Revista Ciencias de la Educación
Vol. 27, Nro. 50, Julio- Diciembre 2017. ISSN: 1316-5917

Investigación

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y GEOGEBRA EN EL ESTUDIO DE FUNCIONES. UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

The study of functions with mathematical modeling and Geogebra. An experience with engineering students

María Elena Bejarano Arias[1]

José Ortiz Buitrago[2]

[1]Universidad Nacional Experimental de Guayana, Ciudad Guayana, Venezuela.
[2]Universidad de Carabobo, Campus La Morita. Maracay, Venezuela.
Correo-e: [1]mbejaranouneg@yahoo.com, [2]jortiz@uc.edu.ve

Resumen

Este estudio se enmarca en el ámbito de la modelización matemática utilizada en la enseñanza de funciones a futuros ingenieros, mediante el uso del GeoGebra como recurso didáctico. El objetivo del trabajo fue analizar las producciones de los estudiantes, relacionadas con el concepto de función y sus propiedades, mediante la implementación de tareas para resolver problemas de modelización matemática; incluyendo fenómenos del ámbito de la ingeniería. Desde un enfoque cualitativo y un abordaje interpretativo, se analizaron las producciones de los estudiantes, de dos secciones de matemática I de ingeniería, año 2016, mediante una descripción de las competencias contempladas por el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Rico, 2005) y complementadas por las competencias de modelización que plantea Maaß (2006). Se encontró que los estudiantes aprendieron sobre relaciones funcionales y sus propiedades; asimismo, mostraron interés por los fenómenos de ingeniería y las potencialidades y restricciones de los modelos encontrados.

Palabras clave: Educación matemática en ingeniería, Modelización Matemática, GeoGebra, Funciones reales.

Abstract

This study is part of the field of mathematical modeling used in the teaching of functions to future engineers, through the use of GeoGebra as a didactic resource. The objective of the work was to analyze the students' productions, related to the concept of function and its properties, through the implementation of tasks to solve mathematical modeling problems; including phenomena in the field of engineering. From a qualitative approach and an interpretive approach, students' productions were analyzed, from two sections of mathematics I, engineering, year 2016, by means of a description of the competences studied according to Programme for International Student Assessment (Rico, 2005), and complemented by the modeling competences that Maaß (2006) proposes. It was found that the students learned about functional relationships and their properties; they also showed interest in the engineering phenomena and the potential and restrictions of the models found.

Keywords: Engineering Mathematics Teaching, Mathematical modeling, GeoGebra, Real functions**.**

Recibido: 10/17/2017 **Enviado a árbitros:** 03/08/2017 **Aprobado:** 25/10/2017

Introducción

El estudio se enmarca en el ámbito de la modelización matemática utilizada como estrategia metodológica en la enseñanza de funciones a futuros ingenieros, mediante el uso del software GeoGebra. Se indaga en torno a:

a) ¿Qué aprendizajes se logran con tareas de modelización matemática, en un ambiente de fenómenos vinculados a la ingeniería, diseñadas para que los alumnos consoliden sus conocimientos sobre funciones, en un ambiente mediado por GeoGebra?

b) ¿Cuáles competencias logran los estudiantes, al participar en un ambiente de aprendizaje en la resolución de problemas contextualizados, donde se estudian relaciones funcionales con apoyo del GeoGebra?

Modelización Matemática en la Formación de Ingenieros.

Se concibe la modelización matemática tal y como es asumida por Ortiz (2002), “como el proceso mediante el cual se construye y se estudia una relación entre un fenómeno y una estructura, a partir de una situación o problema del mundo real con la finalidad de aproximarnos a este último” (p. 66-67). Esta visión está en consonancia con la propuesta de Niss, Blum y Galbraith (2007). Por otro lado, Krick (1995), sostiene que el ingeniero es un solucionador de problemas, quien se encarga precisamente de estudiar y diseñar un proceso o un dispositivo físico que brinde opciones de respuestas a un problema; en otras palabras establece posibles relaciones (modelos) como alternativas de solución a una situación problemática vinculada con la realidad. En este sentido, Cruz (2005, 2010), afirma que el ingeniero está llamado a aplicar modelización matemática como una actividad propia de su reto permanente como profesional que se enfrenta desde su experiencia y conocimientos técnicos a situaciones problemáticas contextualizadas. Más aún, Mendible y Ortiz (2007), señalan que:

> …la modelización, como proceso gestor de cambio y de contextualización ejercida por el ingeniero, representa, en los tiempos actuales, una filosofía de trabajo, que además posee dos sentidos, de la realidad hacia el modelo y del modelo a la realidad (p 133).

En consecuencia, este trabajo centró su foco de interés en indagar cómo los ingenieros en formación, mediante el desarrollo de un proceso de modelización matemática como estrategia didáctica, comprenden las funciones a partir de las cuales se puede describir fenómenos; además de propiciar desde la ejecución del ciclo de modelización matemática en clases, la consolidación de competencias de modelización matemática planteadas por Maaß (2006). Para ello, se implementaron tareas de modelización matemática en la enseñanza de las funciones reales, teniendo presentes los cuatro momentos fundamentales planteados por Ortiz (2002), en el proceso de modelización de una situación problema: 1) Identificación de la situación problema, 2) Construcción del modelo matemático, 3) Elección de los contenidos y métodos matemáticos apropiados y 4) La interpretación y validación de las conclusiones.

Por otra parte, se asume desde las ideas de Cruz (2005) que el desarrollo del proceso de modelización matemática debe generar un diseño, el cual ha de ser producto de los procesos internos que se den en el estudiante y que fomentan ciertas habilidades y competencias matemáticas; tal es el caso de las competencias matemáticas determinadas en el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) (Rico, 2005). Es decir, el ingeniero debe estudiar fenómenos y mediante un proceso de modelización, diseñar un modelo de una situación sintetizada y matematizada del fenómeno como una alternativa de respuesta a una situación particular, la cual debe ser verificada y validada durante todas y cada una de las fases que comprende el ciclo de modelización matemática. Todas estas habilidades se tienen en cuenta en este estudio dentro del ciclo de modelización matemática a seguir, en cada situación problemática planteada, considerando el modelo de competencias PISA y la propuesta de Maaß (2006), relacionada con las competencias de modelización.

En consecuencia, la modelización matemática no se manejará sólo como una competencia que deben alcanzar los estudiantes, sino como todo un proceso que persigue el desarrollo de todas y cada una de las etapas correspondientes al ciclo de modelización, donde la matemática no es sólo un cuerpo de conocimientos, sino como plantea Cruz (2010), es una actividad de reto permanente al intelecto para los actores que intervienen en el hecho educativo.

En base a lo anterior, se implementaron en esta experiencia, una serie de tareas de modelización matemática, diseñadas para impulsar e inducir al desafío colectivo de resolver problemas contextualizados durante las clases; de manera que los estudiantes pudieran comprender las funciones y sus elementos característicos, desde la reflexión y el análisis de problemas cuyo enunciado se genere de fenómenos reales.

