Articulo de Investigacion. Revista Ciencia e Ingenieria. Vol. 39, No. 1, pp. 97- 106, diciembre-marzo, 2018.
ISSN 1316-7081. ISSN Elect. 2244-8780. Universidad de Los Andes (ULA)

Rango Secuencial de $C_p(X)$

Sequential range of $C_p(X)$

Rodríguez, Armando
Facultad de Ingeniería, Departamento de Cálculo, Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela
armandorodriguez@ula.ve

Resumen

En este trabajo nos enfocaremos en los espacios de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con la topología de la convergencia puntual, que se denota como $C_p(X)$. Parte de los resultados se basan en un análisis de la demostración de un teorema de Fremlin DH, 1994, el cual dice $\Sigma(C_p(X)) \leq 1$ o $\Sigma(C_p(X)) = \omega_1$. La segunda alternativa naturalmente conlleva una construcción de un subespacio numerable de $C_p(X)$ que, aún cuando en general no es homeomorfo a S_ω (espacio de Arkhangel'skiĩ-Franklin), tiene rango ω_1. Presentaremos una demostración más general de la construida por Fremlin DH, 1994, de este teorema, basada en las ideas desarrolladas por él.

Palabras clave: Rango secuencial de $C_p(X)$,espacio Arkhangel'skiĩ-Franklin S_ω .

Abstract

In this work we will focus in the spaces of the continuous performances of X in $\mathbb{R}$ with the topologia of the punctual convergence, which is denoted like $C_p(X)$. Part of the results they are based on an an álisis of the demostración of Fremlin's theorem which says $\Sigma(C_p(X)) \leq 1$ or $\Sigma(C_p(X)) = \omega_1$. The second alternative naturally carries a construction of a denumerable subspace of $C_p(X)$ that, still when in general it is not homeomorfo to S_ω (Arkhangel'skiĩ-Franklin space), range has ω_1. We will present a demonstration mas general of the constructed one for Fremlin of this theorem, based on the ideas developed by Fremlin.

Key words: Sequential range of $C_p(X)$, Arkhangel'skiĩ-Franklin space S_ω.

1 Introducción

El ejemplo típico de un espacio con rango ω_1 es S_ω, el espacio de Arkhangel'skiĩ-Franklin (Arkhangel'skiĩ AV y col., 1968, Vaughan JE, 2001). En este trabajo presentaremos algunos resultados que dan condiciones suficientes para que un espacio tenga rango secuencial ω_1. Nos enfocaremos en los espacios $C_p(X)$ de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con la topología de la convergencia puntual. Parte de los resultados se basan en un análisis de la demostración del siguiente Teorema:

Teorema 1.1 *(Fremlin) Sea X un espacio topológico no vacío. El rango secuencial de $C_p(X)$ es: 1 ó ω_1.*

Para demostrar la segunda alternativa del Teorema 1.1 Fremlin construye una función $H : S_\omega \to C_p(X)$ que satisface:

1) $\lim_{i\to\infty} H(t^\frown i) = H(t)$ para cualquier $t \in S_\omega$;
2) Si $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S_ω tal que existe t, y $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con $t^\frown m_i < t_i$, $m_i < m_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $(H(t_i)_{i\in\mathbb{N}})$ no tiene punto límite en $C_p(X)$;
3) $H(s) \neq H(t)$ para todo $s \neq t \in S_\omega$.

A la función H la llamaremos una F-inmersión, por Fremlin. Además la imagen de S_ω bajo H será llamada una $F-$copia de S_ω en $C_p(X)$. Lo que permite construir un subespacio numerable de $C_p(X)$ que, aún cuando en general no es homeomorfo a S_ω, tiene rango ω_1.

Por otra parte, $C_p(\mathbb{N}^\mathbb{N})$ contiene una copia de S_ω. En efecto, Stevo Todorcevic y Carlos Uzcátegui (Todorcevic S y col., 2001) mostraron que si (X,τ) es un espacio topológico T_2, regular y con topología analítica, entonces X es homeomorfo a un subespacio numerable de $C_p(\mathbb{N}^\mathbb{N})$. El espacio Arkhangel'skiĩ-Franklin S_ω satisface dichas hipótesis, es decir S_ω es: T_2, regular y posee una topología Π^0_3 (Uzcátegui C, 2003), por lo tanto $C_p(\mathbb{N}^\mathbb{N})$ contiene una copia de S_ω. Por otro lado, un resultado de Arkhangel'skiĩ-Bella (Arkhangel'skiĩ AV y col., 1996) implica que $C_p(2^\mathbb{N})$

no contiene copias de S_ω. Sin embargo, como veremos más adelante, el rango de $C_p(2^{\mathbb{N}})$ es ω_1. Luego, por el Teorema 1.1 $C_p(2^{\mathbb{N}})$ es un espacio que contiene una $F-$ copia de S_ω pero no una copia topológica de S_ω. El problema que motivó este trabajo era originalmente determinar las condiciones topológicas de un espacio numerable X para que contenga copias de S_ω. Esto originó una segunda pregunta: ¿es cierto que todo espacio topológico numerable X con $\sum(X) = \omega_1$ contiene copias topológicas de S_ω?. Sabemos que $C_p(2^{\mathbb{N}})$ es un espacio no numerable que tiene rango secuencial ω_1 y no posee copias topológicas de S_ω. Sin embargo, en este trabajo mostraremos que $C_p(2^{\mathbb{N}})$ contiene una copia secuencial de S_ω. Además, en (Baber S y col., 1982) presentan un ejemplo, diferente al espacio $C_p(2^{\mathbb{N}})$, de un espacio no numerable con rango ω_1 que no contiene copias de S_ω.

2 Preliminares y notación

A cada espacio (no necesariamente secuencial) se le asocia un ordinal $\alpha \leq \omega_1$, llamado el rango secuencial del espacio. Este ordinal acota la iteración más larga posible del operador secuencial que definiremos a continuación.

Definición 2.1 *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ definimos el operador secuencial como:*

$$A^{(0)} = A$$

$$A^{(1)} = \{x \in X : x = \lim_n x_n \quad \& \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad en \quad A\}$$

Cabe destacar que podemos aplicar, de nuevo, el operador secuencial a $A^{(1)}$. Así podemos definir:

$$A^{(\alpha+1)} = (A^{\alpha})^{(1)}$$

y para β un ordinal límite

$$A^{(\beta)} = \bigcup_{\alpha<\beta} A^{(\alpha)}$$

Cuando este operador secuencial se estabiliza, es decir el menor ordinal β tal que $A^{(\beta+1)} = A^{(\beta)}$, diremos que la clausura secuencial de A en X es :

$$Cl_s(A) = \bigcup_{\alpha<\beta} A^{(\alpha)}$$

Notemos que $A \subseteq A^{(1)} \subseteq A^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq A^{(\alpha)}$. Además, recordemos que la clausura de A se puede obtener como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen al conjunto A, es decir $\overline{A} = \bigcap\{B : A \subseteq B \quad \& \quad B \quad cerrado\}$. Por ende, también podemos obtener:

$$Cl_s(A) = \bigcap\{B : A \subseteq B \quad \& \quad B \quad secuencialmente \quad cerrado\}.$$

Lema 2.2 $A^{(\omega_1)} = A^{(\omega_1+1)}$*, para todo espacio topológico X y $A \subseteq X$.*

Demostración.

