

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE INGENIERIA  
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS  
POSTGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

TA 347  
F5A38

## ELEMENTO FINITO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE PÓRTICOS.

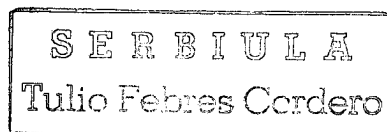
Por

DICKSON MANUEL AGUILAR SALAZAR.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Tesis presentada como requisito parcial para la obtención del grado de  
Magíster Scientiae en Ingeniería Estructural.

Facultad de Ingeniería  
Universidad de los Andes



Tutor: Prof. Hector E. Febres C.

Abril del 2000  
Mérida-Venezuela

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS  
POSTGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

**ELEMENTO FINITO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE  
PÓRTICOS.**

**WWW.BDIGITAL.ULA.VE**

**Por  
DICKSON MANUEL AGUILAR SALAZAR**

**Abril del 2000  
Mérida-Venezuela.**

**Licencia Creative Commons:  
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)**

## **INDICE**

### **INTRODUCCIÓN**

#### **CAPITULO 1 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA**

##### **1.1 Método de los Elementos Finitos**

##### **1.2 Sistemas Estructurales**

###### **1.2.1 Sistemas Discretos**

###### **1.2.2 Sistemas Continuos**

##### **1.3 Tipos de Elementos**

##### **1.4 Métodos de Aproximación**

###### **1.4.1 El método de Rayleigh Ritz**

###### **1.4.2 Ecuaciones de Elemento Finito Usando Galerkin**

##### **1.5 Funciones de Forma**

###### **1.5.1 Conceptos de Elementos Estándar y Jerárquico**

###### **1.5.2 Obtención de las Funciones de Forma para un Elemento Rectangular**

#### **CAPITULO 2 DINÁMICA ESTRUCTURAL**

##### **2.1 Introducción a la Dinámica Estructural**

##### **2.2 Sistema con un Grado de Libertad, Sin Amortiguación**

##### **2.3 Frecuencia y Periodo**

##### **2.4 Análisis Dinámico de Vigas**

###### **2.4.1 Propiedades Estáticas en Vigas**

###### **2.4.2 Propiedades Inerciales – Masa Concentrada**

###### **2.4.3 Propiedades Inerciales – Masa Consistente**

##### **2.5 Análisis Dinámico de Pórticos Planos**

###### **2.5.1 Matriz de Rigidez para Efectos Axiales**

###### **2.5.2 Matriz de Masa para Efectos Axiales**

###### **2.5.2 Transformación de Coordenadas**

## CAPITULO 3 ANÁLISIS NUMÉRICO

### 3.1 Proceso de Obtención de las Funciones de Forma

### 3.2 Comparación Gráfica de las Funciones de Forma

### 3.3 Análisis Matricial

#### 3.3.1 Matriz de Rigidez

##### 3.3.1.1 Coeficiente $K_{11}$

##### 3.3.1.2 Coeficiente $K_{12} = K_{21}$

##### 3.3.1.3 Coeficiente $K_{13} = K_{31}$

##### 3.3.1.4 Coeficiente $K_{14} = K_{41}$

##### 3.3.1.5 Coeficiente $K_{22}$

##### 3.3.1.6 Coeficiente $K_{23} = K_{32}$

##### 3.3.1.7 Coeficiente $K_{24} = K_{42}$

##### 3.3.1.8 Coeficiente $K_{33}$

##### 3.3.1.9 Coeficiente $K_{34} = K_{43}$

##### 3.3.1.10 Coeficiente $K_{44}$

#### 3.3.2 Matriz de Masa

##### 3.3.2.1 Coeficiente $M_{11}$

##### 3.3.2.2 Coeficiente $M_{12} = M_{21}$

##### 3.3.2.3 Coeficiente $M_{13} = M_{31}$

##### 3.3.2.4 Coeficiente $M_{14} = M_{41}$

##### 3.3.2.5 Coeficiente $M_{22}$

##### 3.3.2.6 Coeficiente $M_{23} = M_{32}$

##### 3.3.2.7 Coeficiente $M_{24} = M_{42}$

##### 3.3.2.8 Coeficiente $M_{33}$

##### 3.3.2.9 Coeficiente $M_{34} = M_{43}$

##### 3.3.2.10 Coeficiente $M_{44}$

### 3.4 Programas de Computación

#### 3.4.1 Análisis Dinámico

##### 3.4.1.1 Programa "Frecuencias Naturales" (MATLAB)

#### 3.4.2 Análisis Estático

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

## **CAPITULO 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS**

### **4.1 Análisis Dinámico**

- 4.1.1 Viga Simplemente Apoyada
- 4.1.2 Viga Empotrada Empotrada
- 4.1.3 Viga Empotrada Apoyada
- 4.1.4 Viga En Voladizo
- 4.1.5 Pórtico[A] Empotrado Empotrado
- 4.1.6 Pórtico[B] Empotrado Empotrado
- 4.1.7 Pórtico[2 Pisos] Empotrado Empotrado
- 4.1.8 Pórtico[5 Niveles]
- 4.1.9 Pórtico[2 Niveles]
- 4.1.10 Pórtico[3 Niveles]
- 4.1.11 Pórtico[3 Niveles]
- 4.1.12 Pórtico[2 Niveles]

### **4.2 Análisis Estático**

- 4.2.1 Pórtico[5 Niveles]
- 4.2.2 Pórtico[2 Niveles]
- 4.2.3 Pórtico[3 Niveles]
- 4.2.4 Pórtico[3 Niveles]
- 4.2.5 Pórtico[2 Niveles]

## **CONCLUSIONES**

## **REFERENCIAS**

## **APÉNDICE I**

# **ELEMENTO FINITO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE PÓRTICOS**

**Aguilar S., Dickson M.**

## **RESUMEN**

En esta investigación se plantea mejorar el análisis y calculo estructural, por medio de los elementos finitos. El trabajo consistió en generar un nuevo elemento a través de funciones de forma trigonométricas (combinaciones de senos y cosenos) que se combinaron con las funciones conocidas (polinomio de 3<sup>er</sup> grado) con esto se realizaron comparaciones gráficas y numéricas hasta obtener el mejor ajuste, luego de obtener las funciones finales se encontraron matrices de rigidez y masa diferentes a las conocidas en la bibliografía convencional. Con estas nuevas matrices se llevo a cabo todo el proceso de análisis dinámico y estático correspondiente para verificar la veracidad del nuevo elemento finito encontrado. El punto comparativo fueron los modos de vibración del sistema analizado por medio de los cuales se obtenían las frecuencias naturales y/o periodos de la estructura. En el procedimiento numérico se hizo uso de los programas de análisis dinámico para Vigas y Pórticos del Profesor Mario Paz, solo cambiando las subrutinas de las matrices de rigidez y masa, de igual manera en el análisis estático se hizo uso de un programa de Análisis Estático de Pórticos utilizando Rigidez Directa.

Se pudo demostrar que con estas nuevas matrices, se obtenía una mejor convergencia en el comportamiento real de las estructuras y se optimizaba el tiempo computacional debido a una menor discretización de los elementos.

Las matrices de masa y rigidez obtenidas pueden ser utilizadas en cualquier programa de Análisis Estructural, ya que la inclusión de estas se hace de una manera fácil y directa en cualquier programa de cálculo convencional.

## INTRODUCCIÓN

Siempre se a planteado la necesidad de obtener modelos que se acerquen cada vez más al comportamiento real de las estructuras para así poder obtener diseños estructurales más confiables. Por esto el análisis estructural es cada vez más complejo, por la inclusión de un sin número de efectos que notoriamente afectan el comportamiento de la estructura.

El presente trabajo es un intento por mejorar el análisis estructural. El punto de partida fueron las "funciones de forma" con las cuales se pretendió obtener una mejor optimización en el proceso de calculo estructural.

Este trabajo consistió en obtener nuevas funciones de forma, esto se hizo a través de procesos matemáticos usando los programas Maple V, y Matlab. Se plantearon funciones trigonométricas (combinaciones de senos y cosenos) que se combinaron con las funciones conocidas (polinomio de 3<sup>er</sup> grado), con esto se realizaron comparaciones gráficas hasta obtener el mejor ajuste, es de hacer notar que se realizaron muchas pruebas antes de seleccionar las funciones definitivas, se hacían pruebas de ensayo y error hasta obtener la mayor optimización, luego de obtener las funciones finales se procedió a obtener las respectivas matrices de masa y rigidez, con estas se realizó todo el proceso de análisis dinámico y estático presentado en este trabajo.

Fueron muchos los intentos para poder obtener las mejores funciones de forma que proporcionaran resultados satisfactorios, se obtuvo una matriz de rigidez y masa, diferentes a las conocidas en la bibliografía convencional, con las cuales se hicieron todos los cálculos necesarios para poder demostrar la confiabilidad de estas. El punto comparativo fueron los modos de vibración por medio de los cuales se obtenían las frecuencias naturales y/o periodos de las estructuras.

Los modos de vibración según la nueva Norma Sismorresistente 1756-1998 juegan un papel de suma importancia a la hora de hacer un análisis dinámico, en lo que se refiere al número mínimo de modos a incorporar en el análisis, esto proviene de estudios desarrollados con diversos sistemas estructurales que idealizan edificios reales regulares o irregulares. El efecto de los modos superiores en la máxima respuesta dinámica depende principalmente del tipo de sistema estructural, del número de pisos y de la ubicación de los periodos naturales del edificio en el espectro sísmico considerado. El error cometido al considerar un número reducido de modos en el análisis depende también de la variable que se considere, siendo mayor en las fuerzas que en los desplazamientos. En la mayoría de los casos, el máximo error se comete en la fuerza cortante del ultimo nivel.

Estos datos son de suma importancia en el análisis dinámico estructural, por medio de estos se pudo verificar la convergencia de estas nuevas funciones con un menor número de discretizaciones y menor tiempo computacional, esto debido a la forma de dichas funciones ya que se plantearon en forma trigonométrica, esto para acercarnos mas a la forma de dichos modos y poder tener una solución más cercana a la real.

También se pudo constatar que dichas funciones también funcionaban para análisis estáticos donde se verifico su eficiencia con varios ejemplos.

El trabajo que aquí se presenta consta de 4 capítulos. En el primero de ellos se hace una revisión bibliográfica de los elementos finitos donde se trata de recopilar conceptos básicos necesarios para el buen entendimiento de los mismos. Se plantean métodos y sistemas utilizados para el desempeño de un buen análisis por medio de los elementos finitos.

En el segundo capítulo se presenta una introducción a la dinámica estructural punto de suma importancia en el trabajo presentado. Se describen

conceptos básicos y los análisis en vigas y pórticos por medio de sus diferentes propiedades.

El tercer capítulo se presenta el proceso llevado a cabo para la obtención de las funciones de forma y luego sus respectivas matrices de rigidez y masa con las cuales se realizaron los análisis estructurales dinámico y estático correspondientes.

En el cuarto capítulo se presentan las aplicaciones de los programas en los análisis dinámicos y estáticos con una serie de ejemplos numéricos, con los cuales se demostrará la veracidad de las nuevas funciones encontradas, empezaremos con el análisis de vigas luego lo haremos en pórticos.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

## CAPÍTULO 1

### REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

#### 1.1 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos permite analizar diferentes problemas del medio continuo, esto mediante diferentes análisis que nos permiten obtener modelos que se acerquen más al comportamiento real del medio analizado.

Las limitaciones de la mente humana son tales que no se puede captar el comportamiento del complejo mundo que nos rodea en una sola operación global. Por ello, una forma natural de proceder de ingenieros y científicos, consiste en separar los sistemas en sus componentes individuales, o “*elementos*”, cuyo comportamiento pueda conocerse con mayor precisión y proceder a estudiarlo a partir de dichos componentes.

En muchos casos se obtiene un modelo adecuado utilizando un número finito de componentes bien definidos. A tales problemas los denominaremos *discretos*. En otros, la subdivisión prosigue indefinidamente y el problema solo puede definirse haciendo uso de la ficción matemática del infinitésimo. Ello conduce a ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes con un número infinito de elementos implicados. A tales sistemas los llamaremos *continuos*.

El uso de computadoras digitales permite resolver generalmente sin dificultad los problemas *discretos*, aún cuando el número de elementos sea muy elevado. En el caso de los problemas *continuos* existe la dificultad en que la capacidad de las computadoras es finita y estos solo pueden resolverse de forma exacta mediante manipulaciones matemáticas, en este caso las técnicas matemáticas disponibles suelen limitar las posibilidades a casos extremadamente simplificados. Para vencer la dificultad que presentan los problemas continuos

reales, ingenieros y matemáticos han ido proponiendo a través de los años diversos métodos de discretización. La aplicación de estos métodos hace necesario efectuar alguna aproximación de tal manera que la misma se acerque tanto como se quiera, a la solución continua verdadera a medida que crezca el número de variables discretas.

La discretización de problemas continuos ha sido abordada de manera diferente por matemáticos e ingenieros, los matemáticos han desarrollado técnicas generales aplicables directamente a las ecuaciones diferenciales que rigen el problema, los ingenieros, por otra parte, suelen enfrentarse al problema mas intuitivamente creando una analogía entre elementos discretos y porciones finitas de un dominio continuo.

El ingeniero civil que trabaja con estructuras, calcula primero las relaciones entre fuerzas y desplazamientos para cada miembro de la estructura y después procede al ensamblaje del conjunto siguiendo un procedimiento bien definido que consiste en establecer el equilibrio local de cada "nudo" o punto de unión de la estructura. A partir de tales ecuaciones se pueden obtener los desplazamientos desconocidos.

La existencia de una manera única para abordar los problemas *discretos* tipo nos lleva a la primera definición del método de los elementos finitos como procedimiento de aproximación de problemas continuos, de tal forma que:

- a) el continuo se divide en un número finito de partes (elementos), cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros, y
- b) la solución del sistema completo como ensamblaje de los elementos sigue precisamente las mismas reglas que aplican a los problemas discretos tipo.

## 1.2 SISTEMAS ESTRUCTURALES

### 1.2.1 SISTEMAS DISCRETOS

En el sistema discreto general, ya sea estructural o de cualquier otra clase, encontramos que:

1. Se define un conjunto de parámetros discretos, tales como  $a_i$ , de manera que describan el comportamiento de cada elemento,  $e$ , y también el comportamiento del sistema conjunto. Les llamaremos parámetros del sistema.
2. Se expresa para cada elemento un conjunto de cantidades  $q_i^e$  en función de los parámetros del sistema  $a_i$ . La relación general puede ser no lineal

$$q_i^e = q_i^e(a) \quad (1.1)$$

pero en muchos casos será lineal donde  $[K]$  es la matriz de rigidez del sistema, y  $(f)$  representa las fuerzas nodales.

$$q_i^e = K_{i1}^e a_1 + K_{i2}^e a_2 + \dots + f_i^e \quad (1.2)$$

3. Las ecuaciones del sistema se obtienen mediante simple adición

$$r_i = \sum_{e=1}^m q_i^e \quad (1.3)$$

donde  $r_i$  son cantidades del sistema (a menudo se les asigna el valor cero).

Si el problema es lineal, el resultado será un sistema de ecuaciones.

$$[K] a + f = r \quad (1.4)$$

tal que

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^m K_{ij}^e \quad f_i = \sum_{e=1}^m f_i^e \quad (1.5)$$

a partir de las cuales puede determinarse las variables del sistema.

En general no tiene por qué haber linealidad ni ser las matrices simétricas, aunque en muchos problemas encontraremos ambas cosas.

### 1.2.2 SISTEMAS CONTINUOS

El mecanismo de aproximar el comportamiento de un sistema continuo mediante “elementos finitos” que se comportan de una forma similar a los elementos reales *discretos*, se puede introducir mediante aplicaciones físicas específicas o como un concepto matemático general.

Es un poco complicado establecer una metodología en los sistemas continuos, se planteara una aproximación de la manera siguiente:

1. El continuo se divide, mediante líneas o superficies imaginarias, en un número de “elementos finitos”.
2. Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, que llamaremos nodos, situados en sus contornos. En el análisis simple de estructuras los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema.
3. Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamiento dentro de cada “elemento finito” en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.
4. Estas funciones de forma definirán de manera única el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las iniciales y las propiedades del material, definirán el estado de tensiones en todo el elemento y, por consiguiente, también en sus contornos.

5. Se determinará un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualquier carga repartida, resultando así una relación entre fuerzas y desplazamientos.
6. Se plantean las ecuaciones necesarias y se obtienen las incógnitas, en este caso los desplazamientos[2].

Es evidente que se han introducido una serie de aproximaciones, y no siempre es fácil asegurar que las funciones de forma escogidas satisfagan las condiciones de continuidad de los desplazamientos entre los elementos adyacentes.

Será misión del ingeniero escoger la forma de los elementos y de las funciones de forma para cada caso en particular, debiendo usar su ingenio y habilidad, dependiendo el grado de aproximación que se alcance del uso que haga de esas dos facultades.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

### 1.3 TIPOS DE ELEMENTOS

Los elementos mostrados en Fig. 1.1 son categorías básicas indicadas por las letras (a) a (f). Los círculos llenos pequeños indican los nodos. Las categorías de los elementos es la siguiente:

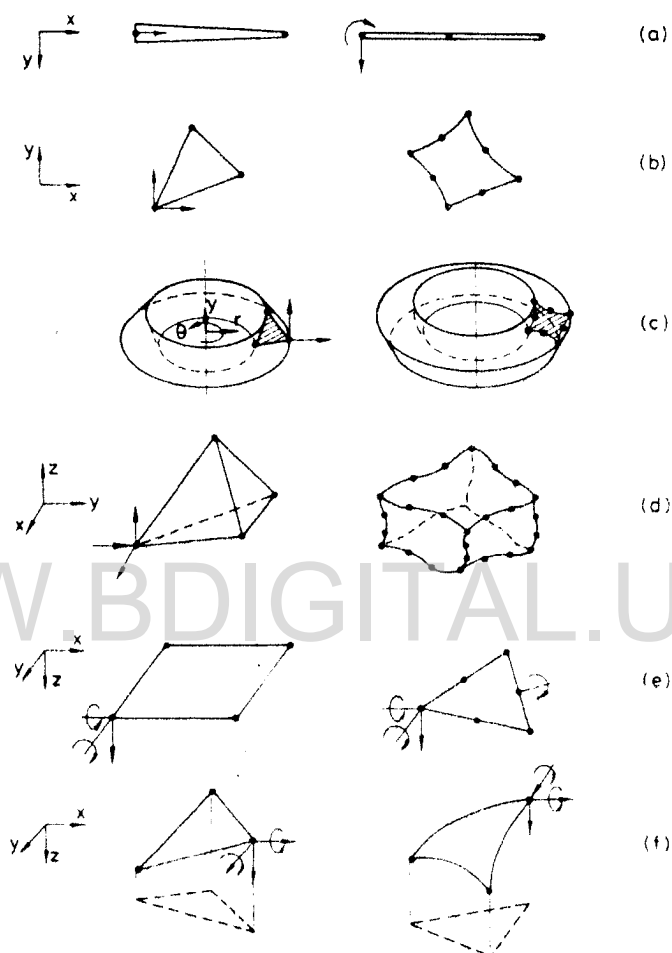


Figura. 1.1 Tipos de Elementos Finitos.[3]

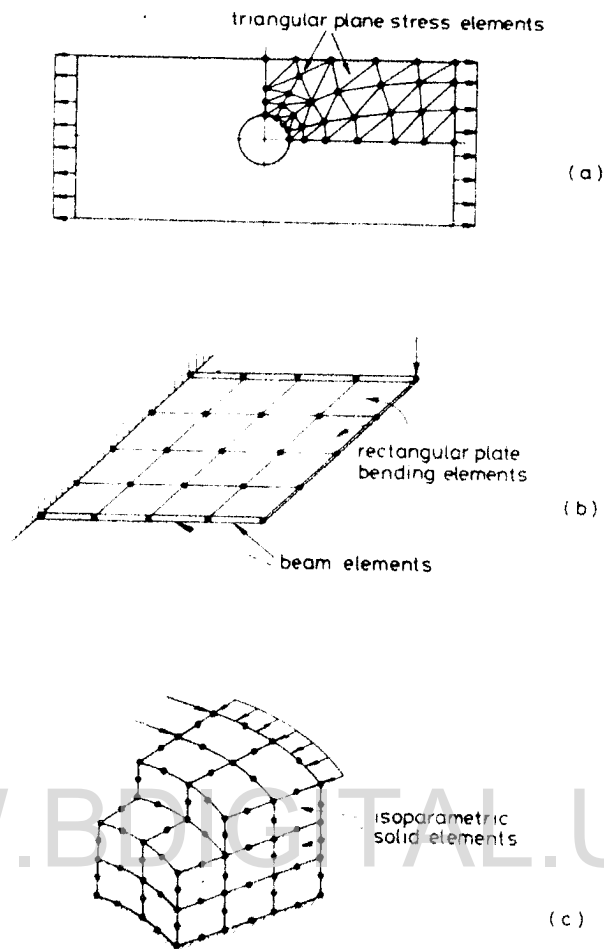
- (a) elementos de barra y viga que pueden ser no prismáticos.
- (b) elementos de membrana usados en la solución de problemas de placas en los que sólo se aplican cargas en el plano del elemento;
- (c) elementos axisimétricos: éstos son elementos sólidos de tipo anillo que forman parte de una estructura axisimétrica (simetría axial).
- (d) elementos tridimensionales para el análisis de sólidos generales;

- (e) elementos de placas a flexión sometidos a cargas que actúan en una dirección normal al plano del elemento;
- (f) elementos para el análisis de cáscaras curvas: estos elementos pueden ser curvos o una aproximación física puede ser introducida idealizando una cáscara curva con elementos de superficie que combinan las características de planos delgados y elementos de placas a flexión.

Se ve que en cada clasificación de los elementos existen diferentes formas y los elementos tienen diferentes números de nodos. Además, de los nodos el número de desplazamientos que generalmente se usan como las variables primarias del problema difieren de elemento a elemento, estos pueden ser triangulares, rectangulares, o cuadriláteros de acuerdo al medio a ser estudiado. El número de tipos del elemento que se han desarrollado durante los años es muy amplio y aquellos mostrados en Fig. 1.1 sólo deben verse como elementos típicos.

Unos ejemplos simples se muestran en Fig. 1.2. donde se representan estructuras simples con diferentes elementos finitos.

Diferentes tipos de elementos pueden usarse entre si, con tal de que ellos tengan nodos coincidentes en su límite común con variables de desplazamiento nodales idénticas.



*Figura. 1.2. Representación de estructuras simples con elementos finitos: (a) placa con orificio; (b) Placa estructural reforzada; (c) estructura sólida.[3]*

## 1.4 MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

### 1.4.1 EL MÉTODO DE RAYLEIGH RITZ

Las estructuras con miembros discretos, tales como cerchas, tienen un número finito de grados de libertad. Pero otras tales como sólidos y cáscaras entre otras, tienen infinitos grados de libertad. Su comportamiento es descrito por ecuaciones diferenciales simultáneas. Solo en estructuras simples, hay la oportunidad de resolver tales ecuaciones diferenciales. Esto se evita usando el método de Rayleigh Ritz que usa la interpolación para expresar el desplazamiento de cada punto en términos de un número finito de grados de libertad. Estos grados

de libertad son encontrados resolviendo ecuaciones algebraicas simultáneas. Las soluciones del método de Rayleigh Ritz son raramente exactas, pero convergen mucho más rápido con el uso de más grados de libertad.

El método se ha usado extensivamente en mecánica del medio continuo, este proporciona lo básico para las formulaciones de desplazamiento de los elementos finitos. En el procedimiento de Rayleigh Ritz los campos del desplazamiento supuestos son polinomios o de naturaleza trigonométrica pero otros tipos de campo son posibles. La exactitud del método depende en gran parte del campo del desplazamiento supuesto, que describa la forma real de la deformada en la estructura.

El método del Rayleigh-Ritz es una técnica general, aquí discutimos sólo su aplicación con campos del desplazamiento y las expresiones de energía potencial.

#### Principio de la Mínima Energía Potencial (PMEP):

"De todas las configuraciones cinemáticamente admisibles que un cuerpo elástico puede adoptar, aquella que satisface el equilibrio hace que la energía potencial sea mínima".

Se muestra una barra de sección transversal  $A$ , longitud  $L$ , y modulo de elasticidad  $E$ , sometida a la acción de su peso propio:

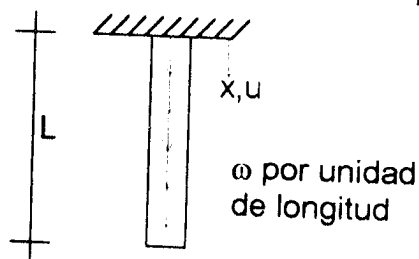


Figura 1.3

Conocemos que la energía potencial  $\Pi$  será igual a la suma de la energía de deformación  $U$  y la energía potencial de las cargas.

$$\Pi = U + V \quad (1.6)$$

$$\Pi = \left[ \frac{AE}{2} \int_0^L \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \right] - \left[ \int_0^L u(\omega dx) \right] \quad (1.7)$$

Habiendo visto el Principio de la Mínima Energía Potencial y el Método de Rayleigh Ritz, estamos ahora en capacidad de desarrollar ecuaciones para elementos individuales y para ensamblajes de elementos.

A continuación se desarrollaran las ecuaciones de elementos finitos de barras.

Aunque el PMEP es realmente aplicado a toda la estructura, o sea al ensamblaje de elementos o regiones, vamos a desarrollar estas ecuaciones sin considerar la ubicación del elemento en la estructura. Esto es posible ya que la integral en la expresión de la energía potencial puede ser considerada como la suma de integrales sobre cada sección.

#### 1.4.2 ECUACIONES DE ELEMENTO FINITO USANDO GALERKIN (POLINOMIO CÚBICO):

El campo de desplazamientos asumido es un polinomio cúbico:

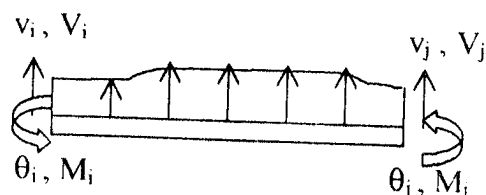
$$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (1.8)$$

en forma matricial escribimos:

$$v = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [C] \{\alpha\} \quad (1.9)$$

Relacionando los desplazamientos generalizados  $\{\alpha\}$  a los desplazamientos nodales tenemos:

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \{a\} = [A] \{\alpha\}$$



$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{a\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

de donde:

$$\{v\} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} & -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}, \quad v = [N] \{\alpha\}$$

Donde  $[N]$  son las funciones de forma del sistema, en este caso la viga analizada, estas deben cumplir con las condiciones de cada grado libertad,  $v_i, v_j, \theta_i, \theta_j$ .

La ecuación diferencial queda entonces modificada:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2}{dx^2} [N]\{a\} \right) - q(x) = 0 \quad (1.12)$$

Calculando los residuos ponderados de Galerkin y considerando EI constante en el tramo:

$$R_i = \int_0^l N_i \left[ EI \frac{d^4}{dx^4} [N]\{a\} - q(x) \right] dx = 0 \quad i=1,2,3,4 \quad (1.13)$$

o lo que es lo mismo:

$$\int_0^l \left( [N]^T EI \frac{d^4}{dx^4} [N]\{a\} - [N]^T q(x) \right) dx = 0 \quad (1.14)$$

Integrando por partes el primer termino tenemos:

$$u = [N]^T \quad dv = EI \frac{d^4}{dx^4} [N]\{a\} dx \quad \left( \int u dv = uv - \int v du \right)$$

$$\int_0^l [N]^T EI \frac{d^4}{dx^4} [N]\{a\} dx = [N]^T EI \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d}{dx} [N]^T EI \frac{d^3}{dx^3} [N]\{a\} dx$$

Integrando de nuevo por partes tenemos:

$$\int_0^l [N]^T EI \frac{d^4}{dx^4} [N]\{a\} dx = [N]^T EI \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_0^l - \left[ \frac{d}{dx} [N]^T EI \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_0^l \right] - \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} [N]^T EI \frac{d^2}{dx^2} [N]\{a\} dx$$

Si llamamos  $[B] = \frac{d^2}{dx^2} [N]$  nos queda

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$\int_0^l [B]^T EI [B] \{a\} dx - \int_0^l [N]^T q(x) dx + [N]^T EI \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_0^l - \frac{d}{dx} [N]^T EI \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_0^l = \{0\} \quad (1.15)$$

$$\left( \int_0^l [B]^T EI [B] dx \right) \{a\} = \int_0^l [N]^T q(x) dx - [N]^T EI \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_0^l + \frac{d}{dx} [N]^T EI \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_0^l \quad (1.16)$$

Como  $v = [N]\{a\}$  entonces:

$$v = \left[ 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \quad x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \quad -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right] \{a\} \quad (1.17)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} [N] \{a\} = \left[ -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} \quad 1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \quad \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} \quad -\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \right] \{a\} \quad (1.18)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} [N] \{a\} = [B] \{a\} = \left[ -\frac{6x}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \quad 1 - \frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \quad \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \quad -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right] \{a\} \quad (1.19)$$

$$\left( \int_0^l [B]^T EI [B] dx \right) \{a\} = \int_0^l [N]^T q(x) dx - \left\{ \begin{array}{c} 0 - V_i' \\ 0 - 0 \\ -V_j - 0 \\ 0 - 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 - 0 \\ 0 - (-M_i) \\ 0 - 0 \\ M_j - 0 \end{array} \right\} \quad (1.20)$$

Asumiendo  $q(x) = \text{constante} = q$  tenemos:

$$EI \left[ \begin{array}{cccc} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{c} ql/2 \\ ql^2/12 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{array} \right\} \quad (1.21)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

## 1.5 FUNCIONES DE FORMA

Las funciones de forma juegan un papel decisivo en el análisis por elementos finitos, dependiendo de la adecuada selección de estas se podrá obtener un proceso de convergencia rápido y eficaz.

Existe una amplia gama de funciones de forma dependiendo de la forma y complejidad del problema a ser estudiado, podemos nombrar entre estas funciones lineales, triangulares, tetraédricas, etc; en dos y tres dimensiones.

Una vez determinado el elemento y las funciones de forma correspondientes, las operaciones subsiguientes siguen una pauta general ya establecida, por lo que podrían encomendarse a un experto en álgebra no familiarizado con los aspectos físicos del problema. En realidad es posible programar un computador para que procese una gran variedad de problemas especificando solamente las funciones de forma. La elección de éstas es, sin embargo, un punto en que se ha de aplicar el ingenio y en el que el factor humano es primordial.

### 1.5.1 CONCEPTOS DE ELEMENTOS ESTÁNDAR Y JERÁRQUICO.

La esencia del método de los elementos finitos, consiste en aproximar la incógnita (desplazamientos).

La función de desplazamientos: Un elemento finito típico,  $e$ , se define por sus nodos  $i, j, m$  etc., y por su contorno formado por líneas rectas. Aproximando los desplazamientos  $u$  de cualquier punto del elemento mediante un vector columna,  $\hat{u}$ :

$$u \approx \hat{u} = \sum N_i a_i^e = \begin{bmatrix} N_i & N_j & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = N a^e \quad (1.22)$$

donde las componentes de  $N$  son en general funciones de posición dadas y  $a^e$  es un vector formado por los desplazamientos nodales del elemento considerado.

Para una variable escalar  $u$  esto se puede escribir como.

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i a_i = N a \quad (1.23)$$

donde  $a_i$  son los parámetros incógnitas que deben determinarse.

Hemos escogido explícitamente identificar tales variables con los valores de función incógnita en los nodos del elemento, haciendo

$$u_i = a_i \quad (1.24)$$

Nos referimos a las funciones de forma así definidas como "estándar", ya que son la base de la mayoría de los programas de elementos finitos, es claro que un valor constante de  $a_i$  especificado para todos los nodos debe resultar en un valor constante de  $\hat{u}$ :

$$\hat{u} = u_i = \text{constante} \quad (1.25)$$

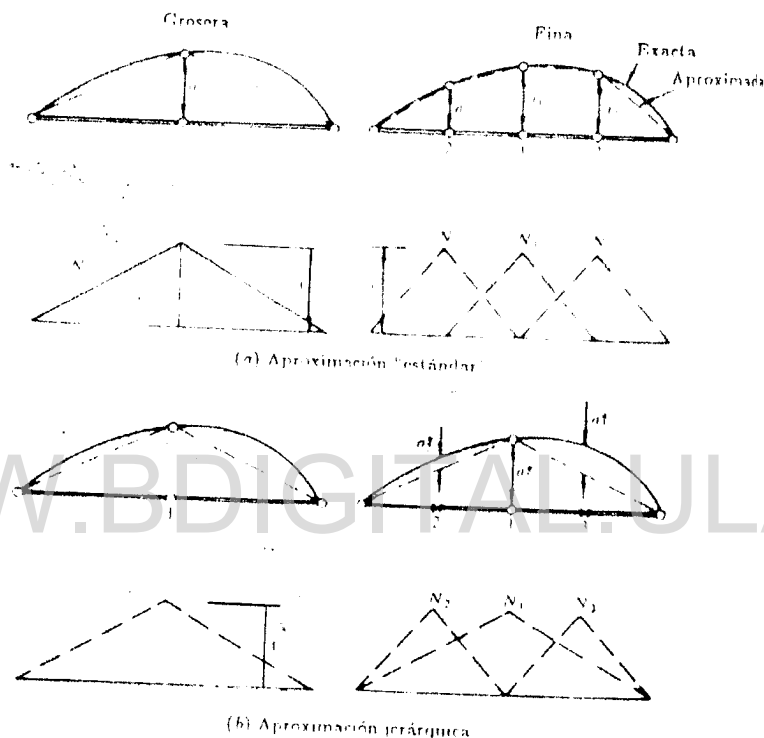
De la ecuación (1.23) se sigue que:

$$\sum_{i=1}^n N_i \quad (1.26)$$

en todos los puntos del dominio.

Las funciones de forma "estándar" tienen una seria desventaja: cuando se hace un refinamiento de los elementos se tienen que generar funciones de forma totalmente nuevas, y por lo tanto rehacer todos los cálculos. Sería ventajoso evitar esta dificultad considerando la expresión (1.23) como una serie en la que la función de forma  $N_i$  no depende del número de nodos de la malla  $n$ . Esto se consigue con las funciones de forma jerárquicas que estudiaremos a continuación.

El concepto jerárquico queda bien ilustrado en el problema unidimensional (barra elástica) de la Figura 1.4. Se tomaron por simplicidad propiedades elásticas constantes ( $D=E$ ) y las fuerzas másicas  $b$  varían de tal forma que se obtiene la solución exacta mostrada en la Figura 1.4 (con desplazamiento nulo en ambos extremos).



**Figura 1.4** Un problema unidimensional de deformación de una barra elástica uniforme mediante fuerzas másicas prescritas.[2]

Se debe notar que con la forma jerárquica es conveniente considerar la malla fina como una mejora de la malla original, añadiendo funciones adicionales de refinamiento.

Las formas jerárquicas proporcionan una conexión con otras soluciones aproximadas por series. Muchos problemas resueltos en la bibliografía clásica[2,3]

mediante desarrollo en series trigonométricas de Fourier son, de hecho, casos particulares de este procedimiento.

### 1.5.2 OBTENCIÓN DE LAS FUNCIONES DE FORMA PARA UN ELEMENTO RECTANGULAR.

Haciendo el siguiente planteamiento:

$$T(x,y) = [N_1(x,y) \ N_2(x,y) \ N_3(x,y) \ N_4(x,y)] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

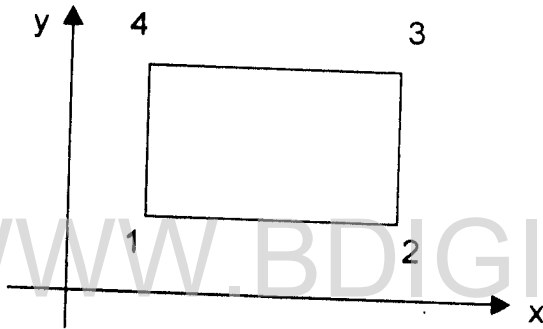


Figura 1.5 Elemento Rectangular

A lo largo de la línea 1-2 las funciones de forma deben ser función de x solamente.

$$T_{(1-2)} = [N_1(x) \ N_2(x)] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = T_{(1-2)}(x_1, y_1)$$

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

A lo largo de la línea 4-3  $y = y_3 - y_4$

$$T_{(4-3)} = [N_4(x) \ N_3(x)] \begin{Bmatrix} T_4 \\ T_3 \end{Bmatrix} = T_{(4-3)}(x_1, y_3)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$N_4(x) = \frac{x-x_3}{x_4-x_3} = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = N_1(x)$$

$$N_3(x) = \frac{x-x_4}{x_3-x_4} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = N_2(x)$$

En la dirección y:

$$T(x,y) = [N_1(y) \quad N_4(y)] \begin{Bmatrix} T_{(1-2)}(x_1, y_1) \\ T_{(1-3)}(x_1, y_3) \end{Bmatrix} = [N_1(y) \quad N_4(y)] \begin{Bmatrix} N_1(x)T_1 + N_2(x)T_2 \\ N_3(x)T_3 + N_4(x)T_4 \end{Bmatrix}$$

$$T(x,y) = [N_1(x) \quad N_1(y) \quad N_2(x) \quad N_2(y) \quad N_3(x) \quad N_3(y) \quad N_4(x) \quad N_4(y)] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}$$

Funciones de Forma para un elemento rectangular

$$N_1(x,y) = N_1(x) N_1(y) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_4}{y_1-y_4} \quad (1.28)$$

$$N_2(x,y) = N_2(x) N_2(y) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_3}{y_2-y_3} \quad (1.29)$$

$$N_3(x,y) = N_3(x) N_3(y) = \frac{x-x_4}{x_3-x_4} \frac{y-y_2}{y_3-y_2} \quad (1.30)$$

$$N_4(x,y) = N_4(x) N_4(y) = \frac{x-x_3}{x_4-x_3} \frac{y-y_1}{y_4-y_1} \quad (1.31)$$

Verificación:

$$(x,y) = (x_1, y_1) \rightarrow N_1 = 1, N_2=N_3=N_4=0 \quad x_1=x_4, y_1=y_2$$

$$(x,y) = (x_2, y_2) \rightarrow N_2 = 1, N_1=N_3=N_4=0 \quad x_2=x_3$$

$$(x,y) = (x_3, y_3) \rightarrow N_3 = 1, N_1=N_2=N_4=0 \quad x_3=x_2$$

$$(x,y) = (x_4, y_4) \rightarrow N_4 = 1, N_1=N_2=N_3=0 \quad x_1=x_4$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Es importante mencionar que las funciones de forma juegan un papel sumamente importante en la realización de esta tesis, siendo punto de partida con el cual se desarrollo toda la investigación, encontrando funciones de forma adecuadas para una mejor optimización del proceso matemático y así obtener una mejor y más rápida convergencia hacia la solución real de los diferentes problemas planteados.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:  
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

## CAPÍTULO 2

### DINÁMICA ESTRUCTURAL

#### 2.1 INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA ESTRUCTURAL [1]

Que tienen en común una autopista por donde transitan miles de vehículos, una plataforma de aviación, un aeroplano volando a 600 Km/h, una gran represa? La respuesta es que todos están sometidos a cargas dinámicas. Por esto se hace énfasis en la seguridad y desempeño de todas las estructuras, realizando análisis extensos que nos permitan determinar la respuesta dinámica de estas cargas.

Las cargas dinámicas varían con el tiempo de acuerdo a su magnitud, dirección o punto de aplicación, resultando variaciones con el tiempo en las deformaciones y esfuerzos que constituyen la respuesta dinámica.

Los problemas de dinámica estructural difieren de los problemas estáticos en dos importantes aspectos. El primero es la variación con el tiempo y la naturaleza de la excitación. Otra gran importancia es el rol que juega la aceleración en los problemas dinámicos. La Figura 2.1(a) muestra una viga en cantiliver sometida a carga estática. La deflexión y los esfuerzos internos dependen directamente de la carga  $P$ . Por otro lado, la Figura 2.1(b) muestra una viga en cantiliver similar sometida a una carga que varía con el tiempo  $P(t)$ . La aceleración de la viga aumenta la distribución de la fuerza de inercia. Si la fuerza de inercia contribuye significativamente en la deflexión y los esfuerzos internos de la estructura, entonces se requiere un análisis dinámico.

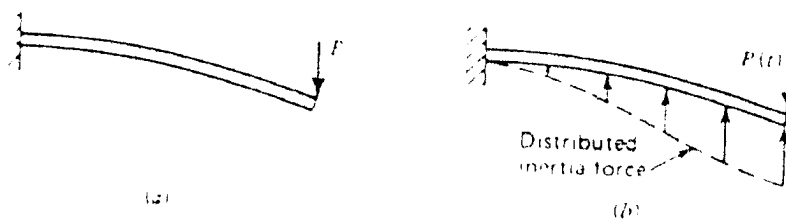


Figura 2.1 Viga en cantiliver sometida (a) carga estática. (b) carga dinámica.

## 2.2 SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD, SIN AMORTIGUACIÓN

En dinámica estructural, el número de coordenadas independientes necesario para especificar la configuración o posición de un sistema en cualquier instante de tiempo se conoce como el *número de grados de libertad*. Toda estructura continua tiene un número infinito de grados de libertad. Sin embargo, el proceso de selección o idealización de un modelo matemático apropiado permite reducir los grados de libertad a un número discreto y en algunos casos a uno solo. La Figura 2.2 muestra algunos casos de estructuras que pueden ser representados como sistemas con un grado de libertad para el análisis dinámico.

