gaussiana con media $\mathbf{E}(w(t) - w(s)) = 0$ y de forma que la varianza $\text{var}(w(t) - w(s)) = |t - s|$ para todo $t, s \geq 0$. En consecuencia se obtiene que

$$\mathbf{E}(|x(t)(\omega) - x(s)(\omega)|^4) = 3|t - s|^2 \text{ para todo } t, s \geq 0.$$

Por lo tanto se tiene que el proceso $\{w(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$ tiene una modificación continua con $\delta = 4$ y $\beta = 1$.

El movimiento Browniano de la Definición 1.26 satisface las siguientes propiedades adicionales:

- 1) $\{w(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$ es un proceso Gaussiano, es decir, para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ el vector aleatorio $Z = (w(t_1)(\omega), w(t_2)(\omega), \dots, w(t_k)(\omega))$ tiene distribución finito k -dimensional normal Gaussiana, es decir que existe $m = (m_1, m_2, \dots, m_k) \in \mathbb{R}^k$ y una matriz definida positiva $Q = (q_{jr})_{k \times k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ tal que la función característica viene dada por

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(i \sum_{j=1}^k u_j w(t_j)\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j,r} u_j q_{jr} u_r + i \sum_{j=1}^k u_j m_j\right),$$

para todo $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k$, donde $i = \sqrt{-1}$.

En forma equivalente, por el Teorema 1.18, también podemos afirmar que el vector Z es Gaussiano si y solo si, $\sum_{j=1}^k u_j w(t_j)$ es una variable aleatoria Gaussiana para todo vector $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k$.

El Teorema de Extensión 1.25 implica que las distribuciones finito dimensionales de $\{w(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$, están únicamente determinadas por dos funciones:

- a) $m(t) = \mathbb{E}(w(t)(\omega))$, para todo $t \geq 0$, donde m es una función de $t \geq 0$.
 - b) La función de covarianza $Q(s, t) = \text{Cov}(s, t)$ es una función de $s, t \geq 0$.
- 2) $\mathbb{E}(w(s)(\omega)w(t)(\omega)) = \min\{s, t\}$ para todo $s, t \geq 0$.
- 3) El proceso $\{w(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes, es decir, se tiene que las variables aleatorias

$$w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_k) - w(t_{k-1})$$

son independientes para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$.

6. Integral de Bochner.

Los resultados de esta sección son obtenidos del libro de Da Prato- Zabczyk [13].

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y x una variable aleatoria $\mathcal{F}$ -medible con valores en un espacio de Banach separable $\mathcal{E}$. El objetivo ahora es dar una generalización de la integral de Lebesgue en el contexto de los espacios de Banach. Esto se logra mediante la integral de Bochner.

Antes de dar la definición de integral de Bochner se tiene el siguiente resultado (ver [13]):

Lema 1.45. *Sea $\mathcal{E}$ un espacio métrico separable con métrica ρ y sea x una variable aleatoria con valores en $\mathcal{E}$. Entonces existe una sucesión de variables aleatorias simples con valores en $\mathcal{E}$ tal que, para $\omega \in \Omega$ arbitrario, la sucesión $\{\rho(x(\omega), x_n(\omega))\}$ es decreciente a cero monótonamente.*

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

Definición 1.46. Una variable aleatoria x definida en Ω con valores en $\mathcal{E}$ es Bochner integrable, si

$$\int_{\Omega} \|x(\omega)\| dP < +\infty. \quad (1.40)$$

La integral de una variable aleatoria x definida sobre Ω con valores en un espacio de Banach $\mathcal{E}$ se define por

$$\int_{\Omega} x(\omega) dP = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} x_n(\omega) dP(\omega), \quad (1.41)$$

donde $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias simples definidas sobre Ω con valores en el espacio de Banach $\mathcal{E}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ y $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. En efecto:

Si x es integrable; por el Lema 1.45 existe una sucesión de variables aleatorias simples $\{x_n\}$ tal que la sucesión $\{\|x(\omega) - x_n(\omega)\|\}$ tiende a cero para todo $\omega \in \Omega$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\Omega} x_m(\omega) dP - \int_{\Omega} x_n(\omega) dP \right\| \\ & \leq \int_{\Omega} \|x(\omega) - x_m(\omega)\| dP + \int_{\Omega} \|x(\omega) - x_n(\omega)\| dP \rightarrow 0 \text{ cuando } m, n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Por lo tanto la sucesión $\{\int_{\Omega} x_n(\omega) dP\}$ es de Cauchy por ser $\mathcal{E}$ completo se tiene el resultado (1.41).

El mismo resultado (1.41) se obtiene si la sucesión de variables aleatorias simples satisfacen $\int_{\Omega} \|x(\omega) - x_n(\omega)\| dP \rightarrow 0$.

Denotaremos la integral definida en (1.41) por $E(x)$ y llamaremos esta integral, integral de Bochner.

Como era de esperar, los resultados de la teoría de integración de Lebesgue pueden ser llevados a cabo en la teoría de integración de Bochner, siempre y cuando no involucre suposiciones de no existencia de no-negatividad. Por ejemplo, no hay análogo del Teorema de Fatou y el Teorema de Convergencia Monótona, pero si existe un análogo del Teorema de Convergencia Dominada.

Proposición 1.47. (Convergencia Dominada.) ver Neerven.J [42]

Sea $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias definidas de Ω en $\mathcal{E}$ Bochner integrables. Suponga que existen variables aleatorias $x : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ el campo escalar) Bochner integrable tal que

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ P (c.s.),
- 2) $\|x_n\| \leq |g|$ P (c.s.),

entonces x es Bochner integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|x_n - x\| dP = 0,$$

y particularmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} x_n dP = \int_{\Omega} x dP.$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos $\|x_n - x\| \leq 2|g| P$ (c.s.), y el resultado sigue del Teorema de Convergencia Dominada escalar.

De la definición de integral de Bochner, es inmediato que si $x : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ es Bochner integrable y A es un operador lineal acotado de $\mathcal{E}$ en otro espacio de Banach F , entonces $Ax : \Omega \rightarrow F$ es Bochner integrable y

$$A \int_{\Omega} x dP = \int_{\Omega} Ax dP.$$

Esta identidad tiene una útil extensión para una clase de operadores no acotados. Un operador A , definido sobre un subespacio lineal $\mathcal{D}(A)$ de $\mathcal{E}$ que toma valores en otro espacio de Banach F , se dice cerrado si su gráfico

$$\mathcal{G} =: \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\},$$

es un subespacio cerrado de $\mathcal{E} \times F$. Si A es cerrado, entonces $\mathcal{D}(A)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma del gráfico

$$\|x\|_{\mathcal{D}(A)} =: \|x\| + \|Ax\|,$$

y A es un operador acotado de $\mathcal{D}(A)$ a $\mathcal{E}$.

El Teorema del Gráfico Cerrado afirma que si $A : \mathcal{E} \rightarrow F$ es un operador cerrado con dominio $\mathcal{D}(A) = \mathcal{E}$, entonces A es acotado. $\square$

Teorema 1.48. Sean $\mathcal{E}$ y F espacios de Banach separables y $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \rightarrow F$ un operador cerrado con dominio $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E}$. Si $x : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ es tal que $x(\omega) \in \mathcal{D}(A)$ (c.s.), entonces Ax es una variable aleatoria F -valuada, y x es una variable aleatoria $\mathcal{D}(A)$ -valuada, donde $\mathcal{D}(A)$ está dotada de la norma del gráfico de A . Mas aún, si

$$\int_{\Omega} \|Ax(\omega)\| dP < +\infty,$$

entonces

$$A \int_{\Omega} x(\omega) dP = \int_{\Omega} Ax(\omega) dP.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que $\mathcal{E}$ es un espacio de Banach separable, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ de variables aleatorias simples $\mathcal{D}(A)$ -valuadas, por la norma del gráfico se tiene

$$\|x_m(\omega) - x(\omega)\|_{\mathcal{D}(A)} = \|x_m(\omega) - x(\omega)\| + \|Ax_m(\omega) - Ax(\omega)\| \rightarrow 0,$$

cuando $m \rightarrow +\infty$.

En consecuencia tenemos

$$\int_{\Omega} \|x_m(\omega) - x(\omega)\| dP + \int_{\Omega} \|Ax_m(\omega) - Ax(\omega)\| dP \rightarrow 0,$$

cuando $m \rightarrow +\infty$. Entonces

$$\int_{\Omega} x_m(\omega) dP \rightarrow \int_{\Omega} x(\omega) dP,$$

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

y

$$\int_{\Omega} Ax_m(\omega) dP \rightarrow \int_{\Omega} Ax(\omega) dP.$$

Pero para funciones simple vale

$$\int_{\Omega} Ax_m(\omega) dP = A \int_{\Omega} x_m(\omega) dP.$$

por lo tanto, por ser A un operador cerrado,

$$\int_{\Omega} Ax(\omega) dP = A \int_{\Omega} x(\omega) dP.$$

□

De gran interés resultan las variables aleatorias como operadores. Si U y H son espacios de Hilbert separables y $L = L(U, H)$ el conjunto de los operadores lineales acotados de U en H , entonces L es un espacio lineal y dotado con la norma del operador, resulta ser un espacio de Banach. Sin embargo, si ambos espacios son de dimensión infinita, entonces L no es espacio de Banach separable.

Ejemplo 17. Sea $U = H = L^2(\mathbb{R})$. para $t \in \mathbb{R}$ arbitrario se define la isometría $S(t) : H \rightarrow H$

$$S(t)x(z) = x(z+t), \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad x \in H.$$

Supongamos $s < t$, $x \in H$, entonces

$$\begin{aligned} |(S(t) - S(s))x(z)| &= |x(z+t) - x(z+s)| = |S(s)[S(t-s)x(z) - x(z)]| \\ &= |S(s)||S(t-s)x(z) - x(z)| = |S(t-s)x(z) - x(z)| \end{aligned}$$

Si $x \in H$ y tiene soporte en el intervalo $(\frac{s-t}{2}, \frac{t-s}{2})$, entonces x y $S(t-s)x$ tienen soporte disjuntos y por lo tanto, se obtiene $|(S(t) - S(s))x|^2 = 2|x|^2$. Por lo tanto por la norma del supremo se obtiene

$$\|S(t) - S(s)\| \geq \sqrt{2},$$

resultando de esta forma que L no es separable.

La no separabilidad de L trae como consecuencia lo siguiente:

- 1) Si L tiene una función medible $f(t)$, entonces existiría una sucesión de funciones simples $\{\phi_n(t)\}$ tal que $\lim \phi_n(t) = f(t)$, pero esto no puede ser por la no separabilidad de L . La σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(L)$ correspondiente a L es tan abundante que incluso las funciones simples no son medibles.

Por ejemplo, el operador $S(t)$ definido anteriormente no es medible considerado como aplicación de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ en $(L, \mathcal{B}(L))$. En efecto: fijemos un subconjunto Γ tal que Γ no es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$. Como todo conjunto de Borel en $\mathbb{R}$ es

un conjunto medible, se tiene como consecuencia que Γ no es medible. Definamos un subconjunto abierto $D \in I$

$$D = \{G \in L : \|G - S(t)\| < \sqrt{2}/2, \text{ para algún } t \in \Gamma\}.$$

Ya que D es un conjunto de Borel perteneciente a $\mathcal{B}(L)$, y $S^{-1}(t)(D) = \Gamma \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $S(t)$ no puede ser medible.

- 2) La ausencia de medibilidad de L implica que la definición de Bochner no puede aplicarse directamente a funciones L -valuadas. Superamos esta dificultad introduciendo un concepto de medibilidad mas débil.

Definición 1.49. Una función $\Phi(\cdot) : \Omega \rightarrow L$ se dice fuertemente medible si para $u \in U$ arbitrario, la función $\Phi(\cdot)u$ es medible como aplicación $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (H, \mathcal{B}(H))$.

Sea $\mathcal{L}$ la σ -álgebra de subconjuntos de L que contiene a todos los conjuntos de la forma

$$\mathcal{L} = \{\Phi \in L : \Phi u \in A, u \in U, A \in \mathcal{B}(H)\}, \quad (1.43)$$

entonces $\Phi : \Omega \rightarrow L$ es una aplicación fuertemente medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(L, \mathcal{L})$. Estos elementos de $\mathcal{L}$ se llaman fuertemente medibles. Si P es no-negativo, no necesariamente normalizado sobre $\mathcal{F}$, entonces Φ es Bochner integrable si para $u \in U$ la función $\Phi(\cdot)u$ es Bochner integrable y existe un operador lineal acotado $\Psi \in L(U, H)$ tal que:

$$\int_{\Omega} \Phi(\omega)u dP = \Psi u, u \in U.$$

El operador Ψ se denota entonces como

$$\Psi = \int_{\Omega} \Phi(\omega) dP,$$

y la llamaremos la integral fuerte de Bochner de Φ . Si U y H son espacios de Banach separable entonces $\|\Phi(\cdot)\|$ es una función medible y

$$\|\Psi\| \leq \int_{\Omega} \|\Phi(\omega)\| dP.$$

Sean U y H espacios de Hilbert separables y sea $L(U, H)$ el espacio de todos los operadores lineales acotados de U en H . Si nos restringimos a espacios más pequeños, por ejemplo, el espacio $L_1(U, H)$ de todos los operadores nucleares de U en H o el espacio $L_2(U, H)$ de todos los operadores de Hilbert-Schmidt de U en H (ver Apéndice), entonces el problema de la no medibilidad anterior no aparece. Esto se debe a L_1 y L_2 son espacios de Banach separables y además son subconjuntos fuertemente medibles de $L(U, H)$.

7. Esperanza Condicional.

La bibliografía usada en esta sección es el libro de Shirayev [46].

Para justificar la existencia de la esperanza condicional como una función medible, necesitamos el Teorema de Radon-Nykodym.

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

Sea x una variable aleatoria para el cual $\mathbf{E}(x)$ está definida. Entonces por la propiedad (d) de la esperanza, sección 5.1, la función de conjuntos

$$Q(A) \equiv \int_A x dP, \quad A \in \mathcal{F}. \quad (1.44)$$

es bien definida. Vamos a mostrar que esta función es aditiva numerable.

Supongamos primero que x es no-negativa. Si $A_1, A_2, \dots$ son subconjuntos de $\mathcal{F}$, disjuntos por pares y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces

$$\begin{aligned} Q(A) &= \int_A x dP = \mathbf{E}(x \cdot I_A) = \mathbf{E}(x \cdot I_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}) = \mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x \cdot I_{A_n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(x \cdot I_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n). \end{aligned}$$

Si x es una variable aleatoria arbitraria para el cual $\mathbf{E}(x)$ es bien definida, la aditividad numerable de $Q(A)$ sigue de la representación

$$Q(A) = Q^+(A) - Q^-(A), \quad (1.45)$$

donde

$$Q^+(A) = \int_A x^+ dP, \quad Q^-(A) = \int_A x^- dP.$$

Si $\mathbf{E}(x)$ es finito, $Q = Q(A)$ es una medida signada numerablemente aditiva representable como $Q = Q_1 - Q_2$ donde al menos una de ellas Q_1 o Q_2 es finita.

$Q = Q(A)$ tiene la propiedad de continuidad absoluta con respecto a P :

$$\text{si } P(A) = 0 \text{ entonces } Q(A) = 0 \quad A \in \mathcal{F},$$

se denota por $Q \ll P$.

De ésta forma $Q = Q(A)$ considerada como una función de conjuntos sobre $\mathcal{F}$, es una medida signada que es absolutamente continua con respecto a P .

Teorema 1.50. (Radon-Nikodym)

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, μ una medida σ -finita, y λ una medida signada absolutamente continua con respecto a μ . Entonces existe una función $\mathcal{F}$ -medible $f = f(\omega)$ tal que

$$\lambda(A) = \int_A f(\omega) d\mu(\omega), \quad A \in \mathcal{F}. \quad (1.46)$$

La función $f = f(\omega)$ es única salvo un conjunto de medida μ cero: si $h = h(\omega)$ es otra función medible tal que

$$\lambda(A) = \int_A f(\omega) d\mu(\omega) \quad A \in \mathcal{F},$$

entonces $\mu\{\omega : f(\omega) \neq h(\omega)\} = 0$.

La función $f = f(\omega)$ en (1.46) se llama la derivada de Radon-Nikodým o la densidad de la medida λ con respecto a μ , denotada por $d\lambda/d\mu$ o $(d\lambda/d\mu)(\omega)$.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G}$ una σ -álgebra, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ es una sub σ -álgebra de $\mathcal{F}$, y sea $x = x(\omega)$ una variable aleatoria.

Definición 1.51. La esperanza condicional de una variable aleatoria no-negativa x , $E(x) < +\infty$, con respecto a la sub σ -álgebra $\mathcal{G}$, es una variable aleatoria no-negativa denotada por $E(x|\mathcal{G})$ o $E(x|\mathcal{G})(\omega)$, tal que

- (a) $E(x|\mathcal{G})$ es $\mathcal{G}$ -medible;
- (b) para todo $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A x dP = \int_A E(x|\mathcal{G}) dP \quad (1.47)$$

La esperanza condicional $E(x|\mathcal{G})$ de cualquier variable aleatoria con respecto a la σ -álgebra $\mathcal{G}$, puede ser definida si

$$\min(E(x^+|\mathcal{G}), E(x^-|\mathcal{G})) < +\infty \text{ c.s.},$$

viene dada por la fórmula

$$E(x|\mathcal{G}) \equiv E(x^+|\mathcal{G}) - E(x^-|\mathcal{G}).$$

De acuerdo con el Teorema de Radon-Nykodym, la esperanza condicional está definida salvo un conjunto de P -medida cero. En otras palabras, $E(x|\mathcal{G})$ se puede definir como una función $\mathcal{G}$ -medible para el cual $Q(A) = \int_A f(\omega) dP$ con $A \in \mathcal{G}$, donde Q es una medida absolutamente continua con respecto a P , es decir, si $P(A) = 0$ entonces $Q(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$, y $f(\omega)$ una función $\mathcal{F}$ -medible.

De acuerdo con el Teorema de Radon-Nikodym,

$$E(x|\mathcal{G}) \equiv \frac{dQ}{dP}(\omega),$$

es decir la esperanza condicional es justamente la derivada de Radon-Nikodym de Q con respecto P considerado sobre $(\Omega, \mathcal{G})$.

7.1. Propiedades de la Esperanza Condicional. Supongamos que la esperanza está definida para todas las variables aleatorias que consideremos y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

A*. Si C es una constante y $x = C$ (c.s.), entonces $E(x|\mathcal{G}) = C$ (c.s.).

DEMOSTRACIÓN. Una función constante es medible con respecto a $\mathcal{G}$. Por lo tanto, ya que $x = C$ (c.s.) y la propiedad de esperanza (g) se tiene

$$\int_A E(x|\mathcal{G}) dP = \int_A x dP = \int_A C dP, \quad A \in \mathcal{G}.$$

□

B*. Si $x \leq y$ (c.s.) entonces $E(x|\mathcal{G}) \leq E(y|\mathcal{G})$ (c.s.).

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

DEMOSTRACIÓN. Si $x \leq y$ (c.s.), entonces por la propiedad (B) se tiene

$$\int_A E(x|\mathcal{G})dP = \int_A xdP \leq \int_A ydP = \int_A E(y|\mathcal{G})dP \quad A \in \mathcal{G}.$$

□

C*. $|E(x|\mathcal{G})| \leq E(|x||\mathcal{G})$ (c.s.).

DEMOSTRACIÓN. De la prueba anterior y el hecho que $-|x| \leq x \leq |x|$ se tiene la prueba. □

D* Si a, b son constantes y $aE(x) + bE(y)$ son definidas, entonces

$$E(ax + by|\mathcal{G}) = aE(x|\mathcal{G}) + bE(y|\mathcal{G}).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $A \in \mathcal{G}$ entonces

$$\begin{aligned} \int_A (ax + by)dP &= \int_A axdP + \int_A bydP \\ &= \int_A aE(x|\mathcal{G})dP + \int_A bE(y|\mathcal{G})dP \\ &= \int_A [aE(x|\mathcal{G}) + bE(y|\mathcal{G})]dP \end{aligned}$$

□

E* Sea $\mathcal{F}_* = \{\phi, \Omega\}$ la σ -álgebra trivial. Entonces

$$E(x|\mathcal{F}_*) = E(x) \text{ (c.s.)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Esta propiedad sigue por la observación que $E(x)$ es una función $\mathcal{F}_*$ -medible y si $A = \Omega$ o $A = \phi$ entonces

$$\int_A xdP = \int_A E(x)dP.$$

□

F* $E(x|\mathcal{F}) = x$ (c.s.).

DEMOSTRACIÓN. Si x es $\mathcal{F}$ -medible y

$$\int_A xdP = \int_A E(x|\mathcal{F})dP \quad A \in \mathcal{F},$$

tenemos $E(x|\mathcal{G}) = x$ (c.s.). □

G* $E(E(x|\mathcal{G})) = E(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Sigue aplicando **E*** y **H*** tomando $\mathcal{G}_1 = \{\phi, \Omega\}$ y $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$

□

H* Si $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, entonces

$$E(E(x|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(x|\mathcal{G}_1) \text{ (c.s.)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \in \mathcal{G}_1$; entonces

$$\int_A E(x|\mathcal{G}_1)dP = \int_A xdP,$$

ya que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, tenemos que $A \in \mathcal{G}_2$ en consecuencia

$$\int_A E(E(x|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)dP = \int_A E(x|\mathcal{G}_2)dP = \int_A xdP.$$

En consecuencia, cuando $A \in \mathcal{G}_1$,

$$\int_A E(x|\mathcal{G}_1)dP = \int_A E(E(x|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)dP,$$

por la propiedad **I** se tiene

$$E(x|\mathcal{G}_1) = E(E(x|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) \text{ (c.s.)}.$$

□

I* Si $\mathcal{G}_1 \supseteq \mathcal{G}_2$, entonces

$$E(E(x|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(x|\mathcal{G}_2) \text{ (c.s.)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $A \in \mathcal{G}_1$, entonces por la definición de $E(E(x|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)$

$$\int_A E(E(x|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)dP = \int_A E(x|\mathcal{G}_2)dP.$$

La función $E(X|\mathcal{G}_2)$ es $\mathcal{G}_2$ -medible, también es $\mathcal{G}_1$ -medible.

Se sigue entonces que $E(x|\mathcal{G}_2)$ es una variante de la esperanza $E(E(x|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)$.

□

J* Sea x una variable aleatoria independiente de la sub- σ -álgebra $\mathcal{G}$ (es decir, independiente de I_A para todo $A \in \mathcal{G}$, donde I_A es la función indicadora para un conjunto $A \in \mathcal{G}$). Entonces

$$E(x|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(x) \text{ (c.s.)}. \quad (1.48)$$

DEMOSTRACIÓN. Solo debemos ver que:

$$\int_A \mathbf{E}(x)dP = \int_A xdP \text{ para todo } A \in \mathcal{G}. \quad (1.49)$$

Para todo $A \in \mathcal{G}$ y ya que x es independiente de $\mathcal{G}$ se tiene

$$\int_A \mathbf{E}(x)dP = \int_{\Omega} I_A \mathbf{E}(x)dP = \int_{\Omega} I_A dP \cdot \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(I_A) \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(I_A \cdot x) = \int_A xdP,$$

por el Teorema 1.50 y la Definición 1.51 se obtiene (1.49)

□

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

K* Sea z una variable aleatoria $\mathcal{G}$ -medible, $\mathbf{E}(|z|) < +\infty$ y $\mathbf{E}(|xz|) < +\infty$. Entonces

$$E(xz|\mathcal{G}) = zE(x|\mathcal{G}) \text{ (c.s.)}.$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba depende del siguiente resultado: Sea $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias. Si $|x_n| \leq y$, con $\mathbf{E}(y) < \infty$ y $x_n \rightarrow x$ (c.s.), entonces

$$E(x_n|\mathcal{G}) \rightarrow E(x|\mathcal{G}) \text{ (c.s.)}$$

y

$$E(|x_n - x||\mathcal{G}) \rightarrow 0 \text{ (c.s.)}.$$

Vamos hacer la prueba de este resultado: sea

$$z_n = \sup_{m \geq n} |x_m - x|.$$

Ya que $x_n \rightarrow x$ (c.s.), tenemos que $z_n \downarrow 0$ (c.s.). La esperanza $\mathbf{E}(x_n)$ y $\mathbf{E}(x)$ son finitas; por las propiedades **D*** y **C***

$$\begin{aligned} |E(x_n|\mathcal{G}) - E(x|\mathcal{G})| &= |E(x_n - x|\mathcal{G})| \leq E(|x_n - x||\mathcal{G}) \\ &\leq E(z_n|\mathcal{G}). \end{aligned}$$

Ya que $E(z_{n+1}|\mathcal{G}) \leq E(z_n|\mathcal{G})$ (c.s.), el límite $h = \lim_n E(z_n|\mathcal{G})$ existe (c.s.). Entonces

$$0 \leq \int_{\Omega} h dP \leq \int_{\Omega} E(z_n|\mathcal{G}) dP = \int_{\Omega} z_n dP \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

La última ecuación viene del Teorema de Convergencia Dominada ya que $0 \leq z_n \leq 2y$, $\mathbf{E}(y) < +\infty$. Por lo tanto $\int_{\Omega} h dP = 0$ y en consecuencia, $h = 0$ (c.s.), por la propiedad de esperanza (h).

Ahora podemos probar la propiedad **K***. Sea $y = I_B$, $B \in \mathcal{G}$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \int_A xy dP &= \int_{A \cap B} x dP = \int_{A \cap B} E(x|\mathcal{G}) dP \\ &= \int_A I_B E(x|\mathcal{G}) dP = \int_A y E(x|\mathcal{G}) dP. \end{aligned}$$

Por la aditividad de la integral de Lebesgue, la ecuación

$$\int_A xy dP = \int_A y E(x|\mathcal{G}) dP \quad A \in \mathcal{G},$$

sigue siendo válida para suma de variables aleatorias simples $y = \sum_{k=1}^n y_k I_{B_k}$, $B_k \in \mathcal{G}$. Por lo tanto, por la propiedad (i), tenemos

$$E(xy|\mathcal{G}) = yE(x|\mathcal{G}) \text{ (c.s.)}. \quad (1.50)$$

Ahora, sea y alguna variable aleatoria $\mathcal{G}$ -medible con $\mathbf{E}(|y|) < +\infty$, y sea $\{y_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias simples $\mathcal{G}$ -medible, tal que $|y_n| \leq y$ y $y_n \rightarrow y$. Entonces por (1.50)

$$E(xy_n|\mathcal{G}) = y_n E(x|\mathcal{G}) \text{ (c.s.)}.$$

Es claro que $|xy_n| \leq |xy|$, donde $\mathbf{E}(|x_n|) < +\infty$ entonces $E(xy_n|\mathcal{G}) \rightarrow E(xy|\mathcal{G})$ (c.s.). Por lo tanto

$$y_n E(x|\mathcal{G}) \rightarrow y E(x|\mathcal{G}) \text{ (c.s.)}.$$

□

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$. Para todo $1 \leq p \leq +\infty$ denotamos por $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ el subespacio de las variables aleatorias $x \in L^p(\Omega)$ $\mathcal{G}$ -medibles. Con esta notación también denotamos a $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotado con la norma $\|x\|_p = (\mathbf{E}(\|x\|^p))^{1/p}$, $p \in [1, +\infty)$ es un espacio de Banach.

$L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P)$ es el rango de la proyección contractiva en $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si $p \neq 2$, se tiene que para la variable aleatoria $x \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la variable aleatoria $E(x|\mathcal{G})$ es el único elemento de $L^p(\Omega, \mathcal{G})$ con la propiedad que para todo $A \in \mathcal{G}$,

$$\int_A E(x|\mathcal{G}) dP = \int_A x dP.$$

Que sea contractiva, significa que

$$\|E(x|\mathcal{G})\|_p^p \leq E(\|x\|_p^p|\mathcal{G})$$

Para $p = 2$ esto es conocido, en efecto, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ admite la descomposición

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) \oplus L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)^\perp.$$

Esta proyección que tenemos en mente es la proyección ortogonal sobre $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ a lo largo de esta descomposición. La denotamos por

$$E(x|\mathcal{G}),$$

llamada la esperanza condicional de x dado $\mathcal{G}$. Nuevamente valen las propiedades (A*) – (K*) mencionadas anteriormente. Para mayor información ver el libro [42] página 153.

Definición 1.52. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{E}$ es un espacio de Banach separable y $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ una filtración, es decir, una colección de sub- σ -álgebras de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para $0 \leq s < t$. Un proceso estocástico $\{x(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$ con valores en $\mathcal{E}$, se dice martingala si

- (a) $\mathbf{E}(\|x(t)(\omega)\|) < +\infty$
- (b) $E(x(t)(\omega)|\mathcal{F}_s) = x(s)(\omega)$ (c.s.), para $0 \leq s < t$.

CAPÍTULO 1. PROCESOS ALEATORIOS

De acuerdo a esta definición se tiene

$$\int_F x(s)(\omega) dP = \int_F E(x(t)(\omega) | \mathcal{F}_s)(\omega) dP,$$

para todo $F \in \mathcal{F}_s$, $s < t$, $s, t \geq 0$.

Teorema 1.53. (Desigualdad de Doob). Ver Øksendal [44].

Si un proceso $\{M(t)(\omega)\}_{t \in \tau}$ con valores en $\mathbb{R}$ es una martingala tal que $t \rightarrow M(t)(\omega)$ es continua c.s, entonces para todo $p \geq 1$, $\tau \geq 0$ y para todo $\lambda > 0$

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |M(t)(\omega)| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^p} \mathbf{E}(|M(t)(\omega)|^p). \quad (1.51)$$

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 2

Integración Estocástica. Integral de Wiener

1. Introducción

La construcción de la integral estocástica puede comenzar con una explicación tomada del libro [44]. Consideremos el modelo de crecimiento de población

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = a(t)N(t), \\ N(0) = N_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $N(t)$ representa el tamaño de la población en el tiempo t , y $a(t)$ la velocidad de crecimiento en el tiempo t . Puede suceder que el crecimiento de población sea afectada por algún cambio ambiental manifestado en forma de ruido aleatorio, este cambio es expresado por el término $a(t)$ de la forma siguiente:

$$a(t) = r(t) + \text{"ruido"}. \quad (2.2)$$

Del término ruido solo se conoce su distribución de probabilidad y el término $r(t)$ se puede considerar no aleatorio.

De acuerdo a la situación planteada anteriormente, la ecuación (2.1) se puede expresar, usando la expresión (2.2), como

$$\frac{dN(t)}{dt} = (r(t) + \text{"ruido"})N(t). \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) podemos escribirla de tal forma que el término ruido sea expresado por medio de la derivada "informal" $\dot{w}(t)$ de un movimiento Browniano $\{w(t)\}_{t \geq 0}$ (ver [27]):

$$\frac{dN(t)}{dt} = b(t, N(t)) + \sigma(t, N(t))\dot{w}(t), \quad (2.4)$$

donde $b(t, N(t))$ y $\sigma(t, N(t))$ son funciones medibles de t y N .

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

El término $\dot{w}(t)$ puede combinarse con el diferencial dt para formar el diferencial $dw(t)$ de manera que la ecuación (2.4) puede escribirse en forma diferencial

$$dN(t) = b(t, N(t))dt + \sigma(t, N(t))dw(t). \quad (2.5)$$

Una versión discreta de la ecuación (2.5) puede ser la siguiente: sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \tau$, entonces

$$N_{k+1} - N_k = b(t_k, N_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, N_k)\Delta w_k, \quad (2.6)$$

donde

$$N_k = N(t_k), \quad w_k = w(t_k), \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad \Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k).$$

Si resolvemos (2.6) de forma iterativa para $k \geq 1$ se tiene la ecuación

$$N_k = N_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, x_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, x_j)\Delta w_j, \quad (2.7)$$

Tomando el limite cuando $\Delta t_j \rightarrow 0$ es posible probar que el lado derecho de (2.7) exista en algún sentido y obtener

$$N_t = N_0 + \int_0^t b(s, N_s)ds + \int_0^t \sigma(s, N_s)dw(s). \quad (2.8)$$

La ecuación (2.5) puede interpretarse como la ecuación integral estocástica expresada en (2.8). El proceso estocástico $\{N(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ significa que es solución de (2.8) bajo ciertas condiciones sobre $b(t, N_t)$ y $\sigma(t, N_t)$ y que la ecuación (2.8) ocurra casi siempre.

La idea en este sentido es verificar la existencia de la integral

$$\int_0^\tau \sigma(s, N_s)dw(s). \quad (2.9)$$

Por conveniencia, en general a la variable aleatoria $x(t, \omega)$ la escribiremos por $x(t)$ y consideraremos a $t \in [0, \tau]$, $\tau > 0$. Así el proceso estocástico $X = \{x(t, \omega)\}_{t \in [0, \tau]}$ se escribe como $X = \{x(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ y por lo tanto al movimiento Browniano lo denotaremos como $W = \{w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$.

Definición 2.1. Ver ϕ ksendal [44].

Sea $W = \{w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ el movimiento Browniano definido sobre Ω con valores en $\mathbb{R}$.

Entonces definimos como $\mathcal{F}_t$, la σ -álgebra generada por las variables aleatorias $w(s)$ con $0 \leq s \leq t$, en notación, la expresamos como $\sigma\{w(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Comenzamos por la definición de integral estocástica para la clase de funciones simples $f : [0, \tau] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y luego la extendemos a funciones más generales por un procedimiento de aproximación. La clase de funciones para la que será definida nuestra integral es la siguiente:

Definición 2.2. Ver ϕ ksendal [44].

Sea $0 \leq t \leq \tau$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$ y $V = V(0, \tau)$ la clase de funciones

$$f(t, \omega) : [0, \tau] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

tal que

- i) $(t, \omega) \longrightarrow f(t, \omega)$ es $\mathcal{B}([0, \tau]) \times \mathcal{F}_t$ -medible, donde $\mathcal{B}([0, \tau])$ la sigma álgebra de Borel de $[0, \tau]$
- ii) $f(t, \omega)$ es $\mathcal{F}_t$ -adaptada
- iii) $\mathbf{E} \left(\int_0^\tau f(t, \omega)^2 dt \right) < +\infty$.

Definamos la integral de Itô para funciones de $f \in V$:

$$\mathcal{I}[f](\omega) = \int_0^\tau f(t, w) dw(t)(\omega),$$

donde $\{w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ es un movimiento Browniano 1-dimensional.

La idea es la siguiente:

1. Definamos $\mathcal{I}[\phi]$ para una clase de funciones simple ϕ .
2. Luego mostramos que $f \in V$ puede aproximarse (de forma apropiada) por funciones simples ϕ y luego pasamos al límite.

Definición 2.3. Ver ϕ ksendal [44].

Una función $\phi \in V$ se llama simple, si tiene la forma

$$\phi(t, \omega) = \sum_{j=0}^n x_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1}]}(t),$$

donde $x_j(\omega) = x(t_j, \omega)$ y $I_{[t_j, t_{j+1}]}(t)$ es la función indicadora. Ya que $\phi \in V$, cada $x_j(\omega)$ es $\mathcal{F}_{t_j}$ -medible, entonces definimos la integral para funciones simples como

$$\int_0^\tau \phi(t, \omega) dw(t) = \sum_{j=0}^n x_j(\omega) [w_{t_{j+1}} - w_{t_j}](\omega).$$

Tenemos ahora la siguiente relación:

Lema 2.4. (La Isometría de Itô) Ver ϕ ksendal [44].

Si $\phi(t, \omega)$ es una función simple y acotada entonces

$$\mathbf{E} \left(\left(\int_0^\tau \phi(t, \omega) dw(t) \right)^2 \right) = \mathbf{E} \left(\int_0^\tau \phi(t, \omega)^2 dt \right). \quad (2.10)$$

Usemos la isometría (2.10) para extender la definición de $\mathcal{I}[\phi]$ de funciones simples a funciones más generales pertenecientes a V .

Paso 1:

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

Sea $g \in V$ acotada y $g(\cdot, \omega)$ continua para cada ω . Entonces existen funciones simples $\phi_n \in V$ tal que

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\tau (g - \phi_n)^2 dt \right) \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Paso 2:

Sea $h \in V$ acotada. Entonces existen funciones $g_n \in V$, $n = 1, 2, \dots$, acotadas tal que $g_n(\cdot, \omega)$ es continua para todo ω y n tal que

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\tau (h - g_n)^2 dt \right) \longrightarrow 0.$$

Paso 3:

Sea $f \in V$. Entonces existe una sucesión $\{h_n\} \subset V$ tal que h_n es acotada para cada n tal que

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\tau (f - h_n)^2 dt \right) \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

La conclusión sigue por el Teorema de Convergencia Dominada. Esto completa el procedimiento de aproximación. Para concluir la definición de la integral de Itô, sea $f \in V$ y escojamos $\phi_n \in V$ funciones simples según los pasos del 1 al 3 tal que

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\tau |f - \phi_n|^2 dt \right) \longrightarrow 0.$$

Entonces se define la integral estocástica como

$$\int_0^\tau f(t, \omega) dw(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\tau \phi_n(t, \omega) dw(t).$$

Este limite existe como un elemento de $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ya que la sucesión $\left\{ \int_0^\tau \phi_n(t, \omega) dw(t) \right\}$ es de Cauchy por la ecuación (2.10). De aquí obtenemos la siguiente definición:

Definición 2.5. La Integral de Itô

Sea $f \in V$. La integral de Itô de f se define por

$$\int_0^\tau f(t, w) dw(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\tau \phi_n(t, w) dw(t),$$

donde ϕ_n , $n = 1, 2, \dots$, son funciones simples tal que

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\tau (f(t, w) - \phi_n(t, w))^2 dt \right) \longrightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty.$$

Corolario 2.6. (La Isometría de Itô) Para todo $f \in V$, se tiene

$$\mathbf{E} \left(\left(\int_0^\tau f(t, \omega) dw(t) \right)^2 \right) = \mathbf{E} \left(\int_0^\tau f^2(t, \omega) dt \right). \quad (2.11)$$

Corolario 2.7. Si $f(t, \omega) \in V$ y $f_n(t, \omega) \in V$ $n = 1, 2, \dots$ tal que

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\tau (f_n(t, \omega) - f(t, \omega))^2 dt \right) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty,$$

entonces

$$\int_0^\tau f_n(t, \omega) dw(t) \rightarrow \int_0^\tau f(t, \omega) dw(t) \text{ en } L^2(P) \text{ } n \rightarrow +\infty.$$

Teorema 2.8. Ver øksendal [44].

Sea $f \in V$. Entonces existe una versión continua de

$$\int_0^t f(s, \omega) dw(s), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (2.12)$$

es decir, existe un proceso estocástico continuo $\{x(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que

$$P\{\omega : x(t)(\omega) = \int_0^t f(s, \omega) dw(s)\} = 1 \quad \text{para todo } t, 0 \leq t \leq \tau.$$

A partir de ahora asumimos que

$$\int_0^t f(s, \omega) dw(s)$$

es la versión continua.

Corolario 2.9. Ver øksendal [44].

Sea $f(t, \omega) \in V$ para todo $t \in [0, \tau]$ Entonces

$$M(t) = \int_0^t f(s, \omega) dw(s)$$

es una martingala con respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, $t \in [0, \tau]$, y

$$P\{\omega : \sup_{0 \leq t \leq \tau} |M(t)| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{E} \left(\int_0^\tau f(s, \omega)^2 ds \right); \quad \lambda, \tau > 0$$

Teorema 2.10. Ver øksendal [44].

Sean $f, g \in V$, $u \in [0, \tau]$ y sea $\{\mathcal{F}_t\}$, $t \in [0, \tau]$, una filtración de la σ -álgebra $\mathcal{F}$.

Entonces

$$\text{i) } \int_0^\tau f dw(t) = \int_0^u f dw(t) + \int_u^\tau f dw(t) \text{ c.s.P}$$

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

- ii) $\int_0^\tau (cf + g)dw(t) = c \int_0^\tau f dw(t) + \int_0^\tau g dw(t) \quad (c = \text{cte}) \text{ c.s. } P$
- iii) $\mathbf{E} \left(\int_0^\tau f dw(t) \right) = 0$
- iv) $\int_0^\tau f dw(t)$ es $\mathcal{F}_\tau$ -medible.

Ejemplo 18. Asumiendo que $w(0) = 0$. Entonces

$$\int_0^t w(s)dw(s) = \frac{1}{2}w(t)^2 - \frac{1}{2}t.$$

DEMOSTRACIÓN. sea $\phi_n(s, \omega) = \sum_{j=0}^n w_j I_{[t_j, t_{j+1}]}(s)$, donde $w_j = w(t_j)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_0^t (\phi_n - w_s)^2 ds \right) &= \mathbf{E} \left(\sum_{j=0}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} (w_j - w_s)^2 ds \right) \\ &= \sum_{j=0}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2 \rightarrow 0 \quad \Delta t_j \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^t w_s dw(s) = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_0^t \phi_n dw(s) = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^n w_j \Delta w(t_j),$$

escogiendo que $t_j = j2^{-n}$ y si $n \rightarrow +\infty$ $\Delta t_j \rightarrow 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \Delta(w_j^2) &= w_{j+1}^2 - w_j^2 = (w_{j+1} - w_j)^2 + 2w_j(w_{j+1} - w_j) \\ &= (\Delta w_j)^2 + 2w_j \Delta w_j, \end{aligned}$$

ya que $w_0 = 0$,

$$w_t^2 = \sum_{j=0}^n \Delta(w_j^2) = \sum_{j=0}^n (\Delta w_j)^2 + 2 \sum_{j=0}^n w_j \Delta w_j.$$

Así

$$\sum_{j=0}^n w_j \Delta w_j = \frac{1}{2}w_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (\Delta w_j)^2 \xrightarrow{\Delta t_j \rightarrow 0} \frac{1}{2}w_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

El término extra $-\frac{1}{2}t$ en la integral estocástica muestra que no se comporta como una integral ordinaria. $\square$

El ejemplo anterior ilustra el hecho que la definición de la integral de Itô no es útil para evaluar una integral dada. Es parecido a la integral de Riemann, donde no se usa la definición básica sino el Teorema Fundamental del Calculo y la regla de la cadena para un calculo explícito de la integral. Sin embargo en el calculo estocástico no poseemos teoría de diferenciación, solamente teoría de integración. Afortunadamente se tiene la versión de la regla de la cadena para la integral de Itô llamada la fórmula de Itô.

Definición 2.11. Ver øksendal [44].

$\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0, \tau)$ denota la clase de procesos $\{f(t, \omega)\}_{t \in [0, \tau]}$ con valores en $\mathbb{R}$ el cual satisfacen las siguientes condiciones:

- i) $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ es $\mathcal{B}([0, \tau]) \times \mathcal{F}_t$ -medible, donde $\mathcal{B}([0, \tau])$ la sigma álgebra de Borel de $[0, \tau]$,
- ii) Existe una familia creciente de sub- σ -álgebras $\{\mathcal{H}_t : t \geq 0\}$ tal que
 - a) El movimiento Browniano $\{w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ es una martingala con respecto a $\mathcal{H}_t$,
 - b) $f(t, \omega)$ es $\mathcal{H}_t$ -adaptada.
- iii)

$$P\left\{\omega : \int_0^\tau f(s, \omega)^2 ds < +\infty\right\} = 1. \quad (2.13)$$

Denotamos $\mathcal{W}_{\mathcal{H}} = \bigcap_{\tau > 0} \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0, \tau)$.

Definición 2.12. Ver øksendal [44].

Sea $\{w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ un movimiento Browniano sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $\mathbb{R}$. Un proceso de Itô unidimensional ó integral estocástica es un proceso estocástico $\{x(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $\mathbb{R}$ de la forma

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dw(s), \quad (2.14)$$

donde $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$, tal que

$$P\left\{\omega : \int_0^t v(s, \omega)^2 ds < +\infty \text{ para todo } t \geq 0\right\} = 1.$$

Suponemos además que u es $\mathcal{H}_t$ -adaptada y

$$P\left\{\omega : \int_0^t |u(s, \omega)| ds < +\infty \text{ para todo } t \geq 0\right\} = 1.$$

El proceso de Itô dada por la ecuación (2.14) la escribiremos en forma diferencial mas corta

$$dx(t) = udt + vdw(t). \quad (2.15)$$

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

Teorema 2.13. (Fórmula de Itô unidimensional) Ver Øksendal [44].

Sea $X = \{x(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso de Itô dado por

$$dx(t) = udt + vdw(t).$$

Sea $g(t, x) \in C^2([0, +\infty] \times \mathbb{R})$, es decir, funciones dos veces continuamente diferenciables sobre $[0, +\infty] \times \mathbb{R}$. Entonces

$$y(t) = g(t, x(t))$$

es también un proceso de Itô, y

$$dy(t) = \frac{\partial g(t, x(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, x(t))}{\partial x} dx(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, x(t))}{\partial x^2} \cdot (dx(t))^2,$$

donde $(dx(t))^2 = dx(t) \cdot dx(t)$ se calcula de acuerdo a la siguiente regla

$$dt \cdot dt = dt \cdot dw(t) = dw(t) \cdot dt = 0, \quad dw(t) \cdot dw(t) = dt$$

Ejemplo 19. La integral del Ejemplo (18) puede resolverse de la siguiente forma.

Sea $x(t, \omega) = w(t)$ y $g(t, x) = \frac{1}{2}x^2$. Entonces

$$y(t) = g(t, w(t)) = \frac{1}{2}w(t)^2.$$

por la fórmula de Itô se obtiene

$$dy(t) = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dw(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dw(t))^2 = w(t)dw(t) + \frac{1}{2}(dw(t))^2 = w(t)dw(t) + \frac{1}{2}dt,$$

de aquí que

$$d\left(\frac{1}{2}\right) = w(t)dw(t) + \frac{1}{2}dt,$$

es decir,

$$\frac{1}{2}w(t)^2 = \int_0^t w(s)dw(s) + \frac{1}{2}dt.$$

Como vimos anteriormente en el Corolario 2.9, si $f(t, \omega) \in V$ entonces

$$M(t) = \int_0^t f(s, \omega)dw(s)$$

es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \tau]}$. El Teorema de Representación de Martingalas demuestra que el recíproco también es cierto:

Teorema 2.14. Ver Øksendal [44]. (Teorema de Representación de Martingalas)

Sea $\{w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ un movimiento Browniano definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $\mathbb{R}$. Supongamos que $\{M(t)\}_{t \geq 0}$ es una $\mathcal{F}_t$ -martingala con respecto a P y $M(t) \in L^2(P)$ para

todo $t \geq 0$. Entonces existe un único proceso $\{g(s, \omega)\}_{s \geq 0}$ tal que $g(t, \omega) \in V(0, t)$ para todo $t \geq 0$ y

$$M(t, \omega) = \mathbf{E}(M(0)) + \int_0^t g(s, \omega) dw(s), \quad \text{c.s., para todo } t \geq 0. \quad (2.16)$$

2. Variables aleatorias Gaussianas con valores en un espacio de Banach

En la sección 3.1 del Capítulo 1 encontramos que una variable aleatoria x definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $\mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria Gaussiana si su función característica viene dada por

$$\varphi(\lambda) = e^{i\langle \lambda, m \rangle} e^{-\frac{1}{2} \langle Q\lambda, \lambda \rangle}, \quad (2.17)$$

donde m es el vector de medias y Q es matriz definida positiva llamada matriz de covarianza.

Ahora vamos a estudiar el caso de una variable aleatoria Gaussiana x definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en un espacio de Banach $\mathcal{E}$.

Teorema 2.15. Ver Shiriyayev [46].