(i) Por la definición 2.1 se tiene claramente que $A^{(\omega_1)} \subseteq A^{(\omega_1+1)}$

(ii) Ahora veamos que $A^{(\omega_1+1)} \subseteq A^{(\omega_1)}$.
Consideremos $x \in A^{(\omega_1+1)}$, asi existe $N \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $A^{(\omega_1)}$, para todo $n \geq N$ y además $x = \lim_n x_n$. Por otro lado, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está $A^{(\omega_1)}$ y $A^{(\omega_1)} = \bigcup_{\rho<\omega_1} A^{(\rho)}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\rho_n < \omega_1$ tal que $x_n \in A^{(\rho_n)}$. Luego, como unión numerable de numerables es numerable, consideremos $\alpha = \bigcup_n \rho_n < \omega_1$, en consecuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $A^{(\alpha)}$. Entonces $x \in A^{(\alpha+1)} \subseteq A^{(\omega_1)}$. □

Definición 2.3 *El rango secuencial A en X, denotado por $\rho(A, X)$, se define como el menor ordinal α tal que $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$.*

Definición 2.4 *El rango del espacio X se define como:*

$$\Sigma(X) = sup\{\rho(A, X) : A \subseteq X\}$$

Notemos que $\rho(A, X), \Sigma(X) \leq \omega_1$, para todo $A \subseteq X$.

Además:

Lema 2.5 *Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$, y $\alpha < \omega_1$, entonces $A^{(\alpha)} \subseteq \overline{A}$*

En consecuencia, también se tiene:

Corolario 2.6 $A^{(\rho(A,X))} \subseteq \overline{A}$*, para todo $A \subseteq X$.*

Demostración.

1) Supongamos que $\rho(A, X) < \omega_1$, por el lema 2.5 tenemos que $A^{(\rho(A,X))} \subseteq \overline{A}$.

2) Si $\rho(A, X) = \omega_1$ entonces veamos que $A^{(\rho(A,X))} \subseteq \overline{A}$. En efecto, sea $x \in A^{(\omega_1)}$. Recordemos que $A^{(\omega_1)} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A^{(\alpha)}$, así sabemos que existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $x \in A^{(\alpha_0)} \subseteq \overline{A}$. Lo cual prueba que, $x \in \overline{A}$. □

Observemos que $A^{(\rho(A,X))}$ es el menor conjunto secuencialmente cerrado que contiene a A, ya que él posee todos los puntos límites de cualquier sucesión convergente en A y sus iteradas hasta $\rho(A, X)$.

Lema 2.7 *Si X es un espacio Fréchet, entonces $\sum(X) = 1$.*

El abanico secuencial, denotado por $S(\omega)$, es el espacio formado por todos los pares ordenados de números naturales junto con un punto más que llamaremos $\{\infty\}$, es decir: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con la siguiente topología: los puntos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son aislados y los conjuntos de la forma

$$U_f = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \geq f(n)\} \cup \{\infty\}$$

donde $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, son abiertos. El abanico secuencial es Fréchet, por tanto se tiene que $\sum(S(\omega)) = 1$

Corolario 2.8 *Si X es un espacio métrico, entonces $A^{\rho(A,X)} = \overline{A}$, para todo $A \subseteq X$. Además el rango secuencial de éste es igual a* 1.

Por otro lado, Fremlin (Fremlin DH, 1994) muestra dos resultados de lo complejo que es construir espacios topológicos X tales que $\Sigma(C_p(X)) = 1$. Acá los siguientes resultados:

Ejemplo 2.9 *Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto que intersectado con cualquier conjunto de medida cero es numerable (es decir, si X es un conjunto Sierpinski), entonces $\Sigma(C_p(X)) = 1$.*

Ejemplo 2.10 *Sea X un espacio compacto. $\Sigma(C_p(X)) = 1$ sí, y sólo si, $[0,1]$ no es imagen continua de X.*

En particular, $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) \neq 1$. Pues $[0,1]$ es la imagen continua de $2^{\mathbb{N}}$ y $2^{\mathbb{N}}$ es compacto, entonces por el ejemplo 2.10 se tiene $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) \neq 1$. Más adelante demostraremos que si $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) \neq 1$, entonces $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) = \omega_1$.

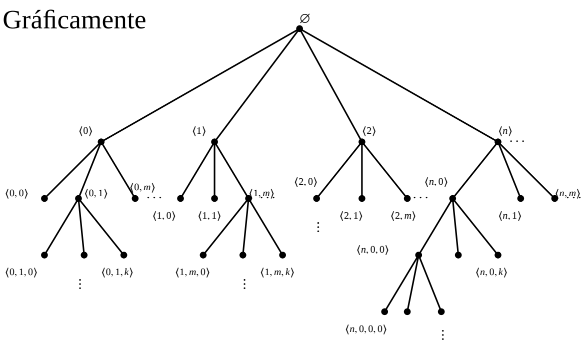
Observemos también, por el ejemplo 2.10, que $\Sigma(C_p([0,1])) \neq 1$, más adelante veremos que $\Sigma(C_p([0,1])) = \omega_1$.

3 Espacio de Arkhangel'skiĩ-Franklin S_ω

Consideremos el conjunto formado por las sucesiones finitas de números naturales:

$$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$$

Gráficamente



Definamos la siguiente Topología τ para el conjunto $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$:
Sea U un subconjunto de $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, diremos que U es abierto sí, y sólo si, para todo $t \in U$ se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : t^\frown n \notin U\}$ es finito.

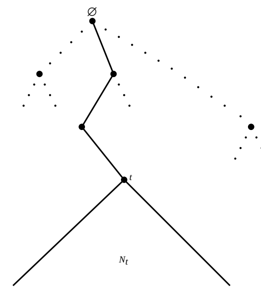
Al espacio $(\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \tau)$ lo llamaremos espacio topológico de Arkhangel'ski - Franklin y lo denotaremos con S_ω .

Para cada $t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ se define:

$$N_t = \{x \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : t \leq x\}.$$

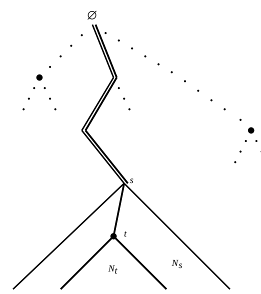
Note que N_t es un conjunto clopen (abierto-cerrado) en S_ω.

