

4A347
75M67



**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

**ALISADO DE TENSIONES EN DOMINIOS
BIDIMENSIONALES**

Por:

Ing. José Guillermo Mora Becerra

Tesis presentada para la obtención del Grado de

MAGÍSTER SCIENTIAE EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

Tutor:

Dra. Mary Josefina Vergara Paredes

DONACION

Mérida – Venezuela
Diciembre de 2006

SERBIULA
Tullo Febres Cordero

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERIA
POSTGRADO EN INGENIERIA ESTRUCTURAL

“Alisado de tensiones en dominios bidimensionales”.

por

Ing. José Guillermo Mora Becerra,

Tesis presentada como requisito parcial para la obtención del grado de

Magister Scientiae en Ingeniería Estructural

Facultad de Ingeniería

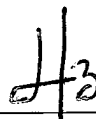
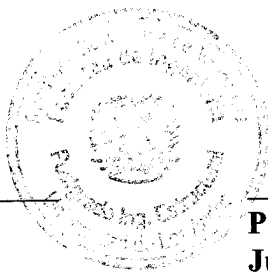
Universidad de Los Andes

06 de diciembre de 2006

Aprobada:



Prof. Mary Vergara, (ULA)
Tutor.



Prof. Alexis López I., (ULA)
Jurado



Prof. Carlos Torres, (ULA),
Jurado.

Al Dios Todopoderoso y a la Virgen María

*A mi Madre y mi Padre por su amor, apoyo y confianza
que hicieron posible el recorrido de esta etapa*

*A mis Hermanos Dickson, Lisette y David
por ser mis consultores oportunos*

*A Maylin por acompañarme en cada
momento de este camino que
hemos recorrido juntos*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco la orientación y confianza que me ha brindado la tutora de la tesis, Dra. Mary J. Vergara P. quien en todo momento me animó a culminar este trabajo.

Gracias a los profesores miembros del Departamento de Estructuras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes por poner a disposición sus conocimientos en pro de mi desarrollo profesional.

Al profesor Hector Febres C., por su atención y seguimiento durante el curso de la maestría.

A Olga Vélez, por su atención y orientación oportuna para cumplir los requisitos de la Universidad.

Al profesor Sebastián Provenzano, por su paciencia al suministrarme los programas de análisis por elementos finitos.

RESUMEN

En el presente trabajo se implementan las técnicas de alisado de tensiones Superconvergent Patch Recovered (SPR), Recovery by Equilibrium in Patches (REP), Superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint (LP) y Extrapolación-Promediado, que permiten obtener resultados más precisos en determinadas mallas de elementos al utilizar el método de los elementos finitos. La implementación se lleva a cabo mediante la codificación de programas con sus respectivas subrutinas para elementos cuadriláteros en problemas de dominio bidimensional, que permiten obtener resultados numéricos de cada técnica y utilizando el estimador de error Zienkiewicz – Zhu (Z^2) poder comparar su efectividad y convergencia en dos problemas con solución conocida, también se comparan los resultados obtenidos con los de un programa comercial de elementos finitos. Los resultados de efectividad y convergencia muestran de manera general que las técnicas de alisado SPR, REP y LP dan mejores resultados que la técnica de Extrapolación-Promediado aunque para el problema de la viga la REP y LP dan mejores resultados. Las técnicas SPR, REP y LP implementadas funcionan adecuadamente y los resultados que se obtienen son mejores que los de Extrapolación-Promediado que es la que utiliza la mayoría de los programas comerciales de elementos finitos.

Palabras clave: Alisado de tensiones, SPR, REP, LP, estimador de error, convergencia, efectividad

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN.....	3
I.1 BREVE HISTORIA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	3
I.2 MOTIVACIÓN	5
I.3 OBJETIVOS.....	6
I.4 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS	7
I.5 REFERENCIAS	8
 CAPÍTULO II ERRORES Y SUPERCONVERGENCIA	10
II.1 APROXIMACIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)	10
II.2 ERRORES EN LA SOLUCIÓN DE ELEMENTOS FINITOS	14
II.3 ERROR DE DISCRETIZACIÓN	14
II.4 CONVERGENCIA ASINTÓTICA EN LA NORMA ENERGÉTICA.....	17
II.5 ESTIMADORES DE ERROR	20
II.5.1 <i>Estimadores de error a posteriori</i>	21
II.5.1.1 Estimadores basados en el residuo	21
II.5.1.2 Estimadores basados en la obtención de soluciones mejoradas de EF.....	22
II.6 SUPERCONVERGENCIA Y PUNTOS DE COLOCACIÓN ÓPTIMOS	24
II.7 REFERENCIAS	31
 CAPÍTULO III TÉCNICAS DE ALISADO DE TENSIONES	33
III.1 CÁLCULO DE TENSIONES EN LOS NODOS	33
III.2 TÉCNICAS DE EXTRAPOLACIÓN.....	35
III.2.1 <i>Extrapolación y alisado global de tensiones</i>	35
III.2.2 <i>Extrapolación y alisado local de tensiones</i>	37
III.3 TÉCNICAS DE RECIENTES	38
III.3.1 <i>Superconvergent Patch Recovered - SPR</i>	38

III.3.2	<i>Recovery by Equilibrium in Patches - REP</i>	42
III.3.3	<i>Superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint - LP</i> ..	46
III.4	REFERENCIAS	50
CAPÍTULO IV IMPLEMENTACIÓN		51
IV.1	PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS	51
IV.2	TÉCNICAS DE ALISADO DE TENSIONES	59
II.5.1	<i>Extrapolación y alisado local mediante promediado</i>	59
II.5.2	<i>Superconvergent Patch Recovered – SPR</i>	60
II.5.3	<i>Recovery by Equilibrium in Patches – REP</i>	64
II.5.4	<i>Superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint – LP</i>	70
IV.3	REFERENCIAS	71
CAPÍTULO V APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS		72
V.1	MODELO DE PLACA CON ORIFICIO CIRCULAR	72
V.1.1	<i>Descripción del modelo</i>	73
V.1.2	<i>Resultados obtenidos</i>	75
V.1.3	<i>Comparación y Análisis de resultados</i>	82
V.2	MODELO DE VIGA EN CANTILEVER	84
V.2.1	<i>Descripción del modelo</i>	85
V.2.2	<i>Resultados obtenidos</i>	86
V.2.3	<i>Comparación y Análisis de resultados</i>	97
CAPÍTULO VI CONCLUSIÓN		100
VI.1	CONCLUSIONES	100
VI.2	CONTRIBUCIONES	101
VI.3	SUGERENCIAS PARA FUTUROS TRABAJOS.....	101
VI.4	REFERENCIAS	101

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

I.1 Breve historia del método de los elementos finitos

El ser humano tiene limitaciones tales que no puede captar el comportamiento del complejo mundo que lo rodea en una sola operación global. Por ello, una forma natural de proceder de los ingenieros y científicos consiste en separar los sistemas en sus componentes individuales o "elementos", cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes.

En muchos casos se obtiene un modelo adecuado utilizando un número finito de componentes bien definidos. A tales problemas se les denomina discretos. En otros, la subdivisión prosigue indefinidamente y el problema sólo puede definirse haciendo uso de la ficción matemática de infinitésimo. Ello conduce a ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes con un número infinito de elementos implicados. Tales sistemas se llaman continuos.

Con la llegada de las computadoras digitales, los problemas discretos pueden resolverse generalmente sin dificultad, aún cuando el número de elementos sea muy elevado. Como la capacidad de las computadoras es finita, los problemas continuos sólo se pueden resolver de forma exacta mediante manipulaciones matemáticas. En este aspecto, las técnicas matemáticas disponibles suelen limitar las posibilidades a casos extremadamente simplificados.

Para vencer la dificultad que presenta la solución de problemas continuos reales, ingenieros y matemáticos han ido proponiendo a través de los años diversos métodos de discretización. La aplicación de estos métodos hace necesario efectuar alguna aproximación de tal manera que quepa esperar que la misma se acerque, en el límite, a la solución continua verdadera a medida que crezca el número de variables discretas.

La discretización de problemas continuos ha sido abordada de manera diferente por matemáticos e ingenieros. Los primeros han desarrollado técnicas generales aplicables directamente a las ecuaciones diferenciales que rigen el problema, tales como aproximaciones

por diferencias finitas [1],[2] diferentes métodos de residuos ponderados [3],[4] o técnicas aproximadas, para determinar puntos estacionarios de "funcionales" definidos en forma apropiada. Los ingenieros, por otra parte, suelen enfrentarse al problema más intuitivamente creando una analogía entre elementos discretos reales y porciones finitas de un dominio continuo. Por ejemplo, en el campo de la mecánica de los sólidos, McHenry [5], Hrenikoff [6], Newmark [7] y Southwell [1] demostraron, en la década de 1910, que pueden obtenerse soluciones razonablemente buenas de un problema continuo sustituyendo pequeñas porciones del continuo por una distribución de barras elásticas simples. Más tarde, y en el mismo contexto, Argyris [8], Turner et al [9] demostraron que se pueden sustituir las propiedades del continuo de un modo más directo, y no menos intuitivo, suponiendo que las pequeñas porciones del mismo o "elementos" se comportan de una cierta forma simplificada.

Fue de la posición de "analogía directa", adoptada por los ingenieros, de donde nació la expresión "elemento finito". Parece que fue Clough [10] el primero en usar este nombre, que supone el uso preciso de la metodología general aplicable a los sistemas discretos. Esto, tanto desde el punto de vista conceptual como del numérico, es de la mayor importancia. El primero permite una mejor comprensión del problema; el segundo, el uso de un criterio unificado para abordar una gran variedad de problemas y desarrollar procedimientos generales de cálculo.

Mucho se ha avanzado desde el principio de la década de 1960, y hoy día, las dos vertientes, la meramente matemática y la "analógica", están en completo acuerdo.

Con el transcurso de los años se han ido desarrollando métodos generales para analizar problemas de naturaleza discreta. El ingeniero, que trabaja con estructuras, calcula primero las relaciones entre fuerzas y desplazamientos para cada miembro de la estructura y después procede al ensamblaje del conjunto siguiendo un procedimiento bien definido que consiste en establecer el equilibrio local en cada "nudo" o punto de unión de la estructura. A partir de tales ecuaciones se pueden obtener los desplazamientos desconocidos.

Todos estos análisis siguen un patrón general que puede adaptarse universalmente a todos los sistemas discretos.

La existencia de una manera única para abordar los "problemas discretos tipo" lleva a la primera definición del método de los elementos finitos como procedimiento de aproximación de problemas continuos [11], de tal forma que:

- a) El continuo se divide en un número finito de partes (elementos), cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros y
- b) la solución del sistema completo como ensamblaje de los elementos sigue precisamente las mismas reglas que se aplican a los problemas discretos tipo.

Los numerosos métodos matemáticos clásicos de aproximación se incluyen en esta categoría, así como también varios métodos de aproximaciones de naturaleza técnica. Es difícil, por tanto, hablar de los orígenes del método de los elementos finitos y del preciso momento de su invención.

I.2 Motivación

Se ha mencionado ya la naturaleza aproximada del método de elementos finitos y en algunas ocasiones, para mostrar sus posibilidades, se puede comparar con soluciones exactas cuando son conocidas. También en algunas ocasiones se habla sobre la "precisión" del método y se ha discutido a lo largo de los años la forma de mejorar dicha precisión. Ciertamente, la motivación de esta tesis se centra en la cuestión de la precisión y su posible mejora por un tratamiento a posteriori de los resultados de elementos finitos asociados al campo tensional. Estos procesos se denominan de "recuperación o alisado" y son necesarios para evaluar los estimadores de error de discretización a posteriori. Desde los años 70 se han explorado diferentes técnicas de alisado y se han sugerido muchos métodos, entre ellos: promediado de tensiones de E.F., técnicas basadas en métodos de mínimos cuadrados y alisado de tensiones por zonas, estando incluidas en esta última la "SPR" desarrollada por Zienkiewicz y Zhu en el año 1992 [12], la "REP" desarrollada por Booromand y Zienkiewicz en el año 1997 [13] y la "LP" propuesta por Lee y Park en el año 1997 [14]. Estas técnicas según sus autores dan mejores resultados y por tal motivo se estudian en este trabajo.

Por otra parte, en el Departamento de Tecnología y Diseño de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad de los Andes en Mérida, se han aplicado eficientemente las técnicas de Extrapolación – Promediado y la SPR [15] y [16]. Sin embargo hasta la actualidad

no se han implementado algoritmos para la REP y LP en el caso bidimensional. Por lo tanto es de gran interés implementar dichas técnicas para compararlas entre sí.

I.3 Objetivos

En el presente trabajo se implementan técnicas eficientes del método de elementos finitos que permiten obtener resultados más precisos en determinadas mallas de elementos. Para la implementación de dichas técnicas es necesario abordar los siguientes puntos:

Verificar algoritmos de resolución de modelos bidimensionales aplicando el método de los elementos finitos [15].

Verificar algoritmos de alisado de campos tensionales de elementos finitos bidimensionales denominados Extrapolación – Promediado [16] y SPR [12], [16].

Desarrollar algoritmos de alisado de campos tensionales de elementos finitos bidimensionales por medio de las técnicas REP [13] y LP [14] para el elemento cuadrilátero lineal de cuatro nodos.

Implementar las técnicas de alisado por medio de codificación de programas para el elemento bidimensional cuadrilátero lineal de cuatro nodos.

Comparar las diversas técnicas con soluciones exactas y entre sí por medio de dos ejemplos de aplicación.

Comparar los resultados preliminares de extrapolación y promediado de tensiones obtenidos con los del modelo resuelto con un programa comercial de elementos finitos que son los típicamente ejecutados.

I.4 Organización de la tesis

Esta tesis ha sido organizada en seis capítulos. En el capítulo II se hace una revisión del fundamento teórico referente a la aproximación por el Método de los Elementos Finitos y los errores presentes en la solución de elementos finitos haciendo énfasis en el error de discretización, también se estudia la superconvergencia y los puntos de colocación óptimos para el cálculo de tensiones de elementos finitos. En el capítulo III se describe con detalle el desarrollo matemático de las técnicas de alisado de tensiones a estudiar e implementar en este trabajo. En el Capítulo IV se muestran los diagramas de flujo para la resolución del problema de elementos finitos y las subrutinas implementadas así como también las matrices a resolver en cada una de las técnicas. En el capítulo V se muestran dos ejemplos de verificación los cuales se describen, se muestran los resultados obtenidos y se realiza una comparación de las diversas técnicas aplicadas a cada uno de los ejemplos. Por último, el capítulo VI contiene las conclusiones, un resumen de las contribuciones que se han realizado y algunas sugerencias para futuras investigaciones.

I.5 Referencias

- [1] Southwell, R.V., "Relaxation Methods in Theoretical Physics", Clarendon Pres, 1946.
- [2] Allen, G., "Relaxation Methods", McGraw-Hill, 1955.
- [3] Crandall, S.H., "Engineering Analysis", McGraw-Hill, 1956.
- [4] Finlayson, B.A., "The Method of Weighted Residuals an Variational Principles", Academic Press, 1972.
- [5] McHenry, B.A., "A lattice analogy for the solution of plane stress problems", J. Inst, Civ, Eng., 21, 59-82,1943.
- [6] Hrenikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method", J. Appl. Mech., A8, 169-75, 1941.
- [7] Newmark, N.M., "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies, in Numerical Methods in Analysis in Engineering", L.E. Grinter (ed.), Macmillan, 1949.
- [8] Argyris, J.H. "Energy Theorems and Structural Analysis", Butterworth, 1960 (reproducido de Aircraft Eng., 1954-55).
- [9] Turner, J.H., Clough, R.W., Martin H.C. y Topp, L.J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aero. Sci., 23, 805-23, 1956.
- [10] Clough, L.J., "The finite element in plane stress analysis", Proc. 2nd. A.S C.E. Conf on Electronic Computation, Pittsburg, Pa., Set. 1960.
- [11] Zienkiewicz , O.C., Taylor, R.L., "El Método de los Elementos Finitos", Quinta Edición, Volumen I, Cimne, 2004.

- [12] Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z., “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part I: The recovery technique”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 33, 1331-1364 (1992).
- [13] Boroomand, B. y Zienkiewicz, O.C., “Recovery by equilibrium in patches (REP)”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, 137-164 (1997).
- [14] Lee, T., Park, H.C. y Lee, S.W., “A superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, 1139-1160 (1997).
- [15] Vergara, M., “Implementación del Método de Elementos Finitos en modelo de placa con orificio circular”, *Informe final de la asignatura Elementos Finitos, Universidad Politécnica de Valencia España*, (1999).
- [16] Díaz, M., “Determinación del error a posteriori en placa con orificio circular”, *Informe técnico Departamento de Tecnología y Diseño Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Mecánica*, (2004).

CAPÍTULO II

ERRORES Y SUPERCONVERGENCIA

En la primera parte de este capítulo se realiza el planteamiento del problema elástico a resolver con el Método de Elementos Finitos (MEF), con la finalidad de obtener las expresiones matemáticas necesarias y así abordar el tema de la estimación del error. Luego se tratan los conceptos fundamentales de los errores en la soluciones de elementos finitos, se describe específicamente el error de discretización y el estimador de error a posteriori que son los que se usan para evaluar los ejemplos de aplicación del capítulo V. Adicionalmente se explica el significado de superconvergencia en la solución, ya que es una propiedad fundamental utilizada en las técnicas recientes de alisado de tensiones que se tratan el capítulo III y se implementan en el capítulo IV.

II.1 Aproximación del problema elástico con el Método de Elementos Finitos (MEF)

En la mayoría de los casos las ecuaciones que definen el problema elástico no tienen solución analítica para los problemas reales. Por esta razón se debe recurrir a técnicas que utilizan análisis numérico para obtener una solución aproximada. El problema puede plantearse usando *un principio variacional*, donde la solución se busca de tal forma que se minimice el funcional correspondiente (principio de mínima energía potencial) o bien partiendo de una *formulación diferencial* en cuyo caso se puede considerar un método de residuos ponderados (Galerkin) que es la técnica que se utiliza para obtener una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, cualquiera que sea la forma que se utilice para plantear y resolver el problema, siempre se llegan a las mismas expresiones matemáticas.

A continuación se plantea la solución numérica al problema elástico a través del principio de mínima energía potencial con una descripción de las variables en el espacio bidimensional.

Para la formulación del MEF en desplazamientos se parte de la energía potencial total de un cuerpo elástico bidimensional:

$$\Pi_p = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} u^T b d\Omega - \int_{\Gamma} u^T t d\Gamma \quad (2.1)$$

donde: ε representa el vector de deformaciones, σ el de tensiones, u el de desplazamientos, b el de fuerzas volumétricas y t el de fuerzas en el contorno, Ω y Γ corresponden al área y contorno del dominio, respectivamente, ver Figura 2.1,

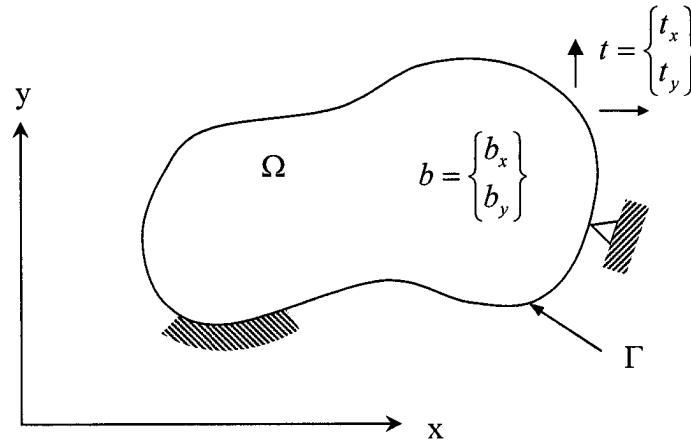


Figura 2.1 Fuerzas, restricciones y dominio del problema bidimensional.

En el caso bidimensional el vector de deformaciones viene dado por:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \end{Bmatrix}; \varepsilon = L u \quad (2.2)$$

Cuando se realiza un modelado mediante elementos finitos, el campo de desplazamientos está definido en el interior de cada elemento finito con coordenadas locales ξ, η como una interpolación de los desplazamientos nodales de dicho elemento como:

$$u(\xi, \eta) = N(\xi, \eta) u^{(e)} \quad (2.3)$$

se tiene, por lo tanto

$$\varepsilon = L N u^{(e)} = B u^{(e)} \quad (2.4)$$

donde la matriz operador diferencial L actúa sobre la matriz de funciones N , generando así la llamada matriz de deformación-desplazamientos B .

Para un cuerpo elástico lineal la ley de Hooke establece:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = D \varepsilon \quad (2.5)$$

en la cual la matriz D es la matriz de propiedades elásticas del material.

Sustituyendo las expresiones (2.3), (2.4) y (2.5) en (2.1) se tiene:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{Nel} u^{(e)T} k^{(e)} u^{(e)} - \sum_{e=1}^{Nel} u^{(e)T} f^{(e)} \quad (2.6)$$

donde el sumatorio indica las contribuciones del número total de elementos finitos Nel .

Para cada elemento la matriz de rigidez $k^{(e)}$ se define como:

$$k^{(e)} = \int_{A^{(e)}} B^T D B dA \quad (2.7)$$

y el vector de fuerzas equivalentes $f^{(e)}$ del elemento se obtiene de:

$$f^{(e)} = \int_{A^{(e)}} N^T b dA + \int_{l^{(e)}} N^T t dl \quad (2.8)$$

en estas expresiones $A^{(e)}$ representa el área del elemento y $l^{(e)}$ la longitud del contorno. Por lo tanto:

$$\Pi_p^{(e)} = \frac{1}{2} u^{(e)T} k^{(e)} u^{(e)} - u^{(e)T} f^{(e)} \quad (2.9)$$

La matriz global de rigidez del sistema, K se construye ensamblando las matrices correspondientes de cada elemento.

$$K = \sum_{e=1}^{Nel} k^{(e)} \quad (2.10)$$

y

$$f = \sum_{e=1}^{Nel} f^{(e)} \quad (2.11)$$

En estas expresiones los sumatorios indican el ensamblado de las matrices de rigidez de cada elemento. Haciendo Π_p estacionario con respecto a pequeños cambios en u , y aplicando las reglas de diferenciación se tiene:

$$\left\{ \frac{\partial \Pi_p}{\partial u} \right\} = 0 \rightarrow Ku = f \quad (2.12)$$

La expresión (2.12) representa un conjunto de ecuaciones algebraicas que permiten calcular el vector de desplazamientos u .

En la sección IV.1 se presenta la particularización de las ecuaciones necesarias para resolver numéricamente el problema de MEF utilizando el elemento cuadrilátero lineal de cuatro nodos.

II.2 Errores en la solución de elementos finitos

Los errores en la solución de elementos finitos pueden ser de varios tipos. El más importante es el error de discretización que se debe a que la representación discreta en general no puede simular el campo verdadero de desplazamientos que el problema continuo posee, dicho error es combinación del grado de las funciones de forma y de la malla de elementos finitos utilizada. Por lo tanto el error de discretización no puede eliminarse, de allí que el interés se centre en cómo medir este error para minimizarlo efectivamente. Otro tipo de error es debido a la capacidad limitada de los ordenadores para almacenar información (error de redondeo). Con la creciente precisión de los ordenadores la importancia de este tipo de error tiende a disminuir. Otras fuentes de error pueden deberse a la mala aproximación de la geometría, al cálculo erróneo de las integrales y a la utilización de una ecuación constitutiva inadecuada. Estos errores, sin embargo, son más fáciles de controlar y de evitar "a priori". Por consiguiente, este trabajo se concentra en el estudio del error de discretización, considerando diferentes técnicas para el alisado de tensiones.

II.3 Error de discretización

El estudio del error de discretización ha ocupado el interés de muchos investigadores [1], [2], [5], [6], [7] y [8]. No obstante, el mayor esfuerzo en la actualidad se centra en la "traducción" ingenieril de los conceptos matemáticos de estimación del error, como base para diseñar una metodología que permita obtener soluciones progresivamente más exactas de forma "inteligente" o "adaptable" [3].

Para mejorar la solución de elementos finitos existen varios procedimientos. El primero es la simple reducción del tamaño de los elementos (método h). El segundo es incrementar el grado de las funciones de forma, utilizando elementos de mayor orden en una malla con una subdivisión determinada (método p). También es posible utilizar procedimientos que combinen ambas técnicas (métodos $h - p$).

Los aspectos matemáticos de la predicción del error utilizando el método p han sido extensamente estudiados, pudiendo obtenerse expresiones relativamente sencillas de los estimadores del error utilizando elementos jerárquicos. Se estudiará en este trabajo únicamente el método h , que durante años ha gozado de gran popularidad entre los ingenieros y además se

encuentra como una subrutina en la mayoría de programas computacionales de elementos finitos.

En este punto es necesario definir lo que significa el error, que se considera como la diferencia entre la solución exacta y la aproximada. Esta definición puede aplicarse a la función básica, tal como el desplazamiento, denominado “ u ” y puede escribirse como:

$$e_u = u - u_{EF} \quad (2.13)$$

donde e_u es el error en desplazamientos, u el desplazamiento exacto y u_{EF} el desplazamiento obtenido de la solución de elementos finitos.

De manera similar, sin embargo, se puede localizar el error en las deformaciones (es decir, gradientes de la solución), tal como ε o en las tensiones σ , y describir el error en dichas cantidades como

$$e_\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_{EF} \quad (2.14)$$

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_{EF} \quad (2.15)$$

donde e_ε es el error en deformaciones, ε la deformación exacta y ε_{EF} la deformación obtenida de la solución de elementos finitos y e_σ es el error en tensiones, σ la tensión exacta y σ_{EF} la tensión obtenida de la solución de elementos finitos.

La determinación del error local en la forma dada en las ecs. (2.13)-(2.15) no es conveniente en general y a veces puede resultar engañosa.

Por ejemplo, bajo una carga puntual ambos errores, en desplazamientos y tensiones, serán localmente infinitos, pero la solución en conjunto podría ser aceptable. Situaciones similares se darán cerca de ángulos entrantes donde, como es sabido, existen singularidades de tensiones en análisis elásticos. Por esta razón se utilizan varias "normas" que representan una medida de la magnitud del error, es decir, el error en términos de una cantidad escalar integral.

Una de las normas más utilizadas en el cálculo del error de discretización de la solución de desplazamientos obtenida mediante elementos finitos es la que se denomina norma

energética. La norma energética “ $\|U_{ex}\|$ ” de la solución, corresponde a la raíz cuadrada del doble de la energía de deformación, es decir:

$$\|U_{ex}\| = \sqrt{2 \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ex}^T \varepsilon_{ex} d\Omega \right)} = \sqrt{\int_{\Omega} \sigma_{ex}^T \varepsilon_{ex} d\Omega} \quad (2.16)$$

donde σ_{ex} y ε_{ex} son las tensiones y deformaciones de la solución exacta respectivamente y Ω representa el dominio del modelo, que para el caso de este trabajo en dominio bidimensional es el área del modelo.

Empleando la relación inversa entre el campo de tensiones y de deformaciones, esta norma queda expresada en función de las tensiones como:

$$\|U_{ex}\| = \sqrt{\int_{\Omega} \sigma_{ex}^T D^{-1} \sigma_{ex} d\Omega} \quad (2.17)$$

donde D es la matriz de elasticidad que se define en la sección IV.1.

Definiéndose el error en dicha norma como la raíz cuadrada del doble de la energía de deformación asociada al error como:

$$\|e_{ex}\| = \sqrt{\int_{\Omega} \varepsilon_{ex}^T D^{-1} \varepsilon_{ex} d\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} (\sigma_{ex} - \sigma_{EF})^T D^{-1} (\sigma_{ex} - \sigma_{EF}) d\Omega} \quad (2.18)$$

donde σ_{ex} y σ_{EF} son las tensiones de la solución exacta y la de elementos finitos respectivamente.

Bajo ciertas hipótesis [4] esta magnitud está relacionada con la norma energética de la solución exacta y la de elementos finitos a partir de:

$$\|e_{ex}\| \approx \sqrt{\|U_{ex}\|^2 - \|U_{EF}\|^2} \quad (2.19)$$

Donde $\|U_{ex}\|^2$ es el cuadrado de la norma energética de la solución exacta y $\|U_{EF}\|^2$ es el cuadrado de la norma energética de la solución de elementos finitos.