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E}), \mu)$ un espacio de medida donde μ es la medida inducida por P en el espacio $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E}))$. Sea x una variable aleatoria con valores en $\mathcal{E}$, entonces

$$\int_B g(s) d\mu(s) = \int_{\{\omega: x^{-1}(B)\}} g(x(\omega)) dP(\omega),$$

para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ y para toda función $g = g(s)$ medible con respecto a $\mathcal{E}$, $s \in \mathcal{E}$.

En particular, si $B = \mathcal{E}$ obtenemos que

$$\int_{\mathcal{E}} g(s) d\mu(s) = \int_{\Omega} g(x(\omega)) dP(\omega) = \mathbf{E}(g(x(\omega))). \quad (2.18)$$

Por la ecuación (2.18), se obtiene que la función característica φ de una variable aleatoria Gaussiana x con valores en $\mathbb{R}^n$ y medida inducida μ en el espacio $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E}))$, puede escribirse en la forma:

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}(e^{i\langle \lambda, x \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \lambda, x \rangle} d\mu(x), \quad (2.19)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Denotaremos por $\mathcal{E}^*$ el espacio dual topológico, es decir, el conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas definidas sobre $\mathcal{E}$ con valores en $\mathbb{R}$. Un elemento de $\mathcal{E}^*$ se denotará por x^* . Cuando $x^* \in \mathcal{E}^*$ y $x \in \mathcal{E}$, la notación $\langle x, x^* \rangle := x^*(x)$, resalta la dualidad existente entre la acción de x^* sobre x cuando x^* es fijo por una parte y la acción de x sobre x^* cuando x es fijo por otro.

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

$\mathcal{E}^*$ es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|x^*\|_{\mathcal{E}^*} := \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Para mayores detalles ver [26].

Denotaremos por $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ la norma en el espacio de Banach $\mathcal{E}$. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, denotaremos por $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ al conjunto de todas las clases de equivalencia de las variables aleatorias definidas sobre Ω con valores en $\mathcal{E}$ con la norma definida por

$$\|x\|_p = \mathbf{E}(\|x\|_{\mathcal{E}}^p)^{1/p}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty.$$

Definición 2.16. Ver Neerven: J [42].

Una variable aleatoria x definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en el espacio de Banach $\mathcal{E}$ es Gaussiana, si la variable aleatoria $\langle x, x^* \rangle$ definida sobre Ω con valores en $\mathbb{R}$ es Gaussiana para todo $x^* \in \mathcal{E}^*$.

En esta sección vamos a suponer que una variable aleatoria Gaussiana $\langle x, x^* \rangle$ tiene media $\mathbf{E}(\langle x, x^* \rangle) = 0$.

Corolario 2.17. Ver Neerven: J [42].

Si x es una variable aleatoria gaussiana con valores en $\mathcal{E}$ entonces, $\mathbf{E}(x) = 0$

Prueba: Ya que $\langle x, x^* \rangle$ es una variable aleatoria Gaussiana con valores en $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathbf{E}(\langle x, x^* \rangle) = 0$. En consecuencia, Para todo $x^* \in \mathcal{E}^*$, tenemos que $\langle \mathbf{E}(x), x^* \rangle = \mathbf{E}(\langle x, x^* \rangle) = 0$ por el Teorema de Hahn-Banach, existe $x^* \in \mathcal{E}^*$, $x^* \neq 0$ tal que $\langle \mathbf{E}(x), x^* \rangle = 0$ por lo tanto $\mathbf{E}(x) \equiv 0$.

A fin de caracterizar variables aleatorias Gaussiana en términos de su transformada de Fourier, presentamos la siguiente terminología

Definición 2.18. Ver Neerven: J [42].

Un operador acotado $Q \in L(\mathcal{E}^*, \mathcal{E})$ se llama

- Positivo, si $\langle Qx^*, x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x^* \in \mathcal{E}^*$
- Simétrico, si $\langle Qx^*, y^* \rangle = \langle Qy^*, x^* \rangle \quad \forall x^*, y^* \in \mathcal{E}^*$

Teorema 2.19. Ver Neerven: J [42].(Fernique)

Sea x una variable aleatoria Gaussiana con valores en $\mathcal{E}$ tal que $\mathbf{E}(\langle x, x^* \rangle) = 0$. Entonces existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\mathbf{E} \left(c^{\beta \|x\|_{\mathcal{E}}^2} \right) < +\infty.$$

Denotemos por $L(\mathcal{E}^*, \mathcal{E})$ el conjunto de todos los operadores lineales definidos sobre $\mathcal{E}^*$ con valores en $\mathcal{E}$.

Proposición 2.20. Ver Neerven: J [42].

Para una variable aleatoria x con valores en $\mathcal{E}$ tal que $\mathbf{E}(\langle x, x^* \rangle) = 0$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) x es una variable aleatoria Gaussiana con valores en $\mathcal{E}$;
- (2) Existe un operador simétrico positivo $Q \in L(\mathcal{E}^*, \mathcal{E})$ tal que la función característica de x es dada por

$$\mathbf{E}(e^{i\langle x, x^* \rangle}) = e^{-\frac{1}{2}\langle Qx^*, x^* \rangle}, \quad x^* \in \mathcal{E}^*. \quad (2.20)$$

El operador Q está únicamente determinado por (2.20). Más aún,

$$\mathbf{Var}(\langle x, x^* \rangle) = \mathbf{E}(\langle x, x^* \rangle^2) = \langle Qx^*, x^* \rangle, \quad x^* \in \mathcal{E}^*.$$

Prueba:

(1) $\Rightarrow$ (2).

Ya que la variable aleatoria x es de cuadrado integrable por el Teorema de Fernique 2.19, la variable aleatoria $\langle x, x^* \rangle x$ es integrable y podemos definir

$$Qx^* := \mathbf{E}(\langle x, x^* \rangle x), \quad x^* \in \mathcal{E}^*.$$

De $\langle Qx^*, y^* \rangle = \mathbf{E}(\langle x, x^* \rangle \langle x, y^* \rangle)$, vemos que Q es positivo y simétrico.

Ya que $\langle x, x^* \rangle$ es una variable aleatoria gaussiana con varianza $\mathbf{E}(\langle x, x^* \rangle^2) = \langle Qx^*, x^* \rangle$, tenemos

$$\mathbf{E}(e^{i\langle x, x^* \rangle}) = e^{-\frac{1}{2}\langle Qx^*, x^* \rangle}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1).

Reemplazando x^* por ξx^* en la afirmación, vemos que la función característica de $\langle x, x^* \rangle$ es igual a

$$\mathbf{E}(e^{i\langle x, \xi x^* \rangle}) = e^{-\frac{1}{2}\langle Q\xi x^*, \xi x^* \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\xi^2 \langle Qx^*, x^* \rangle}.$$

Así $\langle x, x^* \rangle$ es una variable aleatoria Gaussiana con varianza $\langle Qx^*, x^* \rangle$.

Si R es otro operador simétrico positivo, que satisface (2.20), entonces se obtiene la igualdad $\langle Qx^*, x^* \rangle = \langle Rx^*, x^* \rangle$ para todo $x^* \in \mathcal{E}^*$, esto implica que $\langle Qx^*, x^* \rangle = \langle Rx^*, y^* \rangle$ para todo $x^*, y^* \in \mathcal{E}^*$, y por lo tanto $Q = R$.

El operador Q se llama el operador de covarianza de x . Debemos destacar que no todo operador simétrico positivo $Q \in L(\mathcal{E}^*, \mathcal{E})$ es la covarianza de una variable aleatoria x con valores en $\mathcal{E}$. Incluso puede pasar si la variable aleatoria x tiene valores en un espacio de Hilbert separable infinito dimensional. Un ejemplo claro de esto ocurre si Q es el operador identidad. Véase el Teorema de Sazanov, ejercicio numero 2 página 54 de [42].

Corolario 2.21. Ver Neerven: J [42].

Toda variable aleatoria Gaussiana con valores en $\mathcal{E}$ y tal que tiene $\mathbf{E}(\langle x, x^* \rangle) = 0$ es simétrica.

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

DEMOSTRACIÓN. x y $-x$ tienen la misma función característica. $\square$

Ahora vamos a suponer que H es un espacio de Hilbert separable con producto interno denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $\| \cdot \|_H$.

Definición 2.22. Ver Neerven: J [42].

Una variable aleatoria x definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en el espacio de Hilbert H es Gaussiana, si la variable aleatoria $\langle x, h \rangle$ definida sobre Ω con valores en $\mathbb{R}$ es Gaussiana para todo $h \in H$.

Por la Proposición 2.20, una variable aleatoria x es Gaussiana si y solo si, su función característica viene dada por la ecuación (2.20).

Para un operador Q arbitrario existe una única medida Gaussiana denotada por $\mathcal{N}(0, Q)$ tal que su función característica viene dada por la ecuación (2.20).

Definición 2.23. Ver Da Prato [13].

Sea H un espacio de Hilbert separable. Una medida de probabilidad μ definida sobre $(H, \mathcal{B}(H))$ se llama medida Gaussiana si para todo $h \in H$ existe Q , tal que

$$\mu\{x \in H : \langle h, x \rangle \in A\} = \mathcal{N}(0, Q), \quad (2.21)$$

para todo $A \in \mathcal{B}(H)$.

Proposición 2.24. Ver Da Prato [13].

Sea H un espacio de Hilbert separable y x una variable aleatoria Gaussiana definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $(H, \mathcal{B}(H))$ y tal que la media $E(x) = 0$ y su función de covarianza es Q . Entonces Q es un operador de tipo traza.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función característica φ de una medida Gaussiana μ ,

$$\varphi(h) = \int_H e^{i\langle h, x \rangle} d\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\langle Qh, h \rangle}, \quad h \in H.$$

Para $c > 0$ arbitrario, tenemos

$$\begin{aligned}
 1 - \varphi(h) &= \int_H d\mu(x) - \int_H e^{i\langle h, x \rangle} d\mu(x) \\
 &= \int_H [1 - \cos\langle h, x \rangle] d\mu(x) \\
 &= \int_{\{\|x\|_H \leq c\}} [1 - \cos\langle h, x \rangle] d\mu(x) + \int_{\{\|x\|_H > c\}} [1 - \cos\langle h, x \rangle] d\mu(x) \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\{\|x\|_H \leq c\}} \langle h, x \rangle^2 d\mu(x) + \int_{\{\|x\|_H > c\}} 2 d\mu(x) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\{\|x\|_H \leq c\}} \langle h, x \rangle^2 d\mu(x) + 2\mu\{\|x\|_H > c\} \\
 &\leq \frac{1}{2} \langle Q_c h, h \rangle + 2\mu\{x \in H : \|x\|_H > c\} \quad \text{para todo } h \in H,
 \end{aligned}$$

donde Q_c es un operador lineal acotado definido por

$$\langle Q_c h, h \rangle = \int_{\{\|x\|_H \leq c\}} \langle h, x \rangle^2 d\mu(x),$$

para todo $h \in H$ y con valores en H .

Q_c es un operador de tipo traza, en efecto, por la definición de traza (.64) y la desigualdad de Bessel-Parseval se obtiene:

$$\text{tr}(Q_c) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle Q_c e_n, e_n \rangle = \int_{\{\|x\|_H \leq c\}} \sum_{n=1}^{+\infty} \langle e_n, x \rangle^2 d\mu(x) = \int_{\{\|x\|_H \leq c\}} \|x\|_H^2 d\mu(x) \leq c^2 < +\infty,$$

donde $\{e_n\}$ es una base ortonormal en H . Luego

$$1 - e^{-\frac{1}{2} \langle Q h, h \rangle} \leq \frac{1}{2} \langle Q_c h, h \rangle + 2\mu\{x \in H : \|x\|_H > c\}, \quad (2.22)$$

para todo $h \in H$, y $c > 0$.

Ahora es suficiente probar que existe $\beta > 0$ tal que:

$$h \in H, \quad \langle Q_c h, h \rangle < 1 \text{ implica que } \langle Q h, h \rangle \leq \beta; \quad (2.23)$$

(2.23) implica que $Q \leq \beta Q_c$, y ya que Q_c es de tipo traza, entonces se tiene que Q también es de tipo traza. Para probar (2.23), sea $h \in H$ tal que $\langle Q_c h, h \rangle \leq 1$, entonces por (2.22).

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

$$1 - e^{-1/2\langle Qh, h \rangle} \leq \frac{1}{2} + 2\mu\{x \in H : \|x\|_H > c\},$$

$$-e^{-1/2\langle Qh, h \rangle} \leq -\frac{1}{2} + 2\mu\{x \in H : \|x\|_H > c\},$$

$$e^{-1/2\langle Qh, h \rangle} \geq \frac{1}{2} - 2\mu\{x \in H : \|x\|_H > c\},$$

$$e^{1/2\langle Qh, h \rangle} \leq \frac{1}{\frac{1}{2} - 2\mu\{x \in H : \|x\|_H > c\}}.$$

Si $\mu\{x \in H : \|x\|_H > c\} < \frac{1}{4}$, entonces

$$2\mu\{x \in H : \|x\|_H > c\} < \frac{1}{2},$$

es decir,

$$\frac{1}{2} - 2\mu\{x \in H : \|x\|_H > c\} > 0 \text{ así, } \langle Qh, h \rangle < \beta.$$

□

3. Movimiento Browniano en Espacios de Hilbert

En la Sección 5 del Capítulo 1 se hizo una descripción amplia del movimiento Browniano con valores en $\mathbb{R}$. Encontramos que el movimiento Browniano $\{w(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso Gaussiano, si para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$, el vector $Z = (w(t_1), \dots, w(t_k))$ tiene distribución finito dimensional Gaussiana, es decir que existe $m = (m_1, m_2, \dots, m_k) \in \mathbb{R}^k$ y una matriz definida positiva $Q = (q_{jr})_{k \times k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ tal que la función característica viene dada por

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(i \sum_{j=1}^k u_j w(t_j)\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j,r} u_j q_{jr} u_r + i \sum_{j=1}^k u_j m_j\right),$$

para todo $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k$.

Mas aún, por el Teorema 1.18, encontramos que el vector Z es Gaussiano si, y solo si $\sum_{j=1}^k u_j w(\omega)(t_j)$ es una variable aleatoria Gaussiana para todo vector $u \in \mathbb{R}^k$.

El Teorema de Extensión 1.25 implica que las distribuciones finito dimensionales de $\{w(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$, están únicamente determinadas por la función $m(t) = \mathbf{E}(w(t)(\omega))$, para todo $t \geq 0$ y la función de covarianza $Q(s, t) = \mathbf{Cov}(s, t)$.

El movimiento Browniano $\{w(t)\}_{t \geq 0}$ posee las siguientes propiedades adicionales:

- i) $\mathbf{E}(w(s)(\omega)w(t)(\omega)) = \min\{s, t\}$ para todo $s, t \geq 0$

- ii) El proceso $\{w(t)(\omega)\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes, es decir, se tiene que las variables aleatorias

$$w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_k) - w(t_{k-1})$$

son independientes para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$.

En esta sección realizaremos una descripción del movimiento Browniano definido sobre un espacio de Hilbert separable U .

Definición 2.25. Ver Khoshnevisan [25].

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una variable aleatoria n -dimensional definida sobre Ω y tal que cada $x_k(\omega)$ toma valores en un espacio de Hilbert U . Decimos que x es una variable aleatoria Gaussiana si $\langle \delta, x \rangle = \sum_{j=1}^n \delta_j x_j$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en U , para todo $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in U^n$.

Definición 2.26. Ver Khoshnevisan [25].

Sea T un conjunto y $x = \{x(t)\}_{t \in T}$ un proceso estocástico definido sobre Ω tal que cada $x(t)$ toma valores en U . Decimos que x es un proceso Gaussiano, si $(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))$ es un vector aleatorio Gaussiano n -dimensional para todo $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$.

Denotaremos por $L(U) = L(U, U)$ al conjunto de todos los operadores lineales acotados definidos de U en U .

Definición 2.27. (Ver H. Brezis, [6]). Sea H un espacio de Hilbert, sea $A : D(H) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal no acotado con $\overline{D(A)} = H$. Si H^* es el dual topológico de H e identificamos $H^* = H$ se puede considerar A^* como un operador no acotado en H .

Se dice que A es simétrico si

$$\langle Au, v \rangle = \langle v, Au \rangle,$$

para todo $u, v \in D(A)$ donde denotamos por $D(A)$ el dominio de A .

Definición 2.28. (Ver H. Brezis, [6]). Un operador A es autoadjunto si

$$A^* = A,$$

y se sobrentiende que $D(A^*) = D(A)$.

Cuando $A \in L(H)$, no hay distinción entre un operador simétrico y un operador autoadjunto.

Sean H y U espacios de Hilbert, $Q \in L(U)$, simétrico no negativo. Consideremos el caso $\text{tr } Q < +\infty$. Entonces existe una base ortonormal completa $\{e_j\}_{j \geq 1} \subset U$, y una sucesión no negativa de números reales ν_j tal que

$$Qe_j = \nu_j e_j \quad j = 1, 2, \dots$$

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

Definición 2.29. Ver Da Prato [13].

Un proceso estocástico $W = \{w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ se llama proceso Q -Wiener si

- (i) $w(0) = 0$ (c.s),
- (ii) W tiene trayectoria continuas,
- (iii) $w(t) - w(s)$ y $w(t - s)$ tienen la misma distribución Gaussiana $\mathcal{N}(0, (t - s)Q)$, para todo $t \geq s \geq 0$. Es decir, el movimiento Browniano W tiene incrementos estacionarios.
- (iv) $w(t) - w(s)$ es independientes de $\{w(r) : 0 \leq r \leq s\}$ (W tiene incrementos independientes).

Si un proceso $W = \{w(t)\}_{t \in [0, T]}$ satisface (i)-(iii) y (iv) para $t, s \in [0, T]$ entonces decimos que $W = \{w(t)\}_{t \in [0, T]}$ es un proceso Q -Wiener sobre $[0, T]$.

Proposición 2.30. Ver Da Prato [13].

Asumiendo que W es un proceso Q -Wiener, con $\text{tr } Q < +\infty$. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:

- i) W es un proceso Gaussiano sobre U y

$$\mathbf{E}(w(t)) = 0, \quad \mathbf{Cov}(w(t)) = \mathbf{E}(w(t))^2 = tQ, \quad t \geq 0.$$

- ii) Para $t \in [0, T]$, $W = \{w(t)\}_{t \in [0, T]}$ tiene el siguiente desarrollo

$$w(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\nu_j} \beta_j(t) e_j, \quad (2.24)$$

donde

$$\beta_j(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu_j}} \langle w(t), e_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.25)$$

son movimientos Brownianos a valores reales mutuamente independientes sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y la serie (2.25) converge en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $0 < t_1 < \dots < t_n$ y sean $u_1, \dots, u_n \in U$. Consideremos la variable aleatoria Z definida por

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{j=1}^n \langle w(t_j), u_j \rangle = \left\langle w(t_1), \sum_{k=1}^n u_k \right\rangle + \left\langle w(t_2) - w(t_1), \sum_{k=2}^n u_k \right\rangle \dots \\ &\quad + \langle w(t_n) - w(t_{n-1}), u_n \rangle. \end{aligned}$$

Ya que $\{w(t_k) - w(t_{k-1})\}_{1 \leq k \leq n}$ son variables aleatorias Gaussianas independientes con distribución $\mathcal{N}(0, (t - s)Q)$ y la suma de variables aleatorias Gaussianas independientes es Gaussiana, entonces Z es una variable aleatoria Gaussiana para cualquier elección de $u_1, \dots, u_n$.

Luego $(w(t_1), w(t_2), \dots, w(t_n))$ es un vector aleatorio n -dimensional Gaussiano y por 2.26 se obtiene que W es un proceso Gaussiano con $\mathbf{E}(w(t)) = 0$ y $\mathbf{Cov}(w(t)) = tQ$. Esto prueba (i).

Ahora probamos (ii).

Sea $t > s > 0$, por (2.25) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\beta_i(t)\beta_j(s)) &= \frac{1}{\sqrt{\nu_i\nu_j}} \mathbf{E}(\langle w(t), e_i \rangle \langle w(s), e_j \rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\nu_i\nu_j}} \mathbf{E}(\langle w(t) - w(s), e_i \rangle \langle w(s), e_j \rangle) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\nu_i\nu_j}} \mathbf{E}(\langle w(s), e_i \rangle \langle w(s), e_j \rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\nu_i\nu_j}} \langle sQe_i, e_j \rangle = \frac{s}{\sqrt{\nu_i\nu_j}} \langle Qe_i, e_j \rangle \\ &= \frac{s}{\sqrt{\nu_i\nu_j}} \langle \nu_i e_i, e_j \rangle = \frac{s\nu_i}{\sqrt{\nu_i\nu_j}} \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} s & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

En consecuencia $\mathbf{E}(\beta_i(t)\beta_j(t)) = 0$. Entonces β_i y β_j son independientes.

Para probar la representación (2.24) observe que para $m \geq n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^m \sqrt{\nu_j} \beta_j(t) e_j - \sum_{j=1}^n \sqrt{\nu_j} \beta_j(t) e_j \right\|^2 &= \mathbf{E} \left\| \sum_{j=n}^m \sqrt{\nu_j} \beta_j(t) e_j \right\|^2 \\ &= \sum_{j=n}^m \nu_j \mathbf{E}(\beta_j(t))^2 = t \sum_{j=n}^m \nu_j \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{ya que } \sum \nu_j < +\infty). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.31. Ver Da Prato [13].

Para un operador Q simétrico no negativo de tipo traza sobre un espacio de Hilbert separable U existe un proceso $W = \{w(w)\}_{t \geq 0}$ Q -Wiener.

DEMOSTRACIÓN. Una prueba detallada véase [13].

□

3.1. El Espacio U_0 .

Lema 2.32. Ver Curtain-Zwart, [8].

Si A es un operador autoadjunto y no negativo, entonces A tiene un único operador raíz cuadrada no negativo $A^{1/2}$, tal que $D(A^{1/2}) \supset D(A)$, $A^{1/2}z \in D(A^{1/2})$ para todo

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

$z \in D(A)$ y $A^{1/2}A^{1/2}z = Az$ para todo $z \in D(A)$. Además, si A es positivo, entonces $A^{1/2}$ también es positivo.

Definición 2.33. Ver Da Prato [13].

Sea U un espacio de Hilbert separable, $Q \in L(U)$ un operador simétrico no negativo de tipo traza. Definimos el subespacio $U_0 \subset U$ como

$$U_0 := Q^{1/2}U.$$

El subespacio $U_0 = Q^{1/2}U$ de U , viene dotado con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{U_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k} \langle u, e_k \rangle \langle v, e_k \rangle = \langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v \rangle. \quad (2.26)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{U_0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k} \langle u, e_k \rangle \langle v, e_k \rangle = \left\langle u, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k} e_k \langle v, e_k \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle u, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{\nu_k} Q^{-1} e_k \langle v, e_k \rangle \right\rangle = \left\langle u, Q^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} e_k \langle v, e_k \rangle \right\rangle \\ &= \langle u, Q^{-1}v \rangle = \langle u, Q^{-1/2}Q^{-1/2}v \rangle \\ &= \langle (Q^{-1/2})^*u, Q^{-1/2}v \rangle = \langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v \rangle, \end{aligned}$$

3.2. El Espacio de los Operadores de Hilbert-Schmidt.

Definición 2.34. Ver Da-prato [13]. Sean G y F espacios de Hilbert separables con bases ortonormal completa $\{e_j\} \subset G$, y $\{f_j\} \subset F$. Un operador lineal $T : G \rightarrow F$ es de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|_F^2 < +\infty. \quad (2.27)$$

Ya que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|_F^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_j, f_k \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_j, T^*f_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \|T^*f_j\|_E^2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

la definición de operador de Hilbert-Schmidt y el número

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|_F^2 \right)^{1/2}, \quad (2.29)$$

son independientes de la base $\{e_j\}_{j \geq 1}$ escogida y además

$$\|T\|_2 = \|T^*\|_2. \quad (2.30)$$

Denotaremos al conjunto de todos los operadores de Hilbert-Schmidt por $L_2(G, F)$ y con la norma dada por la ecuación (2.29) resulta ser un espacio de Hilbert separable con el producto escalar definido por

$$\langle S, T \rangle_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle S e_k, T e_k \rangle. \quad (2.31)$$

Sean H, U espacios de Hilbert separable y el subespacio $U_0 = Q^{1/2}(U) \subset U$. Consideremos el espacio de todos los operadores Hilbert-Schmidt $L_2^0 = L_2(U_0, H)$ definidos sobre U_0 con valores en H . Este espacio también es un espacio de Hilbert separable dotado con la norma

$$\|\psi\|_{L_2^0}^2 = \|\psi Q^{1/2}\|_H^2 = \text{tr}[\psi Q \psi^*]. \quad (2.32)$$

En efecto, sean $\{g_j\}$, donde $g_j = \sqrt{\nu_j} e_j$ para $j = 1, 2, \dots$, una base ortonormal completa en U_0 , $\{e_j\}$ una base ortonormal completa en U y $\{f_j\}$ una base ortonormal completa en H , entonces

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L_2^0}^2 &= \sum_{h=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle \psi g_h, f_k \rangle|^2 = \sum_{h=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |\nu_h| |\langle \psi e_h, f_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{h=1}^{+\infty} |\nu_h| \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle \psi e_h, f_k \rangle|^2 = \sum_{h=1}^{+\infty} |\nu_h| \|\psi e_h\|_H^2 \\ &= \sum_{h=1}^{+\infty} |\nu_h| \|\psi Q^{1/2} e_h \nu_h^{-1/2}\|_H^2 = \sum_{h=1}^{+\infty} \|\psi Q^{1/2} e_h\|_H^2. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \text{tr}[\psi Q \psi^*] &= \sum_{h=1}^{\infty} \langle \psi Q \psi^* e_h, e_h \rangle \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \langle \psi Q^{1/2} e_h, \psi Q^{1/2} e_h \rangle \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \|\psi Q^{1/2} e_h\|_H^2. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene la igualdad (2.32).

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

4. La Integral Estocástica

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, H y U espacios de Hilbert separables. Sea $Q \in L(U)$ un operador no-negativo simétrico tal que $\text{tr } Q < +\infty$. Sea $\{e_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, una base ortonormal completa en U y una sucesión acotada de números reales no-negativos $\{\nu_k\}$ tal que $Qe_k = \nu_k e_k$, $k = 1, 2, \dots$.

$W = \{w(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso Q -Wiener definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en U .

Por la Proposición 2.30, encontramos que $w(t)$ viene dado por (2.24). Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ una filtración en $\mathcal{F}$ y supongamos que

- i) $w(t)$ es medible con respecto a $\mathcal{F}_t$.
- ii) $w(t+h) - w(t)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$, para todo $h \geq 0$, para todo $t \geq 0$. Es decir, las variables aleatorias $w(t+h) - w(t)$ y $w(u)$ son independientes para todo $h \geq 0$ y $0 \leq u \leq t$.

Definición 2.35. Ver Da prato-Zabczyk, [13].

Sean U y H espacios de Hilbert separable y fijemos $\tau < +\infty$. Un proceso $\{\Phi(t)\}_{t \in [0, \tau]} \in L = L(U, H)$ definido sobre U con valores en H , tomando una cantidad finita de valores constantes se llama proceso simple si existe una sucesión $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \tau$ y una sucesión $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k-1}$ de variables aleatorias $L(U, H)$ -valuadas tomando un número finito de valores tal que Φ_m es $\mathcal{F}_{t_m}$ -medible donde $\Phi(t) = \Phi_m$, $t \in (t_m, t_{m+1}]$ y $m = 0, 1, \dots, k-1$.

Definición 2.36. Ver Da prato-Zabczyk, [13].

Si $\{\Phi(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ es un proceso elemental, entonces se define la integral estocástica, con respecto al proceso Q -Wiener $\{w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ definido sobre U , por la fórmula

$$\int_0^t \Phi(s) dw(s) = \sum_{m=0}^{k-1} \Phi_m (w(t_{m+1} \wedge t) - w(t_m \wedge t)), \quad (2.33)$$

$t \in [0, \tau]$. Donde $\wedge$ denota el ínfimo.

A esta integral la denotamos por $\Phi \cdot w(t)$, para todo $t \in [0, \tau]$.

Si U es un espacio de Hilbert separable $Q \in L(U)$, recordemos que el espacio $U_0 = Q^{1/2}U$ de U dotado con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{U_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, e_k \rangle \langle v, e_k \rangle = \langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v \rangle, \quad (2.34)$$

es un espacio de Hilbert.

En la sección 3.2 tratamos con el espacio de los operadores Hilbert-Schmidt. Recordemos que este espacio se denotó por $L_2^0 = L_2(U_0, H)$. L_2^0 es un espacio de Hilbert separable dotado con la norma

$$\|\psi\|_{L_2^0}^2 = \|\psi Q^{1/2}\|_H^2 = \text{tr}[\psi Q \psi^*].$$

Proposición 2.37. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

Si el proceso $\{\Phi(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ es simple y $\mathbf{E}(\int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds) < +\infty$ entonces el proceso $\{\Phi \cdot w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ es una martingala de cuadrado integrable continua con valores en H para todo $[0, \tau]$ y

$$\mathbf{E}(\|\Phi \cdot w(t)\|_H^2) = \left\{ \mathbf{E}(\int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds) \right\}^{1/2}. \quad (2.35)$$

Para la prueba de Proposición 2.37 necesitamos lo siguiente:

Definición 2.38. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

Si E y F son espacios de Hilbert separables, el producto $a \otimes b$ denota el operador lineal definido por:

$$(a \otimes b) \cdot h = a \langle b, h \rangle,$$

donde $b \in E$, $a \in F$ y $h \in F$.

Proposición 2.39. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

Sean $(E_1, \mathcal{E}_1)$ y $(E_2, \mathcal{E}_2)$ dos espacios medibles, $\phi: E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Sean ξ_1, ξ_2 variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $(E_1, \mathcal{E}_1)$ y $(E_2, \mathcal{E}_2)$ respectivamente, y fijemos una σ -álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Suponiendo que ξ_1 es $\mathcal{G}$ medible y ξ_2 es independiente de $\mathcal{G}$, entonces

$$\mathbf{E}(\phi(\xi_1, \xi_2) | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(\phi(\xi_1, \xi_2)). \quad (2.36)$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos (2.35). Sea $t = t_m \leq \tau$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \tau]}$ una filtración en $\mathcal{F}$, suponemos que $w(t)$ es medible con respecto a $\mathcal{F}_t$. Definamos la variable aleatoria $\xi_j = w(t_{j+1}) - w(t_j)$, $j = 1, \dots, m-1$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\|\Phi \cdot w(t_m)\|_H^2) &= \mathbf{E}\left(\left\| \sum_{j=0}^{m-1} \Phi(t_j) \xi_j \right\|_H^2\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\Phi(t_j) \xi_j\|_H^2\right) \\ &\quad + 2\mathbf{E}\left(\sum_{i < j} \langle \Phi(t_i) \xi_i, \Phi(t_j) \xi_j \rangle\right). \end{aligned}$$

Veamos primero que

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\Phi(t_j) \xi_j\|_H^2\right) = \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) \|\Phi(t_j)\|_{L_2^0}^2, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Sea $\{f_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, una base ortonormal completa en el espacio de Hilbert H . Observemos que por ser $\phi(t_j) f_l$ $\mathcal{F}_{t_j}$ -medible, entonces $\Phi^*(t_j) f_l$, el operador adjunto de Φ , también es $\mathcal{F}_{t_j}$ -medible, y $\xi_j = w(t_{j+1}) - w(t_j)$ es una variable aleatoria independiente de $\mathcal{F}_{t_j}$, por lo tanto, por la Proposición 2.39 entonces se tiene que

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\|\Phi(t_j)\xi_j\|_H^2) &= \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbf{E}(|\langle \Phi(t_j)\xi_j, f_l \rangle|^2) = \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbf{E}(|\langle \xi_j, \Phi^*(t_j)f_l \rangle|^2) \\
&= \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbf{E}(\langle \xi_j, \Phi^*(t_j)f_l \rangle^2 | \mathcal{F}_{t_j}) \\
&= \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbf{E}(\langle \xi_j, \Phi^*(t_j)f_l \rangle \langle \xi_j, \Phi^*(t_j)f_l \rangle) \\
&= \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbf{E}(\langle \xi_j \otimes \xi_j, \Phi^*(t_j)f_l, \Phi^*(t_j)f_l \rangle) \\
&= \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbf{E}(\langle (\xi_j \otimes \xi_j) \Phi^*(t_j)f_l, \Phi^*(t_j)f_l \rangle) \\
&= \sum_{l=1}^{+\infty} \langle \mathbf{E}((\xi_j \otimes \xi_j) \Phi^*(t_j)f_l), \Phi^*(t_j)f_l \rangle \\
&= \sum_{l=1}^{+\infty} \langle \text{cov}(\xi_j) \Phi^*(t_j)f_l, \Phi^*(t_j)f_l \rangle \\
&= \sum_{l=1}^{+\infty} (t_{j+1} - t_j) \langle Q \Phi^*(t_j)f_l, \Phi^*(t_j)f_l \rangle \\
&= (t_{j+1} - t_j) \sum_{l=1}^{+\infty} \langle Q^{1/2} \Phi^*(t_j)f_l, Q^{1/2} \Phi^*(t_j)f_l \rangle \\
&= (t_{j+1} - t_j) \text{tr}(\Phi(t_j) Q \Phi^*(t_j)) = (t_{j+1} - t_j) \|\Phi(t_j)\|_{L_2^0}^2.
\end{aligned}$$

Así

$$\sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) \|\Phi(t_j)\|_{L_2^0}^2 = \mathbf{E}(\sum_{j=0}^{m-1} |\Phi(t_j)\xi_j|^2)$$

De forma análoga, se prueba que

$$\mathbf{E}(\langle \Phi(t_i)\xi_i, \Phi(t_j)\xi_j \rangle) = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Demostremos ahora que $\{\Phi \cdot w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\} \subset \mathcal{F}$. Para esto mostremos que para $s < t$

$$\mathbf{E}(\Phi \cdot w(t) | \mathcal{F}_s) = \Phi \cdot w(s).$$

Sea la partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \tau$. Efectuaremos la prueba con $t = t_m$ y $s = t_{m-1}$. En efecto, por la propiedad de esperanza condicional (1.48) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Phi \cdot w(t_m) | \mathcal{F}_{m-1}) &= \mathbf{E}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \Phi_j (w(t_{j+1}) - w(t_j)) \middle| \mathcal{F}_{m-1}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-2} \Phi_j \mathbf{E}\left((w(t_{j+1}) - w(t_j)) \middle| \mathcal{F}_{m-1}\right) + \Phi_{m-1} \mathbf{E}\left((w(t_m) - w(t_{m-1})) \middle| \mathcal{F}_{m-1}\right) \quad (2.37) \\ &= \Phi \cdot w(t_{m-1}) + \mathbf{E}(w(t_m) - w(t_{m-1})) = \Phi \cdot w(t_{m-1}). \end{aligned}$$

Esto prueba la propiedad de martingala. $\square$

El espacio de todas las martingalas continuas de cuadrado integrable lo denotamos por $\mathcal{M}_\tau$, donde $\tau > 0$ es un número fijo.

Por la Proposición 2.37, la integral $\Phi \cdot w(t) : L_2^0(U, H) \rightarrow \mathcal{M}_\tau^2$ es una isometría.

Extenderemos la Definición 2.36 de integral estocástica a procesos adaptados más generales con valores en $L_2^0(U, H)$ tal que $\mathbf{E}(\int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds) < +\infty$. Antes daremos algunas definiciones y resultados importantes:

Definición 2.40. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \tau]}$ una filtración de la sigma-álgebra $\mathcal{F}$. Definimos la sigma-álgebra $\mathcal{P}_\tau$ como la sigma-álgebra generada por los conjuntos de la forma

$$(s, t] \times F \quad \text{tal que} \quad 0 \leq s < t \leq \tau, F \in \mathcal{F}_s, \text{ y } \{0\} \times F, \text{ donde } F \in \mathcal{F}_0.$$

Definición 2.41. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

Sea $\mathcal{E}$ un espacio de Banach separable. Un proceso medible

$$\Phi : ([0, \tau] \times \Omega, \mathcal{P}_\tau) \rightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E})),$$

se llama proceso predecible.

Claramente un proceso predecible es también un proceso adaptado.

Recordemos que $\mathcal{B}(L_2^0(U, H))$ es la sigma-álgebra de Borel de $L_2^0(U, H)$ o la sigma algebra que contiene todos los subconjuntos abiertos o cerrados de $L_2^0(U, H)$.

Extenderemos la Definición 2.36 de integral estocástica a la clase de procesos predecibles:

$$\Phi : ([0, \tau] \times \Omega, \mathcal{P}_\tau) \longrightarrow (L_2^0, \mathcal{B}(L_2^0)).$$

Proposición 2.42. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

Las siguientes expresiones ocurren:

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

- i) Si una aplicación $\Phi : ([0, \tau] \times \Omega) \longrightarrow L(U, H)$ es $L(U, H)$ -predecible, entonces Φ es también $L_2^0(U, H)$ -predecible. Particularmente los procesos simples son $L_2^0(U, H)$ -predecibles.
- ii) Si Φ es un proceso L_2^0 -predecible tal que $\mathbf{E} \left(\int_0^\tau \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds \right) < +\infty$, entonces existe una sucesión $\{\Phi_n\}$ de procesos simples tal que

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\tau \|\Phi(s) - \Phi_n(s)\|_{L_2^0}^2 ds \right) \longrightarrow 0$$

si $n \rightarrow +\infty$.

Para la prueba, se necesita el siguiente lema:

Lema 2.43. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

Supongamos que K es un espacio de Hilbert separable y K_1 es un subconjunto denso lineal de K . Si X es una aplicación de $\Omega \longrightarrow K$ tal que, para $k \in K$ arbitrario, $\langle k, x \rangle$ es $\mathcal{F}$ -medible entonces X es una variable aleatoria y $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (K, \mathcal{B}(K))$.

Veamos la prueba de la Proposición 2.42:

DEMOSTRACIÓN. Si $\{g_j\}_{j \geq 1}$ es una base ortonormal en $U_0 = Q^{1/2}U$, donde $g_j = \sqrt{\nu_j}e_j$, con $\{e_j\}$ una base ortonormal en U , $\{f_j\}_{j \geq 1}$ una base ortonormal en H , entonces los operadores

$$(f_k \otimes e_j)u = f_k \langle e_j, u \rangle \quad u \in U, \quad k, j = 1, 2, \dots,$$

forman un conjunto linealmente denso en $L_2^0(U, H)$ y para $A \in L_2^0(U, H)$ arbitrario, se tiene

$$\begin{aligned} \langle f_k \otimes g_j, A \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (f_k \otimes g_j)g_k, Ag_k \rangle = \left\langle f_k \langle \sqrt{\nu_j}e_j, \sqrt{\nu_k}e_k \rangle, Ag_k \right\rangle \\ &= \langle f_k, Ag_k \rangle = \nu_k \langle f_k, Ae_k \rangle. \end{aligned}$$

Esta última igualdad es $L(U, H)$ -medible y por el Lema 2.43, A es $L_2^0(U, H)$ -medible, es decir, A es una variable aleatoria tal que $A : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (L_2^0(U, H), \mathcal{B}(L_2^0(U, H)))$, de esta forma se prueba i).

ii) Ya que el espacio $L = L(U, H) \subset L_2^0$ densamente, existe una sucesión $\{\Phi_n\}$ de procesos L -valuados predecibles sobre $[0, \tau]$ y toman un número finito de valores tales que

$$\|\Phi(t, w) - \Phi_n(t, w)\|_{L_2^0} \downarrow 0,$$

para todo $(t, w) \in [0, \tau] \times \mathcal{F}$. En consecuencia $\mathbf{E} \left(\int_0^\tau \|\Phi(s) - \Phi_n(s)\|_{L_2^0}^2 ds \right) \downarrow 0$. $\square$

De esta forma la definición de la integral estocástica puede extenderse a todos los procesos L_2^0 -predecibles tal que $\mathbf{E}\left(\int_0^\tau \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds\right) < +\infty$. Estos procesos forman un espacio de Hilbert y lo denotamos por $\mathcal{N}_w^2([0, \tau], L_2^0)$ ó más simple $\mathcal{N}_w^2$. Por la Proposición 2.42 los procesos simples forman un conjunto denso en $\mathcal{N}_w^2$. Por la Proposición 2.37 la integral estocástica $\Phi \cdot w(t)$ es una transformación isométrica desde ese conjunto denso al conjunto $\mathcal{M}_\tau^2(H)$ (Las martingalas de cuadrado integrable), por lo que la definición de la integral estocástica puede extenderse a todo $\mathcal{N}_w^2$.

Más aún, se tiene que

$$\mathbf{E}(\|\Phi \cdot w(t)\|_H^2) = \mathbf{E}\left(\int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds\right),$$

y se deduce que $\Phi \cdot w(t)$ es una martingala continua de cuadrado integrable.

La definición de integral estocástica se puede extender a procesos L_2^0 -predecibles que satisfacen una condición más débil

$$P\left(\int_0^\tau \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds < \infty\right) = 1 \quad (2.38)$$

tales procesos se dicen estocásticamente integrables sobre $[0, \tau]$.

5. Integral Estocástica Para Procesos De Wiener Cilíndricos

La construcción de la integral estocástica requiere de la suposición que Q sea un operador nuclear, es entonces que el proceso Q -Wiener toma valores en el espacio de Hilbert separable U . Sin embargo podemos extender la definición al caso más general en el que Q sea autoadjunto no negativo sobre U .

Para evitar complicaciones asumiremos que Q es estrictamente positivo: $Qx \neq 0$ para $x \neq 0$. Sea $U_0 = Q^{1/2}(U)$ con la norma inducida $\|u\|_{U_0} = \|Q^{1/2}(u)\|$, $u \in U_0$, y sea U_1 un espacio de Hilbert arbitrario tal que U está incrustado continuamente en U_1 y U_0 incrustado en U_1 es Hilbert-Schmidt. Sea $\{g_j\}$ una base ortonormal completa en U_0 , $\{\beta_j\}$ una familia de procesos Wiener normales a valores reales independientes.

Proposición 2.44. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

La fórmula

$$w(t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \beta_j(t), \quad t \geq 0 \quad (2.39)$$

define un proceso Q_1 -Wiener sobre U_1 con $\text{tr } Q_1 < +\infty$.

Para $a \in U$ arbitrario, el proceso

$$\langle a, w(t) \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle a, g_j \rangle \beta_j(t)$$

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

es un proceso de Wiener con valores reales y

$$\mathbf{E}(\langle a, w(t) \rangle \langle b, w(s) \rangle) = t \wedge s \langle Qa, b \rangle, \quad a, b \in U.$$

Más aún tenemos $\text{Rang}(Q^{1/2}) = U_0$, $Q \in L(U; U)$ es nuclear, y $\|U_0\| = \|Q^{1/2}u\|_1$, $\|\cdot\|_1$ es la norma en U_1)

DEMOSTRACIÓN. La serie que define $w(t)$ converge en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P, U_1)$ porque

$$\mathbf{E} \left(\left\| \sum_{j=n}^m g_j \beta_j(t) \right\|_1^2 \right) = \sum_{j=n}^m \mathbf{E}(\|g_j\|_1^2 \|\beta_j(t)\|_1^2) = \sum_{j=n}^m \mathbf{E}(\|g_j\|_1^2),$$

$$\mathbf{E}(\beta_j(t)) = 1 \quad m \geq n \geq 1.$$

La incrustación $J : U_0 \rightarrow U_1$ es Hilbert-Schmidt, lo que significa que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Jg_j\|_1^2 < +\infty.$$

Podemos también construir una versión U_1 -valuado del proceso $W(t)$, por la Proposición 2.31. La serie que define a $\langle a, w(t) \rangle$ converge en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ por la Proposición 2.30, y por lo tanto P (c.s) ya que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle a, g_j \rangle|^2 \leq \|a\|^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \|g_j\|^2 < c \|J\|^2 \|a\|^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \|g_j\|_1^2,$$

$$\mathbf{E} \left(\left\| \sum_{j=1}^{+\infty} \langle a, g_j \rangle \beta_j(t) \right\|^2 \right) = \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \|\langle a, g_j \rangle \beta_j(t)\|^2 \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle a, g_j \rangle|^2 \mathbf{E}(\|\beta_j(t)\|^2).$$

Además, si $t \geq s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\langle a, w(t) \rangle \langle b, w(s) \rangle) &= \mathbf{E}(\langle a, w(s) \rangle \langle b, w(s) \rangle) \\
 &= \mathbf{E}\left(\left\langle a, \sum_{j=1}^{+\infty} g_j \beta_j(s) \right\rangle \left\langle b, \sum_{k=1}^{+\infty} g_k \beta_k(s) \right\rangle\right) = s \sum_{j=1}^{+\infty} \langle a, g_j \rangle \langle b, g_j \rangle \\
 &= s \sum_{j=1}^{+\infty} \langle Q^{1/2} a, Q^{-1/2} g_j \rangle \langle Q^{1/2} b, Q^{-1/2} g_j \rangle \\
 &= s \sum_{j=1}^{+\infty} \langle Qa, g_j \rangle_{U_0} \langle Qb, g_j \rangle_{U_0} = s \sum_{j=1}^{+\infty} \left\langle Qa, g_j \langle Qb, g_j \rangle_{U_0} \right\rangle_{U_0} \\
 &= s \langle Qa, Qb \rangle_{U_0} = s \langle Qa, b \rangle.
 \end{aligned}$$

La última parte se prueba como sigue:

$$\begin{aligned}
 \langle Q_1 a, b \rangle_1 &= \mathbf{E}(\langle a, w(1) \rangle_{U_1} \langle b, w(1) \rangle_{U_1}) \quad (\text{ver prueba anterior}) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle a, g_j \rangle_{U_1} \langle b, g_j \rangle_{U_1} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle a, Jg_j \rangle_{U_1} \langle b, Jg_j \rangle_{U_1} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle J^* a, g_j \rangle_{U_0} \langle J^* b, g_j \rangle_{U_0}
 \end{aligned}$$

$$\langle J^* a, J^* b \rangle_{U_0} = \langle JJ^* a, b \rangle_{U_1},$$

en consecuencia, $Q_1 = JJ^*$. En particular

$$\begin{aligned}
 \langle JJ^* a, a \rangle_{U_1} &= \langle Q_1 a, a \rangle_{U_1} = \langle Q_1^{1/2} a, Q_1^{1/2} a \rangle_{U_1} = \|Q_1^{1/2} a\|_1^2. \\
 \langle JJ^* a, a \rangle_1 &= \langle J^* a, J^* a \rangle_1 = \|J^* a\|_{U_0}^2, \quad a \in U_1
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Así $\text{rang}(Q_1^{1/2}) = \text{rang}(J^*) = U_0$ y el operador $G = Q_1^{-1/2} J(U_0 \xrightarrow{Q_1^{-1/2}} U_0 \xrightarrow{J} U_1)$ es acotado de U_0 en U_1 . Se sigue de (2.40) que $G^* = J^* Q_1^{-1/2}$ es una isometría, por lo tanto G , es en si mismo una isometría. Entonces

$$\|Q_1^{-1/2} u\|_1 = \|Q_1^{-1/2} Ju\|_1 = \|u\|_{U_0}.$$

CAPÍTULO 2. INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA. INTEGRAL DE WIENER

$w(t)$ lo llamaremos también un proceso Q -Wiener. En el caso Q nuclear y $Q^{1/2}$ Hilbert-Schmidt, $U_1 = U$ y obtenemos el concepto clásico de un proceso Q -Wiener si $\text{tr } Q = +\infty$ el proceso lo llamaremos cilíndrico sobre U .