Características de las Tareas de Modelización Matemática.

Se tomaron en cuenta, durante la planificación y el diseño de las tareas de modelización utilizadas, los principios generales de McCombs (1998), es decir:

1) Las actividades deben animar a los estudiantes en su propio aprendizaje.
2) Las actividades deben estar relacionadas con las necesidades personales,

intereses y/o objetivos (directa e indirectamente) y deben ser a la vez desafiantes y realizables.

3) Las actividades deben ser adaptadas a las necesidades únicas de los estudiantes, que permitan a los estudiantes tomar riesgos y ser facilitadas por un adulto que vea a los estudiantes con potencial éxito.

En este sentido, Blum, Houston y Qi-Jiang (2003), admiten que las actividades de modelización matemática y la motivación para el aprendizaje pueden influir en el interés de los estudiantes en un aprendizaje para toda la vida. Asimismo, para estimular el interés de los estudiantes hacia las matemáticas y desarrollar su espíritu de pensamiento activo y de investigación, la experiencia cuenta con la resolución de problemas (especialmente de modelización matemática), que incluye investigación de fenómenos contextualizados, incorporando el uso de la tecnología con la implementación del GeoGebra.

En cuanto a la estructura de las tareas de modelización, se han propuesto 3 tipos de tareas en base a lo considerado por el Proyecto PISA (Rico, 2005):

1) *Tareas de Reproducción*: que consistieron en realizar operaciones matemáticas básicas y uso de fórmulas simples y algoritmos ya conocidos; por ejemplo: al completar cuadrados para asociar el modelo a una forma canónica básica.

2) *Tareas de Conexión*: con el propósito de relacionar ideas para resolver los problemas propuestos. Para ello, se indujo a los estudiantes a buscar y usar nuevas estrategias o formas para intentar resolver situaciones problemáticas del fenómeno estudiado. Por ejemplo: al interpretar, explicar y representar los modelos construidos en varias dimensiones del pensamiento: la algebraica, la geométrica y la numérica.

3) *Tareas de Reflexión*: al describir demandas de tareas que requerían comprensión y reflexión, creatividad e innovación. En estas se relacionaron conocimientos previos para resolver problemas más complejos, donde se buscaba generalizar y justificar los resultados obtenidos.

Contenidos matemáticos estudiados

Se trabajaron fenómenos contextualizados que fueron modelados mediante funciones polinómicas, exponenciales, trigonométricas y sus inversas. Se estudiaron propiedades de los modelos construidos; tales como: el dominio, el rango, las asíntotas (si existían), el dominio restringido de la función inicial para hallar su inversa, las traslaciones verticales y horizontales, las reflexiones con los ejes coordenados, la compresión o dilatación y amplitud de las curvas, incluso al cambiar los parámetros existentes en el modelo. Representaciones de funciones en varios sistemas de representación: el algebraico, el geométrico, el numérico o tabular. Las formas canónicas de las funciones reales ya mencionadas. Diagramas de dispersión, ajuste de curvas. Estudio de los parámetros y variables presentes en los modelos.

Metodología

La investigación es un estudio descriptivo, bajo un enfoque cualitativo con un abordaje interpretativo, donde se utilizó la didáctica de la matemática en contexto, implementando modelización matemática de fenómenos asociados al accionar del ingeniero. Se propusieron problemas relacionados con fenómenos de crecimiento poblacional, de la economía del país o de temas ambientales. Tales como, los comportamientos demográficos, las importaciones y exportaciones de un Estado o Nación en materia de rubros alimenticios, recursos minerales, problemas de contaminación ambiental que presentan algunas de las industrias básicas en

Venezuela. En algunos casos se presentó al estudiante el modelo ya construido, con la idea que reflexionara en torno a él y su validación. En otros casos, los estudiantes debían construir el modelo que representaba una aproximación al comportamiento del fenómeno estudiado.

En cuanto a las técnicas de recolección y validación de la información, se utilizaron registros de observaciones diarias, tanto en las sesiones de trabajo como desde las tareas entregadas por los estudiantes; en consecuencia, se realizó observación participante (Martínez, 1999), donde los investigadores y los docentes involucrados en las prácticas de laboratorio guiaron naturalmente el grupo y el análisis, a partir de los trabajos realizados por los estudiantes.

Los instrumentos que permitieron la obtención de información tuvieron sus bases en la observación participante registrada en cada sesión de trabajo; de ahí que toda la información recabada fue analizada tomando en cuenta las preguntas de la investigación, sus objetivos, los referentes teóricos en contraste con la información que se genera de las tareas de modelización entregadas por los estudiantes. En consecuencia, se complementaron los resultados de la actividad de modelización matemática dirigida en clases con aquella que surgió del intercambio grupal entre estudiantes (sin acompañamiento del docente) para resolver las tareas asignadas.

Actividades de modelización matemática

En el desarrollo de cada sesión de trabajo, se intentó integrar grupos de estudiantes y se incentivó colectivamente a evaluar e interpretar los datos, construir modelos, resolver modelos a través de funciones conocidas, inferir y comunicar resultados, validarlos; además de abrirse a la posibilidad de que ellos pudieran adaptar el modelo a otros contextos similares con ayuda del GeoGebra.

Previo a cada sesión de clases, se entregó a los estudiantes un guion didáctico que describió todas las actividades a ser desarrolladas en el taller. Dicho guión consistió en:

1. Motivación y objetivos del taller y su importancia.
2. Presentación del problema matemático contextualizado propuesto.
3. Generación del modelo matemático.
4. Representación del modelo en GeoGebra, que estimara el comportamiento de las variables involucradas en el fenómeno estudiado.
5. Interpretación de las transformaciones de los parámetros que intervenían en el modelo.
6. Asociación del modelo encontrado a formas canónicas predeterminadas.
7. Validación e interpretación del modelo alcanzado.
8. Diversificación del modelo matemático logrado.
9. Aportes al problema que encierra el fenómeno estudiado de tipo socioambiental, cultural, económico, demográfico, entre otros.

En los términos de Puig y Monzó (2008), estas actividades consistieron en la asociación de un fenómeno, de una situación real a una familia funcional, donde se interpretó el comportamiento de las variables, los cambios en los parámetros y características del modelo construido.

En virtud a ello, se solicitó a los estudiantes las siguientes demandas de tareas:

1.- Evaluación de la función para visualizar comportamientos en la experiencia algebraica.

2.- Interpretación de los cambios de los comportamientos de las variables independientes y dependientes de acuerdo al fenómeno estudiado.

3.- Elección de una familia de funciones expresada en su forma canónica para representar el modelo que se construyó en el problema.

4.- Traducción del modelo matemático que representa el fenómeno de una a otra de las dimensiones estudiadas: la algebraica, la geométrica, la tabular o numérica.

5.- Simulación del fenómeno, mediante la variación de los parámetros existentes en la función que lo representa mediante el GeoGebra.

6.- Evaluación del modelo.

7.- Inferencia del comportamiento de las variables que se presentaron en la relación funcional que modeló el fenómeno estudiado.