Por otro lado, de la definición del error de discretización absoluto se define el error relativo en norma energética, η_{ex} mediante la relación:

$$\eta_{ex} = \frac{\|e_{ex}\|}{\|U_{ex}\|} \quad (2.20)$$

II.4 Convergencia asintótica en la norma energética

En los problemas de elasticidad para la versión h de EF, si el tamaño h de los elementos se va haciendo cada vez más pequeño, los errores exactos en desplazamientos son del orden $O(h^{p+1})$, y los errores exactos en tensiones y deformaciones son del orden $O(h^p)$, siendo p el grado máximo del polinomio completo de la interpolación de desplazamientos. Este resultado se obtiene considerando que la solución exacta del problema, dentro de un elemento, se puede desarrollar en serie de Taylor como:

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \dots \quad (2.21)$$

Si dentro del elemento de tamaño h , se utiliza una expansión polinómica local de grado p , como $(x - x_i)$, $(y - y_i)$, son del orden de magnitud de h , el error será $O(h^{p+1})$. Las tensiones y las deformaciones se obtienen derivando una vez el campo de desplazamientos y en consecuencia se tendrán polinomios de un grado menor y el error resultante será del orden $O(h^p)$.

Para asegurar la convergencia de la solución es necesario que la interpolación hecha en desplazamientos cumpla determinadas condiciones. En el caso de elasticidad es necesario que la interpolación presente continuidad C^0 en las fronteras entre elementos, es decir, que haya continuidad en los desplazamientos entre elementos, pero no se requiere continuidad en las

derivadas y por lo tanto las deformaciones y las tensiones pueden resultar discontinuas entre elementos. También es necesario que en los términos del desarrollo polinómico se incluya el término constante y los lineales para poder simular correctamente los movimientos de cuerpo rígido y los estados de deformación constante. La condición suficiente para que se mantenga la convergencia es asegurar la integración exacta de polinomios de grado $(p - m)$, siendo p el grado máximo del polinomio completo en las funciones de forma y m la derivada de mayor orden en la expresión de la energía de deformación (en el caso de elasticidad plana $m = 1$). Sin embargo, si se quiere mantener la velocidad de convergencia de la solución se debe asegurar la integración exacta de polinomios de orden $2(p - m)$.

De lo dicho previamente se desprende que si la malla se subdivide indefinidamente (aumentando los grados de libertad gdl), haciendo tender el tamaño de los elementos a cero, el error en la solución tiende también a cero en forma asintótica como se observa en la Figura 2.2 con lo cual es evidente que el error está acotado y depende del tamaño del elemento.

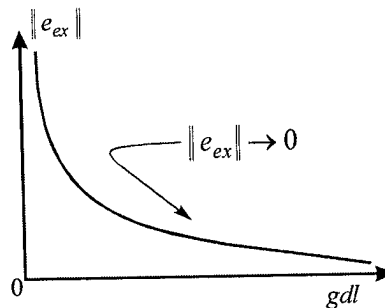


Figura 2.2 Tendencia del error exacto

La velocidad de esta convergencia asintótica es entonces una característica de interés ya que proporciona información acerca de como cambia el error cuando cambia la discretización.

Cuando se utilizan refinamientos uniformes o cuasi-uniformes en la malla de elementos finitos, la velocidad de convergencia se encuentra limitada por p y λ según:

$$\nu = \frac{1}{d} \min(p, \lambda) \quad (2.22)$$

donde d es la dimensión del problema, para problemas bidimensionales $d = 2$, y λ es una constante que caracteriza la intensidad de las singularidades

Si la *solución es suave*, el valor de λ es grande y entonces la velocidad de convergencia está limitada por el orden polinómico de los elementos, de tal manera que para problemas bidimensionales:

$$\nu = \frac{1}{2} p \quad (2.23)$$

Para los casos bidimensionales, cuando se realiza un refinamiento uniforme según lo expuesto, la velocidad de convergencia ν para elementos lineales ($p = 1$) tiende a $-1/2 = -0.5$ cuando se incrementan los gdl , y la solución exacta del problema es suave.

Gráficamente la velocidad de convergencia se obtiene como la pendiente de la recta que se consigue al representar el $\log(\|e_{ex}\|)$ en función del $\log(gdl)$ para cada malla que se genere en el proceso de refinamiento, como se muestra en la Figura 2.3.

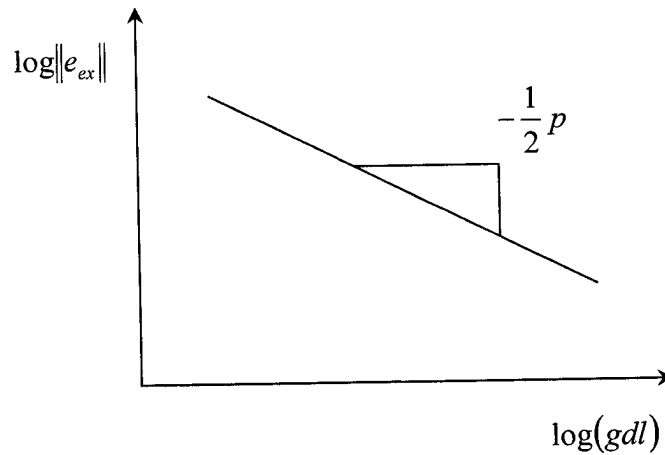


Figura 2.3 Velocidad de convergencia del error.

II.5 Estimadores de error

Una vez que se obtiene una solución del MEF, es conveniente conocer la magnitud del error y su convergencia tal y como se vio en la sección anterior. En la actualidad se pueden encontrar numerosas clasificaciones, descripciones y estudios de los diferentes métodos de evaluación del error; sin embargo no existe ningún método óptimo ya que los que son más precisos requieren en general modificaciones importantes de los programas de elementos finitos y además realizan un conjunto de operaciones que son computacionalmente costosas.

Existen dos aproximaciones para acceder al error: los *indicadores* y los *estimadores* del error. Un indicador de error proporciona información sobre cuales son los grados de libertad que añadidos a una malla previa permitirán reducir el error de la forma más eficaz. Mientras que un estimador de error da una aproximación a la medida del error global existente en un determinado elemento o región del dominio.

Para obtener un buen estimador de error asegurando su utilidad en análisis prácticos, se pueden establecer una serie de propiedades deseables como lo describe Babuska et al [5], estas son:

- El estimador debe producir una estimación local y global fiable del verdadero error, porque éste se usa para evaluar la calidad de las soluciones aproximadas como se verá en el capítulo V. La fiabilidad del estimador del error se mide por el *índice de efectividad*, que es la proporción del error estimado y el verdadero error en alguna norma como se muestra en la ecuación (2.27).
- Un estimador debe converger hacia un valor exacto de forma asintótica, es decir $\|e_{es}\| \rightarrow 0$ al tender los gdl a infinito.
- Un estimador debe dar una idea del grado de error en tensiones, desplazamientos o deformaciones existente en una determinada solución.
- El coste computacional del estimador de error tiene que ser razonable, en el peor de los casos, comparable al costo de calcular la solución de elementos finitos.

Existen dos tipos de estimadores de error: los estimadores de error a priori y estimadores de error a posteriori. Los estimadores de error a priori se basan en el conocimiento previo de las características de la solución, tales como su suavidad y proporcionan información

cualitativa sobre la velocidad de convergencia a medida que aumenta el número de grados de libertad. Sin embargo no aportan información sobre el error real en un modelo de EF dado. Los estimadores de error a posteriori utilizan la información obtenida durante el procedimiento análisis, además de suposiciones a priori sobre la solución y permiten realizar estimaciones del verdadero error de discretización. Estos son los más utilizados en aplicaciones prácticas y a diferencia de estimadores de error a priori proporcionan una medida cuantitativa del error de discretización, razón por la cual será éste el tipo de estimador que se utilizará en éste trabajo.

II.5.1 Estimadores de error a posteriori

En general estos estimadores son a su vez de dos tipos: estimadores basados en el residuo y estimadores basados en la obtención de soluciones mejoradas de EF mediante la aplicación de técnicas de postproceso. A pesar de que estos estimadores en sus definiciones originales han sido derivados de metodologías diferentes y por lo tanto su construcción e implementación computacional son distintas, se ha demostrado Zhu [6] que ambos estimadores están relacionados para problemas unidimensionales y bidimensionales. Así, los estimadores de error de tipo residual explícito pueden derivarse de estimadores basados en la obtención de soluciones mejoradas usando técnicas de suavizado específicas. En particular, el estimador de error de residuo explícito de Babuska y Rheinboldt [7] para problemas bidimensionales se puede derivar del estimador basado en soluciones mejoradas, cuando se usa el promedio como técnica de suavizado. Aunque ambos estimadores estén relacionados, se presentan las características de cada uno por separado, ya que en este trabajo solo se utilizará el estimador basado en soluciones mejoradas de EF. Estos estimadores se resumen a continuación.

IV.2.1.1 Estimadores basados en el residuo

Este tipo de estimador de error se calcula usando los residuos de la solución de elementos finitos implícitamente o explícitamente. Los estimadores de error residuales implícitos se determinan resolviendo el problema del valor limite local para el error, en el cual se usa el residuo de la solución de EF como dato. La exactitud de este estimador depende de cómo se resuelve el problema localmente, en particular, de cómo están impuestas las condiciones de contorno del problema local. Los estimadores de error residual explícitos, por

otro lado, son expresados directamente por los residuos de la solución de la discretización. La exactitud de este estimador depende de la precisión de las constantes contenidas en el estimador de error y de la malla usada en el análisis de elementos finitos.

Es importante mencionar el hecho de que se han realizado recientemente progresos importantes para este tipo de estimador con la introducción del llamado "residual equilibration" el cual se encuentra detallado por Ainsworth y Oden [8].

II.5.1.2 Estimadores basados en la obtención de soluciones mejoradas de EF

Estos estimadores están basados en la idea de conseguir una mejor aproximación a la solución exacta para tensiones, deformaciones o desplazamientos (σ^* , ε^* y u^*) a partir de la solución de elementos finitos (σ_{EF} , ε_{EF} , u_{EF}) y calcular su diferencia como una estimación del error exacto.

El estimador más utilizado ha sido introducido por Zienkiewicz y Zhu [9], y se conoce como el estimador de Zienkiewicz-Zhu (Z^2). Este ha sido usado en análisis adaptativos para diferentes tipos de elementos y con diferentes problemas físicos. La idea básica del estimador Z^2 consiste en utilizar en la expresión del error en norma energética dada en la ecuación (2.18), en lugar del campo de tensiones exacto que es desconocido, un campo de tensiones alisado obtenido a partir del campo de tensiones de EF. Con lo que el estimador tiene la forma:

$$\|e_{ex}\| \approx \|e_{es}\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_{EF})^T D^{-1} (\sigma^* - \sigma_{EF}) d\Omega} \quad (2.24)$$

donde:

σ^* es al campo de tensiones alisado. Para definir este campo existen diversas técnicas, algunas de las cuales se detallan en la siguiente sección y su implementación es el objetivo principal de este trabajo.

$\|e_{es}\|$ representa el error estimado.

σ_{EF} es el campo de tensiones de elementos finitos, el cual se expresa según:

$$\sigma_{EF} = D B u_{EF} \quad (2.25)$$

La aproximación (2.24) converge hacia un valor nulo a medida que se va refinando la malla ya que ambos campos de tensiones se acercan cada vez más a la solución exacta del problema. Por ello el estimador tenderá también a producir valores más correctos durante dicho proceso.

A pesar de que las tensiones obtenidas mediante alisado no están, generalmente, en equilibrio sino que necesitan fuerzas residuales para ser equilibradas, si son una mejor aproximación a la solución exacta del problema que las obtenidas directamente de los desplazamientos ya que:

- En el proceso de alisado se eliminan las discontinuidades del campo de tensiones que existen en las caras de contacto entre elementos. Dado que de la solución exacta se espera que sea continua, es razonable suponer que el campo de tensiones alisado es más cercano a aquella.
- Mediante el alisado se consigue una distribución de tensiones más uniforme dentro del dominio, de forma que la evaluación de dichas tensiones es posible en cualquier punto con buenos resultados. Ello no es posible en el campo de tensiones inicial donde éstas sólo pueden evaluarse con mayor precisión en los puntos de integración utilizados. Por ello puede decirse que el campo de tensiones alisadas tiene un nivel más alto de precisión. Además, la magnitud de esas fuerzas residuales decrece al ir refinando la malla ya que al ir disminuyendo la norma del error éstas también disminuyen.

Por otro lado es importante resaltar que desde un punto de vista práctico, también interesa estimar el error relativo en porcentaje y medir el índice de efectividad θ .

El error estimado relativo en la norma energética a nivel global se obtiene al sustituir la ecuación (2.24) y la (2.19) en (2.20):

$$\eta_r \% = \frac{\|e_{es}\|}{\sqrt{\|U_{EF}\|^2 + \|e_{es}\|^2}} \times 100 \quad (2.26)$$

El índice de efectividad representa la relación entre los valores del error estimado (ecuación 2.24) y el error exacto (ecuación 2.19) y se obtiene según:

$$\theta = \frac{\|e_{es}\|}{\|e_{ex}\|} \quad (2.27)$$

El estimador del error se considera fiable si θ tiende a la unidad conforme la solución de los elementos finitos converge a la verdadera solución y se dice que es asintóticamente exacto si el índice de efectividad converge a la unidad mientras el error verdadero tiende a cero cuando el tamaño de los elementos es cada vez más pequeño. Sin embargo, si el índice de efectividad tiende a un valor estable, diferente de la unidad, es posible definir un factor de corrección para que el estimador del error mejore la calidad de la estimación. En los casos donde la solución exacta no es conocida ésta se puede sustituir por una solución aproximada, obtenida a partir de una malla altamente refinada a efectos de estimar el índice de efectividad [4].

El estimador Z^2 comparado con los de tipo residual resulta más fácil de calcular y posee una robustez superior como lo muestra Babuska [10]. Además éste estimador puede obtenerse tanto a nivel local (elemento) como a nivel global, e incluso puede obtenerse información del error a nivel puntual, por esta razón se utilizará éste en el capítulo V.

Es importante resaltar que la estimación del error y su efectividad están condicionados por la forma de obtener el campo de tensiones alisado.

II.6 Superconvergencia y puntos de colocación óptimos

Dado que en las técnicas de alisado a implementar en este trabajo y que serán descritas en el capítulo siguiente se utiliza el término “superconvergencia”, entonces se explicará con algunos ejemplos lo que ello significa.

Se ha observado que en muchas ocasiones los desplazamientos, o la propia función, toman valores más precisos en los nodos del elemento y que los gradientes o las tensiones son más exactas en algunos puntos interiores. Ciertamente, en una dimensión al menos se encuentra que dichos puntos con frecuencia exhiben la propiedad conocida como superconvergencia (es decir, los valores calculados en esos puntos muestran un error que decrece más rápidamente que en cualquier otro punto). Por lo tanto, el usuario del método de elementos finitos debería estar incentivado a utilizar dichos puntos, pero al mismo tiempo

advertido de que los errores de conjunto pueden ser mucho mayores. Estos puntos están ubicados como se muestra en la Tabla 2.1. Se presentan a continuación algunos ejemplos:

Si se considera un problema tomado de [11] de una ecuación de segundo orden que puede representar los desplazamientos de una barra elástica con sección transversal variable. Esta ecuación puede representarse escribiendo

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) + \beta u + Q = 0 \quad (2.28)$$

con las condiciones de contorno definiendo bien los valores de la función u o de sus gradientes en los extremos del dominio.

Observando un problema típico como el que se muestra en la Figura 2.4 se muestra aquí una solución exacta para u y du/dx sobre un dominio que cubre varios elementos y se indica el tipo de solución que se obtendría de un cálculo por elementos finitos utilizando elementos lineales. Se ha observado que algunas veces se obtienen las soluciones exactas para u en los nodos. Esto sucederá cuando las funciones de forma contengan la solución exacta de la ecuación diferencial homogénea, una situación que sucede para la ec. (2.28) cuando $\beta = 0$ y se utilizan funciones de forma polinómicas. En todos los casos, incluso cuando β no es cero y se utilizan funciones de forma lineales, los valores nodales serán generalmente mucho más precisos que en cualquier otro sitio, Figura 2.4(a). Para los gradientes, que se muestran en la Figura 2.4(b), se observan grandes discrepancias entre la solución de elementos finitos y la exacta, pero se advierte que en algún punto del interior de cada elemento los resultados son casi exactos.

Es muy útil entonces localizar dichos puntos y, ciertamente, se ha mencionado que los valores de los gradientes (deformaciones y tensiones) obtenidos dentro de los elementos tienden a ser más precisos que los valores calculados en los nodos. Claramente, para el problema ilustrado en la Figura 2.4(b) se debe calcular dichos valores en algún lugar próximo al centro de cada elemento.

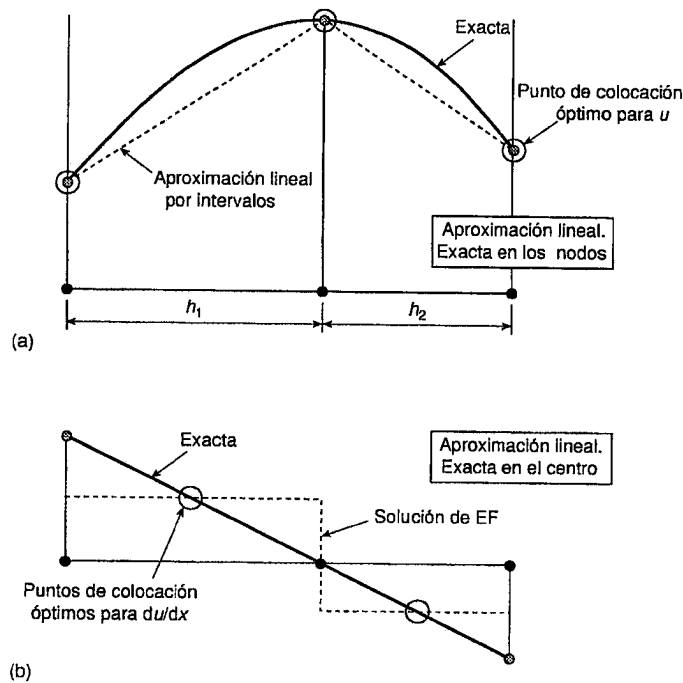


Figura 2.4 Puntos de colocación óptimos para la función (a) y su gradiente (b) en una dimensión (elementos lineales). Tomado de [11] pág. 446.

Continuando con este problema de una forma heurística, se advierte que si se utilizan elementos de mayor orden (p. ej., elementos cuadráticos), la solución sigue siendo exacta o casi exacta en los nodos extremos de un elemento, pero puede separarse de la exacta en los nodos interiores, como se muestra en la Figura 2.5(a). Las tensiones, o gradientes, en este caso serán óptimas en los puntos que corresponden con la cuadratura de Gauss de dos puntos para cada elemento, como se indica en la Figura 2.5(b). Este hecho se observó experimentalmente por Barlow [12] y dichos puntos se denominan frecuentemente como puntos de Barlow.

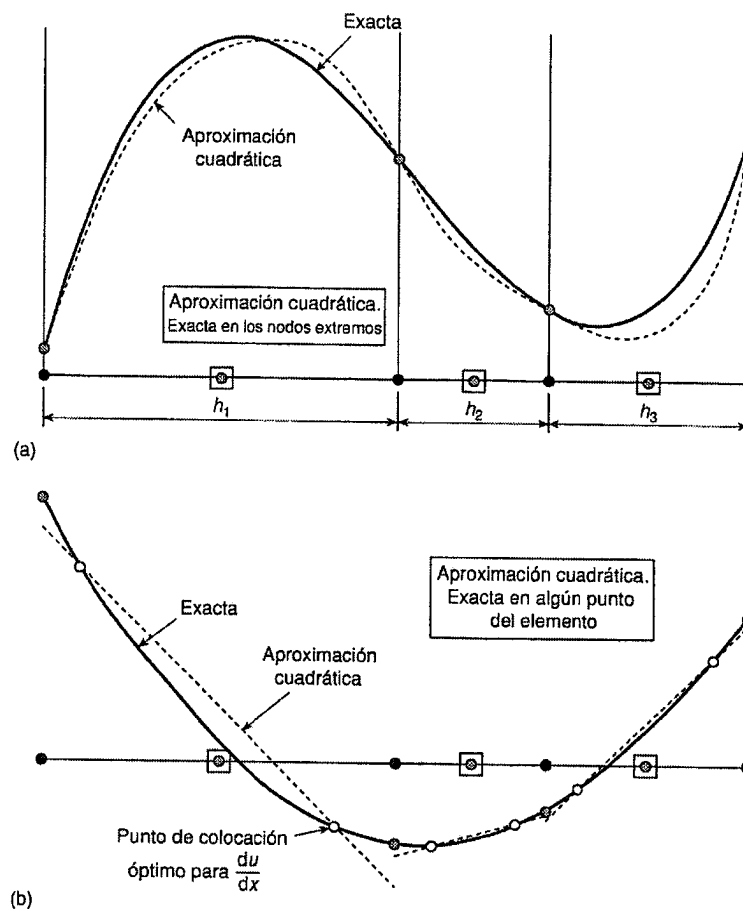


Figura 2.5 Puntos de colocación óptimos para la función (a) y su gradiente (b) en una dimensión (elementos cuadráticos). Tomado de [11] pág. 447.

Se define ahora de forma axiomática que:

a) los desplazamientos deben calcularse en los nodos del elemento, cualquiera que sea el orden del elemento, y

b) la mejor precisión para los gradientes o tensiones se obtiene en los puntos de Gauss que corresponden, en orden, al polinomio utilizado en la solución.

En dichos puntos el orden de convergencia de la función o sus gradientes es un orden mayor que el que se podría anticipar del polinomio utilizado y, por tanto, dichos puntos se

denominan superconvergentes. La razón de dicha superconvergencia se demuestra en un teorema desarrollado por Herrmann [13].

Del teorema de Herrmann se tiene que en una dimensión y debido a una propiedad muy conocida de los puntos de cuadratura de Gauss-Legendre, si los gradientes de la aproximación se definen por un polinomio de grado $p - 1$, donde p es el grado del polinomio utilizado para la función incógnita u , las tensiones calculadas en estos puntos de la cuadratura deben ser superconvergentes. El punto en el centro de un elemento integra exactamente todas las funciones lineales que pasan por ese punto y, por consiguiente, si las tensiones son exactas para una forma lineal, serán exactas en este punto de integración. Para cualquier polinomio de mayor orden p , la cuadratura de Gauss-Legendre de p puntos proporcionará puntos de colocación superconvergente. Se aprecia esto en la Figura 2.6 directamente. Aquí se muestra la cuadratura de Gauss-Legendre de 1, 2 y 3 puntos mostrando por qué se recuperan resultados exactos para los gradientes y tensiones en esos puntos.

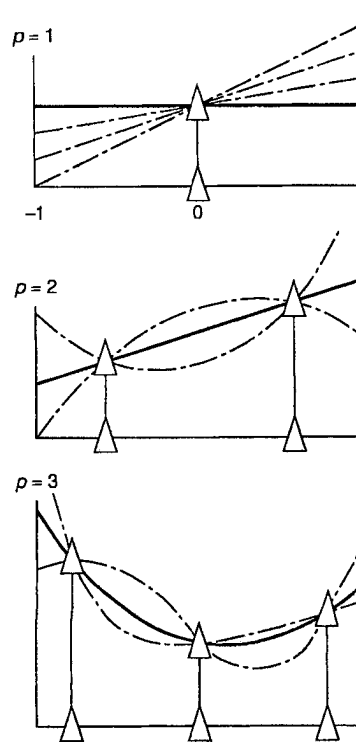


Figura 2.6 La propiedad de integración de los puntos de Gauss: $p = 1$, $p = 2$ y $p = 3$ que garantiza superconvergencia. Tomado de [11] pág. 449.

Para puntos basados en rectángulos y productos de funciones polinómicas es claro que los puntos de integración exacta existirán en los puntos interiores, como se muestra en la Tabla 2.1 para varios elementos rectangulares. En la misma figura se muestra, sin embargo, algunos triángulos y lo que aparentemente son puntos de colocación "buenos", pero no necesariamente superconvergentes. Estos puntos fueron sugeridos por Moan [14]. Aunque se sabe que no existen puntos superconvergentes en triángulos, los puntos que se muestran en la Tabla 2.1 son óptimos. En la Tabla 2.1 se comparan estos puntos con el número mínimo de puntos de cuadratura necesarios para obtener una representación de la rigidez precisa (aunque no siempre estable) y se encuentra que estos puntos son casi coincidentes en todos los casos.

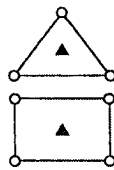
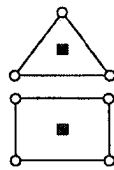
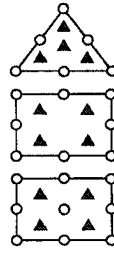
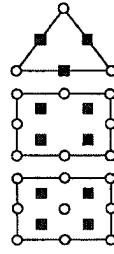
p	Error óptimo $O(h^{2(p-m)+2})$	Cuadratura mínima $O(h^{2(p-m)+1})$
1	$O(h^2)$	$\geq O(h^2)$
	 $O(h^2)$ $O(h^2)$	 $O(h^2)$ $O(h^2)$
2	$O(h^4)$	$\geq O(h^3)$
	 $O(h^4)$ $O(h^4)$ $O(h^4)$	 $O(h^3)$ $O(h^4)$ $O(h^4)$

Tabla 2.1 Colocación superconvergente óptima y puntos de integración mínimos para algunos elementos C_0 . Tomado de [11] pág. 450.

La Figura 2.7 representa el ejemplo de análisis de una viga en voladizo por cuatro elementos rectangulares serendíptos cuadráticos. En ella se aprecia muy bien cómo mejoran los valores de las tensiones calculadas en los puntos superconvergentes en comparación con la distribución de tensiones global calculada para cada elemento. A partir de resultados como éste se han hecho muchas sugerencias para obtener valores nodales mejorados y uno de los

métodos más utilizados es el propuesto por Hinton y Campbell [15]. Sin embargo, se estudiarán procedimientos de alisado mejores en el capítulo III.

La extensión de la idea de puntos superconvergentes desde elementos unidimensionales a rectángulos bidimensionales es directa. Sin embargo, la superconvergencia total se pierde para distorsiones isoparamétricas. Se ha mostrado, sin embargo, que los resultados en los puntos de la cuadratura de Gauss-Legendre de orden p son excelentes y se sugiere que las propiedades superconvergentes de los puntos de integración se usen para cálculo de deformaciones y tensiones en dichos puntos, tal y como se hace en este trabajo.

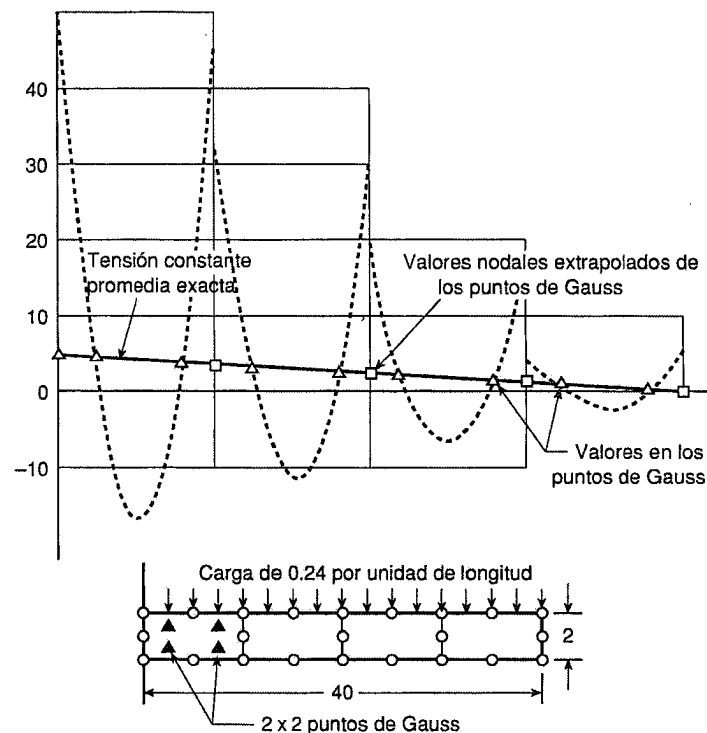


Figura 2.7 Viga en voladizo con cuatro elementos cuadráticos (Q8). Colocación de la tensión en los puntos de Gauss de orden cúbico 2 x 2 con extrapolación a los nodos. Tomado de [11] pág. 451.