□

6. Propiedades de la Integral Estocástica

A continuación presentamos las propiedades más importantes para nuestro fin.

Sea $W = \{w(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ un proceso Q -Wiener y $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(0, \tau, L_2^0)$.

La integral estocástica satisface las siguientes propiedades:

- (a) $\mathbf{E}(\Phi \cdot w(t)) = 0$,
- (b) $\mathbf{E}(\|\Phi \cdot w(t)\|_H^2) < +\infty$ para $t \in [0, \tau]$.
- (c) El proceso $\{\Phi \cdot w(t)\}_{t \in \tau}$ es una martingala.

Varios resultados de la integral de Bochner tienen su contraparte en la integral estocástica. En particular un análogo de la Proposición 1.48 ocurre.

Sean H , U y $\mathcal{E}$, espacios de Hilbert separables. $U_0 = Q^{1/2}(U)$, asumiendo que $\Phi(t) \in L_2^0 = L_2^0(U_0, H)$, $t \in [0, \tau]$ es un proceso predecible y $A : D(A) \subset H \rightarrow \mathcal{E}$ un operador cerrado.

Proposición 2.45. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

Si $\Phi(t) \in D(A)$ $P(c.s)$ para todo $t \in [0, \tau]$ y

$$P\left(\int_0^\tau \|\phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds < +\infty\right) = 1, P\left(\int_0^\tau \|A\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds < +\infty\right) = 1$$

entonces

$$P\left(\int_0^\tau \Phi(s) ds \in D(A)\right) = 1$$

y

$$A \int_0^\tau \Phi(s) dw(s) = \int_0^\tau A\Phi(s) dw(s), \quad P(c.s).$$

Capítulo 3

Ecuación Diferencial Estocástica

1. Introducción

En el Capítulo 2 presentamos la ecuación diferencial que modela el crecimiento poblacional cuando es sometido a una perturbación aleatoria, tal ecuación diferencial viene dada por

$$dN(t) = b(t, N(t))dt + \sigma(t, N(t))dw(t), \quad (3.1)$$

donde $b(t, N(t)) \in \mathbb{R}$ y $\sigma(t, N(t)) \in \mathbb{R}$.

La ecuación (3.1) debe interpretarse como la ecuación integral estocástica

$$N(t) = N(0) + \int_0^t b(s, N(s))ds + \int_0^t \sigma(s, N(s))dw(s). \quad (3.2)$$

A continuación un ejemplo:

Ejemplo 20. Volvamos a la ecuación del crecimiento poblacional,

$$\begin{cases} dN(t) = rN(t)dt + \alpha N(t)dw(t), \\ N(0) = N_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $\{w(t)\}_{t \geq 0}$, α es constante y $r(t) = r$ constante. Podemos escribir (3.3) en la forma

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = rdt + \alpha dw(t),$$

de tal manera que

$$\int_0^t \frac{dx(s)}{x(s)} = rt + \alpha w(t), \quad (3.4)$$

con $w(0) = 0$.

CAPÍTULO 3. ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA

Evaluemos $\int_0^t \frac{dN(s)}{N(s)}$. Para esto usaremos la Fórmula de Itô dada por el Teorema 2.13 para la función $g(t, x) = \ln x$, $x > 0$. Así se obtiene

$$\begin{aligned} d(\ln N(t)) &= \frac{1}{N(t)} dN(t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{N(t)^2} \right) (dN(t))^2 \\ &= \frac{dN(t)}{N(t)} - \frac{1}{2\alpha^2 N(t)^2} \alpha^2 N(t)^2 dt \\ &= \frac{dN(t)}{N(t)} - \frac{1}{2} \alpha^2 dt, \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = d(\ln N(t)) + \frac{1}{2} \alpha^2 dt.$$

Integrando y de (3.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \ln \frac{N(t)}{N(0)} &= rt + \alpha w(t) - \frac{1}{2} \alpha^2 t \\ &= \left(r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t + \alpha w(t) \end{aligned}$$

o en forma equivalente

$$N(t) = N(0) \exp\left(\left(r - \frac{1}{2} \alpha^2\right)t + \alpha w(t)\right).$$

Para detalles ver el libro de Øksendal [44].

2. Ecuación Lineal con Ruido Aditivo

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ una filtración con respecto a $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ y $\mathcal{F}_0$ contiene a todo a $A \in \mathcal{F}$ tal que $P(A) = 0$. Sean Z y $\mathcal{E}$ espacios de Hilbert y $W = \{w(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso Q -Wiener sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $\mathcal{E}$, y con operador de covarianza $Q \in L(\mathcal{E}) = L(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Si $\text{tr } Q < +\infty$, entonces W es un proceso de Wiener, mientras si $Q = I$, entonces W es un proceso de Wiener Cilíndrico, en este caso W tiene trayectorias continuas en otro espacio de Hilbert $\mathcal{E}_1$. Asumiremos que existe un sistema ortonormal completo $\{e_k\}$ en $\mathcal{E}$, $\{\nu_k\}_{k \geq 1}$ una sucesión de números reales no negativos y acotados tal que

$$Qe_k = \nu_k e_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

y $\{\beta_k\}_{k \geq 1}$ un movimiento Browniano a valores reales mutuamente independientes tal que

$$\langle w(t), u \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\nu_k} \langle e_k, u \rangle \beta_k(t), \quad u \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0.$$

Consideremos la siguiente ecuación lineal

$$\begin{cases} dz(t) = [Az(t) + f(t)]dt + \sigma dw(t) \\ z(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ y $\sigma : \mathcal{E} \rightarrow Z$ operadores lineales, f es un proceso estocástico Z -valuado.

Asumiremos que el problema de Cauchy determinístico

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = z \in Z$$

es uniformemente bien definido y σ es acotado, es decir

$$\begin{aligned} (i) & A \text{ genera un semigrupo } \{S(t)\}_{t \geq 0} \text{ fuertemente continuo en } Z, \\ (ii) & \sigma \in L(\mathcal{E}, Z). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Naturalmente se requiere

$$\begin{aligned} (iii) & f \text{ es un proceso predecible con trayectorias Bochner integrable sobre } [0, \tau], \\ (iv) & \xi_0 \text{ es } \mathcal{F}_0\text{-medible.} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Proposición 3.1. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

- (i) Un proceso adaptado Φ con valores en $(L(U, H), \mathcal{L})$ tal que para $u \in U$ y $h \in H$ arbitrarios, el proceso $\langle \Phi(t)u, h \rangle$, $t \geq 0$, tiene trayectorias continua a la derecha predecible.
- (ii) Asumiendo que Φ es un proceso adaptado y estocásticamente continuo sobre $[0, \tau]$. Entonces el proceso Φ tiene una versión predecible sobre $[0, \tau]$.

Recordemos que $\mathcal{L}$ es (1.43).

Definición 3.2. Un proceso $z(t)$, $t \in [0, \tau]$, Z -valuado predecible, se dice solución fuerte de (3.5) si z toma valores en $D(A)$ P (c.s) en $[0, \tau]$,

$\int_0^\tau |Ax(s)|ds < +\infty$ P (c.s) y para todo $t \in [0, \tau]$ se tiene

$$z(t) = \xi_0 + \int_0^t [Az(s) + f(s)] + \sigma w(t) \quad P(\text{c.s}). \quad (3.8)$$

Esta definición es importante solamente si σw es un proceso Z -valuado y por lo tanto requiere que $\|\sigma\|_{L(\mathcal{E}, Z)}^2 = \text{tr } \sigma Q \sigma^* < +\infty$.

Una solución fuerte debe necesariamente tener una modificación continua. Un proceso $z(t)$ predecible Z -valuada $t \in [0, T]$ se dice solución débil de (3.5) si las trayectorias de $z(\cdot)$ son P (c.s) Bochner integrable y si para todo $\zeta \in D(A^*)$ y todo $t \in [0, \tau]$ tenemos

$$\langle z(t), \zeta \rangle = \langle z, \zeta \rangle + \int_0^t [\langle z(s), A^* \zeta \rangle + \langle f(s), \zeta \rangle] ds + \langle \sigma w(t), \zeta \rangle, \quad P(\text{c.s}). \quad (3.9)$$

CAPÍTULO 3. ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA

Definición 3.3. *El proceso*

$$W_A(t) = \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s). \quad (3.10)$$

Se llama Convolución Estocástica.

El siguiente teorema da información acerca de las propiedades que cumple W_A .

Teorema 3.4. Ver Da Prato-Zabczyk [13].

Supongamos que A genera un semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ fuertemente continuo en Z , sea $\sigma \in L(\mathcal{E}, Z)$ y

$$\int_0^t \|S(r)\sigma\|_{L_2^0}^2 dr = \int_0^t \text{tr} [S(r)\sigma Q \sigma^* S^*(r)] dr < +\infty. \quad (3.11)$$

Entonces

- i) $W_A(\cdot)$ es un proceso Gaussiano, continuo en media cuadrático y tiene una versión predecible,
- ii)

$$\text{Cov } W_A(t) = \mathbf{E} \left(\int_0^t S(r)\sigma Q \sigma^* S^*(r) dr \right), \quad t \in [0, \tau] \quad (3.12)$$

- iii) Las trayectorias de $W_A(\cdot)$ son P -(c.s) de cuadrado integrable y la distribución de W_A es una medida gaussiana sobre $\mathcal{X} = L^2(0, \tau; Z)$ con operador de covarianza

$$\mathcal{D}\varphi(t) = \int_0^\tau g(t, s)\varphi(s)ds, \quad (3.13)$$

donde

$$g(t, s) = \int_0^{t \wedge s} S(t-r)\sigma Q \sigma^* S^*(s-r)dr \quad (3.14)$$

y $t \wedge s$ es el mínimo entre s y t .

DEMOSTRACIÓN. (i) Fijemos $0 \leq t \leq s \leq \tau$, entonces

$$\begin{aligned} W_A(t) - W_A(s) &= \int_0^t S(t-r)\sigma dw(r) - \int_0^s S(s-r)\sigma dw(r) \\ &= \int_s^t S(t-r)\sigma dw(r) + \int_0^s [S(t-r) - S(s-r)]\sigma dw(r), \end{aligned}$$

Por la isometría de la integral estocástica, y la Desigualdad de Bessel- Parseval, y que las integrales son independientes, se tiene entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[W_A(t) - W_A(s)]^2 &= \\ \mathbf{E} \left(\left\| \int_s^t S(t-r)\sigma dw(r) \right\|_Z^2 \right) &+ \mathbf{E} \left(\left\| \int_0^s [S(t-r) - S(s-r)]\sigma dw(r) \right\|_Z^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} \left(\left\| \int_0^{t-s} S(r) \sigma dw(r) \right\|_Z^2 \right) + \mathbf{E} \left(\left\| \int_0^s (S(t-s+r) - S(r)) \sigma dw(r) \right\|_Z^2 \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\int_0^{t-s} \|S(r) \sigma\|_{L_2^0}^2 dr \right) + \mathbf{E} \left(\int_0^s \|(S(t-s+r) - S(r)) \sigma\|_{L_2^0}^2 dr \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\int_0^{t-s} \sum_{n,k=1}^{+\infty} \nu_n |\langle S(r) \sigma e_n, f_k \rangle|^2 dr \right) \\
&\quad + \mathbf{E} \left(\int_0^s \sum_{n,k=1}^{+\infty} \nu_n |\langle (S(t-s+r) - S(r)) \sigma e_n, f_k \rangle|^2 dr \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n \mathbf{E} \left(\int_0^{t-s} \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle S(r) \sigma e_n, f_k \rangle|^2 dr \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n \mathbf{E} \left(\int_0^s \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle (S(t-s+r) - S(r)) \sigma e_n, f_k \rangle|^2 dr \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n \int_0^{t-s} \|S(r) \sigma e_n\|_Z^2 dr + \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n \int_0^s \|(S(t-s+r) - S(r)) \sigma e_n\|_Z^2 dr \xrightarrow{t \rightarrow s} 0.
\end{aligned}$$

Por (3.11) y el Teorema de Convergencia Dominada se obtiene la continuidad en media cuadrática.

Por la definición de la integral estocástica, se sigue que el proceso $W_A(\cdot)$ es Gaussiano. La existencia de una versión predecible es una consecuencia de la Proposición 3.1

(ii) sigue de lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{cov}(W_A(t), W_A(t)) &= \text{cov}(W_A(t)) = \text{cov} \left(\int_0^t S(t-s) \sigma dw(s) \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\int_0^t (S(t-r) \Sigma Q^{1/2}) (S(t-r) Q^{1/2})^* dr \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\int_0^t (S(t-r) \sigma Q^{1/2}) (Q^{1/2*} \sigma^* S^*(t-r)) dr \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\int_0^t S(t-r) \sigma Q \sigma^* S^*(t-r) dr \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\int_0^t S(r) \sigma Q \sigma^* S^*(r) dr \right)
\end{aligned}$$

(iii) no será probada. Para una prueba ver [13] página 120.

CAPÍTULO 3. ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA

□

Teorema 3.5. (*Existencia y Unicidad de Soluciones Débiles*) Ver Da Prato-Zabczyk [13].

Asumiendo (3.6), (3.7) y (3.11). Entonces (3.5) tiene exactamente una solución débil dada por

$$z(t) = S(t)\xi_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)\sigma dw(s) \quad (3.15)$$

$t \in [0, \tau]$.

La ecuación (3.15) es la generalización estocástica de la fórmula de variación de parámetros clásica.

DEMOSTRACIÓN. Antes de iniciar la demostración recordemos la siguiente proposición:

Proposición 3.6. Ver Da Prato-Zabczyk [13]. Si A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en Z y $f \in L^1([0, \tau], Z)$, entonces existe una única solución débil u de la ecuación

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0, \tau] \\ u(0) = z_0 \in Z \end{cases} \quad (3.16)$$

dada por

$$u(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (3.17)$$

La solución $u(\cdot)$ dada por (3.17) se llama solución moderada de (3.16), en consecuencia, el proceso z dado por (3.15), es solución débil del problema (3.5) si, y solo si, el proceso $\tilde{z}$ dado por

$$\tilde{z}(t) = z(t) - \left(S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right) = W_A(t), \quad t \in [0, \tau],$$

es solución débil de la ecuación

$$d\tilde{z} = A\tilde{z}(t)dt + \sigma dw(t), \quad \tilde{z}(0) = 0.$$

Entonces, podemos asumir sin perder generalidad, que $z_0 = 0$ y $f \equiv 0$.

Para probar existencia con $z_0 = 0$ y $f \equiv 0$, mostremos que (3.5) se satisface para el proceso $W_A(t)$. Sea $t \in [0, \tau]$ fijo y sea $\zeta \in D(A^*)$.

Observe que

$$\int_0^t \langle A^*\zeta, W_A(s) \rangle ds = \int_0^t \left\langle A^*\zeta, \int_0^s I_{[0,s]} S(s-r)\sigma dw(r) \right\rangle ds,$$

en consecuencia por el Teorema de Fubini Estocástico (ver Apéndice).

$$\begin{aligned}
 &= \left\langle A^* \zeta, \int_0^t \left(\int_0^s I_{[0,s]}(r) S(s-r) \sigma dw(r) \right) ds \right\rangle \\
 &= \left\langle A^* \zeta, \int_0^t \left(\int_0^s I_{[0,s]}(r) S(s-r) \sigma ds \right) dw(r) \right\rangle \\
 &= \int_0^t \int_0^s \left\langle A^* \zeta, I_{[0,s]}(r) S(s-r) \sigma \right\rangle ds dw(r) \\
 &= \int_0^t \int_0^s \left\langle I_{[0,s]}(r) \sigma^* S^*(s-r) A^* \zeta, I_d \right\rangle ds dw(r) \\
 &= \int_0^t \left\langle \int_0^s I_{[0,s]}(r) \sigma^* S^*(s-r) A^* \zeta ds, I_d \right\rangle dw(r) \\
 &= \int_0^t \left\langle \int_r^s \sigma^* S^*(s-r) A^* \zeta ds, I_d \right\rangle dw(r) \\
 &= \int_0^t \left\langle \int_r^s \frac{d}{ds} [\sigma^* S^*(s-r) \zeta] ds, I_d \right\rangle dw(r) \left(\frac{dS(t)}{dt} = S(t) A \right) \\
 &= \int_0^t \left\langle \sigma^* S^*(t-r) \zeta - \sigma^* \zeta, I_d \right\rangle dw(r) = \int_0^t \left\langle \sigma^* S^*(t-r) \zeta, I_d \right\rangle dw(r) \\
 &\quad - \int_0^t \left\langle \sigma^* \zeta, I_d \right\rangle dw(r) = \left\langle \zeta, \int_0^t S(t-r) \sigma dw(r) \right\rangle - \left\langle \zeta, \int_0^t \sigma dw(r) \right\rangle \\
 &= \left\langle \zeta, W_A(t) \right\rangle - \left\langle \zeta, \sigma w(t) \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Por lo anterior podemos observar que $W_A(\cdot)$ satisface (3.5), en efecto,

$$\begin{aligned}
 dW_A(s) &= AW_A(s)ds + \sigma dw(s), \quad \text{con } f \equiv 0, \\
 \int_0^t dW_A(s) &= \int_0^t AW_A(s)ds + \int_0^t \sigma dw(s) \\
 W_A(t) &= \int_0^t AW_A(s)ds + \sigma w(t),
 \end{aligned}$$

por lo tanto $W_A(\cdot)$ es una solución débil.

CAPÍTULO 3. ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA

Para probar unicidad, necesitamos el siguiente Lema.

Lema 3.7. Ver Da Prato-Zabczyk [13]. Sea z una solución débil de (3.5) con $z_0 = 0$, $f \equiv 0$.

Entonces, para una función $\zeta \in C'([0, \tau]; D(A^*))$ arbitraria y $t \in [0, \tau]$, tenemos

$$\langle z(t), \zeta(t) \rangle = \int_0^t [\langle z(s), \zeta'(s) + A^*\zeta(s) \rangle] ds + \int_0^t \langle \zeta(s), \sigma dw(s) \rangle.$$

En efecto, veamos la prueba del lema. Consideremos primero funciones de la forma $\zeta(s) = \zeta_0 \varphi(s)$, $s \in [0, T]$, donde $\varphi \in C^1([0, \tau])$ y $\zeta_0 \in D(A^*)$.

Sea

$$F_{\zeta_0}(t) = \int_0^t \langle z(s), A^*\zeta_0 \rangle ds + \langle \sigma w(t), \zeta_0 \rangle.$$

Aplicando la fórmula de Ito a $F_{\zeta_0}(s)\varphi(s)$ obtenemos:

$$d[F_{\zeta_0}(s)\varphi(s)] = \varphi(s)dF_{\zeta_0}(s) + \varphi'(s)F_{\zeta_0}(s)ds.$$

En particular,

$$\begin{aligned} F_{\zeta_0}(t)\varphi(t) &= \int_0^t \varphi(s)dF_{\zeta_0}(s) + \int_0^t \varphi'(s)F_{\zeta_0}(s)ds \\ &= \int_0^t \varphi(s)\langle z(s), A^*\zeta_0 \rangle ds + \int_0^t \varphi(s)\langle \sigma dw(s), \zeta_0 \rangle \\ &\quad + \int_0^t \varphi'(s) \left[\int_0^s \langle z(s), A^*\zeta_0 \rangle ds + \langle \sigma w(s), \zeta_0 \rangle \right] ds \\ &= \int_0^t \varphi(s)\langle z(s), A^*\zeta_0 \rangle ds + \int_0^t \langle \sigma dw(s), \varphi(s)\zeta_0 \rangle \\ &\quad + \int_0^t \varphi'(s) \left[\int_0^s \langle Az(s), \zeta_0 \rangle ds + \langle \sigma w(s), \zeta_0 \rangle \right] ds \\ &= \int_0^t \varphi(s)\langle z(s), A^*\zeta_0 \rangle ds + \int_0^t \langle \sigma dw(s), \zeta(s) \rangle \\ &\quad + \int_0^t \varphi'(s)\langle z(s), \zeta_0 \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle \sigma dw(s), \zeta(s) \rangle + \int_0^t [\varphi(s)\langle z(s), A^*\zeta_0 \rangle + \varphi'(s)\langle z(s), \zeta_0 \rangle] ds. \end{aligned}$$

Ya que $F_{\zeta_0}(\cdot) = \langle z(\cdot), \zeta_0 \rangle$, el lema queda probado para $\zeta(t) = \zeta_0 \varphi(t)$. Ya que esas funciones son linealmente densas en $C^1([0, \tau]; D(\Lambda^*))$, el lema es cierto en general.

Veamos en consecuencia la unicidad de (3.15). Sea z una solución débil con $\zeta_0 \in D(\Lambda^*)$, aplicando el Lema 3.7 a la función $\zeta(s) = S^*(t-s)\zeta_0$, $s \in [0, t]$ se obtiene

$$\begin{aligned} \langle z(t), S^*(t-s)\zeta_0 \rangle &= \int_0^t \langle \sigma dw(s), S^*(t-s)\zeta_0 \rangle \\ \langle z(t), \zeta_0 \rangle &= \left\langle \int_0^t S(t-s)\sigma dw(s), \zeta_0 \right\rangle \\ &= \langle W_A, \zeta_0 \rangle \end{aligned}$$

y como $D(\Lambda^*)$ es denso en Z , encontramos que $z = W_A$. □

Ejemplo 21. (Ecuación de Onda Estocástica)

Sea Λ un operador estrictamente positivo autoadjunto, no acotado en Z . Consideremos el problema

$$\begin{cases} dy_t = -\Lambda y(t)dt + dw(t), \\ y(0) = y \in Z, \quad y_t(0) = z \in D(\Lambda^{1/2}) \end{cases} \quad (3.18)$$

$D(\Lambda^{1/2})$ es la completación de Z respecto a la norma

$$|x|_{D(\Lambda^{1/2})} = |\Lambda^{-1/2}x|, \quad x \in Z.$$

Sea $H = Z \circ D(\Lambda^{1/2})$ un espacio de Hilbert, dotado con el producto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle y, y_1 \rangle + \langle \Lambda^{1/2}z, \Lambda^{1/2}z_1 \rangle,$$

colocando

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix} \quad y \quad x_0 = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

(3.18) lo podemos escribir como

$$\begin{cases} dx(t) = Ax(t)dt + Bdw(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

donde el operador lineal A se define por

$$D(A) = D(\Lambda^{1/2}) \oplus H,$$

CAPÍTULO 3. ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA

$$A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in D(A),$$

y $BU = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$. Entonces la convolución estocástica es dada por

$$W_A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int_0^t \text{sen}(\sqrt{\Lambda}(t-s))dw(s) \\ \int_0^t \cos \sqrt{\Lambda}(t-s)dw(s) \end{pmatrix}.$$

Así (3.11) se cumple, probando que

$$\begin{aligned} (i) \int_0^\tau \text{tr} \left[\frac{\text{sen}(\sqrt{\Lambda}s)}{\Lambda} Q \right] ds &< +\infty \\ (ii) \int_0^\tau \text{tr} \left[\frac{\cos^2 \sqrt{\Lambda}s}{\Lambda} Q \right] ds &< +\infty \end{aligned} \quad (3.19)$$

particularmente, (3.19) ocurre si $\text{tr} Q < +\infty$.

3. Ecuación Lineal con Ruido Multiplicativo

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Sean Z y $\mathcal{E}$ espacios de Hilbert y Q un operador no-negativo autoadjunto sobre $\mathcal{E}$. Sea $W = \{w(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso Q -Wiener sobre $E_1 \supset \mathcal{E}_0$ y $\mathcal{E}_0 = Q^{1/2}\mathcal{E}$.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} dz(t) = [Az(t) + f(t)]dt + \sigma(z(t))dw(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (3.20)$$

sobre un intervalo de tiempo $[0, \tau]$, donde $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ el generador infinitesimal de un semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ fuertemente continuo, z_0 una variable aleatoria Z -valuada $\mathcal{F}_0$ -medible, f un proceso predecible con trayectorias localmente integrales y

$$\sigma : D(\sigma) \subset Z \rightarrow L_2^0 = L^2(\mathcal{E}_0, Z)$$

un operador lineal.

Sea $\{g_j\}_{j \geq 0}$ una base ortonormal en $\mathcal{E}_0$. Ya que si $z \in D(\sigma)$ arbitrario, $\sigma(\cdot)$ es un operador de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{E}_0$ en Z ,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sigma(x)g_j|^2 < +\infty, \quad x \in D(\sigma).$$

Los operadores

$$\sigma_j x = \sigma(x) g_j, \quad x \in D(\sigma), \quad j = 1, 2, \dots$$

son operadores lineales y

$$\begin{aligned} \sigma(x)u &= \sigma(x) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \langle u, g_j \rangle_0 g_j \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle u, g_j \rangle_{E_0} \sigma(x) g_j \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \langle u, g_j \rangle_{E_0} \sigma_j x, \quad x \in D(\sigma), \quad u \in \mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si

$$w(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(t) g_j$$

entonces la ecuación (3.20) puede escribirse en forma equivalente como

$$\begin{cases} dz(t) = [Az(t) + f(t)]dt + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j z(t) d\beta_j(t) \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Definición 3.8. Ver Da Prato [13].

Una solución fuerte del problema (3.20) es un proceso $z(t)$ $t \in [0, \tau]$, que toma valores en $D(A) \cap D(B)$, P c.s tal que

$$P \left(\int_0^\tau [|z(s)| + |Az(s)|] ds < +\infty \right) = 1,$$

$$P \left(\int_0^\tau \|\sigma(z(s))\|_{L_2^2}^2 ds < +\infty \right) = 1,$$

y para $t \in [0, \tau]$ arbitrario y P c.s.

$$z(t) = z_0 + \int_0^t [Az(s) + f(s)] ds + \int_0^t \sigma(z(s)) dw(s). \quad (3.22)$$

Definición 3.9. Ver Da Prato [13].

Una solución débil de (3.20), es un proceso $z(t)$ predecible Z -valuada con valores en $D(\sigma)$, P c.s

$$P \left(\int_0^\tau |z(s)| ds < +\infty \right) = 1 \quad (3.23)$$

CAPÍTULO 3. ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA

$$P \left(\int_0^\tau \|\sigma(z(s))\|_{L_2^0}^2 ds < +\infty \right) = 1, \quad (3.24)$$

y para $t \in [0, T]$ arbitrario y $\zeta \in D(A^*)$.

$$\begin{aligned} \langle z(t), \zeta \rangle &= \langle z_0, \zeta \rangle + \int_0^t [\langle z(s), A^* \zeta \rangle + \langle f(s), \zeta \rangle] ds \\ &\quad + \int_0^t \langle \zeta, \sigma(z(s)) dw(s) \rangle \quad P \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Definición 3.10. Ver Da Prato [13].

Una solución moderada de (3.20), es un proceso $z(t)$ Z -valuado, $t \in [0, \tau]$, si $z(t)$ toma valores en $D(\sigma)$ P c.s, ocurren (3.23) y (3.24) para $t \in [0, \tau]$ arbitrario,

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(z(s))dw(s).$$

Una solución fuerte es una solución débil y una solución débil es una solución moderada.

Capítulo 4

Tópicos de Semigrupos y Teoría de Control

En este capítulo vamos a presentar diversos teoremas y definiciones relacionados con semigrupo y teoría de control. La bibliografía utilizada proviene esencialmente del libro de R.F. Curtain y H.J. Zwart [8].

1. Semigrupos

Definición 4.1. Sea Z un espacio de Hilbert, y denotemos por $L(Z) = L(Z, Z)$ al conjunto de todos los operadores lineales y acotados definidos en Z y valores en Z . Un semigrupo fuertemente continuo, es un operador $S(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow L(Z) = L(Z, Z)$ que satisface las siguientes propiedades:

- (i) $S(t + s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geq 0$
- (ii) $S(0) = I$
- (iii) $\|S(t)z_0 - z_0\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0^+$ para todo $z_0 \in Z$

Posteriormente usaremos la notación estándar C_0 -semigrupo para semigrupo fuertemente continuo.

Ejemplo 22. Sea $A \in L(Z)$, y

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(At)^n}{n!}. \quad (4.1)$$

Veamos que (4.1) es un C_0 -semigrupo. En efecto, para $M > N$ la serie converge:

$$\left\| \sum_{n=0}^M \frac{(At)^n}{n!} - \sum_{n=0}^N \frac{(At)^n}{n!} \right\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M \frac{(At)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \left\| \frac{(At)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \frac{\|A\|^n t^n}{n!}.$$

La serie $\sum_{n=N+1}^M \frac{\|A\|^n t^n}{n!}$ es de Cauchy, por lo que (4.1) converge en la topología uniforme.

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

Veamos que la ecuación (4.1) satisface la Definición 4.1(ii):

$$S(0) = e^{A0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A0)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(A0)^n}{n!} = I.$$

Verifiquemos que la ecuación (4.1) satisface la Definición (4.1)(iii):

$$\begin{aligned} \|e^{At}z_0 - z_0\| &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(At)^n}{n!} z_0 - z_0 \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(At)^n}{n!} z_0 \right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\|A\|^n t^n}{n!} \|z_0\| \\ &= \|z_0\| [e^{\|A\|t} - 1] \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Ya que $e^{\|A\|t}$ es continua, (iii) se cumple.

Por último,

$$\begin{aligned} e^{A(t+s)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n (t+s)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} (t+s)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k s^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k t^k}{k!} \frac{A^{n-k} s^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \frac{A^{n-k} s^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{A^l s^l}{l!} = e^{At} e^{As}. \end{aligned}$$

Así (i) de la Definición 4.1 se cumple, y e^{At} es un C_0 -semigrupo uniformemente continuo.

Ejemplo 23. Sea $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert separable y sea $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales. Entonces

$$S(t)z = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n \quad (4.2)$$

es un operador lineal acotado si, y sólo si, $\{e^{\lambda_n t}\}_{n \geq 1}$ es una sucesión acotada y este es el caso si $\sup_{n \geq 1} \lambda_n < +\infty$.

Verifiquemos, en efecto, que (4.2) es un C_0 semigrupo.

$$\begin{aligned}
 S(t)S(s)z &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle S(s)z, \phi_n \rangle \phi_n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \left\langle \sum_{m=1}^{+\infty} e^{\lambda_m s} \phi_m \langle z, \phi_m \rangle, \phi_n \right\rangle \phi_n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \sum_{m=1}^{+\infty} \langle e^{\lambda_m s} \phi_m \langle z, \phi_m \rangle, \phi_n \rangle \phi_n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \sum_{m=1}^{+\infty} e^{\lambda_m s} \langle z, \phi_m \rangle \langle \phi_m, \phi_n \rangle \phi_n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} e^{\lambda_n s} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n \\
 &= S(t+s)z.
 \end{aligned}$$

Veamos la continuidad fuerte. Si $t \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
 \|S(t)z - z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n - \sum_{n=1}^{+\infty} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} [e^{\lambda_n t} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n - \langle z, \phi_n \rangle \phi_n] \right\|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{\lambda_n t} - 1)^2 \|\langle z, \phi_n \rangle \phi_n\|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 \|\langle z, \phi_n \rangle \phi_n\|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle z, \phi_n \rangle|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^N |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle z, \phi_n \rangle|^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle z, \phi_n \rangle|^2 \\
 &\leq \sup_{1 \leq n \leq N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 \sum_{n=1}^N |\langle z, \phi_n \rangle|^2 + K \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\langle z, \phi_n \rangle|^2.
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

donde $K = \sup_{0 \leq t \leq 1} |e^{\lambda_n t} - 1|^2$, $n \geq 1$. Para cualquier $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |\langle z, \phi_n \rangle|^2 < \frac{\epsilon}{2K},$$

escogiendo $t \leq 1$ tal que

$$\sup_{1 \leq n \leq N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 \leq \frac{\epsilon}{2\|z\|^2},$$

tenemos

$$\|S(t)z - z\|^2 \leq \frac{\epsilon}{2\|z\|^2} \sum_{n=1}^N |\langle z, \phi_n \rangle|^2 + K \frac{\epsilon}{2K} \leq \epsilon.$$

Así, $S(t)$ es fuertemente continuo, por lo que es un C_0 -semigrupo.

Teorema 4.2. *Un semigrupo fuertemente continuo sobre un espacio de Hilbert Z , $S(t)$ tiene las siguientes propiedades:*

- a) $\|S(t)\|$ es acotado sobre todo subintervalo finito de $[0, +\infty)$,
- b) $S(t)$ es fuertemente continuo para todo $t \in [0, +\infty)$,
- c) para todo $z \in Z$ tenemos $\frac{1}{t} \int_0^t S(s)z ds \rightarrow z$ cuando $t \rightarrow 0^+$,
- d) si $w_0 = \inf_{t>0} \left(\frac{1}{t} \log \|S(t)\| \right)$, entonces $w_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \log \|S(t)\| \right) < +\infty$,
- e) para todo $w > w_0$, existe M_w tal que para todo

$$t \geq 0 \quad \|S(t)\| \leq M e^{wt}.$$

w_0 se llama cota de crecimiento del semigrupo.

DEMOSTRACIÓN. a) Mostremos que $\|S(t)\|$ es acotado en una vecindad del origen, i.e., existe $\delta > 0$ y $M(\delta) > 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq M(\delta) \quad \text{para} \quad t \in [0, \delta].$$

Si esto no ocurriera, entonces existe una sucesión $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow 0^+$ tal que $\|S(t_n)\| \geq n$. Por el Teorema de Acotación Uniforme, existe un z tal que $\{\|S(t_n)z\|\}_{n \geq 1}$ es no acotado; pero esto contradice la continuidad fuerte en el origen.

Si $t = m\delta + \tau$ donde $0 \leq \tau \leq \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|S(m\delta + \tau)\| = \|S(m\delta)S(\tau)\| \\ &\leq \|S^m(\delta)\| \|S(\tau)\| = \|S(\delta)\|^m \|S(\tau)\| \\ &\leq M(\delta)^m M(\delta) = M(\delta)^{1+m} \\ &\leq M(\delta)^{\frac{t}{\delta}+1} = M(\delta) e^{wt}, \end{aligned}$$

donde $w = \frac{1}{\delta} \log M(\delta)$. Observemos que $t = m\delta + \tau$, es decir, $\frac{t}{\delta} \geq m$ lo que implica que $\frac{t}{\delta} + 1 \geq m + 1$. En consecuencia $M(\delta)^{\frac{t}{\delta}+1} = M(\delta)e^{wt}$

b) Para $t > 0$ fijo, $s \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\|S(t+s)z - S(t)z\| &= \|S(t)S(s)z - S(t)z\| = \|S(t)(S(s)z - z)\| \\ &= \|S(t)\| \|S(s)z - z\| \leq M(\delta)e^{wt} \|S(s)z - z\| \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \|S(t+s)z - S(t)z\| = 0.$$

Además para $t > 0$, $s \geq 0$ suficientemente pequeños, tenemos

$$\begin{aligned}\|S(t-s)z - S(t)z\| &= \|S(t-s)z - S(t-s+s)z\| \\ &= \|S(t-s)(z - S(s)z)\| \leq \|S(t-s)\| \|z - S(s)z\|.\end{aligned}$$

Si $s \rightarrow 0^+$, $\|z - S(s)z\| \rightarrow 0$, así

$$\|S(t-s) - S(t)z\| \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{y} \quad S(t)z \quad \text{es continuo.}$$

c) Sea $z \in Z$ y $\varepsilon > 0$. Por continuidad fuerte de $S(t)$ podemos escoger a $\tau > 0$ tal que $\|S(s)z - z\| \leq \varepsilon$ para todo $s \in [0, \tau]$. Para $t \in [0, \tau]$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{t} \int_0^t S(s)z ds - z \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t [S(s)z - z] ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|S(s)z - z\| ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \varepsilon ds = \varepsilon.\end{aligned}$$

d) Sea $t_0 > 0$ un número fijo y $M = \sup_{t \in [0, t_0]} \|S(t)\|$, entonces para todo $t \geq t_0$, existe

$n \in \mathbb{N}$ tal que $nt_0 \leq t \leq (n+1)t_0$.

En consecuencia se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\log \|S(t)\|}{t} &= \frac{\log \|S(nt_0 + t - nt_0)\|}{t} = \frac{\log \|S(nt_0)S(t - nt_0)\|}{t} \\ &= \frac{\log \|S^n(t_0)S(t - nt_0)\|}{t} \leq \frac{n \log \|S(t_0)\|}{t} + \frac{\log M}{t} \\ &= \frac{\log \|S(t_0)\|}{t_0} \frac{nt_0}{t} + \frac{\log M}{t}.\end{aligned}$$

Observemos que:

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

a) Si $\log \|S(t_0)\|$ es positivo entonces

$$\frac{\log \|S(t_0)\|}{t_0} \frac{nt_0}{t} + \frac{\log M}{t} \leq \frac{\log \|S(t_0)\|}{t_0} + \frac{\log M}{t}.$$

b) Si $\log \|S(t_0)\|$ es negativo entonces

$$\frac{\log \|S(t_0)\|}{t_0} \frac{nt_0}{t} + \frac{\log M}{t} \leq \frac{\log \|S(t_0)\|}{t_0} \frac{t - t_0}{t} + \frac{\log M}{t},$$

en consecuencia

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t} \leq \frac{\log \|S(t_0)\|}{t_0} < +\infty.$$

Ya que t_0 es arbitrario, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t} \leq \inf_{t > 0} \frac{\log \|S(t)\|}{t} \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t}.$$

Así

$$w_0 = \inf_{t > 0} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t} < +\infty.$$

e) Si $w > w_0 = \inf_{t > 0} \frac{\log \|S(t)\|}{t}$, entonces existe t_0 tal que

$$\frac{\log \|S(t)\|}{t} < w \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0,$$

es decir,

$$\|S(t)\| \leq e^{wt} \quad \text{para} \quad t \geq t_0.$$

Ya que $\|S(t)\|$ es un operador acotado sobre todo subintervalo de $[0, +\infty)$, tenemos que existe M_0 para todo $0 \leq t \leq t_0$ tal que

$$\|S(t)\| \leq M_0 \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

de esta forma si $w > 0$, entonces escogemos $M_w = M_0$, y si $w < 0$ entonces escogemos $M_w = e^{-wt_0} M_0$. $\square$

Ejemplo 24. En el semigrupo del Ejemplo (23), la cota de crecimiento para $S(t)$ es $\sup_{n \geq 1} \lambda_n$.

Ya que solamente hemos asumido que $S(t)$ es continua no es posible diferenciar a $S(t)z$. Sin embargo, es posible relacionar $S'(t)z$ con la solución de una ecuación diferencial abstracta.

Definición 4.3. El generador infinitesimal A de un C_0 -semigrupo sobre un espacio de Hilbert Z se define por

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(S(t) - I)z$$

siempre y cuando el límite exista, $D(A)$ es el conjunto de elementos de Z es tal que el límite existe.

Ejemplo 25. El semigrupo e^{At} , $A \in L(Z)$ tiene como generador infinitesimal a A . e^{At} es diferenciable en 0. También es diferenciable para todo t y $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Teorema 4.4. Sea $S(t)$ un semigrupo fuertemente continuo sobre un espacio de Hilbert Z con generador infinitesimal A . Entonces las siguientes ocurren:

- a) Para $z_0 \in D(A)$, $S(t)z_0 \in D(A)$, para todo $t \geq 0$,
- b) $\frac{d}{dt}(S(t)z_0) = AS(t)z_0 = S(t)Az_0$, para $z_0 \in D(A)$, $t > 0$,
- c) $\frac{d^n}{dt^n}(S(t)z_0) = A^n S(t)z_0 = S(t)A^n z_0$, para $z_0 \in D(A)$, $t > 0$,
- d) $S(t)z_0 - z_0 = \int_0^t S(s)Az_0 ds$, para $z_0 \in D(A)$,
- e) $\int_0^t S(s)z ds \in D(A)$ y $A \int_0^t S(s)z ds = S(t)z - z$, para todo $z \in Z$ y $D(A)$ es denso en Z ,
- f) A es un operador lineal cerrado,
- g) $\bigcap_{n=1}^{+\infty} D(A^n)$ es denso en Z .

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero a) y b). Sea $s > 0$ y considere

$$\frac{S(t+s)z_0 - S(t)z_0}{s} = S(t) \frac{(S(s) - I)z_0}{s} = \frac{S(s) - I}{s} S(t)z_0.$$

Si $z_0 \in D(A)$, el $\lim_{s \rightarrow 0^+} S(t) \frac{(S(s) - I)z_0}{s}$ existe, de aquí que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(s) - I}{s} S(t)z_0$$

existe. En particular, $S(t)z_0 \in D(A)$ y la derivada de $S(t)z_0$ es

$$AS(t)z_0 = S(t)Az_0,$$

es decir,

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(t+s)z_0 - S(t)z_0}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} S(t) \frac{(S(s) - I)z_0}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(s) - I}{s} S(t)z_0 \\
 &= AS(t)z_0 = S(t)Az_0.
 \end{aligned}$$

Para $t > 0$ y s suficiente pequeño, tenemos

$$\frac{S(t-s)z_0 - S(t)z_0}{-s} = S(t-s) \frac{(S(s) - I)z_0}{s},$$

luego la derivada existe y es igual a $S(t)Az_0$.

La parte c) sigue por inducción.

Veamos d). Sea $z^* \in Z$ y $z_0 \in D(A)$. Entonces

$$\left\langle z^*, S(t)z_0 - z_0 \right\rangle_z = \int_0^t \frac{d}{du} \langle z^*, S(u)z_0 \rangle du,$$

de aquí

$$\begin{aligned}
 \langle z^*, S(t)z_0 - z_0 \rangle &= \int_0^t \langle z^*, S(u)Az_0 \rangle du \quad z_0 \in D(A) \quad (\text{Aplicando (b)}) \\
 &= \left\langle z^*, \int_0^t S(u)Az_0 du \right\rangle
 \end{aligned}$$

Esto prueba d) para z^* arbitrario.

e) Primero veamos que $D(A)$ es denso en Z . Considere para cualquier $z \in Z$.

$$\frac{S(s) - I}{s} \int_0^t S(u)z du = \frac{1}{s} \int_0^t S(s+u)z du - \frac{1}{s} \int_0^t S(u)z du.$$

Estas integrales están bien definidas por ser $S(t)$ fuertemente continuo (por el Lema A.5.5 y el Ejemplo A.5.15 de [8]). Tomando $\rho = s + u$ en la segunda integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{S(s) - I}{s} \int_0^t S(u)z du \\
&= \frac{1}{s} \int_s^{s+t} S(\rho)z d\rho - \frac{1}{s} \int_0^t S(u)z du \\
&= \frac{1}{s} \left[\int_t^{t+s} S(\rho)z d\rho + \int_s^t S(\rho)z d\rho - \int_s^t S(u)z du - \int_0^s S(u)z du \right] \\
&= \frac{1}{s} \left[\int_0^s S(t+u)z du - \int_0^s S(u)z du \right] \\
&= \frac{1}{s} \left[\int_0^s (S(t+u) - S(u))z du \right] \\
&= \frac{1}{s} \int_0^s S(u)(S(t) - I)z du \quad \text{cuando } s \rightarrow 0^+ \\
&\frac{1}{s} \int_0^s S(u)(S(t) - I)z du \rightarrow (S(t) - I)z,
\end{aligned}$$

de aquí

$$\int_0^t S(u)z du \in D(A) \quad \text{y} \quad A \int_0^t S(u)z du = (S(t) - I)z.$$

Además, $\frac{1}{t} \int_0^t S(u)z du \rightarrow z$ si $t \rightarrow 0^+$, de aquí para cualquier $z \in Z$, existe una sucesión en $D(A)$ que tiende a z . Esto prueba que $\overline{D(A)} = Z$.

f) Para probar que A es cerrado, sea $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset D(A)$ que converge a z tal que $Az_n \rightarrow y$.

Entonces $\|S(s)Az_n - S(s)y\| \leq Me^{ws}\|Az_n - y\|$, por lo tanto se obtiene que $S(s)Az_n \rightarrow S(s)y$ uniformemente sobre $[0, t]$. Ahora, como $z_n \in D(A)$, tenemos

$$S(t)z_n - z_n = \int_0^t S(s)Az_n ds.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada,

$$S(t)z - z = \int_0^t S(s)y ds,$$

y así

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)z - z}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)y ds.$$

De aquí $z \in D(A)$ y $Az = y$ lo cual prueba que A es cerrado.

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

g) Sea $C_0^{+\infty}(\mathbb{R}^+)$ la clase de funciones reales sobre $\mathbb{R}^+$ con derivadas continuas de todos los ordenes y con soporte compacto contenido en la semirecta $(0, +\infty)$. Si $\psi \in C_0^{+\infty}(\mathbb{R}^+)$, entonces también lo es $\psi^{(r)}$ y $\psi(u)S(u)z$ es una función de $\mathbb{R}^+ \rightarrow Z$.

Sea

$$Z_0 = \left\{ g = \int_0^{+\infty} \psi(u)S(u)zdu; \quad z \in Z, \quad \psi \in C_0^{+\infty}(\mathbb{R}^+) \right\}.$$

g está bien definida por el Lema A.5.5(ver [8]). Mostraremos que $z_0 \in D(A^r)$ para $r > 1$ y que Z_0 es denso en Z .

Para s suficientemente pequeño, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{S(s) - I}{s} g &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \psi(u)[S(u+s)z - S(u)z]du \\ &= \frac{1}{s} \int_s^{+\infty} [\psi(u-s) - \psi(u)]S(u)zdu - \frac{1}{s} \int_0^s \psi(u)S(u)zdu, \end{aligned}$$

recordemos que $\int_0^{+\infty} \psi(u)S(u)zdu = 0$ ya que $\psi(u)$ tiene soporte compacto en $(0, +\infty)$.

Pero $\frac{\psi(u-s) - \psi(u)}{s} \rightarrow -\dot{\psi}(u)$ cuando $s \rightarrow 0^+$, uniformemente con respecto a u , y la última expresión es cero para s suficientemente pequeño, ya que el soporte de ψ está contenido en $(0, +\infty)$.

Así $g \in D(A)$ y $Ag = - \int_0^{+\infty} \dot{\psi}(u)S(u)zdu$.

Repitiendo este argumento, vemos que $g \in D(A^r)$ para todo $r > 0$, y

$$A^r g = (-1)^r \int_0^{+\infty} \psi^{(r)}(u)S(u)zdu.$$

Esto muestra que $Z_0 \subset \bigcap_{r=1}^{+\infty} D(A^r)$.

Supongamos ahora que $\overline{Z_0} \not\subseteq Z$. Entonces existe $z_0 \in Z$ tal que

$$\langle z_0, g \rangle = 0 \text{ para todo } g \in Z_0 \text{ y } \|z_0\| = 1.$$

Así

$$\left\langle z_0, \int_0^{+\infty} \psi(u)S(u)zdu \right\rangle = \int_0^{+\infty} \psi(u) \langle z_0, S(u)z \rangle du = 0,$$

para todo $\psi \in C_0^{+\infty}(\mathbb{R}^+)$ y $z \in Z$. Pero $\langle z_0, S(u)z_0 \rangle$ es continuo con $\|z_0\| = 1$. De aquí que existe $\psi \in C_0^{+\infty}(\mathbb{R}^+)$ tal que $\int_0^{+\infty} \psi(u) \langle z_0, S(u)z_0 \rangle du \neq 0$. Esto es una contradicción, y así $\overline{Z_0} = Z$. $\square$

Lema 4.5. Sea $S(t)$ un C_0 -semigrupo con generador infinitesimal A y crecimiento acotado ω_0 . Si $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega > \omega_0$, entonces $\lambda \in \rho(A)$, y para todo $z \in Z$ lo siguiente ocurre:

- (a) $R(\lambda, A)z = (\lambda I - A)^{-1}z = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)z dt$ y $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\sigma - \omega}$, donde $\sigma = \operatorname{Re}(\lambda)$,
 (b) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha(\alpha I - A)^{-1}z = z$ para todo $z \in Z$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Este Lema muestra que $R(\lambda, A)$ es la transformada de Laplace del semigrupo.