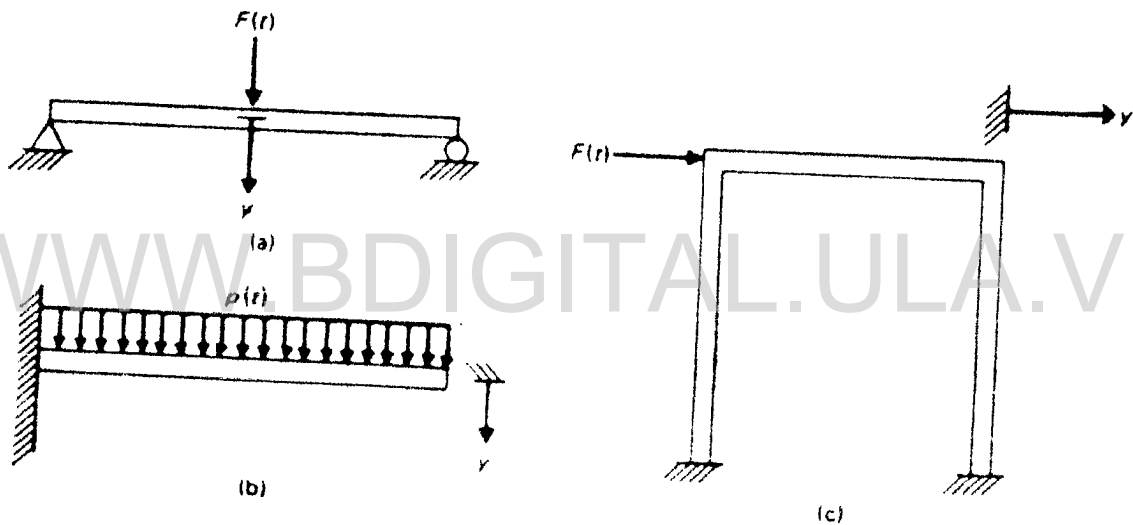


Figura 2.2 Ejemplos de estructuras modeladas con un solo grado de libertad.

Estos sistemas con un grado de libertad pueden ser representados convenientemente por el modelo matemático que aparece en la Figura 2.3, compuesto por los siguientes elementos: (a) un elemento masa,  $m$ , que representa la masa o propiedad de inercia de la estructura, (b) un elemento resorte,  $k$ , que representa las fuerzas internas del sistema y la capacidad de la estructura de almacenar energía potencial, (c) un elemento amortiguación,  $c$ , que representa las características friccionales y las pérdidas de energía de la estructura.

y (d) la fuerza de excitación  $F(t)$  en función del tiempo, que a su vez representa las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema estructural.

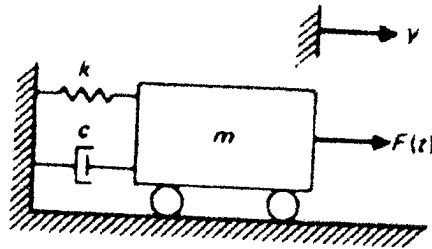


Figura 2.3 Modelo matemático para un sistema con un grado de libertad.

Los modelos matemáticos pueden proporcionar un conocimiento exacto y completo del comportamiento del modelo mismo, pero sólo pueden dar una información limitada o aproximada acerca del comportamiento del sistema físico real. No obstante, desde el punto de vista práctico, la información que se adquiere en el análisis del modelo matemático puede bastar para una adecuada comprensión del comportamiento dinámico del sistema físico, incluyendo las especificaciones de diseño y seguridad.

## 2.3 FRECUENCIA Y PERIODO

Examinando la ecuación (2.1) vemos que el movimiento descrito en esta ecuación es armónico y por lo tanto periódico; esto es, puede ser expresado por una función seno o coseno de la misma frecuencia  $\omega$ . El período puede ser fácilmente calculado ya que las funciones seno y coseno tienen un periodo de  $2\pi$ .

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (2.1)$$

El período  $T$  del movimiento está determinado por:

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = 2\pi / \omega \quad (2.2)$$

Habitualmente, el período se expresa en segundos por ciclo o simplemente en segundos, entendiéndose tácticamente que se trata de segundos por ciclo. El valor recíproco del periodo es la *frecuencia natural*,  $f$ . De la ecuación (2.2) obtenemos:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.3)$$

La frecuencia natural  $f$  se expresa generalmente en hercios o ciclos por segundo(cps). Debido a que la cantidad  $\omega$  sólo difiere de la frecuencia natural  $f$  en el factor constante  $2\pi$ , también algunas veces se le denomina frecuencia natural. Para distinguir entre estas dos expresiones de la frecuencia natural, se puede llamar a  $\omega$  frecuencia circular o angular. A menudo estas dos cantidades se distinguen por el contexto o por las unidades. La frecuencia natural  $f$  se expresa en cps, como se ha indicado, mientras que la frecuencia circular  $\omega$  se da en radianes por segundo (rad/seg).

## 2.4 ANÁLISIS DINÁMICO DE VIGAS

Las vigas son estructuras que soportan cargas o fuerzas que actúan predominantemente en la dirección transversal a la dirección longitudinal de la viga, por lo tanto, producen desplazamientos laterales y fatigas de flexión. De manera práctica estableceremos primero las características estáticas de un segmento de viga y después introduciremos los efectos dinámicos producidos por las fuerzas inerciales. Dos métodos aproximados son presentados para considerar estas fuerzas inerciales en la estructura: (1) el método de masa concentrada en el cual la masa uniformemente repartida se asigna a masas puntuales y (2) el método de masa consistente, en el cual la asignación de masas puntuales incluye efectos rotacionales. Este segundo método corresponde a las deformaciones estáticas de la viga.

### 2.4.1 PROPIEDADES ESTÁTICAS EN VIGAS

Observando la Figura 2.4 donde se muestra un segmento uniforme de viga de longitud  $L$ , momento de inercia de la sección transversal  $I$ , y el módulo de elasticidad del material  $E$ , plantearemos las relaciones entre las fuerzas o momentos estáticos designados por  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y los correspondientes desplazamientos lineales o angulares  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ , en los extremos del segmento de viga como se muestra en la figura 2.4. La relación así obtenida es la matriz de rigidez del segmento de viga.

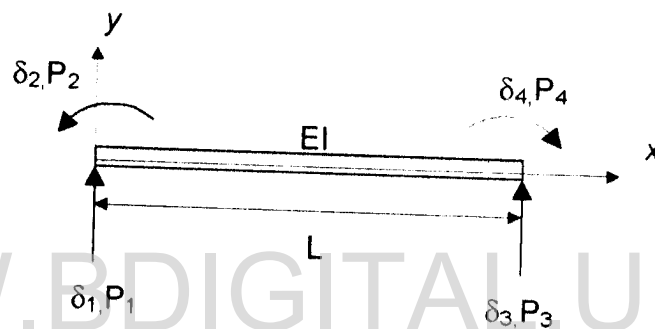


Figura 2.4 Segmento de viga, fuerzas y desplazamientos en coordenadas nodales.

La ecuación diferencial para pequeños desplazamientos transversales de una viga, conocida en los estudios elementales de resistencia de materiales, está dada por:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (2.4)$$

donde  $M(x)$  es el momento de flexión en una sección de la viga e  $(y)$  es el desplazamiento transversal.

La ecuación diferencial, ecuación (2.4), para un segmento de viga uniforme, es equivalente a:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = p(x) \quad (2.5)$$

dado que

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

y

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

en donde  $p(x)$  es la carga de la viga por unidad de longitud y  $V(x)$  es el esfuerzo de corte.

Formularemos la definición general de coeficiente de rigidez, que se designa  $k_{ij}$ ; esto es,  $k_{ij}$  es la fuerza en la coordenada nodal  $i$  debido a un desplazamiento unitario de la coordenada nodal  $j$  mientras que las otras coordenadas nodales mantienen un desplazamiento igual a cero.

La Figura 2.5 muestra las curvas de desplazamiento correspondientes a desplazamientos unitarios de cada una de las cuatro coordenadas nodales, de igual manera se muestra la designación de los coeficientes de rigidez  $k_{ij}$  correspondientes a estos desplazamientos unitarios. Para determinar las expresiones de los coeficientes  $k_{ij}$ , se empezará por encontrar las ecuaciones de estas curvas de desplazamiento.

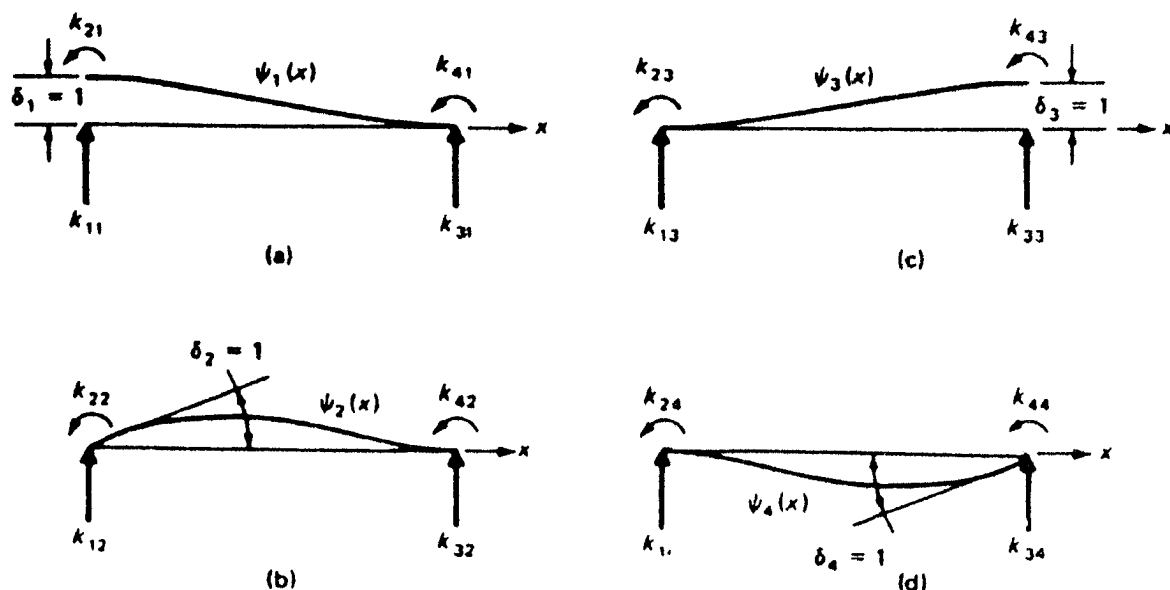


Figura 2.5 Curvas de desplazamientos estáticos debido a un desplazamiento unitario en una de las coordenadas nodales.

Considerando el segmento de viga de la figura 2.4 libre de cargas ( $p(x)=0$ ), excepto las fuerzas  $P_1, P_2, P_3, P_4$  en las coordenadas nodales. En este caso la ecuación (2.5) se reduce a:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad (2.6)$$

La integración sucesiva de la ecuación (2.6), nos da:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = C_1 \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 x + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (2.8)$$

$$y = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (2.9)$$

donde  $C_1, C_2, C_3, C_4$  son constantes de integración, calculadas según las condiciones de contorno. Por ejemplo para determinar la función  $\psi_1(x)$  de la curva mostrada en la figura 2.5(a), hacemos uso de las condiciones siguientes:

$$\text{para } x=0, \quad y(0)=1 \quad \text{y} \quad \frac{dy(0)}{dx} = 0; \quad (2.10)$$

$$\text{para } x=L, \quad y(L)=1 \quad \text{y} \quad \frac{dy(L)}{dx} = 0; \quad (2.11)$$

La introducción de estas condiciones en la ecuaciones (2.8) y (2.9) nos da un sistema de cuatro ecuaciones algebraicas para determinar las constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , que aplicadas en la ecuación (2.9), da la función:

$$\psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (2.12a)$$

en la cual  $\psi_1(x)$  es utilizada en lugar de  $y(x)$  para corresponder a la condición de desplazamiento unitario,  $\delta_1 = 1$ , impuesta a la coordenada nodal número uno, mientras que las otras coordenadas nodales permanecen sin desplazamientos,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$ .

Procediendo en forma análoga, obtenemos para los otros casos mostrados en la figura 2.5 las siguientes funciones de desplazamiento:

$$\psi_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2, \quad (2.12b)$$

$$\psi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, \quad (2.12c)$$

$$\psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right). \quad (2.12d)$$

Puesto que  $\psi_1(x)$  es la flecha correspondiente a un desplazamiento unitario,  $\delta_1$ , la flecha resultante de un desplazamiento arbitrario,  $\delta_1$  es  $\psi_1(x) \delta_1$ . Análogamente, las flechas que resultan de los desplazamientos nodales,  $\delta_2, \delta_3, \delta_4$  son respectivamente,  $\psi_2(x) \delta_2, \psi_3(x) \delta_3, \psi_4(x) \delta_4$ . Por lo tanto. La flecha  $y(x)$  en la coordenada  $x$  debida a desplazamientos arbitrarios en las coordenadas nodales del segmento de viga, estará dada por superposición como:

$$y(x) = \psi_1(x) \delta_1 + \psi_2(x) \delta_2 + \psi_3(x) \delta_3 + \psi_4(x) \delta_4 \quad (2.13)$$

Las ecuaciones de desplazamiento dadas por las ecuaciones (2.12a a 2.12d) y que corresponden a desplazamientos unitarios en las coordenadas nodales del segmento de viga, pueden ser usadas para determinar las expresiones de los coeficientes de rigidez. Por ejemplo, consideremos la viga de la figura 2.5(b) que está en equilibrio con las fuerzas que producen el desplazamiento  $\delta_2 = 1, 0$ . Para esta viga en equilibrio, suponiendo que ocurre un desplazamiento virtual igual a la curva de deformación mostrada en la figura 2.5(a).

Aplicando entonces el principio de los trabajos virtuales, el cual establece que, para un sistema elástico en equilibrio, el trabajo hecho por las fuerzas externas durante un desplazamiento virtual, es igual al trabajo de las fuerzas internas. En la aplicación de este principio observamos que, en este caso, el trabajo externo  $W_E$ , es igual al producto de la fuerza  $k_{12}$  desplazada en  $\delta_1 = 1$ , esto es

$$W_E = k_{12} \delta_1 = k_{12} \quad (2.14)$$

Este trabajo externo es igual al trabajo interno  $W_I$  efectuado por las fuerzas elásticas, durante el desplazamiento virtual. Considerando el trabajo efectuado por el momento flector, obtenemos

$$W_1 = \int_0^L M(x) d\theta \quad (2.15)$$

donde  $M(x)$  es el momento flector x de la viga y  $d\theta$  es el desplazamiento angular relativo de esta sección.

En este caso, la deformación transversal de la viga está dada por la ecuación (2.12b), que está relacionada con el momento flector por medio de la ecuación diferencial, ecuación (2.4). La aplicación de la segunda derivada  $\psi''_2(x)$  de la ecuación (2.12b) en la ecuación (2.4) nos da:

$$EI \psi''_2(x) = M(x) \quad (2.16)$$

La deformación angular  $d\theta$  producida durante el desplazamiento virtual está relacionada con la deformación transversal de la viga  $\psi_1(x)$  por

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} = \psi''_1(x)$$

$$d\theta = \psi''_1(x) dx \quad (2.17)$$

Igualando el trabajo virtual externo  $W_E$  dado por la ecuación (2.14) con el trabajo virtual interno  $W_i$ , expresado por la ecuación (2.15) después de tomar  $M(x)$  y  $d\theta$  de las ecuaciones (2.16) y (2.17) respectivamente, obtenemos finalmente, el coeficiente de rigidez:

$$k_{12} = \int_0^L EI \psi''_1(x) \psi''_2(x) dx \quad (2.18)$$

En general, cualquier coeficiente de rigidez asociado con la flexión de una viga, puede, por lo tanto, ser expresado como

$$k_{ij} = \int_0^L EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad (2.19)$$

Se puede observar en la ecuación (2.19) que  $k_{ij} = k_{ji}$  puesto que el intercambio de índices requiere solamente el intercambio de los factores  $\psi_i''(x)$  y  $\psi_j''(x)$ . La equivalencia  $k_{ij} = k_{ji}$  es un caso particular del *teorema de Betti* que, en este caso, es más conocido como *teorema recíproco de Maxwell*.

Debe señalarse que aun cuando las funciones de desplazamiento, ecuaciones (2.12a a 2.12d), fueron obtenidas para una viga uniforme, en la práctica, estas funciones se usan también para determinar los coeficientes de rigidez de vigas no uniformes.

Considerando el caso de un segmento de viga uniforme de largo  $L$  y momento de inercia de la sección transversal  $I$ , podemos calcular cualquier coeficiente de rigidez con la ecuación (2.19) y las ecuaciones (2.12). Por ejemplo, el coeficiente de rigidez  $k_{12}$  se calcula como sigue:

De la ecuación (2.12a.) obtenemos:

$$\psi_1'' = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

y de la ecuación (2.12b)

$$\psi_2'' = -\frac{4}{L^2} + \frac{6x}{L^2}$$

La aplicación en la ecuación (2.18) da

$$k_{12} = EI \int_0^L \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left( -\frac{4}{L^2} + \frac{6x}{L^2} \right) dx$$

y la integración

$$k_{12} = \frac{6EI}{L^2}$$

Puesto que el coeficiente  $k_{1j}$  ha sido definido como la fuerza en la coordenada nodal 1, debida al desplazamiento unitario de la coordenada  $j$ , las fuerzas en la coordenada 1 ocasionadas por los desplazamientos  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  en las cuatro coordenadas nodales del segmento de viga, vienen dadas por  $k_{11}\delta_1, k_{12}\delta_2, k_{13}\delta_3, k_{14}\delta_4$ , respectivamente. Por lo tanto, la fuerza total  $P_1$  en la coordenada 1 resultante de estos desplazamientos nodales se obtiene por superposición como:

$$P_1 = k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 + k_{14}\delta_4$$

Análogamente, las fuerzas en las otras coordenadas nodales se obtienen como:

$$P_2 = k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 + k_{24}\delta_4$$

$$P_3 = k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 + k_{34}\delta_4$$

$$P_4 = k_{41}\delta_1 + k_{42}\delta_2 + k_{43}\delta_3 + k_{44}\delta_4$$

(2.20)

Las ecuaciones anteriores son escritas convenientemente, en notación matricial como:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

o simbólicamente como:

$$\{P\} = [k]\{\delta\} \quad (2.22)$$

en la que  $\{P\}$  y  $\{\delta\}$  son, respectivamente, los vectores de fuerza y desplazamiento de las coordenadas nodales y  $[k]$  es la matriz de rigidez del segmento de viga.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Con la aplicación de la ecuación (2.19), en la forma expuesta, para determinar el coeficiente  $k_{12}$ , se pueden calcular todos los coeficientes de la matriz de rigidez. Para un segmento de viga uniforme, el resultado es:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

## 2.4.2 PROPIEDADES INERCIALES – MASA CONCENTRADA[1]

El método más simple para considerar las propiedades inerciales de un sistema dinámico, es concentrar la masa de la estructura en las coordenadas nodales que definen los desplazamientos de traslación; de aquí su nombre, *método de masas concentradas*. El procedimiento usual es distribuir la masa de cada elemento a los nodos del elemento. Esta distribución de la masa se determina por estática. La figura 2.6 muestra, para un segmento de viga de longitud  $L$ , la distribución de masa a los nodos para los casos de masa uniforme, triangular o general a lo largo del segmento de viga. La composición de la matriz de masa de la estructura será simplemente la suma de las contribuciones de las masas concentradas en cada coordenada nodal definida como traslación.

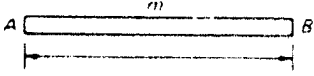
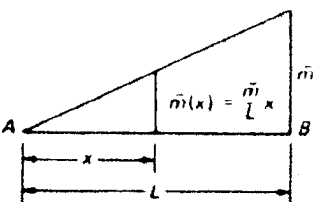
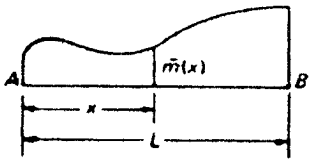
| Masa distribuida                                                                                    | Masa concentrada                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>Uniforme</p>   | $m_A = m_B = \frac{mL}{2}$                                                                   |
|  <p>Triangular</p> | $m_A = \frac{m\tilde{L}}{6}$<br>$m_B = \frac{\tilde{m}L}{3}$                                 |
|  <p>General</p>    | $m_A = \frac{\int_0^L (L-x)\tilde{m}(x)dx}{L}$<br>$m_B = \frac{\int_0^L x\tilde{m}(x)dx}{L}$ |

Figura 2.6 Masas concentradas para un segmento de viga con masa distribuida.

En este método, el efecto inercial asociado a cualquier grado de libertad angular se supone, usualmente igual a cero, aun cuando es posible asociar un valor finito a estos grados de libertad, calculando el momento de inercia de la masa en una porción del segmento de la viga, con respecto a los puntos nodales. Por ejemplo, para una viga uniforme, este cálculo consistiría en la determinación del momento de inercia de la masa en la mitad del segmento de viga respecto a cada nodo, o sea

$$I_A = I_B = \frac{1}{3} \left( \frac{mL}{2} \right) \left( \frac{L}{2} \right)^2,$$

en que  $\bar{m}$  es la masa por unidad de longitud a lo largo de la viga. Para una viga en voladizo en la cual sólo se consideran los efectos de traslación, la matriz de masa del sistema es una matriz diagonal, a saber,

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & m_3 & & & \\ & & & m_4 & & \\ & & & & m_5 & \\ & & & & & m_6 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

en el cual

$$m_1 = \frac{mL_1}{2} + \frac{mL_2}{2},$$

$$m_3 = \frac{mL_2}{2} + \frac{mL_3}{2},$$

$$m_5 = \frac{mL_3}{2}.$$

Usando un símbolo especial ( $\lceil \rceil$ ) para matrices diagonales, podemos escribir la ecuación (2.24) como:

$$[M] = \lceil m_1 \ 0 \ m_3 \ 0 \ m_5 \ 0 \rceil \quad (2.25)$$

### 2.4.3 PROPIEDADES INERCIALES – MASA CONSISTENTE

Es posible calcular los coeficientes de masa correspondientes a las coordenadas nodales de un elemento de viga por un procedimiento similar al utilizado en la determinación de los coeficientes de rigidez. Primero, definimos el coeficiente de masa  $m_{ij}$  como la fuerza en la coordenada nodal  $i$  ocasionada por una aceleración unitaria en la coordenada nodal  $j$ , mientras que todas las otras coordenadas nodales se mantienen con aceleración cero.

Consideremos el segmento de viga que se muestra en la figura 2.7(a), el cual tiene una masa uniformemente repartida de  $\bar{m}(x)$  por unidad de longitud.

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

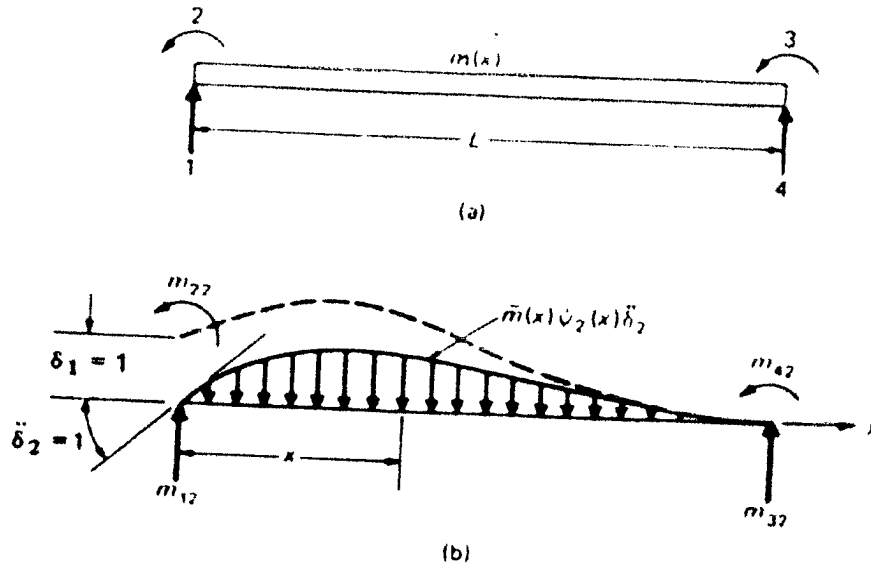


Figura 2.7 (a) Elemento de viga con masa distribuida mostrando las cuatro coordenadas nodales. (b) Elemento de viga que soporta una carga inercial, producida por la aceleración  $\delta_2 = 1$ , al efectuar un desplazamiento virtual  $\delta_1 = 1$ .

En el método de masa consistente, se supone que las deformaciones debidas a los desplazamientos dinámicos unitarios en las coordenadas nodales de un elemento de viga, están dadas por las mismas funciones  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi_3(x)$ ,  $\psi_4(x)$ , ecuaciones (2.12), que fueron obtenidas de consideraciones estáticas. Si el segmento de viga esta sometido a una aceleración unitaria en una de las coordenadas nodales, digamos  $\delta_2 = 1$ , la aceleración transversal está, entonces, dada por la segunda derivada de la ecuación (2.13) con respecto al tiempo. En este caso, con  $\delta_1 = \delta_3 = \delta_4 = 0$ , obtenemos

$$y_2(x) = \psi_2(x)\delta_2 \quad (2.26)$$

La fuerza inercial, por unidad de longitud de la viga, ocasionada por la aceleración, esta dada por:

$$f_I = m(x)y_2(x)$$

o aplicando la ecuación (2.26) por

$$f_1 = m(x)\psi_2(x)\delta_2$$

y, puesto que  $\delta_2 = 1$ ,

$$f_1 = m(x)\psi_2(x) \quad (2.27)$$

Ahora, para determinar el coeficiente de masa  $m_{12}$  le damos a la viga en la figura 14-5(b) un desplazamiento virtual correspondiente a una deformación unitaria de la coordenada 1,  $\delta_1 = 1,0$ . A continuación procedemos a aplicar el principio de los trabajos virtuales para un sistema elástico: El trabajo externo es igual al trabajo interno. El trabajo virtual de las fuerzas externas es simplemente

$$W_E = m_{12}\delta_1 = m_{12} \quad (2.28)$$

puesto que la única fuerza externa que efectúa trabajo durante el desplazamiento virtual  $\delta_1 = 1$ , es la fuerza inercial  $m_{12}$ . El trabajo virtual de las fuerzas internas por unidad de longitud a lo largo del segmento de viga, es

$$\delta W_1 = f_1(x)\psi_1(x)$$

o por la ecuación (2.27),

$$\delta W_1 = m(x)\psi_2(x)\psi_1(x),$$

y para toda la viga

$$W_1 = \int_0^L m(x)\psi_2(x)\psi_1(x)dx. \quad (2.29)$$

Igualando los trabajos virtuales externos e internos, dados respectivamente, por las ecuaciones (2.28) y (2.29) resulta:

$$m_{12} = \int_0^L m(x)\psi_2(x)\psi_1(x)dx. \quad (2.30)$$

que es la expresión para el coeficiente de masa consistente  $m_{12}$ . En general, un coeficiente de masa consistente puede calcularse con:

$$m_{ij} = \int_0^L m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx. \quad (2.31)$$

Se debe observar, de la ecuación (2.31), que  $m_{ij}=m_{ji}$ , puesto que el intercambio de índices sólo produce un intercambio de los factores  $\psi_i(x) = \psi_j(x)$  bajo la integral.

En la práctica, las funciones cúbicas, ecuaciones (2.12), son utilizadas para calcular los coeficientes de masa de cualquier viga. Para el caso especial de una viga con masa uniformemente repartida, la aplicación de la ecuación (2.31) da la siguiente relación entre las fuerzas inerciales y las aceleraciones de las coordenadas nodales:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Una vez que ha sido calculada la matriz de masa, ecuación (2.32), para cada elemento de la estructura, la matriz de masa para el sistema se compone usando el mismo procedimiento (método directo) descrito para la composición de la matriz de rigidez del sistema. La matriz de masa que resulta tendrá, en general, la misma disposición de coeficientes distintos de cero que la matriz de rigidez.

El análisis dinámico cuando se utiliza la matriz de masa concentrada requiere un esfuerzo de cálculo mucho menor que si se usa el método de masa consistente. La matriz de masa concentrada del sistema resulta ser una matriz

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

diagonal, mientras que la matriz de masa consistente contiene coeficientes fuera de la diagonal principal distintos de cero. Estos coeficientes se denominan coeficientes de *acoplamiento*.

La matriz de masa concentrada, en general, contiene ceros en la diagonal principal debido a la suposición de coeficientes iguales a cero para las fuerzas inerciales correspondientes a los grados de libertad de desplazamientos angulares. Este hecho hace necesaria la eliminación por condensación estática de los grados de libertad correspondientes a rotaciones, reduciendo, consecuentemente, las dimensiones del problema dinámico. No obstante, el análisis dinámico que emplea el método de masa consistente da resultados más exactos comparados con los obtenidos usando el método de masas concentradas con la misma discretización de elementos.

## 2.5 ANÁLISIS DINÁMICO DE PÓRTICOS PLANOS

El análisis dinámico, que utiliza el método de la matriz de rigidez para estructuras modeladas como vigas, fue presentado en el punto anterior (2.4). Este método de análisis, cuando es aplicado a vigas, requiere el cálculo de las matrices para los elementos (matrices de rigidez, masa y amortiguación), la composición de estas matrices en el sistema de matrices correspondiente, la formación del vector de las fuerzas y la solución de las ecuaciones resultantes del movimiento. Estas ecuaciones, como se ha visto, pueden ser resueltas, en general, por el método de superposición modal o por la integración directa de las ecuaciones diferenciales del movimiento. En este punto se presenta el análisis dinámico de estructuras que han sido modeladas como pórticos.

Se empezará con el análisis de estructuras modeladas como *pórticos planos* con cargas que actúan en el plano del pórtico. El análisis dinámico de estas estructuras requiere la inclusión de los efectos axiales en las matrices de rigidez y

de masa. También requiere una transformación de las coordenadas del elemento (coordenadas locales) a las coordenadas del sistema (coordenadas globales). Con la excepción de la consideración de los efectos axiales y de la necesidad de transformar coordenadas, el análisis dinámico por el método de rigidez, cuando se aplica a pórticos planos, es idéntico al análisis de vigas presentado en el punto anterior.

### 2.5.1 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA EFECTOS AXIALES

La inclusión de las fuerzas axiales en la matriz de rigidez de un segmento de viga en flexión, requiere la determinación de los coeficientes de rigidez para cargas axiales. Para derivar la matriz de rigidez para un elemento de viga con cargas axiales, consideremos en la figura 2.8 un segmento de viga en el que actúan las fuerzas axiales  $P_1$  y  $P_2$ , que producen los desplazamientos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  en los nodos del elemento.

Para un segmento de viga prismático y uniforme, de longitud  $L$  y sección transversal  $A$ , es relativamente simple obtener la relación de rigidez para los efectos axiales con la aplicación de la ley de Hooke. En la viga que se muestra en la figura 2.8, el desplazamiento  $\delta_1$  producido por la fuerza  $P_1$  que actúa en el nodo 1, mientras el nodo 2 se mantiene fijo ( $\delta_2 = 0$ ), viene dado por:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{AE} \quad (2.33)$$

De la ecuación (2.33) y de la definición del coeficiente de rigidez  $k_{11}$  fuerza en la coordenada nodal 1 para producir un desplazamiento unitario, ( $\delta_1=1$ ), obtenemos:

$$k_{11} = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{AE}{L} \quad (2.34a)$$

El equilibrio del segmento de viga sometido a la fuerza  $k_{11}$  requiere de una fuerza  $k_{21}$  de igual magnitud, en el otro extremo, o sea,

$$k_{21} = -k_{11} = -\frac{AE}{L} \quad (2.34b)$$

Análogamente, los otros coeficientes de rigidez son:

$$k_{22} = \frac{AE}{L} \quad (2.34c)$$

y

$$k_{12} = -\frac{AE}{L} \quad (2.34c)$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

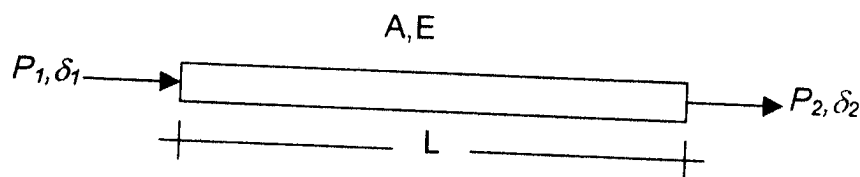


Figura 2.8. Elemento de viga con cargas axiales  $P_1$  y  $P_2$  y sus correspondientes desplazamientos nodales  $\delta_1$  y  $\delta_2$ .

Los coeficientes de rigidez dados por las ecuaciones (2.34) son los coeficientes de la matriz de rigidez para un elemento de viga, relacionando las fuerzas y los desplazamientos axiales de un segmento de viga prismático, esto es,

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

La matriz de rigidez correspondiente a las coordenadas nodales del segmento de viga que se muestra en la figura 2.9, se obtiene combinando, en una sola matriz los coeficientes de la matriz de rigidez para efectos axiales, ecuación (2.35), y los coeficientes de la matriz de efectos de flexión, ecuación (2.23). La matriz que resulta de esta combinación, relaciona las fuerzas  $P_i$  y los desplazamientos  $\delta_i$  en las coordenadas indicadas en la figura 2.34 dando:

Simétrica

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2/I & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & 0 \\ -AL^2/I & 0 & 0 & AL^2/I & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

o en notación concisa:

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (2.37)$$

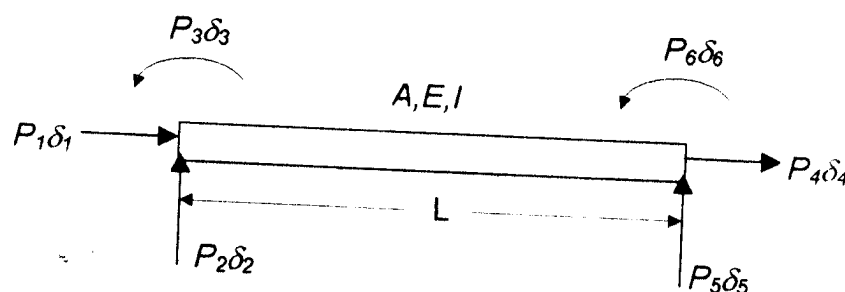


Figura 2.9 Elemento de viga que muestra fuerzas modales axiales y de flexión, con los desplazamientos correspondientes

### 2.5.2 MATRIZ DE MASA PARA EFECTOS AXIALES

La determinación de los coeficientes de masa para los efectos axiales de un elemento de viga pueden obtenerse por cualquiera de los métodos indicados previamente para los efectos de flexión: (1) el método de masas concentradas y (2) el método de masa consistente. En el método de masas concentradas, la asignación de masa a los nodos del elemento de viga puede hallarse mediante consideraciones estáticas, que para una viga uniforme asignan a cada nodo la mitad de la masa total del segmento de viga. Por lo tanto, para un segmento de viga prismático, la relación entre las fuerzas nodales axiales y las aceleraciones nodales, viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{mL}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

en donde  $m$  es la masa por unidad de longitud. La combinación de los coeficientes de masa axiales y de flexión, usando la formulación de masas concentradas, da para las coordenadas nodales de la figura 2.9 la siguiente matriz diagonal:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{mL}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

Para calcular los coeficientes de la matriz de masa consistente es necesario, primero, determinar las funciones correspondientes a una unidad de desplazamiento axial en una de las coordenadas nodales. Consideremos en la figura 2.10 con un desplazamiento unitario  $\delta_1 = 1$  del nodo 1, mientras que el otro nodo 2 se mantiene fijo.  $\delta_2 = 0$ . Si  $u = u(x)$ , es el desplazamiento de la sección  $x$ , el

desplazamiento de la sección  $x + dx$  será  $u + du$ . Es evidente entonces, que el elemento  $dx$  en la nueva posición ha experimentado un cambio de longitud igual a  $du$  y, por lo tanto, su deformación por unidad de longitud es  $du/dx$ . Puesto que la ley de Hooke establece que la razón de la fatiga  $\sigma = P/A$  y la deformación por unidad de longitud es igual al módulo de elasticidad, podemos escribir:

$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{AE} \quad (2.40)$$

La integración con respecto a  $x$ , da

$$u = \frac{P}{AE} x + C \quad (2.41)$$

en donde  $C$  es la constante de integración. Introduciendo las condiciones de contorno para  $x=0$ ,  $u=1$  y para  $x=L$ ,  $u=0$ , obtenemos la función de desplazamientos  $u_1(x)$  correspondiente al desplazamiento unitario  $\delta_1 = 1$ .

$$u_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (2.42)$$

Análogamente, la función de desplazamiento  $u_2(x)$  que corresponde a un desplazamiento unitario  $\delta_2 = 1$ .

$$u_2(x) = \frac{x}{L} \quad (2.43)$$

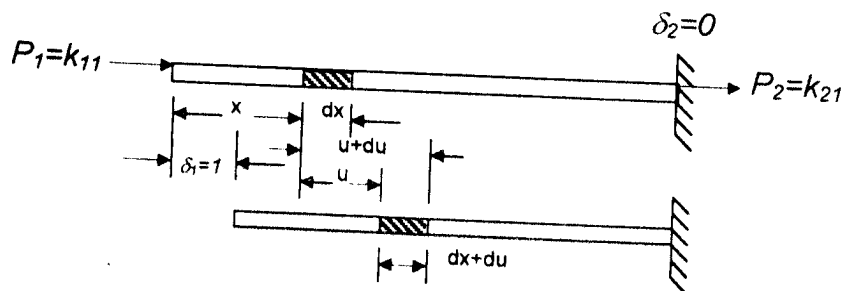


Figura 2.10 Desplazamientos en el nodo 1 ( $\delta_1 = 1$ ) de un elemento

Aplicando el principio de los trabajos virtuales y siguiendo el procedimiento similar al utilizado en el punto (2.4), obtenemos finalmente la matriz de masa consistente para un elemento de viga uniforme con respecto a las coordenadas nodales que se muestran en la figura 2.9.

$$\begin{matrix} & & & & & & \text{Simétrica} \\ \left\{ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix} \right\} & = & \frac{mL}{420} & \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} & \left\{ \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad (2.44)$$

o en notación condensada

$$\{P\} = [M_c] \{\delta\}$$

en el cual  $[M_c]$  es la matriz de masa consistente.

### 2.5.3 TRANSFORMACION DE COORDENADAS

La matriz de rigidez del elemento de viga, ecuación (2.36), y la matriz de masa, ecuación (2.44), han sido obtenidas con respecto a las coordenadas nodales definidas para ejes de coordenadas fijos en el elemento de viga. Estos ejes se llaman ejes locales o ejes del elemento, mientras que los ejes de toda la estructura se conocen como *ejes globales* o *ejes del sistema*. La figura 2.11 muestra un elemento de viga con las fuerzas nodales  $P_1, P_2, \dots, P_6$  con respecto a las coordenadas locales  $x, y, z$  y fuerzas  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_6$  con respecto al sistema de coordenadas globales  $X, Y, Z$ . Nuestro propósito es transformar las matrices del elemento (rigidez, masa, etc.) de coordenadas locales a coordenadas globales. Esta transformación es necesaria para que todas las matrices de los elementos se

refieran al mismo sistema de coordenadas y, por lo tanto, sean compatibles para efectuar su composición y obtener las matrices correspondientes para la estructura. Empezaremos expresando las fuerzas  $(P_1, P_2, P_3)$  en función de las fuerzas  $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3)$ . Puesto que estos dos sistemas de fuerzas son equivalentes, de la figura 2.11 obtenemos las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} P_1 &= \bar{P}_1 \cos \theta + \bar{P}_2 \sin \theta, \\ P_2 &= -\bar{P}_1 \sin \theta + \bar{P}_2 \cos \theta, \\ P_3 &= \bar{P}_3 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Las primeras dos ecuaciones de la ecuación (2.45) pueden ser escritas en notación matricial como:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Análogamente obtenemos las relaciones entre las fuerzas en el otro nodo:

$$\begin{aligned} P_4 &= \bar{P}_4 \cos \theta + \bar{P}_5 \sin \theta, \\ P_5 &= -\bar{P}_4 \sin \theta + \bar{P}_5 \cos \theta, \\ P_6 &= \bar{P}_6 \end{aligned} \quad (2.47)$$

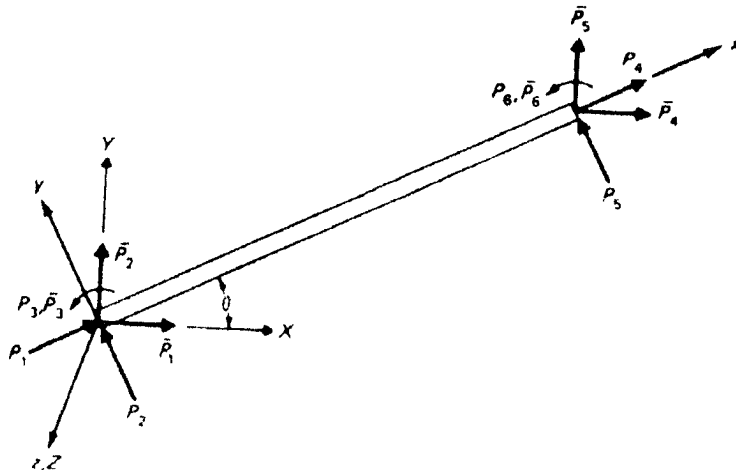


Figura 2.11 Elemento de viga mostrando las fuerzas nodales en coordenadas locales (x,y,z) y en coordenadas globales (X,Y,Z).

Las ecuaciones (2.45) y (2.47) pueden, convenientemente, ordenarse en una ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

o en notación condensada:

$$\{P\} = [T]\{\bar{P}\} \quad (2.49)$$

en que  $\{P\}$  y  $\{\bar{P}\}$  son, respectivamente, los vectores de las fuerzas nodales del elemento en coordenadas locales y globales y  $[T]$  es la matriz de transformación dada por la matriz de dimensiones 6 x 6 indicada en la ecuación (2.48)

Repitiendo el mismo procedimiento, obtenemos la relación entre los

desplazamientos nodales  $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6)$  en coordenadas locales y los correspondientes desplazamientos en coordenadas globales  $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6)$  a saber:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

o

$$\{\delta\} = [T]\{\delta\} \quad (2.51)$$

Ahora, la sustitución del vector  $\{P\}$  y del vector  $\{\delta\}$  en la ecuación de rigidez con respecto a ejes locales  $\{P\} = [K]\{\delta\}$  por los valores dados en las ecuaciones (2.49) y (2.51), respectivamente, nos da:

$$[T]\{P\} = [K][T]\{\delta\}$$

o bien

$$\{P\} = [T]^{-1}[K][T]\{\delta\} \quad (2.52)$$

en el cual  $[T]^{-1}$  es la matriz inversa de  $[T]$ . Como se puede verificar, la matriz de transformación  $[T]$  es una matriz ortogonal, o sea,  $[T]^{-1} = [T]^T$ . Por lo tanto,

$$\{P\} = [T]^T [K][T]\{\delta\} \quad (2.53)$$

o, en una notación más conveniente

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (2.54)$$

en el cual

$$[K] = [T]^T [K][T] \quad (2.55)$$

es la matriz de rigidez para el elemento de viga con respecto al sistema de coordenadas globales.