II.7 Referencias

- [1] Zienkiewicz, O.C. y Morgan, K., "Finite elements and approximations", J. Wiley , (1980).
- [2] Zienkiewicz, O.C., y Taylor, R.L., "The finite Element Method", 4ta. Ed., Mc Graw Hill, Vol. I, (1989), Vol. II (1991).
- [3] Oñate, E., "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos", 2da. Ed., CIMME, (1995).
- [4] Vergara, M., "H-Adaptatividad en elementos finitos con refinamiento por subdivisión", Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia España, (2002).
- [5] Babuska, I., Strouboulis, T., Dibyendu, D. y Gangaraj, S., "What do we want and what do we have in a posteriori estimates in the FEM", The Mathematics of Finite Elements an Applications X., (2000).
- [6] Zhu, J., "A posteriori error estimation – the relationship between different procedures", Comput. Methods appl. mech. engrg., Vol 150, pp. 411-422, (1997).
- [7] Babuska, I. y Rheinboldt, W., "A posteriori error estimates for the finite element method", SIAM. J. Numer. Anal., Vol 12, pp. 1597-1615, (1978).
- [8] Ainsworth, M. y Oden, T., "A posteriori error estimation in finite element analysis", John Wiley & Sons, EEUU, (2000).
- [9] Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J., "A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol .24, pp. 337-357, (1987).

- [10] Babuska, I., Strouboulis, T. y Upadhyay, C., "A model of the quality of a posteriori error estimators for finite element solutions of linear elliptic problems, with particular reference to the behavior near the boundary", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol .40, pp. 2521-2577, (1997).
- [11] Zienkiewicz , O.C., Taylor, R.L., "El Método de los Elementos Finitos", Quinta Edición, Cimne, 2004.
- [12] Barlow, J., "Optimal stress locations in finite element models", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol .10, pp. 243-251, (1976).
- [13] Herrmann, L.R., "Interpretation of finite element procedures in stress error minimization", Proc. Am. Soc. Civ. Eng., Vol .98 (EM5), pp. 1331-1336, (1972).
- [14] Moan, T., "Orthogonal polynomials and 'best' numerical integration formulas on a triangle ", ZAMM., Vol .54, pp. 501-508, (1974).
- [15] Hinton, E., y Campbell, J., "Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol .8, pp. 461-480, (1974).

CAPÍTULO III

TÉCNICAS DE ALISADO DE TENSIONES

En el presente capítulo se describe el desarrollo de diversas técnicas de alisado de tensiones. Inicialmente se explica lo que es el cálculo de las tensiones en los nodos con la finalidad de mostrar las discontinuidades que presentan las tensiones entre elementos adyacentes y de justificar un alisado de las mismas, luego se muestran dos técnicas de extrapolación (global y local) que fueron unos de los primeros intentos de alisado de tensiones para posteriormente seguir con algunas de las técnicas recientes de alisado de tensiones denominadas SPR, REP y LP que se implementan en este trabajo.

III.1 Cálculo de tensiones en los nodos

Para determinar el error estimado es necesario encontrar el estado tensional en los nodos, el cálculo de tensiones en un nodo i puede efectuarse directamente a partir de los desplazamientos nodales por:

$$\sigma_i = DB(x_i, y_i)u^{(e)} \quad (3.1)$$

donde D es la matriz de elasticidad, $B(x_i, y_i)$ es la matriz deformación – desplazamiento particularizada para las coordenadas del nodo en cuestión y $u^{(e)}$ son los desplazamientos nodales del elemento.

La ec.(3.1) proporciona valores nodales discontinuos de las tensiones entre elementos adyacentes (Figura 3.1). Ciertamente esto es una consecuencia de la formulación empleada en la que los requisitos de continuidad se han exigido a los desplazamientos y no a las tensiones. Un refinamiento progresivo de la malla tiende a eliminar dichas discontinuidades, que obviamente desaparecerían en el límite de una

mallla infinitamente densa. En la práctica es interesante obtener un solo valor de las tensiones en cada nodo, lo que puede alcanzarse alisando los valores nodales.

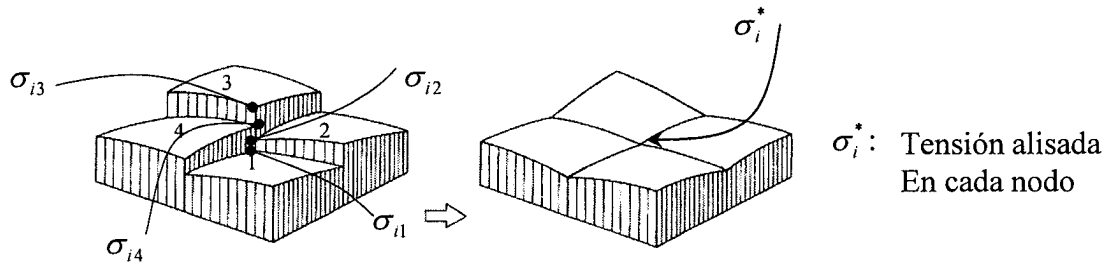


Figura 3.1 Ejemplo de soluciones discontinuas y alisadas de las tensiones nodales.

Se ha mostrado en el capítulo anterior que la colocación de los gradientes y tensiones en algunos puntos particulares es realmente óptima y posee un orden de precisión mayor cuando dichos puntos son superconvergentes. Sin embargo, es necesario disponer de cantidades similarmente precisas en cualquier punto dentro del elemento para otros propósitos de análisis y, en particular, se requieren gradientes y tensiones altamente precisos cuando se ha de evaluar la norma de la energía para el cálculo del estimador de error visto en el capítulo anterior. Para algunos elementos existen errores muy grandes fuera de los puntos superconvergentes y desde hace muchos años se han hecho intentos para obtener un cuadro completo de tensiones que sea más preciso en todo el elemento. En general, los intentos se centran en alisar los valores nodales de las tensiones y de los gradientes a partir de valores en el interior del elemento y después se supone que las tensiones alisadas σ^* se obtienen por una interpolación similar a la utilizada para los desplazamientos [1].

$$\sigma^* = N \sigma_n^* \quad (3.2)$$

Donde σ^* es el vector de tensiones alisadas dentro del elemento, N las funciones de forma y σ_n^* el vector de tensiones nodales alisadas.

Desde los inicios del método de elementos finitos se ha usado un procedimiento donde los valores se colocan en el centro de gravedad del elemento (suponiendo que se han utilizado funciones de forma lineales) y tras ello se calcula el valor medio de las

tensiones en los nodos. Sin embargo, este método no es adecuado. Posteriormente se han desarrollado otros procedimientos, por ejemplo, Hinton y Campbell [2] sugieren un procedimiento en el cual las tensiones en los nodos se calculan extrapolando y alisando de manera global y local los valores en los puntos de Gauss. Estos procedimientos serán descritos a continuación:

III.2 Técnicas de extrapolación

III.2.1 Extrapolación y alisado global de tensiones

En este procedimiento se procede directamente a extrapolar a los nodos los valores de las tensiones en todos los puntos de Gauss. De esta forma se obtiene directamente una solución alisada en toda la malla.

Sean σ las tensiones obtenidas en los puntos de Gauss a partir de los desplazamientos nodales y σ_a el campo de tensiones alisadas en toda la malla (Figura 3.2). Los valores σ_a de dentro de cada elemento se pueden expresar en función de las tensiones $\sigma_i^{(e)}$ en un número de puntos, que para simplificar se supone igual al de nodos del elemento,

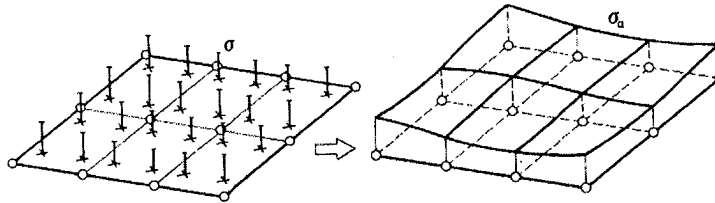


Figura 3.2 Ejemplo de extrapolación y alisado global de las tensiones nodales a partir de los valores en los puntos de Gauss en toda la malla.

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^n N_i \sigma_i^{(e)} = N \sigma_a^{(e)} \quad (3.3)$$

donde

$$N = N_i I_{n\sigma} \quad \text{y} \quad \sigma_a^{(e)} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^{(e)} \\ . \\ \sigma_n^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

En 3.4 $I_{n\sigma}$ es la matriz identidad de dimensión igual al número de componentes de tensiones $N\sigma$ y N_i la función de forma del nodo i .

El error entre la solución alisada y la original en cada punto es

$$e = \sigma_a - \sigma = N\sigma_a^{(e)} - DBu^{(e)} \quad (3.5)$$

donde D es la matriz de elasticidad, B es la matriz deformación – desplazamiento y $u^{(e)}$ son los desplazamientos nodales del elemento.

El problema puede ahora transformarse en uno de mínimos cuadrados, de manera que los valores de las tensiones nodales alisadas minimicen el error medio caracterizado por el siguiente funcional:

$$F = \int \int_A e^2 dA = \int \int_A (\sigma_a - \sigma)^2 dA \quad (3.6)$$

Es decir
$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_i^e} = 0 \Rightarrow M\hat{\sigma}_a = r \quad (3.7)$$

donde $\hat{\sigma}_a$ contiene los valores de las tensiones en todos los nodos de la malla, y

$$M_{ij}^e = \int \int_{A^{(e)}} N_i^T N_j dA \quad (3.8)$$

$$r_i^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} N_i^T DBu^{(e)} dA \quad (3.9)$$

donde i, j se refieren a los nodos del modelo .

La matriz de alisado $M^{(e)}$ y el vector de "fuerzas" $r^{(e)}$ de cada elemento pueden ensamblarse para formar la matriz M y el vector r globales de la misma manera que se hace para armar el sistema de ecuaciones para hallar la solución de MEF (ecuaciones 2.10, 2.11 y 2.12). La solución del sistema $M\hat{\sigma}_a = r$ proporciona directamente los valores de las tensiones en todos los nodos de la malla. Se destaca que si las funciones de alisado N_i tienen continuidad de clase C_0 , el campo de tensiones alisado posee también la misma continuidad. Un inconveniente de esta técnica es que exige la solución de un sistema de ecuaciones de $n \times n$ incógnitas para cada componente de tensión a alisar, siendo n el número total de puntos donde se calculan las tensiones.

III.2.2 Extrapolación y alisado local de tensiones

Si el procedimiento explicado en el apartado anterior se aplica a cada elemento por separado, se obtiene

$$M^{(e)}\hat{\sigma}_a^{(e)} = r^e \quad (3.10)$$

donde $M^{(e)}$ y $r^{(e)}$ vienen dadas por las ec. 3.8 y 3.9, respectivamente.

La ec. 3.10 extrapola los valores de las tensiones de los puntos de Gauss de cada elemento a los nodos del mismo. Si se utiliza en dominios bidimensionales y se usa una extrapolación lineal y una cuadratura de 2×2 puntos en elementos cuadriláteros (Figura 3.3), la ec. 3.10 se convierte para cada componente de tensión en:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} a & b & b & c \\ b & c & a & b \\ c & b & b & a \\ b & a & c & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{EF-I} \\ \sigma_{EF-II} \\ \sigma_{EF-III} \\ \sigma_{EF-IV} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\text{con } a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

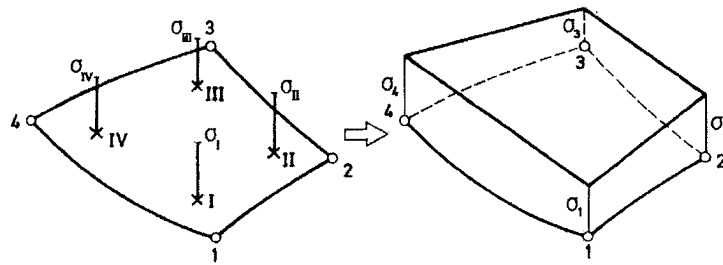


Figura 3.3 Ejemplo de extrapolación local a los nodos de las tensiones en los puntos de Gauss de un elemento.

Esta técnica de extrapolación local será implementada en esta tesis bajo el nombre de “Extrapolación – promediado” porque además se promedia σ_i para todos los elementos que comparten el nodo como se muestra en la Figura 3.1.

III.3 Técnicas recientes

Otras técnicas más recientes han sido desarrolladas las cuales serán descritas a continuación y cuya implementación constituye el objetivo fundamental de este trabajo. Dichas técnicas demuestran que pueden obtenerse resultados mejorados por un "alisado" polinómico de los valores superconvergentes, utilizando técnicas de alisado por zonas.

III.3.1 Superconvergent Patch Recovered - SPR

Como se mostró en el capítulo anterior las tensiones calculadas en ciertos puntos de un elemento poseen la propiedad superconvergente (es decir, convergen a la misma velocidad que los desplazamientos). Este procedimiento propuesto por Zienkiewicz y Zhu [3] utiliza dichos valores para realizar un alisado de los mismos por un polinomio de orden p dentro de una parcela de elementos, para lo cual el número de puntos de colocación puede ser tan grande como el número de parámetros en el polinomio. En la Figura 3.4 se muestran algunas de dichas parcelas, cada una ensamblada alrededor de un nodo de la esquina central. Las cuatro primeras representan elementos cuadriláteros, donde los puntos superconvergentes están bien definidos. Las dos últimas son parcelas de triángulos, donde se utilizan los mejores puntos de colocación, aunque no son superconvergentes. En este trabajo se utilizarán

parcelas de cuadriláteros, pues para topologías bidimensionales es más general ya que con superposición de nodos vértice pueden obtenerse triángulos.

Si se acepta la superconvergencia de σ_{EF} en cierto número de puntos s dentro de cada elemento, entonces es bastante simple calcular σ^* que es superconvergente en todos los puntos dentro del elemento. El procedimiento se ilustra para dos dimensiones en la (Figura 3.4), donde se consideran parcelas interiores (ensamblando todos los elementos a los nodos interiores).

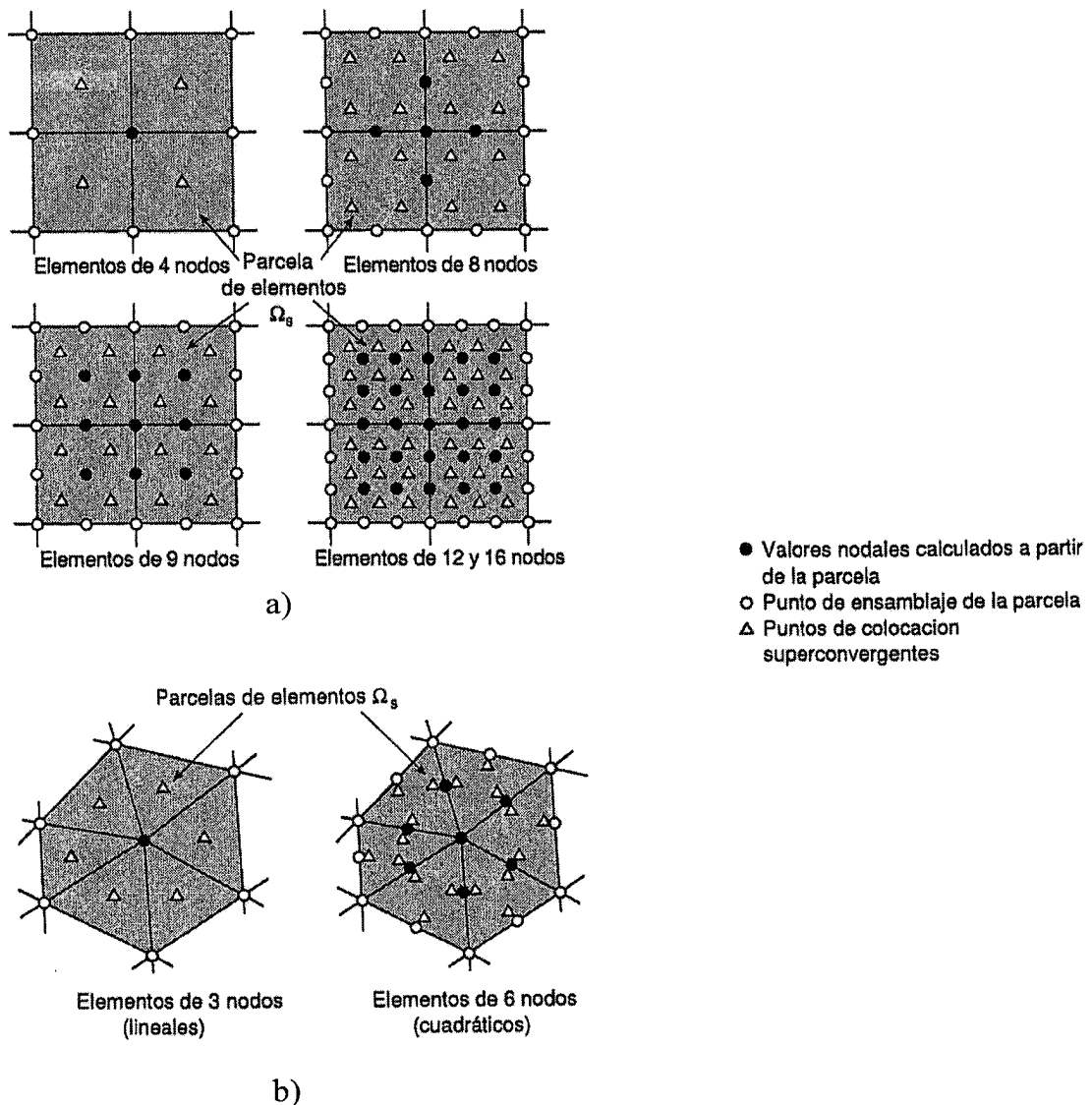


Figura 3.4 Parcelas superconvergentes interiores para: a) elementos cuadriláteros (lineales, cuadráticos y cúbicos) y b) triángulos (lineales y cuadráticos). Tomado de [1] pág. 454.

En un punto superconvergente los valores de σ_{EF} son precisos hasta el orden $p + 1$ (y no p como se cumple en cualquier otro punto). Sin embargo, se puede obtener fácilmente una aproximación mediante un polinomio de grado p , de un orden idéntico al de las funciones de forma utilizadas para los desplazamientos, que tienen precisión superconvergente en todos los puntos, si el polinomio se ajusta a los valores de los puntos superconvergentes mediante mínimos cuadrados.

Se procede para cada componente de σ_i de σ_{EF} como sigue: la solución alisada se escribe como:

$$\sigma_i^* = P\alpha \quad (3.12)$$

donde P es una matriz de términos polinómicos apropiados y α es un vector de coeficientes desconocidos.

Para un problema bidimensional con tres componentes de tensión, P puede ser escrito como

$$P = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\text{donde } P = [1, x, y, \dots, x^p, x^{p-1}y, xy^{p-1}, y^p] \quad \text{y} \quad \alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T \quad (3.14)$$

Específicamente para el caso de cuadriláteros P contendrá tres componentes al igual que el vector α como se muestra en la sección IV.2.2.

Tras ello se minimiza para cada parcela de elementos un total de N_{ptg} puntos,

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^{N_{ptg}} [\sigma_{EF} - P\alpha]^2_{(x_i, y_i)} \quad (3.15)$$

donde σ_{EF} son las tensiones de elementos finitos evaluadas en las coordenadas (x_i, y_i) de los puntos de integración numérica, y N_{ptg} es el número total de puntos de integración numérica de la parcela. Los coeficientes α se obtienen Minimizando $F(\alpha)$

$$\sum_{i=1}^{Nptg} (P^T P)_{(xi,yi)} \alpha = \sum_{i=1}^{Nptg} (P^T \sigma_{EF})_{(xi,yi)} \quad (3.16)$$

que se puede ser resuelto en forma matricial como:

$$\alpha = A^{-1}b \quad (3.17)$$

donde

$$A = \sum_{i=1}^{Nptg} (P^T P)_{(xi,yi)} \quad (3.18)$$

$$b = \sum_{i=1}^{Nptg} (P^T \sigma_{EF})_{(xi,yi)} \quad (3.19)$$

Una vez determinado el vector α , el cálculo de las tensiones alisadas σ_n^* en un nodo es inmediato sustituyendo en la (ecuación 3.12) las coordenadas locales de cada nodo interior de la parcela tomando como origen de la parcela para el cálculo de las coordenadas en la evaluación del polinomio P el nodo en cual se está determinando la tensión alisada. La disponibilidad de σ^* permite determinar los valores superconvergentes de σ_n^* en todos los nodos.

Es importante señalar que en los contornos exteriores y también en interfases donde las tensiones son discontinuas, los valores nodales deben calcularse utilizando las parcelas interiores de la forma que se muestra en la Figura 3.5

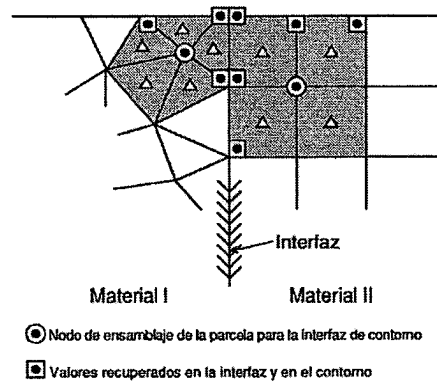


Figura 3.5 Alisado de las tensiones en los contornos o interfases. Tomado de [11] pág. 455.

En la Figura 3.6 se muestra en un ejemplo unidimensional, cómo el alisado por parcelas superconvergentes reproduce exactamente la solución en tensiones (gradientes) de orden $p + 1$ para elementos lineales o cuadráticos. Es evidente que el alisado superconvergente se alcanza ahora en todos los puntos. Ciertamente, la misma figura muestra por qué los valores medios (o la proyección L_2) son menos precisos (particularmente en los contornos).

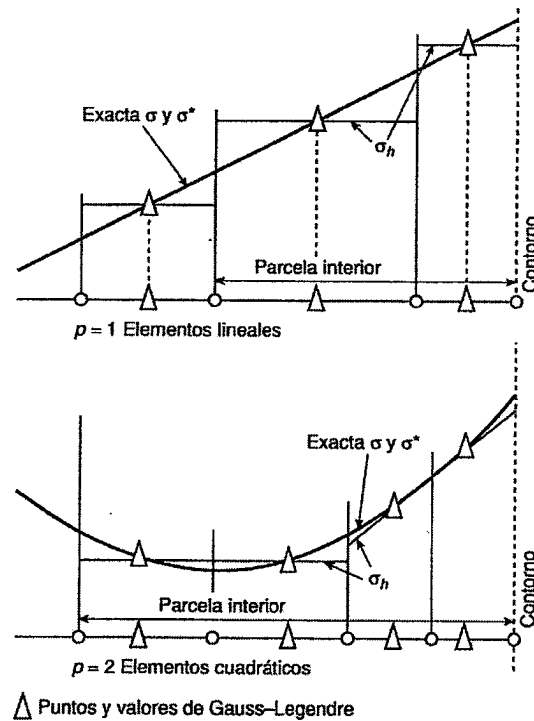


Figura 3.6 Alisado de σ del grado p para elementos lineales ($p=1$) y elementos cuadráticos ($p=2$). Tomado de [11] pág. 456.

III.3.2 Recovery by Equilibrium in Patches - REP

Esta técnica desarrollada por Boroomand y Zienkiewicz [4] satisface las condiciones de equilibrio (en la forma débil), no necesita el conocimiento de los puntos superconvergentes y muestra un comportamiento muy cercano al SPR según sus autores. El costo computacional es sin embargo ligeramente mayor que el del SPR.

De alguna manera la motivación es similar a la de Ladevéze et al.[6] que buscaron establecer (por razones algo diferentes) un campo de tensiones totalmente equilibrado que pudiera reemplazar el de la aproximación de elementos finitos.

Usando el principio de los Trabajos Virtuales en la forma estándar del MEF, la ecuación de equilibrio puede escribirse como:

$$F_{\Omega} = \int_{\Omega} B^T \sigma_{EF} d\Omega - \int_{\Omega} N^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} N^T t d\Gamma = 0 \quad (3.20)$$

donde b y t son las fuerzas de cuerpo y el vector de tracciones, respectivamente, especificados en el dominio Ω y en los bordes a tracción Γ_t ,

Si el campo de tensiones para el caso elástico se expresa como

$$\sigma_{EF} = DBu \quad (3.21)$$

entonces resulta la conocida ecuación de MEF

$$\left(\int_{\Omega} B^T DB d\Omega \right) u - f = Ku - f = 0 \quad (3.22)$$

resolviendo la ecuación anterior para u , se asegura el equilibrio discreto de todos los elementos y entonces todas las parcelas por separado Ω_p estarán en equilibrio, esto se muestra reescribiendo la ecuación anterior para la parcela como:

$$\int_{\Omega_p} B^T DBu d\Omega - \int_{\Omega_p} N^T b d\Omega - \int_{\Gamma_{p,t}} N^T t d\Gamma + F_{\Omega-\Omega_p} = 0 \quad (3.23)$$

donde $F_{\Omega-\Omega_p}$ representa las fuerzas calculadas con la ec. 3.20 para el dominio $\Omega - \Omega_p$ en el exterior del contorno como se muestra en la Figura 3.7.

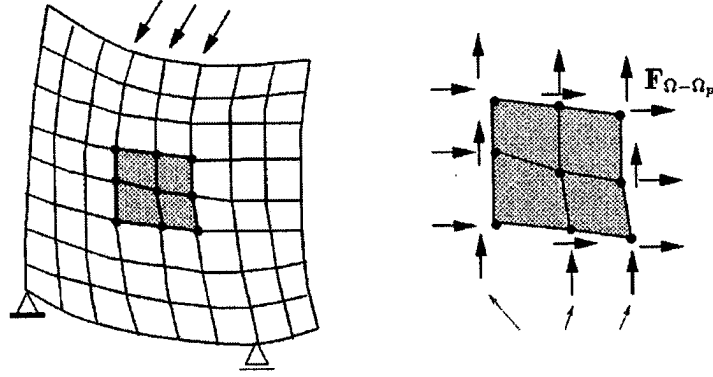


Figura 3.7 Parcela de elementos para el REP [4].

para cualquier parcela se puede escribir

$$\int_{\Omega_p} B^T \sigma_{EF} d\Omega = -F_{\Omega-\Omega_p} - F_{\Omega_p} \quad (3.24)$$

donde F_{Ω_p} representa las fuerzas de cuerpo y tracciones en la frontera como las fuerzas nodales equivalentes

$$F_{\Omega_p} = - \int_{\Omega_p} N^T b d\Omega - \int_{\Gamma_{p_i}} N^T t d\Gamma \quad (3.25)$$

Asumiendo que las fuerzas del lado derecho de la ec. 3.24 son conocidas, la parcela de elementos puede ser considerada como un sistema separado en el cual esas fuerzas actúan como fuerzas nodales. Aplicando el principio del trabajo virtual, se puede escribir para cualquier sistema de esfuerzos σ las ecuaciones de equilibrio discreto como:

$$\int_{\Omega_p} B^T \sigma d\Omega = -F_{\Omega-\Omega_p} - F_{\Omega_p} \quad (3.26)$$

de las ecuaciones 3.24 y 3.26

$$\int_{\Omega_p} B^T \sigma d\Omega = \int_{\Omega_p} B^T \sigma_{EF} d\Omega \quad (3.27)$$

siendo el segundo termino fácil de evaluar, para el caso elástico resulta:

$$\int_{\Omega_p} B^T \sigma d\Omega = \int_{\Omega_p} B^T D B u d\Omega \quad (3.28)$$

Como se ha mencionado, las tensiones σ que resultan del análisis por elementos finitos (MEF), serán en general discontinuas y se busca reemplazarlas en cada parcela de elementos por un sistema alisado que es suave y continuo. Esto se hace definiendo las tensiones similarmente al SPR por un polinomio de la forma:

$$\sigma^* = P \alpha \quad (3.29)$$

resultando en:

$$\underbrace{\left(\int_{\Omega_p} B^T P d\Omega \right)}_H \alpha = \underbrace{\left(\int_{\Omega_p} B^T D B d\Omega \right)}_{\underbrace{\int_{\Omega_p} B^T \sigma_{EF} d\Omega}_{F_p}} u \quad (3.30)$$

La ec. 3.30 se puede escribir:

$$H \alpha = F_p \quad (3.31)$$

Se puede observar que la ecuación (3.31) puede satisfacerse solo aproximadamente, por lo tanto es necesario minimizar el cuadrado del error (mínimos cuadrados), escribiendo

$$\delta = H \alpha - F_p \quad (3.32)$$

$$e = \delta^T \delta = (H \alpha - F_p)^T (H \alpha - F_p) \quad (3.33)$$

para determinar los coeficientes " α " se impone $\frac{\partial e}{\partial \alpha} = 0$

$$\text{resultando} \quad \alpha = [H^T H]^{-1} H^T F_p \quad (3.34)$$

$$\text{donde} \quad H = \int_{\Omega_p} B^T P d\Omega \quad \text{y} \quad F_p = \int_{\Omega_p} B^T \sigma_{EF} d\Omega$$

Es evidente que si se considera una parcela formada por un elemento solamente, la solución alisada será similar a la obtenida por MEF para σ_{EF} . Por otro lado si se considera todo el dominio como una parcela y asumiendo un polinomio de grado muy alto, el coste de cálculo puede ser superior que para la solución estándar de MEF.