Teorema 4.6. (Hille-Yosida) Una condición necesaria y suficiente para que un operador lineal A cerrado, densamente definido sobre un espacio de Hilbert Z sea el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo es que existan números reales M y ω tales que para todo $\alpha > \omega$, $\alpha \in \rho(A)$, el conjunto resolvente de A , y

$$\|R(\lambda, A)^r\| \leq \frac{M}{(\alpha - \omega)^r} \text{ para todo } r \geq 1,$$

donde $R(\alpha, A) = (\alpha I - A)^{-1}$ es el resolvente. En este caso

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Observación 4.7. Que sea “densamente definido”, significa definido sobre un conjunto denso.

Ejemplo 26. Sea $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ una sucesión de números reales y sea $\{\phi_n, n \geq 1\}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert Z separable. Definamos el siguiente operador sobre Z

$$Az = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle z, \phi_n \rangle \phi_n,$$

$$\text{donde } D(A) = \left\{ z \in Z \text{ tal que } \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n \langle z, \phi_n \rangle|^2 < +\infty \right\}.$$

A es un operador autoadjunto sobre Z .

Probaremos que A es el generador infinitesimal del C_0 -semigrupo sobre Z siempre que $\sup_{n \geq 1} \lambda_n < +\infty$.

DEMOSTRACIÓN. a) Primero mostraremos que A es cerrado y densamente definido. Claramente todo z_p con $\langle z_p, \phi_n \rangle = 0$ para n grande permanece en $D(A)$ y forma un conjunto denso en Z . Sea $\{z_p\}_{p \geq 1}$ una sucesión en $D(A)$ con $z_p \rightarrow z_0$ y $Az_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} y_0$.

Ya que $\{Az_p\}_{p \geq 1}$ es acotada tenemos

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n \langle z_p, \phi_n \rangle|^2 \leq M \quad p \geq 1.$$

Así, $\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n \langle z_0, \phi_n \rangle|^2 \leq M$, entonces $z_0 \in D(A)$ con $Az_0 = y_0$, mostrando que A es cerrado.

b) Ahora mostraremos que $(\lambda I - A)$ es invertible si, y solo si $\inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0$.

Primero asumamos que $\inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0$. Entonces

$$A_\lambda x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle x, \phi_n \rangle \phi_n,$$

es un operador lineal acotado sobre Z con $A_\lambda x \in D(A)$ y

$$(\lambda I - A)A_\lambda = A_\lambda(\lambda I - A) = I.$$

Entonces $\lambda \in \rho(A)$ y $A_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$.

Suponga que $(\lambda I - A)$ es invertible. Ya que $(\lambda_n I - A)\phi_n = 0$, debemos tener que $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $\lambda = \lambda_n$, $(\lambda I - A)\phi_n = 0$ y $(\lambda I - A)$ no sería invertible.

Además, tenemos que para cualquier sucesión acotada $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset Z$, existe una sucesión acotada $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset Z$ tal que

$$(\lambda I - A)y_n = x_n.$$

Si $x_n = \phi_n$, entonces $y_n = \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \phi_n$ de forma que $\inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0$.

c) Del Teorema 4.6 de Hille-Yosida, sabemos que A es el generador infinitesimal del semigrupo si existen M, w constantes tal que

$$\|R(\alpha, A^r)\| \leq \frac{M}{(\alpha - w)^r}, \quad \text{para } r \geq 1 \text{ y } \alpha > w.$$

Ahora si $\inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0$, $(A\lambda - A)$ es invertible, entonces

$$R(\alpha, A)^r y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - \lambda_n)^r} \langle y, \phi_n \rangle \phi_n \quad (R(\alpha, A) = A_\lambda),$$

así

$$\|R(\alpha, A)^r\| \leq \sup_{n \geq 1} \frac{1}{|\alpha - \lambda_n|^r} = \left[\sup_{n \geq 1} \frac{1}{|\alpha - \lambda_n|} \right]^r.$$

Necesitamos probar que existe M, w tal que para $\alpha > w$

$$\left[\sup_{n \geq 1} \frac{\alpha - w}{|\alpha - \lambda_n|} \right]^r \leq M, \quad (4.3)$$

pero si $\sup_{n \geq 1} \lambda_n \leq w$, tenemos para $\alpha > w$ que $\inf_{n \geq 1} |\lambda_n - w| \geq \alpha - w$ entonces

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\alpha - w}{|\alpha - \lambda_n|} \leq 1.$$

De aquí (4.3) se satisface con $M = 1$.

Del Teorema 4.6 de Hille-Yosida, se sabe que A genera un C_0 -semigrupo. Queremos calcular este semigrupo. Por el Teorema 4.4 b), se tiene

$$\frac{d}{dt} S(t) \phi_n = S(t) A \phi_n = \lambda S(t) \phi_n.$$

Así $S(t) \phi_n = e^{\lambda_n t} f_n$ para algún $f_n \in Z$. Ya que $S(0) = I$, concluimos que $S(t) \phi_n = e^{\lambda_n t} \phi_n$. Como $S(t)$ es lineal y acotado y $\{\phi_n\}$ es una base ortonormal en Z , se sigue

$$S(t)z = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n,$$

este es el semigrupo considerado en el Ejemplo 23. $\square$

Ejemplo 27. Considere el sistema

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} A_0 x = 0, \\ x(0) = x_0, \\ \frac{dx}{dt}(0) = x_1, \end{cases}$$

A_0 es un operador adjunto positivo sobre un espacio de Hilbert X con dominio $D(A_0)$ y $A_0^{-1} \in L(X)$.

Del Ejemplo A.4.2 [8], tenemos que $A_0^{-1} \in L(X)$ si, y solo si A_0 es coercivo, i.e., para algún K , A_0 satisface

$$\langle A_0 x, x \rangle_X \geq K \|x\|_X^2 \text{ para todo } x \in D(A_0).$$

Del Lema A.3.73 [8], se sigue que A_0 tiene una raíz cuadrada ($A_0^{1/2}$) tal que $D(A_0) \subset D(A_0^{1/2})$.

Siguiendo la notación que se sigue en dimensión finita, introducimos el vector estado

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix},$$

para obtener el sistema de primer orden

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

$$\frac{dz}{dt} = Az, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -\alpha I \end{pmatrix}.$$

Sea el espacio de Hilbert $Z = D(A_0^{1/2}) \oplus X$ con el producto interno

$$\langle w, z \rangle_Z = \langle A_0^{1/2} w_1, A_0^{1/2} z_1 \rangle_X + \langle w_2, z_2 \rangle_X$$

$$\text{donde } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Ya que $A_0^{1/2}$ es positivo y $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ es un producto interno sobre X , es fácil ver que $\langle w, z \rangle_Z$ define un producto interno. Así resta mostrar que Z con la norma $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ es completo.

Sea

$$z^n = \begin{pmatrix} z_1^n \\ z_2^n \end{pmatrix}$$

una sucesión de Cauchy en Z . Entonces

$$\|A_0^{1/2}[z_1^n - z_1^m]\|_X^2 + \|z_2^n - z_2^m\|_X^2 = \|z^n - z^m\|_Z^2 \longrightarrow 0 \quad n, m \rightarrow +\infty.$$

De aquí se tiene que z_2^n es una sucesión Cauchy en X , y como X es un espacio de Hilbert, sabemos que $z_2^n \rightarrow z_2 \in X$. Igualmente tenemos que $A_0^{1/2} z_1^n \rightarrow x \in X$. Como A_0 es invertible y acotada, también lo es $A_0^{1/2}$ y

$$(A_0^{1/2})^{-1} = (A_0^{-1})^{1/2} = A_0^{-1/2}.$$

$$z_1^n = A^{-1/2}[A_0^{1/2} z_1^n] \rightarrow A_0^{-1/2} x = z_1 \in D(A_0^{1/2}) \quad \text{si } n \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Así, } \|z - z_n\|_Z^2 \longrightarrow 0, \text{ donde } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ y por lo tanto } Z \text{ es completo.}$$

Si definimos $D(A) = D(A_0) \oplus D(A_0^{1/2})$ y

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha A_0^{-1} & -A_0^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

entonces Q es un operador lineal acotado sobre Z con $\text{ran}(Q) = D(A)$ y $AQ = I$.

Del Teorema A.3.46 [8] vemos que A es cerrado. Es fácil ver que A tiene dominio denso en Z . Además, para $w \in D(A)$ calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle w, Aw \rangle_Z) &= \operatorname{Re}(\langle A_0 w_1, w_2 \rangle_X + \langle w_2, -A_0 w_1 - \alpha w_2 \rangle_X) \\ &= -\alpha \|w_2\|_X^2, \end{aligned}$$

el adjunto A^* con respecto a Z es:

$$A^* \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A_0 & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Observe que $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ y

$$A = A^*, D(A) = D(A^*), \langle A^{-1}z, x \rangle = \langle z, (A^{-1})^*x \rangle,$$

$$\text{y } \operatorname{Re}\langle w, A^*w \rangle_Z = -\alpha \|w_2\|_X^2.$$

Este ejemplo cubre la ecuación de ondas y del calor para el cual el producto interno $\langle z, z \rangle_Z$ corresponde a la energía del sistema. Como caso especial considere la ecuación de onda no-amortiguada:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t), \\ w(0, t) = 0 = w(1, t), \\ w(x, 0) = w_0(x), \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = w_1(x). \end{cases}$$

Entonces el operador A_0 definido sobre $L_2(0, 1)$ es autoadjunto, positivo ($\langle A_0 x, x \rangle \geq 0$) y acotado e invertible:

$$A_0 h = -\frac{d^2 h}{dx^2},$$

con dominio

$$D(A_0) = \left\{ h \in L_2(0, 1) \mid h, \frac{dh}{dx} \text{ son abs continuas } \frac{d^2 h}{dx^2} \in L_2(0, 1) \text{ y } h(0) = 0 = h(1) \right\}.$$

Así la ecuación de onda puede ser formulada como una ecuación diferencial abstracta sobre $Z = D(A_0^{1/2}) \oplus L_2(0, 1)$. El operador del sistema

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{en el ejemplo anterior con } \alpha = 0)$$

es el generador de un semigrupo sobre Z .

El semigrupo viene dado por

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

$$S(l) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \left[\langle w_1, \varphi_n \rangle \cos(n\pi t) + \frac{1}{n\pi} \langle w_2, \varphi_n \rangle \sin(n\pi t) \right] \varphi_n \\ \sum_{n=1}^{+\infty} 2 [-n\pi \langle w_1, \varphi_n \rangle \sin(n\pi t) + \langle w_2, \varphi_n \rangle \cos(n\pi t)] \varphi_n \end{pmatrix},$$

donde $\varphi_n(x) = \sin(n\pi t)$, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno en $L_2(0,1)$.

1.1. El Problema de Cauchy Abstracto. Los resultados de esta sección vienen del libro de Jerome Goldstein [19].

Sea A un operador densamente definido sobre un espacio de Hilbert Z . Consideremos el problema de Cauchy o problema con valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = Az(t), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (4.4)$$

donde $t \in \mathbb{R}^+$, $z_0 \in D(A)$.

Definición 4.8. El problema (4.4) se llama bien definido si el conjunto resolvente del operador A , $\rho(A)$ es no vacío y para cada $z_0 \in D(A)$ existe una única solución $z: \mathbb{R}^+ \rightarrow D(A)$ de (4.4) en $C^1(\mathbb{R}^+, Z)$ (el conjunto de las funciones continuas con primera derivada continua).

Teorema 4.9. El problema (4.4) es bien definido si, y sólo si A genera un C_0 -semigrupo S sobre Z . En este caso la solución viene dada por $z(t) = S(t)z_0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Consideremos el problema de Cauchy abstracto

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + f(t), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

$t \in \mathbb{R}^+$.

Teorema 4.10. Suponga A genera un C_0 -semigrupo sobre Z y $z_0 \in D(A)$. Supongamos que

- (i) $f \in C(\mathbb{R}^+, Z)$ toma valores en $D(A)$ y $Af \in C(\mathbb{R}^+, Z)$, o
- (ii) $f \in C^1(\mathbb{R}^+, Z)$.

Entonces (4.5) tiene una única solución $z \in C^1(\mathbb{R}^+, Z)$ con valores en $D(A)$. La solución viene dada por

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \quad (4.6)$$

Consideremos el problema de Cauchy abstracto no lineal

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + f(t, z(t)), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (4.7)$$

donde A genera un C_0 -semigrupo S sobre Z .

Definición 4.11. Toda solución z de (4.7) satisface la ecuación integral

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, z(s))ds, \quad (4.8)$$

pero no a la inversa ya que una solución de (4.8) no es necesariamente diferenciable.

Llamaremos a una solución de (4.8) como una solución moderada de (4.7); una solución moderada es una clase de solución generalizada.

Teorema 4.12. Teorema de Existencia Global.

Sea $z_0 \in Z$. Sea $f : \mathbb{R}^+ \times Z \rightarrow Z$ que satisface: para cada $\tau > 0$ existe una constante $K = K(\tau)$ tal que

$$\|f(t, z_1) - f(t, z_2)\| \leq K(\tau)\|z_1 - z_2\| \quad (4.9)$$

siempre que $z_1, z_2 \in Z$, $0 \leq t \leq \tau$. Entonces (4.7) tiene una solución moderada sobre $\mathbb{R}^+$.

2. Teoría de Control

2.1. Control Determinístico. Consideremos el siguiente sistema de control determinístico

$$z' = A(t)z(t) + Bu(t), \quad (4.10)$$

donde A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre un espacio de Hilbert Z , $B \in L(U, Z)$. El control $u \in L_2([0, \tau], U)$. La solución estado, es la solución moderada de (4.10) y viene dada por

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (4.11)$$

Definición 4.13. El sistema de control (4.10) se dice exactamente controlable sobre $[0, \tau]$, $\tau > 0$ si para todo $z_0, z_1 \in Z$ existe $u \in L_2([0, \tau], U)$ tal que la solución z , dada por (4.11), de (4.10) correspondiente al control u satisface $z(0) = z_0$ y $z(\tau) = z_1$, es decir

$$z_1 = z(\tau) = S(\tau)z_0 + \int_0^\tau S(\tau-s)Bu(s)ds.$$

Para el sistema (4.10) definimos el operador $G : Z \rightarrow Z$

$$Gu = \int_0^\tau S(\tau-s)Bu(s)ds \quad (4.12)$$

Definición 4.14. El operador de controlabilidad Gramian del sistema (4.10) se define por

$$W = GG^*,$$

donde $G^* : Z \rightarrow L_2([0, \tau], U)$ es el adjunto de G y viene dado por

$$G^*z = B^*S^*(\tau-s)z.$$

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

En efecto;

$$\begin{aligned}\langle Gu, z \rangle &= \left\langle \int_0^\tau S(\tau-s)B(s)u(s)ds, z \right\rangle = \int_0^\tau \langle S(\tau-s)B(s)u(s), z \rangle ds \\ &= \int_0^\tau \langle u(s), B^*(s)S^*(\tau-s)z \rangle ds = \left\langle \int_0^\tau u(s), B^*(s)S^*(\tau-s)z \right\rangle \\ &= \langle u, B^*(s)S^*(\tau-s)z \rangle_{L_2([0,\tau],U), L_2([0,\tau],U)} = \langle u, G^*z \rangle_{L_2([0,\tau],U), L_2([0,\tau],U)}.\end{aligned}$$

Así se tiene que $G^* = B^*S^*(\tau-s)$.

Terminamos la sección enunciando el siguiente teorema cuya prueba puede verse en [8].

Teorema 4.15. *El sistema (4.10) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ si, y solo si una de las siguiente ocurre para algún $\gamma > 0$ y para todo $z \in Z$:*

- (i) $\text{Rang } G = Z$
- (ii) $\langle Wz, z \rangle \geq \gamma \|z\|_Z^2$,
- (iii) $\|G^*z\|^2 := \int_0^\tau \|(G^*z)(s)\|_U^2 ds \geq \gamma \|z\|_Z^2$,
- (iv) $\int_0^\tau \|B^*S^*(s)z\|_U^2 ds \geq \gamma \|z\|_Z^2$,
- (v) Si $B^*S^*(s)z = 0$ para todo $s \in [0, \tau]$ entonces $z = 0$.

2.2. Control Estocástico. La sección que presentamos anteriormente sobre controlabilidad de sistemas determinístico es bien conocida. sin embargo el concepto de controlabilidad exacta y aproximada no son conceptos naturales para sistemas estocásticos, es necesario debilitar de tal forma que incluya la controlabilidad exacta determinística como caso particular. Una información completa sobre controlabilidad exacta en ecuaciones diferenciales estocásticas se encuentra bien detallado en el artículo [1] de Agamirza E. Bashirov y Kerim R. Kerimov.

Sean $Z, U, \mathcal{E}$ espacios de Hilbert separables, A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ sobre Z , $B \in L(U, Z)$, $\sigma \in L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z)$ para $t \in [0, \tau]$, recordemos que el espacio $L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z)$ es el espacio de operadores de Hilbert-Schmidt definido en la sección 3.2 del Capítulo 2. Sea $\{w(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso Q -Wiener con valores sobre $\mathcal{E}$ y operador de covarianza Q .

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ es una filtración sobre $\mathcal{F}$. Asumiremos que $\mathcal{F}_t$ es generado por $\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$ para cada $t \in [0, \tau]$. Entonces consideremos la ecuación diferencial lineal estocástica en el intervalo $[0, \tau]$:

$$\begin{cases} dz = Az(t)dt + Bu(t)dt + \sigma dw(t), \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (4.13)$$

z_0 una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$ medible.

Definición 4.16. Ver Nazim Mahmudov [40].

Definimos por $L_2(\mathcal{F}, Z)$ el espacio de Hilbert de todas las variables aleatorias z , fuertemente $\mathcal{F}$ medible tal que $\mathbf{E}(\|z\|^2) < +\infty$.

Definición 4.17. Ver Nazim Mahmudov [40].

Definimos $L_2(\mathcal{F}_t, Z)$ el espacio de Hilbert de todas las variables aleatorias z , fuertemente $\mathcal{F}_t$ medible tal que $\mathbf{E}(\|z\|^2) < +\infty$.

Ya que para cada $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$ es una sub-sigma álgebra completa, $L_2(\mathcal{F}_t, Z)$ es un subespacio cerrado de $L_2(\mathcal{F}, Z)$, por la que $L_2(\mathcal{F}_t, Z)$ también es un espacio de Hilbert, Ver [40].

Definición 4.18. Ver Nazim Mahmudov [40].

$L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], Z)$ denota el espacio de Hilbert de todos los procesos aleatorios progresivamente $\mathcal{F}_t$ medibles definidos en el intervalo $[0, \tau]$ con valores en Z y tal que

$$\mathbf{E}\left(\int_0^{\tau} \|z(t)\|^2 dt\right) < +\infty,$$

para $z(t) \in Z$.

Definición 4.19. Ver Nazim Mahmudov [40].

$L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ denota el espacio de Hilbert de todos los procesos aleatorios progresivamente $\mathcal{F}_t$ adaptados definidos en el intervalo $[0, \tau]$ con valores en U y tal que

$$\mathbf{E}\left(\int_0^{\tau} \|u(t)\|^2 dt\right) < +\infty,$$

para $u(t) \in U$.

Suponemos que el control u en la ecuación (4.13) es un proceso aleatorio perteneciente al espacio $L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$.

La ecuación diferencial lineal estocástica (4.13) tiene como solución, la solución moderada correspondiente al control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$:

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds + \int_0^t S(t-s)\sigma dw(s). \quad (4.14)$$

Al sistema (4.13) podemos asociar el siguiente sistema determinístico (ver [1] para mayores detalles):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + Bv(t), & 0 < t \leq \tau, \\ y(0) = y_0 = \mathbf{E}(z_0). \end{cases} \quad (4.15)$$

El sistema (4.15) tiene solución moderada

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bv(s)ds, \quad 0 < t \leq \tau, \quad (4.16)$$

donde el control $v(t) = \mathbf{E}(u(t)) \in L_2([0, \tau], U)$ y $y_0 \in Z$.

Definamos los siguientes operadores:

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

Definición 4.20. Ver Nazim Mahmudov [39].

El operador de controlabilidad

$$G : L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_\tau, Z),$$

se define por

$$Gu = \int_0^\tau S(\tau - s)Bu(s)ds, \quad (4.17)$$

Definición 4.21. Ver Nazim Mahmudov [39].

El operador de controlabilidad Gramian $\mathcal{W} : Z \rightarrow Z$ asociado al sistema (4.15) se define por:

$$\mathcal{W}z = \int_0^\tau S(\tau - s)BB^*S^*(\tau - s)zds, \quad (4.18)$$

para todo $z \in Z$.

Definición 4.22. Ver Nazim Mahmudov [39].

El operador adjunto $G^ : L_2(\mathcal{F}_\tau, Z) \rightarrow L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ se define por*

$$G^*z = B^*S^*(\tau - s)E\{z|\mathcal{F}_s\}, \quad (4.19)$$

Definición 4.23. Ver Nazim Mahmudov [39].

El operador de controlabilidad estocástico asociado al sistema (4.13),

$$\Pi : L_2(\mathcal{F}_\tau, Z) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$$

se define por

$$\Pi z = \int_0^\tau S(\tau - s)BB^*S(\tau - s)E\{z|\mathcal{F}_s\}ds. \quad (4.20)$$

Podemos notar que $\Pi z = GG^*z$.

La definición de controlabilidad exacta del sistema estocástico (4.13) en el cual se basa nuestro trabajo es la siguiente:

Definición 4.24. Dados $z_0 \in L_2(\mathcal{F}_0, Z)$ y $z_1 \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$. La ecuación diferencial estocástica (4.13) se dice exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ si existe un control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ tal que el estado inicial z_0 puede ser conducido al estado final z_1 en el tiempo τ . Es decir, la solución del sistema (4.13), la ecuación (4.14) satisface

$$z(0) = z_0, \text{ y } z(\tau) = z_1.$$

Una solución moderada asociada al control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ de la forma

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t - s)Bu(s)ds + \int_0^t S(t - s)\sigma dw(s), \quad (4.21)$$

la llamaremos estado alcanzable a partir de z_0 en el tiempo t . Debido a la dependencia con respecto (t, z_0, u) , denotaremos la ecuación (4.21) por $z(t, z_0, u)$.

Definamos $\mathcal{R}(t, z_0)$, el conjunto de estados alcanzables a partir de z_0 en el tiempo $n_0 \in \mathbb{N}$, de la siguiente forma:

$$\mathcal{R}(t, z_0) := S(t)z_0 + \text{Rang } G + \int_0^t S(t-s)\sigma dw(s) = \left\{ z(t_0, z_0, u) : u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U) \right\}. \quad (4.22)$$

Una definición equivalente a la Definición 4.24 es la siguiente:

Definición 4.25. La ecuación diferencial estocástica (4.13) se dice exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ si todo punto $z \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$ es alcanzado desde el origen z_0 en el tiempo τ , es decir

$$\mathcal{R}(\tau, z_0) = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z). \quad (4.23)$$

Dos teoremas que relacionan la controlabilidad exacta de la ecuación diferencial (4.14) y la ecuación diferencial determinística (4.15) son presentados ahora.

Teorema 4.26. Ver Nazim Mahmudov [39].

El sistema estocástico (4.13) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ si, y solo si algunos de los siguientes ocurre:

- (i) $\mathbf{E}(\langle \Pi z, z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2)$,
- (ii) $R(\lambda, \Pi)$ converge uniformemente en la topología del operador cuando $\lambda \rightarrow 0^+$,
- (iii) $\lambda R(\lambda, \Pi)$ converge uniformemente a cero en la topología del operador cuando $\lambda \rightarrow 0^+$,

donde $R(\lambda, \Pi) = (\lambda I + \Pi)^{-1}$ es el operador resolvente del operador Π .

DEMOSTRACIÓN. Veamos que (i) implica (ii). Supongamos que $\mathbf{E}(\langle \Pi z, z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2)$. Entonces para todo $z \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$ y para todo $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\langle (\lambda I + \Pi)z, z \rangle) &= \mathbf{E}(\langle \lambda z, z \rangle) + \mathbf{E}(\langle \Pi z, z \rangle) = \lambda \mathbf{E}(\langle z, z \rangle) + \mathbf{E}(\langle \Pi z, z \rangle) \\ &\geq \lambda \mathbf{E}(\|z\|^2) + \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2) = (\lambda + \gamma) \mathbf{E}(\|z\|^2). \end{aligned}$$

En consecuencia, para todo $\lambda > 0$, sustituyendo z por $u = (\lambda I + \Pi)^{-1}z$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$(\lambda + \gamma) \mathbf{E}(\|(\lambda I + \Pi)^{-1}z\|^2) \leq \mathbf{E}\langle z, (\lambda I + \Pi)^{-1}z \rangle \leq \mathbf{E}\|z\| \mathbf{E}\|(\lambda I + \Pi)^{-1}z\|,$$

es decir

$$\left(\frac{\mathbf{E}\|(\lambda I + \Pi)^{-1}z\|}{\mathbf{E}\|z\|} \right) \leq \frac{1}{\lambda + \gamma} < \frac{1}{\gamma} < +\infty,$$

de forma que

$$\|(\lambda I + \Pi)^{-1}\| = \sup_{\|z\| \neq 0} \left(\frac{\mathbf{E}\|(\lambda I + \Pi)^{-1}z\|}{\mathbf{E}\|z\|} \right) < +\infty.$$

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

De aquí podemos afirmar que $\|(\lambda I + \Pi)^{-1}\|$ es acotado con respecto a $\lambda > 0$. Por la identidad del resolvente se tiene para $\mu > 0$ y $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|(\mu I + \Pi)^{-1} - (\lambda I + \Pi)^{-1}\| &= \|(\mu - \lambda)(\mu I + \Pi)^{-1}(\lambda I + \Pi)^{-1}\| \\ &= |\mu - \lambda| \|(\mu I + \Pi)^{-1}\| \|(\lambda I + \Pi)^{-1}\| \\ &\leq \frac{|\mu - \lambda|}{\gamma^2}. \end{aligned}$$

El resultado anterior prueba que la sucesión $\{(\lambda I + \Pi)^{-1}\}_{\lambda > 0}$ es una sucesión de Cauchy de operadores lineales acotados. Ya que esta sucesión pertenece al espacio de todos los operadores lineales acotados, el cual es un espacio completo, la sucesión $\{(\lambda I + \Pi)^{-1}\}_{\lambda > 0}$ converge cuando $\lambda \rightarrow 0^+$. Además la convergencia de $\{(\lambda I + \Pi)^{-1}\}_{\lambda > 0}$ es una convergencia uniforme en la topología del operador.

(ii) implica (iii) es obvio.

Veamos que (iii) implica (i).

Supongamos que $\lambda\|(\lambda I + \Pi)^{-1}\| \rightarrow 0^+$ uniformemente cuando $\lambda \rightarrow 0^+$. Entonces $\lambda^{1/2}\|(\lambda I + \Pi)^{-1/2}\| \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow 0^+$. Para $\gamma > 0$ suficientemente pequeño obtenemos

$$\|\gamma^{1/2}(\gamma I + \Pi)^{-1/2}\| = \gamma^{1/2}\|(\gamma I + \Pi)^{-1/2}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Así, para todo $z \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\|z\|^2) &= \mathbf{E}(\|\gamma^{1/2}(\gamma I + \Pi)^{1/2}(\gamma^{-1/2}(\gamma I + \Pi)^{-1/2})z\|^2) \\ &= \mathbf{E}(\|\gamma^{1/2}(\gamma I + \Pi)^{-1/2}\|^2 \|\gamma^{-1/2}(\gamma I + \Pi)^{1/2}z\|^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbf{E}(\|\gamma^{-1/2}(\gamma I + \Pi)^{1/2}z\|^2) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\langle \gamma^{-1}(\gamma I + \Pi)z, z \rangle). \end{aligned}$$

observe que $(\gamma I + \Pi)^{1/2}$ es un operador autoadjunto.

Esto implica que

$$\mathbf{E}(\langle \gamma^{-1}(\gamma I + \Pi)z, z \rangle) \geq 2\mathbf{E}(\|z\|^2),$$

desarrollemos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\langle \gamma^{-1}(\gamma I + \Pi)z, z \rangle) &= \mathbf{E}(\langle z + \gamma^{-1}\Pi z, z \rangle) = \mathbf{E}\langle z, z \rangle + \mathbf{E}\langle \gamma^{-1}\Pi z, z \rangle \\ &= \mathbf{E}\|z\|^2 + \mathbf{E}\langle \gamma^{-1}\Pi z, z \rangle \geq 2\mathbf{E}(\|z\|^2). \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que $\mathbf{E}\langle \Pi z, z \rangle \geq \gamma \mathbf{E}\|z\|^2$.

Solo falta ver que controlabilidad exacta del sistema (4.13) es equivalente a (i).

En efecto, supongamos primero que

$$\mathbf{E}(\langle \Pi z, z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2), \quad (4.24)$$

para todo $z \in \text{Dom}(\Pi)$ y $\gamma > 0$ dado. Si $\Pi z = 0$, por (4.24) $z = 0$, esto implica que Π es un operador inyectivo, por lo tanto Π es invertible. Sea $y = \Pi z \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$, entonces

tomando $z = \Pi^{-1}y$ en la ecuación (4.24) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\mathbf{E}(\|\Pi^{-1}y\|^2) \leq \frac{1}{\gamma} \mathbf{E}(\langle y, \Pi^{-1}y \rangle) \leq \mathbf{E}(\|y\|) \mathbf{E}(\|\Pi^{-1}y\|),$$

es decir

$$\mathbf{E}(\|\Pi^{-1}y\|) \leq \gamma \mathbf{E}\|y\|.$$

De aquí se obtiene que Π^{-1} es invertible y acotado, y por el Corolario .42 (ver apéndice)

$$\text{Rang } \Pi = \text{Dom } (\Pi^{-1}) = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z).$$

Ya que $\Pi = GG^*$, se tiene que $\text{Rang } (\Pi) \subset \text{Rang } G$, de esta manera tenemos que $\text{Rang } G = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$ y por (4.23) tenemos entonces $\mathcal{R}(\tau, z_0) = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$ y esto significa que el sistema (4.13) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$.

Veamos ahora que controlabilidad exacta del sistema (4.13) implica (i), es decir que $\mathbf{E}(\langle \Pi z, z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2)$.

Si el sistema (4.13) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$, esto es equivalente a decir que $\mathcal{R}(\tau, z_0) = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$ y por definición de $\mathcal{R}(\tau, z_0)$ se obtiene que $\text{Rang } G = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$.

Supongamos primero que G es un operador inyectivo, tal que del Corolario .42 (ver Apéndice), G^{-1} es un operador lineal y acotado y por el Lema .43 parte c) (Ver Apéndice), $(G^*)^{-1} = (G^{-1})^*$ es un operador lineal y acotado del espacio $L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ al espacio $L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$.

De esta forma, existe $\beta > 0$ tal que

$$\mathbf{E}(\|(G^*)^{-1}u\|) \leq \beta \mathbf{E}(\|u\|) \text{ para todo } u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$$

Si $z = (G^*)^{-1}u$, entonces

$$\frac{1}{\beta} \mathbf{E}(\|z\|^2) \leq \mathbf{E}(\|G^*z\|^2) = \mathbf{E}(\langle G^*z, G^*z \rangle) = \mathbf{E}(\langle GG^*z, z \rangle) = \mathbf{E}(\langle \Pi z, z \rangle).$$

Para el caso general ver [8]. □

Teorema 4.27. Ver Nazim Mahmudov [39].

Las siguientes condiciones son equivalentes

- (i) *El sistema estocástico (4.13) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$,*
- (ii) *El sistema determinístico (4.15) es exactamente controlable sobre $[s, \tau]$, $0 \leq s < \tau$,*

Antes de la prueba del Teorema 4.27, necesitamos algunos resultados.

Denotemos al conjunto de martingalas de cuadrado integrable definidas en un espacio de Hilbert Z por $\mathcal{M}_\tau^2(Z)$, es decir, si $M = \{M(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ es un martingala entonces $\mathbf{E}\|M(t)\|^2 < +\infty$.

Definición 4.28. *El espacio dual de un espacio lineal normado Z , denotado por Z^* , es el espacio de todos los funcionales lineales sobre Z con valores en un cuerpo K .*

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

Definición 4.29. Sean Z un espacio de Banach. Un elemento $T \in L(Z)$ es un operador nuclear, si existen dos sucesiones $\{a_j\} \subset Z$, $\{\phi_j\} \subset Z^*$ tales que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|a_j\| \|\phi_j\| < +\infty.$$

El espacio de todos los operadores nucleares dotado con la norma

$$\|T\|_1 = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \|a_j\| \|\phi_j\| : Tx = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \phi_j(x) \right\}$$

es un espacio de Banach. Lo denotamos por $L_1 = L_1(Z)$.

Definamos la variación cuadrática de una martingala $M \in \mathcal{M}_\tau^2(Z)$.

Definición 4.30. Un proceso $V = \{V(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ con valores en L_1 es un proceso creciente si $V(t)$, $t \in [0, \tau]$, es no negativo y $V(t) \leq V(s)$ si $0 \leq t \leq s \leq \tau$.

Definición 4.31. Un proceso V adaptado, creciente, continuo y con valores en L_1 tal que $V(0) = 0$ se llama variación cuadrática de la martingala M si, y solo si para $a, b \in Z$

$$\langle M(t), a \rangle \langle M(t), b \rangle - \langle V(t)a, b \rangle, \quad t \in [0, \tau],$$

es una $\{\mathcal{F}_t\}$ -martingala. El producto escalar se denota por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Denotaremos la variación cuadrática de M por $\ll M(t) \gg$.

El siguiente teorema es un resultado de representación de martingalas de cuadrado integrable. Inicialmente encontramos este teorema para espacios Euclídeos ver [22]. Luego se extendió a dimensiones superiores ver por Ejemplo [24]. A espacios de Hilbert, el cual vamos a utilizar, véase [13] para una prueba detallada. Existe una extensión a espacios de Banach ver [16].

Teorema 4.32. (Ver Da-Prato-Zabczyk, [13], página 220). Sean $\mathcal{E}$ y Z espacios de Hilbert. Sea $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ una filtración. Q el operador lineal y acotado simétrico no negativo definido en $\mathcal{E}$.

Asumiendo que $M \in \mathcal{M}_\tau^2$ y

$$\ll M(t) \gg = \int_0^t (\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^* ds, \quad t \in [0, \tau],$$

donde Φ es un proceso previsible con valores en $L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z)$. Entonces existe un espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, una filtración $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ y un proceso Q -Wiener $\tilde{W} = \{\tilde{w}(s)\}$ con valores en $\mathcal{E}$, definido sobre $(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \times \tilde{\mathcal{F}}, P \times \tilde{P})$ adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t \times \tilde{\mathcal{F}}_t\}$, tal que

$$M(t, \omega, \tilde{\omega}) = M(0) + \int_0^t \Phi(s, \omega, \tilde{\omega}) d\tilde{w}(s, \omega, \tilde{\omega}), \quad (4.25)$$

donde $M(t, \omega, \tilde{\omega}) = M(t, \omega)$, $\Phi(t, \omega, \tilde{\omega}) = \Phi(t, \omega)$, $(\omega, \tilde{\omega}) \in \Omega \times \tilde{\Omega}$.

Corolario 4.33. Sea $W = \{w(s)\}$ un proceso Q -Wiener con valores en el espacio de Hilbert $\mathcal{E}$ donde $Q \in L(\mathcal{E})$ simétrico, no-negativo. Consideremos también la filtración $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Sea z una variable aleatoria tal que $z \in L_2(\mathcal{F}_t, Z)$. Entonces existe un proceso $\Phi \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z))$ tal que

$$E(z|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(z) + \int_0^t \Phi(s) d\tilde{w}(s). \quad (4.26)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $z(t) = z(t, \omega) = E(z|\mathcal{F}_t)$ para $0 \leq t \leq \tau$. Ya que

$$\int_{\Omega} \|z(t)\|^2 dP = \int_{\Omega} \|E(z|\mathcal{F}_t)\|^2 dP = \int_{\Omega} \|z\|^2 dP < +\infty, \text{ para } t \in [0, \tau]$$

se tiene que $z(t)$ es de cuadrado integrable. Además,

$$E(z(t)|\mathcal{F}_s) = E(E(z|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = E(z|\mathcal{F}_s) = z(s), \quad 0 \leq s < \tau,$$

por lo que $\{z(t)\}$ es una martingala de cuadrado integrable, es decir, $\{z(t)\} \in \mathcal{M}_{\tau}^2(Z)$.

Por el Teorema 4.32, obtenemos que

$$E(z|\mathcal{F}_t) = E(z|\mathcal{F}_0) + \int_0^t \Phi(s) d\tilde{w}(s).$$

Ya que $E(z|\mathcal{F}_0) = \mathbf{E}(z)$, se obtiene entonces

$$E(z|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(z) + \int_0^t \Phi(s) d\tilde{w}(s).$$

□

Lema 4.34. Ver Nazim Mahmudov [39].

Sean $\mathcal{E}$ y Z espacios de Hilbert y $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Consideremos $W = \{w(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso de Wiener con valores en $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Para todo $z \in L_2(\mathcal{F}_{\tau}, Z)$ existe un proceso $\phi \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], L_2(\mathcal{E}, Z))$ tal que

$$\Pi z = \mathcal{W}(\mathbf{E}(z)) + \int_0^{\tau} \mathcal{W}_{\tau-s}(\Phi(s)) d\tilde{w}(s) \quad (4.27)$$

DEMOSTRACIÓN. Primero recordemos que

$$\mathcal{W}(z) = \int_0^{\tau} S(\tau-s) B B^* S^*(\tau-s) z ds.$$

Ahora, por el Teorema de Fubini estocástico y la ecuación (4.26)

CAPÍTULO 4. TÓPICOS DE SEMIGRUPOS Y TEORÍA DE CONTROL

$$\begin{aligned}
\Pi z &= \int_0^\tau S(\tau-s)BB^*S^*(\tau-s)E(z|\mathcal{F}_s)ds \\
&= \int_0^\tau S(\tau-s)BB^*S^*(\tau-s)\left[\mathbf{E}(z) + \int_0^t \Phi(s)d\tilde{w}(s)\right]ds \\
&= \int_0^\tau S(\tau-s)BB^*S^*(\tau-s)\mathbf{E}(z)ds + \int_0^\tau S(\tau-s)BB^*S^*(\tau-s)ds \int_0^t \Phi(s)d\tilde{w}(s) \\
&= \mathcal{W}(\mathbf{E}(z)) + \int_0^\tau \int_s^\tau S(\tau-s)BB^*S^*(\tau-s)\Phi(s)dsd\tilde{w}(s) \\
&= \mathcal{W}(\mathbf{E}(z)) + \int_0^\tau \mathcal{W}_{\tau-s}(\Phi(s))d\tilde{w}(s)
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{W}_{\tau-s}(\Phi(s)) = \int_s^\tau S(\tau-s)BB^*S^*(\tau-s)\Phi(s)ds$. □

Vamos hacer la prueba del Teorema 4.27.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el sistema (4.13) es exactamente controlable. Por la parte (i) del Teorema 4.26, se tiene que para todo $z \in L_2(\mathcal{F}_t, Z)$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\mathbf{E}(\langle \Pi z, z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2).$$

Vamos a probar que $\mathbf{E}(\|G^*z\|^2) \geq \gamma \|z\|^2$. En efecto,

$$\mathbf{E}(\|G^*z\|^2) = \mathbf{E}(\langle G^*z, G^*z \rangle) = \mathbf{E}(\langle GG^*z, z \rangle) = \mathbf{E}(\langle \Pi z, z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2).$$

Por la parte (iii) del Teorema 4.10, se obtiene que el sistema (4.15) es exactamente controlable.

Ahora vamos a probar que si el sistema (4.15) es exactamente controlable, entonces el sistema (4.13) es exactamente controlable. Usemos el Lema 4.34. Sea $z \in L_2(\mathcal{F}_t, Z)$, entonces por la ortogonalidad de $\mathbf{E}(z)$ y $\int_0^\tau \Phi(s)d\tilde{W}(s)$ y la notación $d\tilde{W}(s)d\tilde{W}(s) = ds$,

se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\langle \Pi z, z \rangle) &= \mathbf{E}(\langle \mathcal{W}(\mathbf{E}z) + \int_0^\tau \mathcal{W}_{\tau-s} \Phi(s) d\tilde{w}(s), \mathbf{E}(z) + \int_0^\tau \Phi(s) d\tilde{w}(s) \rangle) \\
 &= \mathbf{E}(\langle \mathcal{W}(\mathbf{E}(z)), \mathbf{E}(z) + \int_0^\tau \Phi(s) d\tilde{w}(s) \rangle) + \mathbf{E}(\langle \int_0^\tau \mathcal{W}_{\tau-s} \Phi(s) d\tilde{w}(s), \mathbf{E}(z) + \int_0^\tau \Phi(s) d\tilde{w}(s) \rangle) \\
 &= \mathbf{E}(\langle \mathcal{W}(\mathbf{E}(z)), \mathbf{E}(z) \rangle) + \mathbf{E}(\langle \mathcal{W}(\mathbf{E}(z)), \int_0^\tau \Phi(s) d\tilde{w}(s) \rangle) + \mathbf{E}(\langle \int_0^\tau \mathcal{W}_{\tau-s} \Phi(s) d\tilde{w}(s), \mathbf{E}(z) \rangle) \\
 &\quad + \mathbf{E}(\langle \int_0^\tau \mathcal{W}_{\tau-s} \Phi(s) d\tilde{w}(s), \int_0^\tau \Phi(s) d\tilde{w}(s) \rangle) \\
 &= \mathbf{E}(\langle \mathcal{W}(\mathbf{E}(z)), \mathbf{E}(z) \rangle) + \mathbf{E}(\langle \int_0^\tau \mathcal{W}_{\tau-s} \Phi(s) d\tilde{w}(s), \int_0^\tau \Phi(s) d\tilde{w}(s) \rangle) \\
 &= \mathbf{E}(\langle \mathcal{W}(\mathbf{E}(z)), \mathbf{E}(z) \rangle) + \mathbf{E}(\int_0^\tau \langle \mathcal{W}_{\tau-s} \Phi(s), \Phi(s) \rangle ds) \\
 &\geq \gamma \|\mathbf{E}(z)\|^2 + \gamma \mathbf{E}(\int_0^\tau \|\Phi(s)\|^2 ds) = \gamma \left(\|\mathbf{E}(z)\|^2 + \mathbf{E}(\int_0^\tau \|\Phi(s)\|^2 ds) \right) = \gamma \mathbf{E}(E(\|z\|^2 | \mathcal{F}_\tau)) \\
 &= \mathbf{E}(\|z\|^2).
 \end{aligned}$$

Esto confirma que el sistema (4.13) es exactamente controlable. $\square$

Perturbación no acotada

1. Introducción

En el artículo [31] el siguiente sistema de control infinito dimensional es estudiado

$$z' = Az + B(t)u(t), \quad t > 0, \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad t \in [0, \tau], \quad (5.1)$$

donde Z, U son espacios de Banach, $t \rightarrow B(t) : \mathbb{R} \rightarrow L(U, Z)$ es un operador continuo en la topología fuerte de $L(U, Z)$, A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t; A)\}_{t \geq 0}$ en Z y la función de control u pertenece al espacio $L^2([0, \tau]; U)$.

La siguiente pregunta fue respondida afirmativamente en [31]: si el sistema de control (5.1) es exactamente controlable, entonces para una clase de operadores lineales no acotados P sobre Z el sistema perturbado

$$z' = (A + P)z + B(t)u(t), \quad t > 0, \quad (5.2)$$

¿es también exactamente controlable para P en la vecindad V del 0?

En este capítulo, siguiendo el resultado anterior, realizamos la misma pregunta para la siguiente ecuación de evolución estocástica

$$dz = \{Az + B(t)u(t, \omega)\}dt + \Sigma(t)dw(t), \quad t > 0, \quad (5.3)$$

es decir, si el sistema estocástico (5.3) es exactamente controlable, para una clase de operadores lineales no acotados P sobre Z , la siguiente ecuación de evolución lineal estocástica perturbada

$$dz = \{(A + P)z + B(t)u(t, \omega)\}dt + \Sigma(t)dw(t), \quad t > 0, \quad (5.4)$$

¿es también exactamente controlable?, donde $\{w(t), t \geq 0\}$ es un proceso Q -Wiener con valores en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{E}$, Q el operador de covarianza, Σ es un operador definido en $L_2^0 = L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z)$.

El control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$, siendo $L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ el conjunto de procesos aleatorios $\mathcal{F}_t$ adaptados sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Antecedentes de la clase de problemas como el de la ecuación 5.2, son conocidas para sistemas finito dimensionales. En efecto, el siguiente teorema es bien conocido y puede verse en el libro de Lee y Markus [36].

Teorema 5.1. *Consideremos el sistema autónomo lineal en R^n*

$$\dot{x} = A_0x + B_0u. \quad (5.5)$$

Si (5.5) es exactamente controlable, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que todo sistema lineal autónomo

$$\dot{x} = Ax + Bu \text{ con } \|A - A_0\| < \epsilon \text{ y } \|B - B_0\| < \epsilon, \quad (5.6)$$

es también exactamente controlable. Mas aun, el conjunto de los sistemas autónomos lineales exactamente controlables es abierto y denso en el espacio métrico de los sistemas lineales autónomos en R^n .

Como se indica en [31], si el sistema es de dimensión infinita y P es un operador no acotado, este resultado no es cierto en general. Sin embargo, para una familia particular de ecuaciones de evolución tales como ecuaciones diferenciales parciales podemos permitir que el operador P sea no acotado. Como se explica en [31], se prueba que la controlabilidad exacta se preserva si el sistema es perturbado por un operador lineal no acotado. Esta clase de operadores que denotaremos por $\mathcal{P}(A)$ y que explicaremos más adelante incluye a los operadores lineales acotados definidos de Z en Z , $L(Z) = L(Z, Z)$.

El objeto de este capítulo es probar el Teorema 5.32, que también aparece en [35], el teorema afirma que para una clase de operadores lineales no acotados $\mathcal{P}(A)$ tal que $L(Z) \subset \mathcal{P}(A)$: si para algún $P_0 \in \mathcal{P}(A)$ el sistema

$$dz = \{(A + P_0)z + B(t)u(t, \omega)\}dt + \Sigma(t)dw(t), \quad t > 0, \quad (5.7)$$

es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$, entonces existe una vecindad $V(P_0)$ de P_0 tal que para todo $P \in V(P_0)$ el sistema (5.4) es también exactamente controlable sobre $[0, \tau]$.

Como aplicación probaremos la controlabilidad exacta de la siguiente ecuación de ondas estocástica

$$\begin{cases} d(\partial/\partial t)y(t, x) = \Delta y(t, x)dt + c(-\Delta)^{1/2}y(t, x)dt + u(t, x)dt + dw(t), \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0, \quad t \in [0, \tau], \end{cases} \quad (5.8)$$

donde $W = \{w(t); t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener.

2. Notación y preliminares

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Junto con este espacio consideremos una sucesión creciente de sub- σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t \uparrow \subset \mathcal{F}, t \geq 0\}$. $E(\cdot)$ denota la esperanza de una variable aleatoria con respecto a la medida de probabilidad P .