Gráficamente un conjunto N_t es de la forma:



Lema 3.1 *Sean s y t elementos de $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,luego $s \leq t$ si, y sólo si, $N_t \subseteq N_s$.*

Gráficamente:



La forma de una sucesión convergente o divergente en el espacio de Arkhangel'ski - Franklin, esta dada de la siguiente manera:

Lema 3.2 *Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S_ω.*

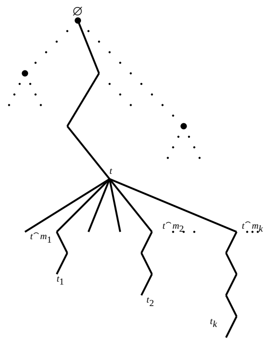
(i) *Si $(\exists t \in S_\omega)(\exists(m_n))(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tal que $t_n = t^\frown m_n$ con $\lim m_n = \infty$, entonces $t_n \to t$.*

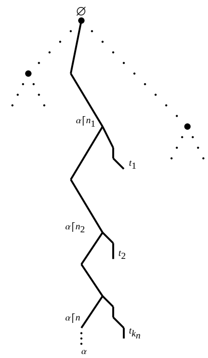
(ii) *Si (t_n) tiene rango finito y no es eventualmente constante, entonces (t_n) no converge.*

(iii) *Si $(\exists\ A \subseteq \mathbb{N}$ infinito), $(\exists t \in S_\omega)$ y $(\exists(m_k)_{k\in A} \uparrow)$ una sucesión tal que $(\forall k \in A)$ se tiene que $t^\frown m_k < t_k$, entonces (t_n) no converge.*

(iv) *Si $(\exists\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$, tal que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\exists k \in \mathbb{N})$ se tiene que $\alpha\lceil n \leq t_k$, entonces (t_n) no converge.*

Antes de probar el lema, daremos la idea geométrica de las sucesiones consideradas en los items (iii) y (iv), respectivamente.





Demostración.

1) Probemos $[(i)]$.
   Sea U un conjunto abierto en S_ω que contiene a t. Así, se tiene que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : t^\frown n \notin U\}$ es finito. Esto implica que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(t_n)_{n \geq n_0}$ está en U. Por tanto, $t_n \to t$.
2) Probemos $[(ii)]$.
   Sin perdida de generalidad supongamos que $t_n = \{t_0, t_1, ..., t_k\}$ y $t_n \to t$. Consideremos $U = S_\omega \setminus \{t_n\}$ un abierto en S_ω que contiene a t. Claramente, tenemos un abierto U que contiene a t y tal que una cola de la sucesión no está en U. Por lo tanto, t_n no converge a t.
3) Probemos $[(iii)]$.
   La prueba la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que (t_n) converge a $s \in S_\omega$. El suponer que (t_n) converge a s implica que $s \prec t_k$, para todo $k \in A$. Pues de lo contrario si $t_k \preceq s$ para algún $k \in A$ ó $t_k \perp s$ para todo $k \in A$, entonces el abierto N_s no contiene la subsucesión (t_k) ni una cola de ella, lo cual es una contradicción con lo supuesto.

   Por hipótesis, se sabe que $t^\frown m_k \prec t_k$. Así tenemos que: $s \prec t^\frown m_k$ o $t^\frown m_k \prec s$.

   a) Si $t^\frown m_k \prec s$, entonces $t_k \in N_s$ con k fijo pues m_k es una sucesión estrictamente creciente y estamos suponiendo que $t^\frown m_k \prec t_k$. En consecuencia casi toda la sucesión $(t_k)_{k \in A}$ no está en N_s. Por lo tanto, $(t_k)_k$ no converge a s. Generando una contradicción con la suposición. Por lo tanto $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge.
   b) Si $s \prec t^\frown m_k$, entonces $s \leq t$.
      Si $s = t$. Consideremos los siguientes conjuntos abiertos que contienen a $t^\frown m_k$ y no contienen a t_k.

      $$V^k_{t^\frown m_k} = \{t^\frown m_k^\frown j : j > k\} \cup \{t^\frown m_k^\frown j^\frown u : j > k \quad \& \quad u \in S_\omega\}$$

      Luego, $\bigcup V^k_{t^\frown m_k}$ es un abierto que contiene a $t^\frown m_k$ y no contiene a (t_k). Como la sucesión (m_k) es estrictamente creciente, pueden existir algunos $n \in \mathbb{N}$ tal que $t^\frown n \notin (t^\frown (m_k))$, así para estos $n's$ consideremos los abiertos N_n. Ahora consideremos

      $$U = \{s^\frown n : n \in \mathbb{N}\} \cup N_n \cup \bigcup V^k_{t^\frown m_k}$$

      El conjunto U es abierto y además contiene a s y no contiene a la subsucesión (t_k). Por lo tanto, la subsucesión (t_k) no converge a s. Obteniendo una contradicción con lo supuesto.
      Si $s \prec t$, entonces basta considerar el conjunto abierto formado por U y todos los niveles necesarios que separan a s de t para encontrar la misma contradicción, es decir la subsucesión (t_k) no converge a s.
4) Probemos $[(iv)]$.
   Supongamos que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $s \in S_\omega$. Como estamos suponiendo que $t_n \to s$, entonces cualquier conjunto abierto que contenga a s también debe contener una cola de la sucesión, probaremos que esto es falso. Podemos considerar que $s \leq t_{k_n}$ pues en caso contrario tendriamos que o bien $t_{k_n} \prec s$ o bien $s \perp t_{k_n}$ lo cual implicaria que, al considerar el clopen N_s toda la subsucesión (t_{k_n}) no está en dicho clopen.
   Si $s \leq t_{k_n}$ para infinitos elementos de la subsucesión, entonces construiremos un abierto que contiene a s y no contiene ningún elemento de la subsucesión. Como $s \leq t_{k_n}$, entonces $\{t_{k_n}(|s|) : n \in \mathbb{N}\}$ es finito. Así consideremos el siguiente conjunto abierto que contiene a s y no contiene a la subsucesión (t_{k_n}).

   $$V^n_s = \{s^\frown j : j \geq n\} \bigcup \{s^\frown j^\frown t : j \geq n \quad \& \quad t \in S_\omega\}$$

   Lo cual genera una contradicción con lo supuesto, por lo tanto si tomamos una sucesión como la del item (iv), entonces (t_n) no converge.

El lema anterior nos permite concluir que las únicas sucesiones convergentes en S_ω son eventualmente de la forma $s^\frown n_i$ para alguna sucesión creciente de enteros $\langle n_i \rangle$, es decir:

Lema 3.3 *Sea $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S_\omega$ una sucesión. $t_n \to t \in S_\omega$ sí, y sólo si, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, existe (m_n) una sucesión tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $t_n = t^\frown m_n$ y el conjunto $\{n : m_n = k\}$ es finito, para cada n.*

Una razón muy importante de caracterizar las sucesiones convergentes en S_ω es que podemos construir una inyección continua entre S_ω y los números racionales entre 0 y 1.

Lema 3.4 *Existe $H : S_\omega \to \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ que satisface:*

1) *$H(t)$ es inyectiva*
2) $\lim_{i \to \infty} H(t^\frown i) = H(t)$

Demostración. Definamos:

$$H(\varnothing) = 0$$

$$H(\langle n \rangle) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$H(\langle n, m \rangle) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+m+2}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}}\right)$$

$$H(\langle n, m, k \rangle) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+m+2}} + \frac{1}{2^{n+m+k+3}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right)$$

$$\vdots$$

$$H(\langle n_0, n_1, ..., n_{k-1}\rangle) = \frac{1}{2^{n_0+1}} + \frac{1}{2^{n_0+n_1+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+\sum_{i=0}^{k-1} n_i}}$$

$H(t)$ así definida satisface las dos condiciones del lema. □

Algunas propiedades notables del espacio S_ω son: es un espacio T_2, regular, cero dimensional, secuencial, no tiene puntos aislados, numerable con topología analítica $\prod_3^0$ y no es primero numerable (en (Uzcátegui C, 2003) muestran esto).