III.3.3 Superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint - LP

En esta técnica denominada LP por sus desarrolladores Lee y Park [5], el funcional de mínimos cuadrados discretos de la técnica SPR (ecuación 3.15) es aumentado con una ecuación que representa el equilibrio residual. En ésta técnica la ecuación de equilibrio se expresa en la forma del trabajo virtual tal que el equilibrio residual puede ser obtenido para una parcela local de elementos con forma geométrica arbitraria. Finalmente, esta ecuación de equilibrio representa la misma utilizada en el REP, por lo cual esta técnica puede considerarse una combinación de la SPR y REP.

Como en el caso del SPR, ésta técnica de alisado utiliza un ensamblaje de parcelas de elementos y los valores de tensiones en los puntos superconvergentes. Cada parcela local de elementos se define como una unión de elementos alrededor del nodo vértice como se muestra en la Figura 3.4.

Se asume que las tensiones alisadas sobre una parcela local puede se escrita similarmente al SPR y REP en forma de una función polinómica de cierto orden P como en la ecuación 3.29:

$$\sigma^* = P\alpha \quad (3.35)$$

donde P es una matriz de términos polinómicos apropiados y α es un vector de coeficientes desconocidos definidos de manera similar al SPR.

El vector de coeficientes desconocidos α puede ser determinado por un método de mínimos cuadrados usando el error en tensiones en los puntos superconvergentes y la ecuación de equilibrio residual. Primero el campo de tensiones asumido en la parcela σ^* es comparado

con las tensiones del elementos finitos σ_{EF} en los puntos superconvergentes de la parcela. Esto da un error e_i definido en esos puntos discretos como:

$$e_i = \sigma^*(x_i, y_i) - \sigma_{EF}(x_i, y_i) = P(x_i, y_i)\alpha - \sigma_{EF}(x_i, y_i) \quad (3.36)$$

donde (x_i, y_i) son las coordenadas de los puntos utilizados.

En general, la matriz de tensiones sobre la parcela σ^* no satisface la ecuación de equilibrio. Para evaluar el desbalance de equilibrio de σ^* , se puede considerar un sólido en equilibrio expresado en forma de trabajo virtual como:

$$\delta\Pi = \int_V \delta\varepsilon^T \sigma dV - \int_S \delta u^T T dS - \int_V \delta u^T b dV = 0 \quad (3.37)$$

donde δu es el vector de desplazamientos virtuales, $\delta\varepsilon$ es el vector de deformaciones virtuales, b es el vector de fuerzas de cuerpo, T es el vector de tracciones, V es el volumen, y S la superficie de borde. Reemplazando σ en la ec. 3.37 por σ^* , el equilibrio residual puede ser calculado de la siguiente expresión definida sobre la parcela como:

$$\delta\Pi_{RESIDUAL} = \int_{Vp} \delta\varepsilon^T \sigma^* dV - \int_{Sp} \delta u^T T dS - \int_{Vp} \delta u^T b dV \quad (3.38)$$

donde Vp es el volumen definido sobre la parcela, y Sp es la superficie de borde sobre la parcela.

El desplazamiento virtual δu y la deformación virtual $\delta\varepsilon$ pueden ser expresados como:

$$\delta u = N \delta q_p \quad (3.39)$$

$$\delta\varepsilon = B \delta q_p \quad (3.40)$$

donde N es la matriz de funciones de forma, δq_p es el vector de desplazamientos nodales virtuales y B es la matriz deformación – desplazamiento. Luego, introduciendo las ec. 3.35 y 3.40, el primer término de la ec. 3.38 se expresa como:

$$\int_{V_p} \delta \varepsilon^T \sigma^* dV = \delta q_p^T \left(\underbrace{\int_{V_p} B^T P dV}_{H} \right) \alpha = \delta q_p^T H \alpha \quad (3.41)$$

$$H = \int_{V_p} B^T P dV$$

El segundo y tercer término de la ecuación 3.38 pueden ser escritos como:

$$\int_{S_p} \delta u^T T dS + \int_{V_p} \delta u^T b dV = \delta q_p^T F_p \quad (3.42)$$

donde

$$F_p = \int_{S_p} \tilde{N}^T T dS + \int_{V_p} N^T b dV \quad (3.43)$$

es el vector de fuerzas nodales para la parcela y puede ser obtenido de manera similar al REP ec. 3.30, y $\tilde{N}$ es la matriz de funciones de forma definida a lo largo de la superficie de borde de la parcela.

Sustituyendo las ec. 3.41 y 3.42 en la ec. 3.38 resulta

$$\delta \Pi_{RESIDUAL} = \delta q_p^T (H \alpha - F_p) = \delta q_p^T R_{cq} \quad (3.44)$$

Donde la ecuación de equilibrio residual se define como

$$R_{cq} = H \alpha - F_p \quad (3.45)$$

Para determinar el vector de coeficientes desconocidos las tensiones residuales e_i definidas en cada punto y la ecuación de equilibrio residual R_{cq} se usan en forma de funcional de mínimos cuadrados $F(\alpha)$ definido como:

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &= \sum_{i=1}^n e_i^T e_i + \beta R_{cq}^T R_{cq} \\
&= \sum_{i=1}^n (P\alpha - \sigma_{EF})^T (P\alpha - \sigma_{EF}) + \beta (H\alpha - F_p)^T (H\alpha - F_p)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

donde n es el número total de puntos sobre la parcela (Nptg elemento x Nelementos parcela) y β es el parámetro de penalización. Cuando β es cero, $F(\alpha)$ se reduce al funcional del SPR. El segundo término, el equilibrio residual introducido aquí con un factor de penalización permite incorporar la influencia del REP en esta técnica.

El coeficiente α se determina por la minimización del funcional $F(\alpha)$ con respecto a α :

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \tag{3.47}$$

Esta condición de minimización da la siguiente ecuación

$$\left(\sum_{i=1}^n P^T P + \beta H^T H \right) \alpha = \sum_{i=1}^n P^T \sigma_{EF} + \beta H^T F_p \tag{3.48}$$

Si se hace

$$A = \sum_{i=1}^n (P^T P)_{(xi,yi)} \quad \text{y} \quad b = \sum_{i=1}^n (P^T \sigma_{EF})_{(xi,yi)} \tag{3.49}$$

Entonces

$$(A + \beta H^T H) \alpha = (b + \beta H^T F_p) \tag{3.50}$$

Resultando

$$\alpha = [A + \beta H^T H]^{-1} \cdot (b + \beta H^T F_p) \tag{3.51}$$

Generalmente el parámetro de penalidad β es tomado igual a 1 para considerar el aporte del equilibrio (REP) al polinomio de alisado.

Las tensiones nodales de cada parcela se pueden alisar posteriormente usando la ec. 3.35 siguiendo el mismo procedimiento del SPR. Las tensiones en un nodo perteneciente a un borde del dominio estructural pueden ser determinadas de las parcelas que incluyen el nodo de borde.

III.4 Referencias

- [1] Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L., “El Método de los Elementos Finitos”, Quinta Edición, Cimne, (2004).
- [2] Hinton, E., y Campbell, J., “Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol .8, pp. 461-480, (1974).
- [3] Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z., “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part I: The recovery technique”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol .33, pp. 1331-1364, (1992).
- [4] Boroomand, B. y Zienkiewicz, O.C., “Recovery by equilibrium in patches (REP)”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, 137-164 (1997).
- [5] Lee, T., Park, H.C. y Lee, S.W., “A superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, 1139-1160 (1997).
- [6] Ladevéze, P., Leguillon, D., “Error estimate procedure in the finite element method and applications”, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 20, 485-509 (1983).

CAPÍTULO IV

IMPLEMENTACIÓN

En el presente capítulo se detalla la implementación de las técnicas de alisado de tensiones, para lo cual es necesario disponer de la solución de elementos finitos, específicamente es necesario conocer en los Puntos de Gauss o de integración numérica las coordenadas en el sistema de referencia, los valores de tensión y matrices de deformación. Se detalla además el procedimiento usado para la obtención de estos valores.

Se presentan los algoritmos usados en el programa de resolución de modelos bidimensionales por medio del método de elementos finitos y posteriormente se muestran las subrutinas para cada técnica de alisado de tensiones implementada. La implementación se lleva a cabo particularizando los algoritmos y subrutinas para el elemento bidimensional cuadrilátero de 4 nodos con integración en 2×2 Puntos de Gauss.

El lenguaje de programación utilizado es MATLAB® dadas sus posibilidades con funciones predefinidas para operaciones con matrices y de visualización gráfica. Adicionalmente se utiliza el programa comercial de elementos finitos ANSYS® con la finalidad de construir las mallas de cada modelo y realizar un refinamiento uniforme de forma automática.

IV.1 Programa de elementos finitos

El programa utilizado para la resolución del problema por el método de los elementos finitos fue el elaborado en Vergara [1] en MATLAB® para elementos bidimensionales del tipo cuadrilátero lineal de 4 nodos. En la Fig. 4.1 se presenta el algoritmo de resolución de modelos por el método de elementos finitos utilizado en este trabajo.

PROGRAMA PRINCIPAL DE ELEMENTOS FINITOS

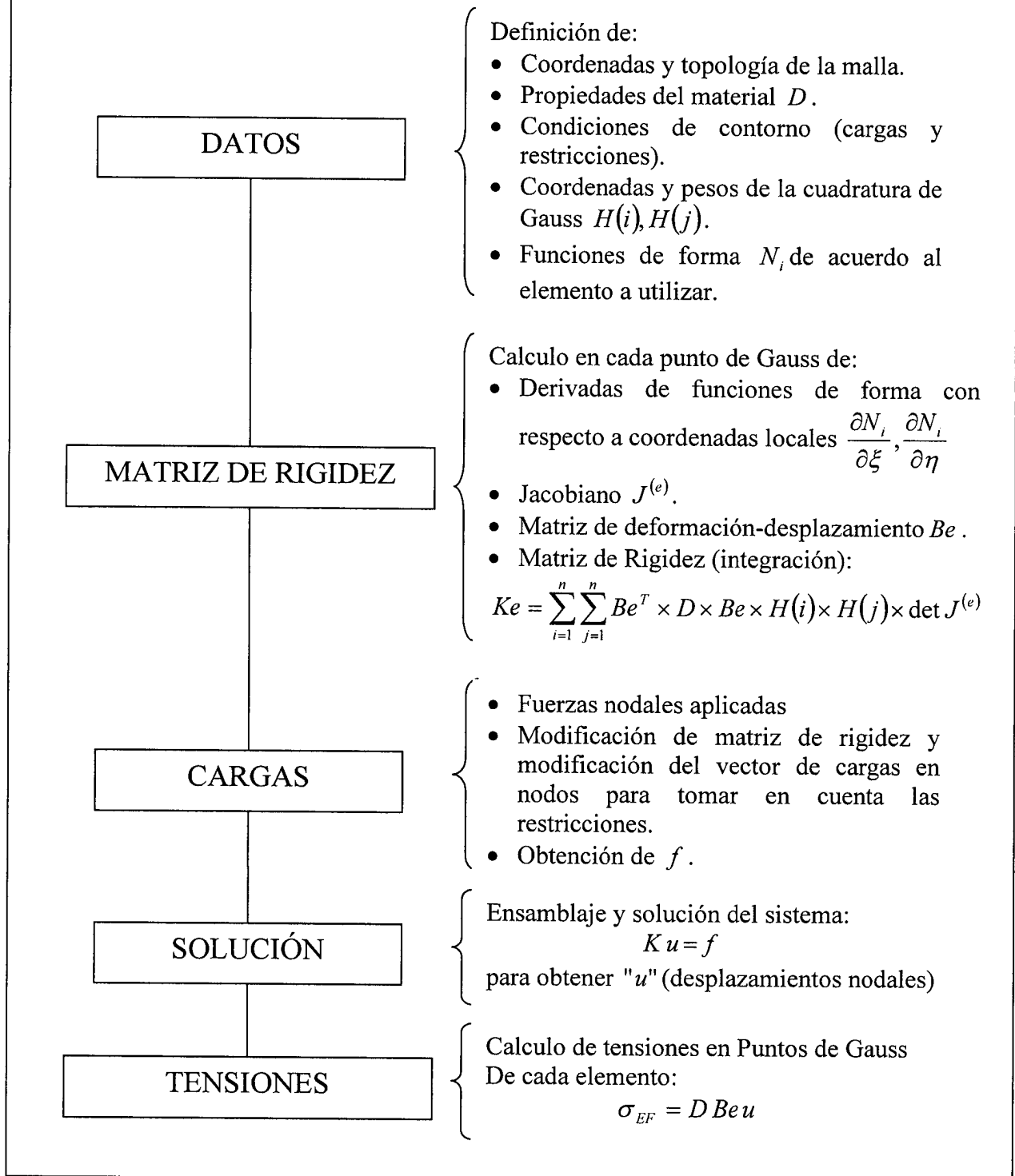


Figura 4.1 Diagrama de flujo programa principal de elementos finitos

El procedimiento anterior es general para la resolución de cualquier problema de dominio bidimensional. A continuación se mostrará la información utilizada en cada una de las subrutinas del programa principal de elementos finitos particularizada para el elemento cuadrilátero lineal de cuatro nodos en estado de tensión plana.

SUBROUTINA DATOS:

Coordenadas de la malla: Información de las coordenadas x e y de cada nodo, estructurada con "N" filas correspondientes al número de nodos y dos columnas, la primera con la coordenada x y la segunda con la coordenada y .

Topología de la malla: Información con los nodos que componen cada elemento, estructurada con "Nel" filas correspondientes al número de elementos y cuatro columnas, correspondientes al los nodos que componen el elemento.

Propiedades del material: Definición de matriz de constantes elásticas D para el caso de tensión plana.

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^2}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

donde E es el módulo de elasticidad y ν el coeficiente de Poisson.

Cargas: Definición de lados cargados para calcular fuerzas concentradas en los nodos.

Restricciones: Definición de nodos restringidos (desplazamiento nulo).

Coordenadas y pesos de la cuadratura de Gauss: Para el elemento bidimensional cuadrilátero de cuatro nodos y orden de integración 2×2 se tiene:

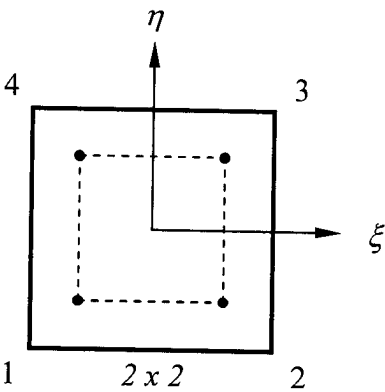
Puntos de integración en el cuadrilátero	Número de Ptg	Posición $\pm \xi, \pm \eta$	Pesos H
 The diagram shows a square element with nodes labeled 1 (bottom-left), 2 (bottom-right), 3 (top-right), and 4 (top-left). Inside the square, there is a dashed rectangle representing the integration domain, with a 2x2 grid of integration points marked by dots. The horizontal axis is labeled ξ and the vertical axis is labeled η.	2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1

Tabla 4.1 Coordenadas y Pesos para integración cuadrilátero

Funciones de Forma: Para el elemento bidimensional cuadrilátero de cuatro nodos se tienen cuatro funciones de forma (una para cada nodo) definidas de la siguiente manera:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

SUBROUTINA MATRIZ DE RIGIDEZ:

Sobre cada punto de Gauss del elemento se calcula lo siguiente:

Derivadas de funciones de forma con respecto a coordenadas locales: $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$

$$\partial NI = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}$$

Determinación del Jacobiano: $J^{(e)}$

$$J^{(e)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Para el caso de elementos de 4 nodos

$$J^{(e)}_{(2 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\text{Calculadas en el paso anterior}} \underbrace{\begin{bmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \\ x3 & y3 \\ x4 & y4 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas globales nodos(e)}}_{(4 \times 2)}$$

$$J^{(e)} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Determinación de la matriz de deformación - desplazamiento: Be

$$Be_{(3 \times 8)} = A_{(3 \times 4)} \times \partial Ng_{(4 \times 8)}$$

$$Be = \frac{1}{\det J} \underbrace{\begin{bmatrix} J(2,2) & -J(1,2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J(2,1) & J(1,1) \\ -J(2,1) & J(1,1) & J(2,2) & -J(1,2) \end{bmatrix}}_A_{(3 \times 4)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\partial Ng}_{(4 \times 8)}$$

$$Be = \begin{bmatrix} Be_{11} & 0 & Be_{13} & 0 & Be_{15} & 0 & Be_{17} & 0 \\ 0 & Be_{22} & 0 & Be_{24} & 0 & Be_{26} & 0 & Be_{28} \\ Be_{31} & Be_{32} & Be_{33} & Be_{34} & Be_{35} & Be_{36} & Be_{37} & Be_{38} \end{bmatrix}_{(3 \times 8)}$$

F.F. 1 F.F. 2 F.F. 3 F.F. 4

Cálculo de la matriz de Rigidez (Integración): Ke

$$Ke = Ke - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Be^T \times D \times Be \times H(i) \times H(j) \times \det J^{(e)}$$

$$Ke = \begin{bmatrix} Be_{11} & 0 & Be_{31} \\ 0 & Be_{22} & Be_{32} \\ Be_{13} & 0 & Be_{33} \\ 0 & Be_{24} & Be_{34} \\ Be_{15} & 0 & Be_{35} \\ 0 & Be_{26} & Be_{36} \\ Be_{17} & 0 & Be_{37} \\ 0 & Be_{28} & Be_{38} \end{bmatrix}_{(8 \times 3)} \begin{bmatrix} DBe_{11} & DBe_{12} & DBe_{13} & DBe_{14} & DBe_{15} & DBe_{16} & DBe_{17} & DBe_{18} \\ DBe_{21} & DBe_{22} & DBe_{23} & DBe_{24} & DBe_{25} & DBe_{26} & DBe_{27} & DBe_{28} \\ DBe_{31} & DBe_{32} & DBe_{33} & DBe_{34} & DBe_{35} & DBe_{36} & DBe_{37} & DBe_{38} \end{bmatrix}_{(3 \times 8)} H(i)H(j) \det J$$

Para cada punto de integración se van sumando, luego de evaluar en todos los puntos de integración se obtiene la Ke del elemento.

$$Ke = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{bmatrix}_{(8 \times 8)}$$

Luego de obtener la matriz de rigidez de cada elemento se ensamblan para obtener la matriz de rigidez global del modelo.

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{1,2N} \\ K_{2,1} & K_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{2N,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{2N,2N} \end{bmatrix}_{(2N \times 2N)}$$

Donde N es el número de nodos del modelo

SUBROUTINA CARGAS:

En esta subrutina se calculan las cargas aplicadas en los nodos a partir de la introducción de las mismas en la subrutina "DATOS".

Posteriormente se realizan modificaciones a la matriz de rigidez y al vector de cargas en los nodos para tomar en cuenta las cargas aplicadas sobre cada grado de libertad (gdl) del modelo y las restricciones impuestas, obteniéndose el vector de cargas global del modelo:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_{2N,1} \end{bmatrix}_{(2N \times 1)}$$

SUBROUTINA SOLUCIÓN:

En esta subrutina se calcula la solución de Elementos Finitos resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$Ku = f$$

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & . & . & . & . & . & K_{1,2N} \\ K_{2,1} & K_{22} & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ K_{2N,1} & . & . & . & . & . & . & K_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_{2N} \end{bmatrix}$$

En el programa se obtiene de la operación: $u = K^{-1}f$ que realiza MATLAB® directamente.

Los valores de u obtenidos son los desplazamientos de cada nodo del modelo en las direcciones de cada gdl, para el modelo estudiado en este trabajo se obtienen dos desplazamientos por nodo en el sistema de referencia global x e y .

SUBROUTINA TENSIONES:

En esta subrutina se calculan las tensiones en cada punto de Gauss de cada elemento de modelo mediante: $\sigma_{EF}^{(e)} = D B e u^{(e)}$, para lo cual se procede de la manera siguiente:

Extraer del vector solución los desplazamientos nodales del elemento correspondiente (4 nodos x 2 gdl = 8 valores).

$$u^{(e)} = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix}_{(8 \times 1)}$$

Multiplicar la matriz D correspondiente a las constantes elásticas por la matriz de deformación del elemento correspondiente para obtener:

$$DBe = \begin{bmatrix} DBe_{11} & DBe_{12} & DBe_{13} & DBe_{14} & DBe_{15} & DBe_{16} & DBe_{17} & DBe_{18} \\ DBe_{21} & DBe_{22} & DBe_{23} & DBe_{24} & DBe_{25} & DBe_{26} & DBe_{27} & DBe_{28} \\ DBe_{31} & DBe_{32} & DBe_{33} & DBe_{34} & DBe_{35} & DBe_{36} & DBe_{37} & DBe_{38} \end{bmatrix}_{(3 \times 8)}$$

Calculo de las tensiones en cada punto de Gauss del elemento mediante:

$$\sigma_{EF}^{(e)} \text{ p1g} = \begin{bmatrix} DBe_{11} & DBe_{12} & DBe_{13} & DBe_{14} & DBe_{15} & DBe_{16} & DBe_{17} & DBe_{18} \\ DBe_{21} & DBe_{22} & DBe_{23} & DBe_{24} & DBe_{25} & DBe_{26} & DBe_{27} & DBe_{28} \\ DBe_{31} & DBe_{32} & DBe_{33} & DBe_{34} & DBe_{35} & DBe_{36} & DBe_{37} & DBe_{38} \end{bmatrix}_{(3 \times 8)} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix}_{(8 \times 1)}$$

$$\sigma_{EF}^{(e)} \text{ p1g} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{(3 \times 1)}$$

Siendo la matriz de tensiones en puntos de Gauss del modelo:

$$\sigma_{EF \text{ ptg}} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} \sigma_{x1} & \sigma_{x2} & \sigma_{x3} & \sigma_{x4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{x(4Nel-3)} & \sigma_{x(4Nel-2)} & \sigma_{x(4Nel-1)} & \sigma_{x(4Nel)} \\ \sigma_{y1} & \sigma_{y2} & \sigma_{y3} & \sigma_{y4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{y(4Nel-3)} & \sigma_{y(4Nel-2)} & \sigma_{y(4Nel-1)} & \sigma_{y(4Nel)} \\ \underbrace{\sigma_{xy1}}_{ptg1} & \underbrace{\sigma_{xy2}}_{ptg2} & \underbrace{\sigma_{xy3}}_{ptg3} & \underbrace{\sigma_{xy4}}_{ptg4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \underbrace{\sigma_{xy(4Nel-3)}}_{ptg1} & \underbrace{\sigma_{xy(4Nel-2)}}_{ptg2} & \underbrace{\sigma_{xy(4Nel-1)}}_{ptg3} & \underbrace{\sigma_{xy(4Nel)}}_{ptg4} \\ \hline \text{elemento 1} & & & & & & & & \text{elemento } Nel & & & \end{array} \right]_{(3x(4Nel))}$$

Disponiendo de las tensiones de Elementos Finitos en cada punto de Gauss, es fácil observar que el campo es discontinuo en toda la malla, la etapa siguiente consiste entonces en realizar un suavizado de tensiones lo cual es uno de los objetivos de este trabajo como se explicó en la sección III.1. Esto se puede realizar mediante distintas técnicas descritas en el capítulo anterior de las cuales se detalla su implementación a continuación

IV.2 Técnicas de alisado de tensiones

El programa utilizado para la implementación de las técnicas fue MATLAB[®] ya que adicionalmente a la justificación dada al principio de este capítulo se disponía ya de la subrutina elaborada por Díaz [2] para la técnica SPR. Los valores de entrada necesarios para cada una de subrutinas se tomaron de programa de elementos finitos descrito en el apartado anterior.

IV.2.1 Extrapolación y alisado local mediante promediado

El desarrollo matemático de la técnica y las ecuaciones a resolver fueron mostradas en la sección III.2.2, a continuación se presenta el algoritmo utilizado y luego se detallan las ecuaciones a resolver que se encuentran programadas en MATLAB[®].

ALGORITMO DEL PROGRAMA DE ALISADO DE TENSIONES MEDIANTE LA TÉCNICA DE EXTRAPOLACIÓN - PROMEDIADO

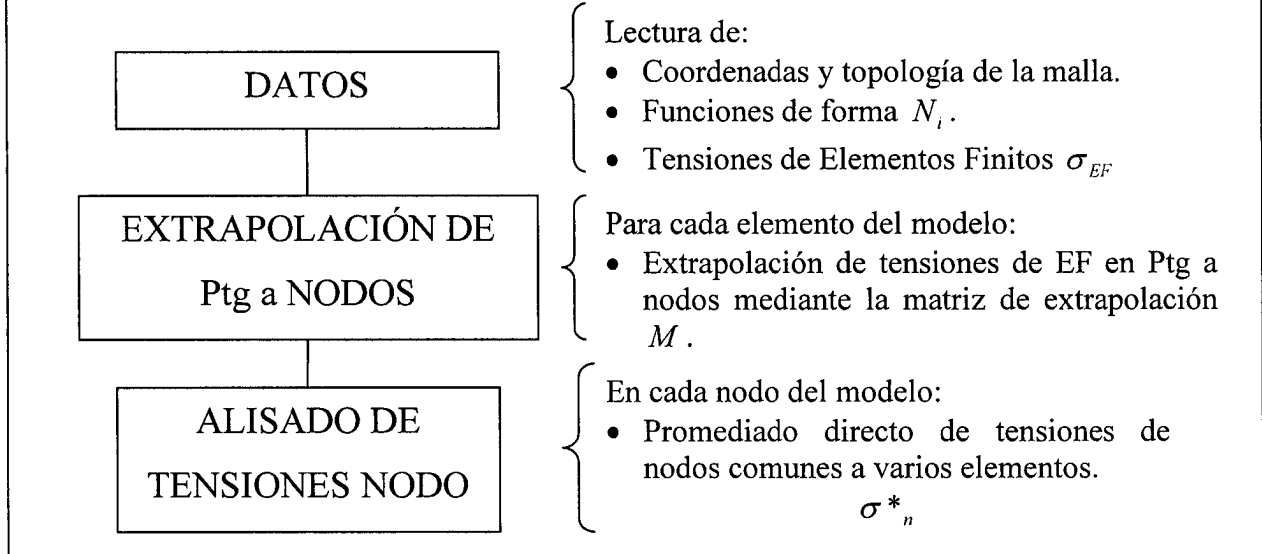


Figura 4.2 Diagrama de flujo programa alisado mediante Extrapolación - Promediado

Extrapolación de Ptg a Nodos (ec. 3.11):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} a & b & b & c \\ b & c & a & b \\ c & b & b & a \\ b & a & c & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{EF-I} \\ \sigma_{EF-II} \\ \sigma_{EF-III} \\ \sigma_{EF-IV} \end{Bmatrix}$$

Promediado directo de tensiones: $\sigma^*_i = \frac{\sum_{e=1}^{N_{ei}} \sigma_i}{N_{ei}}$

Donde N_{ei} es el número de elementos que contienen al nodo i y σ^*_i representa las tensiones promediadas en cada nodo [3].

IV.2.2 Superconvergent Patch Recovered – SPR

El desarrollo matemático de la técnica y las ecuaciones a resolver fueron mostradas en la sección III.3.1, a continuación se presenta el algoritmo utilizado y luego se detallan las matrices a resolver que se encuentran programadas en MATLAB®.