Sea $\mathcal{E}$ un espacio de Hilbert separable y $\{w(t), t \geq 0\}$ un proceso de Wiener con valores en $\mathcal{E}$ y operador de covarianza Q , con Q un operador nuclear positivo sobre $\mathcal{E}$. Asumiremos que existe una base ortonormal completa $\{e_k\}$ en $\mathcal{E}$, $\{\nu_k\}$ una sucesión de

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

números reales tales que $Qe_k = \nu_k e_k$, $k = 1, 2, \dots$, y $\{\beta_k\}$ es una familia de movimientos Browniano mutuamente independientes sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que

$$\langle w(t), e \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\nu_k} \langle e_k, e \rangle \beta_k(t), \quad e \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0,$$

donde

$$\beta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu_k}} \langle w(t), e_k \rangle, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Asumiremos que $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$ y $L_2^0 := L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z)$ denota el espacio de operadores de Hilbert-Schmidt

$$\Psi : Q^{1/2}\mathcal{E} \rightarrow Z.$$

El espacio L_2^0 , dotado con la norma $\|\Psi\|_{L_2^0}^2 = \text{tr}[\Psi Q \Psi^*]$, es un espacio de Banach separable.

Todos los procesos aleatorios considerados en este capítulo se suponen que son fuertemente $\mathcal{F}_t$ -progresivamente medibles al menos que se diga lo contrario.

Definición 5.2. Ver Nazim Mahmudov [40].

Definimos por $L_2(\mathcal{F}, Z)$ el espacio de Hilbert de todas las variables aleatorias z , fuertemente $\mathcal{F}$ medible tal que $\mathbf{E}(\|z\|^2) < +\infty$.

Definición 5.3. Ver Nazim Mahmudov [40].

Definimos $L_2(\mathcal{F}_t, Z)$ el espacio de Hilbert de todas las variables aleatorias z , fuertemente $\mathcal{F}_t$ medible tal que $\mathbf{E}(\|z\|^2) < +\infty$.

Ya que para cada $t \geq 0$, la sub- σ -álgebra $\mathcal{F}_t$ es completa, $L_2(\mathcal{F}_t, Z)$ es un subespacio cerrado de $L_2(\mathcal{F}, Z)$, entonces $L_2(\mathcal{F}_t, Z)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 5.4. Ver Nazim Mahmudov [40].

$L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], Z)$ denota el espacio de Hilbert de todos los procesos aleatorios progresivamente $\mathcal{F}_t$ medibles definidos en el intervalo $[0, \tau]$ con valores en Z y tal que

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\tau \|z(t)\|^2 dt\right) < +\infty,$$

para $z(t) \in Z$.

Denotamos la norma en $L_2(\mathcal{F}, Z)$ por

$$\|\cdot\|_{L_2(\mathcal{F}, Z)} = (\mathbf{E}(\|\cdot\|_Z^2))^{1/2},$$

y para el espacio $L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ la norma es dada por

$$\|\cdot\|_{L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)} = \left(\sup_{t \in [0, \tau]} \mathbf{E}(\|\cdot\|_U^2)\right)^{1/2}.$$

Un proceso predecible $\{z(t)\}_{t \geq 0}$ con valores en Z , para $t \in [0, \tau]$ con condición inicial z_0 , se dice solución moderada de (5.3) si

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)B(s)u(s)ds + \int_0^t S(t-s)\Sigma(s)dw(s), \quad (5.9)$$

donde z_0 es una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$ -medible.

Si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, $\Sigma \in L_2^0$, z_0 es $\mathcal{F}_0$ -medible y $\int_0^\tau \|S(r)\Sigma(r)\|_{L_2^0}^2 dr < +\infty$, entonces la existencia del lado derecho de la ecuación (5.9) está garantizada.

Definición 5.5. (Controlabilidad Exacta). Diremos que el sistema (5.3) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$, $\tau > 0$ si para todo $z_0 \in L_2(\mathcal{F}_0, Z)$, $z_1 \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$ existe un control $u \in L_2^\mathcal{F}([0, \tau], U)$ tal que la solución (5.9) correspondiente a u , verifica: $z(0) = z_0$ y $z(\tau) = z_1$.

Consideremos el siguiente operador lineal acotado $G : L_2^\mathcal{F}([0, \tau], U) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$,

$$Gu = \int_0^\tau S(\tau-s; A)B(s)u(s)ds + \int_0^\tau S(\tau-s; A)\Sigma(s)dw(s). \quad (5.10)$$

La siguiente proposición es una caracterización de la controlabilidad exacta para el sistema lineal estocástico (5.3).

Proposición 5.6. El sistema (5.3) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ si, y solo si el operador G es sobreyectivo, es decir,

$$G(L_2^\mathcal{F}([0, \tau], U)) = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z).$$

3. Principio de Perturbación

Si A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, y P no es muy irregular en relación a A , entonces $A + P$ es el generador infinitesimal de un semigrupo.

Denotemos por $D(S)$ el dominio de un operador S en un espacio de Banach W , $L(W)$ denota el espacio de los operadores lineales acotados definidos sobre W y $\sigma(S)$ denota el espectro del operador S . Consideremos ahora la siguiente clase de operadores lineales no acotados:

Definición 5.7. Ver Dunford. N y Schwartz. T, [15].

Si A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t; A)\}_{t \geq 0}$, denotaremos por $\mathcal{P}(A)$ la clase de operadores lineales cerrados P que satisfacen las siguientes condiciones:

- (I) $D(A) \subseteq D(P)$,
- (II) para cada $t > 0$, existe una constante $h(t) \geq 0$ tal que

$$\|PS(t; A)z\| \leq h(t)\|z\|,$$

para todo $z \in D(A)$,

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

(III) la integral $\int_0^1 h(t)dt$ existe.

Teorema 5.8. Ver Dunford. N y Schwartz. T, [15].

Sea A el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t; A)\}_{t \geq 0}$ definido sobre Z .

Si $P \in \mathcal{P}(A)$, entonces $A + P$ definido sobre $D(A + P) = D(A)$ es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t; A + P)\}_{t \geq 0}$. Además

$$S(t; A + P)z = \sum_{n=0}^{+\infty} M_n(t), \quad (5.11)$$

$t \geq 0$, donde $M_0(t) = S(t; A)$ y

$$M_n(t)z = \int_0^t S(t-s; A)PM_{n-1}(s)zds,$$

$n \geq 1$ y $z \in Z$.

La serie (5.11) converge absolutamente con respecto al tiempo t en cada intervalo finito. Para cada n y z , la función $M_n(t)z$ es continua para $t \geq 0$.

La prueba de este teorema se hará a través de una serie de lemas que podemos hallar en [15].

Lema 5.9. Ver Dunford. N y Schwartz. T, [15].

Si $P \in \mathcal{P}(A)$, entonces:

- (a) $D(P) \supseteq \cup_{t>0} S(t; A)z$;
- (b) La aplicación $z \rightarrow PS(t; A)z$, $z \in D(A)$ tiene una única extensión a un operador definido sobre todo Z (lo volvemos a denotar por $PS(t; A)$).
- (c) $PS(t; A)z$ es continua en t para todo $t > 0$ y cada $z \in Z$. Si

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|S(t; A)\|}{t},$$

entonces

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|PS(t; A)\|}{t} \leq \omega_0 < +\infty,$$

- (d) Si $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0$, entonces

$$PR(\lambda; A)z = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} PS(t; A)z dt,$$

$z \in Z$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos (b). Ya que $D(A)$ es denso en Z , y por (II) de la Definición 5.7 tenemos que $PS(t; A)$ es uniformemente continua, y por Teorema .25 existe una extensión única continua $PS(t; A)$ sobre todo Z y uniformemente continua sobre Z .

- (a). Sea $z_0 \in Z$, $z_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$, donde $z_n \in D(A)$. Entonces

$$S(t; A)z_n \rightarrow S(t; A)z_0$$

y

$$PS(t; A)z_n \rightarrow PS(t; A)z_0.$$

Como P es cerrado, $S(t; A)z_0 \in D(P)$ y

$$P\{S(t; A)z_0\} = \{PS(t; A)\}z_0.$$

Esto prueba (a).

(c). Para probar (c) sea $0 < \delta < t$. La ecuación

$$PS(t; A)z = PT(\delta; A)S(t - \delta; A)z$$

muestra que $PT(t; A)z$ es continua para $t > \delta$. Por esta misma relación tenemos:

$$\log \|PS(t; A)\| \leq \log \|PS(\delta; A)\| + \log \|S(t - \delta; A)\|,$$

encontramos que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|PS(t; A)\|}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|PS(\delta; A)\|}{t} + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|PS(t - \delta; A)\|}{t} = \omega_0.$$

Así (c) es probado.

Definimos el operador resolvente por $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) z dt$, con $\lambda \in \rho(A)$, $\rho(A)$ es el conjunto de todos los λ donde $R(\lambda, A)^{-1}$ existe. El resolvente $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ es un operador lineal acotado.

(d) Sigue del Teorema .26. En efecto

$$R(\lambda; A) \text{ es integrable y } R(\lambda; A) \subset D(P)$$

y

$$PR(\lambda; A)z = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} PS(t; A)z dt, \quad z \in Z$$

□

Lema 5.10. Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ una familia de operadores acotados definido sobre un intervalo cerrado finito $[\alpha, \beta]$ tal que $S(t)z$ es continuo en t para cada $z \in Z$; entonces $\|S(\cdot)\|$ es medible y acotado sobre $[\alpha, \beta]$. Recíprocamente, si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de operadores lineales acotados en Z y si $S(\cdot)z$ es medible sobre $(0, +\infty)$ para cada $z \in Z$, entonces $S(\cdot)z$ es continuo en todo punto de $(0, +\infty)$.

DEMOSTRACIÓN. Véase la prueba en [15], página 616.

□

Lema 5.11. Sea f una función continua definida para todo $t > 0$ con valores en Z y suponga que

$$\int_0^1 \|f(t)\| dt < +\infty.$$

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

Si $g(t) = \int_0^t S(t-s; A)f(s)ds$ entonces $g(t) \in D(P)$,

$$Pg(t) = \int_0^t PS(t-s; A)f(s)ds,$$

y g y Pg son funciones continuas en t para todo $t > 0$.

DEMOSTRACIÓN. La integral que define a g existe para cada $t \geq 0$ ya que por el Lema 5.10, $\|S(t; A)\|$ es acotado sobre cada intervalo finito.

Por el Lema 5.9, $S(t-s; A)f(s) \in D(P)$ para cada $s < t$. Por el Teorema .26 se muestra que $g(t) \in D(P)$ y se confirma la fórmula dada para $Pg(t)$ tan pronto se demuestre que la función

$$s \rightarrow PS(t-s; A)f(s)$$

sea integrable sobre $[0, t]$. Del Lema 5.9(b) y el Teorema .27 (el principio de acotación uniforme) se tiene que $|PS(\cdot)|$ es acotado sobre cualquier intervalo que no contiene al origen.

Sea $0 < t_1 < t$ tal que la función

$$s \rightarrow \|PS(t-s; A)\|$$

es acotado y $\|f(\cdot)\|$ es acotado, entonces $PS(t-s; A)f(s)$ es integrable sobre el intervalo $0 \leq s \leq t_1$, mientras que por el Lema 5.10 y la Definición 5.7 (III) se tiene que

$$s \rightarrow \|PS(t-s; A)\|$$

es integrable sobre el intervalo $t_1 \leq s \leq t$ y $\|f(\cdot)\|$ es acotada, por lo que obtenemos que $PS(t-s; A)f(s)$ es integrable sobre $t_1 \leq s \leq t$.

Finalmente uniendo ambos resultados se obtiene que $PS(t-s; A)f(s)$ es integrable sobre $0 \leq s \leq t$.

Veamos que Pg es continuo para $t > 0$. Sea $0 < 2\delta < t_0$ y sea $M_1 = \sup |PS(s; A)|$ para $t_0 - 2\delta \leq s \leq t_0 + \delta$. Entonces

$$\|PS(t-s; A)f(s)\| \leq M_1\|f(s)\|$$

si $|t - t_0| \leq \delta$. En consecuencia, por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_0^\delta PS(t-s; A)f(s)ds = \int_0^\delta PS(t_0-s; A)f(s)ds. \quad (5.12)$$

Ahora

$$\int_\delta^t PS(t-s; A)f(s)ds = \int_0^{t_0} PS(s; A)f(t-s)I_{[0, t-\delta]}(s)ds,$$

y si $M_2 = \sup \|f(s)\|$ para $\delta \leq s \leq t_0 + \delta$ entonces

$$\|PS(s; A)f(t-s)I_{[0, t-\delta]}\| \leq M_2\|PS(s; A)\|.$$

Luego

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\delta}^t PS(t-s; A)f(s)ds = \int_{\delta}^{t_0} PS(t_0-s; A)ds \quad (5.13)$$

Combinando (5.12) y (5.13) encontramos que Pg es continuo para $t_0 > 0$ arbitrario. Si aplicamos este resultado con $P = I$, se demuestra que g es continuo. $\square$

Lema 5.12. *Sea f una función continua definida para $t > 0$ con valores en Z y suponga que*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\omega s} \|f(s)\| ds < +\infty$$

para algún ω . Sea $\omega_0 = t \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|S(t; A)\|$ y

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} f(s) ds$$

entonces, para $\operatorname{Re}(\lambda) > \max(\omega, \omega_0)$

$$(i) \quad R(\lambda; A)F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \int_0^t S(t-s; A)f(s)ds dt,$$

$$(ii) \quad PR(\lambda; A)F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P \int_0^t S(t-s; A)f(s)ds dt.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\operatorname{Re}(\lambda) > \max(\omega, \omega_0)$. Para probar (i) tenemos

$$R(\lambda; A)F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t; A) \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} f(s) ds \right\} dt.$$

Por el Lema 4.5, la función

$$e^{-\lambda(t+s)} S(t; A)f(s)$$

es continua sobre $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ y por lo tanto medible sobre $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Por el Teorema .29 (Teorema de Tonelli), tenemos

$$R(\lambda; A)F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t; A)f(s)dt ds.$$

Ahora, para cada s hacemos la sustitución $t \rightarrow (t-s)$ en la segunda integral e intercambiamos el orden de integración. Así

$$\begin{aligned} R(\lambda; A)F(\lambda) &= \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t-s; A)f(s)dt ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \int_0^t S(t-s; A)f(s)ds dt. \end{aligned}$$

La parte (ii) sigue de (i), el Lema 5.11 y el Teorema .26. $\square$

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

La siguiente información necesaria para la prueba del Teorema 5.8 es la convolución de dos funciones medibles Lebesgue F y G y sus propiedades. Estos resultados son presentados sin prueba y pueden verse en [15] página 633.

Definición 5.13. Sean F y G funciones escalares medibles Lebesgue definidas en $(-\infty, +\infty)$. Definimos la función $F * G$ por

$$(F * G) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t-s)G(s)ds,$$

para todo t en el cual la integral existe. $F * G$ se llama la convolución de F y G . Si F y G se anulan para $s < 0$, entonces

$$(F * G) = \int_0^t F(t-s)G(s)ds, \quad t > s.$$

Lema 5.14. Ver Dunford. N y Schwartz. T, [15].

(a) Si $F, G \in L_1(-\infty, +\infty)$, entonces $F * G$ es definido para casi todo t , $F * G \in L_1(-\infty, +\infty)$ y

$$\|F * G\|_1 \leq \|F\|_1 \|G\|_1.$$

(b) Si $F \in L_1(-\infty, +\infty)$ y $|G(t)| \leq M$, entonces

$$|(F * G)(t)| \leq M \|F\|_1,$$

$$\text{donde } \|F\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(s)|ds.$$

(c) Sean F y G definidas para todo $t \geq 0$ e integrables Lebesgue sobre cada intervalo finito, entonces

$$(F * G)(t) = \int_0^t F(t-s)G(s)ds$$

es integrable Lebesgue sobre cada intervalo finito.

Lema 5.15. Ver Dunford. N y Schwartz. T, [15].

(a) Si F y G son funciones medibles Lebesgue definidas sobre $\mathbb{R}$, entonces

$$F * G = G * F.$$

(b) . Si F y G y H pertenecen a $L_1(-\infty, +\infty)$ entonces

$$(F * G) * H = F * (G * H).$$

Ahora si vamos hacer la prueba del Teorema 5.8.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\chi(t) = \|S(t; A)\|$ y $\psi(t) = \|PS(t; A)\|$. Por el lema 5.10, $\chi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones medibles.

Si $\omega > \omega_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|S(t; A)\|$, entonces existe $M_\omega < +\infty$ tal que

$$\chi(t) = \|S(t; A)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Ya que por la Definición (5.7)

$$\|PS(t; A)\| \leq k_t,$$

y

$$\int_0^1 k_t dt < +\infty,$$

se tiene

$$\int_0^\beta \psi(t) dt < +\infty,$$

para cada $\beta > 0$.

Sea $\psi^{(1)} = \psi$, y en forma inductiva $\psi^{(n)} = \psi^{(n-1)} * \psi$. Por el Lema 5.14(c), $\psi^{(n)}$ es Lebesgue integrable sobre cualquier intervalo finito de $\mathbb{R}$.

Sean $\chi^{(0)} = \chi$, $\chi^{(n)} = \chi * \psi^{(n)}$. Por el Lema 5.14 (c), $\chi^{(n)}$ es integrable sobre todo intervalo finito de $\mathbb{R}$.

Sea $M_0(t) = S(t; A)$ y

$$M_n(t)z = \int_0^t S(t-s; A)PM_{n-1}(s)z ds, \quad z \in Z. \quad (5.14)$$

Mostremos por inducción que esta construcción está bien definida probando que:

- (i) $M_n(t)z \in D(P)$, $z \in Z$, $t > 0$;
- (ii) $M_n(t)z$ es continua en t , $t > 0$, $z \in Z$;
- (iii) $\|M_n(t)\| \leq \chi^{(n)}(t)$;
- (iv) $PM_n(t)z$ es continua en $t > 0$, $z \in Z$;
- (v) $\|PM_n(t)\| \leq \psi^{(n+1)}(t)$.

Para $n = 0$, esto es obvio por los Lemas 5.9 y 5.11. Supongamos que para $n = m$, (i), (ii), (iii), (iv) y (v) son ciertos. Entonces de (i), (iv) y (v) concluimos que la integral en (5.14) existe para todo $t > 0$ y podemos usarla para definir M_{m+1} . Por el Lema 5.11, (i), (ii), y (iv) ocurren para $n = m + 1$. Además

$$\begin{aligned} \|M_{m+1}(t)z\| &= \left\| \int_0^t S(t-s; A)PM_m(s)z ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|S(t-s; A)\| \|PM_m(s)z\| ds \\ &= \|z\| \int_0^t \chi(t-s)\psi^{m+1}(s) ds = \|z\|\chi^{m+1}(t). \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

Por el Lema 5.11

$$\begin{aligned}
 \|PM_{m+1}(t)z\| &= \left\| \int_0^t PS(t-s; A)PM_m(s)z ds \right\| \\
 &\leq \int_0^t \|PS(t-s; A)\| \|PM_m(s)z\| ds \\
 &\leq \|z\| \int_0^t \psi(t-s)\psi^{m+1}(s) ds \\
 &= \|z\| \psi^{m+2}(t).
 \end{aligned}$$

Esto prueba (iii) y (v) para $n = m + 1$. En consecuencia (i),(ii),(iii),(iv) y (v) son ciertos para todo n .

Obtengamos un estimado para la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \chi^n(t), \quad (5.15)$$

ya que, por (iii), (5.15) acota a la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \|S_n(t)\|$.

Por el Lema 5.9(c), $PS(t; A)$ es continua en t para cada $z \in Z$. Además

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|S(t; A)\| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|S(t; A)\| = \omega_0 < \omega,$$

luego

$$\frac{1}{t} \log \|S(t; A)\| < \omega,$$

así

$$\log \|S(t; A)\| < \omega t.$$

ya que, $PS(t; A)$ es acotado, para $\omega > \omega_0$ escogemos $K(\omega) = K_\omega$ convenientemente para t suficientemente grande se obtiene

$$\psi(t) = \|PS(t; A)\| < K_\omega e^{\omega t}.$$

De aquí podemos observar que $\psi(t)$ es integrable sobre todo intervalo finito de $\mathbb{R}$. De ésta forma, escogiendo ω_1 suficientemente grande

$$\int_0^{+\infty} e^{-\omega_1 t} \psi(t) dt < +\infty.$$

En consecuencia, por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \psi(t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - \omega_1)t} e^{-\omega_1 t} \psi(t) dt = 0$$

tal que, si $\omega > \omega_1$ es suficientemente grande, obtenemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \psi(t) dt = \gamma < 1.$$

Mostraremos ahora inductivamente que

$$\chi^{(n)}(t) \leq K_\omega e^{\omega t} \gamma^n.$$

Si $n = 0$,

$$\chi^{(n)}(t) = \chi(t) = \|S(t; A)\| \leq K_\omega e^{\omega t}$$

obviamente.

Suponga que es cierto para n . por el Lema 5.15 (b),

$$\begin{aligned} \chi^{(n+1)}(t) &= \chi * \psi^{(n+1)} = \chi * \psi^{(n)} * \psi(t) = (\chi^{(n)} * \psi)(t) \\ &= \int_0^t \chi^{(n)}(t-s) \psi(s) ds \leq M_\omega e^{\omega t} \gamma^n \int_0^t e^{-\omega s} \psi(s) ds \leq K_\omega e^{\omega t} \gamma^{n+1}, \end{aligned}$$

$t > 0$.

Claramente $\lim_{t \rightarrow 0} M_0(t) = I$ en la topología del operador fuerte. Ya que

$$\chi^{(n)}(t) = \chi * \psi^{(n)}(t) = \int_0^t \chi(t-s) \psi^{(n)}(s) ds \leq K_\omega e^{\omega t} \int_0^t e^{-\omega s} \psi^{(n)}(s) ds,$$

es claro que $\chi^{(n)}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$ para $n \geq 1$.

Ya que

$$\|M_n(t)\| \leq \chi^{(n)}(t),$$

$M_n(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$ para $n \geq 1$. De aquí, si ponemos $M_0(0) = I$, $M_n(0) = 0$ para $n \geq 0$, $M_n(t)$ será continua en $t \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Más aún, claramente se obtiene

$$\|M_n(t)\| \leq K_\omega e^{\omega t} \gamma^n,$$

$t > 0, n \geq 0$.

Se sigue que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n(t)$ converge absolutamente, uniformemente en cada subintervalo finito $[0, \beta]$, y que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \|M_n(t)\| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} K_\omega e^{\omega t} \gamma^n \\ &= K_\omega e^{\omega t} \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^n = K_\omega e^{\omega t} (1 - \gamma)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

Escribimos $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} M_n(t)$, $t \geq 0$. Ya que cada uno de los términos de esta serie es fuertemente continua para $t \geq 0$, se sigue que $S(t)$ también lo es. Además,

$$\|S(t)\| \leq (1 - \gamma)^{-1} K_{\omega} e^{\omega t}.$$

Resta mostrar que $S(t)$ es un semigrupo de operadores acotado con generador infinitesimal $A + P$, $D(A + P) = D(A)$. Para ver esto notemos primero que, por (5.16), Teorema de convergencia dominada, el Lema 5.12 (i) y (ii) en forma reiterada tenemos para $z \in Z$, $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S(s) z ds = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} M_n(s) z ds,$$

pero

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} M_n(s) z ds &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \left[\int_0^s S(s-r) P M_{n-1}(r) z dr \right] ds \\ &= R(\lambda; A) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} P M_{n-1}(s) z ds \\ &\vdots \\ &= R(\lambda; A) [PR(\lambda; A)]^n z. \end{aligned}$$

En consecuencia para $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S(s) z ds = \sum_{n=0}^{+\infty} R(\lambda; A) [PR(\lambda; A)]^n z.$$

Por el Lema 5.9(d) y la Definición (5.7)(i) se obtiene

$$\begin{aligned} \|PR(\lambda; A)\| &= \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} P S(s) ds \right\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \|P S(s; A)\| ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\omega s} \psi(s) ds = \gamma < 1, \end{aligned}$$

$\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$.

De esta forma la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n$ converge absolutamente.

Sea $D(A + P) = D(A)$. Recordemos que $R(\lambda; A)Z = D(A)$, tenemos entonces para $z \in Z$

$$\begin{aligned} & (\lambda I - A - P)R(\lambda; A) \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n z \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda I - A)R(\lambda; A)[PR(\lambda; A)]^n z - PR(\lambda; A) \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n z \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n z - \sum_{n=1}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n z = z. \end{aligned}$$

Más aún, si $z \in D(A)$,

$$\begin{aligned} & R(\lambda; A) \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n \right\} (\lambda I - A - P)z \\ &= R(\lambda; A) \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n \right\} (\lambda I - A)z - R(\lambda; A) \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n \right\} Pz \\ &= z + R(\lambda; A) \sum_{n=1}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^{n-1} Pz - R(\lambda; A) \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n Pz \\ &= z + R(\lambda; A) \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n Pz - R(\lambda; A) \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n Pz = z \end{aligned}$$

Así $\lambda I - A - P$ con dominio $D(A)$ tiene inversa acotada

$$R(\lambda; A) \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n.$$

En consecuencia $A + P$ es cerrado y

$$R(\lambda; A + P) = R(\lambda; A) \sum_{n=0}^{+\infty} [PR(\lambda; A)]^n.$$

La conclusión del Teorema 5.8 sigue del Teorema 4.6 (Hille-Yosida). $\square$

Ahora vamos a definir una métrica en $\mathcal{P}(A)$ y estudiar la estabilidad del semigrupo.

El siguiente teorema se encuentra en [21], página 405. Aunque este teorema está planteado para clases de operadores cerrados mas grande, fácilmente puede ser usada para la clase de operadores $\mathcal{P}(A)$. El siguiente teorema 5.16 será usado mas adelante:

Teorema 5.16. *Sea $S(t; A)$ un C_0 -semigrupo. Para un operador $P \in \mathcal{P}(A)$ y una constante $M > 0$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

1. $D(P) \supset D(A)$, $PS(t; A) \in L(X)$ para todo $t > 0$, y

$$\int_0^{+\infty} \|PS(t; A)\| dt \leq M,$$

2. Existe una función medible $\psi(t)$ no negativa definida en $(0, +\infty)$ tal que

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) dt \leq M$$

y

$$\|PR^{(n)}(\lambda; A)\| \leq \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} t^n \psi(t) dt$$

para todo $\lambda > 0$ real y $n \geq 0$ entero.

3. para todo $n \geq 1$ entero,

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{n-1} \|PR^{(n)}(\lambda; A)\| d\lambda \leq M(n-1)!,$$

4. Existe una función $b(t)$ acotada no decreciente definida sobre $(0, +\infty)$ tal que $b(0) = 0$, $b(+\infty) \leq M$, y

$$\|PR^{(n)}(\lambda; A)\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^n db(t)$$

$\lambda > 0$ y $n \geq 0$ entero,

5. Pongamos $S_\lambda \equiv \exp(A_\lambda t)$ donde $A_\lambda \equiv \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I$. Entonces $P[S_\lambda(t) - e^{-\lambda t} I] \in L(x)$ para cada $t > 0$ y

$$\int_0^{+\infty} \|P[S_\lambda(t) - e^{-\lambda t} I]\| dt \leq M$$

para todo $\lambda > 0$ real.

Definición 5.17. Ver Hille-Phillips [21].

Sean A y A_1 generadores infinitesimales de C_0 -semigrupos. A y A_1 se dicen estrechamente relacionadas, en símbolos $A \sim A_1$, si $A_1 = A + P$ donde $P \in \mathcal{P}(A)$.

A esta clase de generadores infinitesimales la denotaremos por $\mathfrak{C}(A)$.

La relación $\sim$ de la Definición 5.17 es una relación de equivalencia ya que satisface

- (i) $A \sim A$ reflexiva
- (ii) $A_1 \sim A_2$ implica $A_2 \sim A_1$ simetría
- (iii) $A_1 \sim A_2$, $A_2 \sim A_3$ implica $A_1 \sim A_3$ transitiva.

El conjunto de todos los generadores infinitesimales de C_0 -semigrupos se dividen en clases de equivalencias mutuamente excluyentes $\mathfrak{C}_\alpha$, denotaremos este conjunto por $\mathfrak{U}$ y

$$\mathfrak{U} = \bigcup_{\alpha} \mathfrak{C}_\alpha.$$

Para cada clase, escogeremos un operador representante particular, digamos $A_\alpha \in \mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{C}_\alpha(A_\alpha)$

Definición 5.18. Sea $\mathfrak{C}_\alpha$ una clase de equivalencia dada con A_α el representante en $\mathfrak{C}_\alpha$. Definimos

$$d_\alpha(A_1, A_2) \equiv \int_0^1 \|(A_1 - A_2)S(t; A_\alpha)\|_{A_\alpha} dt \quad (5.17)$$

para todo $A_1, A_2 \in \mathfrak{C}_\alpha$, donde $\|\cdot\|_{A_\alpha}$ representa la norma en cada clase $\mathfrak{C}_\alpha$ cuyo representante es A_α .

Teorema 5.19. Ver Hille-Phillips [21].

La función $d_\alpha(A_1, A_2)$ es una función métrica bien definida sobre $\mathfrak{C}_\alpha$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $d_\alpha(A_1, A_2)$ está bien definida. Si $A_1, A_2 \in \mathfrak{C}_\alpha$, entonces por la Definición (5.17) $A_1 - A_2$ y $A_2 - A_1$ pertenecen a $\mathcal{P}(A_\alpha)$, de aquí que

$$A_1 - A_2 = (A_1 - A_\alpha) - (A_2 - A_\alpha)$$

pertenece a $\mathcal{P}(A_\alpha)$. En consecuencia, por la Definición (5.7)

$$\int_0^1 \|(A_1 - A_2)S(t; A_\alpha)\|_{A_\alpha} dt < +\infty.$$

Verifiquemos ahora que $d_\alpha(A_1, A_2) = 0$ implica que $A_1 = A_2$:

Sea $P = A_1 - A_2$ y denotemos la extensión en A_α de P por $\tilde{P}$. Entonces, ya que $d_\alpha(A_1, A_2) = 0$, y siendo $\tilde{P}$ una extensión continua de P se tiene

$$\|\tilde{P}S(t; A_\alpha)\| = \|PS(t; A_\alpha)\|_\alpha = 0,$$

sobre un conjunto E denso en $(0, 1)$. Ya que

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}S(t; A_\alpha)\| &= \|\tilde{P}S(t + r - r; A_\alpha)\| \leq \|\tilde{P}S(r; A_\alpha)S(t - r; A_\alpha)\| \\ &= \|\tilde{P}S(r; A_\alpha)\| \|S(t - r; A_\alpha)\| = 0, \end{aligned}$$

para cada $r \in E$, se sigue entonces que

$$\|\tilde{P}S(t; A_\alpha)\| = 0,$$

para todo $t > 0$. por el Lema 5.9(d)

$$\tilde{P}R(\lambda; A_\alpha) \equiv 0.$$

Ya que $D(P) = \text{Rang}(R(\lambda; A_\alpha))$, $P = 0$, es decir $A_1 = A_2$.

Veamos que

$$d_\alpha(A_1, A_3) \leq d_\alpha(A_2, A_1) + d_\alpha(A_2, A_3).$$

Sean $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{C}_\alpha$. Entonces

$$\begin{aligned} \|(A_1 - A_3)S(t; A_\alpha)\|_{A_\alpha} &= \|(A_1 - A_2 + A_2 - A_3)S(t; A_\alpha)\|_{A_\alpha} \\ &\leq \|(A_1 - A_2)S(t; A_\alpha)\|_{A_\alpha} + \|(A_2 - A_3)S(t; A_\alpha)\|_{A_\alpha}, \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

se obtiene la desigualdad triangular.

La métrica $d_\alpha(A_1, A_2)$ en general introduce una topología más débil en $\mathfrak{C}_\alpha$ que la función métrica

$$d(A_1, A_2) = \sup \left[\|(A_1 - A_2)(z)\|; \|z\| \leq 1, z \in D(A_1) = D(A_2) \right].$$

Si $P = A_1 - A_2$ es un operador acotado sobre $D(A_\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned} d_\alpha(A_1, A_2) &= \int_0^1 \|Ps(t; A_\alpha)\|_{A_\alpha} dt \leq \|P\|_{A_\alpha} \int_0^1 \|S(t; A_\alpha)\| dt \\ &= \left[\int_0^1 \|S(t; A_\alpha)\| dt \right] d(A_1, A_2). \end{aligned}$$

□

Es posible definir $d_\alpha(A_1, A_2)$ sobre $\mathfrak{C}_\alpha$ directamente del operador $R(\lambda, A_\alpha)$.

Teorema 5.20. Ver Hille-Phillips [21].

Sea A_α un operador representante de la clase $\mathfrak{C}_\alpha$ y supongamos que $\{S(t; A_\alpha)\}_{t \geq 0}$ es un C_0 -semigrupo de tipo ω_0 y para cada $\omega > \omega_0$ fijo definamos

$$\delta_\alpha(A_1, A_2) = \sup_{n \geq 1} \left\{ \int_0^{+\infty} \|(A_1 - A_2)R^n(\lambda + \omega; A_\alpha)\| \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} d\lambda \right\}, \quad (5.18)$$

entonces

$$\delta_\alpha(A_1, A_2) = \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \|(A_1 - A_2)S(t; A_2)\|_{A_\alpha} dt. \quad (5.19)$$

Además $\delta_\alpha(A_1, A_2)$ es una función métrica equivalente a $d_\alpha(A_1, A_2)$.

En efecto, existen constantes m_α y M_α tal que

$$m_\alpha \delta_\alpha(A_1, A_2) \leq d_\alpha(A_1, A_2) \leq M_\alpha \delta_\alpha(A_1, A_2) \quad (5.20)$$

para todo $A_1, A_2 \in \mathfrak{C}_\alpha$.

DEMOSTRACIÓN. De (5.18) se tiene que

$$\delta_\alpha(A_1, A_3) \leq \delta_\alpha(A_2, A_1) + \delta_\alpha(A_2, A_3), \quad (5.21)$$

para $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{C}_\alpha$. Esto prueba la desigualdad triangular.

Para probar que $d_\alpha(A_1, A_2) = 0$ si, y solo si $A_1 = A_2$ es directo de (5.21).

Vamos a probar (5.21):

Sea $P = A_1 - A_2 \in \mathcal{P}(A_\alpha)$. Designemos por

$$\psi(t) = \|P(t; A_\alpha)\|_{A_\alpha} = \|\tilde{P}S(t; A_\alpha)\|,$$

siendo $\tilde{P}$ la extensión A_α de P . Por definición

$$d_\alpha(A_1, A_2) = \int_0^1 \psi(t) dt, \quad (5.22)$$

por otro lado, el Teorema 5.16 implica que

$$\delta_\alpha(A_1, A_2) = \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \psi(t) dt,$$

el cual es (5.19).

Ya que

$$\int_0^1 \psi(t) dt \leq e^\beta \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \psi(t) dt,$$

$\beta - \omega > 0$, donde $\beta = \max(\omega, 0)$, la segunda desigualdad de (5.20) es inmediata.

Obtengamos la primera desigualdad, para ello usaremos lo siguiente: ya que

$$\psi(t) = \|PS(t; A_\alpha)\|_{A_\alpha} = \|\tilde{P}S(t; A_\alpha)\|,$$

y $\varphi(t) = \|S(t; A_\alpha)\|$, entonces

$$\begin{aligned} \psi(t+r) &= \|\tilde{P}S(t+r; A_\alpha)\|_{A_\alpha} = \|\tilde{P}S(t; A_\alpha)S(r; A_\alpha)\| \\ &\leq \|\tilde{P}S(t; A_\alpha)\| \|S(r; A_\alpha)\| = \psi(t)\varphi(r). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ahora tenemos

$$\psi(t) = \int_0^1 \psi(t) dr = \int_0^1 \psi(r+t-r) dr \leq \int_0^1 \psi(r) \varphi(t-r) dr,$$

$t \geq 1$.

En consecuencia

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \psi(t) dt &\leq \int_1^{+\infty} e^{-\omega t} \left[\int_0^1 \psi(r) \varphi(t-r) dr \right] dt \\ &\leq \left[\int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \varphi(t) dt \right] \left[e^r \int_0^1 \psi(r) dr \right], \end{aligned}$$

donde $r = \max(-\omega, 0)$. Finalmente

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \psi(t) dt &= \int_0^1 e^{-\omega t} \psi(t) dt + \int_1^{+\infty} e^{-\omega t} \psi(t) dt \\ &\leq e^\gamma \int_0^1 \psi(t) dt + \int_1^{+\infty} e^{-\omega t} \psi(t) dt \\ &= e^\gamma \left[1 + \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \varphi(t) dt \right] \left[\int_0^1 \psi(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Así (5.20) ocurre con

$$m_\alpha = \left\{ e^\gamma \left[1 + \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \varphi(t) dt \right] \right\}^{-1}$$

y $M_\alpha = e^\beta$.

□

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

Teorema 5.21. Ver Hille-Phillips [21].

$\mathfrak{C}_\alpha$ es completo.

La topología en $\mathfrak{C}_\alpha$ es independiente del operador A_α usado como representante para definir la métrica. El siguiente teorema establece este hecho. Usaremos la siguiente notación:

$$d_A(A_1, A_2) = \int_0^1 \|(A_1 - A_2)S(t; A)\|_A dt. \quad (5.25)$$

Teorema 5.22. Ver Hille-Phillips [21].

Si $A_\alpha \sim A$, entonces existen constantes m' y M' tal que

$$m'd_{A_\alpha}(A_1, A_2) \leq d_A(A_1, A_2) \leq M'd_A(A_1, A_2) \quad (5.26)$$

para todo $A_1, A_2 \in \mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{C}_\alpha(A)$

Vamos a demostrar que el problema de generación de semigrupos de tipo C_0 es estable, pero antes, necesitamos el siguiente lema

Lema 5.23. Ver Hille-Phillips [21].

Suponga $w > w_0$ y sea $M_w = \int_0^{+\infty} e^{-wt} \varphi(t) dt$. Si $\psi(t)$ satisface

$$\psi(t_1 + t_2) \leq \psi(t_1) \varphi(t_2), \quad (5.27)$$

entonces

$$\psi(t) \leq 8M_w^2 e^{wt} t^{-3} \int_0^{+\infty} e^{-wr} \psi(r) dr, \quad t > 0 \quad (5.28)$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos la prueba del Teorema 5.22. Por el Lema 5.23, ecuación (5.27) se tiene:

$$\frac{t}{2} \psi(t) = \int_0^{t/2} \psi(t) dr \leq e^{wt} \int_0^{t/2} e^{-wr} \psi(r) e^{-w(t-r)} \varphi(t-r) dr.$$

Si $z = t - r$, $\frac{t}{2} < z < t$ y por el Teorema (.32), tenemos

$$e^{-w(t-r)} \varphi(t-r) = e^{-wz} \varphi(z) = e^{-wz} e^{\ln \varphi(z)} = e^{\ln \varphi(z) - wz},$$

ya que $\ln \varphi(z) - wz$ es una función sub-aditiva

$$\left(f(t_1 + t_2) \leq f(t_1) + f(t_2) \right),$$

y $H_w = \int_b^{+\infty} e^{-wt} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{\ln \varphi(t) - wt} dt$ se tiene por el Teorema (.32)

$$e^{-w(t-r)} \varphi(t-r) \leq 4 \frac{M_w^2}{t^2} \quad \text{para } 0 < r < \frac{t}{2}.$$

De aquí que

$$\frac{t}{2}\psi(t) \leq 4\frac{M_w^2}{t^2}e^{wt} \int_0^{t/2} e^{-wr}\psi(r)dr$$

y esto implica (5.28). □

Lema 5.24. Ver Hille-Phillips [21].

Sean $g_1(t)$, $g_2(t)$ funciones medibles no negativas tales que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ws} g_1(s)ds \in M_i \quad i = 1, 2, \dots$$

y

$$g_i(s) \leq 2^k M_i s^{-k} e^{ws} \quad i = 1, 2,$$

para algún número real w y $k \geq 0$ entero. Entonces

$$g_3(t) = (g_1 * g_2)(t) \equiv \int_0^t g_1(t-r)g_2(r)dr$$

también satisface estas condiciones con $M_3 = 2^{k+1}M_1M_2$.

DEMOSTRACIÓN.

$$\int_0^{+\infty} e^{-wr} g_3(r)dr = \int_0^{+\infty} e^{-wr} g_1(r)dr \int_0^{+\infty} e^{-wr} g_2(r)dr \leq M_1M_2.$$

Además

$$\begin{aligned} g_3(t) &= e^{wt} \left\{ \int_0^{t/2} e^{-w(t-r)} g_1(t-r) e^{-wr} g_2(r)dr \right. \\ &\quad \left. + \int_{t/2}^t e^{-w(t-r)} g_1(t-r) e^{-wr} g_2(r)dr \right\} \\ &\leq e^{wt} \left\{ M_1 2^k t^{-k} \int_0^{t/2} e^{-wr} g_2(r)dr + M_2 2^k t^{-k} \int_0^{t/2} e^{-wr} g_1(r)dr \right\} \\ &\leq 2^{k+1} M_1 M_2 t^{-k} e^{wt} \end{aligned} \tag{5.29}$$

□

Teorema 5.25. Ver Hille-Phillips [21].

Un C_0 -semigrupo $S(t; A)$ es una función continua de A en el siguiente sentido

$$\lim_{d_\alpha(A, A_0) \rightarrow 0} \|S(t; A) - S(t; A_0)\| = 0,$$

uniformemente con respecto a t en cada intervalo de la forma $(\varepsilon, 1/\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$.

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

DEMOSTRACIÓN. El Teorema 5.22 permite escoger A_0 como el operador representante en la clase $\mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{C}_\alpha(A_0)$, es decir,

$$d_\alpha(A_1, A_2) = d_{A_0}(A_1, A_2).$$

Sea $P = A - A_0 \in \mathcal{P}(A_0)$. Por el Teorema 5.8 y (iii) de la prueba del Teorema 5.8

$$\begin{aligned} \|S(t; A) - S(t, A_0)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} M_n(t) - S(t, A_0) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} M_n(t) \right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|M_n(t)\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi * \psi^{(n)}(t), \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde $\varphi(t) = \|S(t; A_0)\|$ y $\psi(t) = \|\tilde{P}S(t, A_0)\|$. Escogemos ahora $w > \max(0, w_0)$ y tomemos

$$M_w = \int_0^{+\infty} e^{-wt} \varphi(t) dt.$$

El siguiente estimado puede verse en [21] página 412 :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-wt} \psi(t) dt &\leq \left[1 + \int_0^{+\infty} e^{-wt} \varphi(t) dt \right] \left[\int_0^1 \psi(t) dt \right] \\ &= (M_w + 1) d_\alpha(A, A_0) \end{aligned}$$

donde, $d_\alpha(A, A_0) = d_{A_0}(A, A_0) = \int_0^1 \psi(t) dt$.

Sustituyendo en (5.28) se obtiene

$$\begin{aligned} \psi(t) &\leq 8M_w^2 e^{wt} t^{-3} [(M_w + 1) d_\alpha(A, A_0)] \\ &\leq 8(M_w + 1)^3 d_\alpha(A_1, A_0) t^{-3} e^{wt}, \end{aligned}$$

y $\varphi(t) \leq 8(M_w + 1)^3 t^{-3} e^{wt}$.

Aplicamos el Lema 5.24 de forma reiterada y obtenemos

$$(\varphi * \psi^{(n)})(t) \leq N(N d_\alpha(A, A_0))^n t^{-3} e^{wt}$$

donde $N = 2^7(M + 1)^3$.

Insertando este resultado en (5.30) se obtiene

$$\begin{aligned}\|S(t; A) - S(t; A_0)\| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi * \psi^{(n)}(t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} N[Nd_\alpha(A, A_0)]^n t^{-3} e^{wt} \\ &= \frac{N}{1 - Nd_\alpha(A, A_0)} t^{-3} e^{wt},\end{aligned}$$

para $Nd_\alpha(A, A_0) < 1$. Si $A_\alpha = A$ es el representante de la clase $\mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{C}_\alpha(A_\alpha) = \mathfrak{C}_\alpha(A)$ y $A_1, A_2 \in \mathfrak{C}_\alpha(A)$, entonces

$$P_1 = A_1 - A \text{ y } P_2 = A_2 - A, \quad P_1, P_2 \in \mathcal{P}(A).$$

Entonces (5.22) queda de la siguiente manera

$$d_A(A_1, A_2) = d_A(P_1, P_2) \equiv \int_0^1 \|(P_1 - P_2)S(t, A)\|_A dt$$

y (5.19) queda así

$$\delta_A(A_1, A_2) = \delta_A(P_1, P_2) = \int_0^{+\infty} e^{-wt} \|(P_1 - P_2)S(t; A)\|_A dt.$$

Esto tiene como consecuencia los siguientes resultados:

Proposición 5.26. Ver Hille-Phillips [21].

Sea A el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{S(t; A)\}_{t \geq 0}$ definamos la métrica

$$d_A(P_1, P_2) = \int_0^1 \|(P_1 - P_2)S(t; A)\| dt, \quad P_1, P_2 \in \mathcal{P}(A), \quad (5.31)$$

y para $w > w_0$ fijo, la función

$$\delta_A(P_1, P_2) = \int_0^{+\infty} e^{-wt} \|(P_1 - P_2)S(t; A)\| dt, \quad P_1, P_2 \in \mathcal{P}(A). \quad (5.32)$$

Entonces

$$d_A(P_1, P_2) \text{ y } \delta_A(P_1, P_2)$$

son métricas equivalentes definidas sobre $\mathcal{P}(A)$, es decir, existen constantes m_A y M_A tales que

$$m_A \delta_A(P_1, P_2) \leq d_A(P_1, P_2) \leq M_A \delta_A(P_1, P_2), \quad P_1, P_2 \in \mathcal{P}(A).$$

Si P_1 y P_2 son operadores acotados, entonces

$$d_A(P_1, P_2) \leq \left(\int_0^1 \|S(t; A)\| dt \right) \|P_1 - P_2\|_A.$$

Además se obtiene el siguiente teorema.

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

Teorema 5.27. Ver Hille-Phillips [21].

La función $P \in \mathcal{P}(A) \longrightarrow S(t; A + P) \in L(Z)$ es continua, es decir,

$$\lim_{d_A(P, P_0) \rightarrow 0} \|S(t; A + P) - S(t; A + P_0)\| = 0,$$

uniformemente con respecto a t en cada intervalo $[0, \beta]$ finito.

Además, si $\delta_A(P, P_0) < 1$, existe $M = M(P_0)$ tal que

$$\|S(t; A + P) - S(t; A + P_0)\|_{L(Z)} \leq \frac{\delta_A(P, P_0)M}{1 - \delta_A(P, P_0)} e^{wt} \quad t \geq 0.$$

$(\mathcal{P}(A), d_A)$ es un espacio métrico.

Los resultados anteriores permiten responder afirmativamente que un semigrupo $S(t; A_0)$ puede ser recuperado del semigrupo perturbado $S(t; A_0 + P)$ por medio de perturbaciones adicionales.

Nosotros usaremos los siguientes resultados importantes provenientes de la teoría de operadores lineales. El siguiente teorema puede verse en [26] Capítulo 4 página 244.

Teorema 5.28. Sean W y Z espacios de Banach y $G \in L(W, Z)$ con $\text{rang}(G) = Z$.

Entonces existe $\alpha > 0$ tal que para todo $S \in L(W, Z)$ con $\|G - S\| < \alpha$ se tiene $\text{Rang}(S) = Z$.