Repitiendo el procedimiento de transformación para la matriz de masas concentradas, ecuación (2.39), o de masa consistente, ecuación (2.44), obtenemos análogamente:

$$\{P\} = [M]\{\delta\}$$

en que

$$[M] = [T]^T [M_I] [T] \quad (2.56)$$

es la matriz de masa para el segmento de viga con respecto al sistema de coordenadas globales y  $[T]$  es la matriz de transformación definida en la ecuación (2.50).

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

## **CAPÍTULO 3**

### **ANÁLISIS NUMÉRICO**

En este capítulo se presentara el proceso llevado acabo para la obtención de las funciones de forma y luego sus respectivas matrices de rigidez y masa con las cuales se realizaron los análisis estructurales dinámico y estático correspondientes.

En el análisis dinámico se hizo uso de los programas 14 VIGAS y 15 PÓRTICOS PLANOS en lenguaje BASIC del Profesor Mario Paz, solo se cambio en ambos programas las subrutinas de las matrices de rigidez y masa por las nuevas matrices encontradas. También se uso el programa 8 FRECUENCIAS NATURALES del mismo Profesor Mario Paz (Cuando habían pocos grados de libertad), cuando los grados de libertad eran significativos hubo que generar una subrutina en lenguaje MATLAB donde se obtenían las frecuencias naturales para cualquier numero de grados de libertad.

El análisis estático se realizo usando el programa del Profesor Héctor Febres también en lenguaje BASIC realizando el mismo cambio que se realizo en le análisis dinámico solo en la matriz de rigidez.

Es de notar que todas las comparaciones de resultados se realizaron con los programas mencionados anteriormente sin realizar ninguna modificación.

#### **3.1 PROCESO DE OBTENCIÓN DE LAS FUNCIONES DE FORMA.**

Se mostrará el proceso de obtención de las funciones de forma por medio de procesos matemáticos complejos, para lo cual se hizo uso de un programa de análisis matemático MAPLEV, el cual fue indispensable para la manipulación matemática debido a la gran dificultad de estos.

Se partirá de un segmento de viga donde se muestran las curvas de desplazamiento correspondientes a desplazamientos unitarios de cada una de las cuatro coordenadas nodales (Figura 3.1).

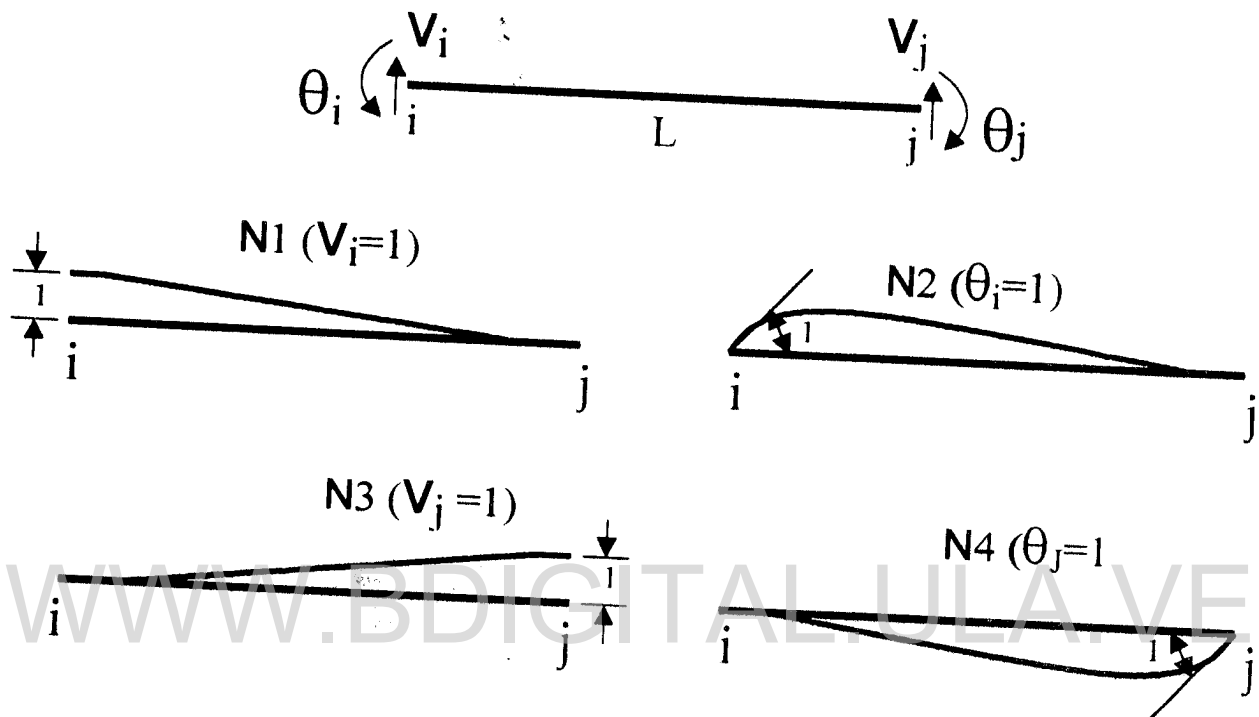


Figura. 3.1 Curvas de desplazamientos debido a un desplazamiento unitario en una de las coordenadas nodales.

El procedimiento para la obtención de las funciones de forma correspondientes a este segmento de viga fue descrito en el Capítulo 1 punto (1.4.2 ECUACIONES DE ELEMENTO FINITO USANDO GALERKIN), por esto mostramos las funciones de formas conocidas y sus respectivas derivadas:

$$N1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x=0 \rightarrow N1=1 ; x=L \rightarrow N1=0 \quad (3.1)$$

$$dN1 = -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \quad x=0 \rightarrow dN1=0 ; x=L \rightarrow dN1=0 \quad (3.2)$$

$$N2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad x=0 \rightarrow N2=1 ; x=L \rightarrow N2=0 \quad (3.3)$$

$$dN2 = 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \quad x=0 \rightarrow dN2=1 ; x=L \rightarrow dN2=0 \quad (3.4)$$

$$N3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad x=0 \rightarrow N3=0 ; x=L \rightarrow N3=1 \quad (3.5)$$

$$dN3 = -\frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \quad x=0 \rightarrow dN3=0 ; x=L \rightarrow dN3=0 \quad (3.6)$$

$$N4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad x=0 \rightarrow N4=0 ; x=L \rightarrow N4=0 \quad (3.7)$$

$$dN4 = -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \quad x=0 \rightarrow dN4=0 ; x=L \rightarrow dN4=1 \quad (3.8)$$

De la misma forma se desarrollarán las nuevas funciones de forma utilizando funciones trigonométricas (combinaciones de senos y cosenos), fueron muchas las pruebas realizadas para poder obtener las funciones adecuadas, las cuales se presentan a continuación:

$$N_1' = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \quad x=0 \rightarrow N_1' = 1 ; x=L \rightarrow N_1' = 0 \quad (3.9)$$

$$dN_1' = -\frac{\pi}{2L} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \quad x=0 \rightarrow dN_1' = 0 ; x=L \rightarrow dN_1' = 0 \quad (3.10)$$

$$N_2' = -\frac{x-L}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \quad x=0 \rightarrow N_2' = 0 ; x=L \rightarrow N_2' = 0 \quad (3.11)$$

$$dN_2' = -\frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{x-L}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad x=0 \rightarrow dN_2' = 1 ; x=L \rightarrow dN_2' = 0 \quad (3.12)$$

$$N_3' = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \quad x=0 \rightarrow N_3' = 0 ; x=L \rightarrow N_3' = 1 \quad (3.13)$$

$$dN_3' = \frac{\pi}{2L} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \quad x = 0 \rightarrow dN_3' = 0 \quad ; \quad x = L \rightarrow dN_3' = 0 \quad (3.14)$$

$$N_4' = -\frac{x}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \quad x = 0 \rightarrow N_4' = 0 \quad ; \quad x = L \rightarrow N_4' = 0 \quad (3.15)$$

$$dN_4' = -\frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{x}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad x = 0 \rightarrow dN_4' = 0 \quad ; \quad x = L \rightarrow dN_4' = 1 \quad (3.16)$$

Luego de la obtención de estas funciones se procedió a combinar las funciones de forma conocidas con las nuevas funciones de forma, esto para obtener una rápida y mejor aproximación a la solución real del problema estudiado, por medio de esto se obtuvieron las funciones definitivas con las cuales se encontraron las nuevas matrices de rigidez y masa para los diferentes análisis estructurales.

A continuación se presentan dichas funciones de forma:

$$N_f = \frac{(N + N')}{2}$$

$$Nf_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{3x^2}{2L^2} + \frac{x^3}{L^3} \quad x = 0 \rightarrow Nf_1 = 1 \quad ; \quad x = L \rightarrow Nf_1 = 0 \quad (3.17)$$

$$dNf_1 = -\frac{1}{4} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L} - 3 \frac{x}{L^2} + 3 \frac{x^2}{L^3} \quad x = 0 \rightarrow dNf_1 = 0 \quad ; \quad x = L \rightarrow dNf_1 = 0 \quad (3.18)$$

$$Nf_2 = -\frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} + \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \quad x = 0 \rightarrow Nf_2 = 0 \quad ; \quad x = L \rightarrow Nf_2 = 0 \quad (3.19)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$dNf_2 = -\frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{(x-L)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} + \frac{1}{2} - 2\frac{x}{L} + \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2}$$

$$x = 0 \rightarrow dNf_2 = 1 \quad ; \quad x = L \rightarrow dNf_2 = 0$$

(3.20)

$$Nf_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} \quad x = 0 \rightarrow Nf_3 = 0 \quad ; \quad x = L \rightarrow Nf_3 = 1$$

(3.21)

$$dNf_3 = \frac{1}{4} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\pi}{L} + 3\frac{x}{L^2} - 3\frac{x^2}{L^3} \quad x = 0 \rightarrow dNf_3 = 0 \quad ; \quad x = L \rightarrow dNf_3 = 0$$

(3.22)

$$Nf_4 = -\frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \quad x = 0 \rightarrow Nf_4 = 0 \quad ; \quad x = L \rightarrow Nf_4 = 0$$

(3.23)

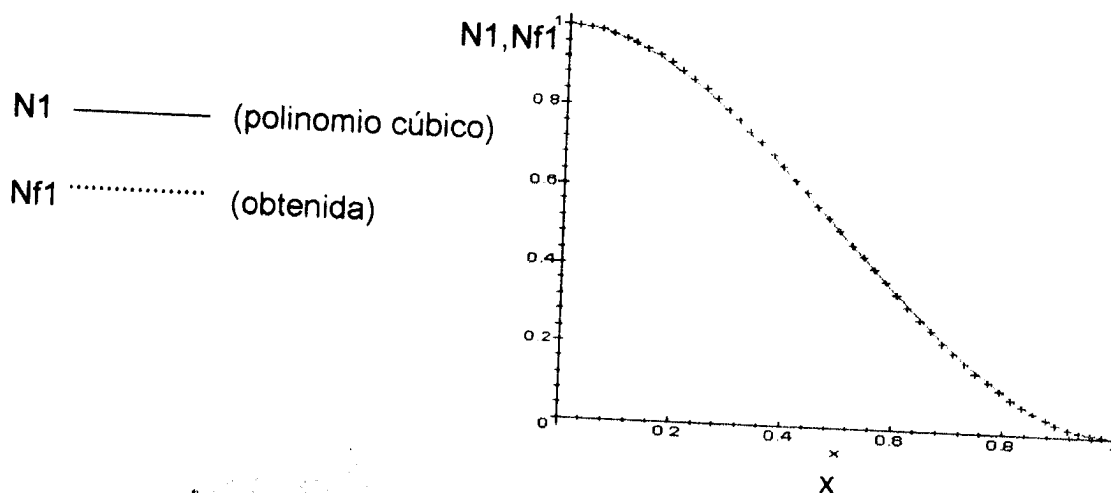
$$dNf_4 = -\frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{x \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{x}{L} + \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2}$$

$$x = 0 \rightarrow dNf_4 = 0 \quad ; \quad x = L \rightarrow dNf_4 = 1$$

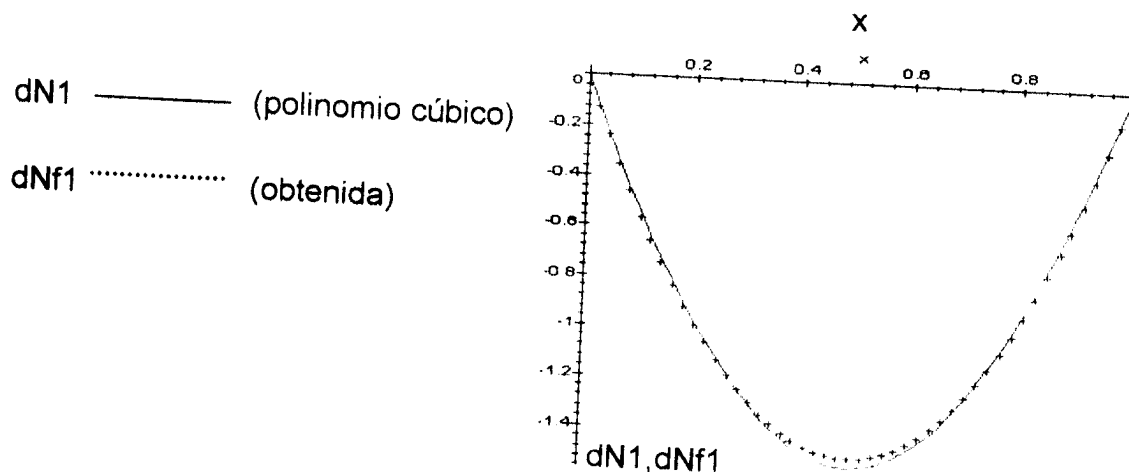
(3.24)

### 3.2 COMPARACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES DE FORMA

#### 3.2.1 FUNCIÓN DE FORMA $N1, Nf1, dN1, dNf1$



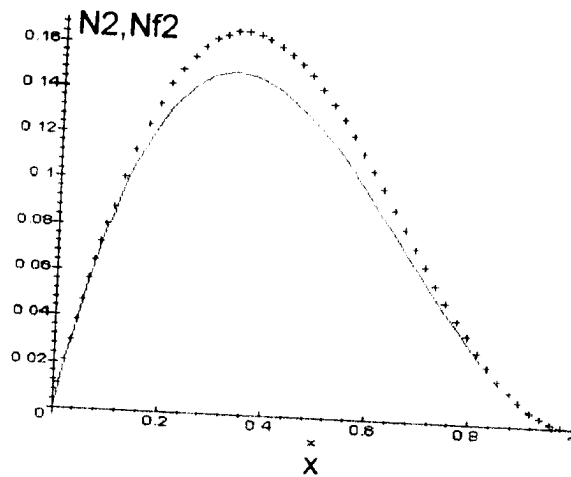
WWW.BDIGITAL.ULA.VE



### 3.2.2 FUNCIÓN DE FORMA $N_2, N_f2, dN_2, dN_f2$

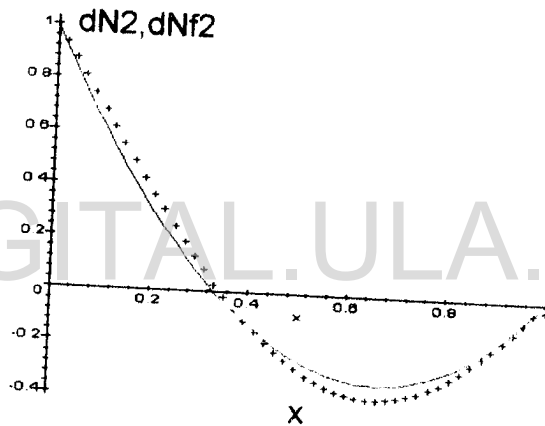
$N_2$  — (polinomio cúbico)

$N_f2$  ..... (obtenida)



$dN_2$  — (polinomio cúbico)

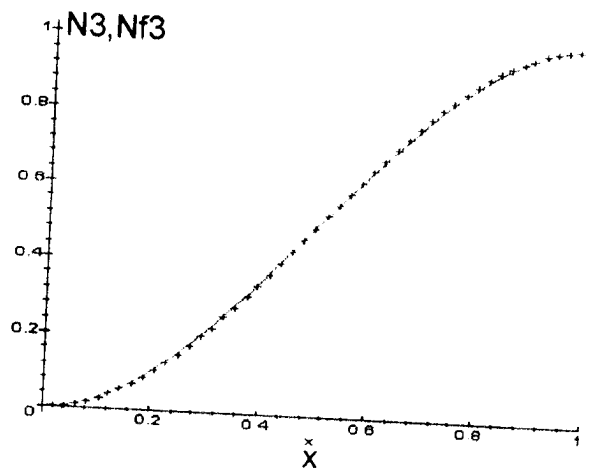
$dN_f2$  ..... (obtenida)



### 3.2.3 FUNCIÓN DE FORMA $N_3, N_f3, dN_3, dN_f3$

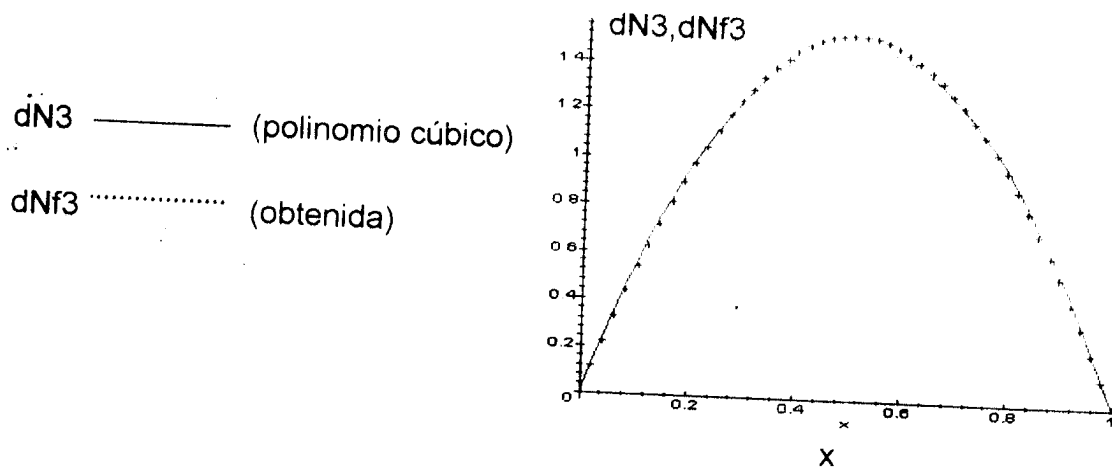
$N_3$  — (polinomio cúbico)

$N_f3$  ..... (obtenida)

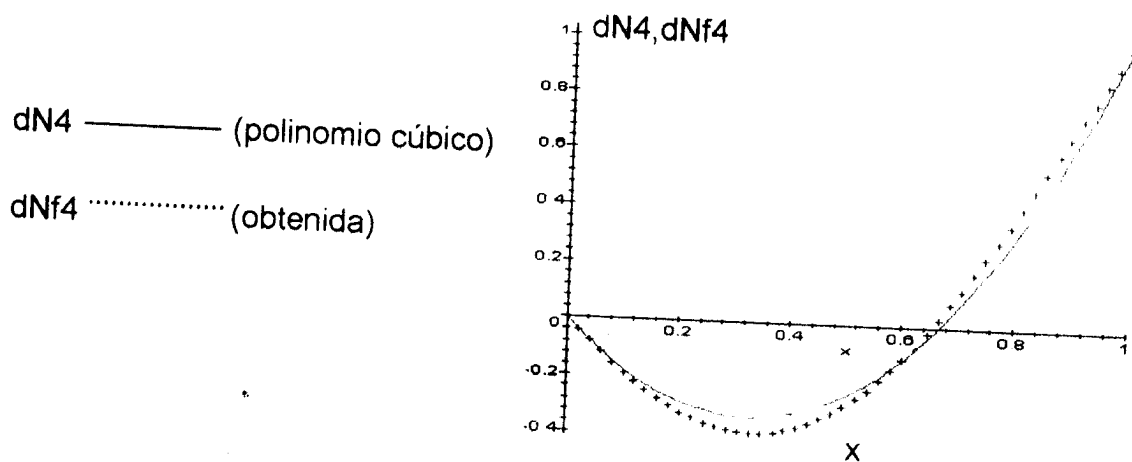
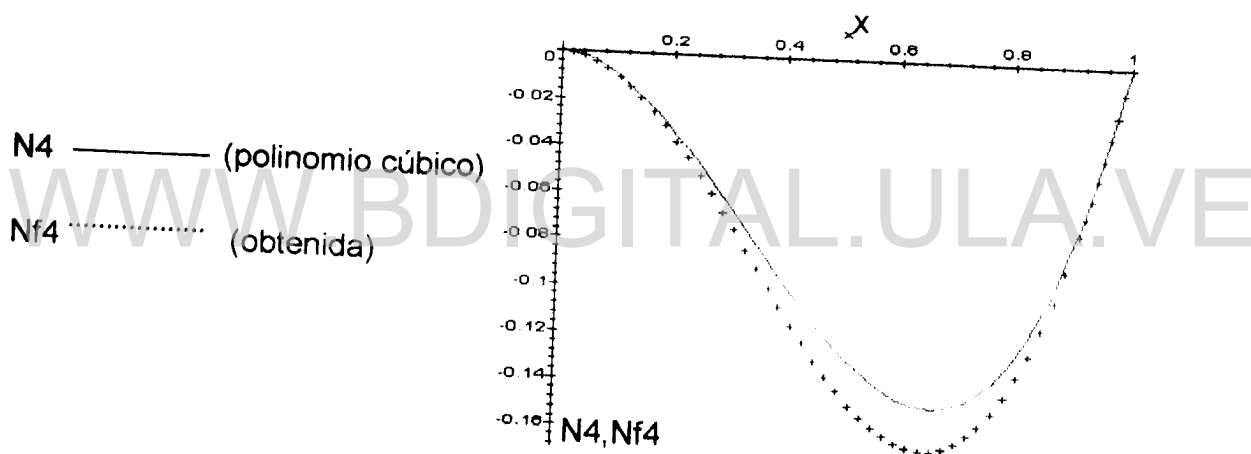


Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)



### 3.2.4 FUNCIÓN DE FORMA $N4, Nf4, dN4, dNf4$



### 3.3 ANÁLISIS MATRICIAL

Se presenta el proceso de obtención de las matrices de rigidez y masa a través de las nuevas funciones de forma obtenidas en el punto anterior, la manipulación matemática se realizó de igual manera a través del programa de cálculo matemático MAPLEV.

El procedimiento es el siguiente.

$$[B] = [L] [N] \quad (3.25)$$

donde:

[B] = Matriz de Ensamblaje

[N] = Matriz de Funciones de Forma (N1, N2, N3, N4)

[L] = Matriz Operador

$$[L] = -\frac{d^2}{dx^2}$$

$$[B] = [L][N] = \left( -\frac{d^2}{dx^2} \right) \begin{bmatrix} \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right); \left( -\frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} + \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right); \\ \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} \right); \left( -\frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right) \end{bmatrix}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$[B] = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi^2}{L^2} + \frac{3}{L^2} - 6 \frac{x}{L^3} \right); \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{2}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \right); \\ \left( -\frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} - \frac{3}{L^2} + 6 \frac{x}{L^3} \right); \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{1}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \right) \end{bmatrix}$$

$$[B^T] = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi^2}{L^2} + \frac{3}{L^2} - 6 \frac{x}{L^3} \right) \\ \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{2}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \right) \\ \left( -\frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} - \frac{3}{L^2} + 6 \frac{x}{L^3} \right) \\ \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{1}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \right) \end{bmatrix}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

### 3.3.1 MATRIZ DE RIGIDEZ

$$[K_y] = \int_0^L [B_1^T] EI [B_1] dx \quad (3.26)$$

Calculo de los coeficientes de la Matriz de Rigidez:

#### 3.3.1.1 Coeficiente $K_{11}$

$$[K_{11}] = \int_0^L [B_1^T] EI [B_1] dx$$

$$[K_{11}] = \int_0^L \left[ \left( \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi^2}{L^2} + \frac{3}{L^2} - 6 \frac{x}{L^3} \right) EI \left( \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi^2}{L^2} + \frac{3}{L^2} - 6 \frac{x}{L^3} \right) \right] dx$$

$$[K_{11}] = \frac{12.04403410EI}{L^3}$$

#### 3.3.1.2 Coeficiente $K_{12} = K_{21}$

$$[K_{12} = K_{21}] = \int_0^L [B_1^T] EI [B_2] dx$$

$$[K_{12} = K_{21}] = \int_0^L \left[ \left( \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi^2}{L^2} + \frac{3}{L^2} - 6 \frac{x}{L^3} \right) EI \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{2}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \right) \right] dx$$

$$[K_{12} = K_{21}] = \frac{6.042125688EI}{L^2}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

### 3.3.1.3 Coeficiente $K_{13} = K_{31}$

$$[K_{13} = K_{31}] = \int_0^L [B_1]^T EI [B_3] dx$$

$$[K_{13} = K_{31}] = \int_0^L \left[ \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi^2}{L^2} + \frac{3}{L^2} - 6 \frac{x}{L^3} \right] EI \left[ -\frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} - \frac{3}{L^2} + 6 \frac{x}{L^3} \right] dx$$

$$[K_{13} = K_{31}] = -\frac{12.04403410EI}{L^3}$$

### 3.3.1.4 Coeficiente $K_{14} = K_{41}$

$$[K_{14} = K_{41}] = \int_0^L [B_1]^T EI [B_4] dx$$

$$[K_{14} = K_{41}] = \int_0^L \left[ \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi^2}{L^2} + \frac{3}{L^2} - 6 \frac{x}{L^3} \right] EI \left[ \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{1}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \right] dx$$

$$[K_{14} = K_{41}] = \frac{6.042125688EI}{L^2}$$

### 3.3.1.5 Coeficiente $K_{22}$

$$[K_{22}] = \int_0^L [B_2]^T EI [B_2] dx$$

$$[K_{22}] = \int_0^L \left[ \begin{pmatrix} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{(x-L)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\pi}{L^2} + \frac{2}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \end{pmatrix} EI \right] dx$$

$$[K_{22}] = \frac{4.098733517EI}{L}$$

3.3.1.6 Coeficiente  $K_{23} = K_{32}$

$$[K_{23} = K_{32}] = \int_0^L [B_2]^T EI [B_3] dx$$

$$[K_{23} = K_{32}] = \int_0^L \left[ \begin{pmatrix} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{(x-L)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\pi}{L^2} + \frac{2}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \end{pmatrix} EI \right] \left[ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} - \frac{3}{L^2} + 6 \frac{x}{L^3} \end{pmatrix} \right] dx$$

$$[K_{23} = K_{32}] = -\frac{6.042125688EI}{L^2}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

### 3.3.1.7 Coeficiente $K_{24} = K_{42}$

$$[K_{24} = K_{42}] = \int_0^L [B_2^T] EI [B_4] dx$$

$$[K_{24} = K_{42}] = \int_0^L \left[ \begin{pmatrix} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{2}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \\ \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{1}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \end{pmatrix} EI \right] dx$$

$$[K_{24} = K_{42}] = \frac{1.981883241 EI}{L}$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

### 3.3.1.8 Coeficiente $K_{33}$

$$[K_{33}] = \int_0^L [B_3^T] EI [B_3] dx$$

$$[K_{33}] = \int_0^L \left[ \left( -\frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} - \frac{3}{L^2} + 6 \frac{x}{L^3} \right) EI \left( \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi^2}{L^2} + \frac{3}{L^2} - 6 \frac{x}{L^3} \right) \right] dx$$

$$[K_{33}] = \frac{12.04403410 EI}{L^3}$$

### 3.3.1.9 Coeficiente $K_{34} = K_{43}$

$$[K_{34} = K_{43}] = \int_0^L [B_3]^T EI [B_4] dx$$

$$[K_{34} = K_{43}] = \int_0^L \left[ \left( -\frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} - \frac{3}{L^2} + 6 \frac{x}{L^3} \right) EI \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{1}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \right) \right] dx$$

$$[K_{34} = K_{43}] = -\frac{6.042125688EI}{L^2}$$

### 3.3.1.10 Coeficiente $K_{44}$

$$[K_{44}] = \int_0^L [B_4]^T EI [B_4] dx$$

$$[K_{44}] = \int_0^L \left[ \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{1}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \right) EI \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L} - \frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \pi}{L^2} + \frac{1}{L} - 3 \frac{x}{L^2} \right) \right] dx$$

$$[K_{44}] = \frac{4.098733517EI}{L}$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Ensamblando los coeficientes se obtienen finalmente la nueva Matriz de Rigidez

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12.04403410 & 6.042125688L & -12.04403410 & 6.042125688L \\ 6.042125688L & 4.098733517L^2 & -6.042125688L & 1.981883241L^2 \\ -12.04403410 & -6.042125688L & 12.04403410 & -6.042125688L \\ 6.042125688L & 1.981883241L^2 & -6.042125688L & 4.098733517L^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

En forma comparativa se muestra la matriz de rigidez conocida.

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

### 3.3.2 MATRIZ DE MASA

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

$$[M_{ij}] = \int_0^L [N_i]^T EI [N_j] dx \quad (3.29)$$

Calculo de los coeficientes de la Matriz de Masa:

#### 3.3.2.1 Coeficiente $M_{11}$

$$[M_{11}] = \int_0^L [N_1]^T EI [N_1] dx$$

$$[M_{11}] = \int_0^L \left[ \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) EI \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) \right] dx$$

$$[M_{11}] = \frac{EI}{420} [156.7452753L]$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

### 3.3.2.2 Coeficiente $M_{12} = M_{21}$

$$[M_{12} = M_{21}] = \int_0^L [N_1]^T EI [N_2] dx$$

$$[M_{12} = M_{21}] = \int_0^L \left[ \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) EI \left( -\frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} + \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right) \right] dx$$

$$[M_{12} = M_{21}] = \frac{EI}{420} [24.29387480 L^2]$$

### 3.3.2.3 Coeficiente $M_{13} = M_{31}$

$$[M_{13} = M_{31}] = \int_0^L [N_1]^T EI [N_3] dx$$

$$[M_{13} = M_{31}] = \int_0^L \left[ \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) EI \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} \right) \right] dx$$

$$[M_{13} = M_{31}] = \frac{EI}{420} [53.25472477 L]$$

### 3.3.2.4 Coeficiente $M_{14} = M_{41}$

$$[M_{14} = M_{41}] = \int_0^L [N_1]^T EI [N_4] dx$$

$$[M_{14} = M_{41}] = \int_0^L \left[ \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) EI \left( -\frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right) \right] dx$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$[M_{14} = M_{41}] = \frac{EI}{420} [-14.48357375L^2]$$

### 3.3.2.5 Coeficiente $M_{22}$

$$[M_{22}] = \int_0^L [N_2^T] EI [N_2] dx$$

$$[M_{22}] = \int_0^L \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} + \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right] EI \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} + \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right] dx$$

$$[M_{22}] = \frac{EI}{420} [4.953948671L^3]$$

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

### 3.3.2.6 Coeficiente $M_{23} = M_{32}$

$$[M_{23} = M_{32}] = \int_0^L [N_2^T] EI [N_3] dx$$

$$[M_{23} = M_{32}] = \int_0^L \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} + \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right] EI \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} \right] dx$$

$$[M_{23} = M_{32}] = \frac{EI}{420} [14.48357375L^2]$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

### 3.3.2.7 Coeficiente $M_{24} = M_{42}$

$$[M_{24} = M_{42}] = \int_0^L [N_2^T] EI [N_4] dx$$

$$[M_{24} = M_{42}] = \int_0^L \left[ \left( -\frac{1}{2} \frac{(x-L) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} + \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right) EI \left( -\frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right) \right] dx$$

$$[M_{24} = M_{42}] = \frac{EI}{420} [-3.767444941L^3]$$

### 3.3.2.8 Coeficiente $M_{33}$

$$[M_{33}] = \int_0^L [N_3^T] EI [N_3] dx$$

$$[M_{33}] = \int_0^L \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} \right) EI \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} \right) \right] dx$$

$$[M_{33}] = \frac{EI}{420} [156.7452753L]$$

### 3.3.2.9 Coeficiente $M_{34} = M_{43}$

$$[M_{34} = M_{43}] = \int_0^L [N_3^T] EI [N_4] dx$$

$$[M_{34} = M_{43}] = \int_0^L \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{3}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} \right) EI \left( -\frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right) \right] dx$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$[M_{34} = M_{43}] = \frac{EI}{420} [-24.29387480L^2]$$

### 3.3.2.10 Coeficiente $M_{44}$

$$[M_{44}] = \int_0^L [N_4]^T EI [N_4] dx$$

$$[M_{44}] = \int_0^L \left[ -\frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right] EI \left[ -\frac{1}{2} \frac{x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^2} \right] dx$$

$$[M_{44}] = \frac{EI}{420} [4.953948671L^3]$$

Ensamblando los coeficientes se obtienen finalmente la nueva Matriz de Masa

$$[M] = \frac{EI}{420} \begin{bmatrix} 156.7452753L & 24.29387480L^2 & 53.25472477L & -14.48357375L^2 \\ 24.29387480L^2 & 4.953948671L^3 & 14.48357375L^2 & -3.767444941L^3 \\ 53.25472477L & 14.48357375L^2 & 156.7452753L & -24.29387480L^2 \\ -14.48357375L^2 & -3.767444941L^3 & -24.29387480L^2 & 4.953948671L^3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

En forma comparativa se muestra la matriz de masa conocida.

$$[M] = \frac{EI}{420} \begin{bmatrix} 156L & 22L^2 & 54L & -13L^2 \\ 22L^2 & 4L^3 & 13L^2 & -3L^3 \\ 54L & 13L^2 & 156L & -22L^2 \\ -13L^2 & -3L^3 & -22L^2 & 4L^3 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

### 3.4 PROGRAMAS DE COMPUTACIÓN

Como se menciona anteriormente se hizo uso de los programas de computación del Profesor Mario Paz y el Profesor Héctor Febres, solo con algunos cambios, a continuación se presentan dichas modificaciones.

#### 3.4.1 ANÁLISIS DINAMICO.

Programa 14. "VIGAS" (Mario Paz).

Solo se cambiaron las subrutinas de las matrices de rigidez y de masa.

Subrutina Matriz de Rigidez.

|                         |        |                                   |
|-------------------------|--------|-----------------------------------|
| 1930 AK(1,1)=12*AA      |        | 1930 AK(1,1)=12.04403410*AA       |
| 1940 AK(1,2)=6*AA*SL    |        | 1940 AK(1,2)=6.042125688*AA*SL    |
| 1950 AK(1,3)=-12*AA     |        | 1950 AK(1,3)=-12.04403410*AA      |
| 1960 AK(1,4)=6*AA*SL    |        | 1960 AK(1,4)=6.042125688*AA*SL    |
| 1970 AK(2,2)=4*AA*SL*SL | →      | 1970 AK(2,2)=4.098733517*AA*SL*SL |
| 1980 AK(2,3)=-6*AA*SL   | CAMBIO | 1980 AK(2,3)=-6.042125688*AA*SL   |
| 1990 AK(2,4)=2*AA*SL*SL |        | 1990 AK(2,4)=1.981883241*AA*SL*SL |
| 2000 AK(3,3)=12*AA      |        | 2000 AK(3,3)=12.04403410*AA       |
| 2010 AK(3,4)=-6*AA*SL   |        | 2010 AK(3,4)=-6.042125688*AA*SL   |
| 2020 AK(4,4)=4*AA*SL*SL |        | 2020 AK(4,4)=4.098733516*AA*SL*SL |

Subrutina Matriz de Masa

|                          |        |                                    |
|--------------------------|--------|------------------------------------|
| 2840 AM(1,1)=156*BB      |        | 2840 AM(1,1)=156.7452753*BB        |
| 2850 AM(1,2)=22*BB*SL    |        | 2850 AM(1,2)=24.29387480*BB*SL     |
| 2860 AM(1,3)=54*BB       |        | 2860 AM(1,3)=53.25472477*BB        |
| 2870 AM(1,4)=-13*BB*SL   |        | 2870 AM(1,4)=-14.48357375*BB*SL    |
| 2880 AM(2,2)=4*BB*SL*SL  | →      | 2880 AM(2,2)=4.953948671*BB*SL*SL  |
| 2890 AM(2,3)=13*BB*SL    | CAMBIO | 2890 AM(2,3)=14.48357376*BB*SL     |
| 2900 AM(2,4)=-3*BB*SL*SL |        | 2900 AM(2,4)=-3.767444941*BB*SL*SL |
| 2910 AM(3,3)=156*BB      |        | 2910 AM(3,3)=156.7452753*BB        |
| 2920 AM(3,4)=-22*BB*SL   |        | 2920 AM(3,4)=-24.29387480*BB*SL    |
| 2930 AM(4,4)=4*BB*SL*SL  |        | 2930 AM(4,4)=4.953948671*BB*SL*SL  |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

## Programa 15. "PÓRTICOS PLANOS" (Mario Paz).

Solo se cambiaron las subrutinas de las matrices de rigidez y de masa.

### Subrutina Matriz de Rigidez.

|                         |        |                                   |
|-------------------------|--------|-----------------------------------|
| 2010 AK(1,1)=12*AA      |        | 2010 AK(1,1)=12.04403410*AA       |
| 2020 AK(1,2)=6*AA*SL    |        | 2020 AK(1,2)=6.042125688*AA*SL    |
| 2030 AK(1,3)=-12*AA     |        | 2030 AK(1,3)=-12.04403410*AA      |
| 2040 AK(1,4)=6*AA*SL    |        | 2040 AK(1,4)=6.042125688*AA*SL    |
| 2050 AK(2,2)=4*AA*SL*SL | →      | 2050 AK(2,2)=4.098733517*AA*SL*SL |
| 2060 AK(2,3)=-6*AA*SL   | CAMBIO | 2060 AK(2,3)=-6.042125688*AA*SL   |
| 2070 AK(2,4)=2*AA*SL*SL |        | 2070 AK(2,4)=1.981883241*AA*SL*SL |
| 2080 AK(3,3)=12*AA      |        | 2080 AK(3,3)=12.04403410*AA       |
| 2090 AK(3,4)=-6*AA*SL   |        | 2090 AK(3,4)=-6.042125688*AA*SL   |
| 2100 AK(4,4)=4*AA*SL*SL |        | 2100 AK(4,4)=4.098733516*AA*SL*SL |

### Subrutina Matriz de Masa

|                          |        |                                    |
|--------------------------|--------|------------------------------------|
| 3040 AM(1,1)=156*BB      |        | 3040 AM(1,1)=156.7452753*BB        |
| 3050 AM(1,2)=22*BB*SL    |        | 3050 AM(1,2)=24.29387480*BB*SL     |
| 3060 AM(1,3)=54*BB       |        | 3060 AM(1,3)=53.25472477*BB        |
| 3070 AM(1,4)=-13*BB*SL   |        | 3070 AM(1,4)=-14.48357375*BB*SL    |
| 3080 AM(2,2)=4*BB*SL*SL  | →      | 3080 AM(2,2)=4.953948671*BB*SL*SL  |
| 3090 AM(2,3)=13*BB*SL    | CAMBIO | 3090 AM(2,3)=14.48357376*BB*SL     |
| 3100 AM(2,4)=-3*BB*SL*SL |        | 3100 AM(2,4)=-3.767444941*BB*SL*SL |
| 3110 AM(3,3)=156*BB      |        | 3110 AM(3,3)=156.7452753*BB        |
| 3120 AM(3,4)=-22*BB*SL   |        | 3120 AM(3,4)=-24.29387480*BB*SL    |
| 3130 AM(4,4)=4*BB*SL*SL  |        | 3130 AM(4,4)=4.953948671*BB*SL*SL  |

Se presento un problema cuando se tenía un número significativo de grados de libertad ya que los programas no tenían esa capacidad, por lo que se creo una subrutina en lenguaje del programa MATLAB, con el cual se leían las matrices de rigidez y masa luego se calculaban las frecuencias naturales. A continuación se presenta dicha subrutina.

### 3.4.1.1 PROGRAMA "FRECUENCIAS NATURALES" (MATLAB)

Programa realizado en lenguaje de MATLAB que lee un archivo de texto `sx.txt` generado por otro programa y regenera las matrices de rigidez y de masa, luego calcula las frecuencias en cps.

#### Listado del Programa

```
clc;
echo off;
clear all;
close;
load sk.txt;
v=sk;
n=input('introduzca el numero de grados de libertad ');
h=input('introduzca el tamaño de cada matriz ');
i=1;k=2;j=2;
A(1,1)=v(1);
for i=2:n
    j=i;
    if (j==i)
        if j==2
            A(i,j)=v(k);
        else
            k=k+1;
            A(i,j)=v(k);
        end
        for t=i-1:-1:1
            k=k+1;
            A(t,i)=v(k);
            A(i,t)=A(t,i);
            t=t-1;
        end
    end
    i=i+1;
end
disp('Matriz de Rigidez del Sistema');
A

w=1;z=h+2;y=2;
B(1,1)=v(h+1);
for w=2:n
    y=w;
    if (w==y)
```

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

```

if y==2
B(w,y)=v(z);
else
z=z+1;
B(w,y)=v(z);
end
for tt=w-1:-1:1
z=z+1;
B(tt,w)=v(z);
B(w,tt)=B(tt,w);
tt=tt-1;
end
w=w+1;
end
end
disp('Matriz de Masa del Sistema');
B
disp('Frecuencia en cps');
sort(sqrt(eig(A,B))/(2*pi))

```

### 3.4.2 ANÁLISIS ESTÁTICO.

Programa “ANÁLISIS DE PÓRTICOS” (Héctor Febres).

Solo se cambió la subrutina de la matriz de rigidez.

Subrutina Matriz de Rigidez.

```

500 D2=X/L2: D3=Y/L2: A3=I1/L2: A2=4*A3: S=A/L2: B=2*A3:
    C=6*A3*/L2: DD=12*A3/L2/L2

```

Se cambio por:

```

500 D2=X/L2: D3=Y/L2: A3=I1/L2: A2=4.098733517*A3: S=A/L2:
B=1.981883241*A3: C=6.042125688*A3*/L2: DD=12.04403410*A3/L2/L2

```

En el capítulo siguiente se presentara una serie de ejemplos numéricos, donde se pondrá en practica todo lo mencionado en este capítulo.