8.- Aplicación del álgebra para organizar en familias de funciones las relaciones funcionales a partir de las cuales se simularon los fenómenos estudiados. Las características del modelo se establecieron y estudiaron en el plano de las expresiones algebraicas y geométricas.

Incorporación de la Tecnología usando el GeoGebra.

Se asume, de acuerdo a las ideas de Cruz (2005), el uso de la computadora para desarrollar en los futuros ingenieros competencias profesionales, en concreto la incorporación del software GeoGebra en este estudio es un elemento fundamental para profundizar el aprendizaje y la enseñanza de las funciones.

En este sentido, la implementación de este software en el estudio buscó generar un estudiante creativo, potencialmente crítico, que adquiera los conocimientos técnicos del manejo de este programa interactivo para su uso en la resolución de problemas matemáticos, haciendo énfasis en contextos de problemas reales del mundo y utilizando como herramienta principal la modelización matemática de estos fenómenos.

Así mismo, se buscó profundizar la definición de función, mediante la construcción de sus diversas representaciones en cada dimensión, donde el GeoGebra constituyó la plataforma para viabilizar la obtención de estas distintas representaciones. Por ejemplo, desde los comandos y funciones que contiene el programa se obtuvo la expresión analítica de la función en su forma canónica; se visualizaron y analizaron el trazado de curvas desde la vista gráfica y algebraica del programa; se hallaron inversas de funciones dadas y su gráfico; se ajustaron modelos de funciones reales a partir de diagramas de dispersión creados desde una data de valores introducida en la hoja tabular del GeoGebra, cuyos datos fueron productos de registros de observaciones del comportamiento de las variables que intervenían en los fenómenos estudiados, entre otros.

Implementación de la Propuesta

Se aplicó la estrategia didáctica a dos secciones de Matemática I: una perteneciente a los cursos básicos de las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional Experimental Politécnica (UNEXPO) y la otra era del proyecto de carrera de Ingeniería en Informática en la Universidad Nacional Experimental de Guayana (UNEG), ambas instituciones de educación superior localizadas en la ciudad de Puerto Ordaz. Es decir, el estudio se llevó a cabo simultáneamente en dos Universidades de la región de Guayana; para ello, se dispuso de tres laboratorios de computación: dos instalados en la UNEXPO y el otro en la UNEG. Específicamente, los dos primeros se encuentran ubicados en la UNEXPO, en las escuelas de ingeniería industrial e ingeniería eléctrica respectivamente y un tercero en sede del proyecto de ingeniería industrial en la UNEG, sede Villa Asia.

Teniendo en cuenta el logro de los objetivos en cuanto a la propuesta de diseño de las tareas de modelización matemática, se prestó especial atención a la búsqueda de situaciones problemas contextualizadas, de tal manera de desarrollar todas las fases del ciclo de modelización; precisamente, abarcando los tipos de funciones (polinómicas, exponenciales y trigonométricas) para su estudio y caracterización, perfilando incluso matices en los parámetros existentes en los modelos construidos que incorporaron modificaciones sustanciales en esos elementos constitutivos para visualizarlos en el GeoGebra, trabajando el pensamiento variacional.

Para ello, se partió de fuentes documentales para construir el banco de situaciones problemas. Estas fuentes de información consistieron en: a) textos como Purcell y Varberg (2007); Guerreiro (1998); Niss, Blum y Galbraith (2007); Lesh, Galbraith, Haines y Hurford (2010); b) páginas web de organismos oficiales estales; tales como, el Instituto Nacional de Estadística (INE) con http://www.ine.gov.ve, el Servicio Nacional Integrado de Administración Aduanera y Tributaria, (SENIAT) en www.seniat.gob.ve; la Comisión Nacional de Telecomunicaciones (CONATEL) en www.conatel.gob.ve; c) Sitios en Internet que proporcionan datas; tales como: http://vedatos.com/stats/petroleo; http://datos.bancomundial.org; d) el trabajo de investigación de Gómez (2016) e) canales noticieros en la web: http://www.telesurtv.net y, f) videoconferencias en línea, como la de Artigue (2016) en http://youtu.be/cK5mZL3i_lQ?a .

Resultados de las Tareas de Modelización Matemática sobre Funciones con el Uso del GeoGebra.

Este análisis se realizó a partir del estudio de las tareas de modelización realizadas durante las sesiones de clases, aunado a la resolución de los problemas que fueron asignados y entregados por los estudiantes, donde se evidenció el desarrollo de procesos y competencias matemáticas y de modelización matemática, según Maaß (2006). Descripción de las tareas:

Ejemplo 1. Problema sobre el Puente Angostura (propuesto en el taller)

Figura 1. Puente de Angostura

Fuente:http://www.arqhys.com/articulos/fotos/articulos/Puente-de-Angostura-Venezuela.jpg

El puente de Angostura ubicado sobre el río Orinoco en la región de Guayana,Venezuela, fue inaugurado el 6 de enero de 1967. (http://www.arqhys.com/articulos/puente-angostura-venezuela.html.).

Sus torres principales de 119,20 metros están separadas por una distancia de 1.272 metros. El puente está suspendido por dos cables; el ancho del tablero es de 16,6 metros y ésta se encuentra aproximadamente a 57 metros del nivel del agua. Los cables tocan el tablero (carretera) en el centro del puente. Encuentre un modelo que se ajuste a la curva que describe la trayectoria de los cables.

Demanda de tareas cognitivas y de contenido exigidas:

1. Describa el problema propuesto. Represéntelo gráficamente. Diga las variables que intervienen en el fenómeno a estudiar.

2. Encuentre un modelo que se ajuste a la curva que describe la trayectoria de los cables.

3. Determine la altura de los cables a una distancia de 250 metros del centro del puente. (Suponga que la carretera es plana).

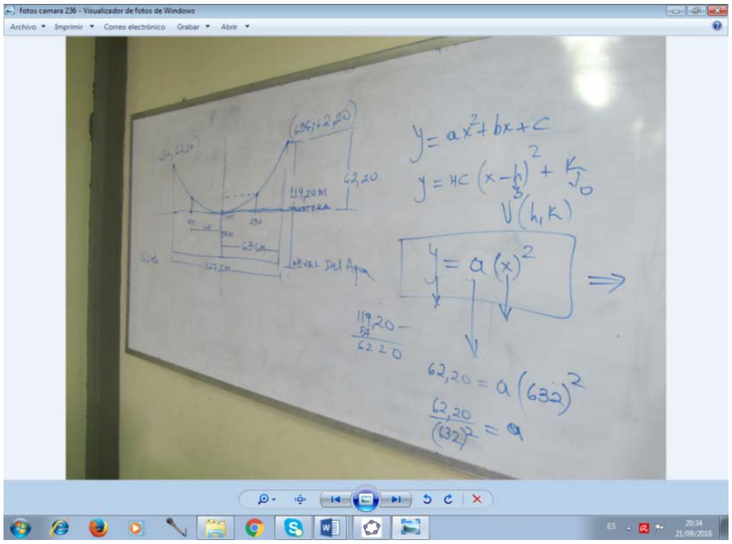
4. Visualice el problema en GeoGebra.