ALGORITMO DEL PROGRAMA DE ALISADO DE TENSIONES

MEDIANTE LA TÉCNICA SPR

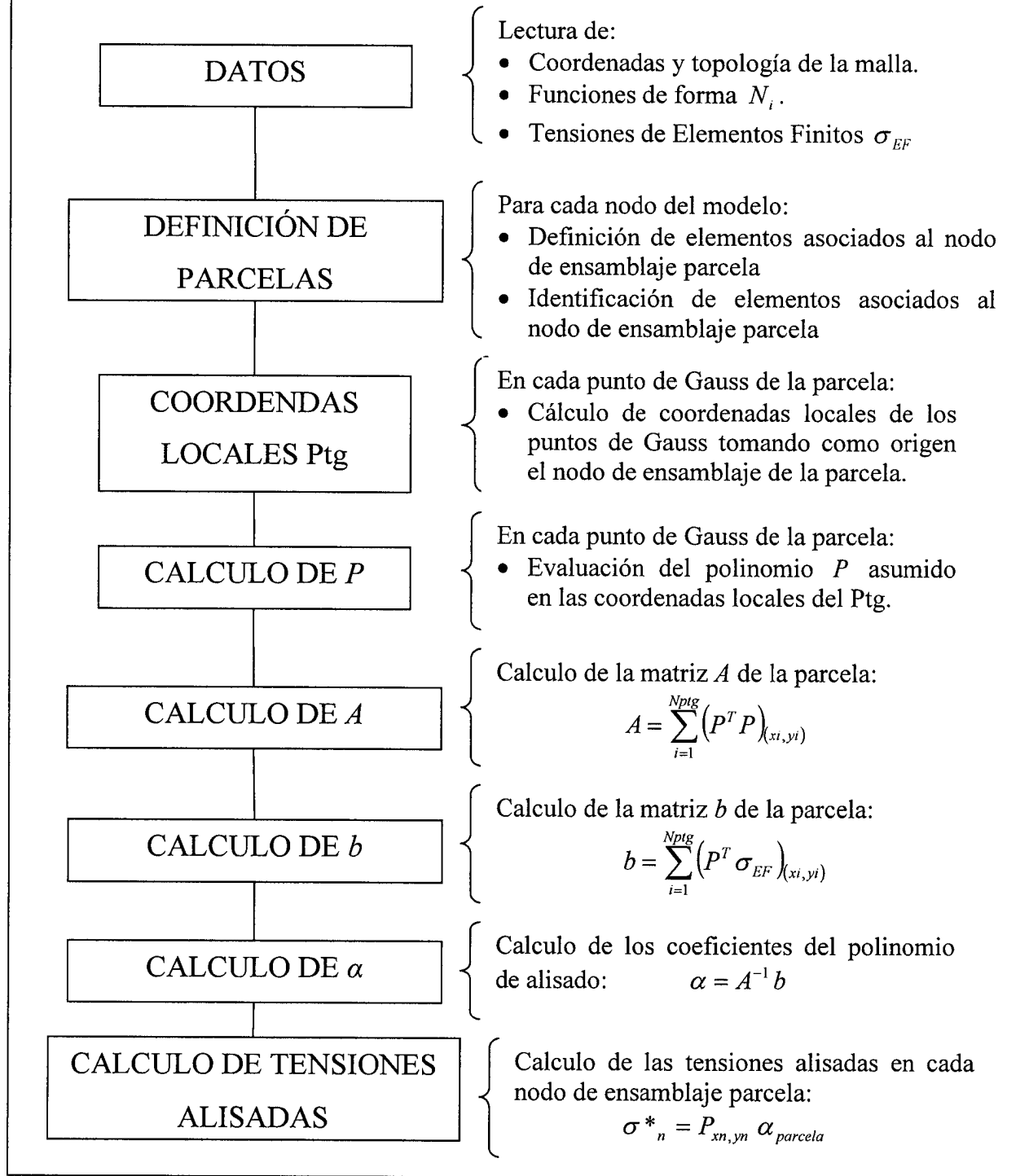


Figura 4.3 Diagrama de flujo programa alisado mediante SPR

Calculo de la Matriz A :

$$A = \sum_{i=1}^{Nptg} (P^T P)_{(x_i, y_i)}$$

Se asume un polinomio lineal de la forma: $P = [1 \quad x \quad y]$

Para la tres componentes de tensión queda:

$$P = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}_{(3 \times 9)}$$

Entonces para el calculo de A se opera:

$$A = \sum_{i=1}^{Nptg} (P^T P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_i & 0 & 0 \\ y_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_i & 0 \\ 0 & y_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_i \\ 0 & 0 & y_i \end{bmatrix}_{(9 \times 3)} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \end{bmatrix}_{(3 \times 9)}$$

Obteniéndose:

$$A = \sum_{i=1}^{Nptg} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_i & x_i^2 & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_i & x_i y_i & y_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & x_i^2 & x_i y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_i & x_i y_i & y_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_i & x_i^2 & x_i y_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_i & x_i y_i & y_i^2 \end{bmatrix}_{(9 \times 9)}$$

Calculo de la Matriz b :

$$b = \sum_{i=1}^{Nptg} (P^T \sigma_{EF})_{(xi,yi)}$$

Usando el mismo polinomio P :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}_{(3 \times 9)}$$

Teniendo disponibles del programa de Elementos Finitos:

$$\sigma_{EF}^{(e)ptg} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{(3 \times 1)}$$

Se opera para obtener b :

$$b = \sum_{i=1}^{Nptg} (P^T \sigma_{EF}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_i & 0 & 0 \\ y_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_i & 0 \\ 0 & y_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_i \\ 0 & 0 & y_i \end{bmatrix}_{(9 \times 3)} \begin{bmatrix} \sigma_{xi} \\ \sigma_{yi} \\ \sigma_{xyi} \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \sum_{i=1}^{Nptg} \begin{bmatrix} \sigma_{xi} \\ x_i \sigma_{xi} \\ y_i \sigma_{xi} \\ \sigma_{yi} \\ x_i \sigma_{yi} \\ y_i \sigma_{yi} \\ \sigma_{xyi} \\ x_i \sigma_{xyi} \\ y_i \sigma_{xyi} \end{bmatrix}_{(9 \times 1)}$$

Calculo del vector α :

$$\alpha = A^{-1} b$$

$$\alpha_{(9 \times 1)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & . & . & . & . \\ A_{21} & A_{22} & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & A_{99} \end{bmatrix}_{(9 \times 9)} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_{91} \end{bmatrix}_{(9 \times 1)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{51} \\ \alpha_{61} \\ \alpha_{71} \\ \alpha_{81} \\ \alpha_{91} \end{bmatrix}_{(9 \times 1)}$$

Calculo de las tensiones alisadas en el nodo ensamblaje parcela σ_n^* :

$$\sigma_n^* = P_{xn,yn} \alpha_{parcela}$$

$$\sigma_n^* = \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_n & y_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}_{(3 \times 9)} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{51} \\ \alpha_{61} \\ \alpha_{71} \\ \alpha_{81} \\ \alpha_{91} \end{bmatrix}_{(9 \times 1)}$$

Si se normalizan las coordenadas de los Ptg con origen en el nodo de ensamblaje de la parcela, los valores de tensión alisada obtenidos son directamente los señalados.

$$\sigma_n^* = \begin{bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \sigma_{xy}^* \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{71} \end{bmatrix}$$

IV.2.3 Recovery by Equilibrium in Patches – REP

El desarrollo matemático de la técnica y las ecuaciones a resolver fueron mostradas en la sección III.3.2, a continuación se presenta el algoritmo utilizado y luego se detallan las matrices a resolver que se encuentran programadas en MATLAB®.

ALGORITMO DEL PROGRAMA DE ALISADO DE TENSIONES MEDIANTE LA TÉCNICA REP

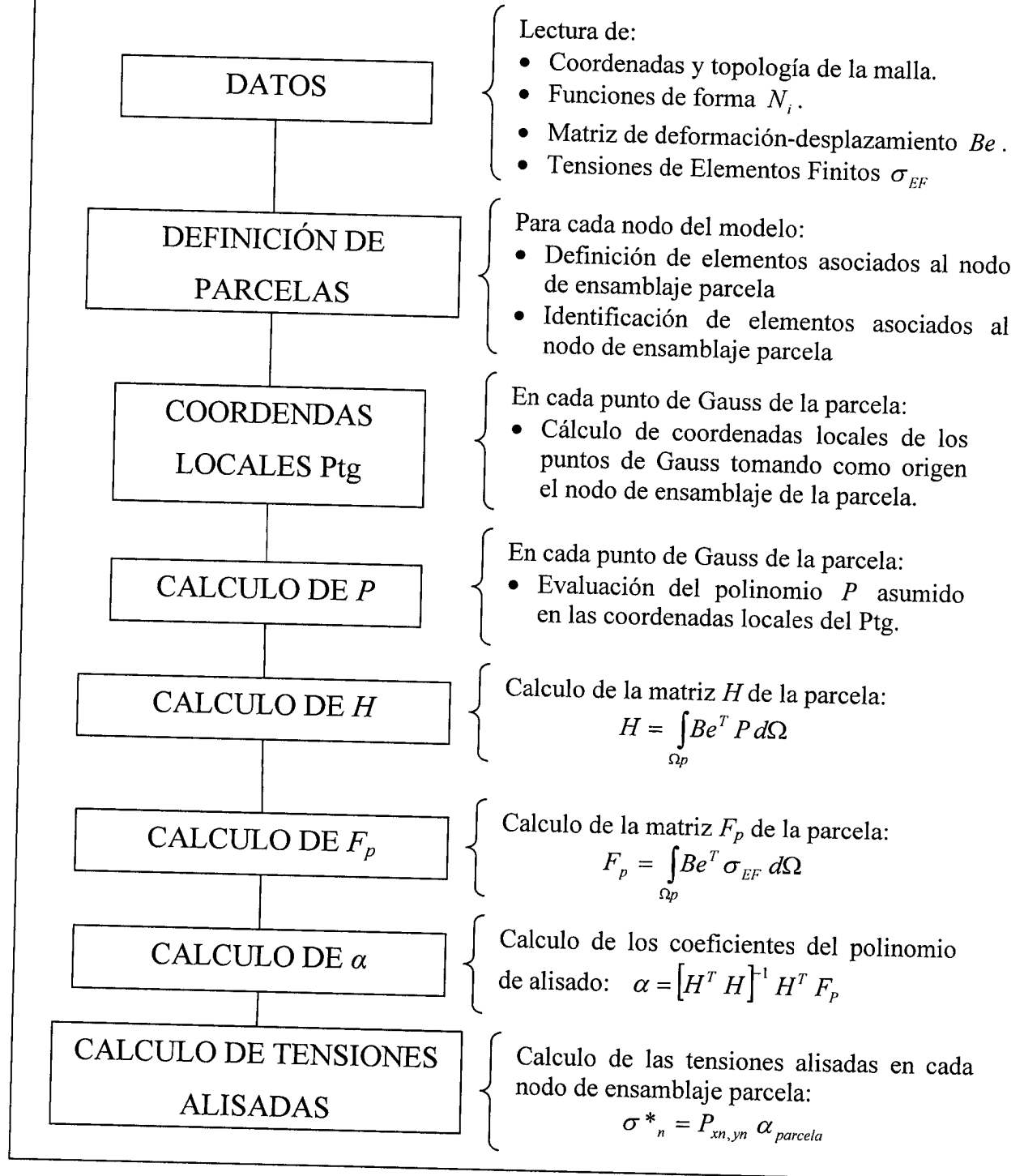


Figura 4.4 Diagrama de flujo programa alisado mediante REP

Calculo de la Matriz H :

$$H = \int_{\Omega p} B e^T P d\Omega$$

Integrando la matriz Be : $B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (B e \times H(i) \times H(j) \det J^{(e)})$

Queda:

$$H = \sum_{k=1}^{Np} (B^T P)_{(x_k, y_k)}$$

Matriz B :

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 & B_{17} & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & B_{24} & 0 & B_{26} & 0 & B_{28} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & B_{37} & B_{38} \end{bmatrix}_{(3 \times 8)}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{31} \\ 0 & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & 0 & B_{33} \\ 0 & B_{24} & B_{34} \\ B_{15} & 0 & B_{35} \\ 0 & B_{26} & B_{36} \\ B_{17} & 0 & B_{37} \\ 0 & B_{28} & B_{38} \end{bmatrix}_{(8 \times 3)}$$

Al igual que el SPR se asume un polinomio lineal de la forma: $P = [1 \quad x \quad y]$

Para la tres componentes de tensión queda:

$$P = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}_{(3 \times 9)}$$

Entonces para el cálculo de H se opera:

$$H = \sum_{k=1}^{Np} \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{31} \\ 0 & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & 0 & B_{33} \\ 0 & B_{24} & B_{34} \\ B_{15} & 0 & B_{35} \\ 0 & B_{26} & B_{36} \\ B_{17} & 0 & B_{37} \\ 0 & B_{28} & B_{38} \end{bmatrix}_{(8 \times 3)} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \end{bmatrix}_{(3 \times 9)}$$

Obteniéndose:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{21} & H_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{89} \end{bmatrix}_{(8 \times 9)}$$

Cálculo del vector F_p :

$$F_p = \int_{\Omega p} B e^T \sigma_{EF} d\Omega$$

Integrando Be

$$F_p = \sum_{k=1}^{Np} (B^T \sigma_{EF})_{(x_k, y_k)}$$

B^T es la misma utilizada para hallar H .

Teniendo disponible del programa de Elementos Finitos:

$$\sigma_{EF}^{(e)} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{(3 \times 1)}$$

Se opera para obtener F_p :

$$F_p = \sum_{k=1}^{Np} \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{31} \\ 0 & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & 0 & B_{33} \\ 0 & B_{24} & B_{34} \\ B_{15} & 0 & B_{35} \\ 0 & B_{26} & B_{36} \\ B_{17} & 0 & B_{37} \\ 0 & B_{28} & B_{38} \end{bmatrix}}_{B^T (8 \times 3)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{x_k} \\ \sigma_{y_k} \\ \sigma_{xy_k} \end{Bmatrix}}_{\sigma_{EF} (3 \times 1)}$$

Obteniédose:

$$F_p = \begin{bmatrix} Fp_{11} \\ Fp_{21} \\ Fp_{31} \\ Fp_{41} \\ Fp_{51} \\ Fp_{61} \\ Fp_{71} \\ Fp_{81} \end{bmatrix}_{(8 \times 1)}$$

Calculo del vector α :

$$\alpha = [H^T H]^{-1} H^T F_p$$

$$[H^T H]_{(9 \times 9)} = H^T_{(9 \times 8)} H_{(8 \times 9)}$$

$$[H^T H]^{-1}_{(9 \times 9)} = [[H^T H]_{(9 \times 9)}]^{-1}$$

$$[H^T H]^{-1} H^T_{(9 \times 8)} = [[H^T H]^{-1}_{(9 \times 9)}] H^T_{(9 \times 8)}$$

$$\alpha_{(9 \times 1)} = [[H^T H]^{-1} H^T]_{(9 \times 8)} Fp_{(8 \times 1)}$$

Obteniéndose:

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{51} \\ \alpha_{61} \\ \alpha_{71} \\ \alpha_{81} \\ \alpha_{91} \end{Bmatrix}_{(9 \times 1)}$$

Calculo de las tensiones alisadas en el nodo ensamblaje parcela σ^*_n :

$$\sigma^*_n = P_{xn,yn} \alpha_{parcela}$$

$$\sigma^*_n = \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_n & y_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}_{(3 \times 9)} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{51} \\ \alpha_{61} \\ \alpha_{71} \\ \alpha_{81} \\ \alpha_{91} \end{bmatrix}_{(9 \times 1)}$$

Si se normalizan las coordenadas de los Ptg con origen en el nodo de ensamblaje de la parcela, los valores de tensión alisada obtenidos son directamente los señalados.

$$\sigma^*_n = \begin{bmatrix} \sigma^*_x \\ \sigma^*_y \\ \sigma^*_{xy} \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{71} \end{bmatrix}$$

IV.2.4 Superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint – LP

El desarrollo matemático de la técnica y las ecuaciones a resolver fueron mostradas en la sección III.3.3, como se menciona en esa sección, la técnica LP puede considerarse una combinación de la SPR y REP.

El algoritmo utilizado y las matrices a resolver que se encuentran programadas en MATLAB® son idénticas a las utilizadas en el SPR y el REP variando únicamente la determinación de los coeficientes del polinomio de alisado α . Como se muestra a continuación.

$$\alpha = [A + \beta H^T H]^{-1} \cdot (b + \beta H^T F_p)$$

Obteniéndose un vector de la misma dimensión a los anteriores:

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{51} \\ \alpha_{61} \\ \alpha_{71} \\ \alpha_{81} \\ \alpha_{91} \end{Bmatrix}_{(9 \times 1)}$$

El cálculo de las tensiones alisadas también es análogo:

$$\sigma^*_n = \begin{Bmatrix} \sigma^*_x \\ \sigma^*_y \\ \sigma^*_{xy} \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{71} \end{Bmatrix}$$

IV.3 Referencias

- [1] Vergara, M., “Implementación del Método de Elementos Finitos en modelo de placa con orificio circular”, Informe final de la asignatura Elementos Finitos, Universidad Politécnica de Valencia España, (1999).

- [2] Díaz, M., “Determinación del error a posteriori en placa con orificio circular”, Informe técnico departamento de tecnología y diseño Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería mecánica, (2004).

- [3] Vergara, M., “H-Adaptatividad en elementos finitos con refinamiento por subdivisión”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia España, (2002).

CAPÍTULO V

APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS

La aplicación de las técnicas de alisado se realiza a dos modelos con la finalidad de comparar y validar las técnicas implementadas, el primero es una placa a tracción con orificio circular y el segundo una viga en cantilever con carga distribuida.

V.1 Modelo de placa con orificio circular

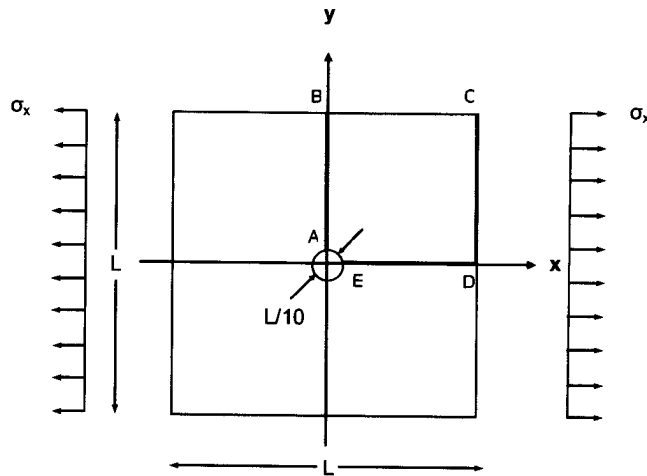
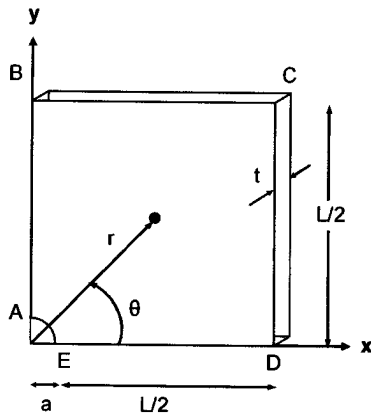


Figura 5.1 Placa a tracción con orificio circular

Dada la simetría geométrica y de carga, para la solución de este problema se puede considerar una cuarta parte.



$L/2$: 10 cm
 a : 1 cm
 t : 1 cm
 E : $2,0E+06$ kg/cm²
 ν : 0,3
 σ_x : 1.000 kg/cm²

Figura 5.2 Características del modelo a analizar

V.1.1 Descripción del modelo

La placa se modeló con el programa de MEF realizado en MATLAB® mencionado anteriormente, utilizando elementos bidimensionales cuadriláteros lineales con integración de 2 x 2. Adicionalmente se modeló en ANSYS® para comparar la información obtenida de matriz de deformación, matriz de rigidez, desplazamientos, esfuerzos en puntos de Gauss y esfuerzos en nodos.

Se realizaron tres mallas para estudiar la convergencia de las tensiones obtenidas por cada técnica y compararlas entre ellas.

Las parcelas utilizadas para la aplicación de SPR, REP, LP son de cuatro elementos tanto para los nodos interiores como para los de borde y de esquina, esto es una recomendación de los desarrolladores de las técnicas ya que para nodos de borde que pertenecen a dos elementos y los de esquina que pertenecen a un solo elemento la información obtenida de tan pocos elementos no es suficiente para que las técnicas den buenos resultados.

El modelo para la malla 1 es el siguiente:

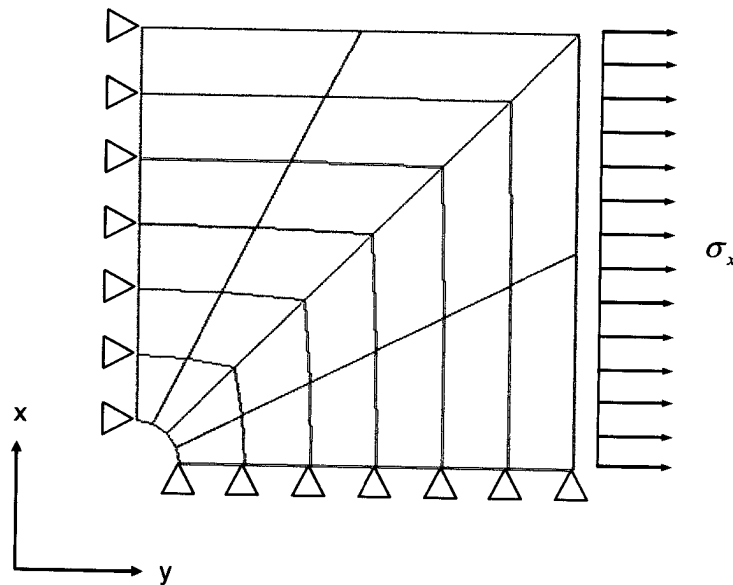


Figura 5.3 Cargas y Restricciones Placa con orificio circular

La solución exacta del modelo considerado para realizar las comparaciones se toma de un modelo analizado con una malla altamente refinada del cual se extraen las tensiones nodales en determinados puntos y la energía de deformación elástica usada en el cálculo del estimador de error.

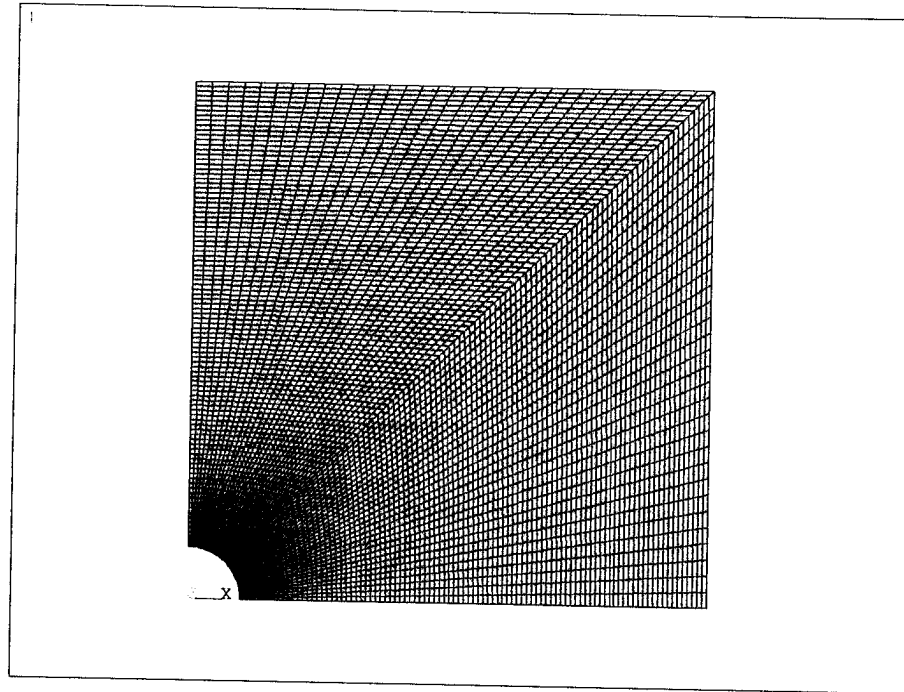


Figura 5.4 Placa con Malla de 6144 Elementos

TENSIONES NODALES PARA SOLUCIÓN EXACTA

MODELO: Placa a tracción con orificio circular
 MALLA: Altamente Refinada (6144 Elementos)

ID NODO	NODO MODELO	COORDENADAS		TENSIÓN (Kg/Cm ²)		
		x	y	Sx	Sy	Sxy
A	162	0,000	1,000	3.102,50	116,47	-32,72
B	289	0,707	0,707	759,11	324,30	-478,68
C	2321	1,921	3,949	1.076,00	-7,28	27,55
D	2305	3,804	3,804	1.049,60	-40,70	-18,11

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN: 25,6047

V.1.2 Resultados obtenidos

De los análisis realizados al modelo se muestra la deformación de acuerdo a las cargas y restricciones impuestas para la malla 1.

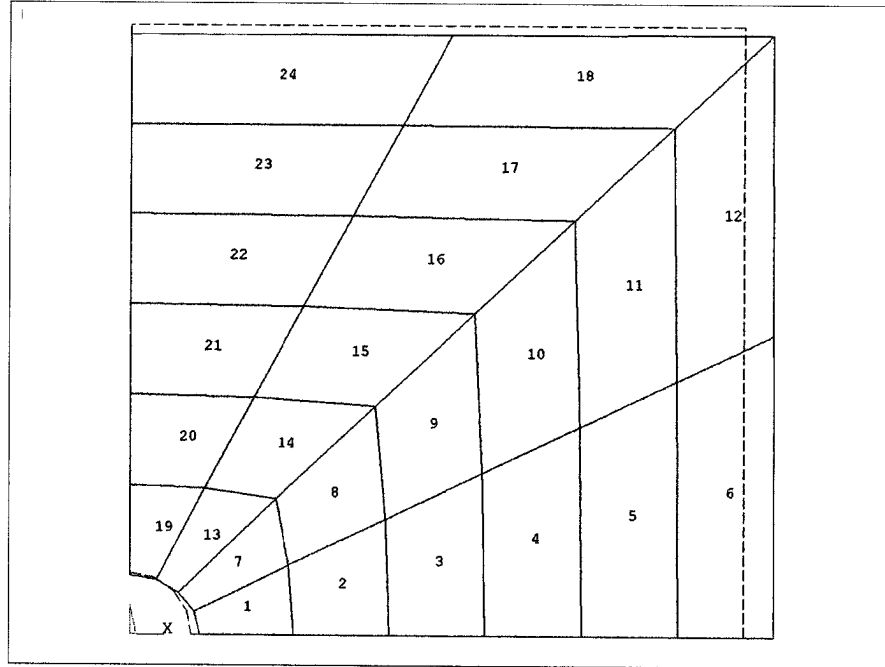


Figura 5.5 Deformada modelo de placa

En las figuras que siguen se presentan los resultados de efectividad y convergencia para cada una de las técnicas tanto en forma tabulada como gráficamente, los valores mostrados fueron calculados con las fórmulas presentadas en el capítulo II con la información obtenida de la corrida de los programas codificados en MATLAB[®]. Seguidamente a éstos se presenta la comparación de las tensiones calculadas en distintos puntos del modelo que se obtienen directamente de las corridas de los programas codificados en MATLAB[®].