## CAPÍTULO 4

### EJEMPLOS NUMÉRICOS

En este capítulo se presentarán las aplicaciones de los programas en los análisis dinámicos y estáticos con algunos ejemplos numéricos, se empezará con el análisis de vigas luego lo se hará en pórticos, después de realizar esta serie de ejemplos se presentarán las conclusiones pertinentes.

#### 4.1 ANÁLISIS DINÁMICO

En los casos de vigas se utilizó el Programa 14 "VIGAS" (Mario Paz) original y con nuestra modificación.

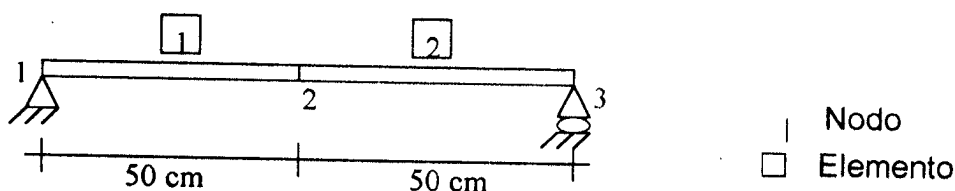
Es de notar que el valor exacto fue tomado del análisis dinámico de vigas con propiedades distribuidas. Apéndice [I].

En los casos de pórticos se utilizó el Programa 15 "PÓRTICOS" (Mario Paz) original y con nuestra modificación, se tomó como valor exacto las corridas con mayor discretización.

##### 4.1.1 VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

DATOS:  $L=100\text{cm}$ ,  $E=238752\text{ Kg/cm}^2$ ,  $\text{masa}/L=0.1\text{ Kg seg}^2/\text{cm}^2$ ,  $\text{Inercia}=100\text{cm}^4$ .

##### 4.1.1.1 Caso 1: Viga discretizada en dos elementos

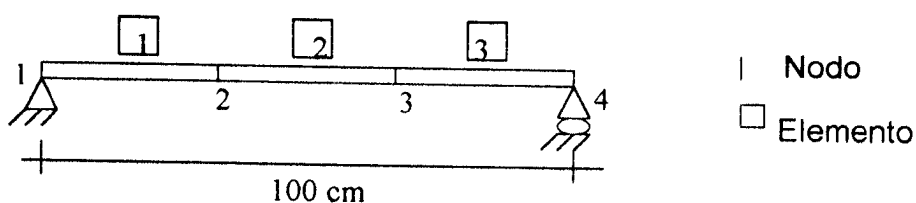


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR % | M.Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|---------|---------|--------|
| Modo 1 | 2.43   | 2.44       | 0.4     | 2.45    | 0.8    |
| Modo 2 | 9.71   | 10.78      | 11.0    | 9.93    | 2.3    |
| Modo 3 | 21.84  | 27.09      | 24.0    | 24.96   | 14.3   |
| Modo 4 | 38.83  | 49.38      | 27.2    | 45.64   | 17.5   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.1.2 Caso 2: Viga discretizada en tres elementos

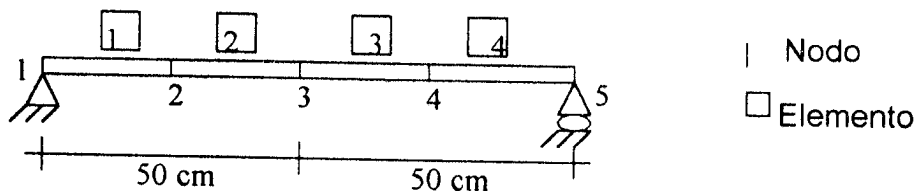


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|       | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|-------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo1 | 2.43   | 2.43       | 0.0    | 2.49    | 2.5    |
| Modo2 | 9.71   | 9.82       | 1.1    | 9.73    | 0.2    |
| Modo3 | 21.84  | 24.25      | 11.0   | 22.35   | 2.3    |
| Modo4 | 38.83  | 45.08      | 16.1   | 41.92   | 8.0    |
| Modo5 | 60.68  | 80.66      | 32.9   | 74.07   | 22.1   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.1.3 Caso 3: Viga discretizada en cuatro elementos



Licencia Creative Commons:

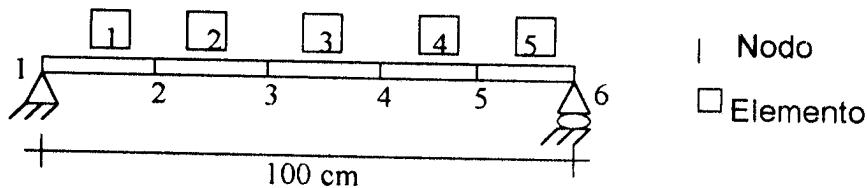
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M. Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|--------|--------|-------------|--------|---------|--------|
| Modo 1 | 2.43   | 2.43        | 0.0    | 2.53    | 4.1    |
| Modo 2 | 9.71   | 9.75        | 0.4    | 9.81    | 1.0    |
| Modo 3 | 21.84  | 22.24       | 1.8    | 21.86   | 0.1    |
| Modo 4 | 38.83  | 43.1        | 11.0   | 39.73   | 2.3    |
| Modo 5 | 60.68  | 68.51       | 12.9   | 64.06   | 5.6    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.1.4 Caso 4: Viga discretizada en cinco elementos



Se obtuvieron los siguientes resultados:

|       | Exacto | M. Conocida | ERROR% | M. Nueva | ERROR% |
|-------|--------|-------------|--------|----------|--------|
| Modo1 | 2.43   | 2.43        | 0.0    | 2.58     | 6.2    |
| Modo2 | 9.71   | 9.72        | 0.1    | 9.9      | 2.0    |
| Modo3 | 21.84  | 22.02       | 0.8    | 21.94    | 0.5    |
| Modo4 | 38.83  | 39.73       | 2.3    | 38.87    | 0.1    |
| Modo5 | 60.68  | 67.35       | 11.0   | 62.07    | 2.3    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.1.5 Resultados en forma grafica

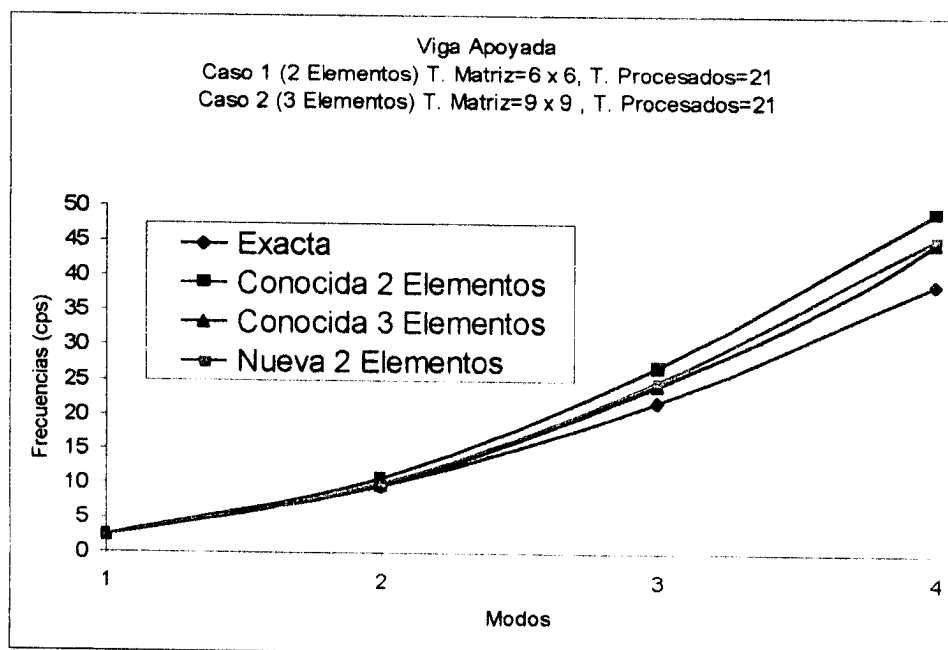
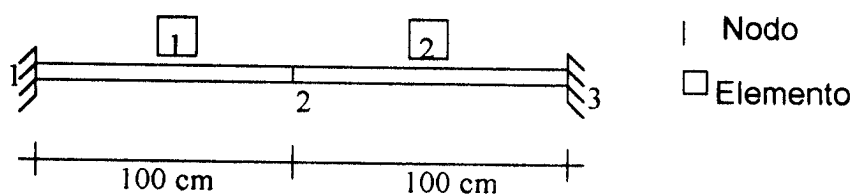


Figura 4.1 Viga simplemente apoyada, comparación gráfica de resultados

#### 4.1.2 VIGA EMPOTRADA EMPOTRADA

DATOS:  $L=200\text{cm}$ ,  $E=6580000\text{ Kg/cm}^2$ ,  $\text{masa}/L=0.1\text{ Kg seg}^2/\text{cm}^2$ ,  $\text{Inercia}=100\text{cm}^4$ .

##### 4.1.2.1 Caso 1: Viga discretizada en dos elementos

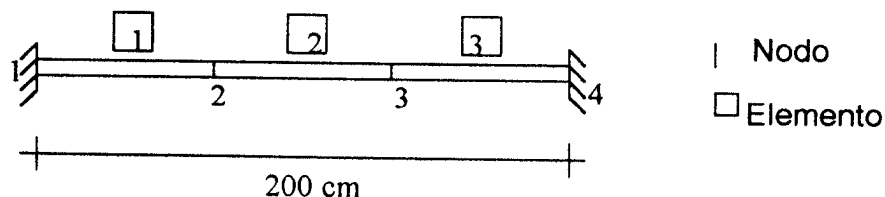


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M. Conocida | ERROR % | M. Nueva | ERROR% |
|--------|--------|-------------|---------|----------|--------|
| Modo 1 | 7.22   | 7.34        | 1.7     | 7.33     | 1.5    |
| Modo 2 | 19.91  | 26.46       | 32.9    | 24.07    | 20.9   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.2.2 Caso 2: Viga discretizada en tres elementos

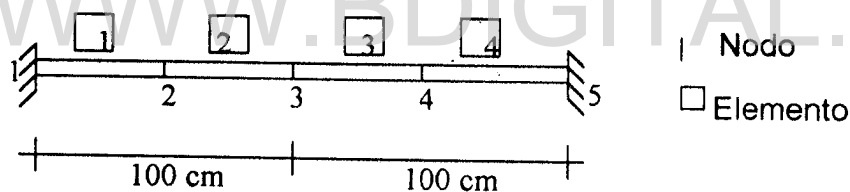


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR % | M.Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|---------|---------|--------|
| Modo 1 | 7.22   | 7.25       | 0.4     | 7.31    | 1.2    |
| Modo 2 | 19.91  | 20.3       | 2.0     | 20.17   | 1.3    |
| Modo 3 | 39.02  | 47.22      | 21.0    | 43.34   | 11.1   |
| Modo 4 | 50.3   | 93.84      | 86.6    | 85.84   | 70.7   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.2.3 Caso 3: Viga discretizada en cuatro elementos



Se obtuvieron los siguientes resultados:

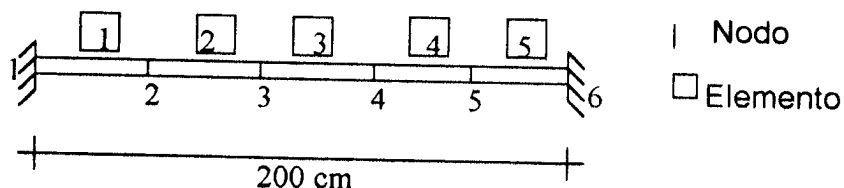
|        | Exacto | M.Conocida | ERROR % | M.Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|---------|---------|--------|
| Modo 1 | 7.22   | 7.23       | 0.1     | 7.35    | 1.8    |
| Modo 2 | 19.91  | 20.09      | 0.9     | 20.04   | 0.7    |
| Modo 3 | 39.02  | 39.86      | 2.2     | 39.51   | 1.3    |
| Modo 4 | 50.3   | 75.4       | 49.9    | 69.53   | 38.2   |
| Modo 5 | 96.36  | 124.71     | 29.4    | 114.53  | 18.9   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

#### 4.1.2.4 Caso 4: Viga discretizada en cinco elementos



Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR % | M.Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|---------|---------|--------|
| Modo 1 | 7.22   | 7.23       | 0.1     | 7.4     | 2.5    |
| Modo 2 | 19.91  | 19.98      | 0.4     | 20.12   | 1.1    |
| Modo 3 | 39.02  | 39.56      | 1.4     | 39.22   | 0.5    |
| Modo 4 | 50.3   | 65.91      | 31.0    | 65.26   | 29.7   |
| Modo 5 | 96.36  | 110.67     | 14.9    | 102.33  | 6.2    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.2.5 Resultados en forma gráfica

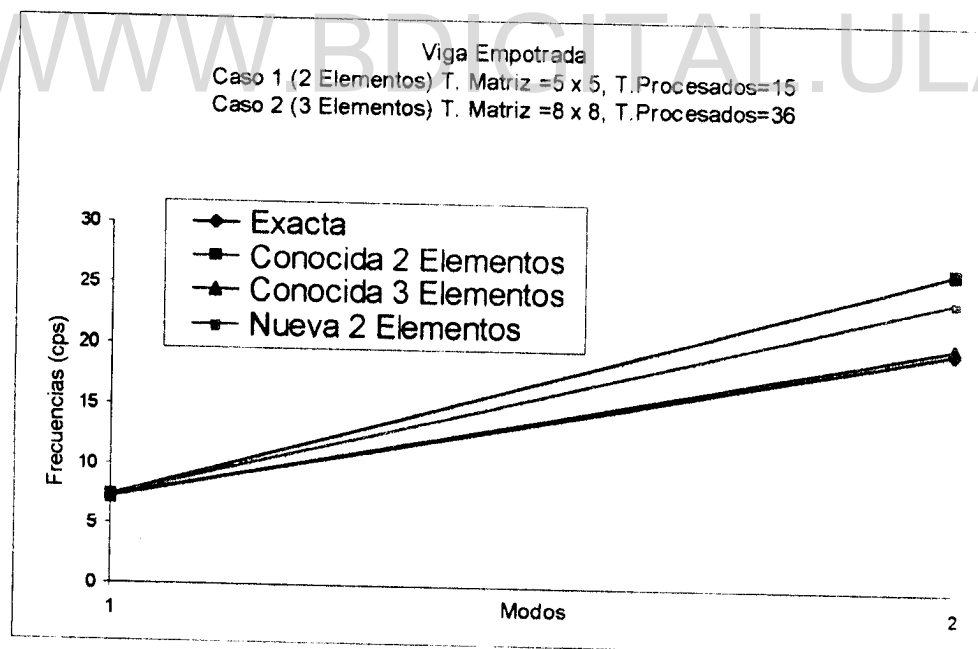
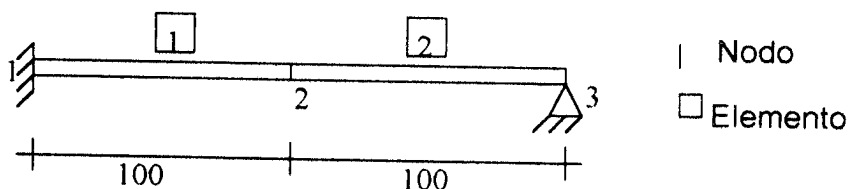


Figura 4.2 Viga Empotrada, comparación gráfica de resultados

### 4.1.3 VIGA EMPOTRADA APOYADA

DATOS:  $L=200\text{cm}$ ,  $E=6580000\text{ Kg/cm}^2$ ,  $\text{masa}/L=0.1\text{ Kg seg}^2/\text{cm}^2$ ,  $\text{Inercia}=100\text{cm}^4$ .

#### 4.1.3.1 Caso 1: Viga discretizada en dos elementos

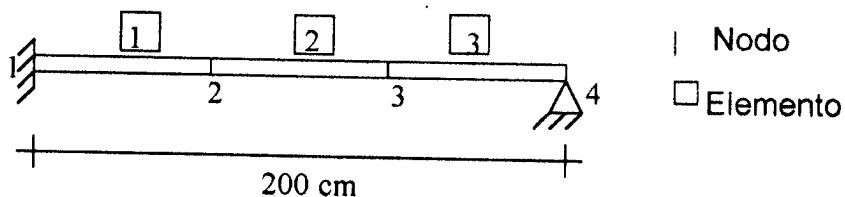


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR % | M.Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|---------|---------|--------|
| Modo 1 | 4.97   | 5.02       | 1.0     | 5.01    | 0.8    |
| Modo 2 | 16.13  | 18.85      | 16.9    | 17.38   | 7.7    |
| Modo 3 | 33.65  | 50.23      | 49.3    | 46.07   | 36.9   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.3.2 Caso 2: Viga discretizada en tres elementos

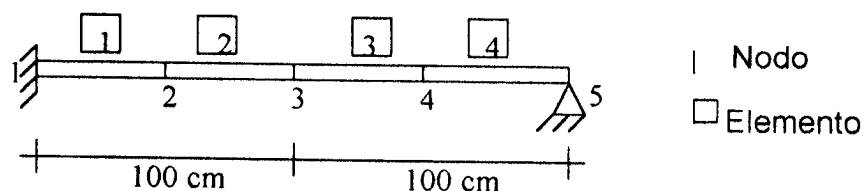


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR % | M.Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|---------|---------|--------|
| Modo 1 | 4.97   | 4.99       | 0.4     | 5.06    | 1.8    |
| Modo 2 | 16.13  | 16.41      | 1.7     | 16.2    | 0.4    |
| Modo 3 | 33.65  | 38.24      | 13.6    | 35.42   | 5.3    |
| Modo 4 | 57.54  | 73.54      | 27.8    | 67.64   | 17.6   |
| Modo 5 | 87.8   | 130.23     | 48.3    | 119.84  | 36.5   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.3.3 Caso 3: Viga discretizada en cuatro elementos

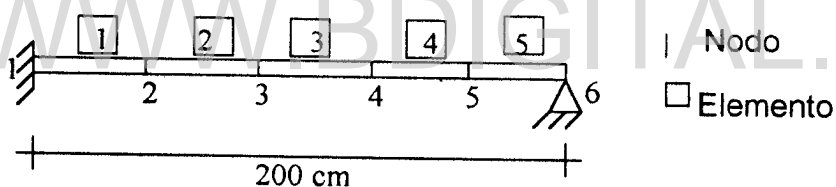


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M. Conocida | ERROR % | M. Nueva | ERROR% |
|--------|--------|-------------|---------|----------|--------|
| Modo 1 | 4.97   | 4.98        | 0.2     | 5.11     | 2.8    |
| Modo 2 | 16.13  | 16.23       | 0.6     | 16.25    | 0.7    |
| Modo 3 | 33.65  | 34.4        | 2.2     | 33.82    | 0.5    |
| Modo 4 | 57.54  | 64.61       | 12.3    | 59.97    | 4.2    |
| Modo 5 | 87.8   | 105.33      | 20.0    | 97.49    | 11.0   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.3.4 Caso 4: Viga discretizada en cinco elementos



Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M. Conocida | ERROR % | M. Nueva | ERROR% |
|--------|--------|-------------|---------|----------|--------|
| Modo 1 | 4.97   | 4.98        | 0.2     | 5.16     | 3.8    |
| Modo 2 | 16.13  | 16.17       | 0.2     | 16.35    | 1.4    |
| Modo 3 | 33.65  | 34.01       | 1.1     | 33.78    | 0.4    |
| Modo 4 | 57.54  | 59.02       | 2.6     | 57.86    | 0.6    |
| Modo 5 | 87.8   | 97.95       | 11.6    | 91.03    | 3.7    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.3.5 Resultados en forma gráfica

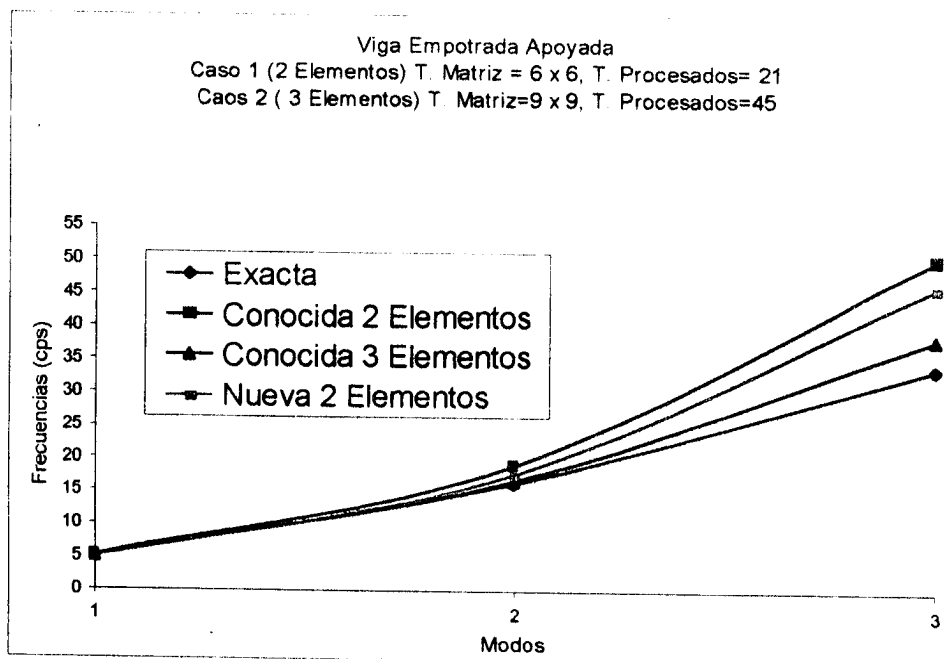
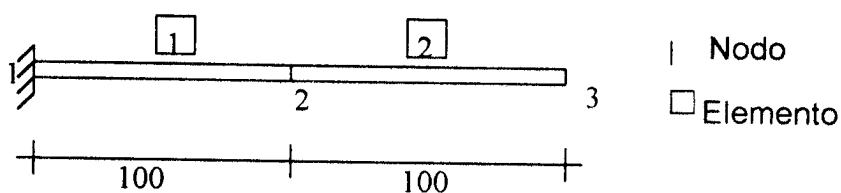


Figura 4.3 Viga Empotrada Apoyada, comparación gráfica de resultados

#### 4.1.4 VIGA EN VOLADIZO

DATOS:  $L=200\text{cm}$ ,  $E=6580000 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\text{masa}/L=0.1 \text{ Kg seg}^2/\text{cm}^2$ ,  $\text{Inercia}=100\text{cm}^4$

##### 4.1.4.1 Caso 1: Viga discretizada en dos elementos

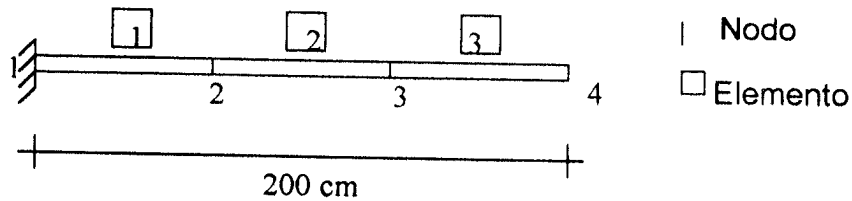


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR % | M. Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|---------|----------|--------|
| Modo 1 | 1.13   | 1.14       | 0.9     | 1.19     | 5.3    |
| Modo 2 | 7.11   | 7.17       | 0.8     | 7.22     | 1.5    |
| Modo 3 | 19.91  | 24.26      | 21.8    | 22.12    | 11.1   |
| Modo 4 | 38.76  | 70.41      | 81.7    | 62.32    | 60.8   |

Frecuencias Naturales (cps)

#### 4.1.4.2 Caso 2: Viga discretizada en tres elementos

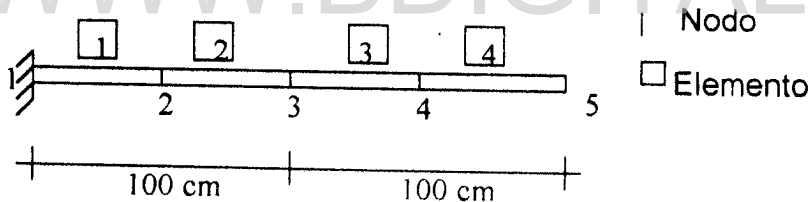


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR % | M. Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|---------|----------|--------|
| Modo 1 | 1.13   | 1.13       | 0.0     | 1.22     | 8.0    |
| Modo 2 | 7.11   | 7.14       | 0.4     | 7.26     | 2.1    |
| Modo 3 | 19.91  | 20.16      | 1.3     | 20.14    | 1.2    |
| Modo 4 | 38.76  | 45.4       | 17.1    | 41.77    | 7.8    |
| Modo 5 | 64.51  | 85.45      | 32.5    | 77.7     | 20.4   |

Frecuencias Naturales (cps)

#### 4.1.4.3 Caso 3: Viga discretizada en cuatro elementos

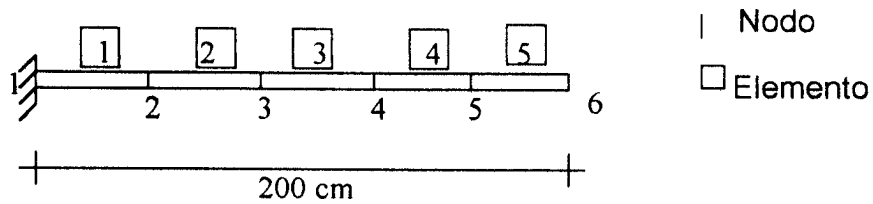


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR % | M. Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|---------|----------|--------|
| Modo 1 | 1.13   | 1.13       | 0.0     | 1.27     | 12.4   |
| Modo 2 | 7.11   | 7.12       | 0.1     | 7.34     | 3.2    |
| Modo 3 | 19.91  | 20.07      | 0.8     | 20.14    | 1.2    |
| Modo 4 | 38.76  | 39.59      | 2.1     | 39.38    | 1.6    |
| Modo 5 | 64.51  | 73.63      | 14.1    | 68.03    | 5.5    |

Frecuencias Naturales (cps)

#### 4.1.4.4 Caso 4: Viga discretizada en cinco elementos



Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR % | M. Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|---------|----------|--------|
| Modo 1 | 1.13   | 1.13       | 0.0     | 1.33     | 17.7   |
| Modo 2 | 7.11   | 7.12       | 0.1     | 7.43     | 4.5    |
| Modo 3 | 19.91  | 19.98      | 0.4     | 20.25    | 1.7    |
| Modo 4 | 38.76  | 39.48      | 1.9     | 39.31    | 1.4    |
| Modo 5 | 64.51  | 65.53      | 1.6     | 65.03    | 0.8    |

Frecuencias Naturales (cps)

#### 4.1.4.5 Resultados en forma gráfica

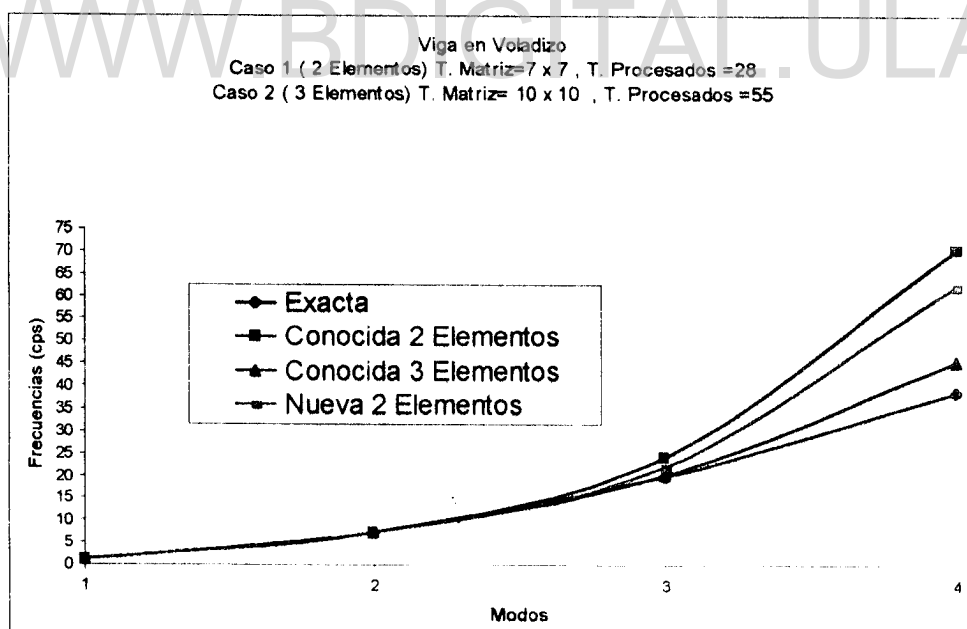


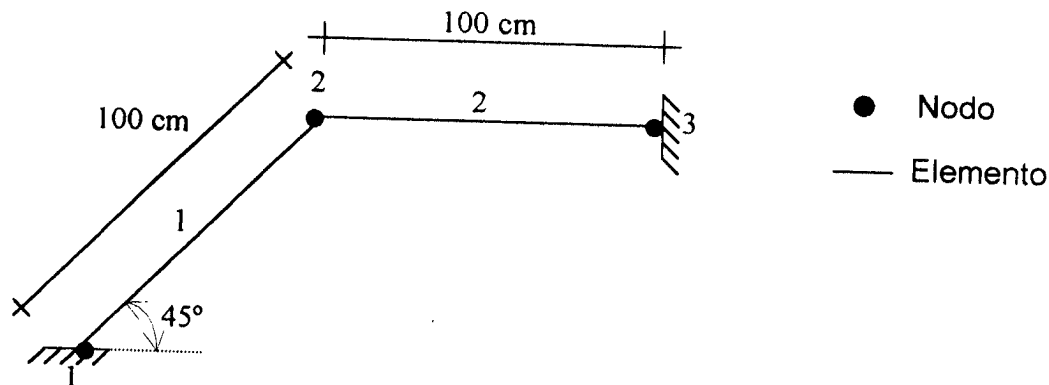
Figura 4.4 Viga en Voladizo, comparación gráfica de resultados

#### 4.1.5 PÓRTICO [A] EMPOTRADO EMPOTRADO

DATOS:

$E=1000000 \text{ Kg/cm}^2$ , masa/L=4.2 Kg seg<sup>2</sup>/cm<sup>2</sup>, Inercia =100cm<sup>4</sup>, Area =6cm<sup>2</sup>.

##### 4.1.5.1 Caso 1: Pórtico discretizado en dos elementos

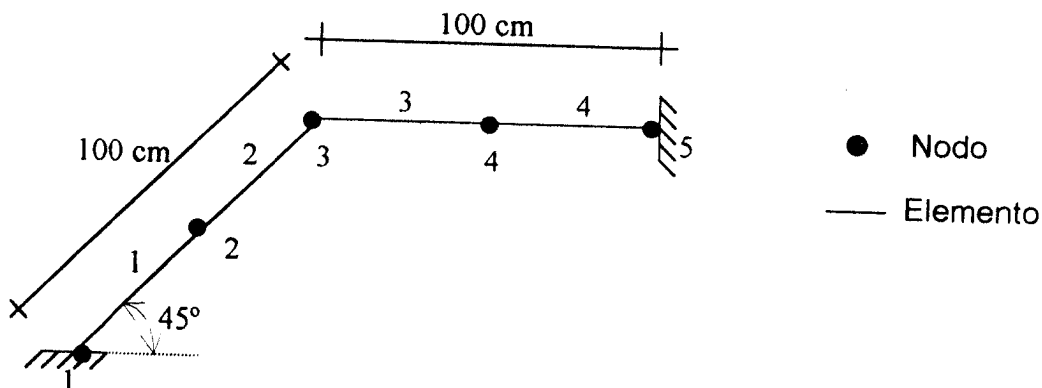


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1 | 1.12   | 1.27       | 13.4   | 1.27    | 13.4   |
| Modo 2 | 1.19   | 1.57       | 31.9   | 1.44    | 21.0   |
| Modo 3 | 2.46   | 3.27       | 32.9   | 3.25    | 32.1   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

##### 4.1.5.2 Caso 2: Pórtico discretizado en cuatro elementos



Licencia Creative Commons:

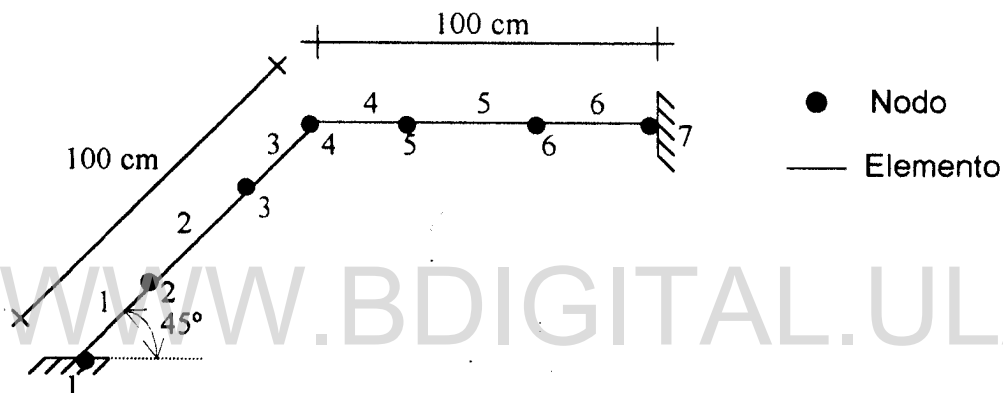
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1 | 1.12   | 1.13       | 0.9    | 1.13    | 0.9    |
| Modo 2 | 1.19   | 1.2        | 0.8    | 1.2     | 0.8    |
| Modo 3 | 2.46   | 2.51       | 2.0    | 2.49    | 1.2    |
| Modo 4 | 2.93   | 2.99       | 2.0    | 2.99    | 2.0    |
| Modo 5 | 3.96   | 4.59       | 15.9   | 4.24    | 7.1    |
| Modo 6 | 5.37   | 6.5        | 21.0   | 6.18    | 15.1   |
| Modo 7 | 7      | 8.05       | 15.0   | 7.76    | 10.9   |
| Modo 8 | 8.19   | 10.21      | 24.7   | 10.03   | 22.5   |
| Modo 9 | 9.49   | 12.63      | 33.1   | 11.76   | 23.9   |

Frecuencias naturales (c.p.s)

#### 4.1.5.3 Caso 3: Pórtico discretizado en seis elementos



Se obtuvieron los siguientes resultados:

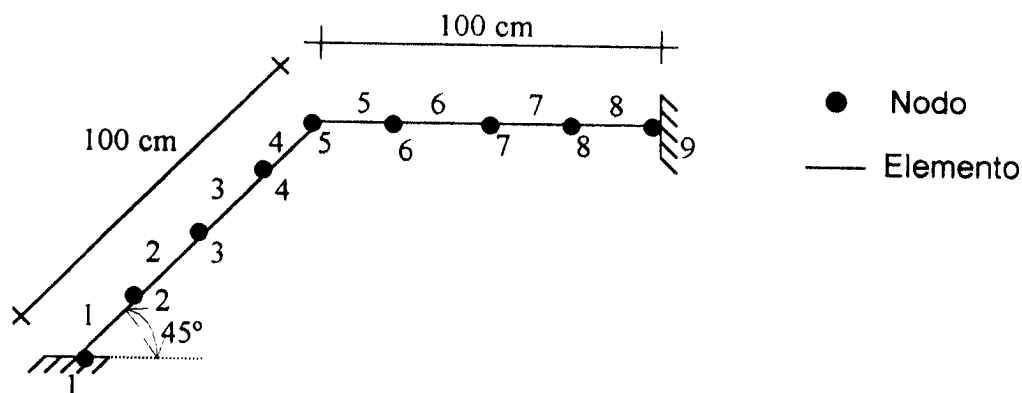
|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 1.12   | 1.12       | 0.0    | 1.12    | 0.0    |
| Modo 2  | 1.19   | 1.19       | 0.0    | 1.21    | 1.7    |
| Modo 3  | 2.46   | 2.47       | 0.4    | 2.47    | 0.4    |
| Modo 4  | 2.93   | 2.95       | 0.7    | 2.95    | 0.7    |
| Modo 5  | 3.96   | 4          | 1.0    | 3.95    | 0.3    |
| Modo 6  | 5.37   | 5.42       | 0.9    | 5.39    | 0.4    |
| Modo 7  | 7      | 7.19       | 2.7    | 7.13    | 1.9    |
| Modo 8  | 8.19   | 8.94       | 9.2    | 8.41    | 2.7    |
| Modo 9  | 9.49   | 10.05      | 5.9    | 9.9     | 4.3    |
| Modo 10 | 10.81  | 12.47      | 15.4   | 11.64   | 7.7    |
| Modo 11 | 13.75  | 14.58      | 6.0    | 14.48   | 5.3    |
| Modo 12 | 15.33  | 16.83      | 9.8    | 16.01   | 4.4    |
| Modo 13 | 17.31  | 18.72      | 8.1    | 18.07   | 4.4    |
| Modo 14 | 19.63  | 23.99      | 22.2   | 22.02   | 12.2   |
| Modo 15 | 21.82  | 31.81      | 45.8   | 29.27   | 34.1   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

4.1.5.4 Caso 4: Pórtico discretizado en ocho elementos (Este valor se tomo como valor exacto).



Se obtuvieron los siguientes resultados:

|         | M.Conocida | M.Nueva |
|---------|------------|---------|
| Modo 1  | 1.12       | 1.13    |
| Modo 2  | 1.19       | 1.22    |
| Modo 3  | 2.46       | 2.48    |
| Modo 4  | 2.93       | 2.94    |
| Modo 5  | 3.96       | 3.96    |
| Modo 6  | 5.37       | 5.35    |
| Modo 7  | 7          | 6.96    |
| Modo 8  | 8.19       | 8.06    |
| Modo 9  | 9.49       | 9.49    |
| Modo 10 | 10.81      | 10.72   |
| Modo 11 | 13.75      | 13.66   |
| Modo 12 | 15.33      | 14.36   |
| Modo 13 | 17.31      | 17.15   |
| Modo 14 | 19.63      | 18.37   |
| Modo 15 | 21.82      | 21.73   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.5.5 Resultados en forma gráfica

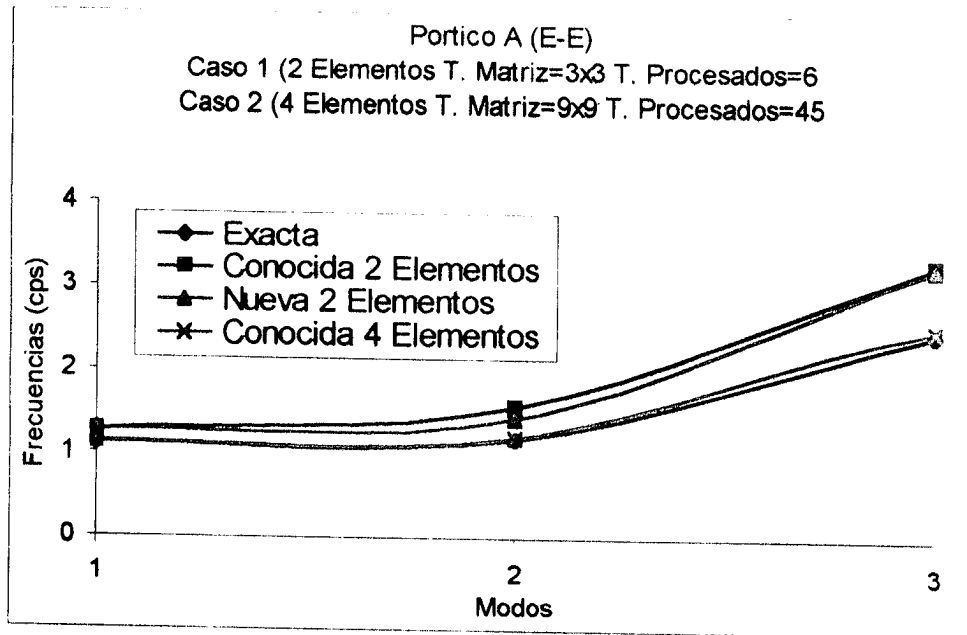


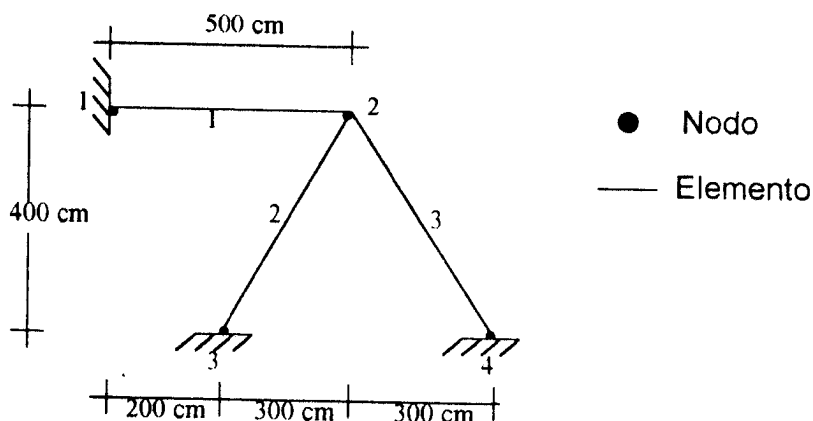
Figura 4.5 Pórtico A, comparación gráfica de resultados

#### 4.1.6 PÓRTICO [B] EMPOTRADO EMPOTRADO

DATOS:

$E=1000000 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\text{masa/L}=0.1 \text{ Kg seg}^2/\text{cm}^2$ ,  $\text{Inercia}=4000\text{cm}^4$ ,  $\text{Area}=60\text{cm}^2$ .