5. Determine la altura de los cables una vez recorrido de 700 metros en un sentido de la trayectoria del puente. Interprete el significado de las variables de acuerdo al problema en estudio.

6. Interprete de acuerdo al contexto del problema en estudio, los significados de las posibles transformaciones del parámetro que interviene en el modelo construido, cuando éste experimenta cambios. Sugerencia: use los deslizadores que proporciona GeoGebra.

7. Calcule el área de la carretera asfaltada sobre el puente Angostura.

8. Encuentre el área encerrada bajo la curva que describe el tendido de uno de los cables, las rectas que representan la altura de las torres y el eje X que constituye la carretera

Resolución del problema	**Competencias de modelización matemática** Maaß (2006)
 **Figura 2. Desarrollo del primer, segundo y tercer momento del ciclo de Modelización Matemática: Construcción del Modelo.**	Aquí, los alumnos representaron gráficamente el problema. Reconocieron las variables que intervenían en el fenómeno en estudio y encontraron el modelo $y{=}ax^2$que se ajustaba a la curva que describía la trayectoria de los cables al determinar los valores de a, b y c desde el modelo general: $y = ax^2 + bx + c$

Una vez, obtenido el modelo particular $y{=}\frac{62{,}20}{(632)^2}x^2$ lo introdujeron en la barra de entrada del GeoGebra, percibiendo simultáneamente su representación gráfica en el mismo. Luego, simularon el fenómeno, ilustrando mediante una imagen la situación problema y a continuación experimentaron el comportamiento que seguía la función generalizada ($y{=}ax^2$) al variar el parámetro a, mediante la construcción del deslizador a, el cual representaba la amplitud de la parábola.

Establecieron conjeturas: siendo a >0, mientras a es más grande la función se ajusta más al eje OY y por lo tanto la función $f$crece más rápido.

Seguidamente, determinaron la altura de los cables a una distancia de 250 metros del centro del puente, suponiendo que la carretera era plana. Determinaron la altura de los cables, una vez que se habían recorrido 700 metros en un sentido de la trayectoria del puente. Calcularon el área de la carretera asfaltada sobre el puente Angostura. Encontraron el área encerrada bajo la curva que describía el tendido de uno de los cables, las rectas que representaban la altura de las torres y el eje X, representado por la carretera sobre el puente. Tal y como se muestra en la siguiente figura extraída de la pantalla principal del GeoGebra:

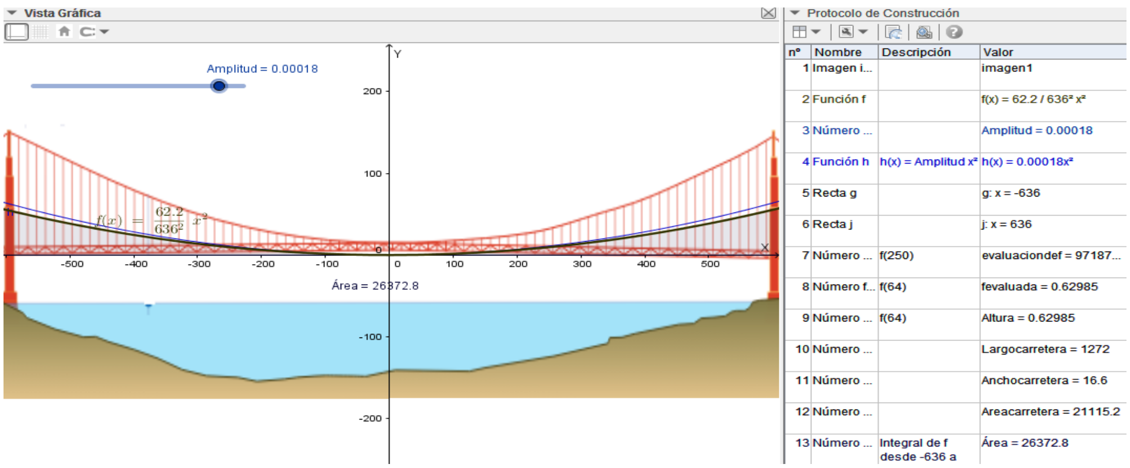


Figura 3. Modelo representado en GeoGebra y protocolo de construcción de las tareas asignadas. Desarrollo del cuarto momento del ciclo de Modelización Matemática.

Las instrucciones seguidas por los estudiantes para lograr las tareas de Conexión y de Reflexión consistieron en:

1. Introducir el modelo construido en la vista algebraica del Geogebra.
2. Generalizar la función original, en la barra de entrada, utilizando el parámetro$a$. Establecer el intervalo y el incremento del deslizador, posicionándose sobre éste: presionando clip derecho y seleccionando la opción propiedades.
3. Ajustar el deslizador teniendo en cuenta el modelo original.
4. Realizar las interpretaciones que tenían a bien lugar, una vez que simularon el fenómeno en estudio.

5. Establecer semejanzas entre el problema estudiado y su aplicación en fenómenos similares al encontrado; por ejemplo, el del puente Orinoquia sobre el río Orinoco o el ubicado sobre el Lago de Maracaibo, conocido como puente "Rafael Urdaneta".

Ejemplo 2. Comportamiento demográfico de la población de Venezuela (propuesto en el taller)

Población de Venezuela	**Demandas de tareas de reproducción, conexión y reflexión exigidas.**
La población de Venezuela durante los años del 1960 al 2010, viene dado a partir de datos, obtenidos desde la web del Instituto Nacional de Estadística de Venezuela: http://www.ine.gov.ve. Escriba un modelo de evolución de la población que mejor se ajuste de acuerdo a los datos suministrados.	1. Escriba un modelo de evolución de la población que mejor se ajuste de acuerdo a los datos suministrados. 2. Infiera las previsiones del número de habitantes de Venezuela, siguiendo el modelo construido para el año 2100, sin que varíen las condiciones iniciales del comportamiento de la población. 3. Opine sobre la tasa de crecimiento de este modelo de transición demográfica con respecto al tiempo. 4. Opine sobre el comportamiento de la población cuando t se hace suficientemente grande.

Tareas de Reproducción Desarrolladas

Copiaron la tabla de datos en la hoja de cálculo de GeoGebra. Seleccionaron los datos que adjuntaron en la hoja tabular del GeoGebra. Seguidamente en la barra de "Herramientas de análisis de datos", seleccionaron el botón "análisis de una variable" y luego seleccionaron en el sub menú que se desplegaba la opción "análisis de regresión de dos variables". Seleccionaron "Analiza". Experimentaron sobre el diagrama de dispersión el modelo de regresión que brindaba la vista "Análisis de Datos", seleccionando el modelo de regresión que consideraban apropiado. Una vez seleccionado el modelo, copiaron su representación en la vista "gráfica" y seleccionaron la vista "Álgebra y Gráficos" en cada caso. Luego, generalizaron la función original, en la barra de entrada, utilizando los parámetros a, b, c y d. Establecieron el intervalo y el incremento de cada deslizador, posicionándose sobre éstos:

presionando clip derecho y seleccionando la opción propiedades. Ajustaron los parámetros teniendo en cuenta el modelo. Representaron el protocolo de construcción seguido en el software.