MODELO: Placa a Tracción con Orificio Circular

Técnica	Malla	gdl	$\ u_{ex}\ ^2$	$\ u_{EF}\ ^2$	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
Extrapolación - Promediado	1	70	51,2094	50,9540	0,4976	0,2424	0,4872
	2	234	51,2094	51,0930	0,3292	0,2071	0,6291
	3	850	51,2094	51,1690	0,1805	0,1490	0,8254
SPR	1	70	51,2094	50,9540	0,4976	0,3333	0,6699
	2	234	51,2094	51,0930	0,3292	0,2520	0,7654
	3	850	51,2094	51,1690	0,1805	0,1693	0,9379
REP	1	70	51,2094	50,9540	0,4976	0,3639	0,7313
	2	234	51,2094	51,0930	0,3292	0,2561	0,7777
	3	850	51,2094	51,1690	0,1805	0,1691	0,9366
LP	1	70	51,2094	50,9540	0,4976	0,3369	0,6770
	2	234	51,2094	51,0930	0,3292	0,2518	0,7648
	3	850	51,2094	51,1690	0,1805	0,1693	0,9375

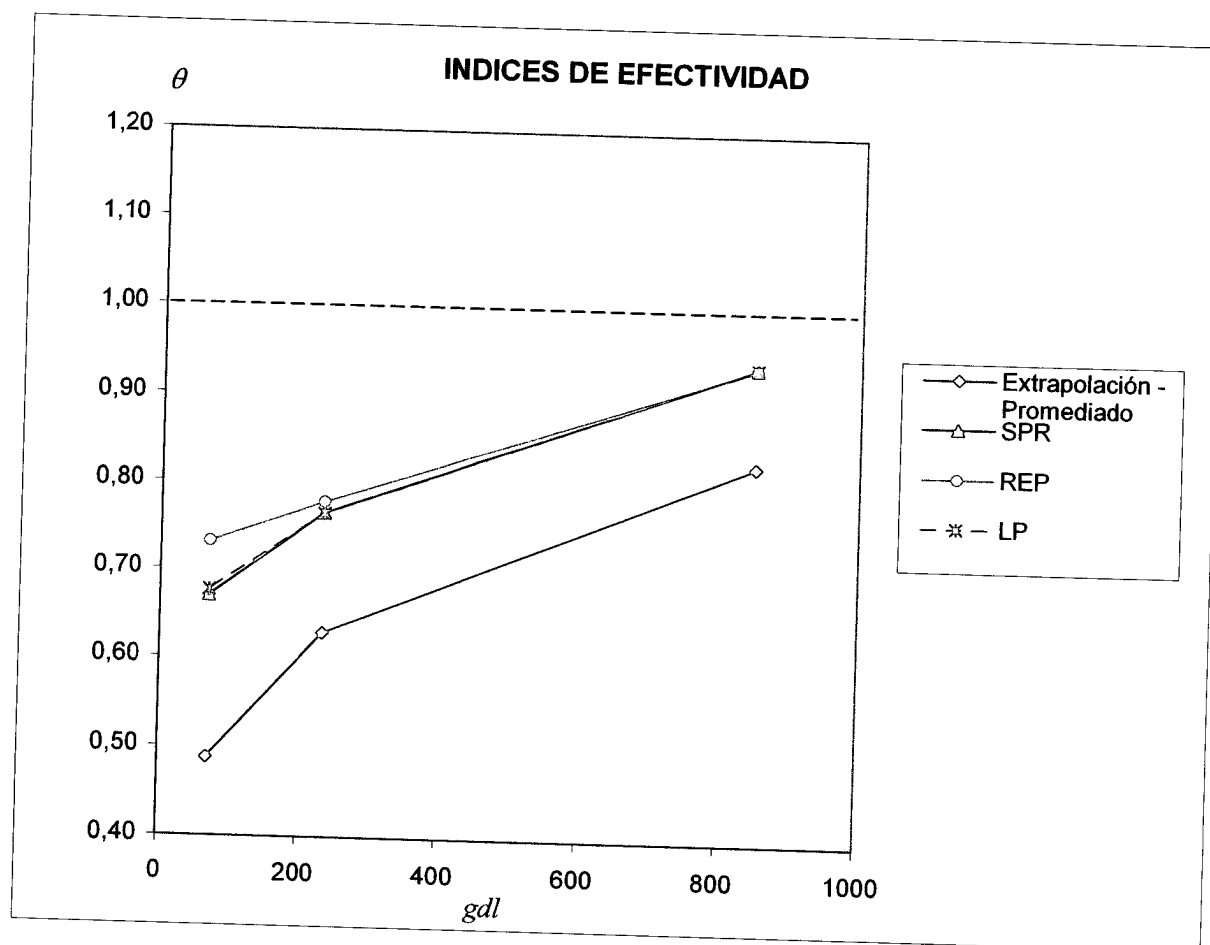
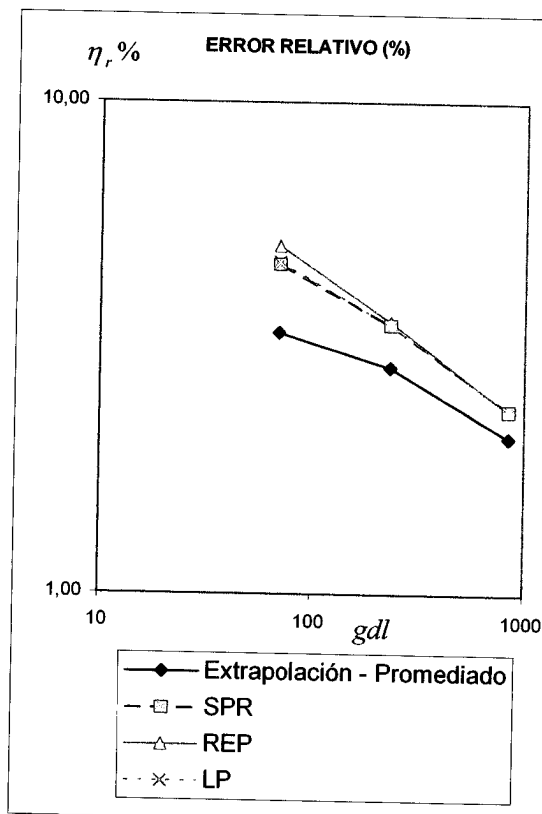


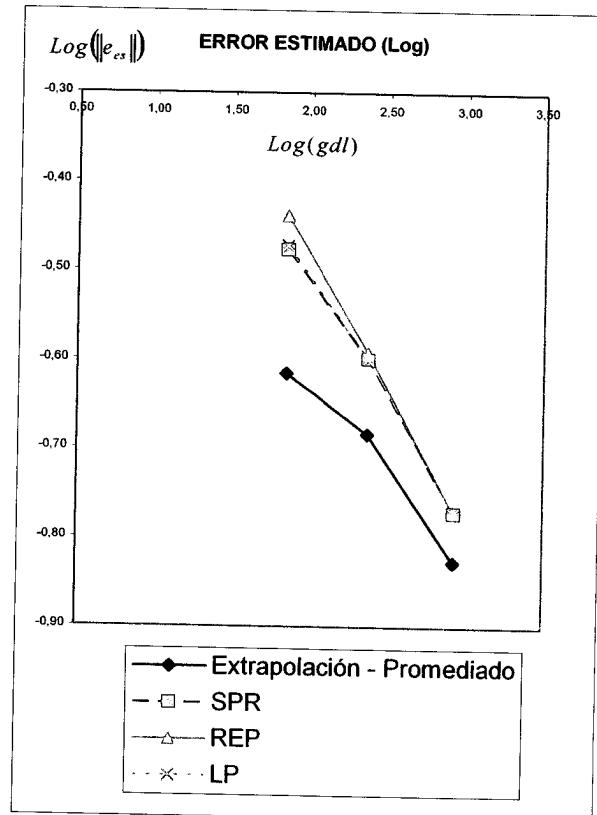
Figura 5.6 Efectividad técnicas alisado de tensiones placa

MODELO: Placa a Tracción con Orificio Circular

Técnica	Malla	gdl	$\ u_{EF}\ ^2$	$\ e_{es}\ $	$\eta_r, \%$	$Log(gdl)$	$Log(\ e_{es}\)$	Velocidad de Convergencia
Extrapolación - Promediado	1	70	50,9540	0,2424	3,3941	1,8451	-0,6154	-0,1949
	2	234	51,0930	0,2071	2,8964	2,3692	-0,6838	
	3	850	51,1690	0,1490	2,0827	2,9294	-0,8268	
SPR	1	70	50,9540	0,3333	4,6644	1,8451	-0,4771	-0,2713
	2	234	51,0930	0,2520	3,5232	2,3692	-0,5986	
	3	850	51,1690	0,1693	2,3664	2,9294	-0,7713	
REP	1	70	50,9540	0,3639	5,0912	1,8451	-0,4390	-0,3069
	2	234	51,0930	0,2561	3,5799	2,3692	-0,5917	
	3	850	51,1690	0,1691	2,3633	2,9294	-0,7719	
LP	1	70	50,9540	0,3369	4,7139	1,8451	-0,4726	-0,2757
	2	234	51,0930	0,2518	3,5207	2,3692	-0,5989	
	3	850	51,1690	0,1693	2,3654	2,9294	-0,7715	



a)

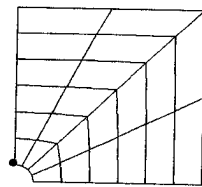


b)

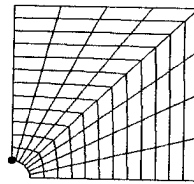
Figura 5.7 Convergencia técnicas alisado de tensiones placa

MODELO:
PUNTO:

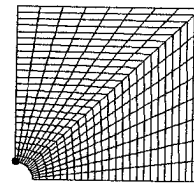
Placa a tracción con orificio circular
• A



Malla 1 (24 Elementos)

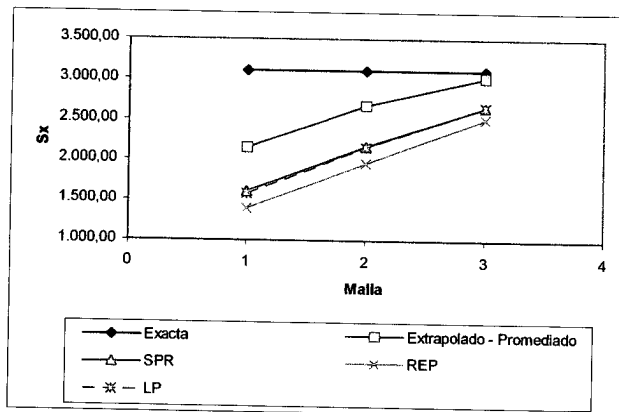


Malla 2 (96 Elementos)

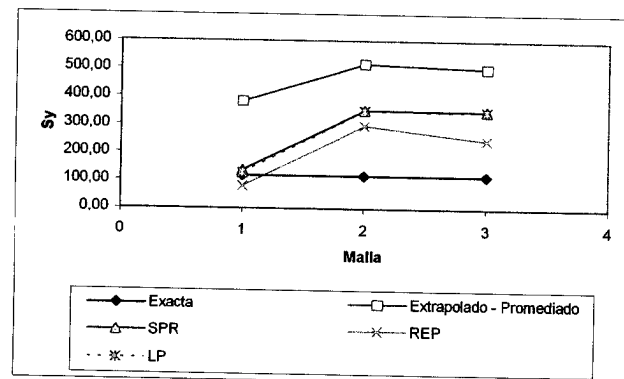


Malla 3 (384 Elementos)

TÉCNICA	TENSIÓN Sx EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (12)	2 (22)	3 (42)
Exacta	3.102,50	3.102,50	3.102,50
Extrapolado - Promediado	2.148,70	2.671,60	3.018,90
SPR	1.606,20	2.165,30	2.656,20
REP	1.391,70	1.957,40	2.508,70
LP	1.575,30	2.156,50	2.654,50



TÉCNICA	TENSIÓN Sy EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (12)	2 (22)	3 (42)
Exacta	116,47	116,47	116,47
Extrapolado - Promediado	382,38	516,05	501,74
SPR	136,31	352,06	349,32
REP	77,94	295,58	244,98
LP	125,71	349,47	348,66



TÉCNICA	TENSIÓN Sxy EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (12)	2 (22)	3 (42)
Exacta	-32,72	-32,72	-32,72
Extrapolado - Promediado	103,21	56,28	20,21
SPR	-80,89	-116,32	-119,53
REP	-105,16	-145,82	-153,39
LP	-89,09	-119,44	-120,42

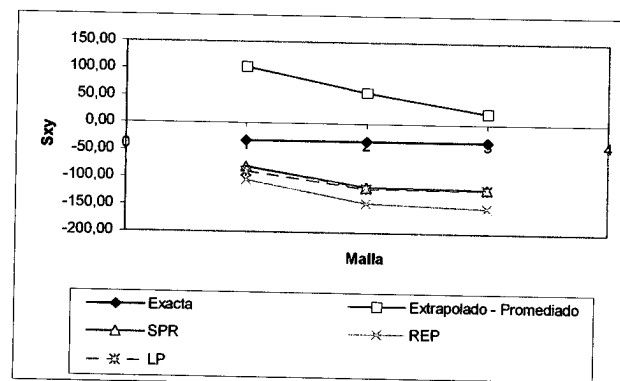
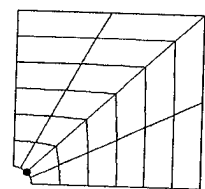


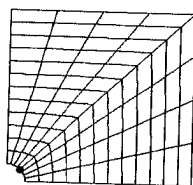
Figura 5.8 Comparación de valores de tensión calculada por diversas técnicas en el punto "A" placa

MODELO:
PUNTO:

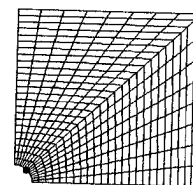
Placa a tracción con orificio circular
• B



Malla 1 (24 Elementos)

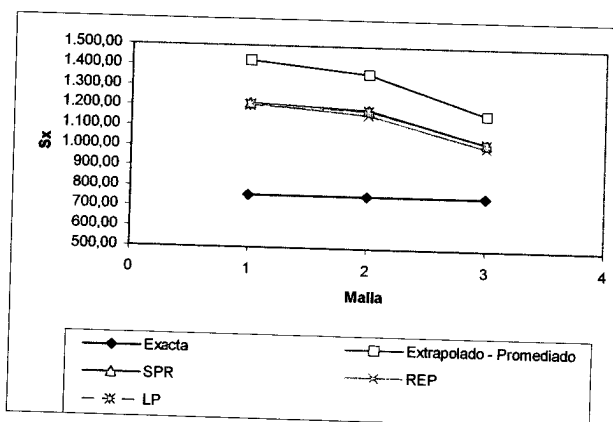


Malla 2 (96 Elementos)

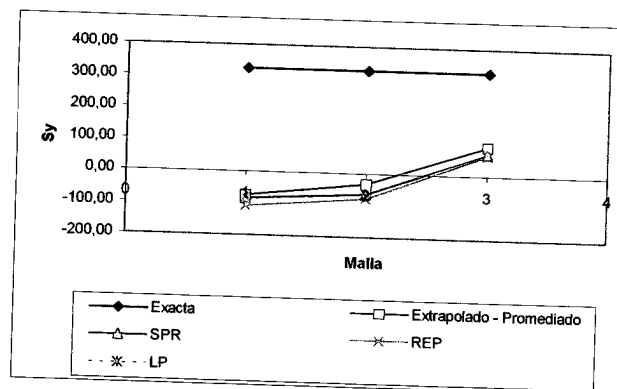


Malla 3 (384 Elementos)

TÉCNICA	TENSIÓN Sx EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (19)	2 (37)	3 (73)
Exacta	759,11	759,11	759,11
Extrapolado - Promediado	1.426,80	1.364,80	1.168,20
SPR	1.213,20	1.186,80	1.029,30
REP	1.211,20	1.161,50	1.008,20
LP	1.204,50	1.184,20	1.028,90



TÉCNICA	TENSIÓN Sy EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (19)	2 (37)	3 (73)
Exacta	324,30	324,30	324,30
Extrapolado - Promediado	-74,49	-32,62	91,26
SPR	-85,06	-64,81	68,65
REP	-108,91	-78,28	63,67
LP	-86,09	-64,96	68,59



TÉCNICA	TENSIÓN Sxy EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (19)	2 (37)	3 (73)
Exacta	-478,68	-478,68	-478,68
Extrapolado - Promediado	-224,29	-313,17	-388,23
SPR	-179,67	-294,32	-387,19
REP	-177,46	-293,27	-387,92
LP	-178,89	-294,14	-387,18

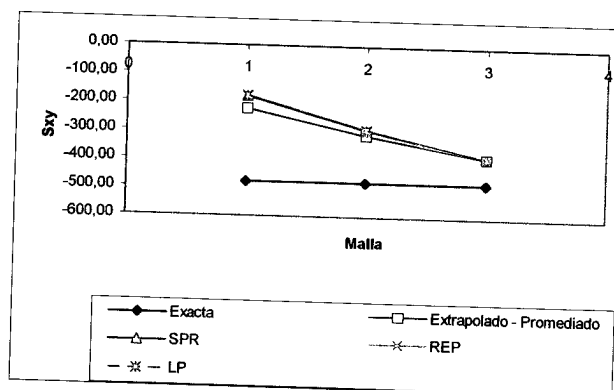
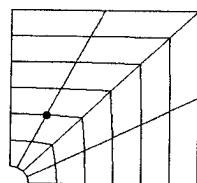
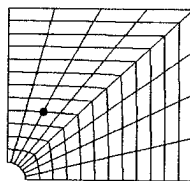


Figura 5.9 Comparación de valores de tensión calculada por diversas técnicas en el punto "B" placa

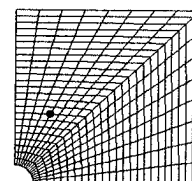
MODELO: Placa a tracción con orificio circular
PUNTO: • C



Malla 1 (24 Elementos)

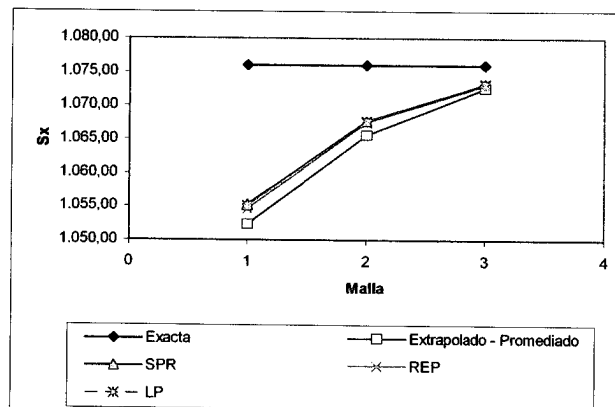


Malla 2 (96 Elementos)

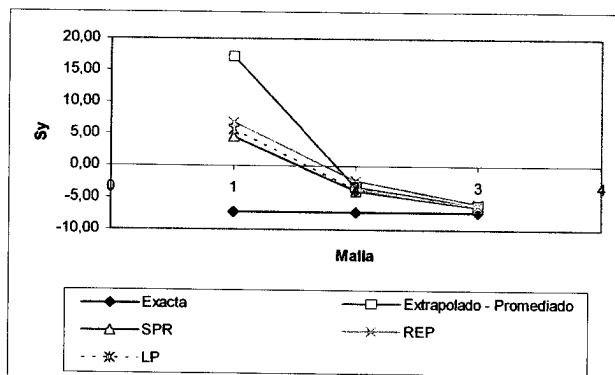


Malla 3 (384 Elementos)

TÉCNICA	TENSIÓN Sx EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (26)	2 (67)	3 (197)
Exacta	1.076,00	1.076,00	1.076,00
Extrapolado - Promediado	1.052,30	1.065,60	1.072,60
SPR	1.055,30	1.067,70	1.073,20
REP	1.054,60	1.067,50	1.073,10
LP	1.055,10	1.067,70	1.073,20



TÉCNICA	TENSIÓN Sy EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (26)	2 (67)	3 (197)
Exacta	-7,28	-7,28	-7,28
Extrapolado - Promediado	17,21	-3,34	-6,19
SPR	4,47	-3,96	-6,41
REP	6,82	-2,39	-5,90
LP	5,66	-3,75	-6,39



TÉCNICA	TENSIÓN Sxy EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (26)	2 (67)	3 (197)
Exacta	27,55	27,55	27,55
Extrapolado - Promediado	14,52	22,23	25,58
SPR	17,98	22,90	25,76
REP	17,89	23,22	25,86
LP	18,07	22,98	25,77

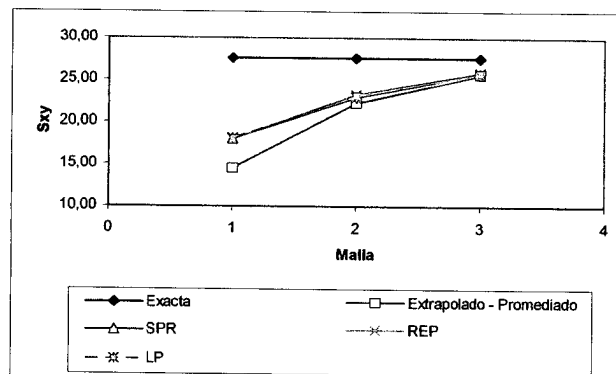
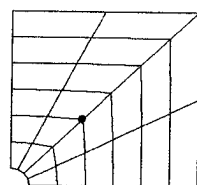
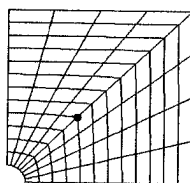


Figura 5.10 Comparación de valores de tensión calculada por diversas técnicas en el punto "C" placa

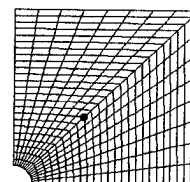
MODELO: Placa a tracción con orificio circular
 PUNTO: • D



Malla 1 (24 Elementos)

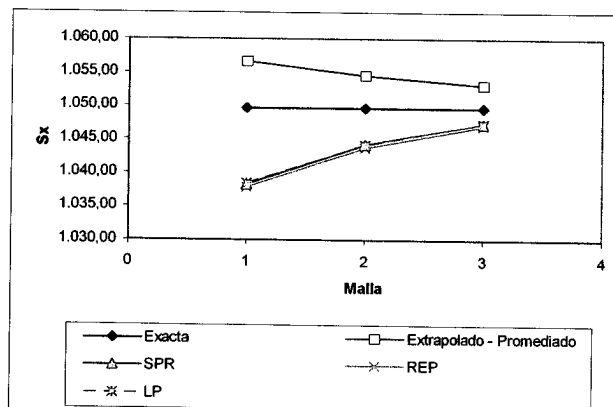


Malla 2 (96 Elementos)

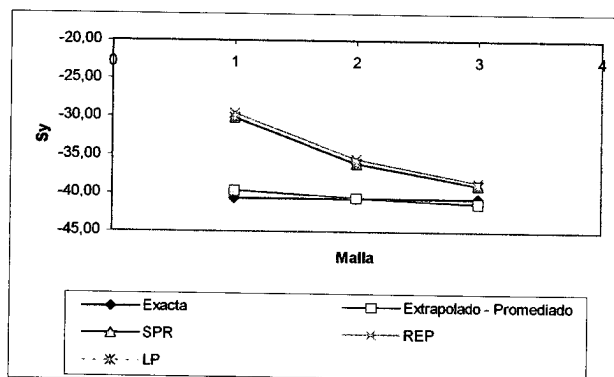


Malla 3 (384 Elementos)

TÉCNICA	TENSIÓN Sx EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (25)	2 (65)	3 (193)
Exacta	1.049,60	1.049,60	1.049,60
Extrapolado - Promediado	1.056,60	1.054,50	1.053,10
SPR	1.038,20	1.044,20	1.047,30
REP	1.037,80	1.043,70	1.047,00
LP	1.038,40	1.044,10	1.047,30



TÉCNICA	TENSIÓN Sy EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (25)	2 (65)	3 (193)
Exacta	-40,70	-40,70	-40,70
Extrapolado - Promediado	-39,68	-40,63	-41,31
SPR	-30,16	-36,08	-38,91
REP	-29,58	-35,52	-38,58
LP	-30,12	-36,04	-38,91



TÉCNICA	TENSIÓN Sxy EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (25)	2 (65)	3 (193)
Exacta	-18,11	-18,11	-18,11
Extrapolado - Promediado	-18,53	-18,96	-18,72
SPR	-16,51	-17,47	-17,94
REP	-15,91	-17,21	-17,82
LP	-16,11	-17,40	-17,93

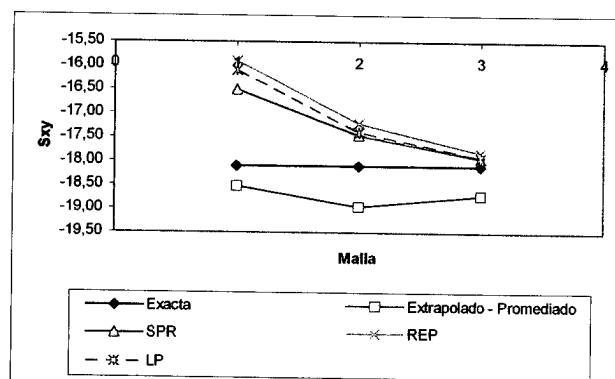


Figura 5.11 Comparación de valores de tensión calculada por diversas técnicas en el punto "D" placa

V.1.3 Comparación y Análisis de resultados

Del estudio de la efectividad del estimador de error aplicado al modelo (Figura 5.6) se observa que las técnicas SPR, REP y LP presentan un comportamiento similar al ir refinando la malla, aunque para la primera malla con 70 gdl el REP da mejores valores, adicionalmente, las técnicas SPR, REP y LP presentan una efectividad superior a la técnica de Extrapolación - Promediado. Todas las técnicas tienden al valor de la unidad que es el valor deseado de efectividad.

Del estudio de la convergencia (Figura 5.7), se observa que a medida que se refina la malla el error % va disminuyendo para todas las técnicas mostradas (Figura 5.7 a)), además se observa que las técnicas SPR, REP y LP tienen mayor velocidad de convergencia (pendiente de la recta Figura 5.7 b)) que la de Extrapolación - Promediado, destacando que la técnica REP da el mejor valor (-0,3069).

El estudio de los valores de esfuerzo se llevó a cabo comparando las técnicas entre sí y con la solución exacta en distintos puntos de la malla de lo cual se desprende lo siguiente:

En el punto A (nodo de esquina) (Figura 5.8) para el esfuerzo "Sx" se observa que las técnicas SPR, REP y LP presentan un comportamiento similar aunque la técnica Extrapolado - Promediado converge más rápido a la solución que las demás. Para el esfuerzo "Sy" nuevamente las técnicas SPR, REP y LP presentan comportamiento similar pero esta vez superior a la técnica de Extrapolación y Promediado aunque no se observa una convergencia definida hacia la solución exacta. Para el esfuerzo "Sxy" se observa que la técnica de extrapolación - promediado converge hacia la solución exacta mientras que las técnicas SPR, REP, LP no presentan convergencia definida hacia el valor exacto.

En el punto B (nodo de borde) (Figura 5.9) para el esfuerzo "Sx" las técnicas SPR, REP, LP se comportan casi igual y de manera superior a la de Extrapolación - Promediado con convergencia de todas a la solución exacta, Para los esfuerzos "Sy" y "Sxy" el comportamiento es casi idéntico para las cuatro técnicas convergiendo a la solución exacta.

En el punto C (nodo interno) (Figura 5.10) para el esfuerzo "Sx" las técnicas SPR, REP y LP, dan valores ligeramente mejores que los de Extrapolación - Promediado, con convergencia de todos a la solución exacta. Para el esfuerzo "Sy" el comportamiento es similar aunque para la primera malla, los valores de SPR, REP y LP son muy superiores a los

de Extrapolado - promediado. Para el esfuerzo “Sxy” se observa un comportamiento similar a las anteriores con convergencia a la solución exacta de las cuatro técnicas.

En el punto D (nodo interno) (Figura 5.11) para el esfuerzo “Sx” se observa que todas las técnicas convergen al valor exacto con la particularidad que las técnicas SPR, REP y LP lo hacen desde abajo mientras que la de Extrapolación – Promediado lo hace desde arriba. Para el esfuerzo “Sy” se observa que todas las técnicas convergen al valor exacto con la particularidad que la de Extrapolación – Promediado da los valores casi exactos para todas las mallas. Para el esfuerzo “Sxy” se observa que las técnicas SPR, REP, LP se comportan de manera similar con convergencia hacia la solución exacta notándose valores mejores de la SPR en las primeras mallas, por el contrario, la técnica de extrapolación y promediado no presenta una convergencia definida aunque da valores cercanos a los exactos.

De la comparación de los resultados del programa de Elementos Finitos elaborado en MATLAB® con los valores obtenidos de ANSYS® se comprobó que la información obtenida del análisis por Elementos Finitos resultó exactamente igual, además se observó que de acuerdo al postprocesamiento para obtener los esfuerzos en los nodos los resultados de ANSYS® coinciden exactamente con los obtenidos con la subrutina elaborada en MATLAB® para la técnica de Extrapolación - Promediado en los nodos.