Otra razón por la cual es importante tener caracterizadas las sucesiones convergentes en S_ω es que podemos mostrar que $\Sigma(S_\omega) = \omega_1$.

Una pregunta muy natural es: ¿Cómo construir $T_\alpha \subseteq S_\omega$ cuyo $\rho(T_\alpha, S_\omega) = \alpha \leq \omega_1$?. Los siguientes lemas nos responden la interrogante:

Lema 3.5 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : S_\omega \to N_{\langle n\rangle}$ definida por $f(t) = \langle n\rangle^\frown t$, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración.

1) Probaremos que f es inyectiva. Supongamos que $\langle n\rangle^\frown s = \langle n\rangle^\frown t$, donde $s = \langle s_0, s_1, ..., s_k\rangle$ y $t = \langle t_0, t_1, ..., t_r\rangle$. Puesto que $\langle n\rangle^\frown s = \langle n\rangle^\frown t$ entonces $\langle n, s_0, s_1, ..., s_k\rangle = \langle n, t_0, t_1, ..., t_r\rangle$. En consecuencia $\langle s_0, s_1, ..., s_k\rangle = \langle t_0, t_1, ..., t_r\rangle$. Por lo tanto $s = t$.

2) Probaremos que f es sobreyectiva. Consideremos $t \in N_{\langle n\rangle}$, entonces existe $s \in S_\omega$ tal que $t = \langle n\rangle^\frown s$. Así se tiene que $f(s) = t$.

3) Veamos que f es continua. Probaremos que f envia sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. En efecto, sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S_ω tal que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $t \in S_\omega$. Puesto que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a t en S_ω entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n = t^\frown m_n$, para todo $n \geq n_0$. Así aplicando f a (t_n) obtenemos que $f(t_n) = f(t^\frown m_n) = \langle n\rangle^\frown t^\frown m_n$. Ahora bien, podemos notar que $\langle n\rangle^\frown t^\frown m_n$ converge a $\langle n\rangle^\frown t$ y $f(t) = \langle n\rangle^\frown t$. En consecuencia $f(t_n)$ converge a $f(t)$. Por lo tanto f es continua.

4) Nos hace falta demostrar que f^{-1} es continua. Demostraremos que sucesiones convergentes en $N_{\langle n\rangle}$ proviene de sucesiones convergentes en S_ω. Consideremos $(y_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset N_{\langle n\rangle}$ tal que $y_m \to y \in N_{\langle n\rangle}$. Cabe destacar que $y = \langle n\rangle^\frown f^{-1}(y)$ pues $f(f^{-1}(y)) = y$ y $f(f^{-1}(y)) = \langle n\rangle^\frown f^{-1}(y)$. Puesto que (y_m) es una sucesión convergente a y en $N_{\langle n\rangle} \subseteq S_\omega$ entonces existe $r_m \in \mathbb{N}$ tal que $y_m = y^\frown r_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Así para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\langle n\rangle^\frown f^{-1}(y_m) = y_m = \langle n\rangle^\frown f^{-1}(y)^\frown r_m$. Por ende $f^{-1}(y_m) = f^{-1}(y)^\frown r_m$. Lo cual muestra que $f^{-1}(y_m) \to f^{-1}(y)$. Por lo tanto f^{-1} es continua y finalmente f es un homeomorfismo. □

Lema 3.6 *Para todo $\alpha < \omega_1$ y todo $n \in \mathbb{N}$, existe un subconjunto T en $N_{\langle n\rangle}$ tal que $\rho(T, N_{\langle n\rangle}) = \alpha$ y*

$$\langle n\rangle \in T^{(\alpha)} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} T^{(\beta)}$$

.

Demostración. La prueba la haremos por inducción.

1) Primero mostraremos el caso α finito que ilustra el comportamiento del operador secuencial en S_ω
Caso base ($\alpha = k$).
Consideremos $T_k = \{\langle n_0, n_1, n_2, ..., n_{k-1}\rangle : n_i \in \mathbb{N}, \forall i = 0, 1, ..., k-1\}$. Aplicando el operador secuencial obtenemos:

$$T_k^{(0)} = T_k$$

$$T_k^{(1)} = \{\langle n_0, n_1, n_2, ..., n_{k-2}\rangle : n_i \in \mathbb{N}, \forall i = 0, 1, ..., k-2\} \cup T_k^{(0)}$$

$$T_k^{(2)} = \{\langle n_0, n_1, n_2, ..., n_{k-3}\rangle : n_i \in \mathbb{N}, \forall i = 0, 1, ..., k-3\} \cup T_k^{(1)}$$

$$\vdots$$

$$T_k^{(k-2)} = \{\langle n_0, n_1\rangle : n_i \in \mathbb{N}, \forall i = 0, 1\} \cup T_k^{(k-3)}$$

$$T_k^{(k-1)} = \{\langle n_0\rangle : n_0 \in \mathbb{N}\} \cup T_k^{(k-2)}$$

$$T_k^{(k)} = \{\varnothing\} \cup T_k^{(k-1)}$$

$$T_k^{(k+1)} = T_k^{(k)}$$

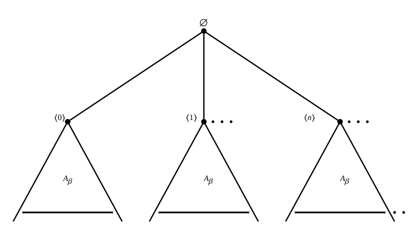
por lo tanto se tiene que $\rho(T_k, S_\omega) = k$.

Ahora supongamos que el lema es valido para todo $\beta < \alpha$.

2) caso $\alpha-$sucesor ($\alpha = \beta + 1$).
Aplicando la hipótesis inductiva para β, podemos considerar que existe $T_\beta \subseteq S_\omega$ tal que $\rho(T_\beta, S_\omega) = \beta$. Luego, por el lema 3.5, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \subseteq N_{\langle n\rangle}$ tal que $\rho(A_n, N_{\langle n\rangle}) = \beta$ y $\langle n\rangle \in A_n^{(\beta)} \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} A_n^{(\gamma)}$.
Consideremos

$$T = \bigcup_{n\in N} A_n$$

que geométricamente es de la forma:



Así, aplicando el operador secuencial al conjunto T se tiene:

$$T^{(\gamma)} = \bigcup_n A_n^{(\gamma)} \quad con \quad \gamma \leq \beta \quad y \quad (\langle n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \notin \bigcup_{\gamma<\beta} A_n^{(\gamma)}$$

Luego, tenemos

$$T^{(\beta+1)} = \bigcup_n A_n^{(\beta)} \cup \{\varnothing\}$$

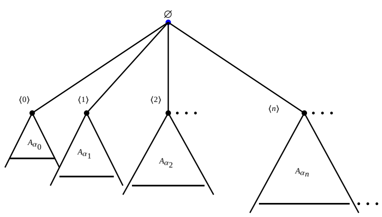
Además, $\langle n\rangle \in A^{(\beta)}_{\langle n\rangle} \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} A^{(\gamma)}_n$, es decir $(\langle n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{(\beta)}$

Por lo tanto, se tiene que $\rho(T, S_\omega) = \beta + 1 = \alpha$.