Tareas de Reflexión

Realizaron las interpretaciones que tuvieron a bien lugar, una vez que simularon el fenómeno en estudio sobre el crecimiento poblacional de Venezuela partir de 1960. Analizaron e interpretaron la tasa de variación poblacional, sobre el comportamiento de la población cuando el tiempo se hacía suficientemente grande.

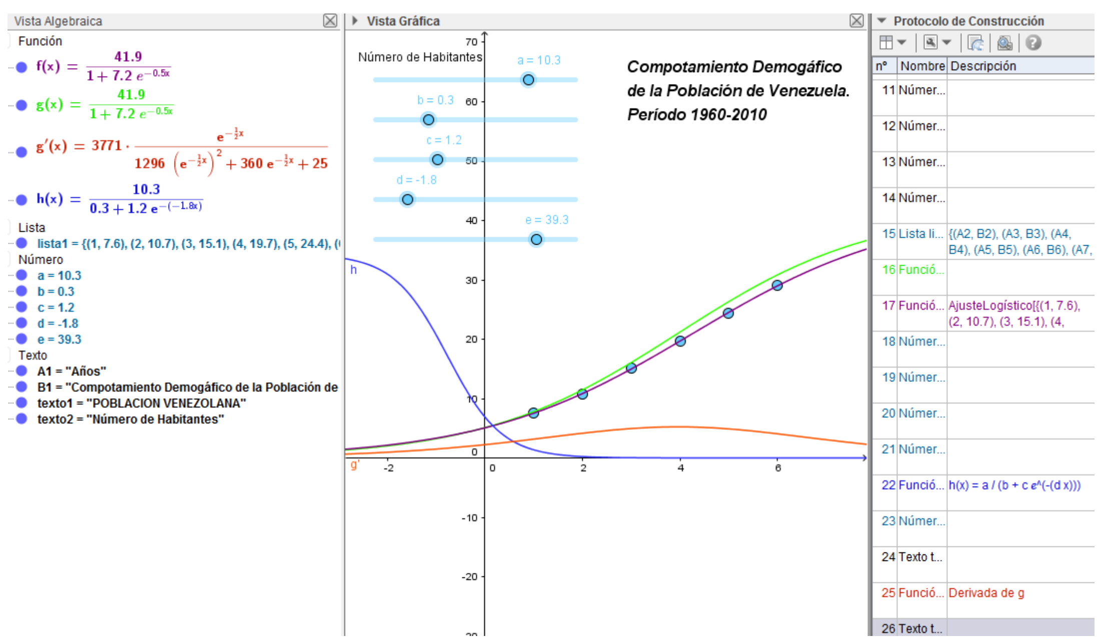


Figura 4. Desarrollo del ciclo de Modelización. Construcción del modelo sobre el comportamiento demográfico de la población de Venezuela. Período: 1960-2010. Protocolo de construcción de la tarea en GeoGebra.

Ejemplo 3. Neutralización del lodo rojo.

Neutralización del lodo rojo.	**Demandas de tareas de reproducción, conexión y reflexión exigidas.**
El Dr. Leonir Gómez, investigador de la Universidad Nacional Experimental de Guayana, estudia cómo neutralizar los componentes contaminantes (soda cáustica y partículas radioactivas, entre otros) que se encuentran en el Lodo Rojo, el cual es un material residual originado del procesamiento de obtención de la alúmina que constituye la materia prima para la obtención del aluminio en las empresas venezolanas Venalum y Alcasa. Modelos: $\%C = -0{,}0616T + 73{,}879$ $Ph = 9e^{-0.025*C} + 0{,}015 * C$	1. Represente los modelos subministrados en GeoGebra. 2. Identifique qué tipos de funciones describen los modelos que relaciona el porcentaje de coque necesario en función de la temperatura para lograr la neutralización del lodo rojo y el otro modelo que relaciona, el porcentaje de hidrógeno necesario en función de la concentración de coque para neutralizar la muestra de lodo rojo. 3. Simule en GeoGebra, el comportamiento de los dos modelos establecidos para representar este fenómeno termoquímico. 4. Interprete, de acuerdo al contexto del problema en estudio, los significados de las posibles transformaciones de los parámetros que intervienen en los modelos suministrados, cuando éstos experimentan cambios. Sugerencia: use los deslizadores que proporciona GeoGebra.

Tareas de reproducción y conexión desarrolladas

Los estudiantes realizaron las interpretaciones que tuvieron a bien lugar, una vez que simularon el fenómeno que representaron por medio del software. Presentaron el protocolo de construcción en GeoGebra.

Tareas de Reflexión Desarrolladas

Cuando aumentaban el porcentaje de Coque de Petróleo en la muestra de Lodo Rojo, analizaron qué pasaba con la Concentración de Hidrógeno, tal y como lo plantea el modelo establecido, garantizando las condiciones iniciales referidas a la temperatura a 1000 ºC. Cuando variaban la temperatura, analizaban qué ocurría con la concentración del coque depositado en el lodo rojo.

Información suministrada a los estudiantes sobre el problema a estudiar: Neutralización del Lodo Rojo

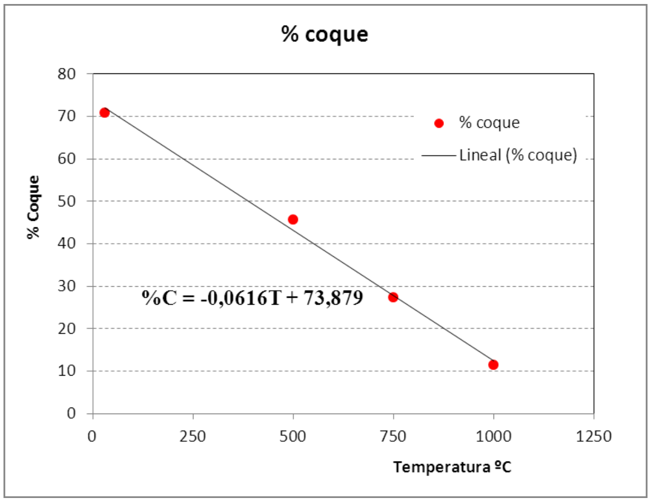


Figura 5. Modelo matemático lineal que relaciona el porcentaje de coque necesario en función de la temperatura para lograr la neutralización del lodo rojo, el cual se alcanza cuando el Ph es igual a 7.