V.2 Modelo de Viga en Cantilever

LONGITUD (L): 100,00 cm
 BASE (b): 5 cm
 ALTURA (h): 40,00 cm
 INERCIA (I): 26.666,67 cm⁴

E: 1,2 E+05 kg/cm²
 ν : 0,25
 C. DISTRIBUIDA: 2,00 kg/cm²
 C. DISTRIBUIDA (W): 10 kg/cm

SOLUCIÓN ANALÍTICA POR FÓRMULAS DE RESISTENCIA DE MATERIALES

SECC.	x	M	V
A	0,00	50.000,00	1.000,00
	10,00	40.500,00	900,00
	20,00	32.000,00	800,00
B	25,00	28.125,00	750,00
	30,00	24.500,00	700,00
	40,00	18.000,00	600,00
C	50,00	12.500,00	500,00
	60,00	8.000,00	400,00
	70,00	4.500,00	300,00
D	75,00	3.125,00	250,00
	80,00	2.000,00	200,00
	90,00	500,00	100,00
E	100,00	0,00	0,00

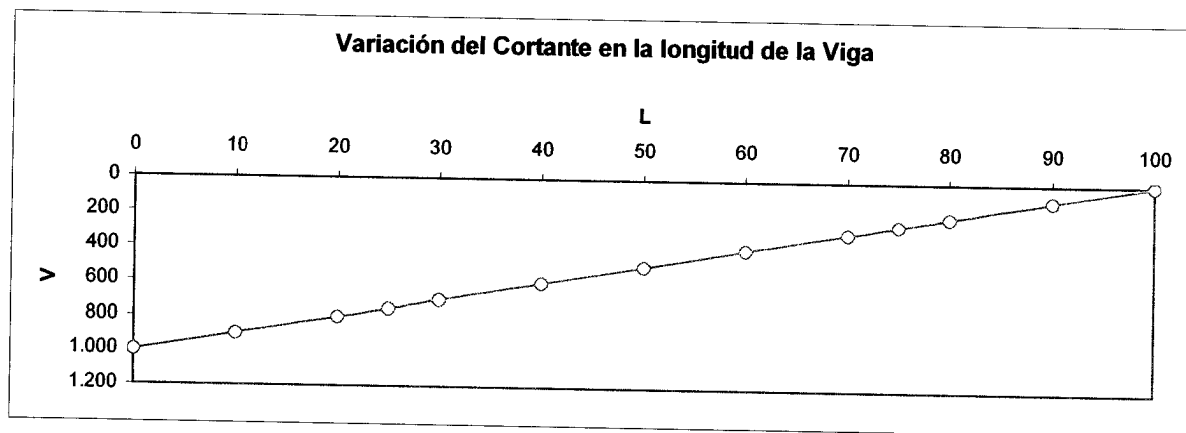
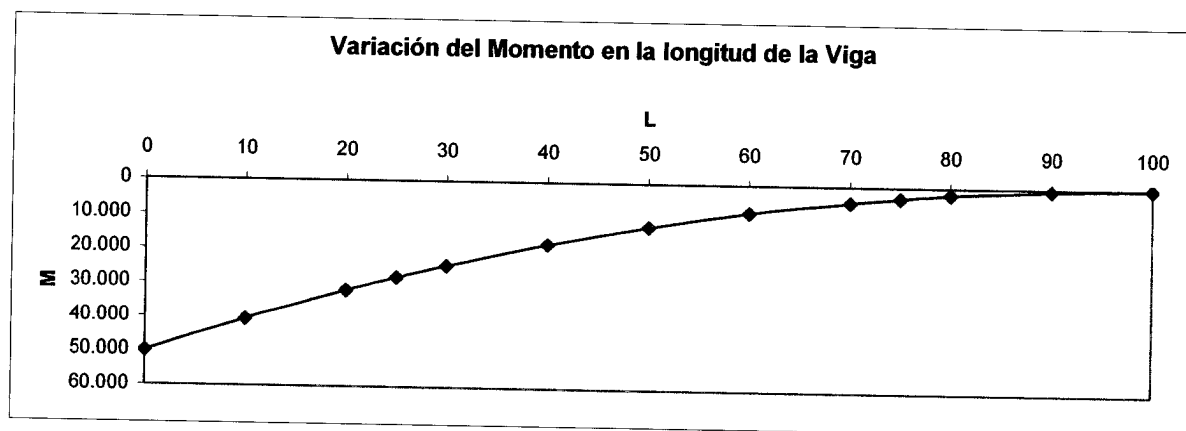
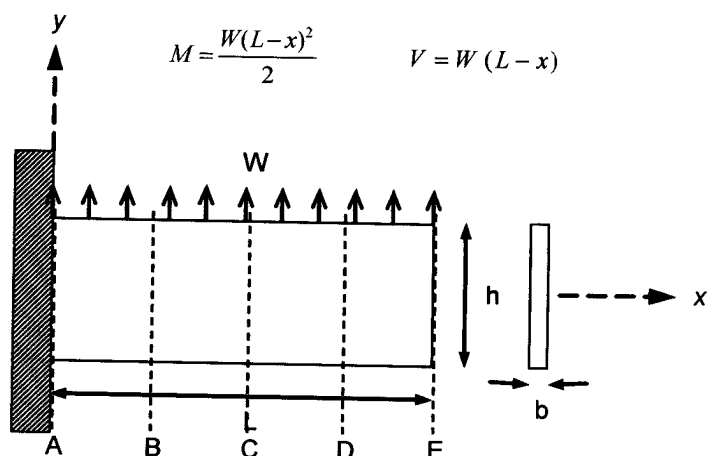


Figura 5.12 Modelo y solución analítica viga

V.2.1 Descripción del modelo

La viga se modeló con el programa de MEF realizado en MATLAB® mencionado anteriormente, utilizando elementos bidimensionales cuadriláteros lineales con integración de 2 x 2. Adicionalmente se modeló en ANSYS® para comparar la información obtenida de matriz de deformación, Matriz de rigidez, desplazamientos, esfuerzos en puntos de Gauss y esfuerzos en nodos.

Se realizaron tres mallas para estudiar la convergencia de las tensiones obtenidas por cada técnica y compararlas entre ellas.

Las parcelas utilizadas para la aplicación de SPR, REP, LP son de cuatro elementos tanto para los nodos interiores como para los de borde y de esquina, esto es una recomendación de los desarrolladores de las técnicas ya que para nodos de borde que pertenecen a dos elementos y los de esquina que pertenecen a un solo elemento la información obtenida de tan pocos elementos no es suficiente para que las técnicas den buenos resultados.

El modelo para la malla 1 es el siguiente:

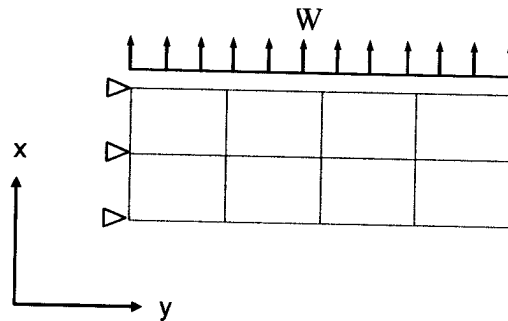


Figura 5.13 Cargas y Restricciones para la Malla 1 viga

Energía de deformación elástica analítica para la viga rectangular en cantilever (se usa en el cálculo del estimador de error):

$$U = U_{\sigma} + U_{\tau} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \frac{6}{5} \int_0^L \frac{V^2}{2GA} dx \quad (5.1)$$

V.2.2 Resultados obtenidos

De los análisis realizados al modelo se muestra la deformación de acuerdo a las cargas y restricciones impuestas para la malla 1.

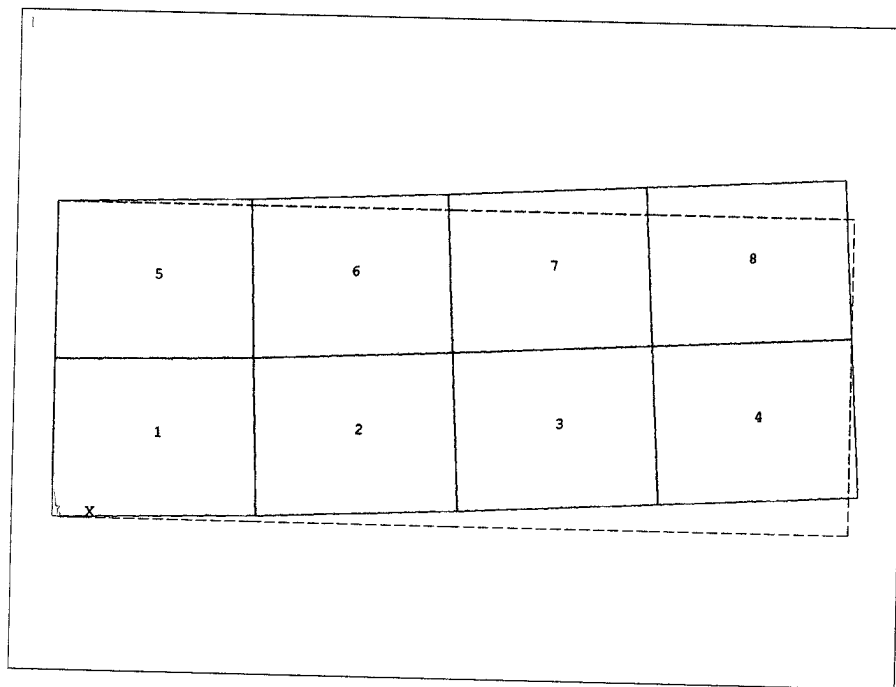


Figura 5.14 Deformada modelo de viga

En las Figuras 5.15 y 5.16 se presentan los resultados de efectividad y convergencia para cada una de las técnicas tanto en forma tabulada como gráficamente, los valores mostrados fueron calculados con las fórmulas presentadas en el capítulo II con la información obtenida de la corrida de los programas codificados en MATLAB®. Seguidamente a éstos se presenta la comparación de las tensiones calculadas en distintos puntos del modelo que se obtienen directamente de las corridas de los programas codificados en MATLAB®. Por último se presenta la distribución de esfuerzos debidos a flexión y a cortante en distintas secciones de la viga calculadas con las técnicas implementadas y la solución analítica.

MODELO: Viga en Cantilever con carga distribuida

Técnica	Malla	gdl	$\ u_{ex}\ ^2$	$\ u_{EF}\ ^2$	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
Extrapolación - Promediado	1	30	19,7916	16,9426	1,6879	1,2977	0,7688
	2	50	19,7916	17,3653	1,5577	1,2923	0,8296
	3	90	19,7916	19,0813	0,8428	0,8632	1,0242
SPR	1	30	19,7916	16,9426	1,6879	1,4387	0,8523
	2	50	19,7916	17,3653	1,5577	1,3390	0,8596
	3	90	19,7916	19,0813	0,8428	0,8931	1,0597
REP	1	30	19,7916	16,9426	1,6879	1,6596	0,9833
	2	50	19,7916	17,3653	1,5577	1,4319	0,9193
	3	90	19,7916	19,0813	0,8428	0,9771	1,1594
LP	1	30	19,7916	16,9426	1,6879	1,6541	0,9800
	2	50	19,7916	17,3653	1,5577	1,4282	0,9169
	3	90	19,7916	19,0813	0,8428	0,9724	1,1537

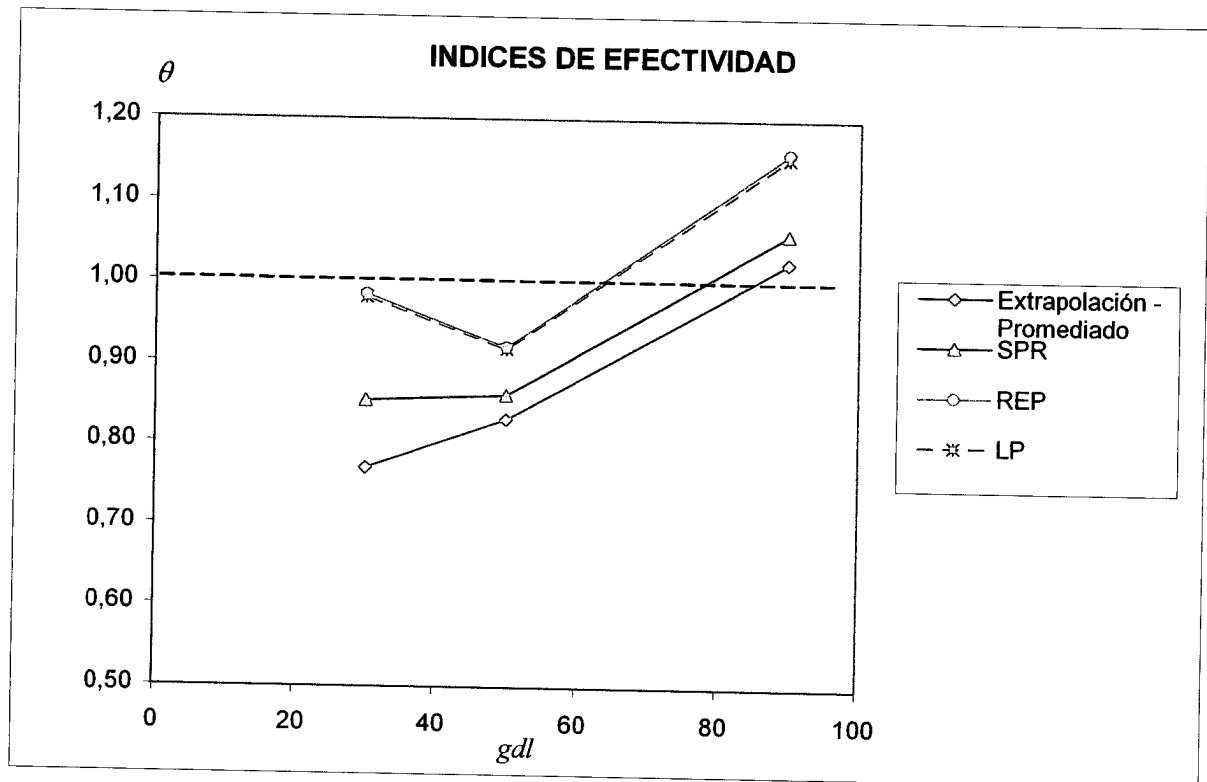
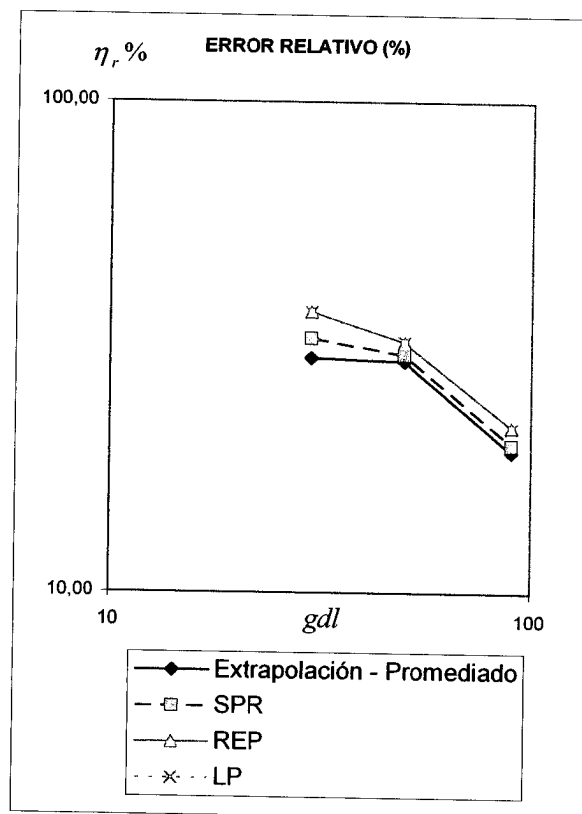


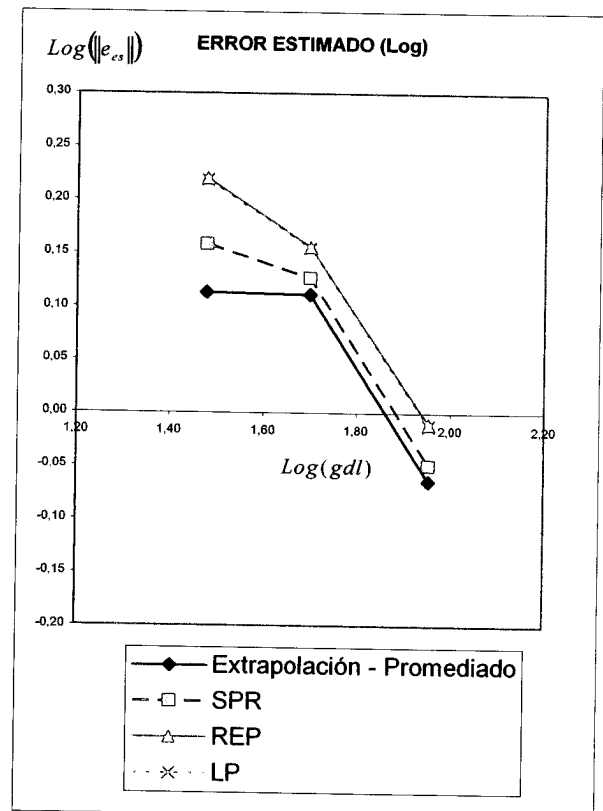
Figura 5.15 Efectividad técnicas alisado de tensiones viga

MODELO: Viga en Cantilever con carga distribuida

Técnica	Malla	gdl	$\ u_{EF}\ ^2$	$\ e_{es}\ $	$\eta_r \%$	$Log(gdl)$	$Log(\ e_{es}\)$	Velocidad de Convergencia
Extrapolación - Promediado	1	30	16,9426	1,2977	30,0682	1,47712	0,1132	-0,3711
	2	50	17,3653	1,2923	29,6199	1,69897	0,1114	
	3	90	19,0813	0,8632	19,3861	1,95424	-0,0639	
SPR	1	30	16,9426	1,4387	32,9952	1,47712	0,1580	-0,4340
	2	50	17,3653	1,3390	30,5917	1,69897	0,1268	
	3	90	19,0813	0,8931	20,0310	1,95424	-0,0491	
REP	1	30	16,9426	1,6596	37,3942	1,47712	0,2200	-0,4822
	2	50	17,3653	1,4319	32,4965	1,69897	0,1559	
	3	90	19,0813	0,9771	21,8290	1,95424	-0,0101	
LP	1	30	16,9426	1,6541	37,2876	1,47712	0,2186	-0,4836
	2	50	17,3653	1,4282	32,4214	1,69897	0,1548	
	3	90	19,0813	0,9724	21,7289	1,95424	-0,0122	



a)



b)

Figura 5.16 Convergencia técnicas alisado de tensiones viga

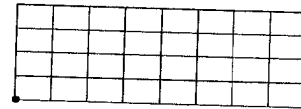
MODELO: Viga en Cantilever con carga distribuida
 PUNTO: A



Malla 1 (8 Elementos)

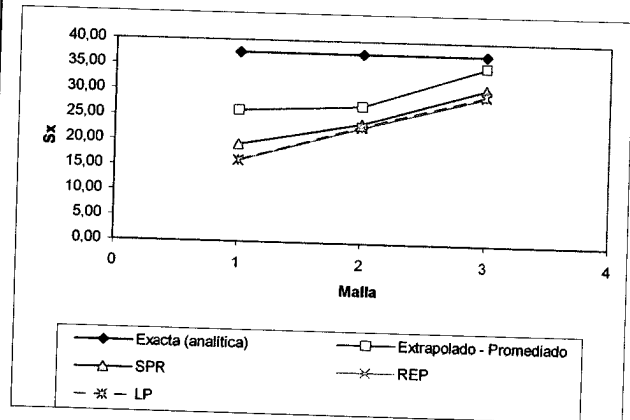


Malla 2 (16 Elementos)



Malla 3 (32 Elementos)

TÉCNICA	TENSIÓN Sx EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (1)	2 (1)	3 (1)
Exacta (analítica)	37,50	37,50	37,50
Extrapolado - Promediado	25,97	27,15	35,11
SPR	19,27	23,73	30,87
REP	16,06	22,90	29,36
LP	16,18	23,14	29,61



TÉCNICA	TENSIÓN Sxy EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (1)	2 (1)	3 (1)
Exacta (analítica)	0,00	0,00	0,00
Extrapolado - Promediado	10,77	11,19	10,00
SPR	6,95	5,63	5,06
REP	4,86	3,04	2,45
LP	4,87	3,07	2,50

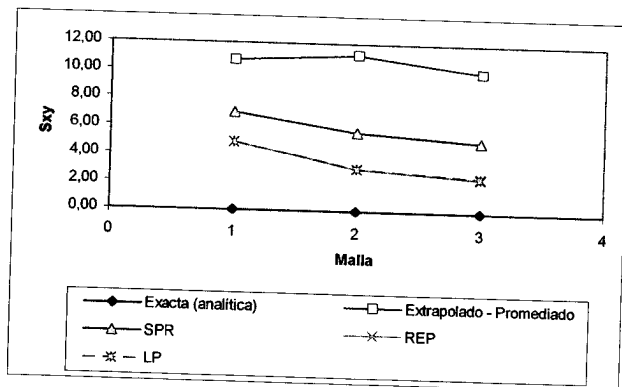
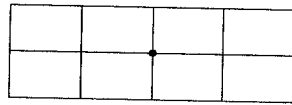


Figura 5.17 Comparación de valores de tensión calculada por diversas técnicas en el punto "A" viga.

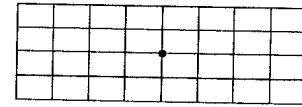
MODELO: Viga en Cantilever con carga distribuida
PUNTO: • B



Malla 1 (8 Elementos)

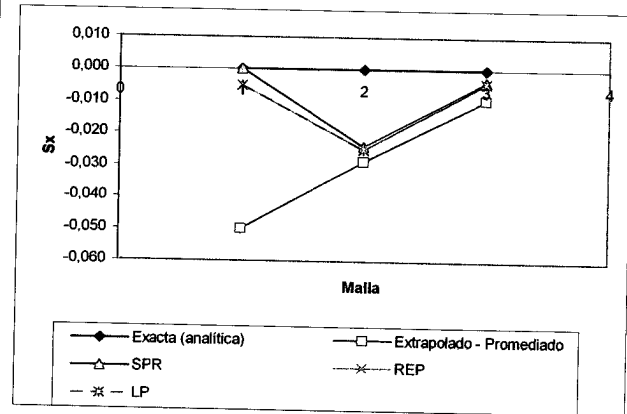


Malla 2 (16 Elementos)



Malla 3 (32 Elementos)

TÉCNICA	TENSIÓN Sx EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (14)	2 (21)	3 (35)
Exacta (analítica)	0,000	0,000	0,000
Extrapolado - Promediado	-0,050	-0,029	-0,009
SPR	0,000	-0,024	-0,004
REP	-0,005	-0,025	-0,004
LP	-0,005	-0,025	-0,004



TÉCNICA	TENSIÓN Sxy EN Kg/Cm ²		
	MALLA (ID Nodo)		
	1 (14)	2 (21)	3 (35)
Exacta (analítica)	3,75	3,75	3,75
Extrapolado - Promediado	1,71	2,32	3,16
SPR	2,50	3,40	3,40
REP	2,44	3,29	3,38
LP	2,44	3,29	3,38

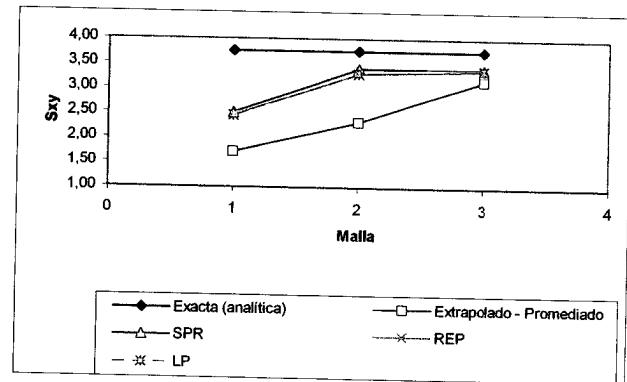
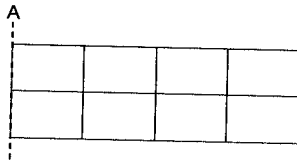
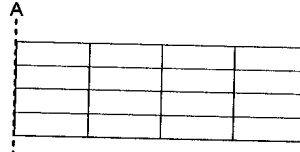


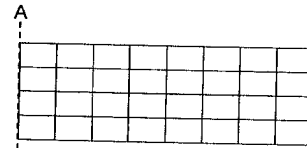
Figura 5.18 Comparación de valores de tensión calculada por diversas técnicas en el punto "B" viga.



Malla 1 (8 Elementos)



Malla 2 (16 Elementos)



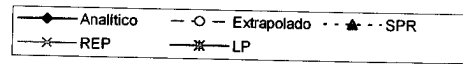
Malla 3 (32 Elementos)

SECCIÓN: "A"

M: 50.000,00 Kg - Cm

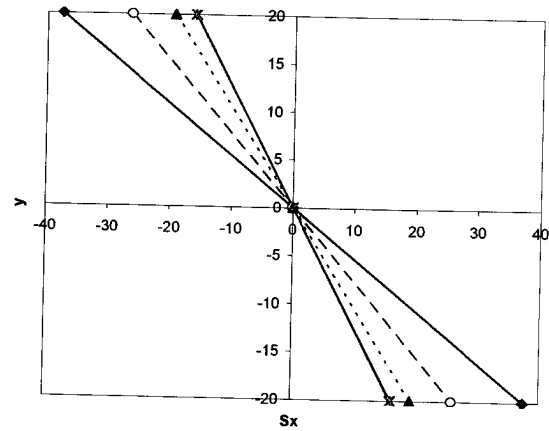
I: 26.666,67 Cm⁴

$$\sigma_x = -\frac{M y}{I}$$



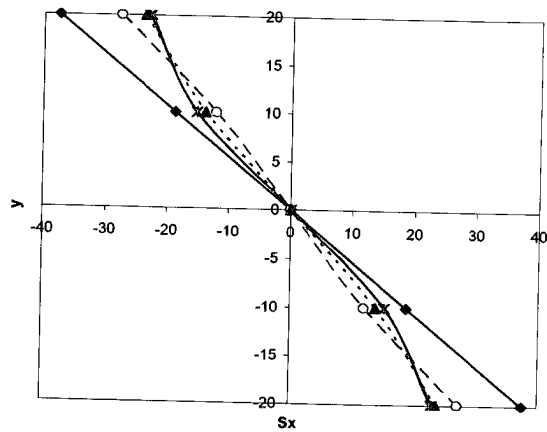
MALLA: 1

y	Analítico	Extrapolado		SPR	REP	LP
		Promediado	Sx			
20,00	-37,500	-26,441	Sx	-19,342	-15,957	-16,080
0,00	0,000	-0,054	Sx	-0,034	0,001	0,001
-20,00	37,500	25,968	Sx	19,274	16,064	16,184



MALLA: 2

y	Analítico	Extrapolado		SPR	REP	LP
		Promediado	Sx			
20,00	-37,500	-27,694	Sx	-23,772	-22,738	-22,994
10,00	-18,750	-12,198	Sx	-13,936	-15,301	-15,249
0,00	0,000	-0,083	Sx	0,028	0,086	0,084
-10,00	18,750	11,967	Sx	13,868	15,302	15,248
-20,00	37,500	27,151	Sx	23,727	22,899	23,136



MALLA: 3

y	Analítico	Extrapolado		SPR	REP	LP
		Promediado	Sx			
20,00	-37,500	-35,964	Sx	-30,990	-29,136	-29,422
10,00	-18,750	-14,243	Sx	-16,440	-17,222	-17,184
0,00	0,000	0,011	Sx	0,098	0,172	0,169
-10,00	18,750	14,189	Sx	16,373	17,220	17,182
-20,00	37,500	35,112	Sx	30,868	29,361	29,612

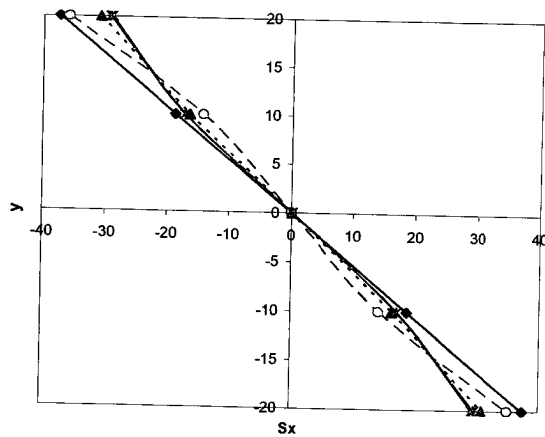
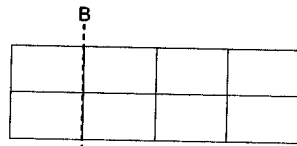
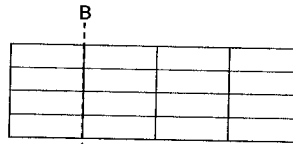


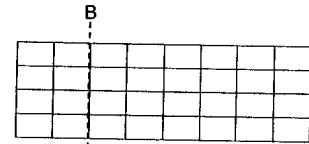
Figura 5.19 Esfuerzos por flexión en sección "A" de viga.