3) caso $\alpha-$límite.
Consideremos $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de ordinales convergiendo a α. Por hipótesis inductiva se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $T_n \subseteq S_\omega$ con $\rho(T_n, S_\omega) = \alpha_n$. Por el lema 3.5 se tiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \subseteq N_{\langle n\rangle}$ tal que $\rho(A_n, N_{\langle n\rangle}) = \alpha_n$ y $\langle n\rangle \in A^{(\alpha_n)}_n \setminus \bigcup_{\gamma<\alpha_n} A^{(\gamma)}_n$. Ahora, consideremos

$$T = \bigcup_{n\in N} A_n \cup \{\varnothing\}$$

que geométricamente es de la forma:



Por lo tanto, se tiene que $\rho(T, S_\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = \alpha$.

Esto finaliza la inducción y demuestra que para todo $\alpha < \omega_1$, existe $T \subseteq S_\omega$ tal que $\rho(T, S_\omega) = \alpha$. Por lo tanto $\Sigma(S_\omega) \geq \omega_1$. Por otro lado, por el lema 2.2 se tiene que el operador clausura se estabiliza en ω_1- iteraciones, por lo tanto podemos concluir que $\Sigma(S_\omega) = \omega_1$. □

4 Rango secuencial de $C_p(X)$

El objetivo en esta sección es determinar el rango secuencial de $C_p(X)$ y si es posible determinar hasta qué punto S_ω es un espacio 'test' para $C_p(X)$, es decir, el espacio de las funciones continuas contiene una copia de S_ω?. Diremos que X contiene una copia de Y, si existe $Z \subseteq X$ tal que Z es homeomorfo a Y.

Un homeomorfismo entre dos espacios topologícos X e Y, es una función biyectiva y bicontinua entre los espacios dados. Una inmersión topológica entre los espacios X e Y es una función inyectiva, abierta sobre su imagen y continua. Claramente si existe un homeomorfismo entre dos espacio, este también es una inmersión topológica, el recíproco es falso.

Definición 4.1 *Una función $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es secuencialmente continua, si dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a un punto $a \in X$, entonces $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a) \in Y$*

Una función continua es secuencialmente continua, el recíproco en general no es cierto.

Definición 4.2 *Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff. Diremos que $F : X \to Y$ es una inmersión secuencial si:*

1) *F es inyectiva,*
2) *F es secuencialmente continua,*
3) *Sucesiones convergentes en el rango de F provienen de sucesiones convergentes en el dominio de F.*

Si existe una inmersión topológica entre dos espacios topológicos X e Y, entonces ésta inmersión también es secuencial. Además, la imagen de X bajo la inmersión secuencial será llamada una copia secuencial de X en Y. Finalmente consideraremos, en este trabajo, otro tipo de inmersión.

Definición 4.3 *Una función $H : S_\omega \to Z$ definida por $t \to z_t$ es una $F-$ inmersión si satisface :*

1) $\text{lím}_{i\to\infty} z_{t^\frown i} = z_t$ *para cualquier $t \in S_\omega$;*
2) *Si $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S_ω tal que existe $t \in S_\omega$, y $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con $t^\frown m_i < t_i$, $m_i < m_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $(z_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ no tiene punto límite en Z;*
3) *$z_s \neq z_t$ para todo $s \neq t \in S_\omega$.*

Esta función la denominamos una $F-$ *inmersión*, por Fremlin. A la imagen de S_ω bajo la $F-$ inmersión sera llamada una $F-$ copia de S_ω en Z. Claramente de las definiciones 4.2 y 4.3, tenemos que si existe una inmersión secuencial entre el espacio de Arkhangel'skiĭ-Franklin (S_ω) y un espacio topológico Z, entonces ésta también es una F-inmersión. Una pregunta natural es que si los siguientes recíprocos se cumplen: si $H : S_\omega \to Y$ es una F-inmersión, entonces H es una inmersión secuencial y H es una inmersión topológica.

Ahora, veremos que si existe una inmersión secuencial $F : X \to Y$, entonces se cumplen algunas condiciones entre el operador secuencial, el rango secuencial de subconjuntos y el rango entre espacios.

Teorema 4.4 *Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff. Si $F : X \to Y$ es una inmersión secuencial, entonces para todo $A \subseteq X$ se cumple:*

1) *$F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$, para todo $\alpha \leq \omega_1$.*
2) *$\rho(A, X) = \rho(F(A), F(X))$.*
3) *$\Sigma(X) \leq \Sigma(Y)$.*

Demostración.

1) La prueba del item 1 la haremos por inducción.

 a) Caso base $(\alpha = 1)$.

  i) Sea $x \in (F(A))^{(1)}$. Por definición de operador secuencial se tiene que, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

en $F(A)$ tal que $x_n \to x$. Puesto que, F es una inmersión secuencial, entonces existe una sucesión (y_n) en A tal que $F(y_n) = (x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $y_n \to y$. Luego, se tiene que $y \in A^{(1)}$. Por ende, también se tiene que $F(y) \in F(A^{(1)})$. Pero $F(y) = x \in F(A^{(1)})$. Por tanto, $F(A^{(1)}) \subseteq (F(A))^{(1)}$.

ii) Sea $x \in F(A^{(1)})$. Como F es una inyección entre X e Y, entonces F es una biyección entre X y $F(X)$. Así, existe $y \in A^{(1)}$ tal que $F(y) = x$. Por otro lado, tenemos que si $y \in A^{(1)}$ entonces existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $y_n \to y$. En consecuencia, se tiene que $F(y_n)$ está en $F(A)$. Luego $F(y_n) \to F(y) \in (F(A))^{(1)}$. Por lo tanto, $F(A^{(1)}) \subseteq (F(A))^{(1)}$.

Ahora supongamos que el item 1 del teorema es valido para $\beta < \alpha$.

b) Caso $\alpha-$ sucesor $(\alpha = \beta + 1)$.
Aplicando la hipótesis inductiva para β, podemos considerar que $F(A^{(\beta)}) = (F(A))^{(\beta)}$. Luego tenemos que $F(A^{(\alpha)}) = F(A^{(\beta+1)})$. Pero $F(A^{(\beta+1)}) = F((A^{(\beta)})^{(1)})$. Ahora bien aplicando el caso base y la hipótesis inductiva se tiene: $F((A^{(\beta)})^{(1)}) = (F(A^{(\beta)}))^{(1)} = ((F(A)^{(\beta)}))^{(1)} = (F(A))^{\beta+1}$. Además,$(F(A))^{\beta+1} = (F(A))^{(\alpha)}$. Por tanto, se tiene que $F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$.

c) Caso $\alpha-$ límite.
Consideremos $A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}$. Así, se tiene $F(A^{(\alpha)}) = F(\bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)})$. Como F es una inmersión secuencial, tenemos que $F(\bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(A^{(\beta)})$. Por hipótesis inductiva sabemos que para cualquier $\beta < \alpha$ se cumple $F(A^{(\beta)}) = (F(A))^{(\beta)}$, por ende se tiene $\bigcup_{\beta<\alpha} F(A^{(\beta)}) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(A)^{(\beta)}$. Pero $\bigcup_{\beta<\alpha} F(A)^{(\beta)} = (F(A))^{(\alpha)}$. Por lo tanto, queda probado que $F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$ para $\alpha-$ límite.