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que para todo $y \in Z$ existe $x \in W$ tal que $Sx = y$.

$G \in L(W, Z)$ significa que G es un operador lineal continuo por lo tanto es acotado, y ya que G es sobreyectivo tiene una inversa por la derecha G^{-1} continua y acotada. Sea

$$\alpha = \frac{1}{\|G^{-1}\|} \text{ tal que } \|S - G\| < \frac{1}{\|G^{-1}\|}.$$

Fijemos $z \in Z$. Sea $B : W \longrightarrow W$ tal que

$$Bw = G^{-1}z - G^{-1}(S - G)w,$$

entonces

$$\begin{aligned} \|Bw\| &= \|G^{-1}z - G^{-1}(S - G)w\| = \|G^{-1}(S - G)w - G^{-1}z\| \\ &\leq \|G^{-1}(S - G)w\| \leq \|G^{-1}\| \|(S - G)w\| \leq \|G^{-1}\| \|(S - G)\| \|w\| \\ &< \|w\|. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que B es una aplicación contractiva y ya que W es de Banach, existe un único punto fijo w tal que

$$w = Bw = G^{-1}z - G^{-1}(S - G)w,$$

de donde

$$Gw = z - (S - G)w;$$

así $Sw = z$, por lo que S es sobreyectivo. □

El siguiente teorema caracteriza la sobreyectividad de operadores lineales, y se encuentra en [10]

Teorema 5.29.

Si W y Z son espacios de Banach reflexivo y $G \in L(W, Z)$ entonces si

(a)

$$\text{Rang}(G) = Z,$$

entonces existe $\gamma > 0$ tal que

(b)

$$\gamma \|G^* z^*\|_{W^*} \geq \|z^*\|_{Z^*} \quad z^* \in Z^*. \quad (5.33)$$

DEMOSTRACIÓN. (a) $\Rightarrow$ (b) Asumiremos primero que G es una aplicación 1-1, entonces $G^{-1} : \text{Rang}(G) \subset Z \rightarrow W$ está bien definida.

Más aún G^{-1} es un operador cerrado de Z en W y por lo tanto es acotado. Así $(G^{-1})^*$ es acotado y existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|(G^{-1}w)^*\|_{W^*} \leq \gamma \|w^*\|_{W^*} \quad \forall w^* \in W^*. \quad (5.34)$$

Para algún $z^* \in Z^*$, sea $G^* z^* = w^*$, entonces para todo $z \in Z$

$$\begin{aligned} \langle (G^{-1})^* w^*, z \rangle_{Z^*, Z} &= \langle (G^{-1})^* G^* z^*, z \rangle_{Z^*, Z} \\ &= \langle G^* z^*, G^{-1} z \rangle_{W^*, W} = \langle z^*, GG^{-1} z \rangle_{Z^*, Z} \\ &= \langle z^*, z \rangle_{Z^*, Z}. \end{aligned}$$

Así, (5.34) implica que

$$\|z^*\|_{Z^*} \leq \gamma \|G^* z^*\|_{W^*} \quad z^* \in Z^*.$$

Para el caso general definamos el espacio de Banach $\widehat{W} = W \Big|_{\text{Ker}(G)}$ con $[w] \in \widehat{W}$ la clase de equivalencia de $w + \tilde{w}$ para el que $G(\tilde{w}) = 0$, y

$$\|[w]\|_{\widehat{W}} = \inf_{G(\tilde{w})=0} \|w + \tilde{w}\|_W.$$

Definimos entonces $\widehat{G}[w] = Gw$ y así $\widehat{G}$ es 1-1 y aplica sobre $\widehat{W}$ con $\text{Rang}(\widehat{G}) = Z$.

Partiendo de la primera parte de la prueba se sigue

$$\|z^*\|_{Z^*} \leq \gamma \|\widehat{G}^* z^*\|_{\widehat{W}^*},$$

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

pero

$$\|\hat{G}^* z^*\|_{\widehat{W}^*} = \|G^* z^*\|_{W^*}$$

así queda probado (b). □

A continuación, tenemos el recíproco del Teorema 5.29.

Teorema 5.30. Sean Z y W espacios de Banach. Si $G \in L(Z, W)$ y existe $\gamma > 0$ tal que $\|z\|_Z \leq \gamma \|Gz\|_W$, entonces $\text{Rang}(G^*) = Z$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $z^* \in Z^*$, nuestra meta es encontrar w^* tal que $z^* = G^* w^*$ ó en forma equivalente encontrar w^* tal que

$$\langle z^*, z \rangle_{Z^*, Z} = \langle G^* w^*, z \rangle_{Z^*, Z} = \langle w^*, Gz \rangle_{W^*, W}, \quad (5.35)$$

para todo $z \in Z$.

La ecuación (5.35) define un funcional lineal sobre el $\text{Rang}(G)$ ya que $f_{w^*}(y) = \langle z^*, z \rangle_{Z^*, Z}$, donde $y = Gz$. Más aún si $\{z_n\}$ es una sucesión tal que $Gz_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, entonces por (5.33) $z_n \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$ así, $\langle w^*, Gz \rangle_{W^*, W} = \langle z^*, z \rangle_{Z^*, Z} \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$, por lo tanto f_{w^*} es un funcional continuo sobre el $\text{Rang}(G)$ y por el Teorema de Hahn-Banach, f_{w^*} puede extenderse a todo W . De aquí que f_{w^*} es bien definido por (5.35). □

Corolario 5.31. Si W y Z son espacios de Banach reflexivos y $G \in L(W, Z)$ entonces son equivalentes:

- (a) $\text{Rang}(G) = Z$,
- (b) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma \|G^* z^*\|_{W^*} \geq \|z^*\|_{Z^*}, \quad z^* \in Z^*.$$

4. Controlabilidad del Sistema Lineal Perturbado

De la sección anterior tenemos que $(\mathcal{P}(A), d_A)$ es un espacio métrico dotado con la métrica d_A . Ahora, estamos preparados para estudiar la familia de sistemas de control estocásticos infinito dimensional:

$$dz = \{(A + P)z + B(t)u(t, \omega)\}dt + \Sigma(t)dw(t), \quad (5.36)$$

$t > 0$, y $P \in (\mathcal{P}(A), d_A)$.

Consideremos el operador lineal acotado $G_P : L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$

$$G_P z = \int_0^\tau S(\tau - s : A + P) B(s) u(s) ds + \int_0^\tau S(\tau - s : A + P) \Sigma(s) dw(s). \quad (5.37)$$

Teorema 5.32. Si para algún $P_0 \in (\mathcal{P}(A), d_A)$ el sistema lineal estocástico (5.36) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$, entonces existe una vecindad $V(P_0)$ de P_0 tal que para cada $P \in V(P_0)$ el sistema (5.37) también es completamente controlable sobre $[0, \tau]$.

DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad, podemos asumir que $P_0 = 0$ y $\Sigma(s) \equiv 0$ ya que la sobreyectividad del operador G y G_P no dependen de vectores fijos

$$\int_0^\tau S(\tau - s; A)\Sigma(s)dw(s) \text{ y } \int_0^\tau S(\tau - s; A + P)\Sigma(s)dw(s).$$

A continuación, ya que el sistema lineal estocástico (5.36) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$, de la Proposición 5.6, es suficiente probar que G_P es sobreyectivo para todo P en la vecindad $V(0)$ del cero. Ya que el sistema lineal (5.3) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$, el operador G dado por (5.10) es sobreyectivo, i.e., $\text{Rang}(G) = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$.

Ahora, usando el Teorema 5.28 obtenemos el resultado

$$\begin{aligned} \|G_P u - Gu\|_{L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)}^2 &= \mathbf{E} \left(\left\| \int_0^\tau [S(\tau - s; A + P) - S(\tau - s; A)] B(s) u(s) ds \right\|_Z^2 \right) \\ &\leq \mathbf{E} \left(\int_0^\tau \left\| S(\tau - s; A + P) - S(\tau - s; A) \right\|_{L(Z)} \left\| B(s) \right\|_{L(Z)} \left\| u(s) \right\|_U ds \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{\delta_A(P, 0)}{1 - \delta_A(P, 0)} M e^{\omega\tau} \right)^2 \mathbf{E} \left(\int_0^\tau \left\| B(s) \right\|_{L(Z)} \left\| u(s) \right\|_U ds \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{\delta_A(P, 0)}{1 - \delta_A(P, 0)} M e^{\omega\tau} \right)^2 \mathbf{E} \left(\int_0^\tau \|B(s)\|_{L(Z)}^2 ds \int_0^\tau \|u(s)\|_U^2 ds \right) \\ &\leq \left(\frac{\delta_A(P, 0)}{1 - \delta_A(P, 0)} M e^{\omega\tau} \right)^2 \|B\|_{L^2([0, \tau])}^2 \|u\|_{L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)}^2, \end{aligned}$$

donde $L^2([0, \tau]) = \{f : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^\tau |f(s)|^2 ds < +\infty\}$, de aquí que,

$$\|G_P - G\|^2 \leq \left(\frac{\delta_A(P, 0)}{1 - \delta_A(P, 0)} M e^{\omega\tau} \right)^2 \|B\|_{L^2([0, \tau])}^2.$$

Entonces, podemos tomar $\delta(P, 0)$ suficientemente pequeño tal que

$$\left(\frac{\delta_A(P, 0)}{1 - \delta_A(P, 0)} M e^{\omega\tau} \right)^2 \|B\|_{L^2}^2 < \alpha,$$

i.e.,

$$\delta_A(P, 0) < \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\|B\|_{L^2}^2 M \exp(\omega\tau) + \sqrt{\alpha}}} = r.$$

□

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

5. Aplicación

En esta sección aplicaremos el resultado anterior a la ecuación de ondas controlada estocástica perturbada

$$\begin{cases} d(\partial/\partial t)y(t, x) = \Delta y(t, x)dt + \epsilon(-\Delta)^{1/2}y(t, x)dt + u(t, x)dt + dw(t), \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0, \quad t \in (0, \tau), \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y_t(0, x) = y_1(x). \end{cases} \quad (5.38)$$

En (5.38), $Z = \mathcal{E} = U = L = L_2([0, 1])$. $\{w(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso Q -Wiener, el control distribuido $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], Z)$.

Un operador Q simétrico no negativo es un operador nuclear o de tipo traza si se tiene que $\text{tr } Q < +\infty$. Si Q es un operador nuclear entonces existe $\{e_n\}_{n \geq 1}$ una base ortonormal completa definida en $\mathcal{E}$, y $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales, $\nu_n > 0$

para todo $n \geq 1$, tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n < +\infty$ y Q se define por

$$Qe_n = \nu_n e_n.$$

Un operador de covarianza es por la Proposición 2.24 un operador de tipo traza. En consecuencia el operador de covarianza se puede definir por Q tal que $Qe_n = \nu_n e_n$ con $\text{tr } Q = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n < +\infty$. Es claro que por la Proposición 2.31 si Q es de tipo traza entonces existe el proceso Q -Wiener $W = \{w(t)\}_{t \geq 0}$ tal que $\mathbf{E}(w(t)) = 0$ y $\text{cov}(w(t)) = tQ$.

5.1. Formulación abstracta del Problema. En esta sección escogeremos el espacio en el cual este problema será puesto como una ecuación diferencial ordinaria abstracta estocástica. Para este fin, sea $Z = L^2([0, 1])$ y consideremos el operador lineal no acotado $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ definido por $A\phi = -\Delta\phi$, donde

$$D(A) = \{\phi \in L_2([0, 1]) : \phi, \phi_{zz} \text{ son absolutamente continuas ; } \phi(0) = \phi(1) = 0\}.$$

El operador A tiene la bien conocida propiedad siguiente: el espectro de A consiste de los autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \quad \text{con} \quad \lambda_n \rightarrow +\infty, \quad (5.39)$$

tal que $\lambda_n = n^2\pi^2$, cada uno con multiplicidad uno.

a) Existe un conjunto ortonormal completo $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ de autovectores de A tal que $\phi_n(z) = \sqrt{2}\sin(n\pi z)$.

b) Para todo $z \in D(A)$ tenemos

$$Az = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle z, \phi_j \rangle \phi_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j E_j z, \quad (5.40)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en Z y

$$E_n z = \langle z, \phi_n \rangle \phi_n. \quad (5.41)$$

Así, $\{E_j\}$ es una familia de proyecciones ortogonales en Z y

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n z, \quad z \in Z. \quad (5.42)$$

c) $-A$ genera el semigrupo analítico $\{e^{-At}\}$ dado por

$$e^{-At} z = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} E_n z. \quad (5.43)$$

d) Definamos el espacio potencia fraccionaria $Z^{1/2}$.

Definición 5.33.

$$Z^{1/2} = D(A^{1/2}) = \left\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \|E_n z\|^2 < +\infty \right\},$$

con la norma

$$\|z\|_{1/2} = \|A^{1/2} z\| = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \|E_n z\|^2 \right\}^{1/2}, \quad z \in Z^{1/2} \quad y$$

$$A^{1/2} z = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{1/2} E_n z. \quad (5.44)$$

Definición 5.34. Definimos $Z_{1/2} = Z^{1/2} \times Z$. $Z_{1/2}$ dotado con la norma

$$\left\| \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \right\|_{Z_{1/2}}^2 = \|y\|_{1/2}^2 + \|v\|^2,$$

es un espacio de Hilbert

Proposición 5.35. El operador $P_j : Z_{1/2} \rightarrow Z_{1/2}$, $j \geq 0$, definido por

$$P_j = \begin{bmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix}, \quad j \geq 1, \quad (5.45)$$

es una proyección ortogonal continua (acotada) en el espacio de Hilbert $Z_{1/2}$.

DEMOSTRACIÓN. Primero probaremos que $P_j(Z_{1/2}) \subset Z_{1/2}$, el cual es equivalente a mostrar que $E_j(Z^{1/2}) \subset Z^{1/2}$. En efecto, sea $z \in Z^{1/2}$ y consideremos $E_j z$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \|E_n E_j z\|^2 = \lambda_j \|E_j z\|^2 < +\infty,$$

CAPÍTULO 5. PERTURBACIÓN NO ACOTADA

por lo tanto, $E_j z \in Z^{1/2}$ para todo $z \in Z^{1/2}$.

Ahora, probaremos que esta proyección es acotada. En efecto, de la inclusión continua $Z^{1/2} \subset Z$, existe una constante $k > 0$ tal que

$$\|z\| \leq k\|z\|_{1/2}, \text{ para todo } z \in Z^{1/2}.$$

Entonces, para todo $z \in X^{1/2}$ tenemos el siguiente estimado

$$\begin{aligned} \|E_j z\|_{1/2}^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \|E_n E_j z\|^2 = \lambda_j \|E_j z\|^2 \\ &\leq \lambda_j \|z\|^2 \leq \lambda_j k^2 \|z\|_{1/2}^2, \end{aligned}$$

de aquí que $\|E_j z\|_{1/2} \leq \sqrt{\lambda_j} k \|z\|_{1/2}$, el cual implica la continuidad de

$$E_j : Z^{1/2} \rightarrow Z^{1/2},$$

así, P_j es una proyección continua sobre $Z_{1/2}$. $\square$

Entonces, el sistema (5.38) puede escribirse en Z como un sistema estocástico abstracto como sigue

$$d(\partial/\partial t)y(t, \omega) = \{-Ay(t, \omega) + \epsilon A^{1/2}y(t, \omega) + u(t, \omega)\}dt + dw(t). \quad (5.46)$$

Con el cambio de variable $v = \dot{y}$ transformamos esta ecuación en la siguiente ecuación ordinaria estocástica de primer orden en el espacio $Z_{1/2} = Z^{1/2} \times Z$

$$dz = \{\mathcal{A}z + \epsilon Pz\}dt + Bu(t, \omega)dt + \Sigma dw(t), \quad (5.47)$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^{1/2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} y \\ (\partial/\partial t)y \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

donde $\mathcal{A}$ es un operador lineal no acotado con dominio $D(\mathcal{A}) = D(A) \times D(A^{1/2})$.

La prueba del siguiente teorema sigue en la misma vía del Teorema 3.1 de [32], colocando $c = 0$ y $d = 1$ o directamente del Lema 2.1 de [34] o el Lema 3.1 de [7].

Teorema 5.36. *El operador $\mathcal{A}$ dado por (5.48), es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dado por*

$$S(t)z = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z, t \geq 0, \quad (5.49)$$

donde $\{P_j\}_{j \geq 1}$ es la familia completa de proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert $Z_{1/2}$ dado por

$$P_j = \text{diag}[E_j, E_j], \quad j \geq 1 \quad (5.50)$$

y

$$A_j = R_j P_j, \text{ donde } R_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Proposición 5.37. Si $P_\epsilon = \epsilon P$, entonces

$$\|P_\epsilon S(t, \mathcal{A})z\| \leq 2\epsilon \|z\|, \text{ para todo } z \in Z_{1/2},$$

y en consecuencia, $\mathcal{A} + P_\epsilon$ genera un semigrupo fuertemente continuo $S(t, \mathcal{A} + P_\epsilon)$ para todo $\epsilon \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $z \in Z_{1/2}$. Entonces,

$$\|z\|_{Z_{1/2}}^2 = \left\| \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\|_{Z_{1/2}}^2 = \|z_1\|_{1/2}^2 + \|z_2\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \|E_j z\|^2 + \sum_{j=1}^{+\infty} \|E_j z\|^2 < +\infty,$$

y tenemos el siguiente estimado

$$\begin{aligned} \|P_\epsilon S(t, \mathcal{A})z\|_{Z_{1/2}}^2 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \epsilon A^{1/2} & 0 \end{bmatrix} e^{A_j t} P_j z \right\|_{Z_{1/2}}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \epsilon A^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \sqrt{\lambda_j} t & \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \sin \sqrt{\lambda_j} t \\ -\sqrt{\lambda_j} \sin \sqrt{\lambda_j} t & \cos \sqrt{\lambda_j} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j z_1 \\ E_j z_2 \end{bmatrix} \right\|_{Z_{1/2}}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon \cos \sqrt{\lambda_j} t A^{1/2} E_j z_1 + \epsilon \frac{\lambda_j^{1/2}}{\sqrt{\lambda_j}} \sin \sqrt{\lambda_j} t A^{1/2} E_j z_2 \end{bmatrix} \right\|_{Z_{1/2}}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left\| \epsilon \cos \sqrt{\lambda_j} t A^{1/2} E_j z_1 + \epsilon \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \sin \sqrt{\lambda_j} t A^{1/2} E_j z_2 \right\|_Z^2 \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left\| \lambda_j^{1/2} \epsilon \cos \sqrt{\lambda_j} t E_j z_1 + \epsilon \frac{\lambda_j^{1/2}}{\sqrt{\lambda_j}} \sin \sqrt{\lambda_j} t E_j z_2 \right\|_Z^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} 2^2 \lambda_j \epsilon^2 \|E_j z_1\|_Z^2 + 2^2 \epsilon^2 \|E_j z_2\|_Z^2 \\ &= 2^2 \epsilon^2 (\|E_j z_1\|_{1/2}^2 + \|E_j z_2\|^2) = 2^2 \epsilon^2 \|z\|_{Z_{1/2}}^2. \end{aligned}$$

Por la tanto,

$$\|P_\epsilon S(t, \mathcal{A})z\|_{Z_{1/2}} \leq 2\epsilon \|z\|_{Z_{1/2}}, \text{ para todo } z \in Z_{1/2}.$$

Así, en este caso $h(t) = 2\epsilon$ y $P_\epsilon \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Consecuentemente, aplicando el Teorema 5.8, obtenemos que $\mathcal{A} + P_\epsilon$ genera un semigrupo fuertemente continuo $S(t, \mathcal{A} + P_\epsilon)$ para todo $\epsilon \geq 0$.

□

Teorema 5.38. *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, el sistema (5.38) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ para todo $\tau > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. De la proposición anterior se obtiene que

$$d_A(P_\epsilon, 0) = \int_0^1 \|P_\epsilon S(t, \mathcal{A})\| dt \leq \int_0^1 2\epsilon dt = 2\epsilon.$$

Por otra parte, es bien conocido que la ecuación de ondas determinística

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + Bu(t) \tag{5.52}$$

es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$. En consecuencia, la ecuación de ondas estocástica

$$dz = \{\mathcal{A}z + Bu(t, \omega)\}dt + \Sigma dw(t) \tag{5.53}$$

es también exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ para todo $\tau > 0$ (ver [39]). Entonces por el Teorema 5.32 tenemos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño el sistema (5.47) es también exactamente controlable sobre $[0, \tau]$. Finalmente el sistema (5.38) es controlable. □

www.bdigital.ula.ve

Controlabilidad Exacta de Sistemas de Evolución Semilineal Estocástica

1. Preliminaries

Este capítulo es motivado por los trabajos de Nazim I. Mahmudov [39] y H. Leiva [29]. Particularmente, en H. Leiva [29] el autor caracteriza la controlabilidad exacta de la siguiente ecuación de evolución semilineal

$$z' = Az + Bu(t) + f(t, z, u(t)), \quad t \geq 0, \quad z \in Z, \quad u \in U.$$

Básicamente, el autor prueba lo siguiente: si el sistema lineal $z' = Az + Bu(t)$ es exactamente controlable, entonces bajo algunas condiciones sobre el término no lineal f , el sistema no lineal también es exactamente controlable. Específicamente, el autor encuentra una fórmula explícita para el control que conduce el sistema desde un estado inicial ξ_0 a un estado final ξ_1 en el tiempo $\tau > 0$, para ambos sistemas, el lineal y no lineal respectivamente.

En esta dirección, nuestra meta es estudiar la controlabilidad exacta de la siguiente ecuación de evolución semilineal estocástica

$$\begin{cases} dz(t) = \{Az(t) + Bu(t) + f(t, z(t), u(t))\}dt + \{\Sigma(t) + \sigma(t, z(t), u(t))\}dw(t), \\ z(0) = \xi_0, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre un espacio de Hilbert separable Z , $B \in L(U, Z)$, con U un espacio de Hilbert separable.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo, $\{w(t), t \geq 0\}$ denota un proceso Q -Wiener con valores en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{E}$, $Q \in L(\mathcal{E}) = L(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ el espacio de operadores lineales acotados. $\{\mathcal{F}_t \uparrow \subset \mathcal{F}, t \geq 0\}$ una sucesión creciente de subsigma algebras de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_t$ es generado por $\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$. El control $u = \{u(t, \omega) : t \in [0, \tau], \omega \in \Omega\}$ es un proceso aleatorio $\mathcal{F}_t$ progresivamente medible con

CAPÍTULO 6. CONTROLABILIDAD EXACTA DE SISTEMAS DE EVOLUCIÓN SEMILINEAL ESTOCÁSTICA

valores en U , U es un espacio de Hilbert separable, ξ_0 es una variable aleatoria con valores en Z , $\mathcal{F}_0$ -medible.

Nuestro resultado puede ser descrito como sigue: suponga que el sistema lineal

$$dz(t) = Az(t)dt + Bu(t)dt + \Sigma(t)dw(t) \quad (6.2)$$

es exactamente controlable. Entonces, el control u que conduce el estado inicial ξ_0 al estado final $z(\tau) = \xi_1$, al tiempo $\tau \geq 0$, es dado por la siguiente fórmula

$$u(t) = B^*S^*(\tau - t)E\left(\Pi^{-1}\left(\xi_1 - S(\tau)\xi_0 - \int_0^\tau S(\tau - s)\Sigma(s)dw(s)\right)\middle|\mathcal{F}_t\right), \quad (6.3)$$

donde Π es dada por

$$\Pi(\cdot) = \int_0^\tau S(\tau - s)BB^*S^*(\tau - s)E(\cdot | \mathcal{F}_s)ds.$$

Más aún, el sistema (6.2) es exactamente controlable si, y sólo si, Π es invertible.

A continuación, bajo condiciones apropiadas sobre f y σ , la controlabilidad exacta del sistema (6.2) se preserva por el sistema semilineal (6.1), y el control que conduce el estado inicial ξ_0 al estado final $\xi_1 = z(\tau)$, en el tiempo $\tau \geq 0$, es dado por

$$u(t) = B^*S^*(\tau - t)E\left(\Pi^{-1}(\xi_1 - S(\tau)\xi_0 - \int_0^\tau S(\tau - s)\Sigma(s)dw(s))\middle|\mathcal{F}_t\right)(I + K)^{-1},$$

donde K es un operador no lineal dado por

$$\begin{aligned} K(\xi)(\tau) &= \int_0^\tau S(\tau - r)f(r, z_\xi(r), (\Gamma\xi)(r))dr \\ &\quad + \int_0^\tau S(\tau - r)\sigma(r, z_\xi(r), (\Gamma\xi)(r))d\omega(r), \end{aligned} \quad (6.4)$$

con z_ξ la solución de la ecuación (6.2), correspondiente al control definido por (6.3).

Para simplificar la notación, escribiremos:

$$f(t, z, u) = f(t, z(t, \omega), u(t, \omega))$$

y

$$\sigma(t, z, u) = \sigma(t, z(t, \omega), u(t, \omega)).$$

Finalmente, como aplicación estudiamos la ecuación de ondas amortiguada estocástica

$$\begin{cases} d[\frac{\partial}{\partial t}z(t, x) + cz] = [\theta z_{xx} + u(t, x) + f(t, z, z_t, u(t, x))]dt + \sigma(t, z, z_t, u(t, x))dw(t), \\ z(t, 0) = z(t, 1) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde $c \geq 0$ y $\theta > 0$, el control distribuido $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, T], U)$, el término f y σ satisface la condición de Lipschitz.

$$\begin{aligned} & |f(t, z_2, v_2, u_2) - f(t, z_1, v_1, u_1)|^2 + |\sigma(t, z_2, v_2, u_2) - \sigma(t, z_1, v_1, u_1)|^2 \\ & \leq k\{|z_2 - z_1|^2 + |v_2 - v_1|^2 + |u_2 - u_1|^2\}. \end{aligned}$$

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, y junto a este espacio consideremos una sucesión creciente de sub-sigma algebras $\{\mathcal{F}_t \uparrow \subset \mathcal{F}, t \geq 0\}$. Denotemos por $\mathbf{E}$ la esperanza de una variable aleatoria o la integral de Lebesgue con respecto a la medida de probabilidad P .

Sea $\mathcal{E}$ un espacio de Hilbert separable y $\{w(t), t \geq 0\}$ un proceso Q -Wiener con valores en $\mathcal{E}$ y operador de covarianza Q , Q un operador nuclear positivo sobre $\mathcal{E}$. Asumiremos que existe una base ortonormal completa $\{e_k\}_{k \geq 1}$ en $\mathcal{E}$, $\{\nu_k\}_{k \geq 1}$ una sucesión acotada de números reales no negativos acotados tal que $Qe_k = \nu_k e_k$, $k = 1, 2, \dots$, y $\{\beta_k\}_{k \geq 1}$ es un movimiento Browniano estándar unidimensional a valores reales mutuamente independientes sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que

$$w(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\nu_k} \beta_k(t) e_k, \quad t \geq 0.$$

Asumiremos que $\mathcal{F}_t$ es generado por $\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$.

Sea $L_2^0 := L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z)$ el espacio de los operadores de Hilbert-Schmidt:

$$\Psi : Q^{1/2}\mathcal{E} \rightarrow Z.$$

El espacio L_2^0 dotado con la norma $\|\Psi\|_{L_2^0}^2 = \text{tr}[\Psi Q \Psi^*] = \sum_{k=1}^{+\infty} \|\sqrt{\nu_k} \Psi e_k\|^2$ es un espacio

de Hilbert separable.

Todos los procesos considerados aquí se asumen fuertemente progresivamente $\mathcal{F}_t$ -medibles al menos que se diga lo contrario.

$L_2(\Omega, \mathcal{F}, P, Z) = L_2(\mathcal{F}, Z)$ denota el espacio de Hilbert de variables aleatorias Z -valuadas fuertemente $\mathcal{F}$ -medible que satisface

$$\mathbf{E} \left(\|z\|_Z^2 \right) < +\infty.$$

Ya que para cada $t \geq 0$ la sub- σ -álgebra $\mathcal{F}_t$ es completa, $L_2(\mathcal{F}_t, Z)$ es un subespacio cerrado de $L_2(\mathcal{F}, Z)$, de aquí que $L_2(\mathcal{F}_t, Z)$ es un espacio de Hilbert.

$L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], Z)$ denotará el espacio de Hilbert de todos los procesos aleatorios $\mathcal{F}_t$ -progresivamente medible definida sobre $[0, \tau]$, tomando valores en Z y satisfacen

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\tau \|z(t)\|_Z^2 dt \right) < +\infty.$$

La norma en $L_2(\mathcal{F}_t, Z)$ es dada por

$$\|z\|_{L_2(\mathcal{F}_t, Z)} = (\mathbf{E}(\|z\|_Z^2))^{1/2},$$

CAPÍTULO 6. CONTROLABILIDAD EXACTA DE SISTEMAS DE EVOLUCIÓN SEMILINEAL ESTOCÁSTICA

y la norma del espacio $L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ es dada por

$$\|u\|_{L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)} = \left(\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E}(\|u\|_U^2) \right)^{1/2}.$$

Si $\tau > 0$ es un valor fijo, se imponen las siguientes condiciones a los términos f y σ :

- (A) $f : [0, \tau] \times Z \times U \rightarrow Z$; $(t, z, u) \rightarrow f(t, z, u)$ es continua,
- (B) $\sigma : [0, \tau] \times Z \times U \rightarrow L_2^0$; $(t, z, u) \rightarrow \sigma(t, z, u)$ es continua,
- (C) Existe una constante $k > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \|f(t, z, u_1) - f(t, y, u_2)\|_Z^2 + \|\sigma(t, z, u_1) - \sigma(t, y, u_2)\|_{L_2^0}^2 \\ & \leq k\{\|z - y\|_Z^2 + \|u_1 - u_2\|_U^2\} \text{ para todo } t \in [0, \tau], z, y \in Z, u_1, u_2 \in U. \end{aligned} \quad (6.5)$$

(D)

$$\|f(t, z, u)\|_Z^2 + \|\sigma(t, z, u)\|_{L_2^0}^2 \leq k \text{ para todo } t \in [0, \tau], z \in Z, u \in U. \quad (6.6)$$

Definición 6.1. Un proceso predecible con valores en Z , $z = \{z(t), t \in [0, \tau]\}$, es una solución moderada de (6.1) si

$$P\left(\int_0^\tau \|z(s)\|^2 ds < +\infty\right) = 1 \text{ } P\text{-c.s.} \quad (6.7)$$

y, para $t \in [0, \tau]$ arbitrario

$$z(t) = S(t)\xi_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, z(s), u(s))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(s, z(s), u(s))dw(s). \quad (6.8)$$

Bajo estas condiciones el sistema (6.1) admite una solución moderada $z \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], Z)$ para cualquier $\xi_0 \in Z$ y $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$.

Teorema 6.2. Sea Z un espacio de Banach y $K : Z \rightarrow Z$ una función Lipschitz con constante de Lipschitz $k < 1$ y considere $G(z) = z + K(z)$. Entonces, G es un homeomorfismo cuya inversa es una función Lipschitz con constante de Lipschitz $(1-k)^{-1}$.

Una prueba de este teorema puede verse en el apéndice, Teorema .35.

2. Controlabilidad del Sistema Lineal Estocástico

Vamos a comenzar con algunos resultados acerca de controlabilidad exacta del sistema lineal estocástico

$$dz(t) = Az(t)dt + Bu(t)dt + \Sigma(t)dw(t),$$

que serán usados en la proxima sección. Para este fin usaremos el siguiente hecho

$$\begin{cases} dz(t) = Az(t)dt + Bu(t)dt + \Sigma(t)dw(t), \\ z(0) = \xi_0, \end{cases} \quad (6.9)$$

admite solamente una solución moderada dada por

$$z(t) = S(t)\xi_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds + \int_0^t S(t-s)\Sigma(s)dw(s), \quad (6.10)$$

para todo $\Sigma(t) \in L_2^0$, $t \in [0, \tau]$, $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ y ξ_0 una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$ -medible.

Una referencia para la existencia de la solución (6.10) puede hallarse en el libro de Da prato y Zabczyk [13] página 157.

Definición 6.3. (Controlabilidad Exacta.) *El sistema (6.9) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ si para todo $\xi_0 \in L_2(\mathcal{F}_0, Z)$ y $\xi_1 \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$, existe un control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ tal que la solución (6.10), correspondiente al control u , verifica $z(\tau) = \xi_1$.*

Consideremos los siguientes operadores:

a) El operador de controlabilidad $G : L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$

$$Gu = \int_0^\tau S(\tau-s)Bu(s)ds. \quad (6.11)$$

b) El operador de controlabilidad de (6.9), $\Pi : L_2(\mathcal{F}_\tau, Z) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$

$$\Pi(\cdot) = \int_0^\tau S(\tau-s)BB^*S^*(\tau-s)E(\cdot | \mathcal{F}_t)ds. \quad (6.12)$$

c) El operador de controlabilidad asociado al sistema determinístico de (6.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : Z &\rightarrow Z \\ \mathcal{W} &= \int_0^\tau S(\tau-s)BB^*S^*(\tau-s)ds. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Los operadores G , Π son lineales y acotados, y el adjunto G^* de G , $G^* : L_2(\mathcal{F}_\tau, Z) \rightarrow L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ es dado por

$$G^*z = B^*S^*(\tau-t)E(z|\mathcal{F}_t).$$

Observemos que el operador (6.12) es igual a:

$$\Pi = GG^*.$$

Ahora, estamos preparados para formular y probar un resultado nuevo sobre controlabilidad exacta del sistema (6.9).

Teorema 6.4. *El sistema (6.9) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ si, y solo si, el operador Π es invertible. Mas aún, el control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ que conduce un estado inicial ξ_0 a un estado final $\xi_1 = z(\tau)$, en el tiempo $\tau > 0$, es dado por la siguiente fórmula*

$$u(t) = B^*S^*(\tau-t)E\left(\Pi^{-1}\left(\xi_1 - S(\tau)\xi_0 - \int_0^\tau S(\tau-s)\Sigma(s)dw(s)\right)\middle|\mathcal{F}_t\right) \quad (6.14)$$

CAPÍTULO 6. CONTROLABILIDAD EXACTA DE SISTEMAS DE EVOLUCIÓN SEMILINEAL ESTOCÁSTICA

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el sistema (6.9) es exactamente controlable. Entonces, del Teorema 4.26, tenemos que

$$\mathbf{E}(\langle \Pi(z), z \rangle_Z) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|_Z^2), \quad \text{para algún } \gamma > 0 \text{ y todo } z \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z). \quad (6.15)$$

Esto implica que el operador Π es uno uno. Ahora, probaremos que Π es sobreyectivo, es decir,

$$\text{Rang}(\Pi) = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z).$$

Para propósitos de contradicción, asumiremos que $\text{Rang}(\Pi)$ está estrictamente contenido en $L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la ecuación (6.15), se obtiene que

$$\gamma \mathbf{E}(\|z\|_Z^2) \leq \mathbf{E}(\langle \Pi(z), z \rangle_Z) \leq (\mathbf{E}(\|\Pi(z)\|_Z^2) \mathbf{E}(\|z\|_Z^2))^{1/2}.$$

Así, se sigue que $\mathbf{E}(\|\Pi(z)\|_Z^2) \geq \gamma^2 \mathbf{E}(\|z\|_Z^2)$, i.e.,

$$\mathbf{E}\|\Pi(z)\|_{L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)}^2 \geq \gamma^2 \mathbf{E}\|z\|_{L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)}^2, \quad z \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z),$$

el cual implica que $\text{Rang}(\Pi)$ es cerrado. Entonces del Teorema de Hahn Banach, existe $z_0 \in L_2(\mathcal{F}_0, Z)$ con $z_0 \neq 0$ tal que

$$\mathbf{E}\langle \Pi(z), z_0 \rangle_{L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)} = 0, \quad \text{para todo } z \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z).$$

En particular, poniendo $z = z_0$ obtenemos de la ecuación (6.15)

$$0 = \mathbf{E}\langle \Pi(z)_0, z_0 \rangle_{L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)} \geq \gamma \mathbf{E}\|z_0\|_{L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)}^2.$$

Por lo tanto, $z_0 = 0$, lo cual es una contradicción. Así, Π es sobreyectivo y de aquí Π es una biyección, y por el Teorema de la aplicación abierta Π^{-1} es un operador lineal acotado.

Ahora, supongamos que Π es invertible. Entonces, dado $z \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$ probaremos la existencia de un control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], Z)$ tal que $Gu = z$. Más aún, este control u puede tomarse como sigue

$$u(t) = B^* S^*(\tau - t) E(\Pi^{-1}(z) | \mathcal{F}_t),$$

en efecto,

$$\begin{aligned} Gu &= \int_0^\tau S(\tau - s) B u(s) ds = \int_0^\tau S(\tau - s) B B^* S^*(\tau - s) E(\Pi^{-1}(z) | \mathcal{F}_t) ds \\ &= \Pi(\Pi^{-1}(z)) = z. \end{aligned}$$

Finalmente, si ponemos $z = \xi_1 - S(\tau)\xi_0 - \int_0^\tau S(\tau - s)\Sigma(s)dw(s)$ en la fórmula anterior para el control u , obtenemos la fórmula (6.14) para el control conduciendo un estado inicial ξ_0 al estado final ξ_1 en el tiempo τ . $\square$

Corolario 6.5. Si el sistema (6.9) es exactamente controlable, entonces el operador

$$\Gamma : L_2(\mathcal{F}_\tau, Z) \rightarrow L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$$

definido por

$$\Gamma\xi = G^* \Pi^{-1}\xi \text{ o } (\Gamma\xi)(t) = B^* S^*(\tau - t) E(\Pi^{-1}(\xi) | \mathcal{F}_t) \quad (6.16)$$

es una inversa por la derecha G , i.e., $G \circ \Gamma = I$.

Observemos que el operador Γ es acotado. En efecto: el operador

$$\Gamma\xi = G^*\Pi^{-1}\xi = B^*S^*(T-t)E(\Pi^{-1}(\xi)|\mathcal{F}_t),$$

se acota de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Gamma : L_2(\mathcal{F}, Z) &\rightarrow L_2^{\mathcal{F}}([0, T], U) \\ \mathbf{E}(\|\Gamma\xi\|_{L_2^{\mathcal{F}}([0, T], U)}^2) &= \sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E}(\|\Gamma\xi\|_U^2) \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E}(\|B^*S^*(T-s))E(\Pi^{-1}(\xi)|\mathcal{F}_t)\|_U^2 \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|B^*\|^2 \|S^*(T-s)\|^2 \|E(\Pi^{-1}(\xi)|\mathcal{F}_t)\|_Z^2 \\ &\leq M\|B\|^2 \mathbf{E}(\|\Pi^{-1}(\xi)\|_Z^2), \end{aligned} \tag{6.17}$$

donde $M = \sup_{t \in [0, T]} \|S(T-t)\|$, por el Teorema 6.4, Π^{-1} es un operador lineal acotado, en consecuencia se tiene $\mathbf{E}(\|\Gamma\xi\|_{L_2^{\mathcal{F}}([0, T], U)}^2)$ es acotado.

3. Controlabilidad del Sistema Estocástico no Lineal

Bajo las condiciones impuestas al término no lineal f y σ , la ecuación (6.1) con la condición inicial $z(0) = \xi_0$ y el control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ admite una única solución moderada que satisface la ecuación

$$\begin{aligned} z(t) &= S(t)\xi_0 + \int_0^t S(t-s)[Bu(s) + f(s, z(s), u(s))]ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)\{\Sigma(s) + \sigma(s, z(s), u(s))\}dw(s). \end{aligned} \tag{6.18}$$

Definición 6.6. El sistema (6.1) se dice exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ si para todo $\xi_0 \in L_2(\mathcal{F}_0, Z)$ y $\xi_1 \in L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$, existe un control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$ tal que la correspondiente solución (6.18) satisface $z(\tau) = \xi_1$.

Definamos el siguiente operador

$$G_{f\sigma} : L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$$

por

$$G_{f\sigma}u = Gu + \int_0^\tau S(\tau-r)f(r, z(r), u(r))dr + \int_0^\tau S(\tau-r)\sigma(r, z(r), u(r))dw(r), \tag{6.19}$$

donde $z(r) = z(r, u)$ es la solución (6.18) correspondiente al control u . La siguiente proposición es la caracterización de controlabilidad exacta del sistema (6.1)

Proposición 6.7. El sistema (6.1) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$ si, y solo si,

$$\text{Rang}(G_{f\sigma}) = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z).$$

CAPÍTULO 6. CONTROLABILIDAD EXACTA DE SISTEMAS DE EVOLUCIÓN SEMILINEAL ESTOCÁSTICA

Lema 6.8. Sean $u_1, u_2 \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$, ξ_0 es una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$ -medible y z_1, z_2 las correspondientes soluciones de (6.18). Entonces, el siguiente estimado ocurre:

$$\mathbf{E}(\|z_1(t) - z_2(t)\|_Z^2) \leq \Phi \|u_1 - u_2\|^2, \quad (6.20)$$

donde

$$\Phi = \{4M^2\|B\|^2\tau + 16M^2k\tau + 16M^2k\} \tau e^{\{16M^2k\tau + 16M^2k\}\tau},$$

$t \in [0, \tau]$ y $M = \sup_{0 \leq r \leq t \leq \tau} \|S(t-r)\|$.

DEMOSTRACIÓN. Sea z_1, z_2 la solución de (6.1) correspondiente a u_1, u_2 respectivamente. Entonces, usando la Proposición 4.5 página 91 de [13], la condición (C) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\|z_1(t) - z_2(t)\|_Z^2) &= \mathbf{E} \left\| \int_0^t S(t-r)B[u_1(r) - u_2(r)]dr \right. \\ &\quad + \int_0^t S(t-r)[f(r, z_1(r), u_1(r)) - f(r, z_2(r), u_2(r))]dr \\ &\quad + \int_0^t S(t-r)[\sigma(r, z_1(r), u_1(r)) - \sigma(r, z_2(r), u_2(r))]dw \Big\|_Z^2 \\ &\leq \mathbf{E} \left\{ \left\| \int_0^t S(t-r)B[u_1(r) - u_2(r)]dr \right\|_Z \right. \\ &\quad + \mathbf{E} \left\| \int_0^t S(t-r)[f(r, z_1(r), u_1(r)) - f(r, z_2(r), u_2(r))]dr \right\|_Z \\ &\quad + \mathbf{E} \left\| \int_0^t S(t-r)[\sigma(r, z_1(r), u_1(r)) - \sigma(r, z_2(r), u_2(r))]dw \right\|_Z \Big\}^2 \\ &\leq 4M^2\|B\|^2\mathbf{E} \left[\int_0^t \|u_1(r) - u_2(r)\|_U dr \right]^2 \\ &\quad + 16M^2\mathbf{E} \left[\int_0^t \|f(r, z_1(r), u_1(r)) - f(r, z_2(r), u_2(r))\|_X dr \right]^2 \\ &\quad + 16M^2\mathbf{E} \int_0^t \|\sigma(r, z_1(r), u_1(r)) - \sigma(r, z_2(r), u_2(r))\|_{L_2^0}^2 dr \\ &\leq 4M^2\|B\|^2\tau\mathbf{E} \int_0^\tau \|u_1(r) - u_2(r)\|_U^2 dr \\ &\quad + 16M^2k\tau\mathbf{E} \int_0^\tau \{\|z_1(r) - z_2(r)\|_Z^2 + \|u_1(r) - u_2(r)\|_U^2\} dr \\ &\quad + 16M^2k\mathbf{E} \int_0^\tau \{\|z_1(r) - z_2(r)\|_Z^2 + \|u_1(r) - u_2(r)\|_U^2\} dr. \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|z_1(t) - z_2(t)\|_Z^2 &\leq \{4M^2\|B\|^2\tau + 16M^2k\tau + 16M^2k\} \int_0^\tau \mathbf{E}\|u_1(r) - u_2(r)\|_U^2 dr \\ &+ \{16M^2k\tau + 16M^2k\} \int_0^\tau \tau \mathbf{E}\|z_1(r) - z_2(r)\|_Z^2 dr, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|z_1(t) - z_2(t)\|_Z^2 &\leq \{4M^2\|B\|^2\tau + 16M^2k\tau + 16M^2k\} \tau \|u_1 - u_2\|^2 \\ &+ \{16M^2k\tau + 16M^2k\} \int_0^\tau \mathbf{E}\|z_1(r) - z_2(r)\|_Z^2 dr. \end{aligned}$$

Ahora, usando la Desigualdad de Gronwall obtenemos que

$$\mathbf{E}\|z_1(t) - z_2(t)\|_Z^2 \leq \{4M^2\|B\|^2\tau + 16M^2k\tau + 16M^2k\} \tau e^{\{16M^2k\tau + 16M^2k\}\tau} \|u_1 - u_2\|^2.$$

□

Teorema 6.9. *Si ocurre el siguiente estimado*

$$L = \left[4M^2k\tau \left\{ \Phi\tau\|\Gamma\|^2 + \tau\|\Gamma\|^2 + \Phi + \|\Gamma\|^2 \right\} \right]^{1/2} < 1, \quad (6.21)$$

donde $\Phi = \{4M^2\|B\|^2\tau + 16M^2k\tau + 16M^2k\} \tau e^{\{16M^2k\tau + 16M^2k\}\tau}$, entonces el término no lineal (6.1) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$.

DEMOSTRACIÓN. Para este fin, es suficiente probar que el operador $G_{f\sigma}$ dado por (6.7) es sobreyectivo. es decir,

$$G_{f\sigma}(L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)) = \text{Rang}(G_{f\sigma}) = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z).$$

Ya que el sistema lineal estocástico (6.2) es exactamente controlable, por el Corolario 6.5, se sigue que el operador Γ definido por (6.16) es una inversa por la derecha de G . Es suficiente probar que el operador $\tilde{G}_{f\sigma} = G_{f\sigma} \circ \Gamma$ es sobreyectivo.