##### 4.1.6.1 Caso 1: Pórtico discretizado en tres elementos



Licencia Creative Commons:

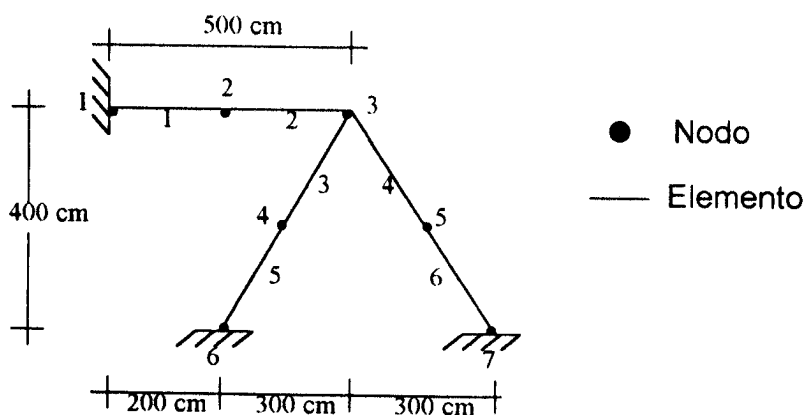
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Se obtuvieron los siguientes resultados:

|        | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|--------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1 | 1.96   | 2.52       | 28.6   | 2.31    | 17.9   |
| Modo 2 | 2.81   | 9.91       | 252.7  | 9.64    | 243.1  |
| Modo 3 | 2.85   | 11.95      | 319.3  | 11.94   | 318.9  |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.6.2 Caso 2: Pórtico discretizado en seis elementos

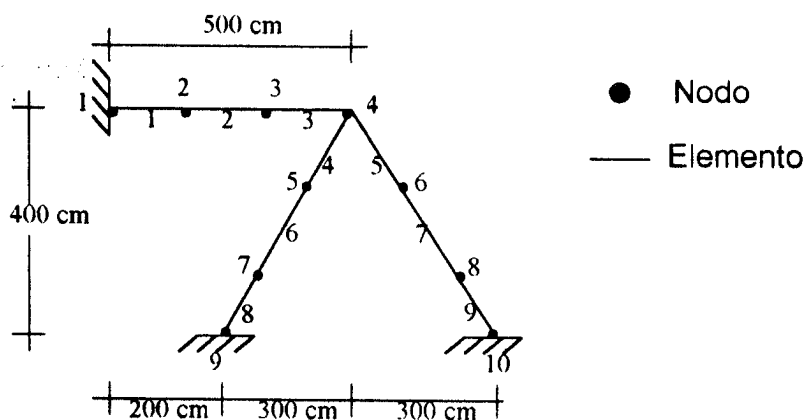


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 1.96   | 1.98       | 1.0    | 1.97    | 0.5    |
| Modo 2  | 2.81   | 2.85       | 1.4    | 2.85    | 1.4    |
| Modo 3  | 2.85   | 2.89       | 1.4    | 2.89    | 1.4    |
| Modo 4  | 6.31   | 7.25       | 14.9   | 6.73    | 6.7    |
| Modo 5  | 7.41   | 8.96       | 20.9   | 8.47    | 14.3   |
| Modo 6  | 7.88   | 10.26      | 30.2   | 9.39    | 19.2   |
| Modo 7  | 11.05  | 12.07      | 9.2    | 11.8    | 6.8    |
| Modo 8  | 11.46  | 12.42      | 8.4    | 12.02   | 4.9    |
| Modo 9  | 14.05  | 20.3       | 44.5   | 18.69   | 33.0   |
| Modo 10 | 15.83  | 27.01      | 70.6   | 27.01   | 70.6   |
| Modo 11 | 16.48  | 35.12      | 113.1  | 35.05   | 112.7  |
| Modo 12 | 25.13  | 41         | 63.2   | 40.73   | 62.1   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.6.3 Caso 3: Pórtico discretizado en nueve elementos

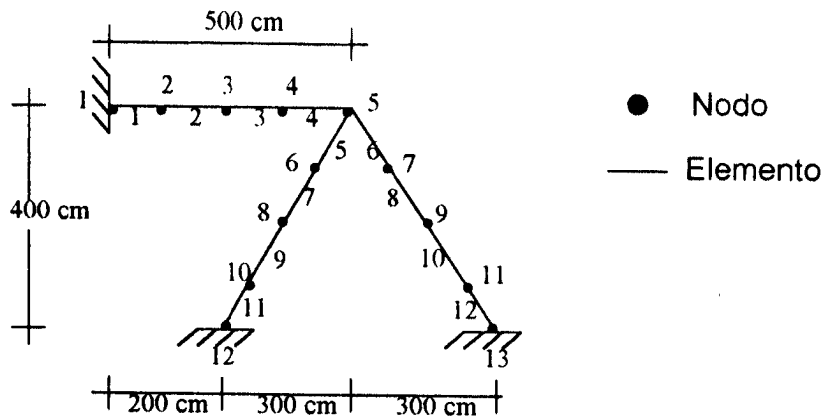


Se obtuvieron los siguientes resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 1.96   | 1.96       | 0.0    | 1.99    | 1.5    |
| Modo 2  | 2.81   | 2.82       | 0.4    | 2.84    | 1.1    |
| Modo 3  | 2.85   | 2.86       | 0.4    | 2.88    | 1.1    |
| Modo 4  | 6.31   | 6.38       | 1.1    | 6.3     | 0.2    |
| Modo 5  | 7.41   | 7.49       | 1.1    | 7.44    | 0.4    |
| Modo 6  | 7.88   | 7.96       | 1.0    | 7.91    | 0.4    |
| Modo 7  | 11.05  | 11.19      | 1.3    | 11.1    | 0.5    |
| Modo 8  | 11.46  | 11.59      | 1.1    | 11.52   | 0.5    |
| Modo 9  | 14.05  | 15.56      | 10.7   | 14.49   | 3.1    |
| Modo 10 | 15.83  | 18.7       | 18.1   | 17.19   | 8.6    |
| Modo 11 | 16.48  | 19.18      | 16.4   | 17.76   | 7.8    |
| Modo 12 | 25.13  | 25.62      | 1.9    | 25.62   | 1.9    |
| Modo 13 | 25.47  | 28.77      | 13.0   | 26.63   | 4.6    |
| Modo 14 | 29.06  | 33.53      | 15.4   | 32.15   | 10.6   |
| Modo 15 | 29.68  | 36.54      | 23.1   | 33.7    | 13.5   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

4.1.6.4 Caso 4: Pórtico discretizado en doce elementos (Este valor se tomo como valor exacto).



Se obtuvieron los siguientes resultados:

|         | M.Conocida | M.Nueva |
|---------|------------|---------|
| Modo 1  | 1.96       | 2.01    |
| Modo 2  | 2.81       | 2.86    |
| Modo 3  | 2.85       | 2.9     |
| Modo 4  | 6.31       | 6.32    |
| Modo 5  | 7.41       | 7.4     |
| Modo 6  | 7.88       | 7.86    |
| Modo 7  | 11.05      | 10.98   |
| Modo 8  | 11.46      | 11.41   |
| Modo 9  | 14.05      | 13.87   |
| Modo 10 | 15.83      | 15.7    |
| Modo 11 | 16.48      | 16.36   |
| Modo 12 | 25.13      | 23.71   |
| Modo 13 | 25.47      | 25.13   |
| Modo 14 | 29.06      | 27.15   |
| Modo 15 | 29.68      | 27.4    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.6.5 Resultados en forma gráfica

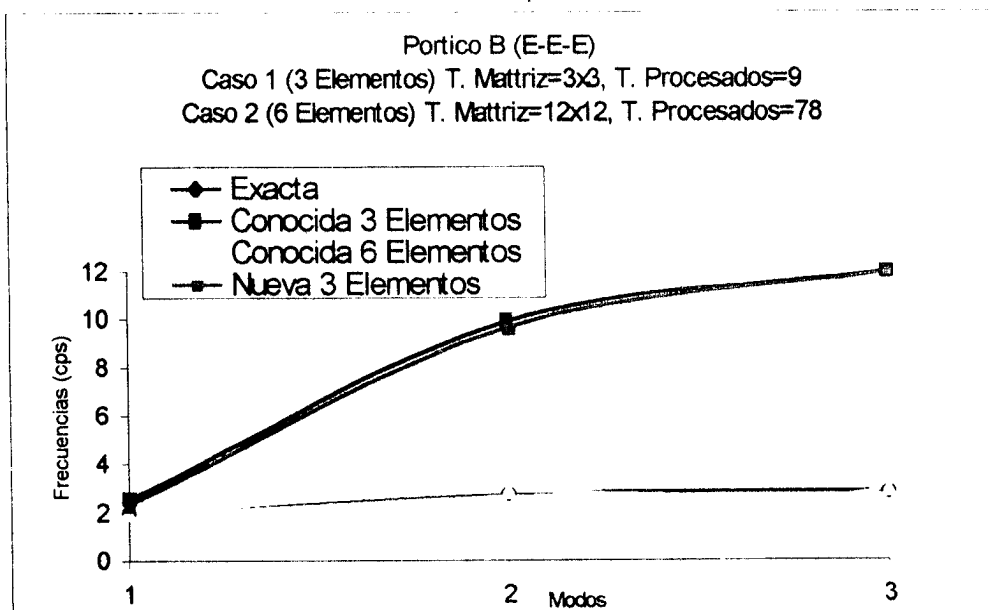


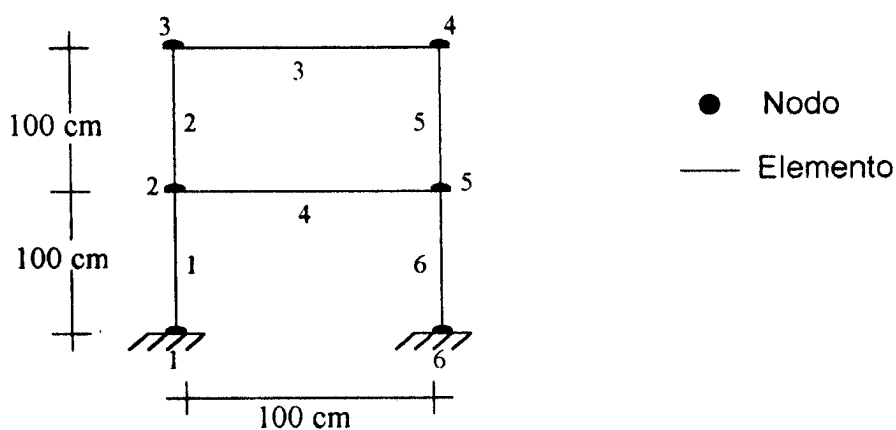
Figura 4.6 Pórtico B, comparación gráfica de resultados

#### 4.1.7 PÓRTICO [2 PISOS] EMPOTRADO EMPOTRADO

DATOS:

$E=238752 \text{ Kg/cm}^2$ , masa/L=4.2 Kg seg<sup>2</sup>/cm<sup>2</sup>, Inercia =100cm<sup>4</sup>, Area =6cm<sup>2</sup>.

##### 4.1.7.1 Caso 1: Pórtico discretizado en seis elementos



Licencia Creative Commons:

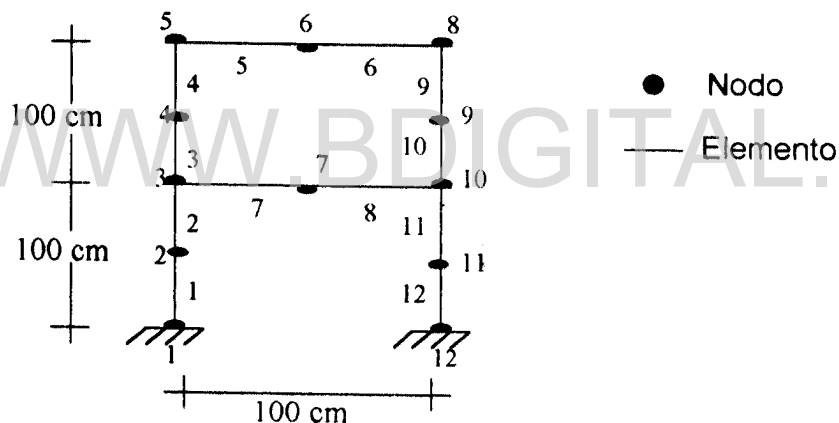
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Se obtuvieron los siguientes resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 0.06   | 0.06       | 0.0    | 0.06    | 0.0    |
| Modo 2  | 0.19   | 0.19       | 0.0    | 0.19    | 0.0    |
| Modo 3  | 0.4    | 0.44       | 10.0   | 0.41    | 2.5    |
| Modo 4  | 0.47   | 0.52       | 10.6   | 0.51    | 8.5    |
| Modo 5  | 0.64   | 0.66       | 3.1    | 0.66    | 3.1    |
| Modo 6  | 0.65   | 0.86       | 32.3   | 0.78    | 20.0   |
| Modo 7  | 0.72   | 0.97       | 34.7   | 0.9     | 25.0   |
| Modo 8  | 0.81   | 1.45       | 79.0   | 1.44    | 77.8   |
| Modo 9  | 0.93   | 1.67       | 79.6   | 1.53    | 64.5   |
| Modo 10 | 0.95   | 1.74       | 83.2   | 1.74    | 83.2   |
| Modo 11 | 1.59   | 2.03       | 27.7   | 2.01    | 26.4   |
| Modo 12 | 1.61   | 2.37       | 47.2   | 2.34    | 45.3   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.7.2 Caso 2: Pórtico discretizado en doce elementos



Se obtuvieron los siguientes resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 0.06   | 0.06       | 0.0    | 0.06    | 0.0    |
| Modo 2  | 0.19   | 0.19       | 0.0    | 0.19    | 0.0    |
| Modo 3  | 0.4    | 0.4        | 0.0    | 0.4     | 0.0    |
| Modo 4  | 0.47   | 0.47       | 0.0    | 0.47    | 0.0    |
| Modo 5  | 0.64   | 0.65       | 1.6    | 0.64    | 0.0    |
| Modo 6  | 0.65   | 0.65       | 0.0    | 0.65    | 0.0    |
| Modo 7  | 0.72   | 0.73       | 1.4    | 0.73    | 1.4    |
| Modo 8  | 0.81   | 0.82       | 1.2    | 0.82    | 1.2    |
| Modo 9  | 0.93   | 0.93       | 0.0    | 0.93    | 0.0    |
| Modo 10 | 0.95   | 0.96       | 1.1    | 0.96    | 1.1    |

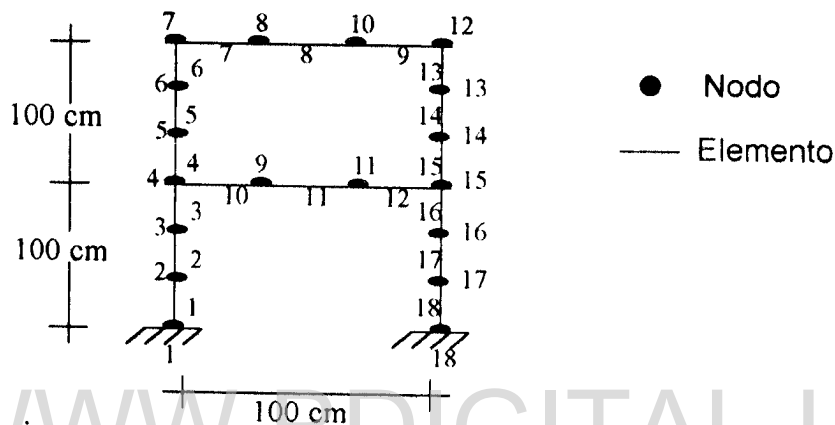
Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|         |      |      |      |      |     |
|---------|------|------|------|------|-----|
| Modo 11 | 1.59 | 1.69 | 6.3  | 1.64 | 3.1 |
| Modo 12 | 1.61 | 1.71 | 6.2  | 1.65 | 2.5 |
| Modo 13 | 1.69 | 1.87 | 10.7 | 1.74 | 3.0 |
| Modo 14 | 1.9  | 2.08 | 9.5  | 1.99 | 4.7 |
| Modo 15 | 2.07 | 2.11 | 1.9  | 2.11 | 1.9 |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

4.1.7.3 Caso 3: Pórtico discretizado en dieciocho elementos (Este valor se tomo como valor exacto).



Se obtuvieron los siguientes resultados:

|         | M.Conocida | M.Nueva |
|---------|------------|---------|
| Modo 1  | 0.06       | 0.06    |
| Modo 2  | 0.19       | 0.19    |
| Modo 3  | 0.4        | 0.4     |
| Modo 4  | 0.47       | 0.47    |
| Modo 5  | 0.65       | 0.64    |
| Modo 6  | 0.65       | 0.65    |
| Modo 7  | 0.73       | 0.73    |
| Modo 8  | 0.82       | 0.82    |
| Modo 9  | 0.93       | 0.93    |
| Modo 10 | 0.96       | 0.96    |
| Modo 11 | 1.69       | 1.64    |
| Modo 12 | 1.71       | 1.65    |
| Modo 13 | 1.87       | 1.74    |
| Modo 14 | 2.08       | 1.99    |
| Modo 15 | 2.11       | 2.11    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.7.4 Resultados en forma gráfica.

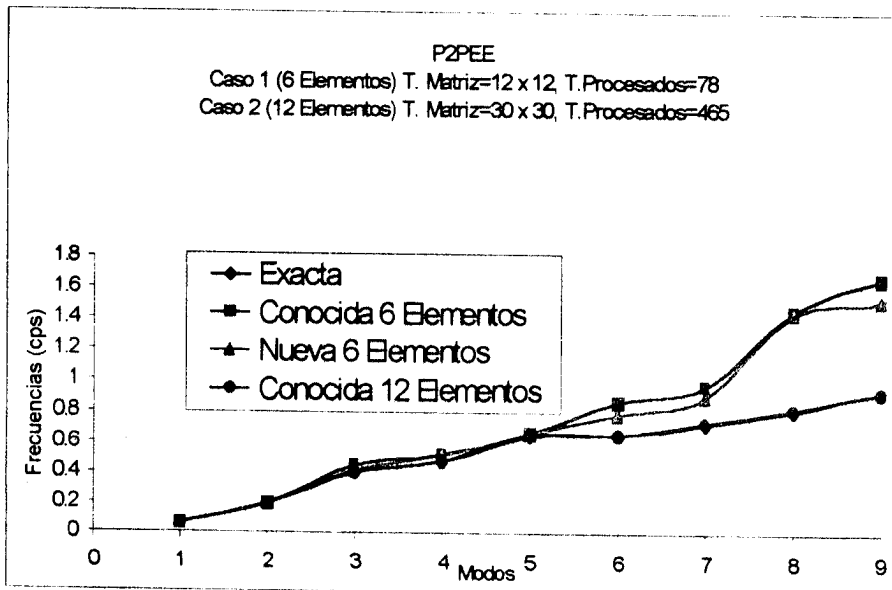


Figura 4.7 Pórtico P2EE, comparación gráfica de resultados

#### 4.1.8 PÓRTICO [5 NIVELES]

DATOS:

$E=2387.52 \text{ Kg/m}^2$ ,  $f'c=250 \text{ Kg/cm}^2$

$[0.30 \times 0.30]$ :  $A=0.09\text{m}^2$ ,  $I=675 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $m/L=22.95918367 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$

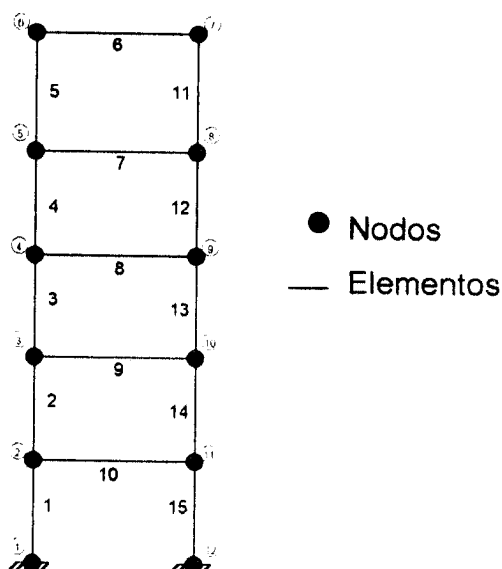
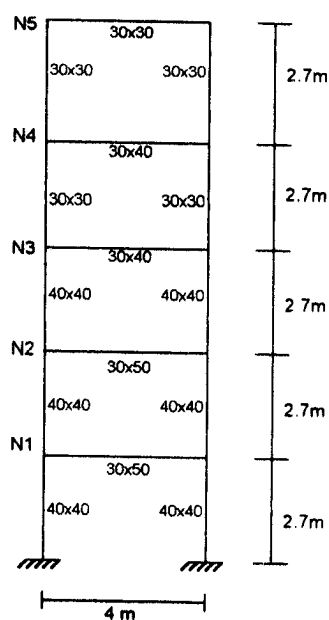
$[0.40 \times 0.40]$ :  $A=0.16\text{m}^2$ ,  $I=2133.333 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $m/L=40.81632653 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$

$[0.30 \times 0.50]$ :  $A=0.15\text{m}^2$ ,  $I=3125 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $m/L=38.26530612 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$

$[0.30 \times 0.40]$ :  $A=0.12\text{m}^2$ ,  $I=1600 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $m/L=30.6122449 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)



#### 4.1.8.1 Caso 1: Pórtico discretizado en 15 Elementos, 12 Nodos.

Resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 4.10   | 4.07       | 0.6    | 4.10    | 0.1    |
| Modo 2  | 10.40  | 10.25      | 1.5    | 10.28   | 1.1    |
| Modo 3  | 17.80  | 19.25      | 8.2    | 19.28   | 8.3    |
| Modo 4  | 26.00  | 27.27      | 4.9    | 27.25   | 4.8    |
| Modo 5  | 35.90  | 40.49      | 12.8   | 40.39   | 12.5   |
| Modo 6  | 38.40  | 42.71      | 11.2   | 40.63   | 5.8    |
| Modo 7  | 42.50  | 47.43      | 11.6   | 44.95   | 5.8    |
| Modo 8  | 44.00  | 57.99      | 31.8   | 57.90   | 31.6   |
| Modo 9  | 55.40  | 64.31      | 16.1   | 59.31   | 7.1    |
| Modo 10 | 57.50  | 74.45      | 29.5   | 69.08   | 20.1   |
| Modo 11 | 68.40  | 86.00      | 25.7   | 79.36   | 16.0   |
| Modo 12 | 71.40  | 108.04     | 51.3   | 99.03   | 38.7   |
| Modo 13 | 88.60  | 125.20     | 41.3   | 115.61  | 30.5   |
| Modo 14 | 96.20  | 128.42     | 33.5   | 119.46  | 24.2   |
| Modo 15 | 102.10 | 139.47     | 36.6   | 135.22  | 32.4   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.8.2 Caso 2: Pórtico discretizado en 30 Elementos, 27 Nodos.

Resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 4.10   | 4.10       | 0.0    | 4.20    | 2.4    |
| Modo 2  | 10.40  | 10.20      | 1.9    | 10.50   | 1.0    |
| Modo 3  | 17.80  | 19.20      | 7.9    | 19.70   | 10.7   |
| Modo 4  | 26.00  | 27.20      | 4.6    | 27.80   | 6.9    |
| Modo 5  | 35.90  | 36.50      | 1.7    | 36.60   | 1.9    |
| Modo 6  | 38.40  | 40.30      | 4.9    | 41.00   | 6.8    |
| Modo 7  | 42.50  | 42.40      | 0.2    | 42.50   | 0.0    |
| Modo 8  | 44.00  | 52.30      | 18.9   | 52.40   | 19.1   |
| Modo 9  | 55.40  | 57.70      | 4.2    | 57.50   | 3.8    |
| Modo 10 | 57.50  | 60.50      | 5.2    | 60.70   | 5.6    |
| Modo 11 | 68.40  | 66.60      | 2.6    | 66.70   | 2.5    |
| Modo 12 | 71.40  | 88.70      | 24.2   | 88.60   | 24.1   |
| Modo 13 | 88.60  | 89.90      | 1.5    | 88.60   | 0.0    |
| Modo 14 | 96.20  | 103.20     | 7.3    | 103.00  | 7.1    |
| Modo 15 | 102.10 | 108.50     | 6.3    | 106.60  | 4.4    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.8.3 Caso 3: Pórtico discretizado en 45 Elementos, 42 Nodos.

Resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 4.10   | 4.10       | 0.0    | 4.30    | 4.9    |
| Modo 2  | 10.40  | 10.20      | 1.9    | 10.70   | 2.9    |
| Modo 3  | 17.80  | 19.20      | 7.9    | 20.10   | 12.9   |
| Modo 4  | 26.00  | 27.20      | 4.6    | 28.20   | 8.5    |
| Modo 5  | 35.90  | 36.30      | 1.1    | 36.90   | 2.8    |
| Modo 6  | 38.40  | 40.20      | 4.7    | 41.60   | 8.3    |
| Modo 7  | 42.50  | 42.30      | 0.5    | 42.80   | 0.7    |
| Modo 8  | 44.00  | 52.00      | 18.2   | 52.90   | 20.2   |
| Modo 9  | 55.40  | 57.50      | 3.8    | 57.50   | 3.8    |
| Modo 10 | 57.50  | 60.20      | 4.7    | 61.20   | 6.4    |
| Modo 11 | 68.40  | 66.20      | 3.2    | 67.20   | 1.8    |
| Modo 12 | 71.40  | 88.30      | 23.7   | 89.00   | 24.6   |
| Modo 13 | 88.60  | 88.60      | 0.0    | 89.60   | 1.1    |
| Modo 14 | 96.20  | 102.20     | 6.2    | 103.00  | 7.1    |
| Modo 15 | 102.10 | 106.20     | 4.0    | 107.00  | 4.8    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

4.1.8.4 Caso 4: Pórtico discretizado en 60 Elementos, 57 Nodos (Este valor se tomo como valor exacto).

Resultados:

|         | M. Conocida | M. Nueva |
|---------|-------------|----------|
| Modo 1  | 4.10        | 4.50     |
| Modo 2  | 10.40       | 11.10    |
| Modo 3  | 17.80       | 19.20    |
| Modo 4  | 26.00       | 27.50    |
| Modo 5  | 35.90       | 36.80    |
| Modo 6  | 38.40       | 39.70    |
| Modo 7  | 42.50       | 43.50    |
| Modo 8  | 44.00       | 46.10    |
| Modo 9  | 55.40       | 56.70    |
| Modo 10 | 57.50       | 57.80    |
| Modo 11 | 68.40       | 70.30    |
| Modo 12 | 71.40       | 72.60    |
| Modo 13 | 88.60       | 90.70    |
| Modo 14 | 96.20       | 97.50    |
| Modo 15 | 102.10      | 103.90   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

4.1.8.5 Resultados en forma gráfica

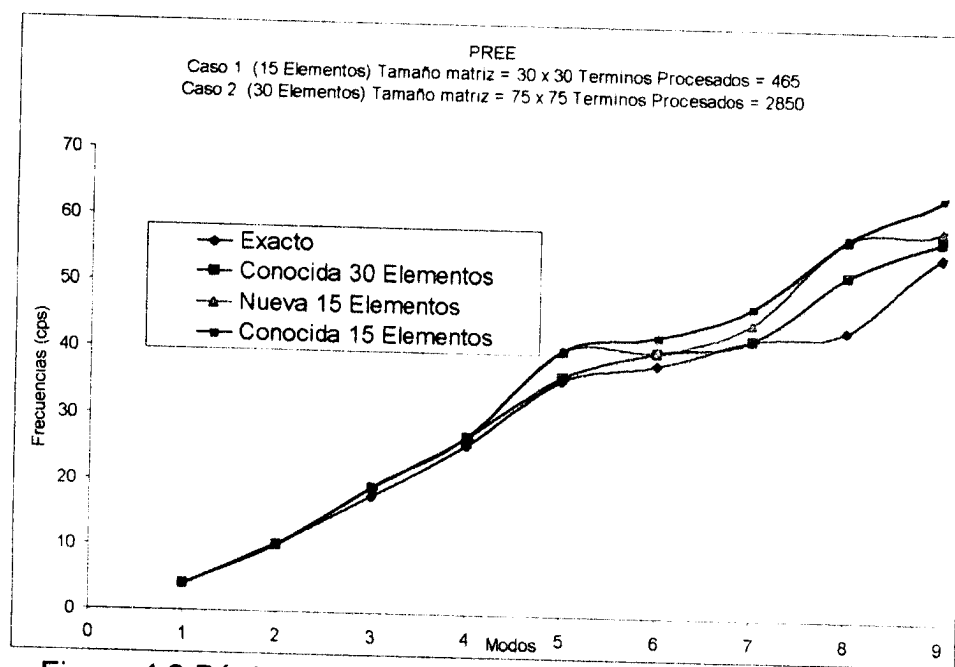


Figura 4.8 Pórtico PREE, comparación gráfica de resultados

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

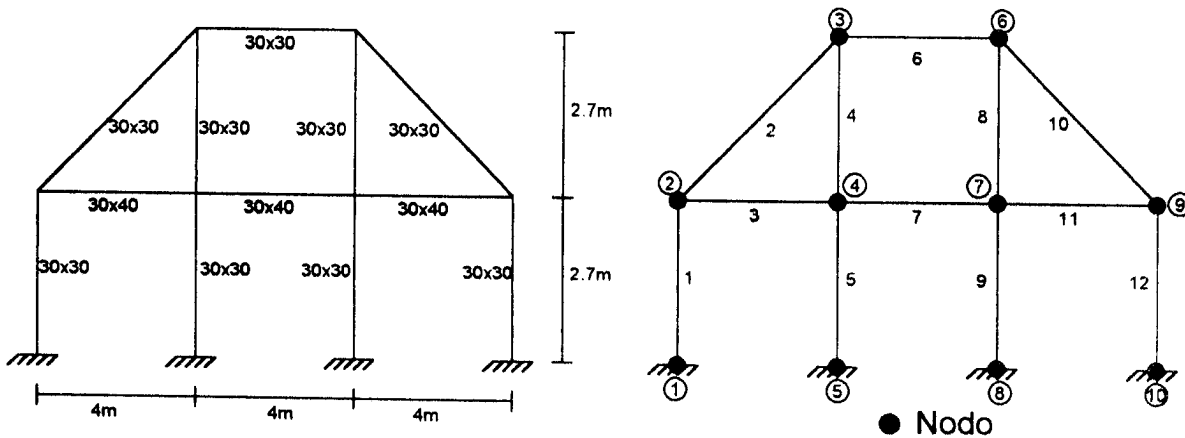
#### 4.1.9 PÓRTICO [2 NIVELES]

DATOS:

$$E=2387.52 \text{ Kg/m}^2, f_c=250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$[0.30 \times 0.30]: A=0.09\text{m}^2, I=675 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=22.95918367 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$

$$[0.30 \times 0.40]: A=0.12\text{m}^2, I=1600 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=30.6122449 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$



● Nodo

— Elementos

4.1.9.1 Caso 1: Pórtico discretizado en 12 Elementos, 10 Nodos.

Resultados:

|         | Exacto | M. Conocida | ERROR% | M. Nueva | ERROR% |
|---------|--------|-------------|--------|----------|--------|
| Modo 1  | 9.50   | 9.48        | 0.2    | 9.49     | 0.1    |
| Modo 2  | 30.30  | 40.99       | 35.3   | 37.45    | 23.6   |
| Modo 3  | 33.70  | 48.98       | 45.4   | 45.20    | 34.1   |
| Modo 4  | 42.50  | 51.92       | 22.2   | 47.72    | 12.3   |
| Modo 5  | 49.20  | 70.81       | 43.9   | 67.18    | 36.5   |
| Modo 6  | 53.60  | 72.05       | 34.4   | 69.41    | 29.5   |
| Modo 7  | 64.40  | 84.70       | 31.5   | 81.27    | 26.2   |
| Modo 8  | 72.30  | 105.22      | 45.5   | 102.21   | 41.4   |
| Modo 9  | 87.20  | 115.15      | 32.0   | 113.99   | 30.7   |
| Modo 10 | 96.20  | 123.29      | 28.2   | 120.27   | 25.0   |
| Modo 11 | 96.80  | 148.84      | 53.8   | 137.82   | 42.4   |
| Modo 12 | 100.50 | 190.51      | 89.6   | 187.72   | 86.8   |
| Modo 13 | 108.20 | 203.98      | 88.5   | 201.36   | 86.1   |
| Modo 14 | 110.10 | 208.95      | 89.8   | 208.57   | 89.4   |
| Modo 15 | 118.50 | 227.53      | 92.0   | 225.56   | 90.3   |

Frecuencias naturales (c.p.s)

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

#### 4.1.9.2 Caso 2: Pórtico discretizado en 24 Elementos, 22 Nodos.

Resultados:

|         | Exacto | M. Conocida | ERROR% | M. Nueva | ERROR% |
|---------|--------|-------------|--------|----------|--------|
| Modo 1  | 9.50   | 9.46        | 0.5    | 9.67     | 1.8    |
| Modo 2  | 30.30  | 30.60       | 1.0    | 30.63    | 1.1    |
| Modo 3  | 33.70  | 34.05       | 1.0    | 34.07    | 1.1    |
| Modo 4  | 42.50  | 42.84       | 0.8    | 42.82    | 0.8    |
| Modo 5  | 49.20  | 49.65       | 0.9    | 49.66    | 0.9    |
| Modo 6  | 53.60  | 54.21       | 1.1    | 53.98    | 0.7    |
| Modo 7  | 64.40  | 65.13       | 1.1    | 65.02    | 1.0    |
| Modo 8  | 72.30  | 73.97       | 2.3    | 73.34    | 1.4    |
| Modo 9  | 87.20  | 94.10       | 7.9    | 91.48    | 4.9    |
| Modo 10 | 96.20  | 99.30       | 3.2    | 97.95    | 1.8    |
| Modo 11 | 96.80  | 101.32      | 4.7    | 98.59    | 1.9    |
| Modo 12 | 100.50 | 106.47      | 5.9    | 103.45   | 2.9    |
| Modo 13 | 108.20 | 109.97      | 1.6    | 109.14   | 0.9    |
| Modo 14 | 110.10 | 114.63      | 4.1    | 111.93   | 1.7    |
| Modo 15 | 118.50 | 120.62      | 1.8    | 120.27   | 1.5    |

Frecuencias naturales (c.p.s)

#### 4.1.9.3 Caso 3: Pórtico discretizado en 36 Elementos, 34 Nodos.

Resultados:

|         | Exacto | M. Conocida | ERROR% | M. Nueva | ERROR% |
|---------|--------|-------------|--------|----------|--------|
| Modo 1  | 9.50   | 9.50        | 0.0    | 9.80     | 3.2    |
| Modo 2  | 30.30  | 30.40       | 0.3    | 30.80    | 1.7    |
| Modo 3  | 33.70  | 33.80       | 0.3    | 34.20    | 1.5    |
| Modo 4  | 42.50  | 42.50       | 0.0    | 43.20    | 1.6    |
| Modo 5  | 49.20  | 49.30       | 0.2    | 49.90    | 1.4    |
| Modo 6  | 53.60  | 53.70       | 0.2    | 54.40    | 1.5    |
| Modo 7  | 64.40  | 64.50       | 0.2    | 65.00    | 0.9    |
| Modo 8  | 72.30  | 72.50       | 0.3    | 72.50    | 0.3    |
| Modo 9  | 87.20  | 87.90       | 0.8    | 87.40    | 0.2    |
| Modo 10 | 96.20  | 96.80       | 0.6    | 96.60    | 0.4    |
| Modo 11 | 96.80  | 97.00       | 0.2    | 97.30    | 0.5    |
| Modo 12 | 100.50 | 101.00      | 0.5    | 101.20   | 0.7    |
| Modo 13 | 108.20 | 108.60      | 0.4    | 109.20   | 0.9    |
| Modo 14 | 110.10 | 110.50      | 0.4    | 110.50   | 0.4    |
| Modo 15 | 118.50 | 118.80      | 0.3    | 119.70   | 1.0    |

Frecuencias naturales (c.p.s)

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

4.1.9.4 Caso 4: Pórtico discretizado en 48 Elementos, 46 Nodos (Este valor se tomo como valor exacto).

Resultados:

|         | M.Conocida | M.Nueva |
|---------|------------|---------|
| Modo 1  | 9.50       | 9.90    |
| Modo 2  | 30.30      | 31.20   |
| Modo 3  | 33.70      | 34.50   |
| Modo 4  | 42.50      | 43.70   |
| Modo 5  | 49.20      | 50.30   |
| Modo 6  | 53.60      | 54.90   |
| Modo 7  | 64.40      | 65.40   |
| Modo 8  | 72.30      | 72.60   |
| Modo 9  | 87.20      | 87.50   |
| Modo 10 | 96.20      | 97.00   |
| Modo 11 | 96.80      | 97.60   |
| Modo 12 | 100.50     | 101.80  |
| Modo 13 | 108.20     | 110.00  |
| Modo 14 | 110.10     | 110.70  |
| Modo 15 | 118.50     | 120.40  |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

5.1.9.5 Resultados en forma gráfica

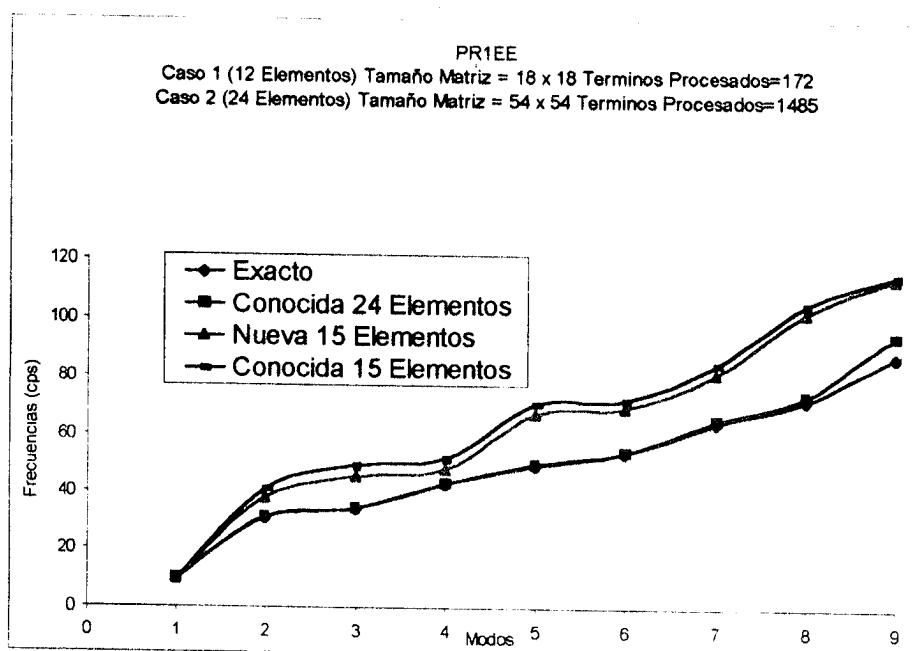


Figura 4.8 Pórtico PR1EE, comparación gráfica de resultados

#### 4.1.10 PÓRTICO [3 NIVELES]

DATOS:

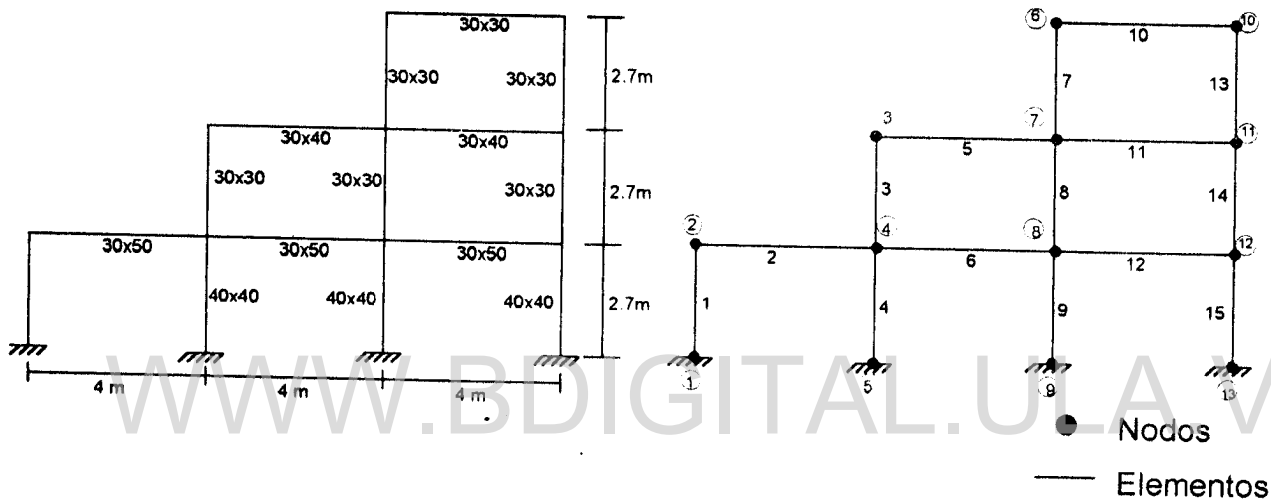
$$E=2387.52 \text{ Kg/m}^2, f_c=250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$[0.30 \times 0.30]: A=0.09\text{m}^2, I=675 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=22.95918367 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$

$$[0.40 \times 0.40]: A=0.16\text{m}^2, I=2133.333 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=40.81632653 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$

$$[0.30 \times 0.50]: A=0.15\text{m}^2, I=3125 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=38.26530612 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$

$$[0.30 \times 0.40]: A=0.12\text{m}^2, I=1600 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=30.6122449 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$



##### 4.1.10.1 Caso 1: Pórtico discretizado en 15 Elementos, 13 Nodos

Resultados: Frecuencias Naturales (c.p.s)

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 7.60   | 7.62       | 0.3    | 7.65    | 0.7    |
| Modo 2  | 17.30  | 17.31      | 0.1    | 17.36   | 0.4    |
| Modo 3  | 24.60  | 24.66      | 0.2    | 24.69   | 0.4    |
| Modo 4  | 37.20  | 44.97      | 20.9   | 41.54   | 11.7   |
| Modo 5  | 45.40  | 55.65      | 22.6   | 51.62   | 13.7   |
| Modo 6  | 52.90  | 64.75      | 22.4   | 61.75   | 16.7   |
| Modo 7  | 58.40  | 70.72      | 21.1   | 65.12   | 11.5   |
| Modo 8  | 64.80  | 81.40      | 25.6   | 75.41   | 16.4   |
| Modo 9  | 75.90  | 89.39      | 17.8   | 87.45   | 15.2   |
| Modo 10 | 84.60  | 102.10     | 20.7   | 97.19   | 14.9   |
| Modo 11 | 92.00  | 106.55     | 15.8   | 104.71  | 13.8   |
| Modo 12 | 96.80  | 118.89     | 22.8   | 110.61  | 14.3   |
| Modo 13 | 102.00 | 123.45     | 21.0   | 118.23  | 15.9   |
| Modo 14 | 104.70 | 157.64     | 50.6   | 148.46  | 41.8   |
| Modo 15 | 111.80 | 162.14     | 45.0   | 156.01  | 39.5   |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