2) Probemos el item 2.

Sea $\rho(A, X) = \alpha$. luego sabemos por definición de rango secuencial de un subconjunto de un espacio que, $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$. Aplicando F a esta ultima igualdad tenemos que, $F(A^{(\alpha)}) = F(A^{(\alpha+1)})$. Por el item 1 de este teorema tenemos: $(F(A))^{(\alpha)} = (F(A))^{(\alpha+1)}$. Por ende, $\rho(F(A), F(X)) \leq \rho(A, X)$. Por otro lado, puesto que F es una inmersión secuencial y acabamos de probar $\rho(F(A), F(X)) \leq \rho(A, X)$, entonces $\rho(F^{-1}(B), X) \leq \rho(B, F(X))$ ya que F^{-1} también es una inmersión secuencial. En consecuencia, si consideramos $F^{-1}(B) = A$, tendriamos que $\rho(A, X) \leq \rho(F(A), F(X))$. Por lo tanto, $\rho(F(A), F(X)) = \alpha$.

3) Probemos el item 3.

Lineas arribas demostramos que $\rho(A, X) = \rho(F(A), F(X))$, por ende se tiene:

$$\Sigma(X) = \sup\{\rho(A, X) : A \subseteq X\}$$

$$= \sup\{\rho(F(A), F(X)) : F(A) \subseteq F(X)\} \leq \Sigma(Y).$$

□

Como consecuencia del teorema 4.4 se tiene:

Corolario 4.5 *Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff. Si $F : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces para todo $A \subseteq X$ se cumple:*

1) $F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$*, para todo* $\alpha \leq \omega_1$.
2) $\rho(A, X) = \rho(F(A), Y)$.
3) $\Sigma(X) = \Sigma(Y)$.

Analogamente tenemos.

Lema 4.6 *Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff. Si $F : S_\omega \to Z$ es una F-inmersión, entonces para todo $A \subseteq S_\omega$ se cumple:*

1) $F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$*, para todo* $\alpha \leq \omega_1$.
2) $\rho(A, S_\omega) = \rho(F(A), F(S_\omega))$.
3) $\Sigma(S_\omega) \leq \Sigma(Z)$.

Terminaremos esta sección mostrando que si una función entre S_ω y $C_p(X)$ satisface ciertas condiciones, entonces la función es una inmersión secuencial.

Teorema 4.7 *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Si $F : S_\omega \to C_p(X)$ satisface:*

(i) F es inyectiva,
(ii) F es secuencialmente continua,
(iii) Cualquier sucesión $(t_k) \in S_\omega$, tal que existe $t \in S_\omega$ y existe una sucesión estrictamente creciente (m_k) con $t\hat{\ } m_k \prec t_k$, entonces $F(t_k)$ no converge,
(iv) Si $(\exists\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $(\exists k \in \mathbb{N})$ con $\alpha\lceil n \leq t_k$, entonces $F(t_k)$ no converge,

entonces F es una inmersión secuencial.

Demostración. Solo hace falta mostrar que sucesiones convergentes en $F(S_\omega)$ provienen de sucesiones convergente en S_ω, es decir, si $F(t_k)$ es una sucesión que converge a $F(t) \in F(S_\omega)$, entonces $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $t \in S_\omega$. La prueba la haremos por contrareciproco. Sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión que no converge a $t \in S_\omega$, entonces probemos que la sucesión $F(t_k)$ no converge. Por la caracterización de las sucesiones no convergentes en S_ω se tiene que la sucesión (t_k) es de la forma:

1) $(\exists\ A \subseteq \mathbb{N}$ infinito $)$, $(\exists t \in S_\omega)$ y $(\exists (m_k)_{k\in A} \uparrow)$ una sucesión tal que $(\forall k \in A)$ se tiene que $t\hat{\ } m_k \prec t_k$. o bien
2) $(\exists\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$, $(\exists k \in \mathbb{N})$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})$ se tiene que $\alpha\lceil n \leq t_k$, entonces (t_n) no converge

En cualquiera de los dos caso se tiene, por hipótesis item (iii) y (iv)) respectivamente, $F(t_k)$ no converge. Esto culmina la prueba que F es una inmersión secuencial. □

Definiremos una nueva topología usando como conjuntos abiertos los conjuntos secuencialmente abiertos de un espacio topológico (X, τ) dado.

Correflexión secuencial

Definición 4.8 *Sea (X, τ) un espacio topológico, consideremos σ_τ la colección de todos los conjuntos $\tau-$ secuencialmente abiertos.*

Lema 4.9 *σ_τ es una topología.*

A σ_τ la llamaremos la topología de la correflexión secuencial y (X, σ_τ) lo llamaremos espacio topológico de la correflexión secuencial. Muchas veces al espacio (X, σ_τ) lo denotaremos con σX, siempre y cuando esto no se preste a confusión. Podemos observar que la topología σ_τ es más fina que la topología τ, es decir $\tau \subseteq \sigma_\tau$. El siguiente lema muestra que las dos topologías τ y σ_τ tienen las mismas sucesiones convergentes.

Lema 4.10 *(X, τ) (X, σ_τ) poseen las mismas sucesiones convergentes.*

Demostración.

1) Puesto que $\tau \subseteq \sigma_\tau$, entonces toda sucesión $\sigma_\tau-$ convergente es $\tau-$ convergente.
2) Ahora probemos que toda sucesión $\tau-$ convergente es $\sigma_\tau-$ convergente. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción $\tau-$ convergente a $x \in X$ y consideremos $U \in \sigma_\tau$ tal que $x \in U$. Puesto que U es $\tau-$ secuencialmente abierto $x \in U$, entonces cualquier sucesión en X que converja a $x \in U$ se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión está en U a partir de n_0, es decir (x_n) está en U para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\sigma_\tau-$ convergente. □

Si una topología es más fina que otra, es decir $\tau \subseteq \rho$, entonces sus respectivas correflexiones σ_τ y σ_ρ mantienen la inclusión $(\sigma_\tau \subseteq \sigma_\rho)$. Lo cual implica que σ_ρ es más fina que σ_τ.

Lema 4.11 *Consideremos τ y ρ dos topologías sobre el conjunto X. Si $\tau \subseteq \rho$, entonces $\sigma_\tau \subseteq \sigma_\rho$.*

Teorema 4.12 *(X, σ_τ) es un espacio secuencial.*

Otra manera de probar que un espacio topológico es secuencial es la siguiente:

Corolario 4.13 *Sea τ una topología sobre X. τ es secuencial si, y sólo si, $\tau = \sigma_\tau$.*

Demostración.