Para este fin, el operador $G_{f\sigma}$ puede escribirse como sigue

$$G_{f\sigma}u = Gu + F(u),$$

donde $F : L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U) \rightarrow L_2(\mathcal{F}, Z)$ es dado por

$$F(u) = \int_0^\tau S(\tau - r)f(r, z(r), u(r))dr + \int_0^\tau S(\tau - r)\sigma(r, z(r), u(r))dw(r). \quad (6.22)$$

Entonces,

$$\tilde{G}_{f\sigma} = G_{f\sigma} \circ \Gamma = I + F \circ \Gamma = I + K, \quad (6.23)$$

donde $K : L_2(\mathcal{F}_\tau, Z) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_\tau, Z)$ es dado por

$$K(\xi) = \int_0^\tau S(\tau - r)f(r, z_\xi(r), (\Gamma\xi)(r))dr + \int_0^\tau S(\tau - r)\sigma(r, z_\xi(r), (\Gamma\xi)(r))dw(r). \quad (6.24)$$

CAPÍTULO 6. CONTROLABILIDAD EXACTA DE SISTEMAS DE EVOLUCIÓN SEMILINEAL ESTOCÁSTICA

De aquí que, del Teorema 6.2 es suficiente probar que K es una función Lipschitz con constante de Lipschitz $k < 1$. En efecto, sea z_{ξ_1} y z_{ξ_2} soluciones de (6.1) correspondientes a los controles Γ_{ξ_1} , Γ_{ξ_2} respectivamente. Consideremos el siguiente estimado

$$\begin{aligned} K\xi_2 - K\xi_1 = & \int_0^\tau S(\tau - r)f(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma_{\xi_2}(r))dr + \int_0^\tau S(\tau - r)\sigma(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma_{\xi_2}(r))dw(r) \\ & - \left(\int_0^\tau S(\tau - r)f(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma_{\xi_1}(r))dr + \int_0^\tau S(\tau - r)\sigma(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma_{\xi_1}(r))dw \right). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Al mismo tiempo, de la misma forma como antes, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\| K\xi_2 - K\xi_1 \right\|_Z^2 = & \mathbf{E} \left\| \int_0^\tau S(\tau - r) \left[f(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma_{\xi_2}) - f(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma_{\xi_1}) \right] dr \right. \\ & \left. + \int_0^\tau S(\tau - r) \left[\sigma(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma_{\xi_2}) - \sigma(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma_{\xi_1}) \right] dw \right\|_Z^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando la fórmula $(a + b)^2 \leq 4(a^2 + b^2)$ con $a > 0$ y $b > 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\| K\xi_2 - K\xi_1 \right\|_Z^2 \leq & 4\mathbf{E} \left\| \int_0^\tau S(\tau - r) \left[f(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma_{\xi_2}) - f(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma_{\xi_1}) \right] dr \right\|_Z^2 \\ & + 4\mathbf{E} \left\| \int_0^\tau S(\tau - r) \left[\sigma(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma_{\xi_2}) - \sigma(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma_{\xi_1}) \right] dw \right\|_Z^2. \end{aligned}$$

Vamos a considerar ahora las siguiente cantidades

$$I_1 = \mathbf{E} \left\| \int_0^\tau S(\tau - r) \left[f(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma_{\xi_2}) - f(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma_{\xi_1}) \right] dr \right\|_Z^2,$$

$$I_2 = \mathbf{E} \left\| \int_0^\tau S(\tau - r) \left[\sigma(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma_{\xi_2}) - \sigma(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma_{\xi_1}) \right] dw(r) \right\|_Z^2.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la condición (C) y la ecuación (6.20) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq \mathbf{E} \left(\int_0^\tau \|S(\tau-r)\|_Z \left\| \left[f(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma\xi_2) - f(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma\xi_1) \right] \right\|_X dr \right)^2 \\
 &\leq M^2 \mathbf{E} \left(\int_0^\tau \left\| f(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma\xi_2) - f(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma\xi_1) \right\|_Z dr \right)^2 \\
 &\leq M^2 \mathbf{E} \left(\left[\int_0^\tau dr \right]^{1/2} \left[\int_0^\tau \left\| f(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma\xi_2) - f(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma\xi_1) \right\|_Z^2 dr \right]^{1/2} \right)^2 \\
 &\leq M^2 \tau \mathbf{E} \left(\int_0^\tau \left\| f(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma\xi_2) - f(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma\xi_1) \right\|_Z^2 dr \right) \\
 &\leq M^2 \tau \mathbf{E} \left(\int_0^\tau k \left\| z_{\xi_2}(r) - z_{\xi_1}(r) \right\|_Z^2 + k \left\| \Gamma\xi_2(r) - \Gamma\xi_1(r) \right\|_U^2 dr \right) \\
 &\leq M^2 k \tau \int_0^\tau \mathbf{E} \left\| z_{\xi_2}(r) - z_{\xi_1}(r) \right\|_Z^2 dr + M^2 k \tau \int_0^\tau \mathbf{E} \left\| \Gamma\xi_2(r) - \Gamma\xi_1(r) \right\|_U^2 dr \\
 &\leq M^2 k \Phi \tau^2 \left\| \Gamma\xi_2 - \Gamma\xi_1 \right\|^2 + M^2 k \tau^2 \left\| \Gamma\xi_2 - \Gamma\xi_1 \right\|^2 \\
 &= \{M^2 k \Phi \tau^2 + M^2 k \tau^2\} \left\| \Gamma \right\|^2 \left\| \xi_2 - \xi_1 \right\|^2,
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \mathbf{E} \left\| \int_0^\tau S(\tau-r) \left[\sigma(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma\xi_2) - \sigma(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma\xi_1) \right] dw(r) \right\|_Z^2 \\
 &= \mathbf{E} \left\| \int_0^\tau S(\tau-r) \left[\sigma(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma\xi_2) - \sigma(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma\xi_1) \right] dw(r) \right\|_Z^2 \\
 &\leq M^2 \mathbf{E} \left\| \int_0^\tau \left[\sigma(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma\xi_2) - \sigma(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma\xi_1) \right] dw(r) \right\|_Z^2 \\
 &\leq M^2 \mathbf{E} \int_0^\tau \left\| \sigma(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma\xi_2) - \sigma(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma\xi_1) \right\|_{L_2^0}^2 dr \\
 &= M^2 \mathbf{E} \int_0^\tau \left\| \sigma(r, z_{\xi_2}(r), \Gamma\xi_2) - \sigma(r, z_{\xi_1}(r), \Gamma\xi_1) \right\|_{L_2^0}^2 dr \\
 &\leq M^2 \mathbf{E} \left\{ \int_0^\tau k \left\| z_{\xi_2}(r) - z_{\xi_1}(r) \right\|_Z^2 + k \left\| \Gamma\xi_2(r) - \Gamma\xi_1(r) \right\|_U^2 dr \right\} \\
 &= M^2 k \int_0^\tau \mathbf{E} \left\| z_{\xi_2}(r) - z_{\xi_1}(r) \right\|_Z^2 dr + M^2 k \int_0^\tau \mathbf{E} \left\| \Gamma\xi_2(r) - \Gamma\xi_1(r) \right\|_U^2 dr \\
 &\leq M^2 k T \Phi \left\| \Gamma\xi_2 - \Gamma\xi_1 \right\|^2 + M^2 k T \left\| \Gamma\xi_2 - \Gamma\xi_1 \right\|^2 \\
 &= \{M^2 k T \Phi + M^2 k T\} \left\| \Gamma \right\|^2 \left\| \xi_2 - \xi_1 \right\|^2.
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 6. CONTROLABILIDAD EXACTA DE SISTEMAS DE EVOLUCIÓN SEMILINEAL ESTOCÁSTICA

Así, obtenemos que

$$\mathbf{E} \| K\xi_2 - K\xi_1 \|_Z^2 \leq 4M^2 k\tau \left\{ \Phi\tau + \tau + \Phi + 1 \right\} \|\Gamma\|^2 \|\xi_2 - \xi_1\|^2,$$

i.e.

$$\|K\xi_2 - K\xi_1\| \leq \left[4M^2 k\tau \left\{ \Phi\tau + \tau + \Phi + 1 \right\} \right]^{1/2} \|\Gamma\|^2 \|\xi_2 - \xi_1\|.$$

Por lo tanto, K es una función Lipschitz con constante de Lipschitz dada por

$$k = \left[4M^2 k\tau \left\{ \Phi\tau + \tau + \Phi + 1 \right\} \right]^{1/2} \|\Gamma\|^2 < 1.$$

Entonces, del Teorema 6.2 obtenemos que $\tilde{G}_{f\sigma} = I + K$ es un homeomorfismo y por lo tanto el operador $G_{f\sigma}$ es sobreyectivo. i.e.,

$$G_{f\sigma}(L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)) = \text{Rang}(G_{f\sigma}) = L_2(\mathcal{F}_\tau, Z).$$

□

Corolario 6.10. *Bajo las hipótesis del Teorema 6.9 el control que conduce el estado inicial ξ_0 al estado final ξ_1 es dado por*

$$u(t) = B^* S^*(\tau - t) E \left(\Pi^{-1} (I + K)^{-1} (\xi_1 - S(\tau)\xi_0 - \int_0^\tau S(\tau - s) \Sigma(s) dw(s)) \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (6.26)$$

4. Aplicación a la Ecuación de Ondas Estocástica Amortiguada

Consideremos la ecuación de ondas amortiguada

$$\begin{cases} d[z_t + cz] = [\theta z_{yy} + u(t, y) + f(t, z, z_t, u(t, y))]dt + dw(t), \\ z(t, 0) = z(t, 1) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.27)$$

donde $\theta > 0$, $c \geq 0$, el control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, t_1], L_2(0, 1))$, el término no lineal $f(t, z, z_t, u(t, y))$ es una función de Lipschitz, i.e., existe una constante $k > 0$ tal que, para todo (t, z_1, v_1, u_1) y $(t, z_2, v_2, u_2) \in [0, t_1] \times \mathbb{R}^3$ tenemos

$$|f(t, z_2, v_2, u_2) - f(t, z_1, v_1, u_1)|^2 \leq k\{|z_2 - z_1|^2 + |v_2 - v_1|^2 + |u_2 - u_1|^2\}. \quad (6.28)$$

Ahora consideremos el espacio en el cual este sistema se reduce a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden abstracta.

Sea $Z = U = L_2[0, 1]$ y consideremos un operador no acotado $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ definido por $Az = -z_{yy}$, donde

$$D(A) = \{z \in Z : z, z_y \text{ son absolutamente continuas, } z_{yy} \in Z \text{ y } z(0) = z(1) = 0\} \quad (6.29)$$

Propiedades del operador:

i) El espectro de A consiste únicamente de los autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n \rightarrow +\infty,$$

cada uno con multiplicidad uno.

ii) Existe un conjunto ortonormal completo $\{\phi_n\}$ de autovectores de A .

iii) Para todo $z \in D(A)$

$$Az = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle z, \phi_n \rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n E_n z. \quad (6.30)$$

Aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno sobre Z , $\lambda_n = n^2 \pi^2$ y $\phi_n(z) = \sqrt{2} \sin(n\pi z)$. Así, $\{E_n\}$ es una familia de proyecciones ortogonales completa en Z y $z = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n z$, $z \in Z$.

iv) $-A$ genera un semigrupo analítico $\{e^{-At}\}$ dado por

$$e^{-At} z = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} E_n z. \quad (6.31)$$

v) El espacio potencia fraccionada $Z^{1/2}$ dado por

$$Z^{1/2} = D(A^{1/2}) = \left\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \|E_n z\|^2 < +\infty \right\}, \quad (6.32)$$

con la norma

$$\|z\|_{1/2} = \|A^{1/2} z\| = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \|E_n z\|^2 \right\}^{1/2}, \quad z \in Z,$$

y

$$A^{1/2} z = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{1/2} E_n z. \quad (6.33)$$

También, definimos $Z_{1/2} = Z^{1/2} \times Z$, el cual es un espacio de Hilbert con la norma

$$\left\| \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} \right\|_{Z_{1/2}}^2 = \|z\|_{1/2}^2 + \|v\|^2.$$

Usando el cambio de variable $z' = v$, la ecuación (6.27) puede escribirse como una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en el espacio $Z_{1/2} = D(A^{1/2}) \times Z = Z^{1/2} \times Z$ como

$$d\eta = [A\eta + Bu + F(t, \eta, u(t))]dt + \Sigma(t, \eta, u(t))dw, \quad \eta \in Z_{1/2}, \quad t \geq 0, \quad (6.34)$$

donde

$$\eta = \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_Z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I_Z \\ -\theta A & -cI_Z \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

A es un operador lineal no acotado con dominio $D(A) = D(A^{1/2}) \times Z$,

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t, w, v, u) \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

CAPÍTULO 6. CONTROLABILIDAD EXACTA DE SISTEMAS DE EVOLUCIÓN SEMILINEAL ESTOCÁSTICA

La función F definida como $F : [0, t_1] \times Z_{1/2} \times U \rightarrow Z_{1/2}$, y la función Σ definida como sigue $\Sigma : [0, t_1] \times Z_{1/2} \times U \rightarrow L_2^0$, donde $L_2^0 := L_2(Q^{1/2}Z_{1/2}, Z_{1/2})$

Ya que $Z^{1/2}$ esta continuamente incluida en Z tenemos para $z_1, z_2 \in Z_{1/2}$ y los valores $u_1, u_2 \in U = Z$

$$\|F(t, z_2, u_2) - F(t, z_1, u_1)\|_{Z_{1/2}}^2 \leq K\|z_2 - z_1\|_{Z_{1/2}}^2 + \|u_1 - u_2\|_{L_2^{\mathcal{F}}([0, t_1], U)}^2. \quad (6.37)$$

La siguiente Proposición se encuentra en [32] y [33]

Proposición 6.11. *El operador $\mathcal{A}$ dado por (6.35), es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ en $Z_{1/2}$ dado por*

$$S(t)z = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad z \in Z_{1/2},$$

donde $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una familia ortogonal de proyecciones sobre el espacio de Hilbert $Z_{1/2}$ y es dado por

$$P_n = \text{diag}(E_n, E_n), \quad n \geq 1,$$

y

$$A_n = B_n P_n, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\theta \lambda_n & -c \end{pmatrix}, \quad n \geq 1$$

Este semigrupo decae exponencialmente a cero. De hecho, tenemos el siguiente estimado

$$\|S(t)\| \leq M(c, \theta) e^{-\frac{\alpha}{2} t}, \quad t \geq 0.$$

donde

$$\frac{M(c, \theta)}{2\sqrt{2}} = \sup_n \left\{ 2 \left| \frac{c \pm \sqrt{4\theta\lambda_n - c^2}}{\sqrt{c^2 - 4\theta\lambda_n}} \right|, (2 + \theta) \left| \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{4\theta\lambda_n - c^2}} \right| \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [32] y [33]. □

Teorema 6.12. *El sistema lineal estocástico*

$$\begin{cases} d\eta(t) = [\mathcal{A}\eta(t) + Bu]dt + \Sigma dw(t), & \eta \in Z_{1/2}, \quad t > 0, \\ \eta(0) = \eta_0. \end{cases} \quad (6.38)$$

es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$.

DEMOSTRACIÓN. De Leiva [32], el sistema determinístico asociado a (6.38) es exactamente controlable, y del Teorema 4.27, obtenemos controlabilidad de (6.38). □

Teorema 6.13. *Si el siguiente estimado ocurre*

$$(4(M(c, \theta))^2 k \tau (\tau + 1))^{1/2} \exp \frac{1}{2} \{4(M(c, \theta))^2 k (\tau + 1)\} < 1,$$

entonces el sistema (6.34) es exactamente controlable sobre $[0, \tau]$.

Aplicación a la Ecuación de Ondas Estocástica Amortiguada

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Teorema 6.9 y tengamos en cuenta que:

$$\Phi = \{4M^2\|B\|^2\tau + 16M^2k\tau + 16M^2k\}\tau e^{\{16M^2k\tau + 16M^2k\}\tau} \leq 1,$$

en consecuencia $\|B\| \leq 1$. □

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 7

Ecuaciones en Diferencias

Existe una amplia literatura sobre controlabilidad exacta lineal en sistemas determinístico, excelente referencias son: R.F.Curtain y H.J.Zwart [8], Fattorini [17] y Russell [45]. La teoría de controlabilidad para ecuaciones de evolución lineal estocásticos es relativamente nueva y la formulación es cuestionable ; en efecto, Agamirsa E. Bashirov y Nazim I.Mahmudov [2] dieron tres conceptos de controlabilidad y condiciones necesarias y suficientes para controlabilidad exacta, aproximada y s-controlabilidad, el cual son subsecuentemente extendidas a sistemas infinito dimensionales por Nazim I. Mahmudov [40].

Para sistemas estocásticos lineales y no lineales en tiempo continuo podemos mencionar los siguientes artículos [14], [39], [40], [5] y [47]. Sin embargo hasta donde tenemos información no hay trabajos que enfoquen las ecuaciones en diferencia estocásticas tal y como nosotros la presentamos en este capítulo. Veamos las definiciones preliminares.

Sean $Z, U, \mathcal{E}$ espacios de Hilbert, fijemos un número natural n_0 , un proceso Q -Wiener $W = \{w(t) : t \geq 0\}$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en $\mathcal{E}$. Q es un operador de covarianza, simétrico no-negativo en $L(\mathcal{E}) = L(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ con $\text{tr } Q < +\infty$. Entonces existe una base ortonormal completa $\{e_n\}$ en $\mathcal{E}$, y un sucesión acotada de números reales no-negativos ν_n tal que

$$Qe_n = \nu_n e_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

El proceso Q -Wiener W satisface:

(i) W es un proceso Gaussiano sobre $\mathcal{E}$ y

$$\mathbf{E}(w(t)) = 0, \quad \text{cov}(w(t)) = tQ.$$

(ii) Para $t > 0$ arbitrario, W tiene el desarrollo

$$w(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\nu_j} \beta_j(t) e_j, \quad (7.1)$$

donde

$$\beta_j(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu_j}} \langle w(t), e_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots,$$

es un movimiento Browniano a valores reales mutuamente independientes sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y la serie en (7.1) es convergente en $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Denotemos por $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y por $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición 7.1. Sea Z un espacio de Banach. El espacio de todas las sucesiones acotadas con valores en Z , $z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots)$, se denota por $l^{+\infty}(\mathbb{N}, Z)$. Este espacio, junto con la norma $\|z\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|z_i\|_Z$, es un espacio de Banach.

Definición 7.2. Si $L(Z) = L(Z, Z)$ es el espacio de los operadores lineales y acotados definidos sobre un espacio de Hilbert Z con valores en Z , entonces el espacio $l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$ es el conjunto de los operadores $\phi(n) \in L(Z)$, para $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|\phi\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|\phi(i)\|_{L(Z)} < +\infty.$$

Definición 7.3. Si $L(Z, U)$ es el espacio de los operadores lineales y acotados definidos en el espacio de Hilbert Z con valores en un espacio de Hilbert U , entonces el espacio $l^\infty(\mathbb{N}, L(Z, U))$ es el conjunto de los operadores $\psi(n) \in L(Z, U)$, para $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\psi\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|\psi(i)\|_{L(Z, U)}.$$

Si $W = \{w(s)\}_{s \geq 0}$ es un proceso Q -Wiener con valores en $\mathcal{E}$, consideremos $\mathcal{F}_n = \sigma\{w(s) : 0 \leq s \leq n\}$ para $n \in \mathbb{N}$ una sub- σ -álgebra.

Definición 7.4. El conjunto de todos los procesos aleatorios $\mathcal{F}_n$ adaptados definidos sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con valores en el espacio de Hilbert U tal que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|u(n, \omega)\|_U^2 \right) < +\infty,$$

se denota por $l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)$.

Este conjunto $l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)$, designará al conjunto de los controles considerados como procesos aleatorios $u = \{u(n, \omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

En este capítulo nosotros estudiamos la controlabilidad exacta de la ecuación en diferencias semilineal estocástica

$$\begin{aligned} z(n+1, \omega) &= A(n)z(n, \omega) + B(n)u(n, \omega) + f(z(n, \omega), u(n, \omega)) \\ &+ \left\{ \Sigma(n) + \sigma(z(n, \omega), u(n, \omega)) \right\} (w(n+1) - w(n)) \quad \text{para } n \in \mathbb{N}, \\ z(0) &= z_0 \in \mathcal{F}_0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde $A \in l^{+\infty}(\mathbb{N}, L(Z))$, $B \in l^{+\infty}(\mathbb{N}, L(U, Z))$.

CAPÍTULO 7. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

$L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z)$ es el espacio de los operadores Hilbert-Schmidt de $Q^{1/2}\mathcal{E}$ en Z y donde $Q \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$, es el operador de covarianza.

El término $\Sigma \in L(\mathbb{N}, L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z))$. El término no lineal $f : Z \times U \rightarrow Z$ es una función continua.

La función $\sigma : Z \times U \rightarrow L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z)$, es continua,

Ambos términos satisfacen:

$$\begin{aligned} & \|f(z_1, u_1) - f(z_2, u_2)\|_Z^2 + \|\sigma(z_1, u_1) - \sigma(z_2, u_2)\|_{L_2^0}^2 \\ & \leq \varrho \{ \|z_1 - z_2\|_Z^2 + \|u_1 - u_2\|_U^2 \}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

para todo $z_1, z_2 \in Z$, $u_1, u_2 \in U$ y $\varrho > 0$.

En este trabajo probamos lo siguiente: si el sistema lineal

$$\begin{cases} z(n+1, \omega) = A(n)z(n, \omega) + B(n)u(n, \omega) + \Sigma(n)(w(n+1) - w(n)), \text{ para } n \in \mathbb{N} \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{F}_0, \end{cases} \quad (7.4)$$

es exactamente controlable y $\varrho \ll 1$, entonces el sistema no lineal (7.2) es también exactamente controlable. Esto significa que la controlabilidad exacta se preserva bajo perturbaciones no lineales.

Este resultado será aplicado a la versión discreta de la ecuación del calor semilineal

$$\begin{cases} dy = \{y_{xx} + u(t, x) + f(y, u)\}dt + dw(t) \\ y_x(t, 0) = y_x(t, 1) = 0 \\ y(0, x) = y_0(x), \end{cases} \quad (7.5)$$

donde el control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], L_2[0, 1])$ para $\tau > 0$ fijo, $W = \{w(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener $L_2[0, 1]$ -valuado y el término no lineal f es una función continua definida por

$$f : L_2[0, 1] \times L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$$

tal que

$$\|f(z_2, u_2) - f(z_1, u_1)\|^2 \leq \varrho \{ \|z_2 - z_1\|^2 + \|u_2 - u_1\|^2 \}. \quad (7.6)$$

La controlabilidad exacta determinística de la ecuación del calor discreta aparece en [30]. Siguiendo este artículo consideraremos la versión estocástica de la ecuación del calor.

También añadimos un ejemplo de portafolio de inversiones, donde analizaremos la controlabilidad exacta del siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} dz(t) = \sum_{i=0}^n N_i(t) dP_i(t) \\ = \{r(t)N_0(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^n b_i(t)N_i(t)P_i(t)\}dt + \sum_{i=1}^n N_i(t)P_i(t) \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)dw_j(t) \\ = \{r(t)z(t) + \sum_{i=1}^n [b_i(t) - r(t)]u_i(t)\}dt + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(t)u_i(t)dw_j(t) \\ z(0) = z_0, \end{array} \right.$$

donde $z(t)$ representa la riqueza al tiempo t , $N_i(t)$ el número de acciones al tiempo t , $P(t)$ el precio de cada acción, $r(t)$ el proceso tasa de interés, $b(t)$ la tasa de retorno o tasa de apreciación y $\sigma(t)$ la dispersión y $W = \{\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t)), 0 \leq t \leq \tau\}$ es el proceso de Wiener finito n -dimensional.

La técnica que usamos se basa nuevamente en el Teorema 6.2.

1. Controlabilidad Exacta del Sistema Lineal

Para simplificar la terminología, en lugar de $z(n, \omega)$, $u(n, \omega)$ usaremos $z(n)$, $u(n)$ respectivamente.

Inicialmente estudiaremos la controlabilidad exacta del sistema estocástico lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n) + \Sigma(n)(w(n+1) - w(n)), \text{ para } n \in \mathbb{N}, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{F}_0. \end{array} \right. \quad (7.7)$$

Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, asumiremos que la sucesión $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una filtración en $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_n = \sigma\{w(s) : 0 \leq s \leq n\}$, para $n \in \mathbb{N}$, y en particular

- i) $w(n)$ es $\mathcal{F}_n$ -medible sobre $\mathcal{E}$.
- ii) $w(n+h) - w(n)$ es independiente de $\mathcal{F}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La sucesión $z = \{z(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, Z)$ donde $l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, Z)$ es el espacio de procesos aleatorios $\mathcal{F}_n$ -adaptados con valores en Z , z_0 es una variable aleatoria Z -valuada $\mathcal{F}_0$ -medible.

Definición 7.5. Para $\Psi \in L(\mathbb{N}, L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z))$ se define $\Psi \cdot w(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por la fórmula

$$\Psi \cdot w(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(k) (w(k+1) - w(k)). \quad (7.8)$$

La siguiente proposición es análogo a una prueba que se realiza en la Proposición 4.5 página 91 del libro [13].

Proposición 7.6. Si $\Psi \in L(\mathbb{N}, L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z))$ entonces

CAPÍTULO 7. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

$$\mathbf{E}(\|\Psi \cdot w(n)\|^2) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \|\Psi(k)\xi_{k+1}\|^2\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}(\|\Psi(k)\|_{L_2^0}^2), \quad (7.9)$$

donde $\xi_{k+1} = w(k+1) - w(k)$ y $L_2^0 = L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z)$.

Consideremos el conjunto $\Delta = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \geq n\}$. Sea $\Phi = \{\Phi(m, n)\}_{(m, n) \in \Delta}$ el operador de evolución asociado a A , es decir, $\Phi(m, n) = A(m-1) \cdots A(n)$ y $\Phi(m, m) = I$.

La solución de (7.7) es dada, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$\begin{aligned} z(n) = & \Phi(n, 0)z_0 + \sum_{k=1}^n \Phi(n, k)B(k-1)u(k-1) \\ & + \sum_{k=1}^n \Phi(n, k)\Sigma(k-1)(w(k) - w(k-1)). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Antes de estudiar la controlabilidad de (7.7) veamos el siguiente lema:

Lema 7.7. Sea $y = \{y_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión en el espacio de Banach X y supongamos que

$$x_{n+1} = x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7.11)$$

entonces

$$x_n = x_m + \sum_{k=m}^{n-1} y_k. \quad (7.12)$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba se realizará por inducción.

Si $m = n - 1$, entonces $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ lo cual es cierto por (7.11), esto confirma (7.12) para $m = n - 1$.

Veamos el caso $m = r - 1$, para ello supongamos que es cierto para $m = r < n$, es decir,

$$x_n = x_r + \sum_{k=r}^{n-1} y_k, \quad (7.13)$$

entonces por (7.11)

$$x_r = x_{r-1} + y_{r-1},$$

luego se tiene por la ecuación (7.13) que

$$x_n = x_{r-1} + y_{r-1} + \sum_{k=r}^{n-1} y_k = x_{r-1} + \sum_{k=r-1}^{n-1} y_k.$$

□

Veamos que la solución de la ecuación (7.7) es la ecuación (7.10). En efecto:

DEMOSTRACIÓN. Sea $F(j) = \Phi(n, j)z(j)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 F(j+1) &= \Phi(n, j+1)z(j+1) = A(n-1) \cdots A(j+1)z(j+1) \\
 &= A(n-1) \cdots A(j+1)[A(j)z(j) + B(j)u(j) + \Sigma(j)(w(j+1) - w(j))] \\
 &= A(n-1) \cdots A(j)z(j) + A(n-1) \cdots A(j+1)B(j)u(j) \\
 &\quad + A(n-1) \cdots A(j+1)\Sigma(j)(w(j+1) - w(j)) \\
 &= \Phi(n, j)z(j) + \Phi(n, j+1)B(j)u(j) + \Phi(n, j+1)\Sigma(j)(w(j+1) - w(j)) \\
 &= F(j) + \Phi(n, j+1)G(j) + \Phi(n, j+1)H(j) \\
 &= F(j) + \Phi(n, j+1)[G(j) + H(j)],
 \end{aligned}$$

donde $G(j) = B(j)u(j)$ y $H(j) = \Sigma(j)(w(j+1) - w(j))$. Por la ecuación (7.12) se tiene

$$F(j) = F(m) + \sum_{k=m}^{j-1} \Phi(n, k+1)[G(k) + H(k)].$$

Claramente $F(n) = z(n)$, $F(0) = \Phi(n, 0)z_0$ y si $j = n$, $m = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
 F(n) &= z(n) = \Phi(n, 0)z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(n, k+1)[B(k)u(k) + \Sigma(k)(w(k+1) - w(k))] \\
 &= \Phi(n, 0)z_0 + \sum_{k=1}^n \Phi(n, k)[B(k-1)u(k-1) + \Sigma(k-1)(w(k) - w(k-1))]
 \end{aligned}$$

□

Definición 7.8. Ver Nazim Mahmudov [40]. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos por $L_2(\mathcal{F}_n, Z)$ el espacio de todas las variables aleatorias z $\mathcal{F}_n$ -medibles, tal que $\mathbf{E}(\|z\|_Z^2) < +\infty$. $L_2(\mathcal{F}_n, Z)$ dotado con la norma

$$\|z\|_2 = (\mathbf{E}(\|z\|_Z^2))^{1/2}, \quad (7.14)$$

es un espacio de Hilbert.

Dotaremos a $L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$, n_0 fijo, con el producto interno

$$\langle z, y \rangle = \langle z, y \rangle_{L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)} = \mathbf{E}\langle z, y \rangle_{Z, Z}, \text{ con } z, y \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z).$$

Para el sistema (7.7) tenemos los siguientes conceptos:

- a) La aplicación de controlabilidad asociada con el sistema determinístico. Para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo, se define $B^{n_0} : l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$

$$B^{n_0}u = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1). \quad (7.15)$$

CAPÍTULO 7. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

- b) La aplicación de controlabilidad asociada con el sistema estocástico, con $n_0 \in \mathbb{N}$, se define por $\Pi^{n_0} : L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$

$$\Pi^{n_0}(z) = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) E(z | \mathcal{F}_k). \quad (7.16)$$

- c) La aplicación Grammian (ver [30]) $L_{B^{n_0}} : Z \rightarrow Z$, $n_0 \in \mathbb{N}$

$$L_{B^{n_0}} = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k). \quad (7.17)$$

La siguiente proposición es semejante a la Proposición 2.1 de [30]:

Proposición 7.9. *El adjunto B^{n_0*} del operador B^{n_0} viene dado por*

$$B^{n_0*} : L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z) \rightarrow l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)$$

$$(B^{n_0*}z)(k-1) = \begin{cases} B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) E(z | \mathcal{F}_k) & k \leq n_0 \\ 0 & k > n_0. \end{cases} \quad (7.18)$$

DEMOSTRACIÓN. Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, recordemos que la sucesión de sub- σ álgebras $\{\mathcal{F}_n\}$ es creciente, es decir, $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$, además $\mathcal{F}_{n_0} = \mathcal{F}$.

Si $z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$ se tiene que z es una variable aleatoria $\mathcal{F}_{n_0}$ -medible, entonces z es una variable aleatoria $\mathcal{F}_k$ -medible para todo $k \leq n_0$. Por la propiedad **F*** de esperanza condicional en el Capítulo 2, se tiene que $E[z | \mathcal{F}_k] = z$ en consecuencia:

$$\begin{aligned} \langle B^{n_0}u, z \rangle &= \mathbf{E} \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) u(k-1), z \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} \mathbf{E} \langle \Phi(n_0, k) B(k-1) u(k-1), E(z | \mathcal{F}_k) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} \mathbf{E} \langle u(k-1), B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) E(z | \mathcal{F}_k) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} \mathbf{E} \langle u(k-1), B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) E(z | \mathcal{F}_k) \rangle + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \mathbf{E} \langle u(k-1), 0 \rangle \\ &= \langle u, (B^{n_0*}z) \rangle_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U), l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

donde $\langle u, (B^{n_0*}z) \rangle_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U), l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)}$ es el producto interno en el espacio $l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)$.

En consecuencia por (7.18)

$$\Pi^{n_0}z = B^{n_0}(B^{n_0*}z), \text{ para } z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z). \quad (7.20)$$

□

Definición 7.10. El sistema (7.7) es exactamente controlable si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z_0 \in L_2(\mathcal{F}_0, Z)$ y $z_2 \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$, existe $u \in l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)$ tal que $z(0) = z_0$ y $z(n_0) = z_2$.

Una solución asociada al control $u \in l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)$ de la forma

$$z(n) = \Phi(n, 0)z_0 + \sum_{k=1}^n \Phi(n, k)B(k-1)u(k-1) + \sum_{k=1}^n \Phi(n, k)\Sigma(k-1)(w(k) - w(k-1)),$$

la llamaremos estado alcanzable a partir de z_0 en el tiempo $n \in \mathbb{N}$. Debido a la dependencia con respecto (n, z_0, u) , denotaremos esta solución moderada por $z(n, z_0, u)$.

Denotaremos el conjunto de estados alcanzables a partir de z_0 en el tiempo $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo, por $\mathcal{R}(n_0, z_0)$, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(n_0, z_0) &:= \Phi(n_0, 0)z_0 + \text{Rang } B^{n_0} + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)\Sigma(k-1)(w(k) - w(k-1)) \\ &= \left\{ z(n_0, z_0, u) : u \in l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U) \right\}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Una definición equivalente a la definición 7.10 es la siguiente:

Definición 7.11. El sistema (7.7) se dice exactamente controlable para $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo, si todo punto $z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$ es alcanzado desde el origen $z_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$ en el tiempo n_0 , es decir

$$\mathcal{R}(n_0, z_0) = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z). \quad (7.22)$$

Teorema 7.12. El sistema estocástico (7.7) es exactamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ si, y solo si, una de las siguientes ocurre:

a) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\mathbf{E}(\langle \Pi^{n_0}(z), z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2), \text{ para todo } z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z).$$

b) $\text{Rang } (\Pi^{n_0}) = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$,

DEMOSTRACIÓN. Veamos que (a) implica (b). En efecto, si existe $\gamma > 0$ tal que $\mathbf{E}(\langle \Pi^{n_0}z, z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2)$, para todo $z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$, entonces Π^{n_0} es acotado e inyectivo, por lo tanto invertible. De aquí que $\text{Rang } (\Pi^{n_0}) = \text{Dom } ((\Pi^{n_0})^{-1}) = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$.

Si $\text{Rang } (\Pi^{n_0}) = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$ y $\Pi^{n_0} = B^{n_0}(B^{n_0})^*$, entonces $\text{Rang } (\Pi^{n_0}) \subset \text{Rang } B^{n_0}$, luego $\text{Rang } B^{n_0} = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$. Por la ecuación (7.21) y la Definición 7.11, se obtiene la controlabilidad exacta del sistema (7.7).

La equivalencia de controlabilidad exacta del sistema (7.7) y (a), ya fue realizada en el Teorema 4.26 del Capítulo 5.

□

Ahora, formularemos un resultado sobre controlabilidad exacta del sistema lineal (7.7).

Lema 7.13. *El sistema (7.7) es exactamente controlable para $n_0 \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, el operador Π^{n_0} es invertible. Más aún, el control $u \in l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)$ que conduce el estado inicial z_0 al estado final z_1 en el tiempo $n_0 \in \mathbb{N}$ es dado por la fórmula:*

$$u(k-1) = (B^{n_0*}(\Pi^{n_0})^{-1}z)(k-1), \text{ para } k \leq n_0 \quad (7.23)$$

$$\text{donde } z = z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0 - \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)\Sigma(k-1)(w(k) - w(k-1))$$

DEMOSTRACIÓN. Suponga que el sistema (7.7) es exactamente controlable, $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo. Entonces, del Teorema 7.12 parte b) existe $\gamma > 0$ tal que

$$\mathbf{E}(\langle \Pi^{n_0}z, z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2) \quad (7.24)$$

para todo $z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$. Esto implica que Π^{n_0} es uno-uno. Probaremos que Π^{n_0} es sobreyectivo, es decir

$$\text{Rang}(\Pi^{n_0}) = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z).$$

Para el propósito de contradicción, asumiremos que $\text{Rang}(\Pi^{n_0})$ está estrictamente contenido en $L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (7.24) obtenemos

$$\mathbf{E}(\|\Pi^{n_0}z\|) \geq \gamma^2 \mathbf{E}(\|z\|), \quad z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z),$$

esto implica que $\text{Rang}(\Pi^{n_0})$ es cerrado. Entonces, por el Teorema de Hahn Banach existe $z_0 \neq 0$ tal que

$$\mathbf{E}(\langle \Pi^{n_0}z, z_0 \rangle) = 0 \text{ para todo } z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z),$$

en particular, poniendo $z = z_0$ obtenemos de (7.24) que

$$0 = \mathbf{E}(\langle \Pi^{n_0}z_0, z_0 \rangle) \geq \gamma^2 \mathbf{E}(\|z_0\|^2).$$

Entonces $z_0 = 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, Π^{n_0} es sobreyectivo y en consecuencia es una biyección y por el Teorema de la aplicación abierta $(\Pi^{n_0})^{-1}$ es un operador continuo y por lo tanto lineal y acotado.

Ahora, si Π^{n_0} es invertible, entonces $\text{Rang}(\Pi^{n_0}) = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$, y por el Teorema 7.12 el sistema (7.7) es exactamente controlable.

También, para $z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$, definimos el control $u \in l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)$ como sigue

$$u(k-1) = (B^{n_0*}(\Pi^{n_0})^{-1}z)(k-1), \text{ para } k \leq n_0. \quad (7.25)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 B^{n_0}u &= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u_z(k-1) = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)(B^{n_0*}(\Pi^{n_0})^{-1}z)(k-1) \\
 &= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)B^*(k-1)\Phi^*(n_0, k)E((\Pi^{n_0})^{-1}z)|\mathcal{F}_k) = \Pi^{n_0}(\Pi^{n_0})^{-1}z = z
 \end{aligned}$$

Entonces $B^{n_0}u = z$, es decir que $\text{Rang}(B^{n_0}) = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$, por lo tanto la ecuación (7.7) es exactamente controlable.

Finalmente si tomamos $z = z_1 - \Phi(n, 0)z_0 - \sum_{k=1}^n \Phi(n, k)\Sigma(k-1)(w(k) - w(k-1))$, y lo sustituimos en la ecuación (7.25), obtenemos la ecuación (7.23). $\square$

2. Controlabilidad del Sistema Estocástico no lineal

En esta sección estudiaremos la controlabilidad exacta de la ecuación en diferencias no lineal (7.2) bajo las condiciones (7.3) con ϱ suficientemente pequeño asumiendo que la parte lineal de la ecuación (7.2) es exactamente controlable para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.

Para $z_0 = z(0)$ la ecuación (7.2) tiene una única solución dada por

$$\begin{aligned}
 z(n) &= \Phi(n, 0)z_0 + \sum_{k=1}^n \Phi(n, k) \left[B(k-1)u(k-1) + f(z(k-1), u(k-1)) \right] \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \Phi(n, k)\sigma(z(k-1), u(k-1))(w(k) - w(k-1)).
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Definición 7.14. El sistema (7.2) se dice exactamente controlable si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z_0 \in L_2(\mathcal{F}_0, Z)$, $z_1 \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$ existe un control $u \in l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)$ tal que $z(0) = z_0$ y $z(n_0) = z_1$.

Nosotros consideramos el siguiente operador no lineal $B_{f\sigma}^{n_0}u : l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$ definido por

$$\begin{aligned}
 B_{f\sigma}^{n_0}u &= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z(k-1), u(k-1)) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)\sigma(z(k-1), u(k-1))(w(k) - w(k-1)).
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

Entonces, la siguiente proposición es una caracterización de la controlabilidad exacta del sistema no lineal (7.2).

Proposición 7.15. El sistema (7.2) es exactamente controlable para $n_0 \in \mathbb{N}$ si, y sólo si,

$$\text{Rang}(B_{f\sigma}^{n_0}) = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z).$$

CAPÍTULO 7. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Lema 7.16. Sean u_1 y $u_2 \in l_2^{\mathcal{F}}(N, U)$ y z_1, z_2 las correspondientes soluciones de la ecuación (7.2). Entonces, ocurren los siguientes estimados:

$$\|z_1(j) - z_2(j)\| \leq C\|u_1 - u_2\|, \quad (7.28)$$

$j \leq n_0$, donde

$$C = 2M [\|B\|^2 n_0 + 4n_0 \varrho + 4\varrho]^{1/2} e^{8M^2 \varrho(n_0+1)},$$

$$M = \sup_{1 \leq j, k \leq n_0} \|\Phi(j, k)\| \text{ y } \|B\| = \sup_{1 \leq k \leq n_0} \|B(k-1)\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean z_1, z_2 soluciones de (7.2), con la misma condición inicial, correspondientes a los controles u_1, u_2 respectivamente. Sea $\xi(k) = w(k) - w(k-1)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|z_1(j) - z_2(j)\|_Z^2 &= \mathbf{E}\left\|\sum_{k=1}^j \Phi(j, k)B(k-1)\left[u_1(k-1) - u_2(k-1)\right] \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^j \Phi(j, k)\left[f(z_1(k-1), u_1(k-1)) - f(z_2(k-1), u_2(k-1))\right] \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^j \Phi(j, k)\left[\sigma(z_1(k-1), u_1(k-1)) - \sigma(z_2(k-1), u_2(k-1))\right]\xi(k)\right\|_Z^2, \\ &\leq \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^j \left\|\Phi(j, k)B(k-1)[u_1(k-1) - u_2(k-1)]\right\|_Z \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^j \left\|\Phi(j, k)[f(z_1(k-1), u_1(k-1)) - f(z_2(k-1), u_2(k-1))]\right\|_Z \\ &\quad \left. + \left\|\sum_{k=1}^j \Phi(j, k)[\sigma(z_1(k-1), u_1(k-1)) - \sigma(z_2(k-1), u_2(k-1))]\xi(k)\right\|_Z\right)^2, \end{aligned}$$

por la desigualdad $(a+b)^2 \leq 4(a^2 + b^2)$ obtenemos

$$\begin{aligned} &\leq 4\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^j \left\|\Phi(j, k)B(k-1)[u_1(k-1) - u_2(k-1)]\right\|_Z\right)^2 \\ &\quad + 16\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^j \left\|\Phi(j, k)[f(z_1(k-1), u_1(k-1)) - f(z_2(k-1), u_2(k-1))]\right\|_Z\right)^2 \\ &\quad + 16\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^j \left\|\Phi(j, k)[\sigma(z_1(k-1), u_1(k-1)) - \sigma(z_2(k-1), u_2(k-1))]\xi(k)\right\|_Z\right)^2, \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} &\leq 4j\mathbf{E} \sum_{k=1}^j \left\| \Phi(j, k) B(k-1) [u_1(k-1) - u_2(k-1)] \right\|_Z^2 \\ &+ 16j\mathbf{E} \sum_{k=1}^j \left\| \Phi(j, k) [f(z_1(k-1), u_1(k-1)) - f(z_2(k-1), u_2(k-1))] \right\|_Z^2 \\ &+ 16M^2\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^j \left\| [\sigma(z_1(k-1), u_1(k-1)) - \sigma(z_2(k-1), u_2(k-1))] \xi(k) \right\|_Z \right)^2, \end{aligned}$$

por la Proposición 7.6 tenemos

$$\begin{aligned} &\leq 4j\mathbf{E} \sum_{k=1}^j \left\| \Phi(j, k) \right\|^2 \left\| B(k-1) \right\|^2 \left\| [u_1(k-1) - u_2(k-1)] \right\|^2 \\ &+ 16j\mathbf{E} \sum_{k=1}^j \left\| \Phi(j, k) \right\|^2 \left\| f(z_1(k-1), u_1(k-1)) - f(z_2(k-1), u_2(k-1)) \right\|^2 \\ &+ 16M^2 \sum_{k=1}^j \mathbf{E} \left\| \sigma(z_1(k-1), u_1(k-1)) - \sigma(z_2(k-1), u_2(k-1)) \right\|_{L_2^0}^2, \end{aligned}$$

por (7.3) tenemos

$$\begin{aligned} &\leq 4M^2 \|B\|^2 j \sum_{k=1}^j \mathbf{E} \left\| u_1(k-1) - u_2(k-1) \right\|_U^2 \\ &+ 16M^2 j L \mathbf{E} \sum_{k=1}^j \left\| u_1(k-1) - u_2(k-1) \right\|_U^2 + 16M^2 j L \mathbf{E} \sum_{k=1}^j \left\| z_1(k-1) - z_2(k-1) \right\|_Z^2 \\ &+ 16M^2 \sum_{k=1}^j \mathbf{E} \left\| \sigma(z_1(k-1), u_1(k-1)) - \sigma(z_2(k-1), u_2(k-1)) \right\|_{L_2^0}^2, \end{aligned}$$

aplicando nuevamente (7.3) tenemos

$$\begin{aligned} &\leq 4M^2 \|B\|^2 j \|u_1 - u_2\|_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)}^2 \\ &+ 16M^2 j L \|u_1 - u_2\|_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)}^2 + 16M^2 j L \mathbf{E} \sum_{k=1}^j \left\| z_1(k-1) - z_2(k-1) \right\|_Z^2 \\ &+ 16M^2 \varrho \left\{ \sum_{k=1}^j \mathbf{E} \left\| u_1(k-1) - u_2(k-1) \right\|_U^2 + \mathbf{E} \left\| z_1(k-1) - z_2(k-1) \right\|_Z^2 \right\} \end{aligned}$$

CAPÍTULO 7. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

$$\begin{aligned}
&\leq 4M^2 \|B\|^2 j \|u_1 - u_2\|_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)}^2 + 16M^2 j L \|u_1 - u_2\|_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)}^2 \\
&+ 16M^2 \varrho \|u_1 - u_2\|_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)}^2 + 16M^2 \varrho(j+1) \mathbf{E} \sum_{k=1}^j \left\| z_1(k-1) - z_2(k-1) \right\|_Z^2 \\
&= 4M^2 [\|B\|^2 j + 4jL + 4\varrho] \|u_1 - u_2\|_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)}^2 + 16M^2 \varrho(j+1) \sum_{k=1}^j \mathbf{E} \left\| z_1(k-1) - z_2(k-1) \right\|_Z^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, ya que $j \leq n_0$ y por la desigualdad de Gronwall discreta, ver apéndice .44, ó [28], tenemos:

$$\mathbf{E} \|z_1(j) - z_2(j)\|_Z^2 \leq 4M^2 [\|B\|^2 n_0 + 4n_0 \varrho + 4\varrho] \|u_1 - u_2\|_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)}^2 e^{16M^2 \varrho(n_0+1)}.$$

es decir, por (7.14)

$$\mathbf{E} \|z_1(j) - z_2(j)\|_Z^2 \leq 2M [\|B\|^2 n_0 + 4n_0 \varrho + 4\varrho]^{1/2} \|u_1 - u_2\|_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)} e^{8M^2 \varrho(n_0+1)}. \quad (7.29)$$

□

Ahora formularemos el resultado principal del capítulo.

Teorema 7.17. *Si el siguiente estimado ocurre*

$$L_K = (4M^2 \varrho(n_0 + 1)(C + 1))^{1/2} \|B^{n_0*}\| \|(\Pi^{n_0})^{-1}\| < 1, \quad (7.30)$$

entonces, el sistema no lineal (7.2) es exactamente controlable en $[0, n_0]$.

DEMOSTRACIÓN. Nosotros queremos probar

$$B_{f\sigma}^{n_0}(l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U) = \text{Rang}(B_{f\sigma}^{n_0}) = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z),$$

pero, por la controlabilidad exacta del sistema lineal (7.7) sabemos, debido al Lema 7.13, el operador $S = B^{n_0*}(\Pi^{n_0})^{-1}$ es una inversa por la derecha de B^{n_0} . Entonces es suficiente probar que el operador $\tilde{B}_{f\sigma}^{n_0} = B_{f\sigma}^{n_0} \circ S$ es sobreyectivo. De la ecuación (7.27) obtenemos la siguiente expresión para este operador

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{f\sigma}^{n_0} \zeta &= \zeta + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), S(\zeta)(k-1)) \\
&+ \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) \sigma(z(k-1), S(\zeta)(k-1))(\xi(k)).
\end{aligned} \quad (7.31)$$

Ahora, si definimos el operador $K : L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$ por

$$\begin{aligned}
K\zeta &= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), S(\zeta)(k-1)) \\
&+ \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) \sigma(z(k-1), S(\zeta)(k-1))(\xi(k)),
\end{aligned} \quad (7.32)$$

donde $z = z_\zeta$ es la solución de (7.2) correspondiente al control $u = S(\zeta)$.