#### 4.1.10.2 Caso 2: Pórtico discretizado en 30 Elementos, 28 Nodos

Resultados:

|         | Exacto | M. Conocida | ERROR% | M. Nueva | ERROR% |
|---------|--------|-------------|--------|----------|--------|
| Modo 1  | 7.60   | 7.60        | 0.0    | 7.80     | 2.6    |
| Modo 2  | 17.30  | 17.30       | 0.0    | 17.70    | 2.3    |
| Modo 3  | 24.60  | 24.60       | 0.0    | 25.10    | 2.0    |
| Modo 4  | 37.20  | 37.50       | 0.8    | 37.60    | 1.1    |
| Modo 5  | 45.40  | 45.70       | 0.7    | 45.70    | 0.7    |
| Modo 6  | 52.90  | 53.30       | 0.8    | 53.30    | 0.8    |
| Modo 7  | 58.40  | 58.70       | 0.5    | 58.80    | 0.7    |
| Modo 8  | 64.80  | 65.30       | 0.8    | 65.30    | 0.8    |
| Modo 9  | 75.90  | 76.60       | 0.9    | 76.50    | 0.8    |
| Modo 10 | 84.60  | 86.40       | 2.1    | 85.10    | 0.6    |
| Modo 11 | 92.00  | 93.20       | 1.3    | 92.40    | 0.4    |
| Modo 12 | 96.80  | 97.70       | 0.9    | 97.30    | 0.5    |
| Modo 13 | 102.00 | 103.20      | 1.2    | 102.80   | 0.8    |
| Modo 14 | 104.70 | 106.00      | 1.2    | 105.40   | 0.7    |
| Modo 15 | 111.80 | 113.10      | 1.2    | 112.80   | 0.9    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.10.3 Caso 3: Pórtico discretizado en 45 Elementos, 43 Nodos

Resultados:

|         | Exacto | M. Conocida | ERROR% | M. Nueva | ERROR% |
|---------|--------|-------------|--------|----------|--------|
| Modo 1  | 7.60   | 7.60        | 0.0    | 8.00     | 5.3    |
| Modo 2  | 17.30  | 17.30       | 0.0    | 18.00    | 4.0    |
| Modo 3  | 24.60  | 24.60       | 0.0    | 25.50    | 3.7    |
| Modo 4  | 37.20  | 37.30       | 0.3    | 38.00    | 2.2    |
| Modo 5  | 45.40  | 45.40       | 0.0    | 46.20    | 1.8    |
| Modo 6  | 52.90  | 53.00       | 0.2    | 53.50    | 1.1    |
| Modo 7  | 58.40  | 58.40       | 0.0    | 59.50    | 1.9    |
| Modo 8  | 64.80  | 64.90       | 0.2    | 65.80    | 1.5    |
| Modo 9  | 75.90  | 76.00       | 0.1    | 76.70    | 1.1    |
| Modo 10 | 84.60  | 84.80       | 0.2    | 84.80    | 0.2    |
| Modo 11 | 92.00  | 92.20       | 0.2    | 92.90    | 1.0    |
| Modo 12 | 96.80  | 96.90       | 0.1    | 97.40    | 0.6    |
| Modo 13 | 102.00 | 102.30      | 0.3    | 102.80   | 0.8    |
| Modo 14 | 104.70 | 105.00      | 0.3    | 105.30   | 0.6    |
| Modo 15 | 111.80 | 112.00      | 0.2    | 112.70   | 0.8    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

Licencia Creative Commons:

105

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

4.1.10.4 Caso 4: Pórtico discretizado en 60 Elementos, 58 Nodos (Este valor se tomo como valor exacto).

Resultados:

|         | M.Conocida | M.Nueva |
|---------|------------|---------|
| Modo 1  | 7.60       | 8.10    |
| Modo 2  | 17.30      | 18.40   |
| Modo 3  | 24.60      | 25.90   |
| Modo 4  | 37.20      | 38.40   |
| Modo 5  | 45.40      | 46.70   |
| Modo 6  | 52.90      | 53.90   |
| Modo 7  | 58.40      | 60.20   |
| Modo 8  | 64.80      | 66.40   |
| Modo 9  | 75.90      | 77.10   |
| Modo 10 | 84.60      | 85.10   |
| Modo 11 | 92.00      | 93.50   |
| Modo 12 | 96.80      | 97.70   |
| Modo 13 | 102.00     | 103.50  |
| Modo 14 | 104.70     | 105.70  |
| Modo 15 | 111.80     | 113.30  |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

4.1.10.5 Resultados en forma gráfica

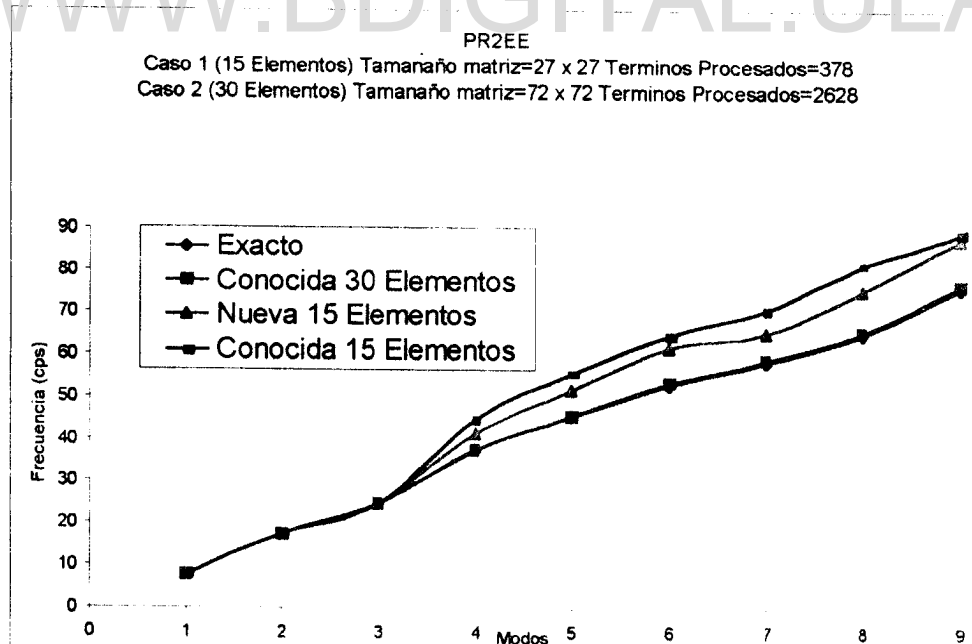


Figura 4.9 PR2EE , comparación gráfica de resultados

#### 4.1.11 PÓRTICO [3 NIVELES]

DATOS:

$$E=2387.52 \text{ Kg/m}^2, f'c=250 \text{ Kg/cm}^2$$

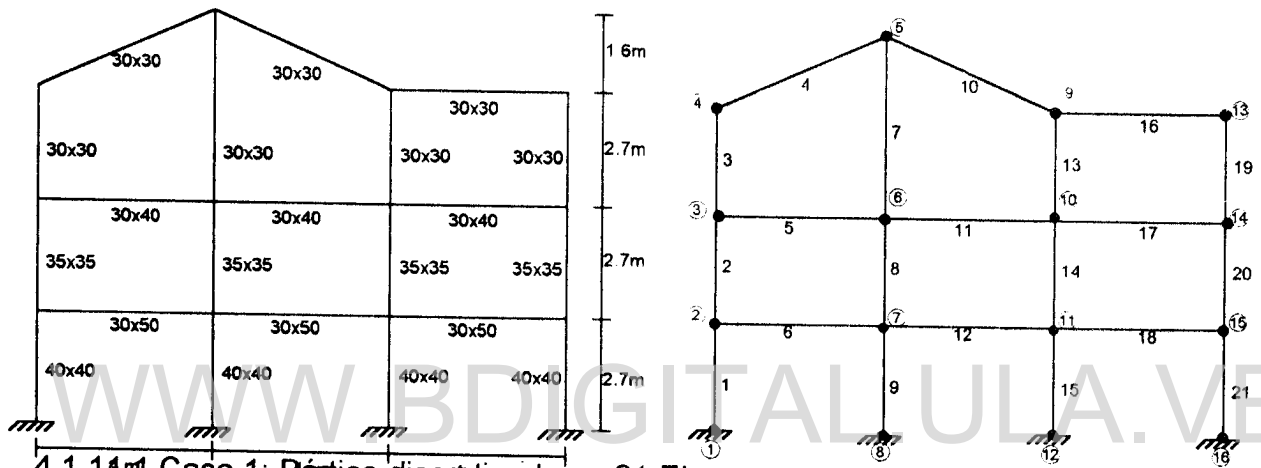
$$[0.30 \times 0.30]: A=0.09\text{m}^2, I=675 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=22.95918367 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$

$$[0.35 \times 0.35]: A=0.1225\text{m}^2, I=1250.52 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=31.25 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$

$$[0.40 \times 0.40]: A=0.16\text{m}^2, I=2133.333 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=40.81632653 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$

$$[0.30 \times 0.50]: A=0.15\text{m}^2, I=3125 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=38.26530612 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$

$$[0.30 \times 0.40]: A=0.12\text{m}^2, I=1600 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=30.6122449 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$



4.1.11.1 Caso 1: Pórtico discretizado en 21 Elementos, 16 Nodos

Resultados:

|         | Exacto | M. Conocida | ERROR% | M. Nueva | ERROR% |
|---------|--------|-------------|--------|----------|--------|
| Modo 1  | 6.30   | 6.27        | 0.5    | 6.29     | 0.2    |
| Modo 2  | 15.00  | 15.03       | 0.2    | 15.04    | 0.3    |
| Modo 3  | 27.90  | 28.17       | 1.0    | 28.09    | 0.7    |
| Modo 4  | 31.50  | 37.29       | 18.4   | 34.29    | 8.9    |
| Modo 5  | 38.00  | 49.37       | 29.9   | 45.55    | 19.9   |
| Modo 6  | 42.80  | 55.61       | 29.9   | 52.58    | 22.9   |
| Modo 7  | 44.60  | 57.54       | 29.0   | 54.91    | 23.1   |
| Modo 8  | 49.70  | 60.75       | 22.2   | 59.19    | 19.1   |
| Modo 9  | 54.20  | 69.53       | 28.3   | 65.99    | 21.8   |
| Modo 10 | 58.60  | 72.01       | 22.9   | 67.54    | 15.3   |
| Modo 11 | 60.40  | 75.69       | 25.3   | 70.24    | 16.3   |
| Modo 12 | 61.40  | 83.54       | 36.1   | 78.43    | 27.7   |
| Modo 13 | 67.50  | 89.01       | 31.9   | 86.71    | 28.5   |
| Modo 14 | 75.70  | 95.76       | 26.5   | 91.91    | 21.4   |
| Modo 15 | 84.40  | 100.31      | 18.8   | 93.80    | 11.1   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

#### 4.1.11.2 Caso 2: Pórtico discretizado en 42 Elementos, 37 Nodos

Resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 6.30   | 6.30       | 0.0    | 6.40    | 1.6    |
| Modo 2  | 15.00  | 15.00      | 0.0    | 15.30   | 2.0    |
| Modo 3  | 27.90  | 27.90      | 0.0    | 28.40   | 1.8    |
| Modo 4  | 31.50  | 31.60      | 0.3    | 31.70   | 0.6    |
| Modo 5  | 38.00  | 38.30      | 0.8    | 38.30   | 0.8    |
| Modo 6  | 42.80  | 43.20      | 0.9    | 43.20   | 0.9    |
| Modo 7  | 44.60  | 44.90      | 0.7    | 45.00   | 0.9    |
| Modo 8  | 49.70  | 50.00      | 0.6    | 50.10   | 0.8    |
| Modo 9  | 54.20  | 54.60      | 0.7    | 54.60   | 0.7    |
| Modo 10 | 58.60  | 59.00      | 0.7    | 58.90   | 0.5    |
| Modo 11 | 60.40  | 60.80      | 0.7    | 60.80   | 0.7    |
| Modo 12 | 61.40  | 61.80      | 0.7    | 61.70   | 0.5    |
| Modo 13 | 67.50  | 68.00      | 0.7    | 67.90   | 0.6    |
| Modo 14 | 75.70  | 76.30      | 0.8    | 76.10   | 0.5    |
| Modo 15 | 84.40  | 85.40      | 1.2    | 85.00   | 0.7    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.11.3 Caso 3: Pórtico discretizado en 63 Elementos, 58 Nodos (Este valor se tomo como valor exacto).

Resultados:

|         | M.Conocida | M.Nueva |
|---------|------------|---------|
| Modo 1  | 6.30       | 6.60    |
| Modo 2  | 15.00      | 15.60   |
| Modo 3  | 27.90      | 28.80   |
| Modo 4  | 31.50      | 32.10   |
| Modo 5  | 38.00      | 38.60   |
| Modo 6  | 42.80      | 43.30   |
| Modo 7  | 44.60      | 45.20   |
| Modo 8  | 49.70      | 50.40   |
| Modo 9  | 54.20      | 54.80   |
| Modo 10 | 58.60      | 59.00   |
| Modo 11 | 60.40      | 61.10   |
| Modo 12 | 61.40      | 62.10   |
| Modo 13 | 67.50      | 68.30   |
| Modo 14 | 75.70      | 76.40   |
| Modo 15 | 84.40      | 84.70   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.11.4 Resultados en forma gráfica

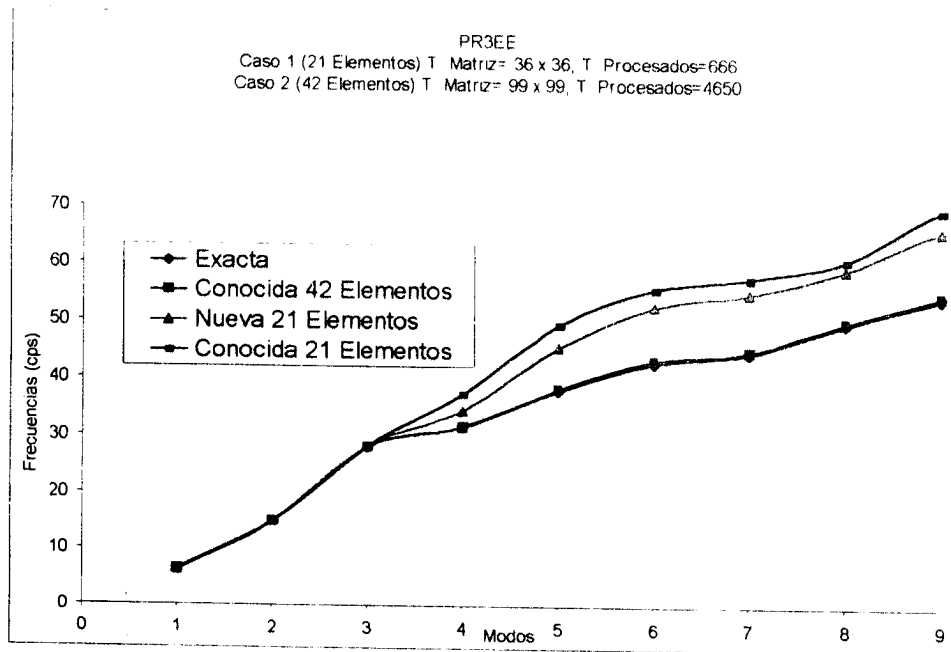


Figura 4.10 Pórtico PR3EE, comparación gráfica de resultados

#### 4.1.12 PÓRTICO [2 NIVELES]

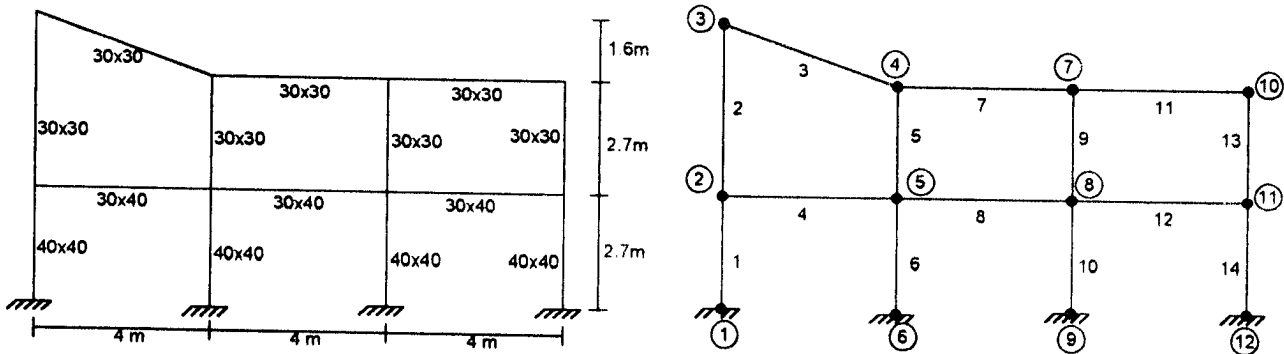
DATOS:

$$E=2387.52 \text{ Kg/m}^2, f_c=250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$[0.30 \times 0.30]: A=0.09\text{m}^2, I=675 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=22.95918367 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$

$$[0.40 \times 0.40]: A=0.16\text{m}^2, I=2133.333 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=40.81632653 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$

$$[0.30 \times 0.40]: A=0.12\text{m}^2, I=1600 \times 10^{-6} \text{ m}^4, m/L=30.6122449 \text{ Kg seg}^2 / \text{m}^2$$



##### 4.1.12.1 Caso 1: Pórtico discretizado en 14 Elementos, 12 Nodos

Resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 8.70   | 8.75       | 0.5    | 8.78    | 1.0    |
| Modo 2  | 23.40  | 23.58      | 0.8    | 23.58   | 0.8    |
| Modo 3  | 31.40  | 37.79      | 20.4   | 34.70   | 10.5   |
| Modo 4  | 38.30  | 48.79      | 27.4   | 44.71   | 16.7   |
| Modo 5  | 44.30  | 65.41      | 47.6   | 60.46   | 36.5   |
| Modo 6  | 49.10  | 70.31      | 43.2   | 64.60   | 31.6   |
| Modo 7  | 54.10  | 78.72      | 45.5   | 73.26   | 35.4   |
| Modo 8  | 59.50  | 86.72      | 45.7   | 84.59   | 42.2   |
| Modo 9  | 68.00  | 97.84      | 43.9   | 96.59   | 42.0   |
| Modo 10 | 85.50  | 107.22     | 25.4   | 101.35  | 18.5   |
| Modo 11 | 88.50  | 108.96     | 23.1   | 104.13  | 17.7   |
| Modo 12 | 96.50  | 121.77     | 26.2   | 119.69  | 24.0   |
| Modo 13 | 101.70 | 127.41     | 25.3   | 125.23  | 23.1   |
| Modo 14 | 108.50 | 137.98     | 27.2   | 133.96  | 23.5   |
| Modo 15 | 109.10 | 157.48     | 44.3   | 148.50  | 36.1   |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.12.2 Caso 2: Pórtico discretizado en 28 Elementos, 26 Nodos

Resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 8.70   | 8.70       | 0.0    | 9.00    | 3.4    |
| Modo 2  | 23.40  | 23.40      | 0.0    | 23.90   | 2.1    |
| Modo 3  | 31.40  | 31.60      | 0.6    | 31.60   | 0.6    |
| Modo 4  | 38.30  | 38.60      | 0.8    | 38.70   | 1.0    |
| Modo 5  | 44.30  | 44.80      | 1.1    | 44.80   | 1.1    |
| Modo 6  | 49.10  | 49.70      | 1.2    | 49.70   | 1.2    |
| Modo 7  | 54.10  | 54.60      | 0.9    | 54.60   | 0.9    |
| Modo 8  | 59.50  | 60.20      | 1.2    | 60.10   | 1.0    |
| Modo 9  | 68.00  | 68.90      | 1.3    | 68.80   | 1.2    |
| Modo 10 | 85.50  | 88.60      | 3.6    | 87.60   | 2.5    |
| Modo 11 | 88.50  | 92.50      | 4.5    | 90.40   | 2.1    |
| Modo 12 | 96.50  | 102.00     | 5.7    | 98.80   | 2.4    |
| Modo 13 | 101.70 | 107.30     | 5.5    | 105.00  | 3.2    |
| Modo 14 | 108.50 | 114.30     | 5.3    | 112.00  | 3.2    |
| Modo 15 | 109.10 | 119.10     | 9.2    | 116.40  | 6.7    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.12.3 Caso 3: Pórtico discretizado en 40 Elementos, 42 Nodos

Resultados:

|         | Exacto | M.Conocida | ERROR% | M.Nueva | ERROR% |
|---------|--------|------------|--------|---------|--------|
| Modo 1  | 8.70   | 8.70       | 0.0    | 9.10    | 4.6    |
| Modo 2  | 23.40  | 23.40      | 0.0    | 24.30   | 3.8    |
| Modo 3  | 31.40  | 31.40      | 0.0    | 32.00   | 1.9    |
| Modo 4  | 38.30  | 38.40      | 0.3    | 39.00   | 1.8    |
| Modo 5  | 44.30  | 44.40      | 0.2    | 44.90   | 1.4    |
| Modo 6  | 49.10  | 49.20      | 0.2    | 49.70   | 1.2    |
| Modo 7  | 54.10  | 54.20      | 0.2    | 55.00   | 1.7    |
| Modo 8  | 59.50  | 59.60      | 0.2    | 60.40   | 1.5    |
| Modo 9  | 68.00  | 68.20      | 0.3    | 68.80   | 1.2    |
| Modo 10 | 85.50  | 85.70      | 0.2    | 86.10   | 0.7    |
| Modo 11 | 88.50  | 89.00      | 0.6    | 88.60   | 0.1    |
| Modo 12 | 96.50  | 96.80      | 0.3    | 97.10   | 0.6    |
| Modo 13 | 101.70 | 102.00     | 0.3    | 102.40  | 0.7    |
| Modo 14 | 108.50 | 109.10     | 0.6    | 108.90  | 0.4    |
| Modo 15 | 109.10 | 109.50     | 0.4    | 110.00  | 0.8    |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.12.4 Caso 4: Pórtico discretizado en 56 Elementos, 54 Nodos (Este valor se tomo como valor exacto).

Resultados:

|         | M.Conocida | M.Nueva |
|---------|------------|---------|
| Modo 1  | 8.70       | 9.30    |
| Modo 2  | 23.40      | 24.70   |
| Modo 3  | 31.40      | 32.40   |
| Modo 4  | 38.30      | 39.40   |
| Modo 5  | 44.30      | 45.30   |
| Modo 6  | 49.10      | 50.00   |
| Modo 7  | 54.10      | 55.60   |
| Modo 8  | 59.50      | 60.90   |
| Modo 9  | 68.00      | 69.20   |
| Modo 10 | 85.50      | 86.50   |
| Modo 11 | 88.50      | 88.80   |
| Modo 12 | 96.50      | 97.70   |
| Modo 13 | 101.70     | 102.80  |
| Modo 14 | 108.50     | 109.00  |
| Modo 15 | 109.10     | 110.70  |

Frecuencias Naturales (c.p.s)

#### 4.1.12.5 Resultados en forma gráfica

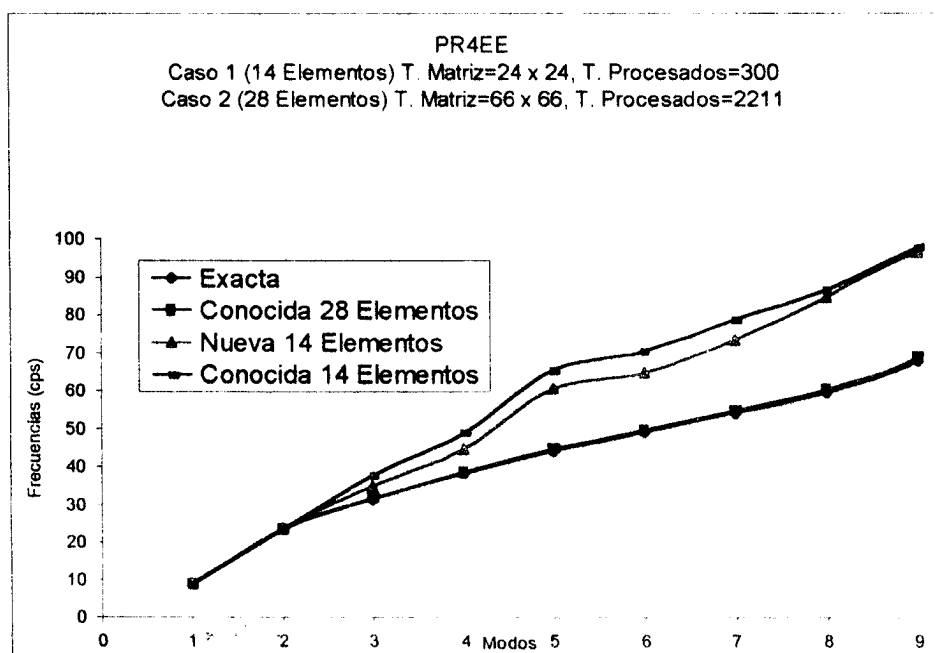
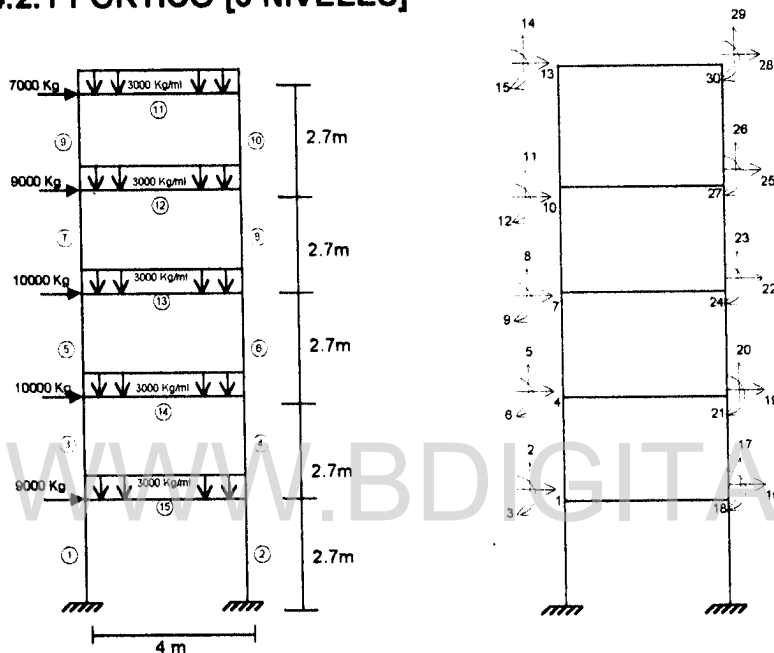


Figura 4.11 Pórtico PR4EE, comparación gráfica de resultados

## 4.2 ANÁLISIS ESTÁTICO

Se analizaron los pórticos de los ejemplos 5.1.8, 5.1.9, 5.1.10, 5.1.11, 5.1.12 realizados en el análisis dinámico, utilizando el programa del profesor Hector Febres en su forma original y con nuestra modificación.

### 4.2.1 PÓRTICO [5 NIVELES]



Resultados:

Desplazamientos:

M. Conocida

| Desplaz. | Valor (m)  |
|----------|------------|
| 1        | 1.317E-02  |
| 2        | 2.717E-04  |
| 3        | -4.568E-03 |
| 4        | 3.066E-02  |
| 5        | 4.223E-04  |
| 6        | -4.406E-03 |
| 7        | 4.741E-02  |
| 8        | 4.619E-04  |
| 9        | -5.284E-03 |

M. Nueva

| Desplaz. | Valor (m)  |
|----------|------------|
| 1        | 1.300E-02  |
| 2        | 2.661E-04  |
| 3        | -4.475E-03 |
| 4        | 3.034E-02  |
| 5        | 4.134E-04  |
| 6        | -4.333E-03 |
| 7        | 4.689E-02  |
| 8        | 4.513E-04  |
| 9        | -5.180E-03 |

| Error (%) |
|-----------|
| 1.3       |
| 2.1       |
| 2.0       |
| 1.0       |
| 2.1       |
| 1.7       |
| 1.1       |
| 2.3       |
| 2.0       |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |            |
|----|------------|
| 10 | 6.685E-02  |
| 11 | 4.446E-04  |
| 12 | -3.714E-03 |
| 13 | 7.862E-02  |
| 14 | 4.014E-04  |
| 15 | -3.822E-03 |
| 16 | 1.313E-02  |
| 17 | -6.958E-04 |
| 18 | -4.181E-03 |
| 19 | 3.061E-02  |
| 20 | -1.186E-03 |
| 21 | -4.157E-03 |
| 22 | 4.733E-02  |
| 23 | -1.480E-03 |
| 24 | -4.752E-03 |
| 25 | 6.681E-02  |
| 26 | -1.764E-03 |
| 27 | -3.013E-03 |
| 28 | 7.851E-02  |
| 29 | -1.872E-03 |
| 30 | -1.557E-03 |

|    |            |
|----|------------|
| 10 | 6.614E-02  |
| 11 | 4.329E-04  |
| 12 | -3.663E-03 |
| 13 | 7.780E-02  |
| 14 | 3.895E-04  |
| 15 | -3.750E-03 |
| 16 | 1.300E-02  |
| 17 | -6.902E-04 |
| 18 | -4.099E-03 |
| 19 | 3.018E-02  |
| 20 | -1.177E-03 |
| 21 | -4.085E-03 |
| 22 | 4.681E-02  |
| 23 | -1.469E-03 |
| 24 | -4.662E-03 |
| 25 | 6.609E-02  |
| 26 | -1.752E-03 |
| 27 | -2.966E-03 |
| 28 | 7.769E-02  |
| 29 | -1.860E-03 |
| 30 | -1.553E-03 |

|     |
|-----|
| 1.1 |
| 2.6 |
| 1.4 |
| 1.0 |
| 3.0 |
| 1.9 |
| 1.0 |
| 0.8 |
| 2.0 |
| 1.4 |
| 0.8 |
| 1.7 |
| 1.1 |
| 0.7 |
| 1.9 |
| 1.1 |
| 0.7 |
| 1.6 |
| 1.0 |
| 0.7 |
| 0.2 |

Acciones en los Miembros:

M.Conocida

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg  | V(j) Kg  |
|---------|-----------|-----------|--------------|----------|----------|
| 1       | 37988.84  | 20755.52  | 38436.617    | 21757.17 | -21757.2 |
| 2       | 39264.694 | 23490.946 | -98436.617   | 23242.83 | -23242.8 |
| 3       | 22213.933 | 22824.56  | 21312.686    | 16680.92 | -16680.9 |
| 4       | 26035.326 | 26126.182 | -69312.686   | 19319.08 | -19319.1 |
| 5       | 17055.364 | 13742.732 | 5605.035     | 11406.7  | -11406.7 |
| 6       | 20824.497 | 18577.407 | -41605.035   | 14593.3  | -14593.3 |
| 7       | 8737.417  | 10611.072 | -1381.238    | 7166.107 | -7166.11 |
| 8       | 10887.537 | 12963.974 | -22618.762   | 8833.893 | -8833.89 |
| 9       | 2168.807  | 2040.204  | -3436.263    | 1558.893 | -1558.89 |
| 10      | 6476.246  | 8214.743  | -8563.737    | 5441.107 | -5441.11 |
| 11      | -42969.45 | -49526.27 | -3923.753    | -17123.9 | 29123.93 |
| 12      | -39879.93 | -46950.68 | -4725.779    | -15707.7 | 27707.65 |
| 13      | -22480.15 | -29464.94 | -5759.405    | -6986.27 | 18986.27 |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |           |           |           |          |          |
|----|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 14 | -12779.88 | -19440.22 | -3392.786 | -2055.03 | 14055.03 |
| 15 | -2040.204 | -8214.743 | -5441.107 | 3436.263 | 8563.737 |

M.Nueva

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg  | V(j) Kg  |
|---------|-----------|-----------|--------------|----------|----------|
| 1       | 38351.083 | 20482.942 | 37653.394    | 21774.93 | -21774.9 |
| 2       | 39571.35  | 23204.126 | -97653.394   | 23225.07 | -23225.1 |
| 3       | 22182.616 | 22746.982 | 20841.026    | 16697.54 | -16697.5 |
| 4       | 25977.37  | 26030.524 | -68841.026   | 19302.46 | -19302.5 |
| 5       | 17002.945 | 13621.159 | 5354.358     | 11425.84 | -11425.8 |
| 6       | 20740.813 | 18438.582 | -41354.358   | 14574.16 | -14574.2 |
| 7       | 8708.655  | 10625.77  | -1462.822    | 7172.751 | -7172.75 |
| 8       | 10843.668 | 12986.098 | -22537.178   | 8827.249 | -8827.25 |
| 9       | 2173.515  | 2063.643  | -3454.773    | 1594.008 | -1594.01 |
| 10      | 6405.119  | 8190.392  | -8545.227    | 5405.992 | -5405.99 |
| 11      | -42665.56 | -49181.5  | -3922.617    | -16812.4 | 28812.37 |
| 12      | -39749.93 | -46771.34 | -4728.3      | -15486.7 | 27486.67 |
| 13      | -22329.81 | -29282.25 | -5746.906    | -6817.18 | 18817.18 |
| 14      | -12799.29 | -19391.22 | -3421.257    | -1991.95 | 13991.95 |
| 15      | -2063.643 | -8190.392 | -5405.992    | 3454.773 | 8545.227 |

Error

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg | V(j) Kg |
|---------|-----------|-----------|--------------|---------|---------|
| 1       | 1.0       | 1.3       | 2.0          | 0.1     | 0.1     |
| 2       | 0.8       | 1.2       | 0.8          | 0.1     | 0.1     |
| 3       | 0.1       | 0.3       | 2.2          | 0.1     | 0.1     |
| 4       | 0.2       | 0.4       | 0.7          | 0.1     | 0.1     |
| 5       | 0.3       | 0.9       | 4.5          | 0.2     | 0.2     |
| 6       | 0.4       | 0.7       | 0.6          | 0.1     | 0.1     |
| 7       | 0.3       | 0.1       | 5.9          | 0.1     | 0.1     |
| 8       | 0.4       | 0.2       | 0.4          | 0.1     | 0.1     |
| 9       | 0.2       | 1.1       | 0.5          | 2.3     | 2.3     |
| 10      | 1.1       | 0.3       | 0.2          | 0.6     | 0.6     |
| 11      | 0.7       | 0.7       | 0.0          | 1.8     | 1.1     |
| 12      | 0.3       | 0.4       | 0.1          | 1.4     | 0.8     |
| 13      | 0.7       | 0.6       | 0.2          | 2.4     | 0.9     |
| 14      | 0.2       | 0.3       | 0.8          | 3.1     | 0.4     |
| 15      | 1.1       | 0.3       | 0.6          | 0.5     | 0.2     |

## Resultados en forma gráfica

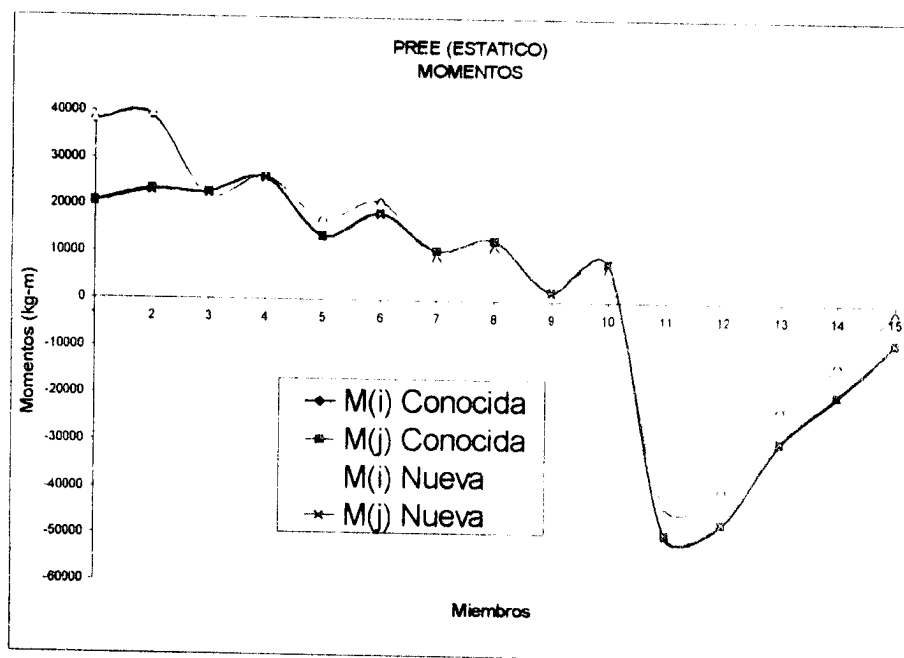


Figura 4.12 PREE Estático (Momentos), comparación gráfica resultados

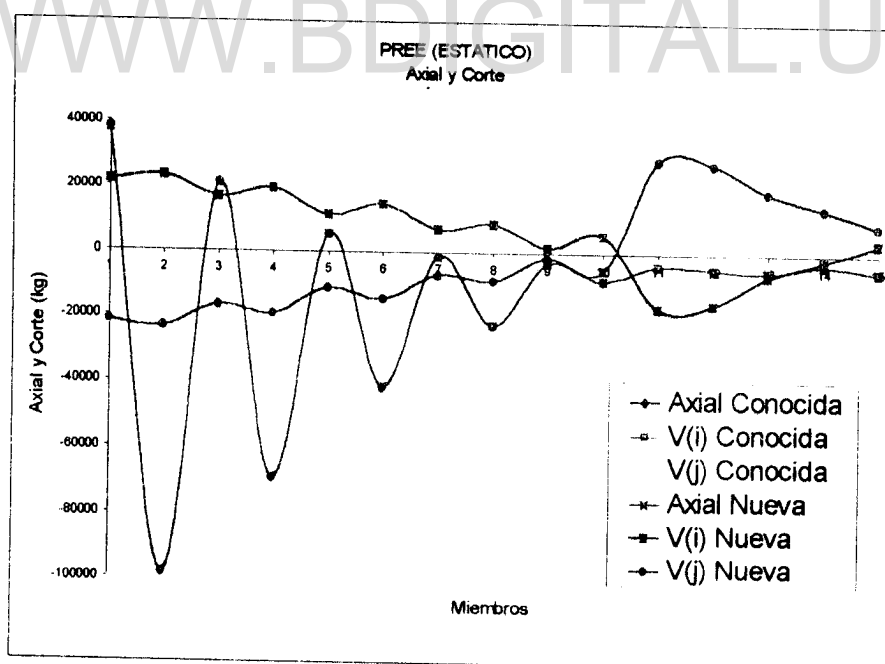


Figura 5.13 PREE Estático (Axial y Corte), comparación gráfica de resultados

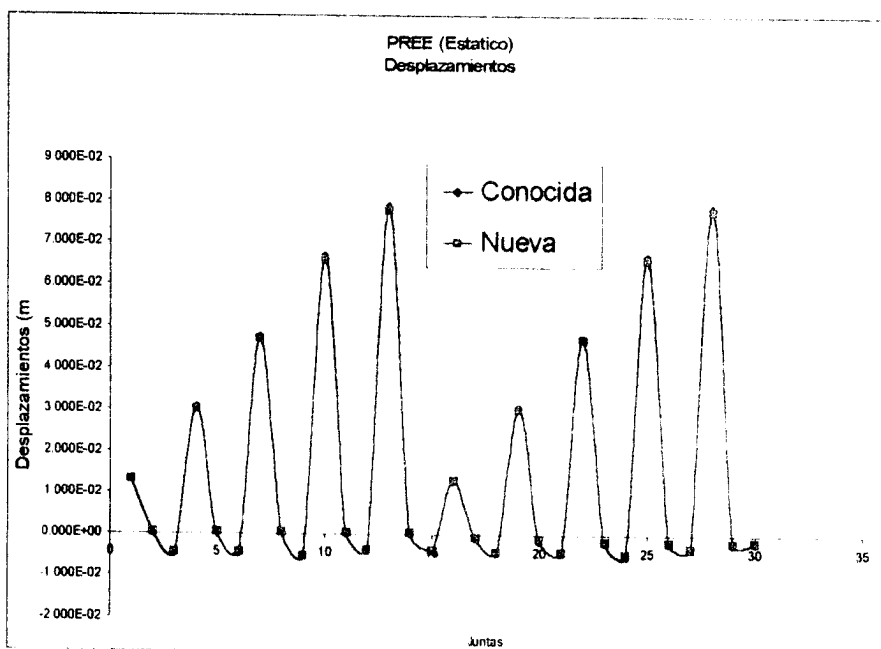
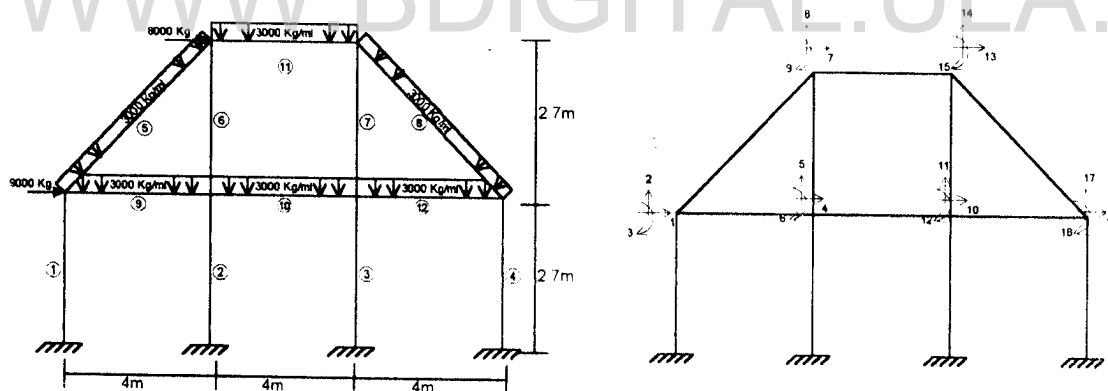


Figura 4.14 PREE Estático (Desplazamientos), comparación gráfica de resultados

## 5.2.2 PÓRTICO [2 NIVELES]



Resultados:

Desplazamientos

M.Conocida

| Desplaz | Valor (m)  |
|---------|------------|
| 1       | 5.288E-03  |
| 2       | -9.533E-05 |
| 3       | -2.306E-03 |