Malla 1 (8 Elementos)



Malla 2 (16 Elementos)



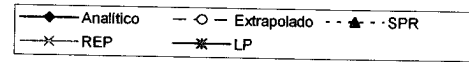
Malla 3 (32 Elementos)

SECCIÓN: "B"

M: 28.125,00 Kg - Cm

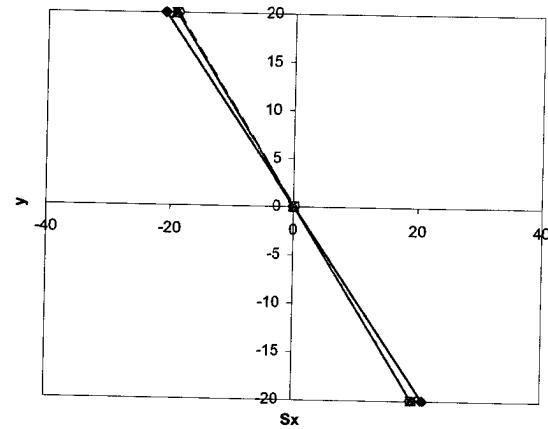
I: 26.666,67 Cm⁴

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$



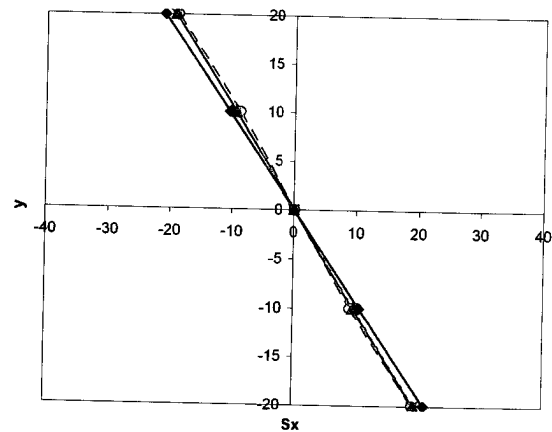
MALLA: 1

y	Extrapolado				
	Analítico	Promediado	SPR	REP	LP
20,00	σ_x	Sx	Sx	Sx	Sx
20,00	-21,090	-19,111	-19,308	-19,309	-19,309
0,00	0,000	0,073	0,000	-0,001	-0,001
-20,00	21,090	19,277	19,308	19,308	19,308



MALLA: 2

y	Extrapolado				
	Analítico	Promediado	SPR	REP	LP
20,00	σ_x	Sx	Sx	Sx	Sx
20,00	-21,090	-19,017	-19,385	-19,366	-19,367
10,00	-10,550	-8,928	-9,548	-9,530	-9,531
0,00	0,000	0,064	-0,007	-0,007	-0,007
-10,00	10,550	9,077	9,548	9,529	9,530
-20,00	21,090	19,220	19,408	19,388	19,389



MALLA: 3

y	Extrapolado				
	Analítico	Promediado	SPR	REP	LP
20,00	σ_x	Sx	Sx	Sx	Sx
20,00	-21,090	-20,307	-20,418	-20,462	-20,460
10,00	-10,550	-10,721	-10,331	-10,375	-10,373
0,00	0,000	-0,039	-0,054	-0,055	-0,055
-10,00	10,550	10,646	10,331	10,365	10,363
-20,00	21,090	20,599	20,631	20,665	20,663

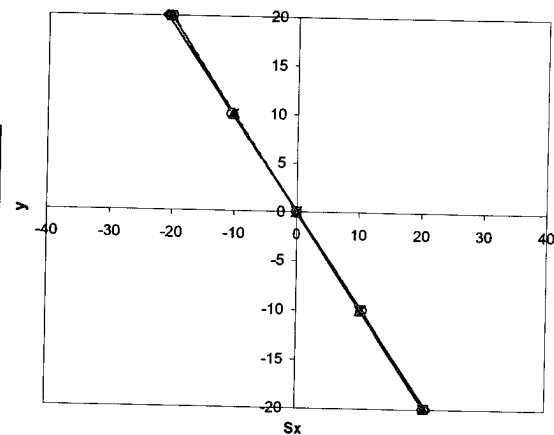
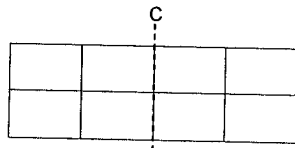
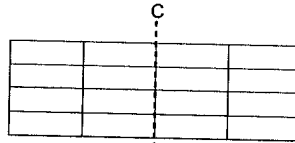


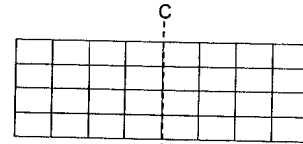
Figura 5.20 Esfuerzos por flexión en sección "B" de viga.



Malla 1 (8 Elementos)



Malla 2 (16 Elementos)



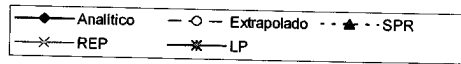
Malla 3 (32 Elementos)

SECCIÓN: "C"

M: 12.500,00 Kg - Cm

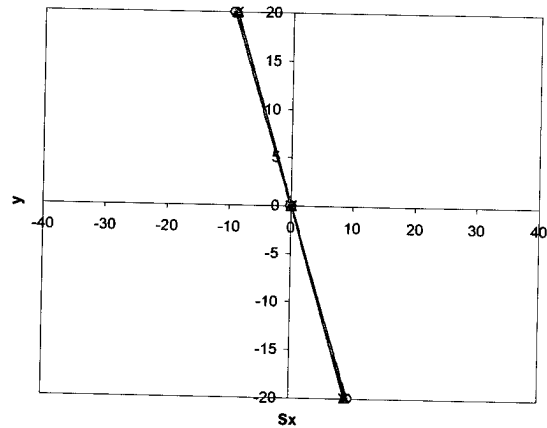
I: 26.666,67 Cm⁴

$$\sigma_x = -\frac{M y}{I}$$



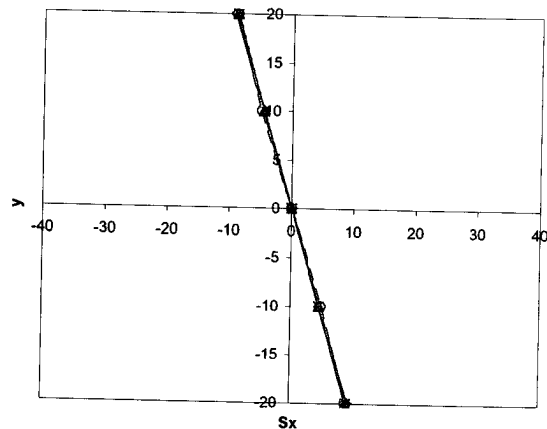
MALLA: 1

y	Analítico	Extrapolado	SPR	REP	LP
	σ_x	Promediado Sx			
20,00	-9,370	-9,432	-9,107	-9,112	-9,112
0,00	0,000	-0,050	0,000	-0,005	-0,005
-20,00	9,370	9,515	9,107	9,102	9,102



MALLA: 2

y	Analítico	Extrapolado	SPR	REP	LP
	σ_x	Promediado Sx			
20,00	-9,370	-8,984	-9,008	-9,045	-9,043
10,00	-4,690	-5,025	-4,610	-4,646	-4,644
0,00	0,000	-0,029	-0,024	-0,025	-0,025
-10,00	4,690	4,987	4,610	4,643	4,641
-20,00	9,370	9,083	9,105	9,137	9,136



MALLA: 3

y	Analítico	Extrapolado	SPR	REP	LP
	σ_x	Promediado Sx			
20,00	-9,370	-9,179	-9,264	-9,288	-9,287
10,00	-4,690	-4,894	-4,671	-4,694	-4,693
0,00	0,000	-0,009	-0,004	-0,004	-0,004
-10,00	4,690	4,893	4,671	4,694	4,693
-20,00	9,370	9,195	9,280	9,304	9,302

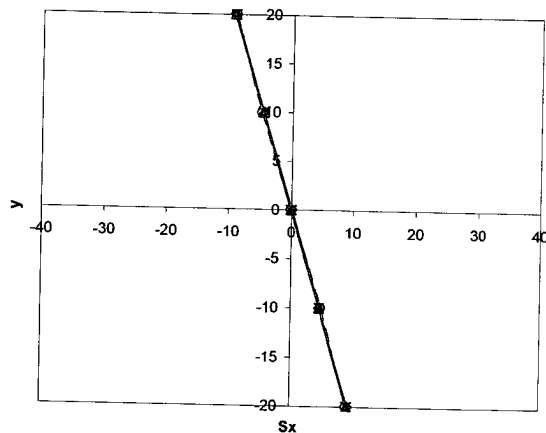
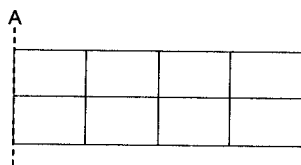
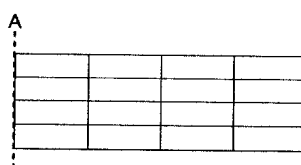


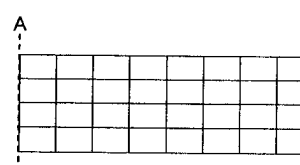
Figura 5.21 Esfuerzos por flexión en sección "C" de viga.



Malla 1 (8 Elementos)



Malla 2 (16 Elementos)



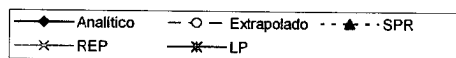
Malla 3 (32 Elementos)

SECCIÓN: "A"

V: 1.000,00 Kg - Cm

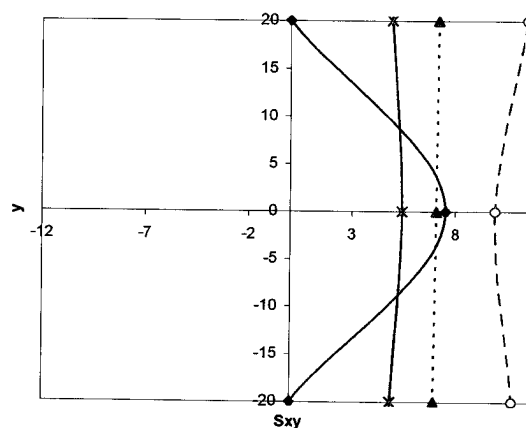
I: 26.666,67 Cm⁴

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{2I} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$



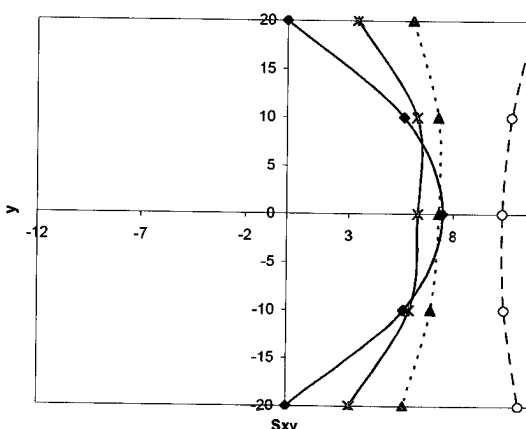
MALLA: 1

y	Analítico	Extrapolado		SPR	REP	LP
		Promediado	Sxy			
20,00	0,000		11,463	7,155	4,913	4,926
0,00	7,500		9,920	7,053	5,415	5,424
-20,00	0,000		10,765	6,952	4,857	4,869



MALLA: 2

y	Analítico	Extrapolado		SPR	REP	LP
		Promediado	Sxy			
20,00	0,000		11,890	6,059	3,386	3,415
10,00	5,620		10,810	7,272	6,253	6,264
0,00	7,500		10,383	7,306	6,299	6,310
-10,00	5,620		10,477	6,934	5,890	5,901
-20,00	0,000		11,188	5,632	3,037	3,066



MALLA: 3

y	Analítico	Extrapolado		SPR	REP	LP
		Promediado	Sxy			
20,00	0,000		11,126	5,786	3,114	3,169
10,00	5,620		8,682	6,892	5,683	5,708
0,00	7,500		7,963	6,298	4,986	5,013
-10,00	5,620		8,201	6,352	5,084	5,111
-20,00	0,000		9,999	5,057	2,449	2,503

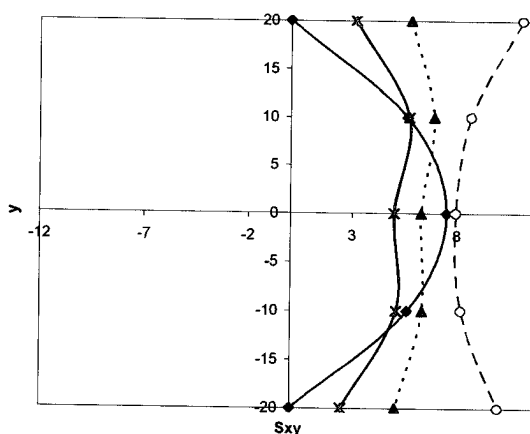
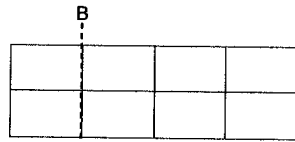


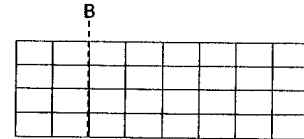
Figura 5.22 Esfuerzos por cortante en sección "A" de viga.



Malla 1 (8 Elementos)



Malla 2 (16 Elementos)

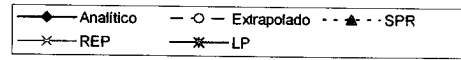


Malla 3 (32 Elementos)

SECCIÓN: "B"

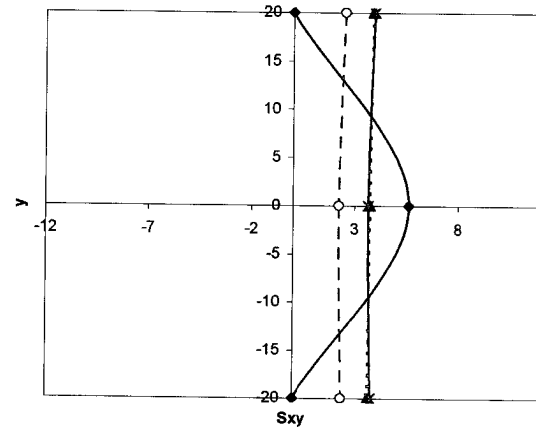
V: 750,00 Kg - Cm
I: 26.666,67 Cm⁴

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{2I} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$



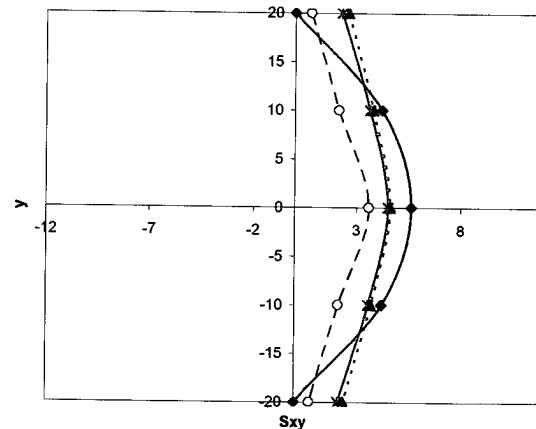
MALLA: 1

y	Analítico $\tau_{xy} = \tau_{yx}$	Extrapolado			
		Promediado	SPR	REP	LP
20,00	0,000	2,524	3,852	3,944	3,943
0,00	5,620	2,232	3,750	3,650	3,650
-20,00	0,000	2,371	3,648	3,780	3,780



MALLA: 2

y	Analítico $\tau_{xy} = \tau_{yx}$	Extrapolado			
		Promediado	SPR	REP	LP
20,00	0,000	0,794	2,577	2,272	2,273
10,00	4,220	2,126	3,790	3,633	3,634
0,00	5,620	3,578	4,610	4,514	4,515
-10,00	4,220	2,134	3,710	3,561	3,562
-20,00	0,000	0,761	2,408	2,120	2,120



MALLA: 3

y	Analítico $\tau_{xy} = \tau_{yx}$	Extrapolado			
		Promediado	SPR	REP	LP
20,00	0,000	1,704	1,513	0,997	1,006
10,00	4,220	3,453	3,732	3,710	3,711
0,00	5,620	4,741	5,174	5,144	5,144
-10,00	4,220	3,459	3,768	3,744	3,745
-20,00	0,000	1,730	1,581	1,085	1,093

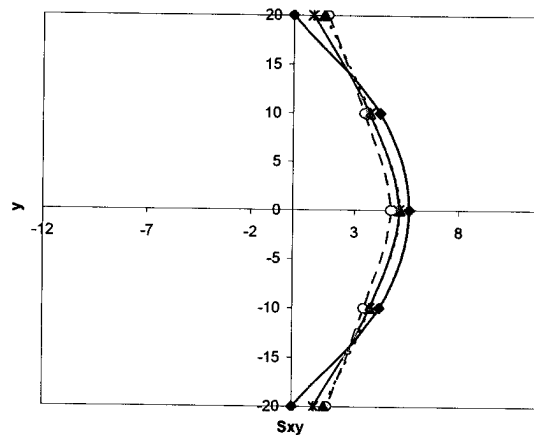


Figura 5.23 Esfuerzos por cortante en sección "B" de viga.

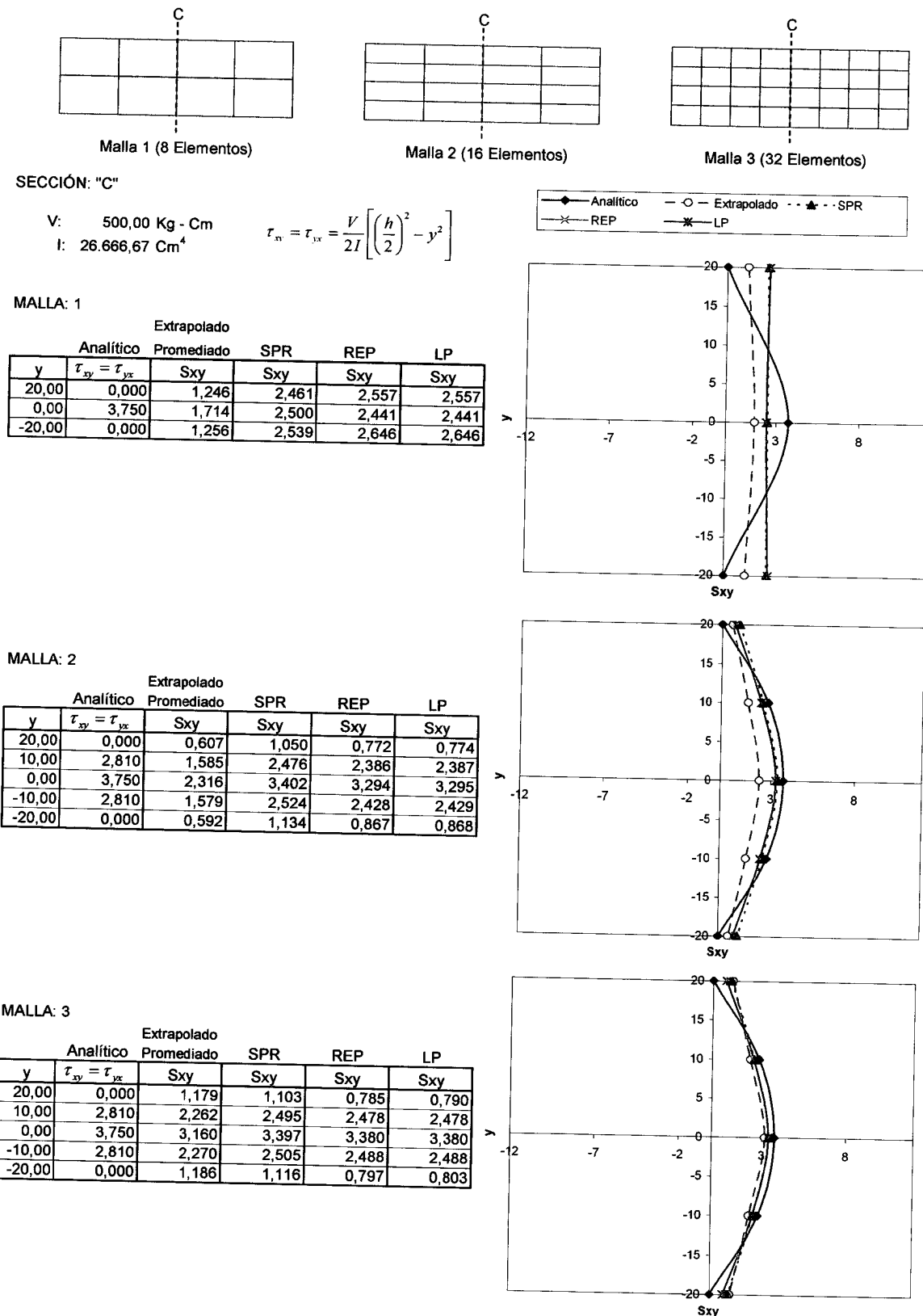


Figura 5.24 Esfuerzos por cortante en sección "C" de viga

V.2.3 Comparación y Análisis de resultados

Del estudio de la efectividad del estimador de error aplicado al modelo (Figura 5.15) se observa que las técnicas REP y LP presentan un comportamiento casi idéntico al ir refinando la malla y dan mejores valores que la SPR y Extrapolación - Promediado. Todas las técnicas se acercan al valor de la unidad que es el valor deseado de efectividad, aunque para la última malla se supera dicho valor, se observa también que la efectividad se encuentra para todas las técnicas entre 0,8 – 1,2 valor que coincide con los límites prácticos señalados en [1].

Del estudio de la convergencia (Figura 5.16), se observa que a medida que se refina la malla el error % va disminuyendo para todas las técnicas mostradas (Figura 5.16 a)), además se observa que las técnicas REP y LP tienen mayor velocidad de convergencia (pendiente de la recta (Figura 5.16 b)) que la SPR y la de Extrapolación – Promediado, destacando que la técnica LP da el mejor valor (-0,4836) el cual es casi el valor teórico (-0,5) predicho con la ec. (2.23).

El estudio de los valores de esfuerzo se llevó a cabo comparando las técnicas entre sí y con la solución analítica (exacta) en distintos puntos de la malla de lo cual se desprende lo siguiente:

En el punto A (nodo esquina donde los esfuerzos “Sx” son máximos debido al empotramiento) (Figura 5.17) se observa que las técnicas SPR, REP y LP presentan un comportamiento similar aunque la técnica Extrapolado y Promediado converge más rápido a la solución exacta que las demás. Para el esfuerzo “Sxy” las técnicas REP y LP presentan comportamiento similar y la SPR levemente distinto, los valores son mejores que los de técnica de Extrapolación y Promediado convergiendo más rápido a la solución exacta.

En el punto B (nodo de interno) (Figura 5.18) para el esfuerzo “Sx” las técnicas SPR, REP, LP se comportan casi igual y de manera superior a la de Extrapolación y Promediado con convergencia de todas a la solución exacta, para el esfuerzo “Sxy” las técnicas SPR, REP y LP dan valores muy cercanos y son mejores que los de la técnica de extrapolación y promediado, se observa además que las cuatro técnicas convergen al valor exacto.

Adicionalmente en este modelo se estudia la variación de los valores de esfuerzos en distintas secciones de la viga lo cual muestra que:

Esfuerzos “Sx” producidos por flexión:

En la Sección A (empotramiento) (Figura 5.19) para la malla 1 los valores más cercanos a la distribución exacta los da la técnica de Extrapolación – Promediado, para las mallas 2 y 3 las técnicas SPR, REP, LP dan los mejores valores en la mitad central de la sección de la viga mientras que en los puntos extremos son mejores los de la de Extrapolación – promediado.

En la sección B (Figura 5.20) para todas las mallas las técnicas SPR, REP, LP dan los valores más cercanos a la distribución exacta en toda la sección y se observa que para la tercera malla todas las técnicas arrojan casi los valores analíticos.

En la sección C (Figura 5.21) para todas las mallas las técnicas SPR, REP, LP dan los valores más cercanos a la distribución exacta en toda la sección y se observa desde la primera malla que todas las técnicas arrojan casi los valores analíticos.

Esfuerzos “Sxy” producidos por cortante:

En la sección A (empotramiento) (Figura 5.22) para todas las mallas la distribución del esfuerzo con las distintas técnicas no da muy cercano al analítico siendo mucho peor la de la técnica de Extrapolación – Promediado, los valores obtenidos con las técnicas SPR, REP, LP intentan parecerse a la distribución analítica en la malla 3 pero no logran simular el comportamiento predicho, esto se debe a que el soporte empotrado no permite la deformación por cortante, sin embargo del principio de Saint-Venant [2] se sigue que a secciones alejadas del empotramiento se puede proporcionar la distribución correcta de los esfuerzos como se observa en las secciones B y C descritas a continuación.

En la sección B (Figura 5.23) para la malla 1 por la poca cantidad de puntos no se logra mostrar la distribución predicha de los esfuerzos, para la malla 2 y 3 se observa como la distribución se acerca bastante a la analítica siendo mucho mejor la que proporcionan las técnicas SPR, REP, LP que la de Extrapolación – Promediado.

En la sección C (Figura 5.24) el comportamiento es análogo al descrito en la sección B.

V.3 Referencias

- [1] Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z., "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part I: The recovery technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol .33, pp. 1331-1364, (1992).
- [2] Beer, Ferdinand. Johnston, Russell. y DeWolf, John., "Mecánica de materiales", Tercera edición, McGraw-Hill pag. 381, (2001).

CAPÍTULO VI

CONCLUSIÓN

VI.1 Conclusiones

En el desarrollo del capítulo V, se han realizado diferentes análisis en los cuales se han mostrado con detalle las conclusiones obtenidas más importantes. Por esta razón en esta sección se presentan de forma resumida las conclusiones más significativas generadas a lo largo de la tesis.

Se han implementado tres procedimientos de alisado de tensiones en problemas con solución suave bidimensionales, donde la efectividad y convergencia de los estimadores de error se han evaluado utilizando elementos cuadriláteros lineales. Al utilizar estos procedimientos se obtuvo que:

- Para el caso de la placa con orificio, el REP presenta las magnitudes de efectividad más cercanas a la unidad para cada uno de los refinamientos realizados. Se observa además que al aumentar los gdl las técnicas: SPR, REP, y LP exhiben un comportamiento similar alcanzando la efectividad deseada. Por lo tanto en general se obtienen mejores resultados al aplicar estas técnicas que la de Extrapolación - Promediado que es la contiene la mayoría de los paquetes comerciales de elementos finitos.
- Para el caso de la viga, el REP y LP presentan las magnitudes de efectividad más cercanas a la unidad para las dos primeras mallas mientras que para la tercera malla el valor excede la unidad lo cual amerita la definición de un factor de corrección para que el estimador de error mejore la calidad de la estimación, aunque se encuentra dentro de los límites prácticos definidos en [1].
- La velocidad de convergencia tiende aproximadamente a -0.5 cuando se utilizan las técnicas de SPR, REP y LP. Lo que implica que las técnicas planteadas funcionan

adecuadamente ya que las velocidades de convergencia están muy cercanas a las que se obtienen cuando se considera un mallado uniforme, independientemente de la técnica que se utilice en alisado de tensiones.

VI.2 Contribuciones

Las contribuciones que han sido realizadas en este trabajo son las siguientes:

- Implementación de las técnicas SPR, REP y LP en elementos cuadriláteros lineales bidimensionales propuestas en [1], [2], [3].
- Desarrollo de tres algoritmos para aplicar técnicas de alisado de tensiones de forma general considerando el campo tensional en los puntos de gauss.
- Se ha demostrado que es posible obtener excelentes velocidades de convergencia con los elementos bidimensionales utilizados cuando se aplica en problemas con solución suave, partiendo de una malla inicial con pocos elementos.
- La codificación en un programa abierto de las técnicas implementadas que permiten la aplicación de las mismas a problemas de dominio bidimensional con la finalidad de obtener campos tensionales mejorados con la máxima velocidad de convergencia y con un valor de fiabilidad cercano a la unidad.

VI.3 Sugerencias para futuros trabajos

- Una lógica continuación de este trabajo consiste en extender los procedimientos y algoritmos aquí implementados a elementos bidimensionales de órdenes superiores y de diferente topología que puedan obtenerse de la colisión de nodos vértice (como el caso del elemento triangular).
- Respecto a las técnicas de suavizado de tensiones analizadas en esta trabajo, se podrían implementar, realizando algunas modificaciones, mejoras asociadas al

cumplimiento de las restricciones en el contorno o aumento del número de elementos que forman la parcela (patch).

- Codificar interfaces con algún programa de uso comercial de elementos finitos y las subrutinas codificadas en este trabajo con la finalidad de poderlo aplicar automáticamente a un mayor número de problemas.

VI.4 Referencias

- [1] Zienkiewicz, O.C. y Zhu, J.Z., "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part I: The recovery technique", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol .33, pp. 1331-1364, (1992).
- [2] Boroomand, B. y Zienkiewicz, O.C., "Recovery by equilibrium in patches (REP)", International journal for numerical methods in engineering, vol. 40, 137-164 (1997).
- [3] Lee, T., Park, H.C. y Lee, S.W., "A superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint", International journal for numerical methods in engineering, vol. 40, 1139-1160 (1997).