1) Supongamos que τ es secuencial probemos que $\tau = \sigma_\tau$. Claramente $\tau \subseteq \sigma_\tau$. Ahora nos hace falta probar que $\sigma_\tau \subseteq \tau$. En efecto, sea $U \in \sigma_\tau$, en consecuencia U es $\tau-$ secuencialmente abierto. Ahora bien, como τ es secuencial y U es $\tau-$ secuencialmente abierto entonces $U \in \tau$. Por lo tanto $\sigma_\tau \subseteq \tau$.
2) La prueba del recíproco se desprende del teorema 2.0.5. pues σ_τ es secuencial y por hipótesis $\tau = \sigma_\tau$. □

Si consideramos el espacio topológico (X, τ), el siguiente corolario muestra que la topología de la correflexión secuencial es la menor topología secuencial que contiene a τ.

Corolario 4.14 *Sea τ y ρ dos topologías sobre el conjunto X. Si $\tau \subseteq \rho$ y ρ es secuencial entonces $\sigma_\tau \subseteq \rho$.*

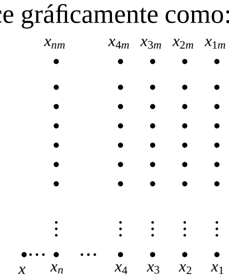
Espacio peine

Definición 4.15 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Consideremos el subespacio de X formado por:*

$$P = \{x\} \bigcup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

donde $(x_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en (X, τ) tales que $\lim_{m\to\infty} x_{nm} = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $x_{nm} \neq x_n$. Además $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión en (X, τ) que converge a $x \in X$ con $x_n \neq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Al subespacio P lo llamaremos espacio peine.

Un peine luce gráficamente como:



Llamaremos una **diagonal en un peine** $P \subseteq X$ a una sucesión $(x_{n_i m})$ que converge a x, con n_i estrictamente creciente.

Rango secuencial de $C_p(X)$

Presentaremos una demostración, un poco, más general del Teorema 7,1 que enunciaremos a continuación. Es importante destacar que Fremlin para demostrar el Teorema 7,1 construye una F-inmersión entre S_ω y $C_p(X)$. Mostrare, agregandole a la idea de Fremlin, que se puede construir una inmersión secuencial entre S_ω y $C_p(X)$

Teorema 4.16 *(Fremlin DH, 1994) Sea X un espacio topológico Hausdorff no vacío. El rango secuencial de $C_p(X)$ es: 1 ó ω_1.*

Demostración. Supongamos que $\Sigma(C_p(X)) \neq 1$. Por la definición de rango secuencial se tiene que existe $P \subseteq C_p(X)$ tal que $\rho(P, C_p(X)) > 1$. El conjunto P es un peine sin diagonales, es decir $P = \{f(x)\} \bigcup \{f_i(x) : i \in \mathbb{N}\} \bigcup \{f_{ij}(x) : i, j \in \mathbb{N}\}$ tal que:

(i) $f_i(x) = \lim_{j\to\infty} f_{ij}(x)$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y $x \in X$,

(ii) $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$.

En efecto, $f(x)$ no es límite de ninguna sucesión en $\{f_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$, pues si eso ocurriera, $\sigma P \approx S(\omega)$ y por ende $\rho(\sigma P, C_p(X)) = 1$. Produciendo una contradicción con lo supuesto. Lo que demuestra que P es un peine sin diagonales. Por otro lado, consideremos

$$h_{ij}(x) = i|f_{ij}(x) - f_i(x)|$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Observemos que:

(i) $h_{ij}(x)$ es continua, pues es composición de funciones continuas.

(ii) $\lim_{j\to\infty} h_{ij}(x) = 0$
Demostración. $\lim_{j\to\infty} h_{ij}(x) = \lim_{j\to\infty} i|f_{ij}(x) - f_i(x)| = i|\lim_{j\to\infty} f_{ij}(x) - f_i(x)| = i|f_i(x) - f_i(x)| = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

(iii) Si consideramos $\langle h_{m(i),n(i)}(x)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$, donde $\langle m(i)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, entonces $\langle h_{m(i),n(i)}(x)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ no esta acotada en $\mathbb{R}^X$.

Demostración. Supongamos que $\langle h_{m(i),n(i)}\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathbb{R}^X$. Luego $|f_{m(i),n(i)}(x) - f(x)| = |f_{m(i),n(i)}(x) - f_{m(i)}(x) + f_{m(i)}(x) - f(x)|$

$$\leq |f_{m(i),n(i)}(x) - f_{m(i)}(x)| + |f_{m(i)}(x) - f(x)|$$

De la definición de $h_{ij}(x)$ tenemos que :

$$|f_{m(i),n(i)}(x) - f_{m(i)}(x)| = m_{(i)}^{-1} h_{m(i),n(i)}(x)$$

Así, se tiene:

$$|f_{m(i),n(i)}(x) - f(x)| \leq m_{(i)}^{-1} h_{m(i),n(i)}(x) + |f_{m(i)}(x) - f(x)|$$

Luego, haciendo tender $m(i)$ a ∞, obtenemos: $|f_{m(i),n(i)}(x) - f(x)| \to 0$. En consecuencia $f_{m(i),n(i)}(x) \to f(x)$ el cual genera una contradicción pues P es un peine sin diagonales.

En consecuencia el conjunto $S = \{0\} \bigcup \{h_{ij}(x) : i, j \in \mathbb{N} \;\;\&\;\; x \in X\}$, es un abanico sin diagonales.

Para demostrar que el rango secuencial de $C_p(X)$ es ω_1, debemos construir una inmersión secuencial entre S_ω y $C_p(X)$ (Fremlin construye una F-inmersión entre S_ω y $C_p(X)$, utilizaremos las funciones construidas por él para construir la inmersión secuencial). Consideremos para $t \in S_\omega$ lo siguiente:

$$J_t = \{(i, j) : \exists u, \quad u^\frown i^\frown j \leq t\}$$

$$g_t(x) = max(\{0\} \bigcup \{h_{ij}(x) : (i, j) \in J_t\})$$

Por ejemplo, si $t = \langle 0, 1, 2\rangle$, entonces $J_t = \{(0, 1), (1, 2)\}$. Además, los conjuntos J_t y la función $g_t(x)$ poseen algunas propiedades como:

1) Si $t \leq s$, entonces $J_t \subseteq J_s$.
2) Si $t \leq s$, entonces $g_t(x) \leq g_s(x)$.
3) Si $t \leq t^\frown n$, entonces o bien $g_{t^\frown n}(x) = g_t(x)$ o bien $g_{t^\frown n}(x) = h_{i_k n}(x)$, donde i_k es el ultimo elemento de la sucesión t
4) Si $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S_ω tal que si $t \in S_\omega$ y $\langle m(i)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente con $t^\frown m(i) < t_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $g_{t^\frown m(i)^\frown i_n}(x)$ no está acotada.

Agregaremos a los conjuntos J_t el siguiente par ordenado $(|t|, t(|t| - 1))$ y llamemos K_t a este conjunto, es decir:

$$K_t = J_t \cup \{(|t|, t(|t| - 1))\}$$

Ahora consideremos la función construida por Fremlin en (Fremlin DH, 1994)

$$F : S_\omega \to C_p(X)$$

definida por $F(t)(x) = g_t(x)$, con $x \in X$. F cumple con las condiciones (i) y (ii) de la definición de F-inmersión, pero F no es inyectiva.