M.Nueva

| Desplaz. | Valor (m)  |
|----------|------------|
| 1        | 5.260E-03  |
| 2        | -9.582E-05 |
| 3        | -2.249E-03 |

| Error (%) |
|-----------|
| 0.5       |
| 0.5       |
| 2.5       |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |            |
|----|------------|
| 4  | 5.162E-03  |
| 5  | -3.740E-04 |
| 6  | -2.499E-04 |
| 7  | 5.689E-03  |
| 8  | -5.689E-04 |
| 9  | 5.736E-04  |
| 10 | 5.089E-03  |
| 11 | -3.794E-04 |
| 12 | -5.914E-04 |
| 13 | 5.598E-03  |
| 14 | -5.936E-04 |
| 15 | -4.580E-04 |
| 16 | 5.088E-03  |
| 17 | -1.182E-04 |
| 18 | 6.848E-04  |

|    |            |
|----|------------|
| 4  | 5.135E-03  |
| 5  | -3.735E-04 |
| 6  | -2.574E-04 |
| 7  | 5.661E-03  |
| 8  | -5.684E-04 |
| 9  | 5.476E-04  |
| 10 | 5.062E-03  |
| 11 | -3.791E-04 |
| 12 | -5.745E-04 |
| 13 | 5.570E-03  |
| 14 | -5.931E-04 |
| 15 | -4.439E-04 |
| 16 | 5.061E-03  |
| 17 | -1.186E-04 |
| 18 | 6.602E-04  |

|     |
|-----|
| 0.5 |
| 0.1 |
| 3.0 |
| 0.5 |
| 0.1 |
| 4.5 |
| 0.5 |
| 0.1 |
| 2.9 |
| 0.5 |
| 0.1 |
| 3.1 |
| 0.5 |
| 0.3 |
| 3.6 |

#### Acciones en los Miembros:

##### M.Conocida

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg  | V(j) Kg   |
|---------|-----------|-----------|--------------|----------|-----------|
| 1       | 4260.782  | 1507.531  | -7586.714    | 2136.412 | -2136.412 |
| 2       | 6548.781  | 6250.415  | -29767.266   | 4740.443 | -4740.443 |
| 3       | 6044.516  | 5338.524  | -30195.288   | 4215.941 | -4215.941 |
| 4       | 7565.973  | 8383.479  | -9406.732    | 5907.205 | -5907.205 |
| 5       | 3381.010  | -6340.495 | 3005.840     | 6625.759 | -6625.759 |
| 6       | 786.964   | 1770.129  | -15506.327   | 947.071  | -947.071  |
| 7       | -1284.309 | -1125.077 | -17047.191   | -892.365 | 892.365   |
| 8       | 5386.013  | -5495.718 | -6978.694    | 7216.268 | -7216.268 |
| 9       | -4888.541 | -8960.724 | -9011.882    | 2537.684 | 9462.316  |
| 10      | 1923.345  | -6728.856 | -5218.511    | 4798.622 | 7201.378  |
| 11      | 4570.366  | -4260.936 | -4904.634    | 6077.358 | 5922.642  |
| 12      | 2674.641  | -2887.762 | -110.205     | 5946.720 | 6053.280  |

##### M.Nueva

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg  | V(j) Kg   |
|---------|-----------|-----------|--------------|----------|-----------|
| 1       | 4365.780  | 1524.437  | -7625.510    | 2183.376 | -2183.376 |
| 2       | 6553.799  | 6228.577  | -29727.004   | 4719.496 | -4719.496 |
| 3       | 6082.057  | 5356.127  | -30168.771   | 4224.584 | -4224.584 |
| 4       | 7540.928  | 8375.103  | -9434.716    | 5872.544 | -5872.544 |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |           |           |            |          |           |
|----|-----------|-----------|------------|----------|-----------|
| 5  | 3364.565  | -6303.673 | 3032.281   | 6634.157 | -6634.157 |
| 6  | 721.590   | 1738.726  | -15507.447 | 907.024  | -907.024  |
| 7  | -1252.861 | -1087.770 | -17036.347 | -859.906 | 859.906   |
| 8  | 5368.431  | -5496.097 | -6953.100  | 7212.361 | -7265.639 |
| 9  | -4889.002 | -8863.208 | -8991.533  | 2584.312 | 9415.688  |
| 10 | 1913.041  | -6728.092 | -5179.061  | 4803.869 | 7196.131  |
| 11 | 4564.947  | -4280.661 | -4918.066  | 6070.644 | 5929.356  |
| 12 | 2624.827  | -2879.006 | -94.572    | 5936.293 | 6063.707  |

#### Error

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg | V(j) Kg |
|---------|-----------|-----------|--------------|---------|---------|
| 1       | 2.5       | 1.1       | 0.5          | 2.2     | 2.2     |
| 2       | 0.1       | 0.3       | 0.1          | 0.4     | 0.4     |
| 3       | 0.6       | 0.3       | 0.1          | 0.2     | 0.2     |
| 4       | 0.3       | 0.1       | 0.3          | 0.6     | 0.6     |
| 5       | 0.5       | 0.6       | 0.9          | 0.1     | 0.1     |
| 6       | 8.3       | 1.8       | 0.0          | 4.2     | 4.2     |
| 7       | 2.4       | 3.3       | 0.1          | 3.6     | 3.6     |
| 8       | 0.3       | 0.0       | 0.4          | 0.1     | 0.7     |
| 9       | 0.0       | 1.1       | 0.2          | 1.8     | 0.5     |
| 10      | 0.5       | 0.0       | 0.8          | 0.1     | 0.1     |
| 11      | 0.1       | 0.5       | 0.3          | 0.1     | 0.1     |
| 12      | 1.9       | 0.3       | 14.2         | 0.2     | 0.2     |

Resultados en forma gráfica

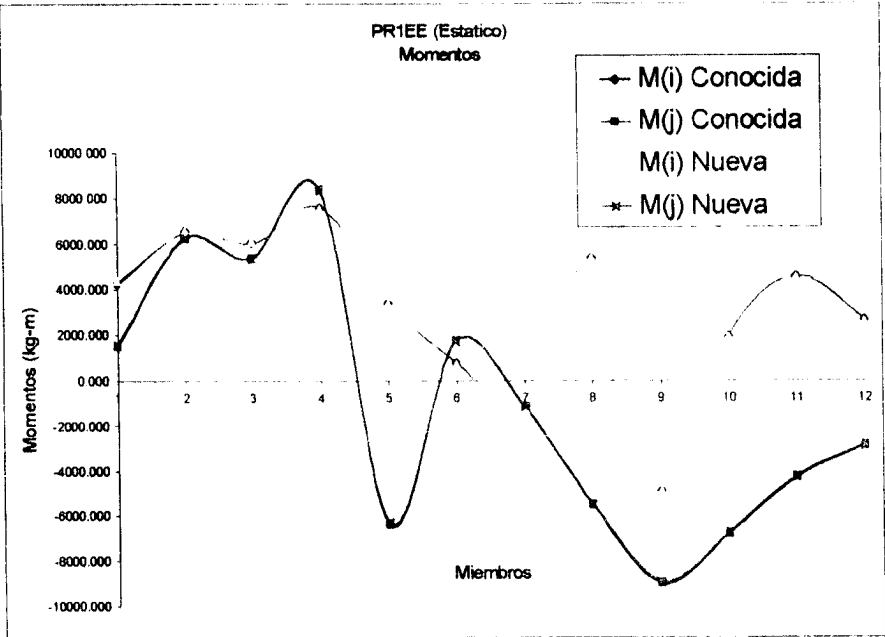


Figura 4.15 PR1EE Estático (Momentos), comparación gráfica de resultados

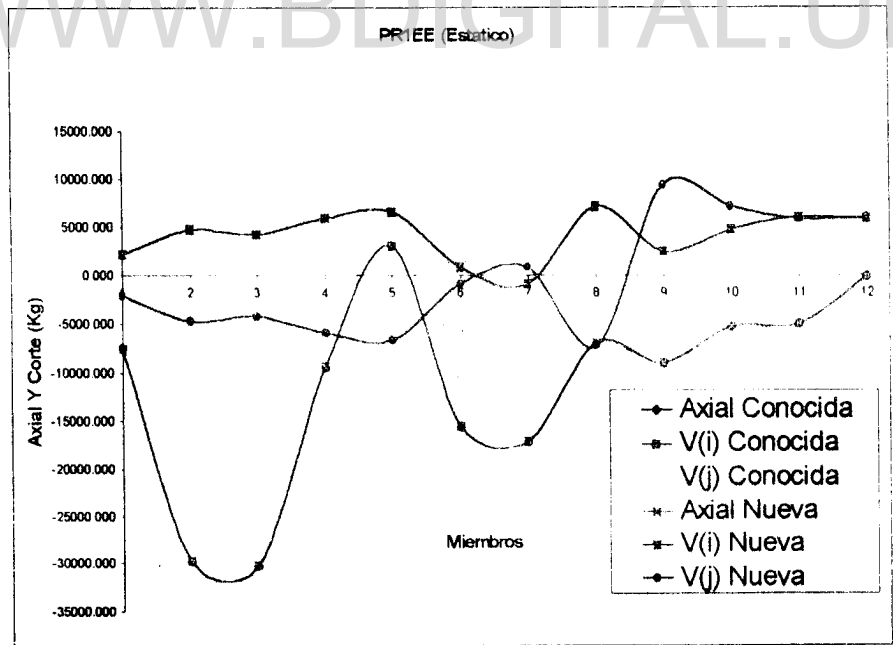


Figura 4.16 PR1EE Estático (Axial y Corte), comparación gráfica de resultados

|    |           |           |            |          |           |
|----|-----------|-----------|------------|----------|-----------|
| 5  | 3364.565  | -6303.673 | 3032.281   | 6634.157 | -6634.157 |
| 6  | 721.590   | 1738.726  | -15507.447 | 907.024  | -907.024  |
| 7  | -1252.861 | -1087.770 | -17036.347 | -859.906 | 859.906   |
| 8  | 5368.431  | -5496.097 | -6953.100  | 7212.361 | -7265.639 |
| 9  | -4889.002 | -8863.208 | -8991.533  | 2584.312 | 9415.688  |
| 10 | 1913.041  | -6728.092 | -5179.061  | 4803.869 | 7196.131  |
| 11 | 4564.947  | -4280.661 | -4918.066  | 6070.644 | 5929.356  |
| 12 | 2624.827  | -2879.006 | -94.572    | 5936.293 | 6063.707  |

Error

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg | V(j) Kg |
|---------|-----------|-----------|--------------|---------|---------|
| 1       | 2.5       | 1.1       | 0.5          | 2.2     | 2.2     |
| 2       | 0.1       | 0.3       | 0.1          | 0.4     | 0.4     |
| 3       | 0.6       | 0.3       | 0.1          | 0.2     | 0.2     |
| 4       | 0.3       | 0.1       | 0.3          | 0.6     | 0.6     |
| 5       | 0.5       | 0.6       | 0.9          | 0.1     | 0.1     |
| 6       | 8.3       | 1.8       | 0.0          | 4.2     | 4.2     |
| 7       | 2.4       | 3.3       | 0.1          | 3.6     | 3.6     |
| 8       | 0.3       | 0.0       | 0.4          | 0.1     | 0.7     |
| 9       | 0.0       | 1.1       | 0.2          | 1.8     | 0.5     |
| 10      | 0.5       | 0.0       | 0.8          | 0.1     | 0.1     |
| 11      | 0.1       | 0.5       | 0.3          | 0.1     | 0.1     |
| 12      | 1.9       | 0.3       | 14.2         | 0.2     | 0.2     |

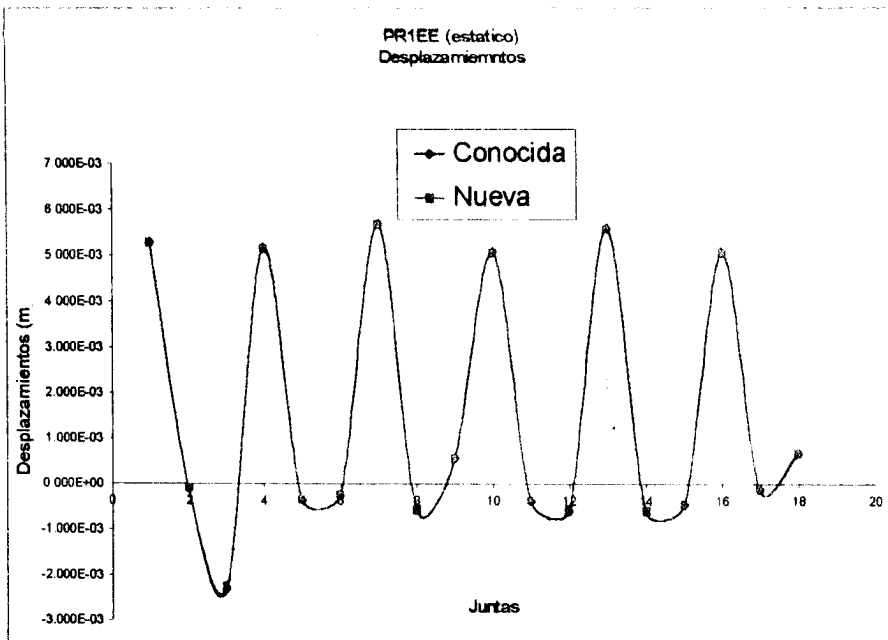
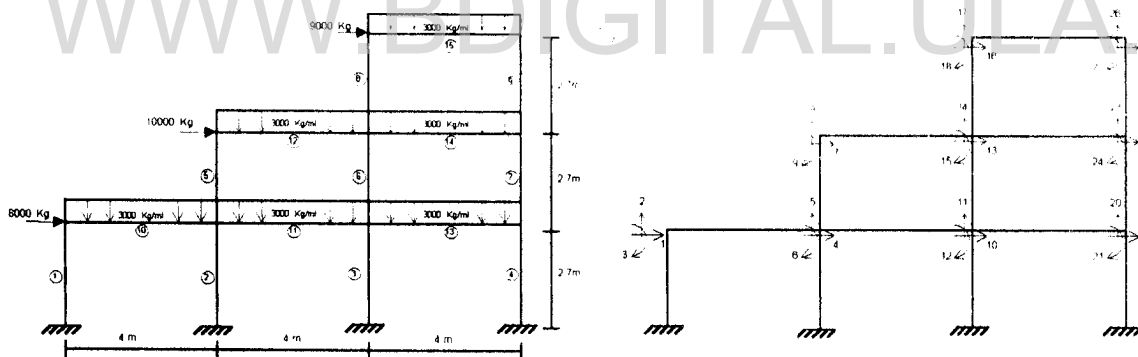


Figura 4.17 PR1EE Estático (Desplazamientos), comparación gráfica de resultados

#### 4.2.3 PÓRTICO [3 NIVELES]



Resultados:

Desplazamientos

M.Conocida

| Desplaz | Valor (m)  |
|---------|------------|
| 1       | 3.422E-03  |
| 2       | -7.791E-06 |
| 3       | -1.055E-03 |
| 4       | 3.402E-03  |

M.Nueva

| Desplaz. | Valor (m)  |
|----------|------------|
| 1        | 3.398E-03  |
| 2        | -8.112E-06 |
| 3        | -1.033E-03 |
| 4        | 3.378E-03  |

| Error (%) |
|-----------|
| 0.7       |
| 4.1       |
| 2.1       |
| 0.7       |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |            |    |            |     |
|----|------------|----|------------|-----|
| 5  | -9.849E-05 | 5  | -9.859E-05 | 0.1 |
| 6  | -7.405E-04 | 6  | -7.341E-04 | 0.9 |
| 7  | 1.356E-02  | 7  | 1.347E-02  | 0.7 |
| 8  | -1.141E-04 | 8  | -1.146E-04 | 0.4 |
| 9  | -2.416E-03 | 9  | -2.360E-03 | 2.3 |
| 10 | 3.400E-03  | 10 | 3.377E-03  | 0.7 |
| 11 | -1.875E-04 | 11 | -1.878E-04 | 0.2 |
| 12 | -8.082E-04 | 12 | -7.943E-04 | 1.7 |
| 13 | 1.350E-02  | 13 | 1.341E-02  | 0.7 |
| 14 | -3.819E-04 | 14 | -3.824E-04 | 0.1 |
| 15 | -1.037E-03 | 15 | -1.047E-03 | 1.0 |
| 16 | 2.346E-02  | 16 | 2.328E-02  | 0.7 |
| 17 | -4.220E-04 | 17 | -4.229E-04 | 0.2 |
| 18 | -3.837E-03 | 18 | -3.738E-03 | 2.6 |
| 19 | 3.396E-03  | 19 | 3.372E-03  | 0.7 |
| 20 | -2.151E-04 | 20 | -2.144E-04 | 0.3 |
| 21 | -1.044E-03 | 21 | -1.028E-03 | 1.6 |
| 22 | 1.350E-02  | 22 | 1.341E-02  | 0.7 |
| 23 | -4.574E-04 | 23 | -4.561E-04 | 0.3 |
| 24 | -2.129E-03 | 24 | -2.077E-03 | 2.4 |
| 25 | 2.335E-02  | 25 | 2.318E-02  | 0.7 |
| 26 | -5.681E-04 | 26 | -5.664E-04 | 0.3 |
| 27 | -8.79E-04  | 27 | -9.016E-04 | 2.5 |

Acciones en los Miembros:

M.Conocida

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m  | F Axial (Kg) | V(i) Kg  | V(j) Kg   |
|---------|-----------|------------|--------------|----------|-----------|
| 1       | 10364.039 | 6382.488   | -1102.320    | 6202.417 | -6202.417 |
| 2       | 11467.464 | 8673.504   | -13934.888   | 7459.618 | -7459.618 |
| 3       | 11205.831 | 8156.552   | -26531.302   | 7171.253 | -7171.253 |
| 4       | 10294.811 | 6355.312   | -30431.491   | 6166.712 | -6166.712 |
| 5       | 8825.830  | 6825.681   | -1245.871    | 5796.856 | -5796.856 |
| 6       | 10235.202 | 9962.617   | -15466.793   | 7480.673 | -7480.673 |
| 7       | 8373.110  | 7077.560   | -19287.336   | 5722.470 | -5722.470 |
| 8       | 6146.877  | 2803.875   | -3193.848    | 3315.093 | -3315.093 |
| 9       | 6928.516  | 8420.732   | -8806.152    | 5684.907 | -5684.907 |
| 10      | -6382.488 | -13208.233 | -1797.583    | 1102.320 | 10897.680 |
| 11      | -4291.101 | -12543.554 | -134.821     | 1791.336 | 10208.664 |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |           |            |           |          |           |
|----|-----------|------------|-----------|----------|-----------|
| 12 | -6825.681 | -12190.834 | -4203.144 | 1245.871 | 10754.129 |
| 13 | -5848.200 | -14728.422 | -444.242  | 855.845  | 11144.155 |
| 14 | -3918.660 | -14006.077 | -37.564   | 1518.816 | 10481.184 |
| 15 | -2803.875 | -8420.732  | -5684.907 | 3193.848 | 8806.152  |

#### M.Nueva

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m  | F Axial (Kg) | V (i) Kg | V (j) Kg  |
|---------|-----------|------------|--------------|----------|-----------|
| 1       | 10482.924 | 6357.374   | -1147.726    | 6229.566 | -6229.566 |
| 2       | 11517.199 | 8585.521   | -13948.287   | 7430.036 | -7430.036 |
| 3       | 11284.968 | 8113.148   | -26572.593   | 7170.707 | -7170.707 |
| 4       | 10391.576 | 6286.698   | -30331.394   | 6169.691 | -6169.691 |
| 5       | 8888.913  | 6834.353   | -1277.121    | 5816.538 | -5816.538 |
| 6       | 10219.407 | 9899.899   | -15488.339   | 7434.226 | -7434.226 |
| 7       | 8433.466  | 7107.355   | -19234.539   | 5749.236 | -5749.236 |
| 8       | 6204.732  | 2805.056   | -3220.047    | 3345.162 | -3345.162 |
| 9       | 6900.357  | 8386.120   | -8779.953    | 5654.838 | -5654.838 |
| 10      | -6357.374 | -13176.909 | -1770.434    | 1147.726 | 10852.274 |
| 11      | -4297.525 | -12534.971 | -156.936     | 1818.891 | 10181.109 |
| 12      | -6834.353 | -12179.843 | -4183.462    | 1277.121 | 10722.879 |
| 13      | -5797.584 | -14720.164 | -420.455     | 903.145  | 11096.855 |
| 14      | -3924.788 | -14007.712 | -94.398      | 1545.413 | 10454.587 |
| 15      | -2805.056 | -8386.120  | -5654.838    | 3220.047 | 8779.953  |

#### Error

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V (i) Kg | V (j) Kg |
|---------|-----------|-----------|--------------|----------|----------|
| 1       | 1.1       | 0.4       | 4.1          | 0.4      | 0.4      |
| 2       | 0.4       | 1.0       | 0.1          | 0.4      | 0.4      |
| 3       | 0.7       | 0.5       | 0.2          | 0.0      | 0.0      |
| 4       | 0.9       | 1.1       | 0.3          | 0.0      | 0.0      |
| 5       | 0.7       | 0.1       | 2.5          | 0.3      | 0.3      |
| 6       | 0.2       | 0.6       | 0.1          | 0.6      | 0.6      |
| 7       | 0.7       | 0.4       | 0.3          | 0.5      | 0.5      |
| 8       | 0.9       | 0.0       | 0.8          | 0.9      | 0.9      |
| 9       | 0.4       | 0.4       | 0.3          | 0.5      | 0.5      |
| 10      | 0.4       | 0.2       | 1.5          | 4.1      | 0.4      |
| 11      | 0.1       | 0.1       | 16.4         | 1.5      | 0.3      |
| 12      | 0.1       | 0.1       | 0.5          | 2.5      | 0.3      |
| 13      | 0.9       | 0.1       | 5.4          | 5.5      | 0.4      |
| 14      | 0.2       | 0.0       | 151.3        | 1.8      | 0.3      |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 15 | 0.0 | 0.4 | 0.5 | 0.8 | 0.3 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|

## Resultados en forma gráfica

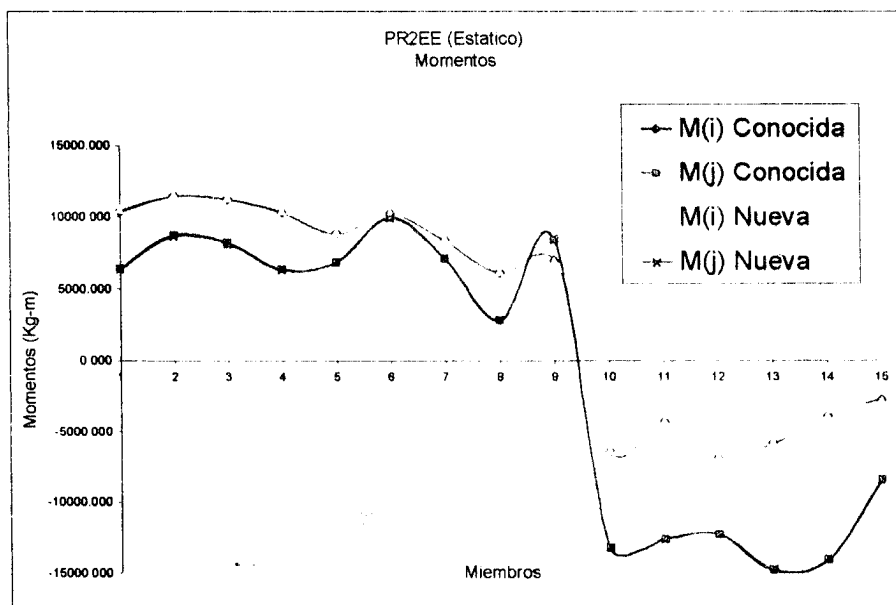


Figura 4.18 PR2EE Estático (Momentos), comparación gráfica de resultados

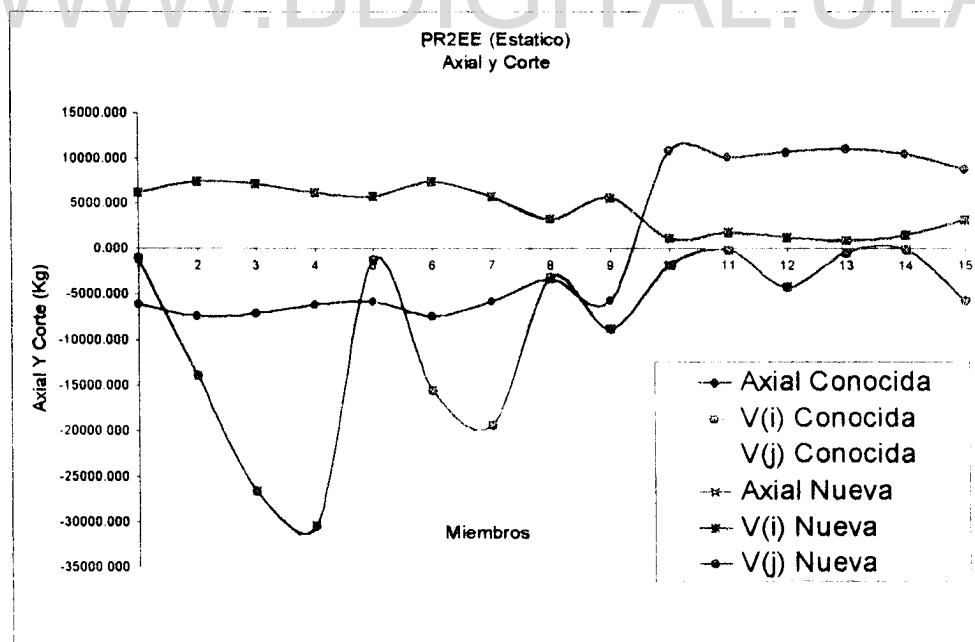


Figura 4.19 PR2EE Estático (Axial y Corte), comparación gráfica de resultados

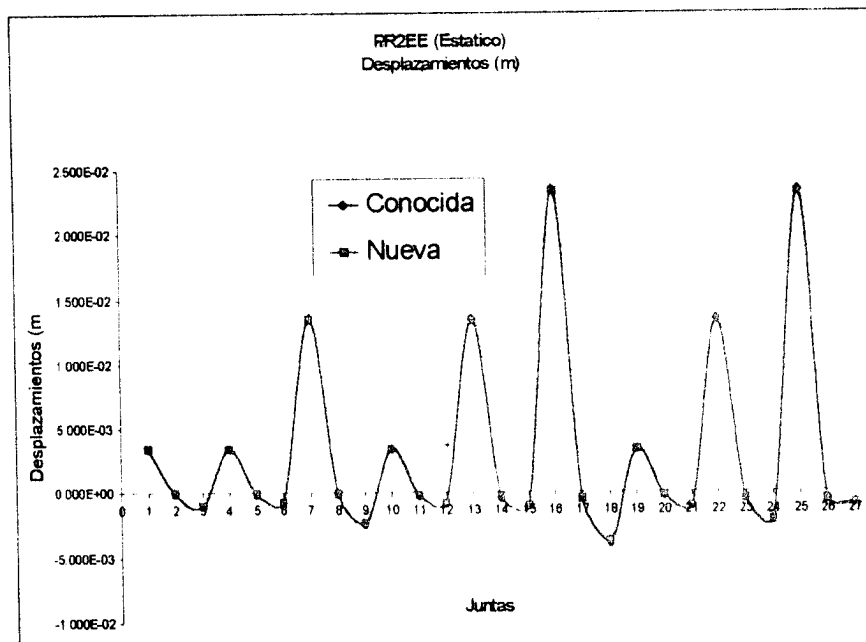
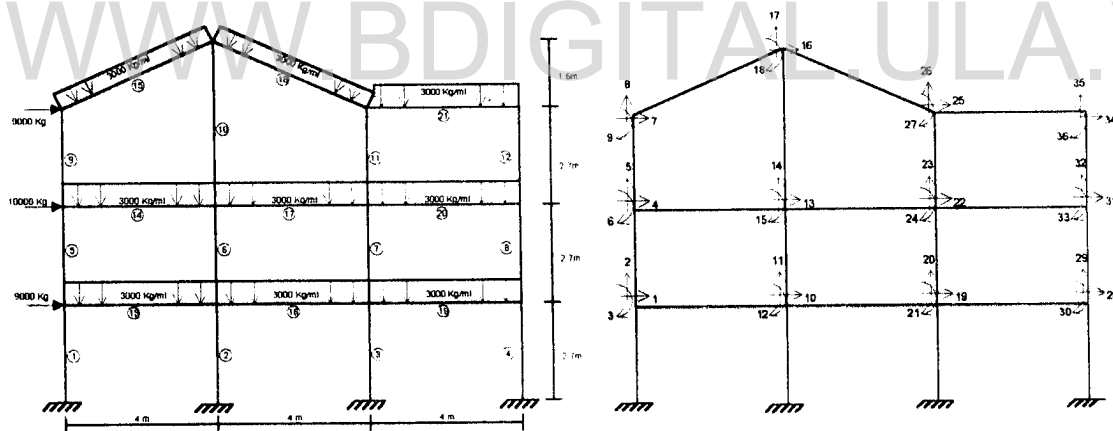


Figura 4.20 PR2EE Estático (Desplazamientos), comparación gráfica de resultados

#### 4.2.4 PÓRTICO [3 NIVELES]



Resultados:

Desplazamientos

M.Conocida

| Desplaz | Valor (m)  |
|---------|------------|
| 1       | 3.465E-03  |
| 2       | -8.075E-05 |
| 3       | -1.312E-03 |
| 4       | 8.683E-03  |

M.Nueva

| Desplaz. | Valor (m)  |
|----------|------------|
| 1        | 3.440E-03  |
| 2        | -8.130E-05 |
| 3        | -1.286E-03 |
| 4        | 8.615E-03  |

| Error (%) |
|-----------|
| 0.7       |
| 0.7       |
| 2.0       |
| 0.8       |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |            |
|----|------------|
| 5  | -1.809E-04 |
| 6  | -1.638E-03 |
| 7  | 1.466E-02  |
| 8  | -2.829E-04 |
| 9  | -2.739E-03 |
| 10 | 3.398E-03  |
| 11 | -1.914E-04 |
| 12 | -6.807E-04 |
| 13 | 8.574E-03  |
| 14 | -3.158E-04 |
| 15 | -7.130E-04 |
| 16 | 1.451E-02  |
| 17 | -3.269E-04 |
| 18 | 4.179E-05  |
| 19 | 3.350E-03  |
| 20 | -2.255E-04 |
| 21 | -6.949E-04 |
| 22 | 8.534E-03  |
| 23 | -4.159E-04 |
| 24 | -9.876E-04 |
| 25 | 1.443E-02  |
| 26 | -5.334E-04 |
| 27 | -1.048E-03 |
| 28 | 3.327E-03  |
| 29 | -1.874E-04 |
| 30 | -9.009E-04 |
| 31 | 8.524E-03  |
| 32 | -3.350E-04 |
| 33 | -1.137E-03 |
| 34 | 1.437E-02  |
| 35 | -4.216E-04 |
| 36 | -3.699E-04 |

|    |            |
|----|------------|
| 5  | -1.816E-04 |
| 6  | -1.615E-03 |
| 7  | 1.453E-02  |
| 8  | -2.836E-04 |
| 9  | -2.674E-03 |
| 10 | 3.373E-03  |
| 11 | -1.912E-04 |
| 12 | -6.721E-04 |
| 13 | 8.505E-03  |
| 14 | -3.154E-04 |
| 15 | -7.035E-04 |
| 16 | 1.438E-02  |
| 17 | -3.264E-04 |
| 18 | 4.163E-05  |
| 19 | 3.325E-03  |
| 20 | -2.258E-04 |
| 21 | -6.844E-04 |
| 22 | 8.464E-03  |
| 23 | -4.165E-04 |
| 24 | -9.724E-04 |
| 25 | 1.431E-02  |
| 26 | -5.343E-04 |
| 27 | -1.021E-03 |
| 28 | 3.302E-03  |
| 29 | -1.868E-04 |
| 30 | -8.843E-04 |
| 31 | 8.454E-03  |
| 32 | -3.340E-04 |
| 33 | -1.114E-03 |
| 34 | 1.424E-02  |
| 35 | -4.205E-04 |
| 36 | -3.718E-04 |

|     |
|-----|
| 0.4 |
| 1.4 |
| 0.9 |
| 0.3 |
| 2.4 |
| 0.7 |
| 0.1 |
| 1.3 |
| 0.8 |
| 0.1 |
| 1.3 |
| 0.9 |
| 0.2 |
| 0.4 |
| 0.7 |
| 0.1 |
| 1.5 |
| 0.8 |
| 0.1 |
| 1.5 |
| 0.9 |
| 0.2 |
| 2.6 |
| 0.7 |
| 0.3 |
| 1.8 |
| 0.8 |
| 0.3 |
| 2.0 |
| 0.9 |
| 0.3 |
| 0.5 |

## Acciones en los Miembros:

### M.Conocida

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m  | F Axial (Kg) | V(i) Kg  | V(j) Kg   |
|---------|-----------|------------|--------------|----------|-----------|
| 1       | 9574.369  | 4623.526   | -11424.576   | 5258.480 | -5258.480 |
| 2       | 11676.472 | 9108.230   | -27085.909   | 7698.038 | -7698.038 |
| 3       | 11422.221 | 8800.585   | -31903.850   | 7489.928 | -7489.928 |
| 4       | 10546.700 | 7147.896   | -26509.665   | 6553.554 | -6553.554 |
| 5       | 3396.654  | 2676.171   | -10845.705   | 2249.194 | -2249.194 |
| 6       | 8131.825  | 8060.447   | -13465.837   | 5997.138 | -5997.138 |
| 7       | 7479.622  | 6832.179   | -20620.750   | 5300.667 | -5300.667 |
| 8       | 6272.239  | 5750.862   | -15991.708   | 4453.001 | -4453.001 |
| 9       | 749.635   | -564.505   | -8116.912    | 68.566   | -68.566   |
| 10      | 2065.167  | 2630.925   | -559.064     | 1092.114 | -1092.114 |
| 11      | 4218.440  | 4146.143   | -9357.199    | 3097.994 | -3097.994 |
| 12      | 4593.185  | 5508.393   | -6890.825    | 3741.325 | -3741.325 |
| 13      | -8020.180 | -13664.336 | -5990.715    | 578.871  | 11421.129 |
| 14      | -3425.805 | -9659.019  | -7819.372    | 2728.794 | 9271.206  |
| 15      | 564.505   | -6635.153  | -7978.770    | 5052.886 | -5052.886 |
| 16      | -3575.719 | -11628.512 | -4289.815    | 2198.942 | 9801.058  |
| 17      | -466.595  | -8991.138  | -2914.348    | 3635.567 | 8364.433  |
| 18      | 4004.228  | -6091.235  | -7172.399    | 5977.566 | 6946.434  |
| 19      | -4651.695 | -13420.135 | -2100.554    | 1482.043 | 10517.957 |
| 20      | -2059.481 | -10344.047 | -711.675     | 2899.118 | 9100.882  |
| 21      | 1945.092  | -5508.393  | -3741.325    | 5109.175 | 6890.825  |

### M.Nueva

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg  | V(j) Kg   |
|---------|-----------|-----------|--------------|----------|-----------|
| 1       | 9712.576  | 4575.275  | -11502.570   | 5290.593 | -5290.593 |
| 2       | 11727.452 | 9043.582  | -27046.225   | 7675.944 | -7675.944 |
| 3       | 11479.812 | 8746.946  | -31949.099   | 7475.188 | -7475.188 |
| 4       | 10633.619 | 7102.296  | -26426.106   | 6558.274 | -6558.274 |
| 5       | 3435.065  | 2666.830  | -10866.631   | 2274.129 | -2274.129 |
| 6       | 8111.392  | 8037.984  | -13455.347   | 5971.628 | -5971.628 |
| 7       | 7483.101  | 6808.749  | -20650.495   | 5288.048 | -5288.048 |
| 8       | 6298.285  | 5760.232  | -15951.527   | 4466.195 | -4466.195 |
| 9       | 792.000   | -546.028  | -8114.532    | 108.103  | -108.103  |
| 10      | 2027.019  | 2600.729  | -552.390     | 1073.727 | -1073.727 |
| 11      | 4217.534  | 4156.022  | -9374.892    | 3099.040 | -3099.040 |
| 12      | 4560.449  | 5498.489  | -6882.186    | 3719.130 | -3719.130 |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |           |            |           |          |           |
|----|-----------|------------|-----------|----------|-----------|
| 13 | -8010.340 | -13584.461 | -5983.536 | 635.939  | 11364.061 |
| 14 | -3458.830 | -9616.701  | -7833.974 | 2752.099 | 9247.901  |
| 15 | 546.028   | -6601.210  | -7941.178 | 5065.360 | -5065.360 |
| 16 | -3570.512 | -11618.957 | -4279.220 | 2226.817 | 9773.183  |
| 17 | -448.303  | -8992.106  | -2936.072 | 3655.056 | 8344.944  |
| 18 | 4000.481  | -6103.705  | -7149.400 | 5977.014 | 6946.986  |
| 19 | -4611.090 | -13400.581 | -2092.080 | 1525.421 | 10474.579 |
| 20 | -2034.176 | -10320.681 | -747.064  | 2930.659 | 9069.341  |
| 21 | 1947.683  | -5498.489  | -3719.130 | 5117.814 | 6882.186  |

#### Error

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg | V(j) Kg |
|---------|-----------|-----------|--------------|---------|---------|
| 1       | 1.4       | 1.0       | 0.7          | 0.6     | 0.6     |
| 2       | 0.4       | 0.7       | 0.1          | 0.3     | 0.3     |
| 3       | 0.5       | 0.6       | 0.1          | 0.2     | 0.2     |
| 4       | 0.8       | 0.6       | 0.3          | 0.1     | 0.1     |
| 5       | 1.1       | 0.3       | 0.2          | 1.1     | 1.1     |
| 6       | 0.3       | 0.3       | 0.1          | 0.4     | 0.4     |
| 7       | 0.0       | 0.3       | 0.1          | 0.2     | 0.2     |
| 8       | 0.4       | 0.2       | 0.3          | 0.3     | 0.3     |
| 9       | 5.7       | 3.3       | 0.0          | 57.7    | 57.7    |
| 10      | 1.8       | 1.1       | 1.2          | 1.7     | 1.7     |
| 11      | 0.0       | 0.2       | 0.2          | 0.0     | 0.0     |
| 12      | 0.7       | 0.2       | 0.1          | 0.6     | 0.6     |
| 13      | 0.1       | 0.6       | 0.1          | 9.9     | 0.5     |
| 14      | 1.0       | 0.4       | 0.2          | 0.9     | 0.3     |
| 15      | 3.3       | 0.5       | 0.5          | 0.2     | 0.2     |
| 16      | 0.1       | 0.1       | 0.2          | 1.3     | 0.3     |
| 17      | 3.9       | 0.0       | 0.7          | 0.5     | 0.2     |
| 18      | 0.1       | 0.2       | 0.3          | 0.0     | 0.0     |
| 19      | 0.9       | 0.1       | 0.4          | 2.9     | 0.4     |
| 20      | 1.2       | 0.2       | 5.0          | 1.1     | 0.3     |
| 21      | 0.1       | 0.2       | 0.6          | 0.2     | 0.1     |