De aquí que, (7.31) se puede escribir como sigue

$$\tilde{B}_{f\sigma}^{n_0} = I + K. \quad (7.33)$$

La función K es globalmente Lipschitz. En efecto, sean z_1, z_2 soluciones de (7.2) correspondientes a los controles $S\zeta_1, S\zeta_2$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \|K\zeta_1 - K\zeta_2\|_Z^2 = \\ & \mathbf{E} \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) [f(z_1(k-1), S(\zeta_1)(k-1)) - f(z_2(k-1), S(\zeta_2)(k-1))] \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) [\sigma(z_1(k-1), S(\zeta_1)(k-1)) - \sigma(z_2(k-1), S(\zeta_2)(k-1))\xi(k)] \right\|_Z^2 \end{aligned}$$

por la desigualdad $(a+b)^2 \leq 4(a^2 + b^2)$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \leq 4\mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^{n_0} \|\Phi(n_0, k)\| \|f(z_1(k-1), S(\zeta_1)(k-1)) - f(z_2(k-1), S(\zeta_2)(k-1))\| \right]^2 \\ & + 4\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{n_0} \|\Phi(n_0, k)\| \|\sigma(z_1(k-1), S(\zeta_1)(k-1)) - \sigma(z_2(k-1), S(\zeta_2)(k-1))\xi(k)\|_Z \right)^2 \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Proposición 7.6, tenemos

$$\begin{aligned} & \leq 4n_0 M^2 \mathbf{E} \sum_{k=1}^{n_0} \left\| f(z_1(k-1), S(\zeta_1)(k-1)) - f(z_2(k-1), S(\zeta_2)(k-1)) \right\|^2 \\ & + 4M^2 \left(\mathbf{E} \sum_{k=1}^{n_0} \left\| \{\sigma(z_1(k-1), S(\zeta_1)(k-1)) - \sigma(z_2(k-1), S(\zeta_2)(k-1))\}\xi(k) \right\|_Z \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4M^2 n_0 \mathbf{E} \sum_{k=1}^{n_0} \left\| f(z_1(k-1), S(\zeta_1)(k-1)) - f(z_2(k-1), S(\zeta_2)(k-1)) \right\|^2 \\
&+ 4M^2 \sum_{k=1}^{n_0} \mathbf{E} \left\| \sigma(z_1(k-1), S(\zeta_1)(k-1)) - \sigma(z_2(k-1), S(\zeta_2)(k-1)) \right\|_{L_2^0}^2 \\
&\leq 4M^2 n_0 \varrho \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} \mathbf{E} \left\| z_1(k-1) - z_2(k-1) \right\|_Z^2 + \mathbf{E} \left\| S\zeta_1(k-1) - S\zeta_2(k-1) \right\|_U^2 \right\} \\
&+ 4M^2 \varrho \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} \mathbf{E} \left\| z_1(k-1) - z_2(k-1) \right\|_Z^2 + \mathbf{E} \left\| S\zeta_1(k-1) - S\zeta_2(k-1) \right\|_U^2 \right\} \\
&\leq 4M^2 \varrho (n_0 + 1) \sum_{k=1}^{n_0} \mathbf{E} \left\| z_1(k-1) - z_2(k-1) \right\|_Z^2 \\
&+ 4M^2 \varrho (n_0 + 1) \sum_{k=1}^{n_0} \mathbf{E} \left\| S\zeta_1(k-1) - S\zeta_2(k-1) \right\|_U^2,
\end{aligned}$$

por el Lema 7.16 obtenemos

$$\begin{aligned}
&\leq 4M^2 LC(n_0 + 1) \sum_{k=1}^{n_0} \mathbf{E} \left\| S\zeta_1(k-1) - S\zeta_2(k-1) \right\|_U^2 \\
&+ 4M^2 \varrho (n_0 + 1) \sum_{k=1}^{n_0} \mathbf{E} \left\| S\zeta_1(k-1) - S\zeta_2(k-1) \right\|_U^2 \\
&\leq 4M^2 \varrho (n_0 + 1) (C + 1) \left\| S(\zeta_1 - \zeta_2) \right\|_{l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)}^2 \\
&\leq 4M^2 \varrho (n_0 + 1) (C + 1) \left\| B^{n_0*} \right\|^2 \left\| (\Pi^{n_0})^{-1} \right\|^2 \left\| \zeta_1 - \zeta_2 \right\|_{L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)}^2.
\end{aligned}$$

De aquí que,

$$\|K\zeta_1 - K\zeta_2\| \leq (4M^2 \varrho (n_0 + 1) (C + 1))^{1/2} \|B^{n_0*}\| \|(\Pi^{n_0})^{-1}\| \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)}.$$

por lo tanto, K es Lipschitz con constante de Lipschitz

$$L_K = (4M^2 \varrho (n_0 + 1) (C + 1))^{1/2} \|B^{n_0*}\| \|(\Pi^{n_0})^{-1}\|,$$

y la hipótesis (7.30) implica que $L_K < 1$. Por el Teorema 6.2 obtenemos que $\tilde{B}_{f\sigma}^{n_0} = I + K$ es un homeomorfismo y en consecuencia el operador $B_{f\sigma}^{n_0}$ es sobreyectivo; es decir,

$$B_{f\sigma}^{n_0}(l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U)) = \text{Rang}(B_{f\sigma}^{n_0}) = L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z).$$

□

Corolario 7.18. *Bajo la hipótesis del Teorema (7.17) el control que conduce el estado inicial z_0 al estado final z_1 es dado por*

$$u = B^{n_0*}(\Pi^{n_0})^{-1}(I + K)^{-1}(z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0).$$

Corolario 7.19. *El operador $\Gamma : L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$ definido por*

$$\Gamma = S \circ (I + K)^{-1}$$

es una inversa por la derecha del operador lineal $B_{f\sigma}^{n_0}$, es decir,

$$B_{f\sigma}^{n_0} \circ \Gamma = I.$$

3. Aplicación

Como se indica en [30], la forma de obtener ecuaciones en diferencias involucra la discretización sobre el flujo de la ecuación de evolución en un espacio de Banach, como se indica en [11], [41] y [20].

3.1. Ecuación del Calor no Lineal. Como aplicación del resultado principal, vamos a analizar la versión discreta sobre el flujo de la ecuación del calor no lineal en una dimensión. Consideremos la siguiente ecuación del calor lineal estocástica

$$\begin{cases} y_t = y_{xx} + u(t, x) + dw(t), \\ y_x(t, 0) = y_x(t, 1) = 0, \\ y(0, x) = y_0(x), \end{cases} \quad (7.34)$$

El sistema (7.34) puede ser escrito como una ecuación diferencial abstracta en el espacio $Z = L_2(0, 1)$:

$$\begin{cases} z' = Az + B(t)u(t) + \sigma(t)dw(t), \quad z \in Z, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (7.35)$$

donde $\mathcal{E} = U = Z$, $B = I$, el control $u \in L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], U)$, $W = \{w(t)\}$ es el proceso $\mathcal{E}$ -valuado, $\sigma : Q^{1/2}\mathcal{E} \rightarrow Z$ y $\sigma = I$. Observe que $\sigma = I$ es un operador Hilbert-Schmidt si el operador de covarianza Q tiene $\text{tr } Q < +\infty$, recordemos la ecuación (2.32) donde la norma de Hilbert-Schmidt es definida por $\|\sigma\|_{L_2^2}^2 = \text{Tr}(\sigma Q \sigma^*)$.

El operador A es dado por $A\phi = \phi_{xx}$. El dominio de A es dado por

$$D(A) = \left\{ h \in L_2(0, 1) : h, \frac{dh}{dx}, \text{ son abs continuas, } \frac{d^2h}{dx^2} \in L_2(0, 1) \text{ y } \frac{dh}{dx}(0) = \frac{dh}{dx}(1) = 0 \right\}.$$

El operador A tiene las siguientes propiedades:

- el espectro de A consiste de los autovalores $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $n > 0$. Los autovectores correspondientes son $e_n = e_n(z) = \sqrt{2} \cos(n\pi z)$.

CAPÍTULO 7. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

b) para todo $z \in D(A)$ tenemos la siguiente descomposición:

$$Az = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle z, e_n \rangle e_n.$$

c) A es el generador infinitesimal del C_0 - semigroup $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dado por

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, e_n \rangle e_n, \quad z \in Z, \quad t \geq 0. \quad (7.36)$$

Las definiciones y resultados sobre dicotomía dadas abajo, podemos encontrarlas en [20].

Supongamos que los operadores de evolución $T(t, s) \in L(Z)$, $t < s$ para $\dot{z} + A(t)z = 0$ están definidas para $[0, \tau]$.

Definición 7.20. La ecuación $\dot{z} + A(t)z = 0$ tiene una dicotomía exponencial sobre $[0, \tau]$ con exponente $\beta > 0$ y cota M (con respecto al espacio Z) si existen proyecciones $P(t)$, $t \in [0, \tau]$, tal que

- (i) $T(t, s)P(s) = P(t)T(t, s)$, $0 \leq s < t < \tau$,
- (ii) La restricción $T(t, s)$ sobre el rango de $(P(s))$, $0 \leq s < t \leq \tau$, tal que

$$T(t, s) : \text{Rang}(P(s)) \rightarrow \text{Rang}(P(t))$$

es un isomorfismo con inversa

$$T(s, t) : \text{Rang}(P(t)) \rightarrow \text{Rang}(P(s)),$$

- (iii) $\|T(t, s)(1 - P(s))\| \leq Me^{-\beta t}$ para $0 \leq s < t \leq \tau$,
- (iv) $\|T(t, s)P(s)\| \leq Me^{-\beta t}$ para $0 \leq s < t \leq \tau$.

Ahora, presentamos la definición de dicotomía discreta:

Definición 7.21. Si Z es un espacio de Banach y $\{T_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ es una sucesión en $L(Z)$, decimos que $\{T(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ tiene una dicotomía discreta (con constantes M y θ) si existen constantes M , $\theta < 1$ y una sucesión de proyecciones $\{P(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ en $L(Z)$ tal que

- (i) $T(n)P(n) = P(n+1)T(n)$,
- (ii) $T(n)$ restringido al rango de $P(n)$ tal que

$$T(n) : \text{Rang}(P(n)) \rightarrow \text{Rang}(P(n+1))$$

es un isomorfismo,

- (iii) Si $\Phi(n, m) = T(n-1)T(n-2) \cdots T(m+1)T(m)$ para $n > m$, $\Phi(n, m) = 1$, entonces

$$\|\Phi(n, m)(1 - P(m))z\| \leq M\theta^{n-m}\|z\|,$$

para $n \geq m$,

- (iv) $\|\Phi(n, m)P(m)z\| \leq M\theta^{m-n}\|z\|$ para $n < m$, donde $\Phi(n, m)P(m)z = y \in \text{Rang}(P(n))$ si, y solo si $P(m)z = \Phi(n, m)y$,

(iv) está bien definido por (ii).

Teorema 7.22. (Ver Henry [20].) $\{T(t, s), t \geq s\}$ es una familia de operadores de evolución con una dicotomía exponencial (exponente β y cota M), $l > 0$ si, y solo si, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, la familia de operadores de evolución $\{T(t_0 + (n+1)l, t_0 + nl)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, tiene una dicotomía discreta con constantes M y $\theta = e^{-\beta l}$.

el Teorema 7.22 nos permite obtener ecuaciones en diferencias mediante la discretización de la familia de operadores de evolución $\{T(t, s), t > s\}$.

Teorema 7.23. (Ver Henry [20].) Asumiendo que $\{T(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ es una sucesión en $L(Z)$. Las siguientes son equivalentes:

- (i) $\{T(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ tiene una dicotomía discreta.
- (ii) Para cada sucesión acotada $\{f(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ existe una única solución acotada $\{z(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ de $z(n+1) = T(n)z(n) + f(n)$, $-\infty < n < +\infty$.

El semigrupo dado por (7.36) junto a la familia de proyecciones ortogonales dada por $P_n z = \langle z, e_n \rangle e_n$, donde $e_n = e_n(z) = \sqrt{2} \cos(n\pi z)$, cumple con las condiciones dadas por la Definición 7.20. De esta forma el semigrupo dado por (7.36) tiene una dicotomía exponencial y de aquí que tiene una dicotomía discreta dada por

$$T(k)z = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n k} P_n z, \quad z \in Z, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad (7.37)$$

donde $P_n z = P(n)z = \langle z, e_n \rangle e_n$.

La discretización de (7.35) viene dado entonces por

$$\begin{cases} z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)(n)u(n) + (w(n+1) - w(n)), & z \in Z, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (7.38)$$

En este caso $T^*(t) = T(t)$, $B = I$ y $\sigma = I$. Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, la σ -álgebra $\{\mathcal{F}_n\}$ a considerar es $\mathcal{F}_n = \sigma\{w(s) : 0 \leq s \leq n_0\}$, para $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo.

Vamos a probar que (7.38) es exactamente controlable.

Tomaremos en cuenta que el operador $\Phi(m, n)$ asociado a T es dado por

$$\Phi(m, n) = T(m-1)T(m-2) \dots T(n), \quad n < m \text{ y } \Phi(m, m) = I,$$

y puede ser escrito en la forma

$$\Phi(m, n) = T(\Theta(m, n)) \text{ con } \Theta(m, n) = \frac{m^2 - n^2 + n - m}{2} \in \mathbb{N}, \quad m > n, \text{ en efecto:}.$$

CAPÍTULO 7. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

$$\begin{aligned}
 \Phi(m, n) &= T(m-1)T(m-2)\dots T(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k(m-1)} P_k \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k(m-2)} P_k \dots \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k n} P_k \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k\{(m-1)+(m-2)+\dots+(m-(m-n))\}} P_k^{(m-n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k\{(m-n)m-(1+2+\dots+(m-n))\}} P_k^{(m-n)} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k\{(m-1)+(m-2)+\dots+(m-(m-n))\}} P_k^{(m-n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k\{(m-n)m-(1+2+\dots+(m-n))\}} P_k^{(m-n)} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k\{m^2-nm-(\frac{(m-n)(m-n+1)}{2})\}} P_k^{(m-n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k\{\frac{m^2-n^2+n-m}{2}\}} P_k = T(\Theta(m, n)),
 \end{aligned}$$

donde $\Theta(m, n) = \frac{m^2-n^2+n-m}{2} \in \mathbb{N}$, $m > n$.

Por otro lado, para $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo, tenemos que $B^{n_0} : l_2^{\mathcal{F}}(\mathbb{N}, U) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$, es dado por

$$B^{n_0}u = \sum_{k=1}^{n_0} T(\Theta(n_0, k))u(k-1).$$

Recurriendo al Corolario 4.33, existe $\varphi \in L_2^{\mathcal{F}}([0, k], L_2(Q^{1/2}\mathcal{E}, Z))$, $k \leq n_0$, entonces, para $z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z)$, $z = \sum_{j=1}^{+\infty} P_j z$, $\Phi(n_0, k) = \Phi^*(n_0, k)$, el operador

$$\Pi^{n_0} : L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z) \rightarrow L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z),$$

puede escribirse así:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{n_0}(z) &= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) \Phi^*(n_0, k) E(z | \mathcal{F}_k) = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)^2 E(z | \mathcal{F}_k) \\
 &= \sum_{k=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{+\infty} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} P_j \left[\mathbf{E}(z) + \int_0^k \varphi(s) d\hat{w}(s) \right] = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n_0} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} P_j \left[\mathbf{E}(z) + \int_0^k \varphi(s) d\hat{w}(s) \right] \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\sum_{k=1}^{n_0} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} P_j \mathbf{E}(z) + \int_0^k \sum_{k=1}^{n_0} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} P_j \varphi(s) d\hat{w}(s) \right],
 \end{aligned}$$

de esta forma, $\Pi^{n_0}(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left[L_{B_j^{n_0}} \mathbf{E}(z) + \int_0^k L_{B_j^{n_0}} \varphi(s) d\hat{w}(s) \right]$, con $L_{B_j^{n_0}} = \sum_{k=1}^{n_0} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} P_j$.

Vamos a probar que

$$\mathbf{E}(\langle \Pi^{n_0} z, z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2), \text{ para } z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, Z). \quad (7.39)$$

En efecto;

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\langle \Pi^{n_0} z, z \rangle) &= \mathbf{E} \left(\left\langle \sum_{j=1}^{+\infty} \left[L_{B_j^{n_0}} \mathbf{E}(z) + \int_0^k L_{B_j^{n_0}} \varphi(s) d\hat{w}(s) \right], z \right\rangle \right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{E} \left(\left\langle L_{B_j^{n_0}} \mathbf{E}(z) + \int_0^k L_{B_j^{n_0}} \varphi(s) d\hat{w}(s), z \right\rangle \right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{E}(\langle L_{B_j^{n_0}} \mathbf{E}(z), z \rangle) + \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{E}(\langle \int_0^k L_{B_j^{n_0}} \varphi(s) d\hat{w}(s), z \rangle) \\
&\geq \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{E}(\langle L_{B_j^{n_0}} \mathbf{E}(z), z \rangle) = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle L_{B_j^{n_0}} \mathbf{E}(z), \mathbf{E}(z) \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n_0} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} P_j \mathbf{E}(z), \sum_{i=1}^{+\infty} P_i \mathbf{E}(z) \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n_0} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} \langle P_j \mathbf{E}(z), \sum_{i=1}^{+\infty} P_i \mathbf{E}(z) \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n_0} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} \langle P_j \mathbf{E}(z), P_j \mathbf{E}(z) \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n_0} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} P_j \mathbf{E}(z), P_j \mathbf{E}(z) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n_0} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} \langle P_j \mathbf{E}(z), P_j \mathbf{E}(z) \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} \|P_j \mathbf{E}(z)\|^2.
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Solo falta ver que

$$e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} \|P_j \mathbf{E}(z)\|^2 \geq \gamma \|P_j \mathbf{E}(z)\|^2.$$

Pero esto, es equivalente a probar que

$$\left[e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} - \gamma \right] \|P_j \mathbf{E}(z)\|^2 \geq 0 \tag{7.41}$$

Ya que $\Theta(n_0, n_0) = 0$ y $e^{2\lambda_j \Theta(n_0, n_0)} = 1$, se obtiene, para $0 < \gamma < 1$, la desigualdad (7.41).

De aquí se obtiene, para $z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, \mathcal{I})$

$$\mathbf{E}(\langle \Pi^{n_0} z, z \rangle) = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{2\lambda_j \Theta(n_0, k)} \|P_j \mathbf{E}(z)\|^2 \geq \gamma \sum_{j=1}^{+\infty} \|P_j \mathbf{E}(z)\|^2 = \gamma \|\mathbf{E}(z)\|^2 = \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2).$$

Aplicando el Teorema 7.12 parte (b) obtenemos que (7.38) es exactamente controlable.

Finalmente, si consideramos una perturbación de la ecuación (7.38), es decir

$$\begin{cases} z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n) + f(z(n), u(n)) + (w(n+1) - w(n)), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{7.42}$$

CAPÍTULO 7. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

donde

$$\|f(z_2, u_2) - f(z_1, u_1)\| \leq \varrho\{\|z_2 - z_1\|^2 + \|u_2 - u_1\|^2\}, \quad (7.43)$$

siendo ϱ suficientemente pequeño, inmediatamente se tiene que (7.42) es exactamente controlable.

3.2. Portafolio de Inversiones. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo. El proceso $W = \{w(t) = (w^{(1)}, \dots, w^{(n)})^T\}$ es un movimiento Browniano, donde cada $w^{(i)} \in \mathbb{R}$. $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Denotemos por $L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], \mathbb{R}^n)$ el conjunto de los procesos aleatorios $\mathcal{F}_t$ -adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Consideremos un mercado en el cual $n+1$ activos (o valores) se negocian continuamente. Asumiremos que todo transcurre en el tiempo $[0, \tau]$. Uno de los activos, llamado bono (o garantía) tiene un precio $P_0(t)$ el cual evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt, \\ P_0(0) = p_0, \end{cases} \quad (7.44)$$

$0 \leq t \leq \tau$, donde $r(t) > 0$ es la tasa de interés del bono.

Los restantes n activos, llamados acciones, $i = 1, 2, \dots, n$ son “arriesgados”. El precio de cada acción satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dP_i(t) = P_i(t) \left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)dw_j(t) \right] \\ P_i(0) = p_i > 0, \end{cases} \quad (7.45)$$

$t \in [0, \tau]$, donde $b_i(t) > 0$ es la tasa de apreciación o tasa de retorno del interés ganado por la inversión y

$$\sigma_i(t) \equiv (\sigma_{i1}(t), \dots, \sigma_{in}(t)) : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es la volatilidad del mercado o la dispersión de los valores. Defina la matriz de covarianza

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1(t) \\ \vdots \\ \sigma_n(t) \end{pmatrix} \equiv (\sigma_{ij}(t))_{n \times n}.$$

El proceso tasa de interés $\{r(t), \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq \tau\}$, la tasa de apreciación o tasa de retorno $\{b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))^T, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq \tau\}$ y la matriz de dispersión $\sigma(t)$ se suponen medibles, adaptadas y uniformemente acotadas en $(t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega$. Denotando por $a(t) = \sigma(t)\sigma^T(t)$ y asumiendo que, para algún $\epsilon > 0$,

$$z^T a(t) z \geq \epsilon \|z\|^2; \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq \tau.$$

Consideremos un inversor cuyo riqueza total al tiempo t se denota por $z(t)$. Suponga que el o ella decide tener $N_i(t)$ acciones del i -ésimo activo ($i = 1, \dots, n$) al tiempo t .

Entonces, la riqueza del inversor al tiempo $0 \leq t \leq \tau$, es dada por

$$z(t) = \sum_{i=0}^n N_i(t)P_i(t), \quad t \geq 0. \quad (7.46)$$

Suponiendo que la negociación de acciones se hace en forma continua y los costos de transacciones y consumo no son considerados. Entonces

$$\begin{cases} dz(t) = \sum_{i=0}^n N_i(t)dP_i(t) \\ = \{r(t)N_0(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^n b_i(t)N_i(t)P_i(t)\}dt + \sum_{i=1}^n N_i(t)P_i(t) \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)dw_j(t) \\ = \{r(t)z(t) + \sum_{i=1}^n [b_i(t) - r(t)]u_i(t)\}dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i(t)\sigma_{ij}(t)dw_j(t) \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (7.47)$$

donde $u_i(t) = N_i(t)P_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, denota cantidad invertida en el i -ésimo activo. $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ se llama portafolio del inversionista. El portafolio $u(t)$ es un proceso medible $\mathcal{F}_t$ -adaptado, de forma que $\sum_{i=1}^n \int_0^\tau u_i(t)dt < +\infty$. A tales procesos los denotamos por $L_2^{\mathcal{F}}([0, \tau], \mathbb{R}^n)$.

Si $Z = \mathbb{R}$, $U = E = \mathbb{R}^n$. El sistema anterior puede escribirse de la siguiente forma

$$\begin{cases} dz(t) = \{A(t)z(t) + B(t)u(t)\}dt + \sum_{j=1}^n \sigma_j^T(t)u(t)dw_j(t), \\ z(0) = z_0 \in L_2(\mathcal{F}_0, \mathbb{R}) \end{cases} \quad (7.48)$$

donde $A = r(t)$, $B(t) = (b_1(t) - r(t), \dots, b_n(t) - r(t))$.

Verifiquemos ahora que existe $\gamma > 0$ tal que $\mathbf{E}\langle \Pi^{n_0} z, z \rangle \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2)$ para $z \in L_2(\mathcal{F}_{n_0}, \mathbb{R})$. En efecto, ya que $\mathcal{F}_{n_0} = \mathcal{F}$ y la propiedad $\mathbf{H}^*$ del Capítulo 1, $\mathbf{E}(E((z|\mathcal{F}_{n_0}))) = \mathbf{E}(z)$, tenemos

CAPÍTULO 7. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\langle \Pi^{n_0} z, z \rangle) &= \mathbf{E} \left(\left\langle \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) E(z|\mathcal{F}_k), z \right\rangle \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) \mathbf{E}(\langle E(z|\mathcal{F}_k), z \rangle) \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) \langle E(z|\mathcal{F}_k), \mathbf{E}(z) \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) \langle E(z|\mathcal{F}_k), \mathbf{E}(E(z|\mathcal{F}_{n_0})) \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) \mathbf{E}(\langle E(z|\mathcal{F}_k), E(z|\mathcal{F}_{n_0}) \rangle) \\
&\geq \Phi(n_0, n_0) B(n_0-1) B^*(n_0-1) \Phi^*(n_0, n_0) \mathbf{E}(\langle E(z|\mathcal{F}_{n_0}), E(z|\mathcal{F}_{n_0}) \rangle) \\
&= B(n_0-1) B^*(n_0-1) \mathbf{E}(\|E(z|\mathcal{F}_{n_0})\|^2) = \|B(n_0-1)\|^2 \mathbf{E}(\|z\|^2).
\end{aligned}$$

Ahora se tiene que $\mathbf{E}(\langle \Pi^{n_0}(z), z \rangle) \geq \gamma \mathbf{E}(\|z\|^2)$ si, y sólo si $\left(\|B(n_0-1)\|^2 - \gamma \right) \mathbf{E}(\|z\|^2) \geq 0$, es decir, $0 < \gamma \leq \|B(n_0-1)\|^2$.

De aquí que podemos concluir que el sistema (7.48) es exactamente controlable si $0 < \gamma \leq \|B(n_0-1)\|^2$. Por lo tanto, si al sistema (7.48) le añadimos un término no lineal f en las condiciones del Teorema 7.17, entonces seguirá siendo exactamente controlable.

Conclusiones

Los sistemas estocásticos estudiados en los Capítulos 5, 6 y 7, debido a la presencia de perturbaciones aleatorias reflejadas por medio de un proceso aleatorio Browniano $\{w(t)\}_{t \geq 0}$, nos hace pensar que la controlabilidad exacta es imposible alcanzarse en tales sistemas estocásticos. Sin embargo trabajos como el de Nazim Mahmudov [39], muestran que es posible alcanzar la controlabilidad exacta de dichos sistemas estocásticos.

En el artículo de Bashirov [1] se afirma que el estudio de la controlabilidad en general debe separarse en la controlabilidad del sistema determinístico y la controlabilidad del sistema estocástico, esto es conocido como principio de separación. Este principio de separación nos permite relacionar la controlabilidad exacta en sistemas estocásticos y determinístico y mediante los resultados obtenidos en sistemas determinístico, nos permite concluir que el estudio de la controlabilidad en general de sistemas estocásticos y determinístico son equivalentes. De esta forma en este trabajo, por medio del principio de separación, nosotros usamos los resultados importantes alcanzados por el profesor Hugo Leiva y Jahnett Uzcátegui en los artículos [29], [30] y [31] para sistemas determinístico y obtener resultados semejantes satisfactorios para sistemas estocásticos.

Para el futuro cercano quedaron el estudio de otros trabajos, entre los que destacan

- 1) Approximate Controllability of Linear Cascade Systems in $H = L_2(\Omega)$ de H. Leiva.
- 2) Approximate Controllability of Semilinear Cascade Systems in $H = L_2(\Omega)$ de H. Leiva.
- 3) Controllability of Semilinear reaction Diffusion equation de H. Leiva, N. Merentes y J. Sánchez.
- 4) A Sufficient Condition for the Controllability of semilinear Non-Autonomous Systems de H. Leiva.
- 5) Controllability of Semilinear Benjamin-Bona-mahony Equation de Leiva-Merentes-Sánchez.
- 6) Un Espectro de Compresión no Lineal con Aplicaciones a la Controlabilidad Aproximada de Sistemas Semilineales Gobernados por Ecuaciones de Evolución. J. Appell, H. Leiva, N. Merentes, A. Vignoli.

-
- 7) Interior Controllability of a System of Parabolic Equation With Non-Diagonal Diffusion Matrix. H. Leiva.
 - 8) Observability of Linear Difference Equations in Hilbert Space and Applications. H. Leiva y Jahnett Uzcategui.
 - 9) Approximate Controllability of Semilinear Difference Equations and Applications. H. Leiva y Jahnett Uzcategui.
 - 10) Exact Controllability for Semilinear Difference Equation and Applications. H. Leiva y Jahnett Uzcategui.

www.bdigital.ula.ve

Apéndice A.

Resultados Necesarios del Análisis Funcional y Real

1. Aplicación Uniformemente Continua

Definición .24. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios métricos se dice uniformemente continua sobre X , si para todo $\varepsilon > 0$ le corresponde $\delta > 0$ tal que $d(x, x') < \delta$ implica $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

2. Principio de Extensión por Continuidad

Teorema .25. Sean X e Y espacios métricos, y sea Y completo. Si $f : A \longrightarrow Y$ es uniformemente continua sobre un subconjunto denso Λ de X , entonces f tiene una única extensión continua $g : X \longrightarrow Y$. Esta extensión única es uniformemente continua sobre X .

Teorema .26. Sean X, Z espacios de Banach y sea P un operador lineal cerrado sobre un dominio $\mathcal{D} \subseteq Z$ y con rango en X . Sea (S, Σ, μ) un espacio de medida y T una función μ -integrable con valores en D . Si PT es también μ -integrable entonces

$$\int_S T(s) \mu ds, \quad (.49)$$

está en $\mathcal{D}$ y

$$P \int_S T(s) \mu(ds) = \int_S PT(s) \mu(ds). \quad (.50)$$

3. Principio de Acotamiento Uniforme

Corolario .27. Sea X, Y espacios de Banach y sea $T_\alpha, \alpha \in A$, una aplicación lineal acotada de X en Y . Entonces las siguientes expresiones son equivalentes:

$$i) \quad \sup_{\alpha \in A} |T_\alpha| < +\infty, \quad (.51)$$

$$ii) \quad \sup_{\alpha \in A} |T_\alpha x| < +\infty, \quad x \in X \quad (.52)$$

$$iii) \quad \sup_{\alpha \in A} |Y^* T_\alpha x| < +\infty, \quad x \in X \quad y^* \in Y^* \quad (.53)$$

4. Teorema de Convergencia Dominada

Teorema .28. Sean $1 \leq p < \infty$, (S, Σ, μ) un espacio de medida, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $L_p(S, \Sigma, \mu, X)$ que converge (c.s.) a una función f . Suponga que existe una función $g \in L_p(S, \Sigma, \mu, X)$ tal que $|f_n(s)| \leq |g(s)|$ (c.s.). Entonces

$$f \in L_p(S, \Sigma, \mu, X) \quad y \quad |f_n - f|_p \longrightarrow 0 \quad (.54)$$

5. Tonelli

Teorema .29. Sea $(R, \Sigma_R, \rho) = (S, \Sigma_S, \mu) \times (T, \Sigma_T, \lambda)$ el producto de dos espacios de medida positivo σ -finito. Sea f una función ρ -medible. Entonces, para casi todo $s \in S$, la función $f(s, \cdot)$ es λ -medible.

Más aún, la función a valor real

$$\int_T f(\cdot, t) \lambda(dt) \quad \text{es } \mu\text{-medible} \quad (.55)$$

y

$$\int_S \left\{ \int_T f(s, t) \lambda(dt) \right\} \mu(ds) = \int_R f(r) \rho(dr), \quad (.56)$$

indiferentemente si la integral tiene valor finito ó infinito.

Corolario .30. Bajo la hipótesis del Teorema .29 una función g ρ -medible a valores vectoriales para el cual

$$\int_S \left\{ \int_T |g(s, t)| \lambda(dt) \right\} \mu(ds) < +\infty \quad (.57)$$

es ρ -integrable sobre R y

$$\int_R g(r) \rho(dr) = \int_S \left\{ \int_T g(s, t) \lambda(dt) \right\} \mu(ds) \quad (.58)$$

6. Fubini

Teorema .31. Sea (S, Σ_S, μ) y (T, Σ_T, λ) dos espacios de medida positivos σ -finitos. Sea $(R, \Sigma_R, \rho) = (S, \Sigma_S, \mu) \times (T, \Sigma_T, \lambda)$ y sea $f \in L_1(R, \Sigma_R, \rho, X)$. Entonces para casi todo $\mu - s \in S$, $f(s, \cdot) \in L_1(T, \Sigma_T, \lambda, X)$. Más aún,

$$\int_T f(\cdot, t) \lambda(dt) \in L_1(S, \Sigma_S, \mu, X), \quad (.59)$$

y

$$\int_S \left\{ \int_T f(s, t) \lambda(dt) \right\} \mu(ds) = \int_R f(r) \rho(dr). \quad (.60)$$

7. Teorema de Hille-Philips

Teorema .32. Si $f(t)$ es subaditiva en $(0, \infty)$ y $\int_0^\infty \exp[f(t)] dt = M$, entonces $f(t) \leq 2 \log(M/t)$ para $t > 0$ mientras para $t > Me$, $f(t) \leq 2 - 2t/Me$.

8. Operadores Nucleares y Operadores de Hilbert-Schmidt

Definición .33. (Operadores Nucleares). Sean E y G espacios de Banach y $L(E, G)$ el espacio de operadores lineales acotados de E en G dotado de la norma del supremo. Un elemento $T \in L(E, G)$ se dice operador nuclear si existen dos sucesiones $\{a_j\}_{j \geq 1} \subset G$, $\{\varphi_j\}_{j \geq 1} \subset E^*$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| \|\varphi_j\| < +\infty, \quad (.61)$$

y T tiene la siguiente representación

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(x), \quad x \in E. \quad (.62)$$

El espacio de todos los operadores nucleares $L_1(E; G)$, dotado de la norma

$$\|T\|_1 = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| \|\varphi_j\| : Tx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(x) \right\}, \quad (.63)$$

es un espacio de Banach. Si H es un espacio de Hilbert separable y $\{e_k\}_{k \geq 1}$ es una base ortonormal completa en H y $T \in L(H, H)$ entonces la traza de T es

$$\text{Tr } T = \sum_{j=1}^{\infty} \langle T e_j, e_j \rangle \quad (.64)$$

además, $T \in L(H, H)$ es nuclear si, y solo si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle T e_j, e_j \rangle < +\infty. \quad (.65)$$

Mas aun $Tr T = \|T\|$.

9. Funciones Homeomorfas

Definición .34. Dados X e Y espacios métricos y f una aplicación de X en Y . Una aplicación f biunívoca y bicontinua (tanto f como f^{-1} son continuas) se denomina homeomorfismo o aplicación homeomorfa y los espacios X e Y , entre los que se puede establecer una aplicación homeomorfa, se denominan espacios homeomorfos.

Teorema .35. Sea Z un espacio de Banach y $K : Z \rightarrow Z$ una función Lipschitz con constante de Lipschitz $k < 1$ y considere $G(z) = z + K(z)$. Entonces, G es un homeomorfismo cuya inversa es una función de Lipschitz con constante de Lipschitz $(1 - k)^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN. Dado $y \in Z$. Veamos que existe $z \in Z$ tal que $G(z) = y$. En efecto: Ya que $G(z) = K(z) + z = y$, entonces $z = y - K(z)$. Sea $H : Z \rightarrow Z$ con $H(z) = y - K(z)$, ya que y es fijo H es una contracción, pues K es Lipschitz con constante $k < 1$. Entonces G es sobreyectivo.

Veamos que G es inyectivo: sean $z_1, z_2 \in Z$ y $G(z_1) = G(z_2)$, entonces $K(z_1) + z_1 = K(z_2) + z_2$, luego

$$\|z_1 - z_2\| = \|K(z_1) - K(z_2)\| \leq k\|z_1 - z_2\|,$$

es decir, $(1 - k)\|z_1 - z_2\| \leq 0$, por lo que $z_1 = z_2$.

G tiene una inversa, en efecto:

$$\begin{aligned} \|G(z_1) - G(z_2)\| &= \|K(z_1) - K(z_2) + z_1 - z_2\| \geq \|z_1 - z_2\| - \|K(z_1) - K(z_2)\| \\ &\geq \|z_1 - z_2\| - k\|z_1 - z_2\| = (1 - k)\|z_1 - z_2\|, \end{aligned}$$

entonces G es coercitivo y por lo tanto inyectiva.

Por otro lado si $z_1 = G^{-1}(y_1)$, $z_2 = G^{-1}(y_2)$, entonces

$$\|y_1 - y_2\| \geq (1 - k)\|G^{-1}(y_1) - G^{-1}(y_2)\|,$$

es decir

$$\|G^{-1}(y_1) - G^{-1}(y_2)\| \leq (1 - k)^{-1}\|y_1 - y_2\|.$$

□

10. Teorema de Hahn-Banach

Las siguientes definiciones y resultados pueden verse en [6] y [26].

Sea F un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y f una aplicación lineal sobre F , o un subespacio vectorial de E con valores en $\mathbb{R}$. Denotemos por E' el espacio de las aplicaciones lineales y continuas sobre E , el dual topológico de E , dotado de la norma dual

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\{x \in E: \|x\| \leq 1\}} |f(x)| = \sup_{\{x \in E: \|x\| \leq 1\}} f(x).$$

Definición .36. Un hiperplano (afín) es un conjunto de la forma

$$H = \{x \in E; f(x) = \alpha\},$$

donde f es una aplicación lineal sobre E y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se dice que H es el hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$.

Definición .37. Sean $A \subset E$ y $B \subset E$. Se dice que el hiperplano H de ecuación $[f = \alpha]$ separa A y B en sentido amplio si se verifica

$$f(x) \leq \alpha, \text{ para todo } x \in A \text{ y } f(x) \geq \alpha \text{ para todo } x \in B.$$

Definición .38. Se dice que H separa A y B en sentido estricto si existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon, \text{ para todo } x \in A \text{ y } f(x) \geq \alpha + \epsilon \text{ para todo } x \in B.$$

Definición .39. Sea E un espacio vectorial normado, $x, y \in E$. Se llama segmento (cerrado) en E , que une los puntos x e y , al conjunto de los puntos del tipo

$$\alpha x + \beta y,$$

donde $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Teorema .40. (Teorema de Hahn-Banach). Sean $A \subset E$ y $B \subset E$ conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Supongamos que A es cerrado y B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en sentido estricto.

Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach se tiene el siguiente corolario.

Corolario .41. Sea $F \subset E$ un subespacio vectorial tal que $\overline{F} \neq E$. Entonces existe $f \in F'$, $f \neq 0$ tal que

$$\langle f, x \rangle = 0,$$

para todo $x \in F$.

Corolario .42. Si T es un operador lineal cerrado definido sobre un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y y T tiene una inversa algebraica T^{-1} , entonces $T^{-1} \in L(X, Y)$ si, y solo si $\text{Dom}(T^{-1}) = \text{Rang } T$

Lema .43. Sea U un operador arbitrario, densamente definido y T un operador lineal acotado definido sobre un espacio de Hilbert Z . Lo siguiente ocurre:

a) $(\alpha U)^* = \bar{\alpha} U^*$, además

$$\text{Dom} ((\alpha U)^*) = \begin{cases} \text{Dom} (U^*) & \text{si } \alpha \neq 0, \\ Z & \text{si } \alpha = 0; \end{cases}$$

b) $(U + T)^* = U^* + T^*$, con $\text{Dom}((U + T)^*) = \text{Dom}(U^*)$;

c) Si U tiene una inversa $U^{-1} \in L(Z)$ tal que $UU^{-1} = I_Z$, $U^{-1}U = I_{\text{Dom}(U)}$, entonces U^* también tiene una inversa acotada y $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$

www.bdigital.ula.ve

Apéndice B Desigualdades

11. Desigualdades de Gronwall Discreta y Continua

Lema .44. (Gronwall). Sea $a \in L_1(0, T)$, $a(t) \geq 0$. Si para algún $\beta \geq 0$ la función $f \in L_\infty(0, T)$ satisface

$$f(t) \leq \beta + \int_0^T a(s)f(s)ds, \quad (.66)$$

entonces

$$f(t) \leq \exp\left(\int_0^T a(s)ds\right). \quad (.67)$$

Corolario .45. Desigualdad de Gronwall Discreta. sea $n \in \mathbb{N}_{n_0}^+$, $k_n \geq 0$ y

$$y_{n+1} \leq y_{n_0} + \sum_{s_0}^n [k_s y_s + p_s] \quad (.68)$$

entonces,

$$\begin{aligned} y_n &\leq y_{n_0} \prod_{s=n_0}^{n-1} (1 + k_s) + \sum_{s=n_0}^{n-1} p_s \prod_{\tau=s+1}^{n-1} (1 + k_\tau), \\ &\leq y_{n_0} \exp\left(\sum_{s=n_0}^{n-1} k_s\right) + \sum_{s=n_0}^{n-1} p_s \exp\left(\sum_{\tau=s+1}^{n-1} k_\tau\right), \quad n \geq n_0 \end{aligned} \quad (.69)$$

Prueba: Para una prueba ver [28].

Bibliografía

- [1] Agamirza E. Bashirov and Mahmudov N. I, On concepts of Controllability For Deterministic and Stochastic Systems, Siam J. Control Optim, year 1999, volume 37, pages 1808-1821.
- [2] Bashirov A.E and Mahmudov N.I, "Controllability of linear deterministic and stochastic sistems", SIAM J. Control optim, vol 37, pp 1808-1821, 1999.
- [3] Balachandran K and Dauer J.P, "Controllability of nonlinear systems via fixed-point theorems", J. Optim. appl, vol 53, pp 345-352, 1987.
- [4] Balachandran K and Sakthivel R, "A Note on Controllability of Semilinear Integrodifferential Systems In Banach Spaces", Journal of Applied Math. and Stochastic Analysis, Vol. 13, No. 2, pp. 161-170, 2000.
- [5] Balasubramaniam P and Dauer J.P, "Controllability of Semilinear Stochastic Evolution Equations in Hilbert Spaces", Journal of Applied Math. and Stochastic Analysis, Vol. 14, No. 4, pp. 329-339, 2001.
- [6] Brezis H, Analisis Funcional, Teoria y Aplicaciones, Alianza Editorial, S.A., Madrid, Año 1984.
- [7] Carrasco A. And Leiva H, "Variation of Constants Formula for Functional Partial Parabolic Equations", Electronic Journal of Differential Equations, Vol.2007(2007), No. 130, pp. 1-20.
- [8] Curtain R.F and Zwart H.J, An Introduction To Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, New york, 1995.
- [9] Curtain R.F and Ichikawa A, "The separation principle for stochastic evolution equation", SIAM J.Control optim, vol 15, pp 367-383, 1977.
- [10] Curtain R.F, Pritchard A.J, Infinite Dimensional Linear Systems, Lectures Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin, year 1978, Vol. 8.
- [11] Chow S.N and Leiva H, Existence and roughness of the exponential dichotomy for linear skew-product semiflows in Banach spaces, J. Differential Equations, year 1995, volume 120, pages 429-477.
- [12] Chung Kai Lai, A Course in Probability Theory, Academic Press, Second Edition, year 1974.
- [13] Da prato Guiseppe and Zabczyk Jerzy, Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Encyclopedia Of Mathematics And Its Aplications, year 1992, volume 44, Cambridge University Press.
- [14] Dauer J.P and Balachandran K, "Sample controllability of general non-linear stochastic system", Libertas Mathematica, vol 17, pp 143-153, 1997.
- [15] Duntfor Nelson and Schwartz Jacob T, Linear Operator Part I: General Theory, Pure And Applied Mathematic a Series of Texts and Monographs, Volume VII, year 1957.
- [16] E. Dettweiler, Banach space valued processes with independent increments and stochastic integration, in: Probability in Banach spaces, IV (Oberwolfach, 1982), 54-83, Lectures notes in Math., 990, Springer, Berling-NewYork,1983.
- [17] Fattorini H.O, "Some remarks on complete controllability", SIAM. J.Control, volumen 11, pp 323-343, 1973.
- [18] Fernandez-Cara E and Zuazua E, Control Theory: History, Mathematical Achievements and Perspective.
- [19] Golsdtein Jerome. A, Semigroup Of Linear Operator and Applications,Oxford University Press New York, year 1985.
- [20] Henry D, Geometry Theory of Semilinear Parabolic equations, Lectures notes in mathematcs, Springer Verlag, Berlin, year 1981, volume 840.

- [21] Hille Einar, Phillips Ralph S., Functional Analysis and semi-group, American Mathematical Society, Colloquium Publications, year 1957, volume 31.
- [22] J.L Doob, Stochastic processes, J. Willey , New York, 1958.
- [23] Kalman R.E, "A new approach to linear filtering and prediction problems", Trans. ASME Ser.D; J.Basic Engineering, vol 82, pp 35-45, 1960.
- [24] Karatzas Ioannis and Shreve Steven E, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer- Verlag, New York, year 1988.
- [25] Khoshnevisan D and Rassoul-Agha F, A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics 1962, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, year 2009.
- [26] Kolmogorov A.N y Fomin S.V, Elementos De La Teoría De Funciones Y Del Análisis Funcional, Editorial Mir, Moscu, Año 1978.
- [27] Kuo Hui-Hsiung, Introduction to Stochastic Integration, Springer, 2006.
- [28] Lakshmikantham V and Trigiante D, Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications, Mathematics in Science and Engineering, year 1988, volume 181.
- [29] Leiva H, "Exact controllability of semilinear evolution equation and applications", Int.J. Systems, Control and Communications, vol 11, no. 1, pp 1-12, 2008.
- [30] Leiva H and Uzcategui Jahnett, Exact Controllability for Semilinear Difference Equation and Application, year 2009.
- [31] Leiva H, Unbounded perturbation of the controllability for evolution equations, T. Math. Anal. Appl, 280(2003)1-8.
- [32] Leiva H, "Exact controllability of the suspension bridge model proposed by Laser and McKenna", J.Math. Anal.Appl, vol 309, pp 404-419, 2005.
- [33] Leiva H, "A lemma on C_0 -semigroup and applications PDEs systems", Quaestiones Mathematicae, vol 26, pp 247-265, 2003.
- [34] Leiva H, "A Lemma on C_0 -Semigroups and Applications ", Quaestiones Mathematicae 26 (2003), 247-265.
- [35] Leiva H, Merentes N, Narváez M, Unbounded Perturbation Of The Controllability For Stochastic Evolution Equations, International Journal of Evolution Equations, Volume 6, Number 1, pag 77-88, year 2012.
- [36] Lee E.B, Markus L, Foundations of optimal control theory, New York, 1967.
- [37] Lindquist A, "On feedback control on linear stochastic systems", SIAM J. Control, vol 11, pp 323-343, 1973.
- [38] Mahmudov N.I and Denker. A, On Controllability of Linear Stochastic Systems, International Journal of Control, Vol 73, N°2, pp 144-151, 2000.
- [39] Mahmudov N.I, "Controllability of linear Stochastic Systems in Hilbert Spaces", Journal of Mathematical Analysis and applications, vol 259, pp 64-82, 2001.
- [40] Mahmudov Nazin I, (2003) "Approximate controllability of semilinear deterministic and stochastic evolution equations in abstract spaces" SIAM J. Control Optim. Vol 42, No. 5, pp. 1604-1622.
- [41] Megan M, and Sasu A.L, Discrete admissibility and exponential dichotomy for evolution families, Discrete and Continuous Dynamical Systems, year 2003, volume 9, number 2, pages 383-397, month March.
- [42] Neerven Jan Van, Stochastic Evolution Equations, ISEM Lectures Notes, 2007-2008.
- [43] Ntouyas S.K and O'Regan D, "Some Remarks on Controllability of Evolution Equations in Banach Spaces", E. Journal of Differential Equations, Vol. 2009, No. 79, pp. 1-6, 2009.
- [44] Øksendal Bernt , Stochastic differential Equation, An Introduction With Applications, Springer, Fifth edition, year 2000.
- [45] Russel D. L, "Nonharmonic Fourier series in the control theory of distributed parameter systems", J.Math.Anal.Appl, vol 18, pp 542-560, 1967.
- [46] Shiriyayev A.N. Probability, Graduate Texts In mathematics, Springer-Verlag, New York, year 1984.
- [47] Subalakshmi R, Balachandran K and Park J.Y, "Controllability of Semilinear Stochastic Functional Integro-differential Systems in Hilbert Spaces", Nonlinear Analysis: Hybrid systems, Vol.3, pp. 39-50, 2009.