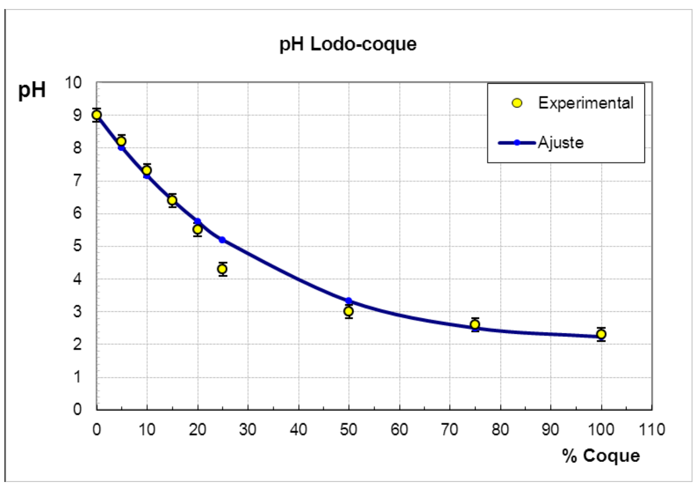


Figura 6. Potencial de hidrógeno en función de la concentración de coque en el lodo rojo una vez tratado a 1000 ºC

El modelo matemático en este caso es el siguiente: $\boldsymbol{Ph = 9e^{-0.025*C} + 0,015 * C}$

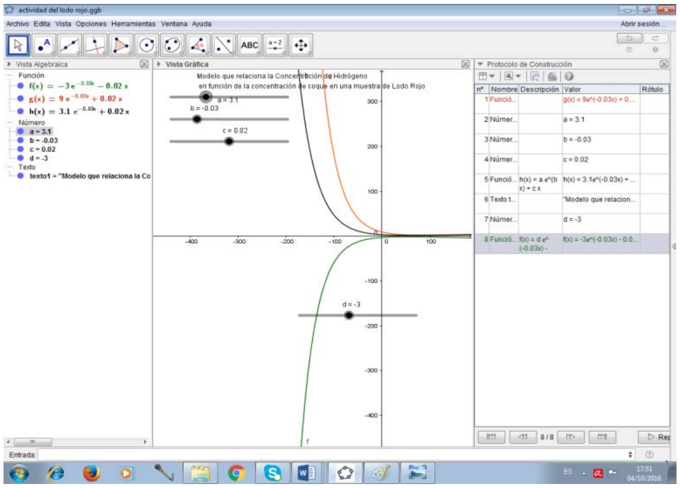


Figura 7. Interpretación del modelo sobre la neutralización del Lodo Rojo. Protocolo de construcción de la tarea en GeoGebra

Figura 8 .Sesión Práctica en el Laboratorio Limpro de la UNEG. Sede Villa Asia.

Puerto Ordaz. Venezuela.

Ejemplo 4
Problema sobre funciones

Problema propuesto a los estudiantes. Considere el modelo representado por la función *f*, definida mediante: $f(x) = 4cos\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right)$	**Tareas de reproducción, de conexión y reflexión desarrolladas por los estudiantes (cognitivas y de contenido)** 1. Determine, con ayuda de la vista gráfica, algebraica y de las herramientas que dispone el GeoGebra, el dominio y el rango de f. 2. Halle las asíntotas horizontales y verticales (si existen), la amplitud, traslaciones y posibles reflexiones de f. 3. Encuentre la inversa de f, si existe. 4. En caso de existir la función inversa de *f*, verifique que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y que $(f \circ f^{-1})(x) = x$. 5. Trace, simultáneamente, la gráfica de f y su inversa f^{-1} en la vista gráfica del GeoGebra.

Esta tarea ayudó a que los estudiantes consolidaran las funciones como modelos sobre los que hay que actuar en el ámbito matemático. En ese sentido, los estudiantes se enfrentaron a la realización de tareas de composición de funciones, específicamente lo relacionado con la caracterización de la función inversa. Una de las dificultades presentadas estuvo relacionada con las restricciones a tomar en f para lograr obtener una función invertible (biyectiva). Finalmente, se obtuvo:

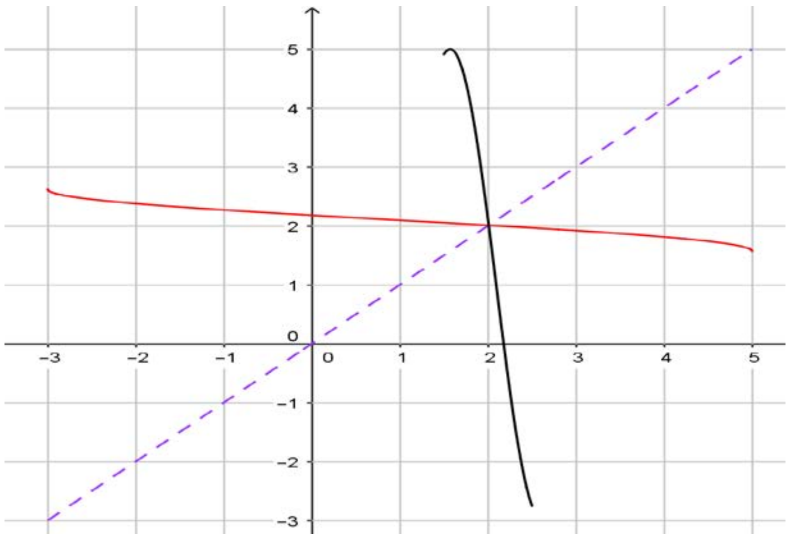


Figura 9. Representación gráfica en GeoGebra de la restricción de *f* y su inversa.

Dificultades cognitivas de los estudiantes en el estudio.

1. Confusión de objetos matemáticos: Algunos participantes no identificaron la relación existente entre la variable dependiente e independiente a partir del enunciado del fenómeno estudiado.
2. Se evidenció en ciertos momentos un mal manejo de las escalas numéricas que se utilizaban para representar las variables.
3. En ocasiones hubo una errada interpretación del comportamiento de la función que representaba el fenómeno.

4. Se observó confusión en algunos estudiantes para identificar la forma analítica de las funciones trabajadas.
5. Algunos estudiantes no realizaron las debidas restricciones del dominio de la función dada para hallar la función inversa de ésta. En consecuencia, determinaron de manera incorrecta el dominio de la función inversa, que no reconocieron ni en la representación gráfica de ésta.

Conclusiones y recomendaciones

Los estudiantes comprendieron definiciones matemáticas; tales como, la definición de función real, la expresión matemática que representa a las funciones polinómicas, exponenciales y trigonométricas; además de vincularlas con sus gráficos correspondientes. Este aprendizaje se logró con el apoyo del GeoGebra y el desarrollo de las tareas de modelización matemática propuestas.

En virtud de ello, los tipos de tareas de modelización matemática que se sugiere diseñar a los docentes, para que los alumnos consoliden sus conocimientos sobre funciones, son aquellas que consideran las tareas de reproducción, de conexión y sobre todo de reflexión consideradas por PISA y expuestas en Rico (2005). Las tareas de reproducción y de relación se trabajaron sin mayor dificultad, ya que los estudiantes se veían familiarizados con estos tipos de demandas de tareas; sin embargo, para lograr que los estudiantes realizaran las tareas de reflexión, por su mayor grado de exigencia y complejidad, aunado a la poca frecuencia en la práctica docente diaria, la instrucción tuvo que ser más guiada: Por ejemplo, para tomar decisiones del comportamiento de la población de Venezuela, según el modelo construido, cuando el tiempo era suficientemente grande, el acompañamiento debía ser mayor por parte del docente para lograr precisión en la respuesta y el discernimiento en la toma de decisiones, y de esta manera alcanzar efectividad y calidad en la argumentación de sus conclusiones.