## Resultados en forma gráfica

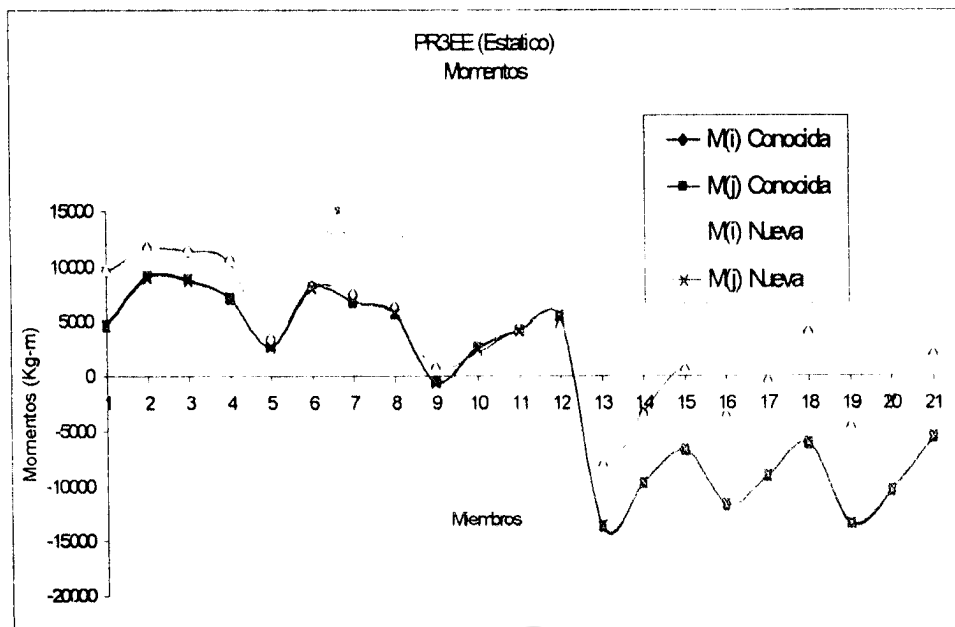


Figura 4.21 Pórtico PR3EE (Momentos) , comparación gráfica de resultados

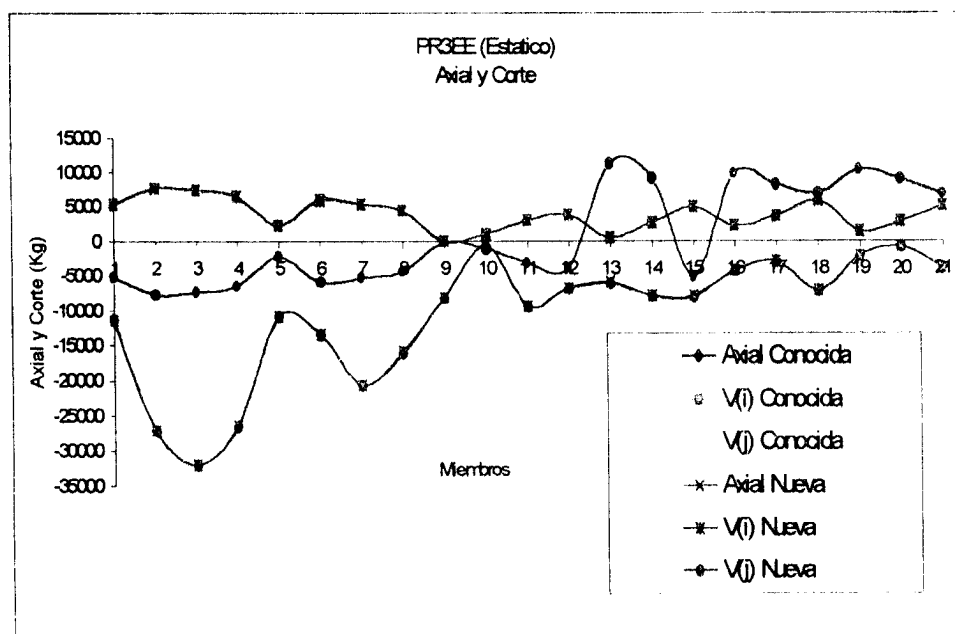


Figura 4.22 Pórtico PR3EE (Axial y Corte) , comparación gráfica de resultados

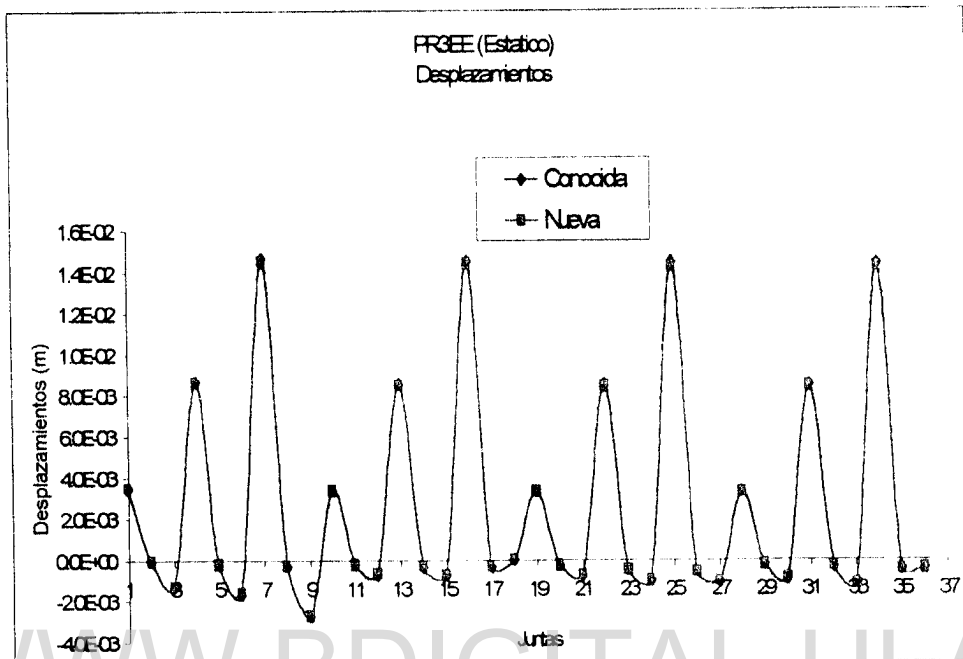
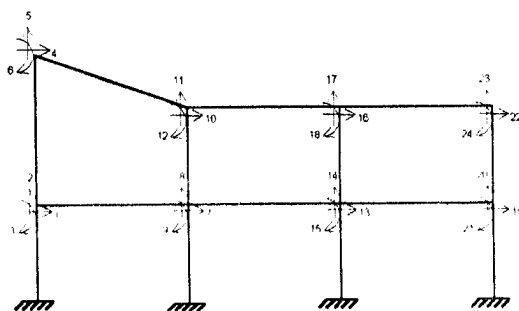
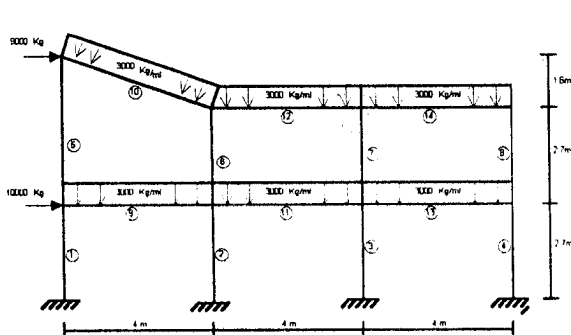


Figura 4.23 Pórtico PR3EE (Desplazamientos) , comparación gráfica de resultados

#### 4.2.5 PÓRTICO [2 NIVELES]



Resultados:

Desplazamientos

M.Conocida

| Desplaz | Valor (m) |
|---------|-----------|
| 1       | 2.879E-03 |

M.Nueva

| Desplaz. | Valor (m) |
|----------|-----------|
| 1        | 2.852E-03 |

| Error (%) |
|-----------|
| 1.0       |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |            |
|----|------------|
| 2  | -8.093E-05 |
| 3  | -1.250E-03 |
| 4  | 8.125E-03  |
| 5  | -2.476E-04 |
| 6  | -1.753E-03 |
| 7  | 2.795E-03  |
| 8  | -1.509E-04 |
| 9  | -7.922E-04 |
| 10 | 7.925E-03  |
| 11 | -2.606E-04 |
| 12 | -6.974E-04 |
| 13 | 2.744E-03  |
| 14 | -1.699E-04 |
| 15 | -7.897E-04 |
| 16 | 7.809E-03  |
| 17 | -3.238E-04 |
| 18 | -8.934E-04 |
| 19 | 2.726E-03  |
| 20 | -1.071E-04 |
| 21 | -8.907E-04 |
| 22 | 7.744E-03  |
| 23 | -1.913E-04 |
| 24 | -1.982E-04 |

|    |            |
|----|------------|
| 2  | -8.123E-05 |
| 3  | -1.224E-03 |
| 4  | 8.058E-03  |
| 5  | -2.479E-04 |
| 6  | -1.722E-03 |
| 7  | 2.768E-03  |
| 8  | -1.509E-04 |
| 9  | -7.779E-04 |
| 10 | 7.859E-03  |
| 11 | -2.606E-04 |
| 12 | -6.942E-04 |
| 13 | 2.716E-03  |
| 14 | -1.700E-04 |
| 15 | -7.755E-04 |
| 16 | 7.743E-03  |
| 17 | -3.237E-04 |
| 18 | -8.759E-04 |
| 19 | 2.698E-03  |
| 20 | -1.068E-04 |
| 21 | -8.686E-04 |
| 22 | 7.678E-03  |
| 23 | -1.910E-04 |
| 24 | -2.059E-04 |

|     |
|-----|
| 0.4 |
| 2.1 |
| 0.8 |
| 0.2 |
| 1.8 |
| 1.0 |
| 0.1 |
| 1.8 |
| 0.8 |
| 0.0 |
| 0.5 |
| 1.0 |
| 0.0 |
| 1.8 |
| 0.9 |
| 0.0 |
| 2.0 |
| 1.0 |
| 0.2 |
| 2.5 |
| 0.9 |
| 0.1 |
| 3.9 |

Acciones en los Miembros:

M.Conocida

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg  | V(j) Kg   |
|---------|-----------|-----------|--------------|----------|-----------|
| 1       | 7352.589  | 2634.929  | -11450.750   | 3699.081 | -3699.081 |
| 2       | 8729.947  | 5741.165  | -21354.526   | 5359.671 | -5359.671 |
| 3       | 8522.276  | 5542.997  | -24042.857   | 5209.360 | -5209.360 |
| 4       | 8068.244  | 4707.852  | -15151.867   | 4731.888 | -4731.888 |
| 5       | -445.502  | -822.436  | -8326.653    | -294.869 | 294.869   |
| 6       | 4080.202  | 4193.318  | -8731.012    | 3064.267 | -3064.267 |
| 7       | 3767.114  | 3643.249  | -12242.573   | 2744.579 | -2744.579 |
| 8       | 4292.827  | 5119.437  | -6699.762    | 3846.024 | -3846.024 |
| 9       | -2189.427 | -9314.183 | -6006.050    | 3124.098 | 8875.903  |
| 10      | 822.436   | -6387.615 | -9494.167    | 4708.215 | 7291.785  |
| 11      | -507.183  | -8502.372 | -3710.645    | 3747.611 | 8252.389  |

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

|    |          |           |           |          |          |
|----|----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 12 | 2194.297 | -5963.637 | -6230.603 | 5057.665 | 6942.335 |
| 13 | -807.740 | -9000.679 | -1245.864 | 3547.895 | 8452.105 |
| 14 | 2320.388 | -5119.437 | -3486.024 | 5300.238 | 6699.762 |

#### M.Nueva

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg  | V(j) Kg   |
|---------|-----------|-----------|--------------|----------|-----------|
| 1       | 7463.856  | 2577.911  | -11493.244   | 3722.400 | -3722.400 |
| 2       | 8776.467  | 5670.076  | -21343.239   | 5342.686 | -5342.686 |
| 3       | 8566.893  | 5470.115  | -24047.870   | 5191.480 | -5191.480 |
| 4       | 8144.218  | 4675.810  | -15115.647   | 4743.434 | -4743.434 |
| 5       | -416.685  | -812.214  | -8330.407    | -280.153 | 280.153   |
| 6       | 4075.416  | 4181.171  | -8733.213    | 3053.759 | -3053.759 |
| 7       | 3780.719  | 3653.867  | -12237.775   | 2751.050 | -2751.050 |
| 8       | 4282.862  | 5120.154  | -6698.606    | 3475.344 | -3475.344 |
| 9       | -2161.226 | -9260.327 | -5997.447    | 3162.838 | 8837.162  |
| 10      | 812.214   | -6373.842 | -9481.897    | 4717.166 | 7282.834  |
| 11      | -485.166  | -8480.299 | -3708.520    | 3772.863 | 8227.137  |
| 12      | 2192.671  | -5962.285 | -6226.394    | 5063.620 | 6936.380  |
| 13      | -770.535  | -8958.672 | -1268.090    | 3582.958 | 8417.042  |
| 14      | 2308.419  | -5120.154 | -3475.344    | 5301.394 | 6698.606  |

#### Error

| Miembro | M(i) Kg-m | M(j) Kg-m | F Axial (Kg) | V(i) Kg | V(j) Kg |
|---------|-----------|-----------|--------------|---------|---------|
| 1       | 1.5       | 2.2       | 0.4          | 0.6     | 0.6     |
| 2       | 0.5       | 1.2       | 0.1          | 0.3     | 0.3     |
| 3       | 0.5       | 1.3       | 0.0          | 0.3     | 0.3     |
| 4       | 0.9       | 0.7       | 0.2          | 0.2     | 0.2     |
| 5       | 6.5       | 1.2       | 0.0          | 5.0     | 5.0     |
| 6       | 0.1       | 0.3       | 0.0          | 0.3     | 0.3     |
| 7       | 0.4       | 0.3       | 0.0          | 0.2     | 0.2     |
| 8       | 0.2       | 0.0       | 0.0          | 9.6     | 9.6     |
| 9       | 1.3       | 0.6       | 0.1          | 1.2     | 0.4     |
| 10      | 1.2       | 0.2       | 0.1          | 0.2     | 0.1     |
| 11      | 4.3       | 0.3       | 0.1          | 0.7     | 0.3     |
| 12      | 0.1       | 0.0       | 0.1          | 0.1     | 0.1     |
| 13      | 4.6       | 0.5       | 1.8          | 1.0     | 0.4     |
| 14      | 0.5       | 0.0       | 0.3          | 0.0     | 0.0     |

## Resultados en forma gráfica

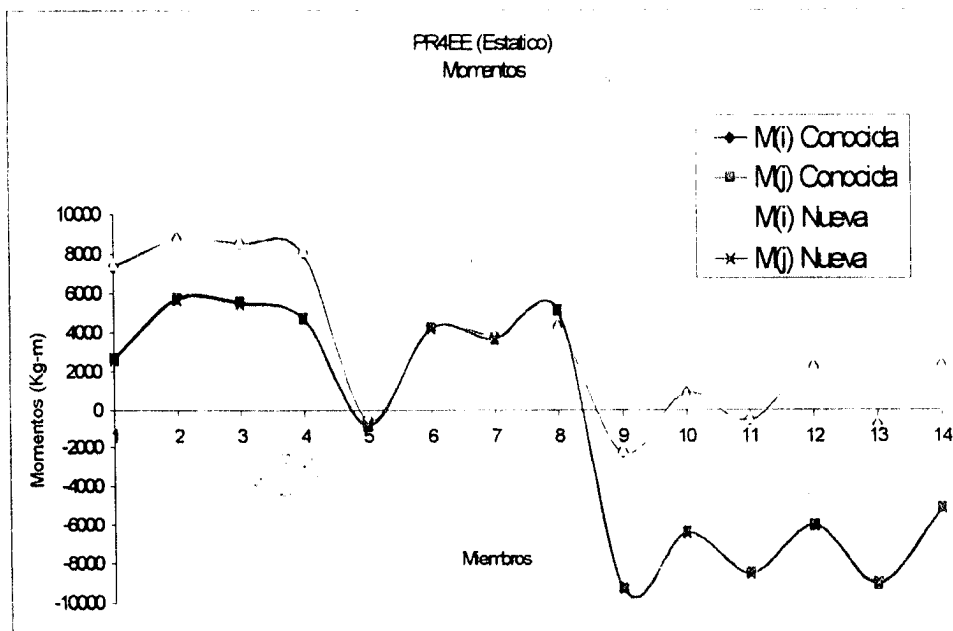


Figura 4.24 Pórtico PR4EE (Momentos) , comparación gráfica de resultados

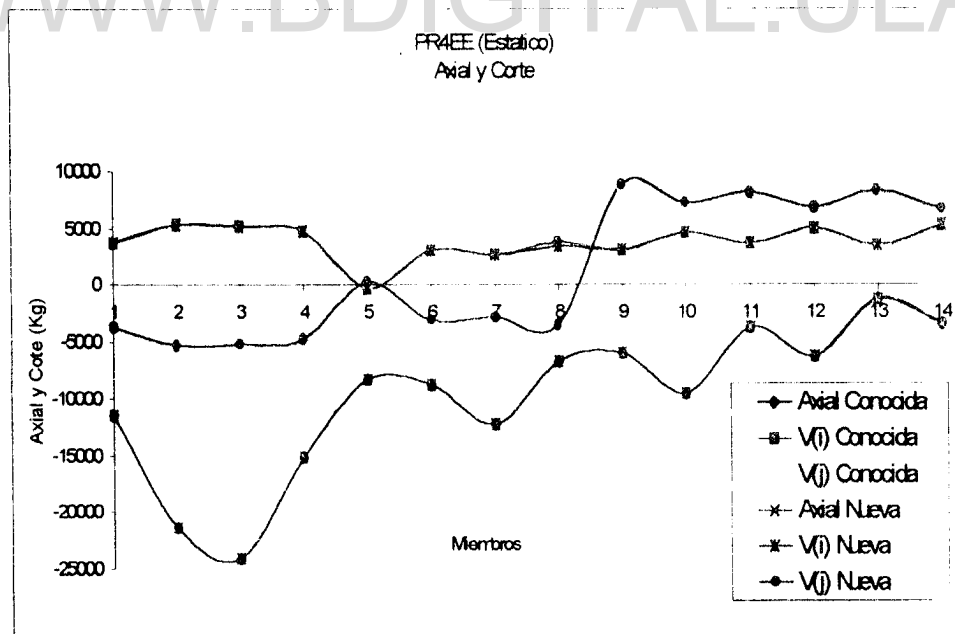


Figura 4.25 Pórtico PR4EE (Axial y Corte) , comparación gráfica de resultados

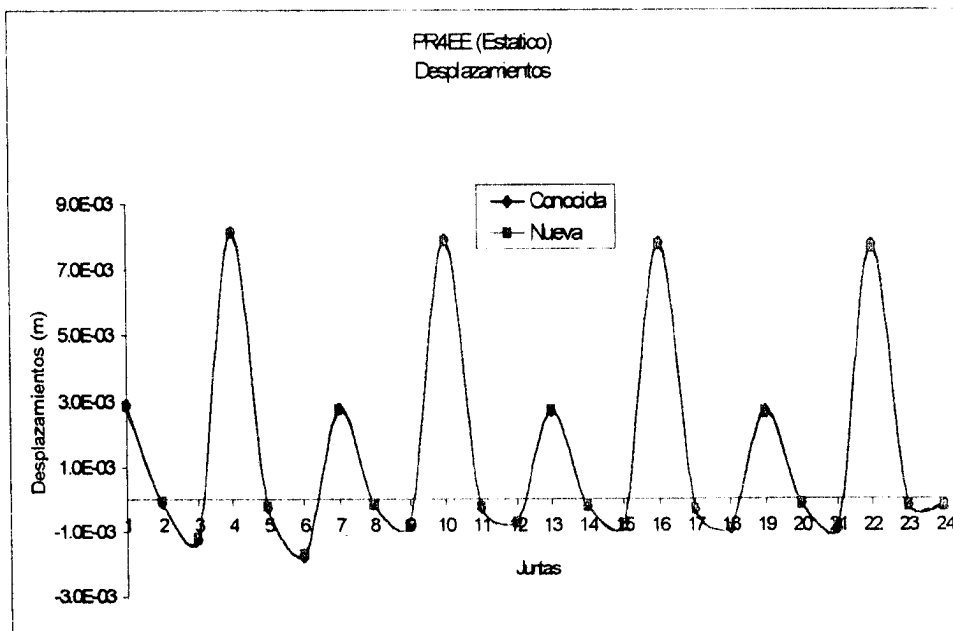


Figura 4.26 Pórtico PR4EE (Desplazamientos), comparación gráfica de resultados

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

## CONCLUSIONES

En este trabajo se describe el proceso para el análisis dinámico y estático de vigas y pórticos, por medio de nuevas funciones de forma con las cuales se obtuvieron las matrices de rigidez y masa, diferentes a las conocidas en la bibliografía convencional. Se pudo demostrar que con estas nuevas matrices, se obtenía una mejor convergencia en el comportamiento real de las estructuras y se optimizaba el tiempo computacional debido a una menor discretización de los elementos.

Es de hacer notar que para crear funciones que se acerquen al comportamiento real de las estructuras es un poco complejo, ya que los modos de vibración varían de acuerdo al sistema analizado, y habría que crear funciones para cada sistema, por eso para modos superiores las funciones son mas complejas y se hace difícil aproximarse al valor real.

Las matrices de masa y rigidez obtenidas pueden ser utilizadas en cualquier programa de Análisis Estructural, ya que la inclusión de estas se hace de una manera fácil y directa en cualquier programa de cálculo convencional.

Los ejemplos numéricos presentados en este trabajo permiten mostrar el uso de los programas con las nuevas matrices y los diferentes resultados obtenidos. Los únicos datos requeridos para la utilización de los programas están definidos en la teoría convencional. Los resultados permitieron observar la buena convergencia del nuevo elemento finito encontrado.

Existe una gran diversidad de campos en los cuales se puede seguir investigando sobre nuevas Funciones de Forma, una de ellas las placas y las cáscaras queda de parte de posteriores investigaciones el arduo trabajo de obtener soluciones que se acerquen cada vez más a los comportamientos reales de las estructuras, para así obtener una mayor confiabilidad en el análisis estructural.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

Licencia Creative Commons:  
Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Paz, Mario "Dinámica Estructural Teoría y Calculo" Editorial Reverté. S.A Barcelona España, 1992.
- [2] Zienkiewicz, O.C, Taylor, R.L "El Método de los Elementos Finitos" Volumen I, McGraw-Hill, Barcelona España, 1994.
- [3] Dawe, D.J. "Matriz and Finite Element Displacement Analysis of Structure" Clarendon Press. Oxford, 1984.
- [4] Clough, Ray W, Penzien, Joseph. "Dynamics of Structures" McGraw-Hill 1993.
- [5] Weaver, Willian Jr, Johnston, Paul R. "Structural Dynamics by Finite Element" Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [6] Craig Roy R. Jr. "Structural Dynamics" John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore. 1981.
- [7] Dhatt, Gouri, Touzot, Gilbert "The Finite Element Method Displayed" John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1984.
- [8] Cook, Robert D. "Concepts and Aplications of Finite Element Analysis" John Wiley & Sons. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1981.
- [9] Char, Bruce W. Geddes, Keith O. Gonnet, Gaston H. Leong, Benton L. Monagan, Michael B. Watt, Stephen M. "Maple V Lenguaje Reference Manual" Waterloo Maple Publishing, 1991.
- [10] Norma Venezolana "Edificaciones Sismorresistentes" 1<sup>ra</sup> Revisión, 1756:1998.
- [11] Febres C, Héctor E. Material de apoyo del curso "Análisis Estructural" del Programa de Maestría en Ingeniería Estructural. Universidad de los Andes, Mérida Venezuela.
- [12] Febres C, Héctor E. Material de apoyo del curso "Elementos Finitos" del Programa de Maestría en Ingeniería Estructural. Universidad de los Andes, Mérida Venezuela.
- [13] Lobo Q, William. Material de apoyo del curso "Dinámica Estructural" del Programa de Maestría en Ingeniería Estructural. Universidad de los Andes, Mérida Venezuela.

[14] Lobo Q, William. Material de apoyo del curso "Análisis y Diseño Sismorresistente" del Programa de Maestría en Ingeniería Estructural. Universidad de los Andes, Mérida Venezuela.

[15] Paz, Mario "Programas de Dinámica Estructural" Lenguaje Basic.

[16] Febres C, Héctor E. "Programa de Análisis Estático de Pórticos" Lenguaje Basic.

[17] Programa "GW BASIC versión 3.27" Olivetti 1987.

[18] Programa "QBASIC versión 4.5".

[19] Programa "Maple V, Release 4.00a MVR4 Campus Wide Versión" Waterloo Maple Inc. 1981-1996.

[20] Programa "MATLAB for Windows, Versión 4.2c.1" The MathWorks, Inc. 1984-1994.

WWW.BDIGITAL.ULA.VE

## APÉNDICE I .

### ANÁLISIS DINÁMICO DE VIGAS CON PROPIEDADES DISTRIBUIDAS [1]

#### 1) VIBRACIÓN POR FLEXIÓN DE VIGAS UNIFORMES

El tratamiento de vigas sometidas a flexión presentado en este apéndice esta basado en la simple teoría de flexión normalmente aplicada en ingeniería. Este método de análisis es conocido como teoría de Bernoulli-Euler, la cual supone que una sección transversal plana de una viga permanece plana durante las deformaciones por flexión.

Consideremos en la figura 1.1 el diagrama de cuerpo libre de un segmento corto de viga. Su longitud es  $dx$  y esta limitada por dos secciones transversales planas que son perpendiculares a su eje. Las fuerzas y momentos que actúan sobre el elemento también se muestran en la figura. Estos son: los esfuerzos de corte  $V$  y  $V+(\partial V/\partial x)$ ; los momentos flectores  $M$  y  $M+(\partial M/\partial x)$ ; la carga lateral  $pdx$  y la fuerza inercial  $(m dx) \partial^2 y/\partial t^2$ . En esta notación  $m$  es la mas por unidad de longitud y  $p=p(x,t)$  es la carga por unidad de longitud. Las derivadas parciales se usan para expresar la aceleración y las variaciones del esfuerzo cortante y del momento flector, debido a que estas son funciones de dos variables, la posición  $x$  a lo largo de la viga y el tiempo  $t$ . Si las deformaciones de la viga son pequeñas, como supone la teoría, la inclinación de la viga debida ala carga es también pequeña. En estas condiciones, la ecuación del movimiento obtenida igualando a cero la suma de las fuerzas en dirección perpendicular al eje  $x$  de la viga es

$$V - \left( v + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + p(x,t)dx - m dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

que, después de simplificarla, se reduce a

$$\frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (1.1)$$

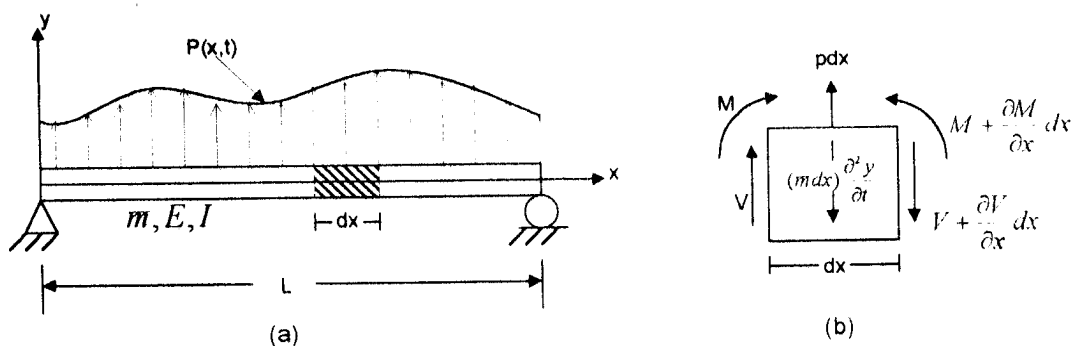


Figura 1.1 (a) Viga simple con masa y carga distribuidas. (b) Diagrama de cuerpo libre del segmento  $dx$  de la viga.

De la teoría elemental de flexión, tenemos las relaciones

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

y

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (1.3)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad de Young e  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal con respecto a la línea neutra a través del centroide. Para una viga uniforme, la combinación de las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) da como resultado

$$V = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \quad (1.4)$$

y

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (1.5)$$

Como puede verse, la ecuación (1.5) es una ecuación diferencial de derivada parcial de cuarto orden. Es una ecuación aproximada, Sólo se han considerado las deformaciones por flexión, mientras que las debidas a esfuerzos cortantes y a las fuerzas inerciales, causadas por la rotación de la sección transversal (inercia

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

rotacional), fueron despreciadas. La inclusión de las deformaciones producidas por el esfuerzo cortante y por la inercia rotacional, en la ecuación diferencial del movimiento, aumenta considerablemente su complejidad. La ecuación que toma en consideración la deformación causada por las fuerzas cortantes y la inercia rotacional se conoce como ecuación de Timoshenko. La ecuación diferencial ecuación(1.5), tampoco incluye los efectos de flexión debido ala presencia de fuerzas axiales que pueden ser aplicadas a la viga.

## 2) SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO EN VIBRACIÓN LIBRE

Para la vibración libre ( $p(x,t)=0$ ), la ecuación (1.5) se reduce a ala ecuación diferencial homogénea

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

La solución de la ecuación (2.1) puede encontrarse por el método de separación de las variables. En este método se supone que la solución puede ser expresada como el producto de una función de posición  $\Phi(x)$  y una función de tiempo  $f(t)$ , o sea,

$$y(x, t) = \Phi(x) f(t) \quad (2.2)$$

La aplicación de la ecuación (2.2) en la ecuación diferencial, ecuación (2.1), nos da

$$EI(t) \frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} + m \Phi(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = 0 \quad (2.3)$$

Esta última puede escribirse como

$$\frac{EI}{m} \frac{\Phi^{IV}}{\Phi(x)} = - \frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} \quad (2.4)$$

En esta notación, los índices en números romanos indican derivadas con respecto a  $x$  y los puntos sobre las letras indican derivadas con respecto al tiempo. Puesto que el primer miembro de la ecuación (2.4) es solamente función del tiempo  $t$ , cada uno de ellos debe ser igual a la misma constante; en caso contrario, la identidad de la ecuación (2.4) no se pondría cumplir. Designemos esta constante como  $\omega^2$  que igualada separadamente a cada miembro de la citada ecuación nos da las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\Phi^{IV}(x) - a^4 \Phi(x) = 0 \quad (2.5)$$

y

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (2.6)$$

en que

$$a^4 = \frac{m \omega^2}{EI} \quad (2.7)$$

Es particularmente conveniente despejar  $\omega$  de la ecuación (2.7) y usar la notación siguiente:

$$\omega = C \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (2.8)$$

en la cual  $C=(aL)^2$

La ecuación (2.6) tiene la forma familiar de la ecuación de vibración libre para un sistema no amortiguado con un solo grado de libertad y su solución viene dada por:

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.9)$$

en la cual  $A$  y  $B$  son constantes de integración, La ecuación (2.5) puede resolverse haciendo

$$\Phi(x) = C e^{sx} \quad (2.10)$$

La aplicación de la ecuación (2.10) en la ecuación (2.5) da

$$(s^4 - a^4) C e^{sx} = 0$$

la cual, para una solución no trivial, requiere que

$$s^4 - a^4 = 0 \quad (2.11)$$

Las raíces de la ecuación (2.11) son

$$\begin{aligned} s_1 &= a, & s_3 &= ai, \\ s_2 &= -a, & s_4 &= -ai, \end{aligned} \quad (2.12)$$

La aplicación de cada una de estas raíces en la ecuación (2.10) da una solución de la ecuación (2.5). La solución general viene entonces dada por la superposición de estas cuatro posibles soluciones, esto es

$$\Phi(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 e^{iax} + C_4 e^{-iax} \quad (2.13)$$

en la cual  $C_1, C_2, C_3, C_4$  son las constantes de integración. Las funciones exponenciales de la ecuación (2.13) pueden ser expresadas mediante funciones trigonométricas e hiperbólicas por medio de las relaciones

$$\begin{aligned} e^{\pm ax} &= \cosh ax \pm \sinh ax \\ e^{\pm iax} &= \cos ax \pm i \sin ax \end{aligned} \quad (2.14)$$

La aplicación de estas relaciones en la ecuación (2.10) da

$$\Phi(x) = A \sin ax + B \cos ax + C \sinh ax + D \cosh ax \quad (2.15)$$

en donde  $A, B, C$  son las nuevas constantes de integración. Estas cuatro constantes de integración definen la forma y amplitud de la viga en vibración libre; son calculadas considerando las condiciones de contorno en los extremos de la viga, como se ilustra en los casos presentados en el siguiente punto.

### 3) FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS NORMALES PARA VIGAS UNIFORMES

#### 3.1) VIGA SIMPLEMENTE APOYADA (AMBOS EXTREMOS SIMPLEMENTE APOYADOS)

En este caso los desplazamientos y momentos flectores deben ser cero en ambos extremos de la viga; por lo tanto, las condiciones de contorno para una viga simplemente apoyada son:

$$\begin{aligned}y(0,t) &= 0, & M(0,t) &= 0, \\y(L,t) &= 0, & M(L,t) &= 0,\end{aligned}$$

Dadas las ecuaciones (1.2) y (2.2), estas condiciones de contorno implican las siguientes condiciones para la función de deformación  $\Phi(x)$ :

Para  $x=0$

$$\Phi(0)=0, \quad \Phi''(0)=0 \quad (3.1.1)$$

Para  $x=L$

$$\Phi(L)=0, \quad \Phi''(L)=0 \quad (3.1.2)$$

La aplicación de las primeras dos condiciones de contorno en la ecuación (2.15) da

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= A_0 + B_1 + C_0 + D_1 = 0 \\ \Phi''(0) &= a^2 (-A_0 - B_1 + C_0 + D_1) = 0\end{aligned}$$

ecuaciones que se reducen a

$$\begin{aligned}B + D &= 0 \\ -B + D &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$B = D = 0$$

Similarmente, aplicando las últimas dos condiciones de contorno en la ecuación (2.15) y estableciendo que  $B = D = 0$ , llegamos a las ecuaciones

$$\Phi(L) = A \sin aL + C \sinh aL = 0$$

$$\Phi''(L) = a^2 (-A \operatorname{sen} aL + C \operatorname{senh} aL) = 0 \quad (3.1.3)$$

que sumadas dan

$$2C \operatorname{senh} aL = 0$$

De esta última relación,  $C=0$ , puesto que la función hiperbólica seno no se anula excepto cuando su argumento es igual a cero. Consecuentemente, las ecuaciones (3.1.3) se reducen a

$$A \operatorname{sen} aL = 0 \quad (3.1.4)$$

Excluyendo la solución trivial ( $A=0$ ), obtenemos la ecuación característica

$$\operatorname{sen} aL = 0 \quad (3.1.5)$$

la cual será satisfecha para

$$a_n L = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.6)$$

La aplicación de las raíces, ecuación (3.1.6), en la ecuación (2.8) da

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (3.1.7)$$

donde el subíndice  $n$  sirve para indicar el orden de las frecuencias naturales. Puesto que  $B = C = D = 0$ , resulta que la ecuación (2.15) se reduce a

$$\Phi_n(x) = A \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

o simplemente

$$\Phi_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (3.1.8)$$

puesto que la constante  $A$  es absorbida por las otras constantes de la respuesta modal dada más adelante por la ecuación (3.1.9).

De la ecuación (2.2), un modo normal de vibración está dado por:

$$y_n(x, t) = \Phi_n(x) f_n(t)$$

o de la ecuación (2.9) y (3.1.8) por

$$y_n(x,t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} [A_n \cos \omega_n t + B_n \text{sen} \omega_n t] \quad (3.1.9)$$

La solución general de la ecuación del movimiento en vibración libre que satisface las condiciones de contorno, ecuaciones (3.1.1) y (3.2.2), es la suma de todos los modos normales de vibración, ecuación (3.1.9), esto es,

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} [A_n \cos \omega_n t + B_n \text{sen} \omega_n t] \quad (3.1.10)$$

Las constantes  $A_n$  y  $B_n$  son determinadas, como es usual, a partir de las condiciones iniciales. Si en el instante  $t=0$ , la deformación de la viga viene dada por

$$y(x,0) = \rho(x)$$

y la velocidad por

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$$

para  $0 \leq x \leq L$ , resulta de la ecuación (3.1.10) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \rho(x)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \psi(x).$$

Por lo tanto, los coeficientes de Fourier estarán expresados por

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \rho(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

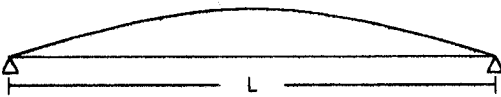
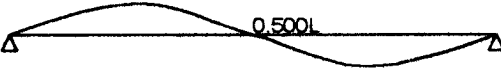
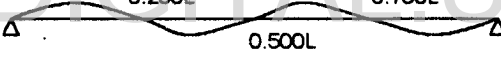
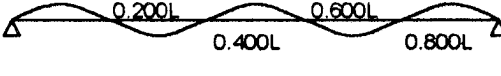
$$B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \psi(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (3.1.11)$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

Los primeros cinco valores de las frecuencias naturales y los modos normales para una viga simplemente apoyada son presentados en la tabla 3.1.1.

**TABLA 3.1.1 Frecuencias naturales y modos normales para vigas simplemente apoyadas**

| Frecuencias Naturales                 |           |          | Modos Normales                                                                       |
|---------------------------------------|-----------|----------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL}}$ |           |          | $\Phi_n = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$                                               |
| $n$                                   | $C_n$     | $I_n^*$  | Formas Modales                                                                       |
| 1                                     | $\pi^2$   | $4/\pi$  |    |
| 2                                     | $4\pi^2$  | 0        |    |
| 3                                     | $9\pi^2$  | $4/3\pi$ |   |
| 4                                     | $16\pi^2$ | 0        |  |
| 5                                     | $25\pi^2$ | $4/5\pi$ |  |

$$* I_n = \int_0^L \Phi_n(x) dx / \int_0^L \Phi_n^2(x) dx$$

### 3.2) VIGA EMPOTRADA (AMBOS EXTREMOS EMPOTRADOS)

Las condiciones de contorno para una viga con sus extremos empotrados son los siguientes:

Para  $x=0$

$$\begin{aligned} y(0,t) &= 0, & \text{o} & \quad \Phi(0) = 0, \\ y'(0,t) &= 0, & \text{o} & \quad \Phi'(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Para  $x=L$

$$y(L,t) = 0, \quad \text{o} \quad \Phi(L) = 0,$$

$$y'(L,t)=0, \text{ o } \Phi'(L)=0. \quad (3.2.2)$$

La aplicación de las condiciones de contorno, ecuaciones (3.2.1), en la ecuación (2.15) da

$$B + D = 0 \text{ y } A + C = 0$$

Mientras que las condiciones, ecuación (3.2.2), dan el sistema homogéneo.

$$\begin{aligned} (\cos aL - \cosh aL)B + (\sin aL - \sinh aL)A &= 0 \\ -(\sin aL + \sinh aL)B + (\cos aL - \cosh aL)A &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Igualando a cero el determinante de los coeficientes de este sistema resulta la ecuación característica.

$$\cos a_n L \cosh a_n L - 1 = 0 \quad (3.2.4)$$

De la primera de las ecuaciones (3.2.3) resulta que

$$A = -\frac{\cos aL - \cosh aL}{\sin aL - \sinh aL} B, \quad (3.2.4)$$

en donde la constante  $B$  es arbitraria. Para cada valor de la frecuencia natural

$$\omega_n = (a_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (3.2.5)$$

obtenido por la aplicación de las raíces de la ecuación (3.2.4) en la ecuación (2.8), corresponde un modo normal

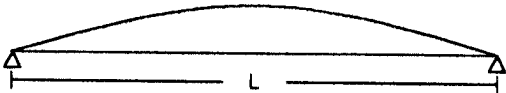
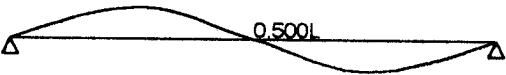
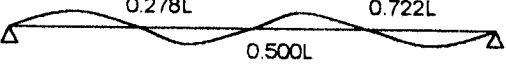
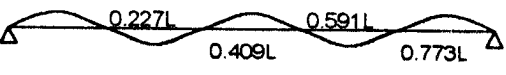
$$\Phi_n(x) = \cosh a_n x - \cos a_n x - \sigma_n (\sinh a_n x - \sin a_n x), \quad (3.2.6)$$

en que

$$\sigma_n = \frac{\cos a_n L - \cosh a_n L}{\sin a_n L - \sinh a_n L} \quad (3.2.7)$$

Las primeras cinco frecuencias naturales calculadas a partir de las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5) y los correspondientes modos normales obtenidos de la ecuación (3.2.6) se presentan en la tabla 3.2.1.

TABLA 3.2.1 Frecuencias naturales y modos normales para vigas empotradas

| Frecuencias Naturales                 |                   |            |         | Modos Normales                                                                       |  |
|---------------------------------------|-------------------|------------|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL}}$ |                   |            |         | $\Phi_n(x) = \cosh a_n x - \cos a_n x - \sigma_n (\sinh a_n x - \sin a_n x)$         |  |
| $C_n = (a_n L)^2$                     |                   |            |         | $\sigma_n = \frac{\cos a_n L - \cosh a_n L}{\sin a_n L - \sinh a_n L}$               |  |
| $n$                                   | $C_n = (a_n L)^2$ | $\sigma_n$ | $I_n^*$ | Formas Modales                                                                       |  |
| 1                                     | 22.3733           | 0.982502   | 0.8308  |    |  |
| 2                                     | 61.6728           | 1.000777   | 0       |    |  |
| 3                                     | 120.9034          | 0.999967   | 0.3640  |   |  |
| 4                                     | 199.8594          | 1.000001   | 0       |  |  |
| 5                                     | 298.5555          | 1.000000   | 0.2323  |  |  |

$$* I_n = \int_0^L \Phi_n(x) dx / \int_0^L \Phi_n^2(x) dx$$

### 3.3) VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO (UN EXTREMO EMPOTRADO Y EL OTRO SIMPLEMENTE APOYADO)

Las condiciones de contorno para una viga con un extremo fijo y el otro simplemente apoyado son las siguientes:

Para  $x=0$

$$y(0,t)=0, \quad \text{o} \quad \Phi(0)=0,$$

Licencia Creative Commons:

Atribución - No Comercial - Compartir Igual 3.0 Venezuela  
(CC BY-NC-SA 3.0 VE)

$$y'(0,t)=0, \quad \text{o} \quad \Phi'(0)=0. \quad (3.3.1)$$

Para  $x=L$

$$\begin{aligned} y(L,t)=0, \quad \text{o} \quad \Phi(0)=0, \\ M(0,t)=0, \quad \text{o} \quad \Phi''(0)=0. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

La aplicación de estas condiciones de contorno en la ecuación de forma, ecuación (2.15), nos da la ecuación característica

$$\operatorname{tg} a_n L - \operatorname{tgh} a_n L = 0. \quad (3.3.3)$$

A cada raíz de esta última ecuación corresponde una frecuencia natural

$$\omega_n = (a_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (3.3.4)$$

y un modo normal

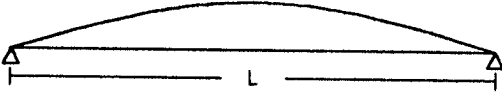
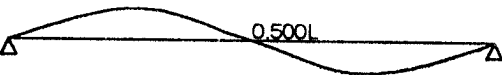
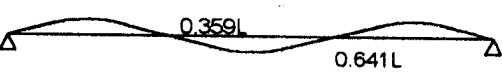
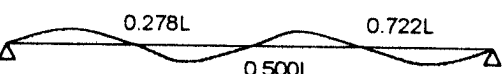
$$\Phi_n(x) = (\cosh a_n x - \cos a_n x) + \sigma_n (\sinh a_n x - \sin a_n x), \quad (3.3.5)$$

En que

$$\sigma_n = \frac{\cos a_n L - \cosh a_n L}{\sin a_n L - \sinh a_n L} \quad (3.3.6)$$

Las primeras cinco frecuencias naturales, para una viga fija en un extremo y simplemente apoyada en el otro, y los correspondientes modos normales son presentados en la tabla 3.3.1

TABLA 3.3.1 Frecuencias naturales y modos normales para vigas con un extremo empotrado y el otro simplemente apoyado

| Frecuencias Naturales                 |                   |            |         | Modos Normales                                                                       |  |
|---------------------------------------|-------------------|------------|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL}}$ |                   |            |         | $\Phi_n(x) = \cosh a_n x - \cos a_n x + \sigma_n (\sinh a_n x - \sin a_n x)$         |  |
| $C_n = (a_n L)^2$                     |                   |            |         | $\sigma_n = \frac{\cos a_n L - \cosh a_n L}{\sin a_n L - \sinh a_n L}$               |  |
| $n$                                   | $C_n = (a_n L)^2$ | $\sigma_n$ | $I_n^*$ | Formas Modales                                                                       |  |
| 1                                     | 15.4118           | 1.000777   | 0.8600  |    |  |
| 2                                     | 49.9648           | 1.000001   | 0.0826  |    |  |
| 3                                     | 104.2477          | 1.000000   | 0.3345  |    |  |
| 4                                     | 178.2697          | 1.000000   | 0.0434  |    |  |
| 5                                     | 272.0309          | 1.000000   | 0.2076  |  |  |

$$* I_n = \int_0^L \Phi_n(x) dx / \int_0^L \Phi_n^2(x) dx$$