Probemos que: F no es inyectiva. Sean $t = \langle i\rangle$ y $s = \langle j\rangle$ dos elementos en el primer nivel de S_ω tales que $t \neq s$, entonces $J_t = J_s = \varnothing$. Por ende se tiene que, $g_t(x) = g_s(x) = 0$, para $x \in X$ fijo. Por lo tanto F no es inyectiva.

Por otra parte definamos la siguiente función:

$$I : S_\omega \to C_p(X)$$

definida por:

$$I(\varnothing)(x) = F(\varnothing)(x)$$

$$I(t^\frown n) = \text{máx}(I(t), F(t^\frown n), h_{(|t|+1,n)})$$

Observemos que, $F(t) \leq I(t) \leq I(t^\frown n)$. Además I es una función secuencialmente continua y satisface las condiciones (iii) y (iv) del Teorema 4.7. En efecto

1) I es secuencialmente continua.
Sea $(t^\frown n)$ una sucesión convergente a $t \in S_\omega$. Consideremos $I(t^\frown n)$, probemos que la sucesión formada por las imagenes de $t^\frown n$ converge a $I(t)$.

$$\lim_{n\to\infty} I(t^\frown n) = \text{máx}\left(\lim_{n\to\infty} I(t), \lim_{n\to\infty} F(t^\frown n), \lim_{n\to\infty} h_{(|t|+1,n)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} I(t^\frown n) = \text{máx}\Big(I(t), F(t), 0\Big)$$

Como $0 \le F(t) \le I(t)$, entonces $\lim_{n\to\infty} I(t^\frown n) = I(t)$. Por lo tanto, I es secuencialmente continua.

2) Si $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S_ω tal que si $t \in S_\omega$, y $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con $t^\frown m_i \prec t_i$, $m_i < m_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $I((t_i)_{i\in\mathbb{N}})$ no tiene punto límite en $C_p(X)$.
   En efecto, si aplicamos I a la sucesión (t_i) podemos notar que $I(t_i) \ge F(t^\frown m_i^\frown n_i)$, pues $t^\frown m_i^\frown n_i \le t_i$, entonces $(m_i, n_i) \in J_{t^\frown m_i^\frown n_i} \subseteq J_{t_i}$. Esto permite concluir que $I(t_i)$ no está acotada, ya que $F(t^\frown m_i^\frown n_i)$ con (m_i) estrictamente creciente no está acotada. Por lo tanto $I(t_i)$ no converge.

3) Si $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S_ω tal que si $(\exists\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $(\exists k \in \mathbb{N})$ con $\alpha\lceil n \le t_{k_n}$, entonces $I(t_k)$ no tiene punto límite en $C_p(X)$.

   En efecto, considerando una sucesión como en la hipótesis del item 3 y aplicando I a dicha sucesión podemos notar que $I(t_{k_n}) \ge I(\alpha\lceil n) \ge h_{(n,\alpha(n-1))}$. Luego para $n \in \mathbb{N}$ estrictamente crecientes se tiene que $h_{(n,\alpha(n-1))}$ no esta acotada, por lo tanto $I(t_{k_n})$ no esta acotada. En consecuencia, $I(t_{k_n})$ no converge.

La función I no es inyectiva pues F no es inyectiva. Modificaremos, un poco, la función I, sin que I pierda las condiciones 1 y 2 de la definición de inmersión secuencial. Consideremos la familia de combinaciones racionales lineales de las funciones $g_t(x)$, es decir

$$\Lambda = \{\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i g_t(x) : \lambda_i \in \mathbb{Q} \quad \& \quad g_t(x) \in C_p(X)\}$$

Esta familia sólo puede contener una cantidad numerable de funciones constantes, entonces existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que la función constantemente δ no es una combinación racional lineal de los $g_t(x)$. Así, definamos la siguiente función:

$$I : S_\omega \to C_p(X)$$

definida por:

$$I(\varnothing)(x) = F(\varnothing)(x)$$

$$I(t^\frown n) = \text{máx}(I(t), F(t^\frown n), h_{(|t|+1,n)}) + \delta H(t)$$

Donde $H(t)$ es la inyección continua construida en 3.4.

I es una inmersión secuencial entre S_ω y $C_{p(X)}$ y $\Sigma(S_\omega) = \omega_1$, entonces por el teorema 4.4 tenemos que $\omega_1 = \Sigma(S_\omega) \le \Sigma(C_p(X))$. Además, por el lema 2.2 tenemos que $\Sigma(C_p(X)) \le \omega_1$. Por lo tanto, se tiene que $\Sigma(C_p(X)) = \omega_1$. □

Más aún, S_ω se puede sumergir secuencialmente en un subespacio de $C_p(X)$, obteniendo así una copia secuencial de S_ω en $C_p(X)$.

Proposición 4.17 *Si $f : (X,\tau) \to (Y,\rho)$ es una inmersión secuencial, entonces $f(X) \approxeq^{sec} X$. Más aún, $(X,\sigma_\tau) \approxeq (f(X), \sigma_{\rho\lceil f(X)})$.*

Corolario 4.18 *Sea (X,τ) espacio topológico. Si $\Sigma(C_p(X)) \ge 2$, entonces existe $Y \subseteq C_p(X)$ tal que $S_\omega \approxeq^{sec} Y$. Más aún $S_\omega \approxeq \sigma Y$.*

Referencias.

Kechris Alexander S, 1994, Classical Descriptive Set Theory, Springer-Verlag.

Arkhangel'skiĩ AV, Franklin SP, 1968, Ordinal invariants for topological space, Mich Math J, pp 313-320.

Arkhangel'skiĩ AV, 1992, Topological funtion space, Mathematics and its applications, Soviet series, Vol. 78.

Arkhangel'skiĩ AV, Bella A, 1996, Coutable fantightness versus countable tightness, Comment Math, Universidad de Carolina, Vol 37, pp 567-578.

Baber S, Boone JR, 1982, Test spaces for infinite sequential order, Topology and its Applications, Vol 14, pp 229-240.

Uzcátegui C, 2003, On the complexity of the subspaces of S_ω, Fund. Math, Vol 176,pp 1-16.

Fremlin DH, 1994, Sequential convergence in $C_p(X)$, Comment Math, Univ. Carolinae, Vol 35, pp 371-382.

Todorcevic S, Uzcátegui C, 2001, Analytic topologies over countable sets, Topology and its applications, Vol 111, pp 299-326.

Srivastava SM, 1998, A course On Borel Sets, Springer-Verlag.

Vaunghan JE, 2001, Two spaces homeomorphic to $Seq(p)$, Comment. Math, Univ. Carolinae, Vol 42, pp 209-218.

Recibido: 25 de mayo de 2017

Aceptado: 19 de junio de 2017

Rodríguez, Armando: *MSc en Matemáticas, es profesor Asistente del Departamento de Cálculo de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de los Andes. Correo electrónico: armandorodriguez@ula.ve.*