Por consiguiente, se sostiene que las tareas asignadas deben motivar a los estudiantes a regularizar en su proceso de construcción del conocimiento matemático, la creación de conjeturas, su verificación o rechazo, la toma de decisiones, entre otros procesos de diseño planteado por Krick (1995), Cruz (2005) y más en general, las competencias de modelización matemática que establece Maaß (2006); que no son más que familiarizarse desde los primeros semestres, con algunas de las competencias profesionales y laborales que exige su perfil como futuro ingeniero.

Los estudiantes pudieron aplicar modelización matemática y simularon el comportamiento de fenómenos contextualizados, mediante la variación de los parámetros presentes en los modelos construidos; donde formaron familias de funciones que representaban la relación funcional, partiendo de la interpretación del fenómeno del mundo real a la aplicación matemática y viceversa.

Además, pudieron hacer la distinción entre el significado de una variable y un parámetro. Ellos procedieron a evaluar una función en un punto. Por otra parte, crearon deslizadores en GeoGebra para asignar intervalos cerrados cercanos a los valores de los parámetros que contenía el modelo, para visualizar de manera interactiva en el software las traslaciones, deformaciones y/o reflexiones que modificaban la posición o forma de la función a medida que variaba el parámetro en ese conjunto de valores asociados, para su posterior interpretación de acuerdo al fenómeno en estudio.

La modelización matemática contribuyó a que los estudiantes aplicaran los conocimientos matemáticos que poseían sobre funciones reales, los cuales vieron su concreción en el estudio de los fenómenos abordados; por ejemplo, cuando sintetizaron el modelo que describía la situación problemática, o al lograr analizar, modelar y simular fenómenos similares al planteado inicialmente, pero en contextos diferentes. En este sentido, el proceso de modelización conllevó a los estudiantes a repensar el modelo construido, a pasearse por varias alternativas de solución, e interpretar el comportamiento de las variables, incluso el de otros casos semejantes.

Los estudiantes pudieron explicar y representar propiedades características de las relaciones funcionales. Primero identificaron elementos conceptuales inmersos en la definición de las funciones; tales como: la amplitud de la curva, el dominio y el rango. Continuando con las relaciones referidas al pensamiento variacional: traslaciones horizontales y/o verticales, deformaciones (dilataciones o contracciones), reflexiones con los ejes coordenados, simetrías, derivada de la función, entre otros.

La interpretación de las posibles transformaciones que afectaban los parámetros inmersos en los modelos matemáticos estudiados, tienen cabida desde el estudio del pensamiento variacional; donde el foco de interés se basó en el análisis y la apreciación de los elementos conceptuales característicos de las funciones.

Los estudiantes conocieron del comportamiento de fenómenos abordados del mundo real. Dentro de éstos se mencionan: las transiciones demográficas de poblaciones de algunos Estados de Venezuela, países del Continente Asiático y del mundo, las inversiones en materia de exportaciones e importaciones de Venezuela de varios rubros, la producción de petróleo en Venezuela del año 1960 hasta el 2015, algunas relaciones trigonométricas entre los elementos constitutivos de los puentes sobre el río Orinoco ubicados en el Estado Bolívar: el puente de Angostura y el puente Orinoquia.

Se logró constatar que la modelización matemática, como estrategia de enseñanza, favorece los procesos de aprendizaje; tales como explicar y representar cualidades propias de los fenómenos estudiados, modelar una serie de escenarios donde los estudiantes emplean los conocimientos matemáticos, lo validan y lo generalizan de formas muy particulares. De este modo, la aplicación de la modelización matemática buscó incentivar al estudiante a experimentar, reflexionar, analizar, plantearse hipótesis, establecer conjeturas, tomar decisiones, construir el modelo matemático que representaría el fenómeno en estudio, validarlo y llevarlo a otros contextos, es decir, buscar generalizar los resultados y conclusiones.

Tanto en las secciones de clases, como en el material entregado por los estudiantes, contentivos de la resolución de sus tareas de modelización, se pudo evidenciar el desarrollo de cada una de las fases que plantea el ciclo de modelización matemática; desde la óptica de la modelización explícita, implícita y crítica (Araujo, 2009).

En el estudio de Gómez (2016) se aplicó la modelización explícita por tratarse de un modelo muy particular, referido a la neutralización de los componentes contaminantes que se encuentran en el Lodo Rojo, el cual es un material residual, acumulado alrededor de las industrias básicas de Ciudad Guayana, producto de los procesos metalmecánicos que se realizan en Venalum, Bauxilum y Alcasa para el procesamiento del aluminio. Este proceso de neutralización se logra mediante la inducción de reacciones con el coque de petróleo, con el fin de desarrollar nuevos materiales híbridos con características adecuadas para el beneficio de la sociedad, lo que conlleva a contribuir con la conservación del medio ambiente en zonas afectadas por la actividad industrial.

De esta investigación se obtienen dos modelos interesantes que se trabajaron en las sesiones de clases. Se trató de un modelo lineal que relaciona la temperatura con el Ph del hidrógeno y un segundo modelo conformado por la adición de un exponencial y lineal, donde interviene el potencial de hidrógeno en función de la concentración de coque en el lodo rojo.

En definitiva, la modelización matemática es una estrategia de enseñanza que favorece el desarrollo de los procesos de aprendizaje e impulsa el logro de competencias matemáticas, al hacer uso de varios sistemas de representación en la resolución de problemas contextualizados con ayuda del GeoGebra. En función de esto, a continuación se mencionan los logros alcanzados al aplicar la modelización matemática con la integración del GeoGebra.

Competencia de Pensar y razonar:

En su mayoría los alumnos reconocieron las variables independientes y dependientes al analizar la gráfica de una función. Sin embargo, algunos estudiantes mostraron errores para identificar la relación adecuada entre las variables desde el enunciado del problema, sobre todo al solicitarles que compararan comportamientos de fenómenos similares. Determinaron la amplitud de curvas, traslaciones, dilataciones o contracciones y las posibles reflexiones correspondientes a las funciones en estudio. Reconocieron la representación gráfica de una función, según su expresión analítica. Asignaron valores a los parámetros y visualizaron las familias de funciones generadas a partir del modelo básico en el GeoGebra.

Argumentar y representar

Los estudiantes tradujeron información entre distintos sistemas de representación. Justificaron la escogencia del modelo que mejor se ajustaba a los datos representados. Validaron los modelos matemáticos construidos en GeoGebra.

Modelar

Representaron un problema del mundo real en términos matemáticos, es decir, modelaron la realidad, a través de entes matemáticos. Compararon los modelos matemáticos de fenómenos similares. Aplicaron la modelación matemática para el estudio de nuevos fenómenos en otros contextos.

Comunicar

Interpretaron el comportamiento de ciertas gráficas y lo discutieron con sus compañeros de grupo. Interpretaron y expresaron el significado de las transformaciones de los parámetros que intervenían en el modelo. Mostraron sus resultados al grupo mediante el uso del GeoGebra. Utilizaron los sistemas de representación gráfica para hacerse entender. Concluyeron críticamente en base a sus resultados.

Usar herramientas y recursos

Manejaron diversos sistemas de representación de funciones en las vistas del GeoGebra. Usaron herramientas de comandos y funciones que tiene el software para el estudio general de las funciones reales de variable real. Los elementos conceptuales característicos de cada tipo de función estudiada, se visualizaron en la vista algebraica y geométrica, de manera simultánea, tal y como, lo permite el Geogebra.

Utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico

Manejaron un lenguaje coloquial y un lenguaje técnico. Es decir, lograron comunicar ideas matemáticas con cierta precisión. De este modo, el desarrollo del ciclo de modelización matemática ejecutado por los estudiantes durante cada sesión de clases sirvió para consolidar las competencias PISA, antes mencionadas; así como las competencias específicas de la modelización matemática, propuestas por Maaß (2006).

El aprendizaje de funciones con el software dinámico GeoGebra, permitió observar la satisfacción que expresaban los estudiantes, cuando visualizaban cómo se movían los objetos matemáticos cuando realizaban su animación, lo que propició una buena disposición para el trabajo en equipo y el interés por aprender sobre las funciones reales.

El análisis y la reflexión que se dio, al mover los parámetros presentes en los modelos construidos que sintetizaban el comportamiento de fenómenos, lo cual permitió crear conjeturas sobre situaciones matemáticas; además de identificar patrones de comportamientos en la solución de los problemas abordados. En consecuencia, se reafirma lo expuesto por Villa (2016), quien señala que el uso del software dinámico para recrear el comportamiento de un sistema se hace fundamental para la experimentación, formulación y validación de conjeturas.

En definitiva, la modelización matemática asistida con GeoGebra, fomentó la capacidad para mantener el interés en la formación del ingeniero, la cual es ineludible en virtud del avance vertiginoso de la ciencia y la tecnológica, quienes dejan en poco tiempo, obsoletos los equipos y los procedimientos en que se apoyan sus grandes tareas como profesionales.

En base a todo lo anterior, se resalta la necesidad de usar la tecnología en el aula de clases, pues las bondades que ésta ofrece, proporcionan un apoyo invaluable en el establecimiento de estructuras de análisis desde diversos escenarios según datos iniciales, dimensiones del pensamiento matemático y disposición, incluso en la web. Así mismo, el uso del GeoGebra permitió el desarrollo de procesos matemáticos señalados anteriormente y la disposición de múltiples rutas de comprobación de los resultados desde los modelos construidos.

Referencias

Araujo, J. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 25-68.

Blum, W., Houston, K. y Qi-Yuan, J. (Eds.) (2003). *Mathematical Modelling in Education and Culture* (ICTMA 10). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Guerreiro, C. (1998). *Cálculo I*. Caracas: Ediciones Innovación Tecnológica.

Cruz, C. (2005). *Aportes de la matemática en la información, capacitación y formación del ingeniero*. Conferencia presentada en los foros de ciencia y tecnología. Universidad nacional Experimental de Guayana. Puerto Ordaz. Venezuela.

Cruz, C. (2010). La enseñanza de la modelación matemática en ingeniería. *Revista de la Facultad de Ingeniería* U.C.V., 25(3), 39–46.

Gómez, L. (2016). *Aplicaciones del Lodo Rojo*. (Trabajo de ascenso). Universidad Nacional Experimental de Guayana. Ciudad Guayana, Venezuela.

Krick, E. (1995). *Introducción a la ingeniería y al diseño en la ingeniería*. México: Limusa/Noriega Editores.

Lesh, R., Galbraith, P., Haines, C. y Hurford (2010). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. (ICTMA 13). New York, USA: Springer.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 38*(*2), 113-142.*

Martínez, M. (1999). *La investigación cualitativa etnográfica en educación* (Tercera edición). México: Trillas.

McCombs, B.L. (1998). Integrating Metacognition, Affect, and Motivation in Improving Teacher Education. En B.L. McCombs y N. Lambert (Eds.), *How Students Learn: Reforming Schools through Learner-Centered Education*. Washington, DC: American Psychological Association.

Mendible, A. y Ortiz, J. (2007). Modelización Matemática en la Formación de Ingenieros. La Importancia del Contexto. *Enseñanza de la Matemática.* Número Extraordinario, 12(16), 133-150.

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*, (pp. 3-32)) (The 14th ICMI Study).. New York: Springer.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación*. (Tesis doctoral). Granada: Universidad de Granada. Recuperado: http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/5500/descargar/.

Puig, L. y Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. Comunicación presentada en las VIII Jornadas d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana. Disponible en línea en: http://www.uv.es/puigl/jornadas_al-kh_2008.pdf.

Purcell, E. y Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). *Cálculo con Geometría Analítica*. (Novena Edición), México: Pearson Educación.

Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En Fundación Santillana (Ed.), *La enseñanza de las matemáticas y el informe PISA*, (pp. 21-40). Madrid: Santillana.

Villa, J. (2016). *Modelación en Educación Matemática. Experiencias con futuros profesores.* Red colombiana de modelación en educación matemática. Universidad de Antioquia. Material de conferencia. Recuperado: www.funes.uniandes.edu.co.

Webgrafía

Artigue, M. (2016). Videoconferencia en línea: en http://youtu.be/cK5mZL3i_lQ?a vía @YouTube.

Comisión Nacional de Telecomunicaciones (CONATEL). Sitio web disponible en: www.conatel.gob.ve.

Instituto Nacional de Estadística (INE). Sitio web disponible en: http://www.ine.gov.ve

Noticieros en la web: http://www.telesurtv.net.

Servicio Nacional Integrado de Administración Aduanera y Tributaria (SENIAT). Sitio web disponible en: www.seniat.gob.ve.

María Elena Bejarano Arias:

María Elena Bejarano Arias. Licenciada en Educación. Magíster en Ciencias de la Educación, mención Enseñanza de las Matemáticas, de la Universidad Nacional Experimental de Guayana. Candidata a Doctora en el Programa Doctoral en Educación Matemática, Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Docente Investigadora en Educación Matemática, Universidad Nacional Experimental de Guayana.

José Ortiz Buitrago:

Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada, España. Investigador en el área de TIC y Educación matemática, con publicación de artículos científicos en revistas de impacto nacional e internacional. Actualmente es profesor de matemática en la Universidad de Carabobo, Campus La Morita; además, se desempeña como coordinador del Seminario Permanente de Investigación de la Unidad de Investigación del Ciclo Básico (UICB).